Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра автоматики и автоматизации
производственных процессов

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ»

Методические указания,
пояснения и примеры решения
для студентов всех специальностей

Санкт-Петербург 2006

УДК 389

Усачев Ю.А. Домашние задания по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация»: Метод. указания, пояснения и примеры решения для студентов всех спец. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2006. – 37 с.

Приведены условия задач, а также пояснения, рекомендации и примеры решения задач.

Рецензент
Доцент М.М. Данина

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом уни-верситета

ВВЕДЕНИЕ

Домашние задания (ДЗ) выполняют для закрепления теоретического материала и приобретения навыков самостоятельного решения различных измерительных задач.

Задачи сгруппированы по трем темам:

1. Оценка погрешности приближенных чисел, предельная погрешность, согласование записи приближенного значения результатов измерения и погрешности, с которой этот результат получен (ДЗ № 1).

2. Погрешность многократных результатов измерений (ДЗ № 2);

3. Погрешность косвенных измерений, определение допустимой погрешности прибора по условному обозначению класса точности на его шкале, выбор прибора по точности (ДЗ № 3).

Тексты задач по всем названным темам приведены в разд. «Условия задач» данных методических указаний.

Программы дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация» и количество часов, отводимых на ее изучение, различаются для разных специальностей. По этой причине количество и содержание домашних заданий также различаются.

В табл. 1 указаны количество и номера домашних заданий, выполняемых студентами соответствующих специальностей, а в табл. 2 – номера задач, входящих в эти задания.

Таблица 1

№ пп	Специальность	Код специальности	Количество домашних заданий	Номера домашних заданий
1	Специальности холодильного факультета, факультета криогенной техники и кондиционирования, а также специальности 210200 и 320700	I	3	1, 2 и 3
2	Все специальности факультета пищевых технологий	II	2	2 и 3
3	Все специальности факультета техники пищевых производств, кроме специальностей 210200 и 320700	III	1	3*

*Домашнее задание представляет собой комбинацию задач второй и третьей тем.

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="3">Код специальности</th><th colspan="13">Номера задач</th></tr>
<tr><th rowspan="2">ДЗ № 1</th><th colspan="2">ДЗ № 2 (последняя цифра зачетной книжки)</th><th colspan="10">ДЗ № 3 (последняя цифра номера зачетной книжки)</th></tr>
<tr><th>Четная</th><th>Нечетная</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr>
<tr><td>I</td><td>1.3
1.5
1.6
1.8</td><td>2.1
2.2
2.5</td><td>2.1
2.3
2.4</td><td>3.3
3.6
3.30</td><td>3.4
3.8
3.36</td><td>3.2
3.5
3.28</td><td>3.10
3.35
3.27</td><td>3.11
3.29
3.26</td><td>3.16
3.33
3.25</td><td>3.17
3.34
3.24</td><td>3.18
3.8
3.23</td><td>3.19
3.1
3.21</td><td>3.9
3.20
3.22</td></tr>
<tr><td>II</td><td>–</td><td>2.1
2.2
2.5</td><td>2.1
2.3
2.6</td><td>3.1
3.5
3.21</td><td>3.10
3.6
3.22</td><td>3.11
3.7
3.23</td><td>3.12
3.8
3.24</td><td>3.13
3.35
3.25</td><td>3.14
3.2
3.26</td><td>3.16
3.33
3.27</td><td>3.20
3.31
3.28</td><td>3.18
3.32
3.29</td><td>3.17
3.15
3.30</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III</td><td rowspan="2">–</td><td rowspan="2" colspan="2">–</td><td colspan="10">ДЗ № 3*</td></tr>
<tr><td>2.2
3.16
3.21
3.30</td><td>2.3
3.20
3.22
3.29</td><td>3.16
2.2
3.23
3.28</td><td>3.17
2.3
3.24
3.26</td><td>3.18
2.2
3.25
3.27</td><td>3.14
2.3
3.26
3.28</td><td>3.20
2.2
3.27
3.24</td><td>3.17
2.3
3.30
3.23</td><td>3.18
2.2
3.28
3.22</td><td>3.19
2.3
3.29
3.21</td></tr>
</table>

В прил. 1–3 приведены основные формулы, пояснения и примеры решения некоторых задач. Номер приложения соответствует указанной теме.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Домашнее задание № 1

Численные значения буквенных обозначений приведены в табл. 1.1–1.4.

1.1. Точное значение числа $A = 28674766$. При необходимости округления с сохранением трех старших разрядов один из операторов записал результат в виде $a = 28700000$, второй – $a = 287 \cdot 10^5$. Какая форма записи неправильная и почему?

1.2. Найти абсолютную и относительную погрешности округления (для обоих вариантов округления) числа, приведенного в задаче 1.1, если неизвестно точное значение числа A.

1.3. Найти массу смеси M и предельную абсолютную погрешность найденного значения массы, если смесь состоит из пяти компонентов, массы которых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, а погрешности взвешивания $\delta_{1\ldots}\delta_5$ соответственно.

1.4. Для массы смеси, приведенной в задаче 1.3, указать пределы a и b, в которых будет находиться предельная относительная погрешность найденного значения M: $a > \delta_{пр} > b$.

1.5. Для определения объема металлической пластины прямоугольного сечения получили следующие значения измерений: a, b, c. Вычислить объем и предельную абсолютную погрешность результата.

1.6. Вычислить массу металлической пластины, приведенной в задаче 1.5, и предельную абсолютную погрешность результата, если плотность материала пластины $\rho = 7248$ кг/м^3.

1.7. Бинарная смесь основного продукта имеет массу M_1. Количество примеси нашли как разность $M_{прим} = M_1 - M_2$, где M_2 – масса исходного продукта после испарения примеси (температура кипения примеси ниже температуры кипения основного продукта). Найти массовую долю примеси, абсолютную и относительную погрешности ее определения, если погрешности взвешивания составляют ΔM_1 и ΔM_2 грамм.

1.8. Результат расчета представлен двумя цифрами ($A =\ldots$; $B =\ldots$). Округлить каждый полученный результат: вначале до одной значащей цифры, потом до двух значащих цифр. Найти относительную погрешность каждого округления, сравнить их и сделать выводы.

Номер варианта соответствует <u>последней</u> цифре номера зачетной книжки (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

№ варианта	m_1, г	m_2, г	m_3, г	m_4, г	m_5, г	a, см	b, см	c, см	$\rho/10^3$, кг/м^3	M_1, г	M_2, г
0	6,76	1478	0,53	20,1	18,3	202,8	130,5	0,83	2,7	10,12	8,15
1	15,73	2345	0,67	40,2	22,4	310,2	115,6	0,75	8,7	11,15	9,17
2	288,1	0,68	3070	17,6	30,7	212,7	125,4	0,88	7,88	9,85	8,31
3	4416	7,34	0,88	34,7	16,5	305,4	108,3	0,84	8,88	12,34	10,86
4	8,33	3406	0,76	51,1	17,7	230,5	122,2	0,77	8,93	11,84	10,26
5	26,3	2842	0,57	5,42	32,6	250,6	112,4	0,81	8,9	10,33	9,84
6	146,4	9,18	2554	18,7	15,54	260,7	105,6	0,76	7,75	10,56	9,66
7	442	1667	8,17	0,66	28,8	265,8	117,5	0,85	7	11,1	9,82
8	360,4	1885	11,42	0,73	32,6	272,3	120,4	0,78	2,79	11,5	10,11
9	257,8	2036	13,48	0,55	37,1	284,4	128,6	0,79	8,6	10,65	8,95

Номер варианта соответствует <u>предпоследней</u> цифре номера зачетной книжки (см. табл. 1.2).

