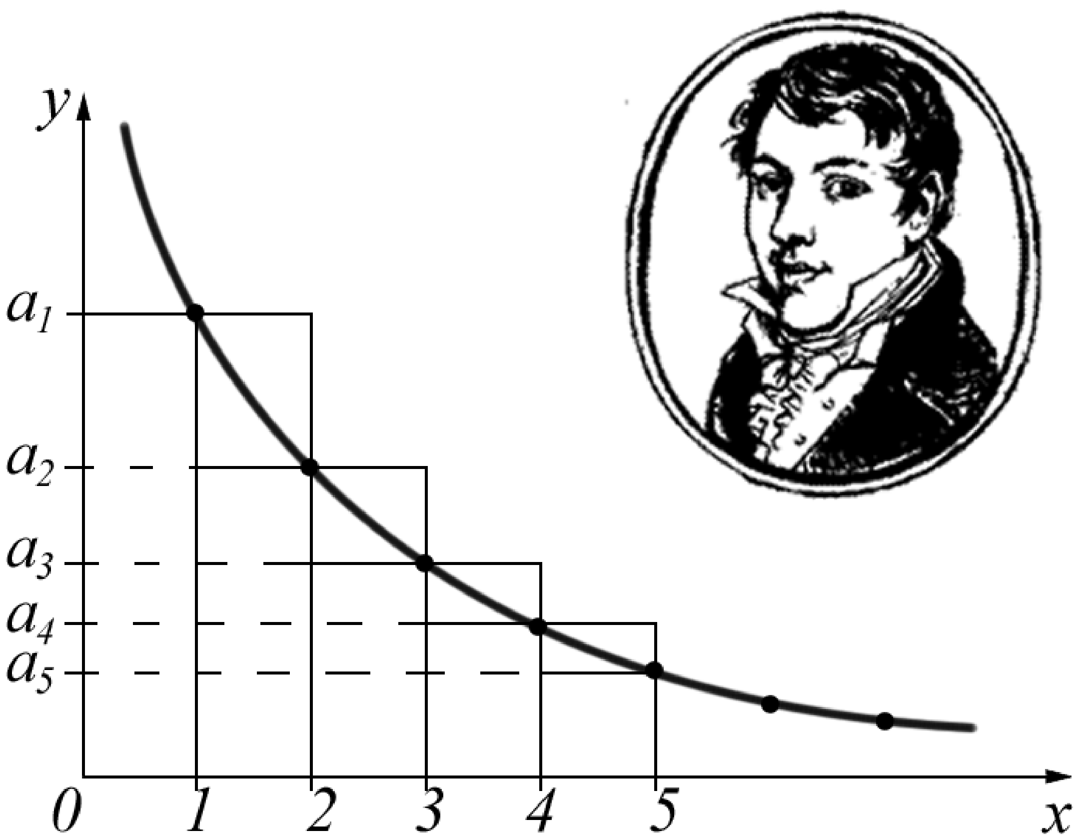
Т. В. Родина, Е. С. Трифанова

КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ – II

для напр. «Прикладная математика и информатика»



Учебное пособие

под редакцией проф. И.Ю. Попова

Санкт-Петербург

2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Т.В. Родина, Е.С. Трифанова

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ – II

(для напр. «Прикладная математика и информатика»)

Учебное пособие

Под редакцией проф. И.Ю. Попова

Санкт-Петербург

2013

Т.В. Родина, Е.С. Трифанова Курс лекций по математическому анализу – II (для напр. «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. –153 с.

Предлагаемое пособие является продолжением учебного пособия Т.В. Родина, Е.С. Трифанова «Курс лекций по математическому анализу – I» и предназначено для студентов ЕНФ и ФИТИП специальности «Прикладная математика и информатика». В пособии представлен курс лекций по математическому анализу, читаемых для студентов этой специальности во втором семестре. Данное пособие может быть использовано студентами других специальностей, желающими углубить свои знания в области математического анализа.

Авторы выражают глубокую признательность редактору профессору И.Ю. Попову и студенту А.А. Бойцеву за внимательное отношение к работе и ряд ценных замечаний.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 04.04.2013, протокол №3

Оглавление

Глава 5

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1 Первообразная

Определение 5.1.1. *Пусть на промежутке (a, b) задана функция $f(x)$. Функцию $F(x)$ будем называть **первообразной** для функции $f(x)$ на указанном промежутке, если для всех значений $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Замечание 1. *Промежуток, на котором определяется первообразная, может быть бесконечным и может быть замкнутым с одной или с обеих сторон. В последнем случае под производной на конце промежутка понимают одностороннюю производную. Можно определить первообразную и на множестве, которое не будет связным.*

Пример 1. Функция x^3 будет первообразной для функции $3x^2$ на всей вещественной оси. Но эта первообразная не единственна, функции $x^3 + 5$ или $x^3 + \pi$ тоже будут первообразными для функции $3x^2$.