Таблица 1.2

№ варианта	δm_1, %	δm_2, %	δm_3, %	δm_4, %	δm_5, %	δa, %	δb, %	δc, %	$\Delta\rho$, %	ΔM_1, г	ΔM_2, г
0	1,2	1,4	4,1	0,62	0,76	5	0,58	1,8	2,0	0,05	0,07
1	2,6	2,7	3,7	0,83	5,1	1,1	2,1	3,3	3,0	0,06	0,08
2	3	0,45	2,8	0,57	2,2	2,5	3,2	4,4	2,2	0,04	0,03
3	4	1,7	0,85	3,3	3,7	3,5	4,3	5,1	2,4	0,07	0,08
4	1,3	3,2	0,57	2,2	6	1,7	3,4	2,4	2,7	0,03	0,07
5	3,5	1,6	0,68	1,4	3,8	4,3	2,2	6,2	2,8	0,09	0,06
6	0,7	3,4	3,3	0,8	0,9	1,7	3,7	1,2	2,5	0,1	0,04
7	0,8	1,8	1,45	5	4,1	3,8	4,6	0,8	2,6	0,05	0,06
8	4,2	3,4	0,88	8	2,8	2,9	2,4	0,9	1,5	0,03	0,05
9	3,2	2,3	1,7	0,7	3,4	0,69	1,7	1,5	5	0,08	0,07

Таблица 1.3

	Последняя цифра номера зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,139	0,149	0,148	0,138	0,129	0,128	0,127	0,147	0,146	0,145

Таблица 1.4

	Предпоследняя цифра номера зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	0,839	0,749	0,848	0,838	0,929	0,928	0,927	0,947	0,946	0,945

Домашнее задание № 2

2.1. Для исследования износа шейки коленчатого вала провели n замеров (табл. 2.1) его диаметра микрометром 1-го класса точности, имеющим $\Delta = \pm 4$ мкм. Массив результатов измерений диаметра в миллиметрах приведен в табл. 2.2. Обработать результаты этих многократных измерений в соответствии с рекомендациями ГОСТ 8.207–76 и представить результаты измерений в форме $D = B \pm \Delta$, $p = 0,95$.

Таблица 2.1

	Третья от конца цифра номера зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	15			17		19			20	

Пояснения и рекомендации к задаче 2.1

1. Из общего массива данных, приведенных в табл. 2.2, каждый студент находит свой вариант результатов наблюдений следующим образом: находит первое число на пересечении строки и столбца таблицы, соответствующих последней и предпоследней цифрам зачетной книжки, а последующие цифры выборки объема n берет, переходя к следующим столбцам этой строки с переходом на последующие строки. Например: номер зачетной книжки 3488, выборка объема $n = 17$ будет состоять из следующих результатов измерений: 56,586; 56,588; 56,590; 56,607; 56,590; 56,593; 56,588; 56,597; 56,602; 56,592; 56,598; 56,597; (далее переход на строку “0”) 56,601; 56,593; 56,597; 56,603; 56,597.

Таблица 2.2

Последняя цифра зачетной книжки											
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
56,580	56,586	56,587	56,593	56,586	56,576	56,592	56,587	56,582	56,588	0	Предпоследняя цифра зачетной книжки
56,601	56,585	56,608	56,592	56,588	56,587	56,597	56,608	56,578	56,562	1	
56,557	56,577	56,593	56,588	56,597	56,581	56,589	56,593	56,606	56,592	2	
56,556	56,609	56,602	56,612	56,555	56,602	56,541	56,602	56,555	56,628	3	
56,596	56,591	56,588	56,505	56,592	56,556	56,601	56,588	56,546	56,606	4	
56,555	56,580	56,6077	56,602	56,617	56,558	56,597	56,607	56,608	56,555	5	
56,591	56,588	56,605	56,555	56,588	56,596	56,558	56,605	56,591	56,596	6	
56,579	56,606	56,597	56,602	56,582	56,554	56,607	56,597	56,562	56,608	7	
56,606	56,586	56,588	56,590	56,607	56,590	56,593	56,588	56,597	56,602	8	
56,592	56,598	56,597	56,601	56,593	56,597	56,603	56,597	56,603	56,577	9	

2. Для проверки грубых промахов необходимо воспользоваться критерием Романовского, суть которого состоит в сравнении экспериментального значения величины $\beta_э = \left|\dfrac{\bar{x} - x_i}{\sigma(x)}\right|$ с теоретическим значением $\beta_т$, приведенным в табл. 2.3: n – объем выборки; α – уровень значимости, численно равный вероятности совершить ошибку первого рода, т. е. правильную гипотезу забраковать (обычно принимают $\alpha = 0{,}01 \div 0{,}05$, или от 1 до 5 %). Если $\beta_э \geq \beta_т$ при $\alpha = 1$ %, то сомнительный результат x_i отбрасывают; если $\beta_э \leq \beta_т$ при $\alpha = 5$ %, то x_i принадлежит рассматриваемому множеству, т. е. не отбрасывается. В промежуточных вариантах результат считается сомнительным (из дальнейшего расчета не исключается).

Таблица 2.3

Уровень значимости α, %	$\beta_т$							
	$n = 4$	$n = 6$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 15$	$n = 17$	$n = 19$	$n = 20$
1	1,73	2,16	2,62	2,75	2,9	2,97	3,04	3,05
2	1,72	2,13	2,54	2,66	2,80	2,86	2,93	2,96
5	1,71	2,10	2,41	2,52	2,64	2,71	2,76	2,78

3. Если систематическую погрешность не удалось исключить, а погрешность прибора, указанная в паспорте, не разделена на систематическую и случайную составляющие, например $\Delta = \pm 23$ мг, то границу систематической составляющей погрешности результата измерения принимают равной $\pm\Delta$.

4. Нормальность закона распределения результатов измерений диаметра вала можно проверить, используя правило трех сигм.

2.2. Проведено n измерений напряжения электрической цепи и найдены значения $\bar{u} = 18{,}56$ В, $\sigma(u) = 0{,}33$ В; закон распределения случайной погрешности – нормальный. Систематическая погрешность исключена до начала измерений. Найти границы доверительного интервала с вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Число измерений n и значение коэффициента t_{γ} распределения Стьюдента приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	4	5	6	7	10	15	17	19	20	25
t_γ	3,182	2,776	2,571	2,447	2,662	2,145	2,120	2,10	2,093	2,064

2.3. Сколько измерений необходимо сделать с помощью прибора, имеющего случайную погрешность $\sigma(x) = k$, чтобы при доверительной вероятности $\gamma = c$ границы доверительного интервала не превышали $\Delta = \pm 0{,}1$ мм. Значения k и c приведены в табл. 2.5 и 2.6.

Таблица 2.5

	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k, мм	0,45	0,39	0,41	0,38	0,35	0,46	0,48	0,43	0,37	0,36

Таблица 2.6

	Предпоследняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma = c$	0,90	0,918	0,92	0,94	0,95	0,96	0,972	0,978	0,984	0,99

В табл. 2.7 приведен фрагмент значений функции Лапласа $\Phi(t)$; в табл. 2.8 – фрагмент таблицы коэффициента t_γ распределения Стьюдента.

Таблица 2.7

$\Phi(t)$	0,450	0,459	0,460	0,470	0,475	0,480	0,486	0,489	0,492	0,495
t	1,65	1,74	1,75	1,88	1,96	2,06	2,20	2,30	2,40	2,58

Таблица 2.8

Число измерений	Доверительная вероятность γ				
	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
5	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
7	1,44	1,96	2,45	3,14	3,71
10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85

2.4. Границы доверительного интервала измерения не должны превышать $\Delta = \pm 0{,}15$ мм с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$. С какой случайной погрешностью необходимо взять прибор, чтобы эти условия удовлетворялись при числе измерений $n = 6$?

2.5. Как изменятся границы доверительного интервала, найденные при решении задачи 2.2, если значение доверительной вероятности $\gamma = 0{,}90$.

2.6. Произведено 7 измерений массы осадка химической реакции и найдены значения $\bar{x} = 4{,}53$ г и СКО $\sigma(x) = A$ г. Найти значения вероятности γ, с которой доверительный интервал с границами Δ накроет истинное значение измеряемой массы. Систематическая погрешность исключена. Значения A и Δ приведены в табл. 2.9 и 2.10.

Таблица 2.9

	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A, г	0,4	0,5	0,42	0,45	0,37	0,35	0,27	0,28	0,29	0,3

Таблица 2.10

	Предпоследняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ, г	0,35	0,36	0,37	0,31	0,32	0,33	0,34	0,3	0,29	0,28

Домашнее задание № 3 (3*)

3.1. Плотность жидких сред (машинное масло, майонез, томатная паста) определялась пикнометрическим методом. Для этого было произведено три взвешивания на лабораторных весах с погрешностью $\pm\Delta$ мг и найдена масса:

1) пустого пикнометра m_1;

2) пикнометра, заполненного дистиллированной водой m_2;

3) пикнометра, заполненного исследуемой жидкостью m_3.

Все измерения производят при температуре $t = 20$ °С, в этом случае плотность продукта (кг/м^3) можно определить по формуле

$$\rho_t = \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}(\rho_0 - \rho_b) + \rho_b,$$

где ρ_0, ρ_b – плотность дистиллированной воды и воздуха при температуре t.

Найти плотность исследуемого продукта ρ_t и погрешность, с которой этот результат получен.

Значения m_i и Δ приведены в табл. 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

m_i, г	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1	22,679	23,541	24,642	23,017	25,113	31,142	30,832	28,117	29,016	32,482
m_2	47,684	48,633	49,270	48,554	47,601	56,001	55,348	50,266	51,993	57,563
m_3	51,265	52,334	54,282	53,199	55,434	62,180	62,017	55,243	56,784	62,147

Таблица 3.2

	Предпоследняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δm, мг	3	2	4	13	5	6	10	7	12	1

3.2. Плотность нового материала (сплава, теплоизоляции и т. п.) определялась пикнометрическим методом. Для этого было произведено три взвешивания:

1) исследуемого образца в воздухе m_1;

2) пикнометра, наполненного дистиллированной водой m_2;

3) пикнометра, наполненного той же жидкостью с погруженным в нее телом m_3.

Вода в обоих случаях наполняется до одной и той же отметки; все взвешивания производят при одной и той же температуре t = 20 °C на лабораторных весах, имеющих погрешность $\pm\Delta$.

Плотность тела при этой температуре находят из следующего выражения:

$$\rho_t = \frac{m_1(\rho_0 - \rho_b)}{m_1 + m_2 - m_3} + \rho_b,$$

где ρ_0, ρ_b – плотность воды и воздуха при температуре t.

Найти плотность материала ρ_t и погрешность, с которой этот результат получен $\Delta\rho_t$. Значения m_i и Δ приведены в табл. 3.3 и 3.2.

Таблица 3.3

m_i, г	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1	25,213	28,125	40,164	29,016	33,482	29,106	36,516	52,860	31,192	43,016
m_2	20,315	21,153	20,513	20,449	21,282	20,814	20,223	20,689	20,773	20,552
m_3	32,146	35,012	54,804	38,711	44,761	38,515	45,812	61,447	42,636	33,116

3.3. Плотность газа определялась пикнометрическим методом. Для этого было произведено три взвешивания пикнометра на лабораторных весах, имеющих погрешность ±Δ, и найдена масса:

1) пикнометра с сухим воздухом m_1;
2) пикнометра с дистиллированной водой m_2;
3) пикнометра с сухим исследуемым газом m_3.

Вода, воздух и газ находились при температуре t = 20 °С.

Плотность газа при температуре t была определена по формуле

$$\rho_t = \frac{|m_3 - m_1|}{m_2 - m_1}(\rho_0 - \rho_b) + \rho_b,$$

где ρ_0, ρ_b – плотность воды и воздуха при температуре t.

Найти плотность газа ρ_t и погрешность, с которой этот результат получен $\Delta\rho_t$. Значения m_i и Δ приведены в табл. 3.4 и 3.2.

Таблица 3.4

m_i, г	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1	82,125	82,912	82,316	80,364	81,462	90,446	92,748	91,876	95,214	94,534
m_2	353,126	352,126	152,004	280,362	281,310	240,166	242,167	241,809	252,169	344,212
m_3	83,005	82,890	82,206	80,255	81,249	90,137	92,541	91,765	95,003	94,326
$T_р$, °С	50	60	70	55	65	75	80	85	90	45
Δ, г	0,1	0,15	0,16	0,12	0,11	0,14	0,17	0,18	0,17	0,18

Пояснения и рекомендации к задачам 3.1– 3.3

1. Пикнометр чаще всего представляет собой стеклянную колбу шарообразной формы вместимостью 10–100 мл.

2. Плотность воды зависит от температуры и при t = 20 °С составляет ρ_0 = 998,204 кг/м^3.

3. Плотность воздуха зависит от температуры, атмосферного давления и влажности воздуха и рассчитывается по известным формулам. При t = 20 °С и нормальном атмосферном давлении ρ_b = 1,205 кг/м^3.

3.4. Измеритель тепловых потоков ИТП-3 предназначен для измерения плотности теплового потока q (Вт/м^2). Это позволяет рассчитать удельное тепловое сопротивление P (м^2·К/Вт) и оценить качество теплоизоляции на работающей установке. Относительная погрешность измерения плотности теплового потока q (%)

$$\delta(q) = \pm\left(3{,}5 + \frac{q_{\text{пр}}}{q_{\text{изм}}}\right), \tag{3.1}$$

где $q_{\text{пр}}$ – предельное значение шкалы прибора; $q_{\text{изм}}$ – измеренное значение теплового потока.

При известных значениях разности температур наружной $T_{\text{н}}$ и внутренней $T_{\text{в}}$ поверхностей теплоизоляции удельное тепловое сопротивление теплоизоляции P (м^2 ·К/Вт) находят из выражения

$$P = \frac{T_P}{q}, \tag{3.2}$$

где $T_P = T_{\text{в}} - T_{\text{н}}$.

С какой погрешностью можно допустить измерение температур $T_{\text{н}}$ и $T_{\text{в}}$, чтобы этой погрешностью можно было пренебречь при нахождении погрешности удельного теплового сопротивления (ΔP), если $q_{\text{пр}}$ = 200 Вт/м^2? Значения T_P и $q_{\text{изм}}$ приведены в табл. 3.4 и 3.5.

Таблица 3.5

	Предпоследняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_{\text{изм}}$, Вт/м^2	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$\sigma(x)$, г	0,02	0,03	0,04	0,035	0,025	0,022	0,04	0,05	0,05	0,06

Рекомендации к решению задачи 3.4

Учесть, что:

а) критерий ничтожности погрешности $E_k \le 0{,}3\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + ... + E_N^2}$ в нашем случае примет вид

$$E_k \le 0{,}3\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial T_P}\,\Delta T_P\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial q}\,\Delta q\right)^2}\ ,$$

где E_k – исключаемое слагаемое;

б) $T_P = T_{\text{в}} - T_{\text{н}}$ – косвенно измеряемая величина;

в) $\Delta T_{\text{в}} = \Delta T_{\text{н}}$ – искомые величины.