Множество всех первообразных описывает

Теорема 5.1.1. *Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a, b). Тогда, для того чтобы функция $\Phi(x)$ также была первообразной для функции $f(x)$ на том же промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in (a, b)$ разность $\Phi(x) - F(x)$ была постоянной.*

▶ *Необходимость.* Пусть функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a, b). Тогда на этом промежутке имеют место равенства $F'(x) = f(x)$ и $\Phi'(x) = f(x)$, следовательно,

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = 0.$$

Используя признак постоянства функции, получим $\Phi(x) - F(x) = const$.
Достаточность. Пусть на промежутке (a, b) выполнено $\Phi(x) - F(x) = C$. Тогда на этом промежутке $\Phi(x) = F(x) + C$, откуда $\Phi'(x) = (F(x) + C)' =$

$= f(x)$, что означает, что $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке. ◀

Замечание 2. *Первообразная для функции, заданной на несвязном множестве (например, состоящем из нескольких промежутков), может быть образована из одной, простейшей первообразной с помощью добавления различных констант.*

Пример 2. Первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ будет функция $F_1(x) = \dfrac{1}{x}$, но в качестве первообразной можно взять, например, такую функцию

$$F_2(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x}, & x < 0; \\ \dfrac{1}{x} + 3, & x > 0. \end{cases}$$

Теорема 5.1.2 (Линейность первообразной)**.** *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке (a, b), а функция $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$ на том же промежутке, то на этом промежутке функция $\alpha F(x) + \beta G(x)$ будет первообразной для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$.*

▶

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha (F(x))' + \beta (G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

◀

§2 Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла и таблица простейших интегралов

Определение 5.2.1. ***Неопределенным интегралом*** *от функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется множество всех первообразных этой функции на этом промежутке.*

Неопределенный интеграл обозначают следующим образом: $\displaystyle\int f(x)\,dx$, где функцию $f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, а выражение $f(x)dx$ — ***подынтегральным выражением***.

Если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на промежутке (a, b), то имеет место равенство

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Итак, из определения неопределенного интеграла следует, что равенство $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Из определения интеграла также следует, что $\int dF(x) = F(x) + C$.

Теорема 5.2.1. *Интеграл обладает свойством линейности, т.е.*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Доказательство очевидно следует из аналогичного свойства первообразной.

Для вычисления неопределенных интегралов используют таблицу интегралов, которая в основном является обращением таблицы производных.

Таблица интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1;$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$
   $\int e^x dx = e^x + C\ ;$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$
9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C\ ;$
10. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C\ ;$
11. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C\ ;$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C =$
    $= -\arccos \dfrac{x}{a} + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C =$
    $= -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C\ ;$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Доказательство последних формул проводится с помощью дифференцирования. Докажем, например, формулу 14:

▶ Используя тот факт, что $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, $(x \neq 0)$, получим

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) = \\ = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

◀

§3 Методы интегрирования

3.1 Замена переменной

Пусть $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция, отображающая промежуток (α, β) на промежуток (a, b). Тогда справедлива формула

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi(t)$. Эту формулу будем называть ***формулой замены переменной в неопределенном интеграле***.

▶ Для доказательства справедливости данного равенства достаточно доказать, что равны дифференциалы от каждой части этого равенства. Действительно,

$$d\left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = f(x)\,dx$$

и $d\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$. ◀

Замечание 1. *При решении задач на вычисление неопределенного интеграла будем считать, что ответ требуется получить только на каком-либо промежутке, где подынтегральная функция непрерывна.*

Пример 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$.

☺ Положим $x = \varphi(t) = t^2$ и будем считать, что $t \geqslant 0$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2}\,(t^2+1)} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

☻

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg} x dx$.

☺ Преобразуем подынтегральную функцию $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ и положим $t = \cos x$. Тогда $dt = d(\cos x) = -\sin x dx$ и

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C.$$

☻

Замечание 2. *Следует обратить внимание на то, что при вычислении последнего интеграла мы применили формулу замены переменной справа налево.*

Замечание 3. *В данной ситуации можно было не вводить новую переменную явно, а оформить решение следующим образом:*

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Такой способ мы будем называть ***подведением функции под знак дифференциала****.*

Пример 3. Вычислить интеграл $\int e^{2x+3} dx$.

☺ Воспользуемся тем, что $dx = \frac{1}{2} d(2x+3)$. Тогда

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x+3} d(2x+3) = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C.$$

Аналогичное решение мы получили бы, сделав замену переменной $t = 2x + 3$. ☻

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

☺Поступим здесь немного иначе. Обозначим $t = e^x + 1$. Тогда $x = \ln(t-1)$ и $dx = \frac{dt}{t-1}$. Отсюда

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{(t-1)\,t} = \int \frac{t-(t-1)}{(t-1)\,t} dt = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} =$$
$$= \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C = x - \ln(e^x+1) + C.$$ ☻

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$.

☺ Положим $x-1=t^2$. Тогда $x=t^2+1$ и $dx=2tdt$. Отсюда

$$\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} = \int \frac{2tdt}{t^2+1+2t} = 2\int \frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}dt =$$

$$= 2\left(\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{(t+1)^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right) + \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + C.$$

☻

3.2 Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда на этом промежутке справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эту формулу будем называть ***формулой интегрирования по частям***.

► Данная формула очевидно следует из формулы дифференцирования произведения двух функций: $d(uv) = udv + vdu$. ◄

Пример 6. Вычислить $\displaystyle\int xe^x dx$.

☺ Положим $u=x$, $dv=e^xdx$. Тогда $du=dx$, $v=\displaystyle\int dv = \int e^xdx = e^x$.

По формуле интегрирования по частям получим

$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + C.$$

☻

Замечание 4. *При вычислении функции $v(x)$ мы выбрали только одну первообразную. Докажите самостоятельно, что, взяв любую другую первообразную, получим то же множество первообразных в окончательном ответе.*

Пример 7. Вычислить $\displaystyle\int \sin xe^xdx$.

☺ Положим $u=\sin x$, $dv=e^xdx$. Тогда $du=\cos xdx$, $v=e^x$ и

$$\int \sin xe^xdx = \sin xe^x - \int \cos xe^xdx.$$

В последнем интеграле положим $u=\cos x$, $dv=e^xdx$. Откуда получим $du=-\sin xdx$, $v=e^x$. Тогда

$$\int \sin xe^xdx = \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^xdx.$$

Обозначая искомый интеграл через I, получим равенство, которое можно считать уравнением относительно неизвестного I: $I = \sin xe^x - \cos xe^x - I$, откуда $2I = \sin xe^x - \cos xe^x$ и $I = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$. ☻

Приведенный метод называется ***методом сведения интеграла к себе***.