3.5. Весы имеют предел допустимой погрешности $\pm\Delta$. Экспериментально найдена случайная погрешность этих весов $\delta(x)$. Сколько наблюдений необходимо сделать при многократных измерениях, чтобы случайной погрешностью результата измерений можно было пренебречь? Значения Δ и $\delta(x)$ приведены в табл. 3.4 и 3.5

3.6. Условия те же, что и в задаче 3.5, но предварительно был построен график поправок с помощью образцовых гирь разряда N, погрешность изготовления которых $\Delta_{\text{об}}$; в результат измерений введена поправка $q = -\Delta_{\text{с}}$. Вопрос тот же. Значения $\Delta_{\text{об}}$ и $\Delta_{\text{с}}$ даны в табл. 3.6.

Таблица 3.6

	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta_{\text{с}}$, г	0,08	0,03	–0,04	–0,02	0,02	–0,07	0,04	0,05	–0,06	–0,035
Номер разряда образцовой гири	1		2			3			4	
Допускаемое отклонение $\pm\Delta_{\text{об}}$, мг	0,30		1,0			3,0			10	

Рекомендации к решению задач 3.5 и 3.6

Вспомнить, при каком отношении неисключенного остатка систематической погрешности к случайной погрешности результата измерений последней можно пренебречь (см. ДЗ № 2).

3.7. Произведено 8 измерений массы и найдены значения $\overline{m}$ = 24,137 г, $\sigma(x)$ (см. табл. 3.5) и систематическая погрешность $\Delta_с$ (см. табл. 3.6). Случайная погрешность распределена по нормальному закону. Найти исправленное значение $\overline{m}_и$ и его точечную случайную погрешность.

Рекомендации к решению задачи 3.7

Напомним, что вносить поправку ($q = \Delta_с$) в результат измерения есть смысл, если она больше половины единицы наименьшего разряда этого результата. Например, если получен результат U = 178,17 мВ, а $\Delta_с U$ = –0,04 мВ, то, учитывая, что 0,04 > 0,005, исправленный результат примет значение $U_и$ = 178,17 + 0,04 = 178,21 мВ. Если при том же значении напряжения $\Delta_с U$ = 0,004 мВ, то эту поправку вносить не следует.

3.8. Условия те же , что и в задаче 3.2, но температура воздуха не измерялась; при этом известно, что ее значения не будут выходить за пределы (20±5) °С. Найти погрешность метода $\Delta\rho$ в этом случае.

3.9. Условия те же, что и в задаче 3.3, но давление воздуха может изменяться в пределах от 740 до 780 мм рт. ст. Найти погрешность метода $\Delta\rho$ в этом случае.

3.10. Условия те же, что и в задаче 3.1, но температура воды, заливаемой в пикнометр, обеспечивается с погрешностью ±1 °С, т. е. t = (20±1)°С. Найти погрешность метода $\Delta\rho$ в этом случае.

3.11. Условия те же, что в задаче 3.1, но температура воды и воздуха, при которой производился эксперимент, t = 15 °С, атмосферное давление 760 мм рт. ст. Найти погрешность метода $\Delta\rho$ в этом случае.

Рекомендации к решению задач 3.8–3.11

Оцените, как повлияет изменение условий измерения на погрешность $\Delta\rho$. Найдите численное значение измененных значений ρ_0, ρ_b из табл. 3.7 и 3.8, а также $\Delta\rho_0$ и $\Delta\rho_b$ по формуле

$$\Delta\rho = \pm\frac{\left|\rho_{t_1} - \rho_{t_2}\right|}{2}.$$

Например, при изменениях температуры воды в пределах t = (20±2) °C

$$\Delta\rho_0 = \pm\frac{\rho_{18} - \rho_{22}}{2} = \pm\frac{998{,}597 - 997{,}770}{2} = \pm 0{,}412 \text{ кг/м}^3.$$

Таблица 3.7

t °C	Плотность воздуха ρ (кг/м^3) в зависимости от температуры t (°C) и атмосферного давления (мм рт.ст.)				
	740	750	760	770	780
15	1,193	1,210	1,226	1,242	1,258
18	1,181	1,197	1,213	1,229	1,245
20	1,173	1,189	1,205	1,221	1,236
22	1,165	1,181	1,197	1,212	1,228
25	1,153	1,169	1,185	1,200	1,216

Таблица 3.8

	Плотность дистиллированной воды ρ_0 (кг/м^3) при температуре t (°C)						
	15,0	16,0	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0
ρ_0	999,099	998,943	998,405	998,306	998,204	998,099	997,992

3.12. Определение плотности консервов молочных сгущенных производится по ГОСТ 3625–84 пикнометрическим методом. При этом одна и та же проба заливается в два пикнометра, производится процедура, описанная в задаче 3.1, и по формуле, приведенной в этой задаче, вычисляется плотность ρ_1 и ρ_2 для каждого пикнометра. За плотность пробы принимают среднее арифметическое значение ρ_1 и ρ_2:

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Найти погрешность усредненного значения плотности ρ, приняв погрешность $\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2$ (кг/м^3) и равной погрешности, указанной в табл. 3.9.

Таблица 3.9

	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_3, г	26,3882	26,2793	26,4210	26,4306	26,4097	26,4349	26,3521	26,4215	26,3846	26,4168
m_1, г	23,3046	23,2950	23,2948	23,2951	23,3025	23,3122	23,2945	23,3211	23,2978	23,3316
$\pm\Delta\rho_1$, кг/м^3	0,25	0,54	0,67	0,34	0,46	0,23	0,38	0,84	0,28	0,52

3.13. Метод определения массовой доли золы W (%) в позитах сычужных по ГОСТ Р51463–99 основан на минерализации (сжигании) навески пробы массой m_0 в тигле при температуре (825±25) °С. Содержание золы находят по формуле

$$W = \frac{m_1 - m_2}{m_0} 100\ \%,$$

где m_1 – масса тигля с золой, г; m_2 – масса пустого тигля, г.

Найти W и погрешность определения содержания золы ΔW, если известны результаты взвешивания m_1, m_2, m_3 (масса тигля с пробой), погрешности $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$ (табл. 3.9 и 3.10). Масса пустого тигля $m_2 = 23,2446$ г. Масса навески m_0 получена из выражения $m_0 = m_3 - m_2$.

Таблица 3.10

	Предпоследняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δm, мг	0,1	0,15	0,12	0,14	0,13	0,14	0,13	0,12	0,11	0,15
ΔM, г	0,13	0,12	0,4	0,15	0,14	0,5	0,52	0,6	0,45	0,36
δ, %	1	2	2,5	1,5	3	4	3,5	1,6	1,7	1,8
Δ, мВ	0,8	0,7	0,72	0,5	0,6	0,55	0,65	0,85	0,4	0,78
U, В	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\pm\Delta$, °С	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\pm\Delta$, A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,15	0,25	0,35	0,7

3.14. Влажность сливочного масла, определяемую методом выпаривания, вычисляют по следующей формуле:

$$W = \frac{M_1 - M_2}{M_1 - M_3} 100\,\% ,$$

где M_1 – масса стаканчика с пробой до выпаривания влаги; M_2 – масса стаканчика с пробой после выпаривания влаги; M_3 – масса пустого стаканчика.

Все три взвешивания были произведены на одних и тех же весах, имеющих погрешность $\pm\Delta$ г. Найти W, а также абсолютную ΔW и относительную $\delta = \frac{\Delta W}{W} 100\ \%$ погрешности этого метода. Значения M_1, M_2 и $\pm\Delta$ г приведены в табл. 3.11 и 3.12; $M_3 = 20{,}45$ г.

Таблица 3.11

	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_1, г	25,17	26,04	25,82	26,40	25,62	26,12	27,03	25,67	25,34	26,13
M_2, г	24,22	25,3	24,71	25,22	24,32	25,07	26,14	24,55	24,33	25,06
M, кг	2,734	2,856	2,548	3,126	4,225	5,348	6,247	7,028	6,355	5,773
V, см^3	110	210	225	340	455	540	580	610	280	385
R, Ом	37,6	8,5	9,2	7,5	6,7	6,8	8,4	9,2	8,3	8,8
τ, с	35	48	38	39	40	41	42	43	45	46

Таблица 3.12

	Предпоследняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	310	320	350	300	330	340	325	360	325	320
Б	220	210	200	230	215	240	225	235	205	245
В	150	160	155	170	165	140	175	150	160	180
а	290	300	330	280	310	320	305	330	315	295
б	200	190	180	210	200	220	190	200	180	220
в	135	145	140	155	150	125	160	135	145	142
t, с	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U, В	205	210	215	202	212	217	218	203	214	208
ρ_1, кг/м^3	1137	1240	1150	1155	1210	1215	1220	1225	1230	1240
F, л/мин	12,5	14,2	11,6	13,8	22,6	20,7	15,4	16,7	18,3	17,2
$\pm\Delta$, г	0,1	1	0,1	0,4	0,6	0,7	0,2	0,5	0,8	0,3
δ, %	1	1,5	0,5	2	2,5	0,8	0,7	2,2	1,3	1,8

3.15. Влажность сливочного масла, определяемую методом выпаривания, вычисляют по формуле

$$W = \frac{M_{\text{в}}}{M_{\text{пр}}} 100\,\%,$$

где $M_{\text{в}}$ – масса влаги в пробе,

$$M_{\text{в}} = M_1 - M_2;$$

здесь M_1 – масса стаканчика с пробой до выпаривания влаги; M_2 – масса стаканчика с пробой после выпаривания влаги; $M_{\text{пр}}$ – масса пробы,

$$M_{\text{пр}} = M_1 - M_3,$$

здесь M_3 – масса пустого стаканчика.

Все три взвешивания были произведены на одних и тех же весах, имеющих погрешность $\pm\Delta M$. Найти W, а также абсолютную ΔW и относительную $\delta = \frac{\Delta W}{W} 100$ % погрешности этого метода. Значения M_1, M_2 и ΔM приведены в табл. 3.10 и 3.12; $M_3 = 20{,}45$ г.

Рекомендации к решению задач 3.13– 3,15

Чтобы не совершить ошибку в нахождении значения ΔW, необходимо четко разобраться, какие из рассматриваемых величин являются результатом прямых, а какие – косвенных измерений.

3.16. Найти массу M, а также абсолютную ΔM и относительную $\delta_м$ погрешности емкости прямоугольной формы, если размеры внешнего периметра емкости (длина А, ширина Б, высота В) и внутреннего периметра (соответственно а, б, в) измерены рулеткой с погрешностью $\Delta = \pm 2$ мм. Результаты измерений в сантиметрах приведены в табл. 3.12, плотность материала ванны $\rho = (2250 \pm 20)$ кг/м^3.

3.17. Найти плотность материала ρ, а также абсолютную $\Delta\rho$ и относительную δ_ρ погрешности, если образец материала прямоугольной формы имеет размеры: длину А, ширину Б и высоту В, которые в миллиметрах приведены в табл. 3.12. Измерения произведены с погрешностью $\pm 0{,}1$ мм. Масса образца M в килограммах приведена в табл. 3.11, погрешность взвешивания $\Delta = \pm 2$ г.

3.18. Найти производительность насоса Q, абсолютную ΔQ и относительную δ_Q погрешности ее определения, если за время t наполняется объем V. Значения t в секундах и V в кубических сантиметрах приведены в табл. 3.11, 3.12; погрешности $\Delta t = \pm 0{,}5$ с и $\Delta V = \pm 2$ см^3.

3.19. Для определения мощности, потребляемой нагревательным прибором, произвели измерения напряжения U (В) и сопротивления R (Ом) электрической цепи приборами с допустимой погрешностью $\delta = \pm 1{,}5$ %. Найти мощность P, абсолютную ΔP и относительную δ_P погрешности результата косвенного измерения. Значения U и R приведены в табл. 3.11, 3.12.

3.20. Вязкость η жидких сред (сгущенное молоко, машинное масло и т. п.) определяется вискозиметром Геплера путем измерения времени падения τ шарика и последующего вычисления по формуле

$$\eta = \tau(\rho_0 - \rho_1)k, \text{ Па·с},$$

где ρ_0 – плотность шарика; ρ_1 – плотность исследуемого материала; k – постоянная шарика.

Найти вязкость материала, абсолютную $\Delta\eta$ и относительную σ_η погрешности вязкости, если: $\rho_0 = (2210 \pm 10)$ кг/м^3; $k = 0{,}07$; $\Delta\tau = \pm 0{,}5$ с. Значения ρ_1 и τ приведены в табл. 3.11 и 3.12; $\Delta\rho_1 = \pm 8$ кг/м^3.

3.21. Электрический термометр с диапазоном измерения от –30 до +150 °С имеет класс точности 0,5. Найти значения абсолютной и относительной погрешностей этого прибора на отметках шкалы 10 и 150 °С. Пригоден ли этот прибор для измерения температуры в диапазоне 20–40 °С с погрешностью, не превышающей δ (%) – см. табл. 3.10?

3.22. Милливольтметр с диапазоном измерения 0–50 мВ имеет класс точности 0,5. Найти значения абсолютной и относительной погрешностей прибора на отметках шкалы 5 и 50 мВ. Пригоден ли этот прибор для измерения в диапазоне 10–30 мВ с погрешностью, не превышающей $\pm\Delta$ мВ – см. табл. 3.10?

3.23. Амперметр с диапазоном измерения 0–80 А имеет класс точности 0,5/0,05. Найти абсолютную и относительную погрешности прибора на отметках шкалы 1 и 20 А. Пригоден ли этот прибор, если на отметке шкалы 20 А погрешность не должна превышать $\pm\Delta$ А – см. табл. 3.10?

3.24. Как изменится абсолютная погрешность результата измерения напряжения при замене вольтметра класса точности 0,5 на аналогичный прибор с классом точности 0,5 на отметке шкалы U = (см. табл. 3.10) при диапазоне измерения обоих приборов 0–150 В?

3.25. Термометр с диапазоном измерения 0–80 °С имеет допустимую погрешность $\pm\Delta$ °С – см. табл. 3.10. Пригоден ли этот прибор для измерения температуры, изменяющейся в диапазоне 10–20 °С, если результат измерения должен быть получен с погрешностью не более 1 %?

3.26. Какое соотношение необходимого числа измерений должно быть у приборов, если первый из них имеет СКО $\sigma(x) = \pm 1{,}5$ мм, а второй – $\sigma(x) = \pm 0{,}5$ мм, чтобы случайная составляющая погрешности результата многократных измерений была одинакова?

3.27. В лаборатории имеется три манометра класса 0,5 с различными значениями верхнего предела измерения: 0,5; 1,5 и 5МПа. Нижний предел измерения у всех манометров – 0. Необходимо измерить давление, изменяющееся в диапазоне 0,8–1 МПа с относительной погрешностью $\delta \leq$ (см. табл. 3.12), %. Какие из перечисленных манометров пригодны для этой цели?