Замечание 5. *Равенство $2I = \sin xe^x - \cos xe^x$ не содержит произвольной постоянной, однако, в ответе мы ее добавили. Это произошло оттого, что в данном рассуждении закралась неточность (впрочем, не повлиявшая на ответ). Попробуйте найти и исправить эту неточность самостоятельно.*

§4 Классы интегрируемых функций

Естественно поставить вопрос о том, всякая ли функция имеет первообразную. Достаточное условие существования первообразной и, следовательно, широкий класс функций, имеющий первообразную, будут даны ниже.

Однако, даже если эта первообразная существует, ее не всегда можно записать с помощью элементарных функций. Мы будем говорить, что интегралы от таких функций не выражаются в конечном виде. Приведем примеры таких интегралов:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$
$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx.$$

В настоящем параграфе мы разберем классы функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции.

4.1 Интегрирование рациональных дробей

Сначала напомним некоторые сведения из теории многочленов и рациональных дробей.

Теорема 5.4.1 (Основная теорема алгебры)**.** *Каждый многочлен степени n ($n \geqslant 1$) имеет по крайней мере один корень (вещественный или комплексный).*

Следствие. *Каждый многочлен степени n имеет ровно n корней.*

Свойство многочлена с вещественными коэффициентами. *Многочлен с вещественными коэффициентами и старшим коэффициентом равным* *единице раскладывается на вещественные множители следующим образом:*

$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_{k_s})^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\ell_1}\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{\ell_j},$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_s$ *— вещественные корни многочлена кратности* $k_1, k_2, \dots, k_s$ *соответственно, указанные квадратные трехчлены имеют отрицательные дискриминанты:* $D_i = p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, \dots, j$ *и* $k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_j) = n$.

Заметим, что при этом каждый квадратный трехчлен имеет два комплексно-сопряженных корня.

Рациональной дробью называется дробь вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены относительно переменной x степени n и m, соответственно. Если $n < m$, то дробь называется ***правильной***, в противном случае — ***неправильной***. В дальнейшем все коэффициенты, встречающиеся в дробях, будем считать вещественными.

Дроби вида

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\left(p^2-4q<0\right), \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\left(p^2-4q<0\right)$$

называются ***простейшими дробями первого, второго, третьего и четвертого типа***, соответственно.

Теорема 5.4.2. *Каждая правильная дробь может быть разложена на сумму простейших дробей, причем единственным образом.*

Для доказательства теоремы докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. *Пусть знаменатель дроби имеет вид* $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \tilde{Q}(x)$, *где* $\tilde{Q}(x)$ *— многочлен степени* $m-k$ *такой, что* $\tilde{Q}(a) \neq 0$. *Докажем, что можно найти и притом единственным образом такое число* A *и такой многочлен* $\tilde{P}(x)$, *для которых выполнено равенство*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\tilde{Q}(x)},$$

где последняя дробь остается правильной.

► Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x) - A\cdot\tilde{Q}(x)}{Q_m(x)},$$

где число A выберем таким образом, чтобы числитель имел корень, равный a, т.е. чтобы $P_n(a) - A\cdot\tilde{Q}(a) = 0$. Так как $\tilde{Q}(a) \neq 0$ и $P_n(a) \neq 0$, то число

A существует и равно $\dfrac{P_n(a)}{\tilde{Q}(a)} \neq 0$. Тогда дробь $\dfrac{P_n(x) - A\cdot\tilde{Q}(x)}{Q_m(x)}$ можно сократить на $(x-a)$. Получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot\tilde{Q}(x)},$$

где последняя дробь правильная (но может быть сократимая).

Докажем единственность такого представления. Допустим, что возможны два представления:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1}\tilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\tilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1}\tilde{Q}(x)}.$$

Тогда

$$A_1\cdot\tilde{Q}(x) + \tilde{P}_1(x)(x-a) = A_2\cdot\tilde{Q}(x) + \tilde{P}_2(x)(x-a).$$

При $x=a$ последнее равенство дает $A_1\cdot\tilde{Q}(a) = A_2\cdot\tilde{Q}(a)$, откуда $A_1 = A_2$. Тогда коэффициенты многочлена $\tilde{P}(x) = P_n(x) - A\cdot\tilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. ◄

Лемма 2. *Пусть знаменатель дроби имеет вид:* $Q_m(x) = \left(x^2+px+q\right)^\ell \cdot \tilde{Q}(x)$, *где* $D = p^2 - 4q < 0$. *Тогда трехчлен* x^2+px+q *имеет два комплексно-сопряженных корня. Обозначим эти корни через* $\alpha\pm\beta i$, $(\beta\neq 0)$ *и предположим также, что эти числа не являются корнями многочлена* $\tilde{Q}(x)$, *т.е.* $\tilde{Q}(\alpha\pm\beta i)\neq 0$.

Тогда можно найти единственным образом числа A *и* B, *и многочлен* $\tilde{P}(x)$ *такие, что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\ell} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{\ell-1}\tilde{Q}(x)},$$

где последняя дробь правильная.

► Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\ell} = \frac{P_n(x) - (Ax+B)\tilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^\ell\tilde{Q}(x)}.$$

Выберем числа A и B таким образом, чтобы комплексные числа $\alpha\pm\beta i$ были корнями числителя последней дроби, т.е. чтобы

$$P_n(\alpha\pm\beta i) - (A(\alpha\pm\beta i)+B)\tilde{Q}(\alpha\pm\beta i) = 0.$$

Сначала рассмотрим равенство

$$P_n(\alpha+\beta i) - (A(\alpha+\beta i)+B)\,\tilde{Q}(\alpha+\beta i) = 0. \qquad (*)$$

Пусть $P_n(\alpha+\beta i) = P_1 + P_2 i$ и $\tilde{Q}(\alpha+\beta i) = Q_1 + Q_2 i$, где P_1, P_2, Q_1 и Q_2 — вещественные числа, и $P_1^2 + P_2^1 \neq 0$, $Q_1^2 + Q_2^1 \neq 0$. Тогда, отделяя в равенстве (*) вещественные и мнимые части, получим

$$P_1 + P_2 i - (A\alpha + B + A\beta i)(Q_1 + Q_2 i) = \\ = (P_1 - A(\alpha Q_1 - \beta Q_2) - BQ_1) + (P_2 - A(\alpha Q_2 + \beta Q_1) - BQ_2)\, i = 0,$$

и числа A и B найдутся из системы

$$\begin{cases} A(\alpha Q_1 - \beta Q_2) + BQ_1 = P_1, \\ A(\alpha Q_2 + \beta Q_1) + BQ_2 = P_2. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = (\alpha Q_1 - \beta Q_2)\, Q_2 - (\alpha Q_2 + \beta Q_1)\, Q_1 = -\beta\left(Q_2^2 + Q_1^2\right) \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение, причем числа A и B не могут одновременно равняться нулю.

Из теории комплексных чисел известно, что

$$P_n(\alpha-\beta i) = P_n\left(\overline{\alpha+\beta i}\right) = \overline{P_n(\alpha+\beta i)} = P_1 - P_2 i$$

и

$$\tilde{Q}_n(\alpha-\beta i) = \tilde{Q}_n\left(\overline{\alpha+\beta i}\right) = \overline{\tilde{Q}_n(\alpha+\beta i)} = Q_1 - Q_2 i.$$

Отсюда

$$P_n(\alpha-\beta i) - (A(\alpha-\beta i)+B)\,\tilde{Q}((\alpha-\beta i)) = \\ = P_n(\alpha+\beta i) - (A(\alpha+\beta i)+B)\,\tilde{Q}((\alpha+\beta i)) = 0.$$

Следовательно, число $\alpha-\beta i$ тоже будет корнем числителя дроби $\dfrac{P_n(x) - (Ax+B)\,\tilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^{\ell}\,\tilde{Q}(x)}$, и эту дробь можно сократить на $(x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i)) = x^2+px+q$. Единственность такого представления доказывается так же, как и в лемме 1. ◄

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

► Пусть дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильная и несократимая, причем знаменатель имеет старший коэффициент равный единице и раскладывается на вещественные множители следующим образом:

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_s)^{k_s} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\ell_1} \ldots \left(x^2+p_jx+q_j\right)^{\ell_j},$$

где каждый квадратный трехчлен $x^2+p_ix+q_i$ имеет отрицательный дискриминант и, следовательно, комплексные корни.

Тогда по лемме 1 дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\tilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\tilde{Q}^{(1)}(x)=(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_s)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\ell_1}\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{\ell_j}$.

Далее по лемме 1 можно найти число A_{12} и многочлен $\tilde{P}^{(12)}$ такие, что

$$\frac{\tilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}\tilde{Q}^{(1)}(x)}=\frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\frac{\tilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2}\tilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Действуя дальше таким же образом, получим разложение

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{x-a_1}+\frac{\tilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\tilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Итак, мы получили, что если знаменатель правильной дроби имеет вещественный корень a_1 кратности k_1, то дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей первого и второго типа и некоторой правильной дроби, знаменатель которой получается из знаменателя исходной дроби делением на $(x-a_1)^{k_1}$.

Аналогично, для следующего вещественного корня a_2 кратности k_2 получим еще k_2 простейших дробей и т.д. Получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{x-a_1}+\frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}}+$$
$$+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\dots+\frac{A_{2k_2}}{x-a_2}+\dots+\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}}+\frac{A_{s2}}{(x-a_s)^{k_s-1}}+\dots+\frac{A_{sk_s}}{x-a_s}+\frac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)},$$

где $\dfrac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)}$ — правильная дробь, знаменатель которой $\tilde{Q}^{(s)}(x)=\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\ell_1}\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{\ell_j}$ имеет только комплексные корни.

Поэтому по лемме 2

$$\frac{\tilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\tilde{Q}^{(s)}(x)}=\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}}+\frac{\tilde{\tilde{P}}^{(11)}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1-1}\tilde{\tilde{Q}}^{(1)}(x)}.$$

Продолжая таким же образом, мы получим, что каждой паре комплексно-сопряженных корней знаменателя кратности ℓ в разложении дроби будет соответствовать ℓ простейших дробей третьего и четвертого типа, и, окончательно, данная дробь будет представлена в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} +$$
$$+ \frac{A_{22}}{(x-a_2)^{k_2-1}} + \dots + + \frac{A_{2k_2}}{x-a_2} + \dots + \frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \frac{A_{s2}}{(x-a_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{x-a_s} +$$
$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1-1}} + \dots + \frac{B_{1\ell_1}x + C_{1\ell_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$
$$+ \dots + \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\ell_j}} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\ell_j-1}} + \dots + \frac{B_{j\ell_j}x + C_{j\ell_j}}{x^2+p_jx+q_j}.$$

◄

Замечание 1. *Мы доказали, что корню кратности k соответствует k простейших дробей. В действительности часть коэффициентов могут быть равными нулю (но не первые), поэтому на практике количество простейших дробей, соответствующих одному корню, может быть меньше, чем его кратность.*

Следствие. *Интеграл от рациональной дроби может быть выражен через элементарные функции.*

► Если дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целой части дроби) и правильной дроби. Правильную дробь можно разложить в сумму простейших дробей. Поэтому достаточно доказать, что каждая простейшая дробь имеет первообразную, которую можно записать с помощью элементарных функций.