3.28. Любое тело, находящееся в среде, имеющей плотность ρ, теряет в весе столько, сколько весит объем среды, равной объему рассматриваемого тела (закон Архимеда). Предстоит взвешивание 200 см^3 водного раствора на весах с погрешностью $\pm\Delta$ (см. табл. 3.12). Необходимо ли учитывать систематическую погрешность, вызванную «погружением» этого объема в воздушную среду (воздух при $t = 20$ °С имеет $\rho = 1{,}204$ кг/м^3)?

3.29. Условия аналогичны условиям задачи 3.28. Предстоит взвешивание водного раствора на весах, имеющих погрешность $\pm\Delta$ (см. табл. 3.12). Определить, с какого объема взвешиваемой жидкости необходимо вводить поправку на действие силы Архимеда.

Рекомендации к решению задач 3.28, 3.29

1. Необходимо учесть рекомендации к задаче 3.7.
2. Посмотреть пример в прил. 3 (п. 4).

3.30. Найти объем жидкости V, поступившей в приемный бак за время $t = 15$ мин, если показания расходомера класса точности 2,0 были F (см. табл. 3.12). Найти абсолютную и относительную погрешности объема V. Погрешность секундомера $\Delta t = \pm 1$ с.

3.31. Влажность сливочного масла W определяется по методике, изложенной в задаче 3.14. Проведите анализ формулы погрешности определения влажности ΔW этим методом и определите, что оказывает влияние на эту погрешность, предложите пути ее уменьшения.

Рекомендации к решению задачи 3.31

Используя формулу погрешности косвенных измерений, выразите погрешность ΔW. Внимательно отнеситесь к преобразованию слагаемых под корнем и Вы увидите три аргумента, оказывающих влияние на ΔW.

3.32. При определении влажности сливочного масла W методом, изложенным в задаче 3.14, производят три взвешивания на одних и тех же весах. Одинаковое ли влияние на погрешность влажности ΔW оказывают погрешности $\Delta M_1 = \Delta M_2 = \Delta M_3$? Если нет, то какое из взвешиваний оказывает наибольшее влияние? Обоснуйте ответ.

3.33. Плотность жидких сред определялась пикнометрическим методом, изложенным в задаче 3.1. По условию эксперимента $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3$. Одинаковое ли влияние на погрешность плотности $\Delta\rho$ оказывают упомянутые выше погрешности взвешивания? Если нет, то какая из них влияет больше? Обоснуйте ответ для случая, когда исследуемая жидкость тяжелее воды. Что можно предложить для уменьшения погрешности $\Delta\rho$?

3.34. Условия и вопросы те же, что и в задаче 3.33, но исследуемая жидкость легче воды.

Рекомендации к решению задач 3.32– 3.34

Записать формулы ΔW и $\Delta\rho$ в общем виде и, проведя анализ слагаемых под корнем, правильно заменить буквенные индексы (i, j, f) на цифровые (1, 2, 3):

$M_i > M_j > M_f$ (для задачи 3.32);

$m_i > m_j > m_f$ (для задач 3.33 и 3.34).

После этого сделать необходимые выводы.

3.35. Найдите объем материала V, необходимого для изготовления емкости, размеры которой указаны в задаче 3.16, погрешность найденного объема ΔV и укажите, какое из шести измерений, произведенных для нахождения объема (А, Б, В, а, б, в), вносит наибольшую долю в погрешность результата ΔV. До какого значения целесообразно снижать погрешность найденного прямого измерения?

3.36. Условия те же, что в задаче 3.17. Оцените, какое из четырех измерений, произведенных в этом эксперименте (А, Б, С и М), вносит наибольшую долю в погрешность найденной плотности материала $\Delta\rho$. До какого значения целесообразно снижать погрешность этого прямого измерения? Что можно предложить для снижения погрешности $\Delta\rho$?

Рекомендации к решению задач 3.35 и 3.36

Используйте принцип равноточности измерений.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Основные формулы, пояснения, примеры к ДЗ № 1

1. Абсолютная погрешность Δ приближенного числа a, округленного по правилам школьного курса математики, не будет превышать пяти единиц разряда, следующего за наименьшим разрядом округленного числа. Например:

$$a_1 = 14{,}5 \text{ мм};\ \Delta_1 \le 0{,}05 \text{ мм};$$
$$a_2 = 0{,}03 \text{ мВ};\ \Delta_2 \le 0{,}005 \text{ мВ};$$
$$a_3 = 2{,}8\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 28\cdot 10^2 \text{ кг/м}^3;\ \Delta_3 \le 0{,}5\cdot 10^2 \text{ кг/м}^3 = 50 \text{ кг/м}^3;$$
$$a_4 = 30\cdot 10^3 \text{ м/с};\ \Delta_4 \le 0{,}5\cdot 10^3 \text{ м/с} = 500 \text{ м/с}.$$

2. Относительная погрешность округления δ результатов приведенных выше:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1}100 = \frac{0{,}05}{14{,}5}100 = 0{,}34\,\%;$$
$$\delta_2 = \frac{0{,}005}{0{,}03}100 = 16{,}6\,\% \approx 17\,\%;$$
$$\delta_3 = \frac{50}{2800}100 = 1{,}78\,\% \approx 1{,}8\,\%;$$
$$\delta_4 = \frac{500}{30000}100 = 1{,}66\,\% \approx 1{,}7\,\%.$$

3. Предельная (максимальная) абсолютная погрешность суммы приближенных чисел не будет превышать суммы модулей погрешностей слагаемых этой суммы. Например:

$$m = (m_1 \pm \Delta_1) + (m_2 \pm \Delta_2) + \ldots + (m_n \pm \Delta_n);$$
$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n;$$
$$\Delta_n m \le |\Delta_1| + |\Delta_2| + \ldots + |\Delta_n|.$$

Предельная относительная погрешность суммы определяется по формуле

$$\delta_n m = \frac{\Delta m}{m}100\,\%.$$

4. Предельная относительная погрешность произведения приближенных чисел не будет превышать суммы относительных погрешностей сомножителей. Например, мощность электрической цепи $P = IU$ (Вт), тогда:

а) если δ_i даны в процентах, т. е. $\delta_1 = \frac{\Delta I}{I} 100\,\%$, $\delta_2 = \frac{\Delta U}{U} 100\,\%$, то предельную относительную погрешность P можно определить по формуле

$$\delta_{\text{пр}} \le (\delta_1 + \delta_2)\ \%, \tag{1}$$

а предельную абсолютную погрешность – по формуле

$$\Delta_{\text{пр}} \le \frac{\delta_{\text{пр}} P}{100},\ \text{Вт}; \tag{2}$$

б) если δ_i представлены в относительной форме ($\delta_1 = \frac{\Delta I}{I}$, $\delta_2 = \frac{\Delta V}{V}$), то формулы (1) и (2) примут вид:

$$\delta_{\text{пр}} \le \delta_1 + \delta_2; \tag{3}$$

$$\Delta_{\text{пр}} \le \delta_{\text{пр}} P,\ \text{Вт}. \tag{4}$$

Если погрешность одного из сомножителей задана в абсолютной форме, а другого – в относительной, то их необходимо привести к одной форме и затем воспользоваться формулами (1), (2) или (3), (4).