Рассмотрим, как вычисляется интеграл от каждой из простейших дробей.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q}$. Для вычисления этого интеграла выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$.

Так как дискриминант квадратного трехчлена $p^2-4q<0$, то $\frac{4q-p^2}{4} > 0$. Обозначим $\frac{4q-p^2}{4} = a^2$ и введем новую переменную $t = x+\frac{p}{2}$. Тогда $dx = dt$

и

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q} = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{Ba-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{a}+C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^k}$, $\left(p^2-4q<0\right)$, $k>1$.

Так же, как и в предыдущем случае, выделим полный квадрат в трехчлене, стоящем в знаменателе, и сделаем замену переменной $t = x+\dfrac{p}{2}$. Получим

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^k} = A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + M\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

где $M = B-\dfrac{Ap}{2}$ и $a^2 = \dfrac{4q-p^2}{4}$.

Первый интеграл этой суммы легко вычисляется:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Для вычисления второго интеграла проделаем следующие преобразования:

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(a^2+t^2\right)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

К последнему из получившихся интегралов применим метод интегрирования по частям, где

$$u=t,\quad dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} \Rightarrow du=dt,\quad v=\frac{1}{2(1-k)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}:$$

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}},$$

с помощью которого перейдем к интегралу от дроби третьего типа (если $k=2$) или четвертого типа (если $k>2$), но меньшей степени.

Таким образом

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = -\frac{1}{2a^2(1-k)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{2(1-k)}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Если обозначить $I_k = \displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, получим рекуррентную формулу

$$I_k = \frac{1}{2a^2\,(k-1)}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2\,(k-1)}\cdot I_{k-1}.$$

Применяя эту формулу (или этот метод) $k-1$ раз, придем к интегралу от дроби третьего типа, который вычисляется, как показано выше. ◀

Пример 1. Вычислить $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dt}{x^2+6x+13}$.

☺ Выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2+6x+13 = (x+3)^2+4$ и введем новую переменную $t = x+3$. Тогда $x = t-3$ и $dx = dt$.

$$\int \frac{(2x+3)\,dt}{x^2+6x+13} = \int \frac{2t-6+3}{t^2+4}dt = \int \frac{2tdt}{t^2+4} - 3\int \frac{dt}{t^2+4} =$$
$$= \int \frac{d\left(t^2+4\right)}{t^2+4} - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} = \ln\left(t^2+4\right) - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C,$$

где $t = x+3$. ☻

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int \frac{(x-2)\,dx}{\left(x^2-2x+10\right)^2}$.

☺ Выделим полный квадрат в трехчлене, стоящем в знаменателе: $x^2-2x+10 = (x-1)^2+9$ и введем новую переменную $t = x-1$. Тогда $x = t+1$ и $dx = dt$. Отсюда

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{\left(x^2-2x+10\right)^2} = \int \frac{(t-1)\,dt}{\left(t^2+9\right)^2} = \int \frac{tdt}{\left(t^2+9\right)^2} - \int \frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2}.$$

Вычисляем первое слагаемое:

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+9\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{\left(t^2+9\right)^2} = -\frac{1}{2\left(t^2+9\right)} + C_1.$$

Во втором слагаемом с помощью метода интегрирования по частям понижаем степень в знаменателе:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{\left(9+t^2\right)-t^2}{\left(t^2+9\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2+9} - \frac{1}{9}\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+9\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{9\cdot 3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\left(-\frac{t}{2\left(t^2+9\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+9}\right) = \frac{t}{18\left(t^2+9\right)} + \frac{1}{54}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3} + C_2.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{\left(x^2-2x+10\right)^2} = -\frac{1}{2\left(t^2+9\right)} - \frac{t}{18\left(t^2+9\right)} - \frac{1}{54}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3} + C,$$

где $t = x - 1$. ☻

Замечание 2. *Интеграл* $\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}$ *можно было не вычислять по частям, а применить готовую рекуррентную формулу.*

Пример 3. Вычислить $\int \frac{3x^2 - 18x + 33}{(x-2)^2(x^2-2x+3)} dx.$

☺ Дробь, стоящая под знаком интеграла, может быть представлена в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{3x^2 - 18x + 33}{(x-2)^2(x^2-2x+3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+3}.$$

Приводя сумму написанных дробей к общему знаменателю, получим равенство

$$\frac{3x^2 - 18x + 33}{(x-2)^2(x^2-2x+3)} = \\ = \frac{A\left(x^2-2x+3\right) + B(x-2)\left(x^2-2x+3\right) + (Cx+D)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2-2x+3)},$$

откуда следует, что числители этих дробей тождественно равны:

$$3x^2 - 18x + 33 = A\left(x^2-2x+3\right) + B(x-2)\left(x^2-2x+3\right) + (Cx+D)(x-2)^2. \tag{*}$$

Теперь вспомним два условия равенства двух многочленов:

1) Два многочлена степени n тождественно равны тогда и только тогда, когда они равны при $(n+1)$-м различном значении переменной.

2) Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях.

Раскроем скобки в правой части полученного равенства

$$3x^2 - 18x + 33 = x^3(B+C) + x^2(A - 4B - 4C + D) + \\ + x(-2A + 7B + 4C - 4D) + (3A - 6B + 4D)$$

и, пользуясь вторым условием равенства многочленов, напишем систему уравнений:

$$\begin{cases} B + C = 0, \\ A - 4B - 4C + D = 3, \\ -2A + 7B + 4C - 4D = -18, \\ 3A - 6B + 4D = 33. \end{cases}$$

Прежде, чем решать эту систему, воспользуемся первым условием равенства многочленов и подставим в равенство (*) $x = 2$ (подставим значение переменной x, равное вещественному корню знаменателя). Тогда получим $3A = 9$, откуда $A = 3$.

Решая систему с учетом уже известного значения A, получим $D = 0$, $B = -4$, $C = 4$. Теперь данный интеграл можно представить в виде суммы интегралов от простейших дробей:

$$\int \frac{3x^2 - 18x + 33}{(x-2)^2 (x^2 - 2x + 3)} dx = 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 4 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{xdx}{x^2 - 2x + 3}.$$

Каждый из этих интегралов вычисляем отдельно:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} + C_1,$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x-2| + C_2,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 2x + 3} = \int \frac{xdx}{(x-1)^2 + 2} = \begin{pmatrix} x - 1 = t \\ dx = dt \end{pmatrix} = \int \frac{(t+1)\,dt}{t^2 + 2} =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^2+2} + \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + 2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C_3.$$

Общий ответ:

$$\int \frac{3x^2 - 18x + 33}{(x-2)^2 (x^2 - 2x + 3)} dx =$$

$$= \frac{-3}{x-2} - 4\ln|x-2| + 2\ln\left(x^2 - 2x + 3\right) + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

☻

Метод нахождения коэффициентов разложения, примененный при решении последней задачи, называется ***методом неопределенных коэффициентов***.

Пример 4. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\left(3x^3 + 8x^2 + 7x + 7\right) dx}{(x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}$.

☺ Разложим дробь, стоящую под знаком интеграла, на простейшие методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{3x^3 + 8x^2 + 7x + 7}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Dx + E}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}.$$

Приводя простейшие дроби к общему знаменателю и приравнивая числители дробей, получим равенство

$$3x^3 + 8x^2 + 7x + 7 =$$

$$= A\left(x^2 + 2x + 2\right)^2 + (Bx + C)(x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right) + (Dx + E)(x-1).$$

Подставляя в это равенство $x = 1$, получим $A = 1$.

Далее приравнивая коэффициенты многочленов, стоящих в правой и левой частях написанного равенства, получим систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 4A + B + C = 3, \\ 8A + C + D = 8, \\ 8A - 2B - D + E = 7, \\ 4A - 2C - E = 7, \end{cases}$$

откуда $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = -3$.

Таким образом,

$$\int \frac{\left(3x^3 + 8x^2 + 7x + 7\right) dx}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)^2} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{xdx}{x^2+2x+2} - 3\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2},$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d\,(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C_1.$$

В последних двух интегралах выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ и сделаем подстановку $t = x + 1$. Тогда $x = t - 1$, $dx = dt$ и

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+2} = \int \frac{(t-1)\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \operatorname{arctg} t + C_2,$$
$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C_3.$$

При вычислении последнего интеграла была использована рекуррентная формула.

Окончательный ответ: $\displaystyle\int \frac{\left(3x^3 + 8x^2 + 7x + 7\right) dx}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)^2} =$

$$= \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+2x+2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{3(x+1)}{2\left(x^2+2x+2\right)} + C.$$

☻

4.2 Интегрирование выражений, содержащих иррациональности

Пусть $P\left(t_1, t_2, \ldots t_\ell\right)$ и $Q\left(t_1, t_2, \ldots t_\ell\right)$ — многочлены относительно ℓ переменных $t_1, t_2, \ldots t_\ell$. Тогда дробь $R\left(t_1, t_2, \ldots t_\ell\right) = \dfrac{P\left(t_1, t_2, \ldots t_\ell\right)}{Q\left(t_1, t_2, \ldots t_\ell\right)}$ будем называть ***рациональной функцией*** относительно тех же переменных.

1. Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right) dx,$$

где $ad - cb \neq 0$ и показатели степени $r_1, r_2, \ldots r_m$ — рациональные числа.

Такой интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби от одной переменной подстановкой $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s — наименьший общий знаменатель чисел $r_1, r_2, \ldots r_m$. Тогда $x = \dfrac{dt^s - b}{a - ct^s}$ и $dx = \dfrac{s\,(ad-bc)\,t^{s-1}}{(a-ct^s)^2}dt$ — рациональные дроби, следовательно, дробь, стоящая под интегралом, станет дробью, содержащей переменную t в целых степенях.

Это означает, что такие интегралы всегда выражаются через элементарные функции.

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}$.