5. Предельная относительная погрешность частного не будет превышать суммы относительных погрешностей числителя и знаменателя. Например, если измеряемая величина $a = b/c$ и значения δ_b и δ_c определены в процентах ($\delta_b = \frac{\Delta b}{b} 100\,\%$, $\delta_c = \frac{\Delta c}{c} 100\,\%$), то предельную относительную погрешность a в процентах находят по формуле

$$\delta_n a \le (\delta_b + \delta_c),\ \%. \tag{5}$$

Предельную абсолютную погрешность определяют по формуле

$$\Delta_n a \le \frac{\delta_n a\ a}{100} \tag{6}$$

(если δ_i представлены в относительной форме – см. п. 4б).

6. Предельная абсолютная погрешность Δ_{na} разности приближенных чисел $a = b - c$ не будет превышать суммы предельных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого:

$$\Delta_{na} \le (\Delta_{nb} + \Delta_{nc}).$$

Предельная относительная погрешность разности

$$\delta_{\text{пр}\,a} \le \frac{\Delta_{\text{пр}\,a}}{a}.$$

7. Округление *погрешности*, с которой получен результат измерения, производится до одной значащей (верной) цифры, если эти цифры 4, 5, 6, 7, 8, 9, и до двух значащих цифр, если первая цифра 1, 2 или 3.

Округление значения *результата измерения* (или расчета) необходимо производить после того, как произведено округление погрешности результата измерения. При этом наименьший разряд результата измерения должен соответствовать наименьшему разряду погрешности, с которой этот результат получен.

Примеры:

Неокругленное значение результата измерения	Неокругленное значение погрешности измерения	Округленное значение погрешности измерения	Округленное значение результата измерения
243,357 мм	4,26 мм	4 мм	243 мм
542,68 мм	7,87 мм	8 мм	543 мм
37,84 В	0,67 В	0,7 В	37,8 В
62,259 В	0,348 В	0,35 В	62,26 В
41,288 мА	0,0273 мА	0,027 мА	41,288 мА
1243,34 $см^3$	452 $см^3$	$5\cdot10^2$ $см^3$	$12\cdot10^2$ $см^3$
2456,44 м	65,2 м	$7\cdot10$ м	$246\cdot10$ м

8. При округлении погрешностей промежуточных результатов расчета рекомендуется сохранять на одну-две значащие цифры больше, чем при округлении результирующей погрешности измерений.

Приложение 2

Основные формулы, пояснения и примеры к ДЗ № 2

1. За результат многократных измерений принимается среднее арифметическое значение из n наблюдений (промежуточных измерений) измеряемой величины:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n},$$

где x_i – i-й результат наблюдения.

2. Исправленное значение результата многократных измерений

$$\bar{x}_{\text{исп}} = \bar{x} + q_1 + q_2 + \ldots,$$

где $q_i = -\Delta_{ci}$ – поправка, учитывающая действия i-го влияющего фактора, здесь Δ_{ci} – систематическая погрешность, вносимая действием i-го влияющего фактора.

Значения Δ_{ci} могут быть получены в результате специально проведенного для этих целей эксперимента (например, построения графика поправок) или найдены расчетным путем. После исключения $\sum \Delta_{ci}$ остается неисключенный остаток систематической погрешности $\theta = k\sqrt{\Sigma\theta_i^2}$, где θ_i – неисключенный остаток i-й систематической погрешности, который равен погрешности того образцового СИ, с помощью которого было найдено значение Δ_{ci}. Если поправка на систематическую погрешность не вводилась и систематическая погрешность не исключалась в процессе измерений или до их начала, то за θ принимают основную погрешность СИ, т. е. $\theta = |\Delta|$.

3. Среднее квадратичное отклонение (СКО) единичных наблюдений, встречающихся при многократных измерениях одного и того же значения измеряемой величины, находят по формуле

$$S(x) = \sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

где $S(x)$ – количественная оценка случайной составляющей погрешности средства измерений (метода измерений).

4. Среднее квадратичное отклонение результата многократных измерений

$$S(\bar{x}) = \sigma(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}};$$

где $S(\bar{x})$ – точечная количественная оценка случайной составляющей погрешности результата многократных измерений $\bar{x}$; n – объем выборки (число наблюдений).

5. Интервальную оценку случайной составляющей погрешности $\bar{x}$ находят в форме границ доверительного интервала $\Delta_{дов}$, которые вычисляют по формуле

$$\Delta_{дов} = \pm t_\gamma \frac{S(x)}{\sqrt{n}},$$

если $S(x)$ прибора (метода) определяют по результатам обработки n-го количества экспериментальных данных, коэффициент t_γ находят по таблице распределения Стьюдента в зависимости от заданной надежности γ (доверительной вероятности) и объема выборки n (или степени свободы $f = n - 1$);

$$\Delta_{дов} = \pm t_\gamma \frac{S(x)}{\sqrt{n}},$$

если значение $S(x)$ было найдено ранее (до эксперимента), коэффициент t находят по таблице значений функции Лапласа $\Phi(t)$ в зависимости от заданной надежности γ. Например, если $\gamma = 0{,}95$, то $\Phi(t) = \gamma/2 = 0{,}475$. Этому значению $\Phi(t)$ соответствует $t = 1{,}96$ (см. табл. 2.7).

6. Если проверка грубых погрешностей (промахов) выявила таковые, они должны быть исключены из выборки; после этого необходимо заново найти значения $\bar{x}_n$, $S(x)$. Для этого не обязательно заново производить весь расчет, можно найти новое значение по формуле

$$\bar{x}_н = \frac{\bar{x}n - x_{гр}}{n - 1},$$

где $\bar{x}_н$ – новое среднее значение измеряемой величины; $\bar{x}$ – старое среднее значение; $x_{гр}$ – результат признанный грубым промахом; n – прежний объем выборки;

$$S_{н}(x)=\sqrt{\frac{S(x)^2(n-1)-(x_{гр}-\bar{x})^2}{n-2}},$$

где $S_{н}(x)$ – новое значение СКО; $S(x)$ – старое значение СКО.

7. После того как найдены значения систематической (θ или $\Delta_{си}$) и случайной ($S(\bar{x})$ и границы доверительного интервала) составляющих погрешности результата многократных измерений, необходимо проверить два неравенства:

$$\frac{\theta}{S(\bar{x})}<0{,}8; \quad \frac{\theta}{S(\bar{x})}>8.$$

Если удовлетворяется первое неравенство, то пренебрегают систематической составляющей погрешности и за погрешность результата принимают случайную составляющую погрешности – доверительный интервал $\pm\delta$, накрывающий истинное значение с вероятностью γ.

Если удовлетворяется второе неравенство, пренебрегают случайной составляющей погрешности и за погрешность результата принимают систематическую составляющую – θ (или $\Delta_{си}$).

Если не удовлетворяется ни одно из двух неравенств, то погрешность результата находят по эмпирической формуле, учитывающей систематическую и случайную составляющие погрешности:

$$\Delta_{\Sigma}=t_{\Sigma}\sqrt{S(\bar{x})^2+\frac{1}{3}\sum\theta_i^2};$$

$$t_{\Sigma}=\frac{\theta+t_{\gamma}S(\bar{x})}{S(\bar{x})+\sqrt{\frac{1}{3}\Sigma\theta_i^2}}.$$

На этом обработка результатов многократных измерений заканчивается.

8. При известной случайной погрешности прибора $\sigma(x)$, заданных границах $\Delta_{дов}$ и надежности γ доверительного интервала можно найти необходимое число измерений n. Преобразуя известное выражение

$$\Delta_{\text{дов}} = \pm t\,\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}},$$

найдем

$$n = \left(\frac{t\sigma(x)}{\Delta_{\text{дов}}}\right)^2,$$

где t – коэффициент, зависящий от заданной вероятности γ (см. п. 5).