☺ Сделаем подстановку $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^6 + 2t^9 + t^8} = 6\int \frac{dt}{t\,(1 + t^2 + 2t^3)}.$$

Для вычисления последнего интеграла разложим на множители знаменатель подынтегральной дроби: $t\left(1 + t^2 + 2t^3\right) = t\,(1+t)\left(2t^2 - t + 1\right)$ и затем эту дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{1}{t\,(1+t^2+2t^3)} = \frac{1}{t\,(1+t)\,(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1} =$$
$$= \frac{A\,(1+t)\left(2t^2-t+1\right) + Bt\left(2t^2-t+1\right) + (Ct+D)\,t\,(1+t)}{(1+t)\,(2t^2-t+1)}.$$

Вычислив значения неопределенных коэффициентов $A = 1$, $B = -1/4$, $C = -3/2$, $D = 1/4$, разложим полученный интеграл на сумму трех:

$$\int \frac{dt}{t\,(1+t^2+2t^3)} = \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{4}\int \frac{6t-1}{2t^2-t+1}dt.$$

Вычислим третий интеграл, вводя новую переменную $z = t - \dfrac{1}{4}$:

$$\int \frac{6t-1}{2t^2-t+1}dt = \int \frac{3t - \frac{1}{2}}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}dt = \int \frac{3z + \frac{1}{4}}{z^2 + \frac{7}{16}}dz =$$
$$= 3\int \frac{zdz}{z^2+\frac{7}{16}} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2+\frac{7}{16}} = \frac{3}{2}\ln\left(z^2 + \frac{7}{16}\right) + \frac{4}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4z}{\sqrt{7}} + C =$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C.$$

Тогда $\displaystyle\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}} =$

$$= 6\ln|t| - \frac{6}{4}\ln|1+t| - \frac{6}{4}\left(\frac{3}{2}\ln\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)+C =$$
$$= \ln x - \frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) - \frac{9}{4}\ln\left(\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$$

☻

Пример 6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

☺ Сделаем замену переменной $\dfrac{x+1}{x-1}=t^3$, $x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\dfrac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$.

Тогда $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = -6\int t\cdot\frac{t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} = -6\int\frac{t^3dt}{\left(t^3-1\right)^2}$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную дробь и, потому, может быть представлена в виде суммы простейших дробей. Но значительно проще проинтегрировать последний интеграл по частям, положив $u=t$, $dv=\dfrac{t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} \Rightarrow du=dt$, $v=-\dfrac{1}{3\left(t^3-1\right)}$. Получим

$$\int\frac{t^3dt}{\left(t^3-1\right)^2} = -\frac{t}{3\left(t^3-1\right)}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^3-1}.$$

Дробь, стоящую в последнем интеграле, разложим на простейшие:

$$\frac{1}{t^3-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}=\frac{A\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1)}{t^3-1},$$

откуда получим $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=-2/3$.

Тогда последний интеграл будет равен (используя замену $z=t+\dfrac{1}{2}$)

$$\int\frac{dt}{t^3-1}=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\int\frac{z+\frac{3}{2}}{z^2+\frac{3}{4}}dz=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left(z^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательно,

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx =$$
$$= 6\left(\frac{t}{3\left(t^3-1\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C =$$
$$= \frac{2t}{t^3-1} - \frac{2}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\ln\left(t^2+t+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. ☻

2. Интеграл от дифференциального бинома.

Выражение $x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, и m, n и p — рациональные числа, называется ***дифференциальным биномом***. Рассмотрим интеграл от дифференциального бинома, т.е. интеграл вида

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx.$$

Этот интеграл приводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

1) $p \in \mathbb{Z}$. Применяется подстановка $x = t^k$, где k — наименьший общий знаменатель чисел m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Применяется подстановка $ax^n+b = t^r$, где r — знаменатель числа p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Применяется подстановка $a + bx^{-n} = t^r$, где r — знаменатель числа p.

В середине XIX века русский математик П. Л. Чебышев доказал, что в остальных случаях интеграл от дифференциального бинома через элементарные функции не выражается.

Пример 7. $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} dx.$

☺Здесь $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{m+1}{n} = 2$ — целое. Поэтому применим вторую подстановку: $2+x^{\frac{2}{3}} = t^4$. Отсюда $x = \left(t^4-2\right)^{\frac{3}{2}}$ и $dx = 6t^3\left(t^4-2\right)^{\frac{1}{2}} dt$.

Тогда

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} dx = 6\int t^4\left(t^4-2\right) dt = 6\left(\frac{t^9}{9} - 2\frac{t^5}{5}\right) + C =$$
$$= \frac{2}{3}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} - \frac{12}{5}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} + C. ☻$$

Пример 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{2+x^4}}$.

☺ Здесь $m=-11$, $n=4$, $p=-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-10}{4}-\dfrac{1}{2}=-3$ — целое. Применим третью подстановку $\dfrac{2}{x^4}+1=t^2$.

Тогда $x=\left(\dfrac{2}{t^2-1}\right)^{\frac{1}{4}}$, $dx=-\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{4}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 2tdt$ и

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{2+x^4}}=-\frac{2^{\frac{1}{4}}}{2\cdot 2^{\frac{11}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}\int \frac{t\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}}\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{16}\int \left(t^2-1\right)^2 dt=-\frac{1}{16}\left(t^5-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C,$$

где $t=\dfrac{\sqrt{2+x^4}}{x^2}$. ☻

3. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$.

Такой интеграл можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью ***подстановок Эйлера***:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}x$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\left(x-x_1\right)$, где x_1 — один из корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c, если $b^2-4ac>0$.

Заметим, что в третьем случае мы имеем интеграл того же типа, что и в первом пункте, и подстановка Эйлера совпадает с подстановкой, рекомендованной там, так как

$$t=\pm\frac{\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}}{x-x_1}=\pm\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}.$$

Пример 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

☺ Положим $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$. Тогда $x^2+2x+2=t^2-2xt+x^2$, откуда $x=\dfrac{t^2-2}{2\left(t+1\right)}$ и $dx=\dfrac{t^2+2t+2}{2\left(t+1\right)^2}dt$. Учитывая, что

$$1+\sqrt{t^2+2t+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2\left(t+1\right)}=\frac{t^2+4t+4}{2\left(t+1\right)}=\frac{\left(t+2\right)^2}{2\left(t+1\right)},$$

получим $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{t^2+2t+2}{\left(t+1\right)\left(t+2\right)^2}dt$.