9. Если по результатам n измерений найдены: оценка результата измерений $\bar{x}$, $S(x)$, $S(\bar{x})$ и заданы границы доверительного интервала $\pm\Delta_{\text{дов}}$, то можно найти доверительную вероятность, соответствующую этому доверительному интервалу. Например, по результатам семи измерений (n = 7) массы исследуемой пробы найдены $\overline{m}$ =12,37 г; $S(x)$ = 0,26 г; $S(\bar{x})$ = 0,098 г. Найти, с какой вероятностью γ доверительный интервал с границами $\Delta_{\text{дов}}$ = ±0,235 г накроет истинное значение измеряемой величины. Решение:

1) из выражения $\Delta_{\text{дов}} = t_\gamma\sigma(\bar{x})$ находим $t_\gamma = \dfrac{0{,}235}{0{,}098} = 2{,}4$;

2) по табл. 2.8 распределения Стьюдента находим, что этому значению t_γ соответствует γ, находящееся в интервале 0,90–0,95. Интерполируя, находим:

$$\Delta\gamma = 0{,}95 - 0{,}9 = 0{,}05;\ \Delta t_\gamma = 2{,}45 - 1{,}96 = 0{,}49;$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta t_\gamma} = \frac{0{,}05}{0{,}49} \approx 0{,}1;\ \Delta\gamma \approx 0{,}1\Delta t_\gamma = 0{,}1(2{,}4 - 1{,}96) = 0{,}044;$$

$$\gamma = 0{,}90 + 0{,}044 = 0{,}944.$$

Ответ: интервал $\Delta_{\text{дов}}$ = ±0,235 г накроет истинное значение с вероятностью 94,4 %.

Приложение 3

Основные формулы, пояснения и примеры к ДЗ № 3

1. При решении задач по вычислению погрешностей косвенных измерений необходимо знать формулу, связывающую косвенно измеряемую величину z с величинами, измеряемыми прямыми методами.

Например, производительность насоса Q можно найти, измерив объем V, который будет наполнен за время τ:

$$Q = V/\tau.$$

Погрешность любой косвенно измеряемой величины при технических измерениях, когда известны только предельные погрешности результатов прямых измерений $\pm\Delta x_i$ (при некоррелированных x_i), вычисляют по формуле

$$\Delta Z = \sqrt{\sum\left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}.$$

Для нашего примера

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau}\Delta\tau\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{V}{\tau^2}\Delta\tau\right)^2}.$$

2. При решении задач на условные обозначения классов точности на шкале прибора необходимо знать, что означает этот знак. Например:

а) 2,5 означает, что для этого прибора основная погрешность задана в виде приведенной погрешности γ, и она равна ±2,5 % в любой точке шкалы прибора. Зная, что $\gamma = \pm\frac{\Delta}{x_N}100\,\%$, можно найти $\Delta = \frac{\gamma\, x_N}{100}$, где Δ – значение абсолютной погрешности прибора; x_N – нормированная величина, равная размаху шкалы прибора в единицах измеряемой величины. Например, для прибора со шкалой –30…+100 °С

$$\Delta = \pm\frac{\gamma\, x_N}{100} = \frac{2{,}5\cdot 130}{100} = \pm 3{,}25\,°\mathrm{C} \approx \pm 3{,}2\ °\mathrm{C};$$

б) 1,5 означает, что для этого прибора основная погрешность задана в виде относительной погрешности $\delta = \pm\frac{\Delta}{x_д}100\,\%$, которая равна ±1,5 % в любой точке шкалы этого прибора. По аналогии с предыдущим случаем $\Delta = \pm\frac{\delta\, x_д}{100}$, где $x_д$ – действительное значение измеряемой величины (показание прибора). Например, для прибора со шкалой 0–5 МПа на отметке шкалы 4 МПа

$$\Delta = \pm\frac{1{,}5 \cdot 4}{100} = \pm 0{,}06\,\text{МПа} = \pm 60\,\text{кПа};$$

в) 0,1/0,05 означает, что для этого прибора допустимая погрешность в каждой точке шкалы различна, и она определяется по формуле

$$\delta = \pm\left[c + d\left(\frac{x_п}{x_д} - 1\right)\right], \%,$$

где $x_п$ – предельное значение шкалы прибора; $x_д$ – показание прибора; c и d – числитель и знаменатель условного обозначения класса точности.

Например, для вольтметра со шкалой 0–1000 В на отметке 500 В

$$\delta = \pm\left[0{,}1 + 0{,}05\left(\frac{1000}{500} - 1\right)\right], \% = \pm 0{,}15\ \%;$$

$$\Delta = \pm\frac{0{,}15 \cdot 500}{100} = 0{,}75 = \pm 0{,}8\ \text{В}.$$

3. При решении вопроса о пригодности прибора, имеющего предельно допустимую погрешность $\pm\Delta_{си}$ (или $\pm\delta_{си}$), для измерения с погрешностью результата, не превышающей $\pm\Delta_{доп}$ (или $\pm\delta_{доп}$), необходимо, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\pm\Delta_{си} \le \Delta_{доп}, \qquad (1)$$

если известны абсолютные погрешности;

$$\delta_{си} \le \delta_{доп}, \qquad (2)$$

если известны относительные погрешности.

Если погрешности прибора и результата измерений заданы в различной форме ($\delta_{си}$ и $\Delta_{доп}$ или $\Delta_{си}$ и $\delta_{доп}$), то необходимо обе величины привести к одному виду (δ или Δ, безразлично к какому) и проверить одно из неравенств – 1 или 2.

Например: пригоден ли прибор с диапазоном измерения 0–150 В класса точности $\textcircled{1,0}$ для измерения напряжения в диапазоне 100–130 В с погрешностью $\Delta_{\text{доп}} \le 1{,}5$ В.

Находим значение допустимой погрешности результатов измерений, полученных этим прибором, в относительном виде для границ заданного диапазона измерения:

$$\delta_{1_{\text{доп}}} = \frac{\Delta_{\text{доп}}}{x_{\text{д}}}100 = \frac{1{,}5}{100}100 = 1{,}5\ \%;\ \ \delta_{2_{\text{доп}}} = \frac{1{,}5}{130}100 = 1{,}1\ \%.$$

Проверив неравенство (2), видим, что для нашего случая относительные погрешности полученных результатов измерений для обеих крайних точек заданного диапазона меньше допустимой: 1 % < 1,5 % и 1 % <1,1 %. Таким образом, прибор для заданных условий пригоден.

4. Рекомендации к решению задач 3.28 и 3.29:

а) необходимо записать формулу потери массы $m_{\text{п}}$ тела объемом V, погруженного в среду с плотностью ρ:

$$m_{\text{п}} = \rho V; \tag{3}$$

б) для задачи 3.28 решить вопрос о целесообразности внесения или невнесения поправки на величину этой потери массы. Для этого использовать рекомендацию к задаче 3.7;

в) для задачи 3.29 принять значение поправки $|q| \ge$ (пять единиц разряда, следующего за наименьшим разрядом погрешности весов Δ). Например, при $\Delta = \pm 0{,}03$ г $|q| \ge 0{,}005$ г. Затем приравнять $m_{\text{п}} = q$ и из выражения (3) найти V.

СОДЕРЖАНИЕ

Усачев Юрий Алексеевич

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ»

Методические указания,
пояснения и примеры решения
для студентов всех специальностей

Редактор
Е.О. Трусова

Корректор
Н.И. Михайлова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Подписано в печать 20.09.2006. Формат 60×84 1/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,09. Печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,06
Тираж 500 экз. Заказ № С 75

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИПЦ СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9