Для вычисления последнего интеграла разложим дробь, стоящую под интегралом, на простейшие: $\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2} = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{2}{(t+2)^2}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C =$$
$$= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right| + \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+2} + C.$$

☻

Пример 10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

☺ Положим $\sqrt{1-x^2} = t(1-x)$. Тогда $1-x^2 = t^2(1-x)^2$, откуда $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ и $dx = \dfrac{4tdt}{(t^2+1)^2}$. Окончательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1} = -\int \frac{4tdt}{(t-1)^2(t^2+1)} = 2\int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t-1)^2}\right)dt =$$
$$= 2\operatorname{arctg} t + \frac{2}{t-1} + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1} + C.$$

☻

С помощью подстановок Эйлера интегралы данного вида всегда можно привести к интегралам от рациональных дробей и, следовательно, выразить через элементарные функции. Но эти подстановки часто приводят к громоздким вычислениям, и потому на практике обычно применяются другие методы. Практические приемы вычисления таких интегралов будут изложены в сборнике задач.

4.3 Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ можно привести к интегралу от рациональной дроби с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки***: $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{и} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 11. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

☺ Применяя универсальную тригонометрическую подстановку, получим

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

☻

Пример 12. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x}$.

☺ Пусть $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x + 3\cos x = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{3\left(1-t^2\right)}{1+t^2} = \frac{3+2t-3t^2}{1+t^2} \quad \text{и}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x} = \int \frac{2dt}{3+2t-3t^2} = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{2}{3}t - 1} =$$
$$= -\frac{2}{3}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3t-1-\sqrt{10}}{3t-1+\sqrt{10}}\right| + C,$$

где $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. ☻

Использование универсальной тригонометрической подстановки доказывает, что интеграл такого вида всегда можно привести к интегралу от рациональной дроби и, следовательно, выразить через элементарные функции, но так как вычисления часто бывают очень громоздки, то применяются также различные другие методы, о которых мы расскажем в сборнике задач.

Глава 6

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1 Определение

1.1 Интегралыные суммы Римана

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Произвольным образом разобьем промежуток на n частей точками x_i, $i = 0, \ldots n$ так, что $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Совокупность точек x_i будем называть ***разбиением*** отрезка $[a, b]$ и обозначать T.

Обозначим $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ — i-ый промежуток разбиения T и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длину такого промежутка ($i = 1, \ldots n$). Пусть $\xi_i \in \Delta_i$ — произвольная точка на каждом из промежутков Δ_i.

Составим сумму $\sigma_T(\xi, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, которую будем называть ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ при разбиении T и фиксированных промежуточных точках ξ_i.

Число $\lambda(T) = \max\limits_{i=1,\ldots n} \Delta x_i$ назовём ***мелкостью разбиения*** T или ***диаметром*** разбиения, или ***рангом дробления***.

Определение 6.1.1. *Число I будем называть* ***определенным интегралом*** *функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ так, что для любого разбиения T такого, что $\lambda(T) < \delta$ и для любого выбора промежуточных точек ξ_i будет выполняться неравенство $|\sigma_T(\xi, f) - I| < \varepsilon$.*

В этой ситуации мы будем писать $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma_T(\xi, f) = I$.

Обозначают определенный интеграл следующим образом: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Данное определение интеграла принадлежит немецкому математику Риману, поэтому его называют ***римановским интегралом***, и, если число I

существует, то говорят, что данная функция ***интегрируема по Риману*** на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Составить интегральную сумму для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $[0, 1]$. Отрезок разделить на равные части и в качестве промежуточных точек взять правые концы промежутков деления.

☺ Разделим промежуток $[0, 1]$ на n равных частей. Точки деления будут иметь координаты $x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots n$. Значения функции в этих точках равны $\dfrac{i^2}{n^2}$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то интегральная сумма равна $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^2}{n^3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$. ☻

Замечание 1. *Если предположить, что интеграл от данной функции существует (что позже будет доказано), то он равен*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. С помощью определения интеграла вычислить интеграл от постоянной функции на отрезке $[a, b]$.

☺ Пусть $f(x) = C$. Тогда для произвольного разбиения отрезка и произвольного выбора промежуточных точек $f(\xi_i) = C$ и

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b-a).$$

Таким образом, $\int\limits_a^b C dx = C(b-a)$. ☻

Из последнего примера следует, что $\int\limits_a^b 0 dx = 0$.

Интеграл существует не для всякой функции, заданной на отрезке.

Пример 3. Рассмотрим функцию Дирихле

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

В качестве промежутка интегрирования возьмем отрезок $[0, 1]$. Разобьем отрезок на n равных частей и выберем сначала в качестве промежуточных точек ξ_i рациональные точки. Тогда интегральная сумма будет равна

$$\sigma_T(\xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1.$$

Затем при таком же разбиении выберем в качестве промежуточных точек ξ_i иррациональные точки. Тогда интегральная сумма равна

$$\sigma_T(\xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Очевидно, что если $0 < \varepsilon < 1/2$, то не существует числа I, которое отличалось бы от всех интегральных сумм меньше, чем на ε, т.е. функция Дирихле не интегрируема по Риману.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на промежутке $[0, 1]$.

☺ Разобьем отрезок на n равных частей и возьмем в качестве промежуточных точек ξ_i левые концы промежутков деления (т.е. $\xi_i = i/n$) для всех $i > 1$ и $\xi_1 = 1/n^4$.

Тогда интегральная сумма будет равна

$$\sigma_T(\xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{1}{n}\left(n^2 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\right) = n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Используя неравенство, которое легко доказывается методом математической индукции,

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

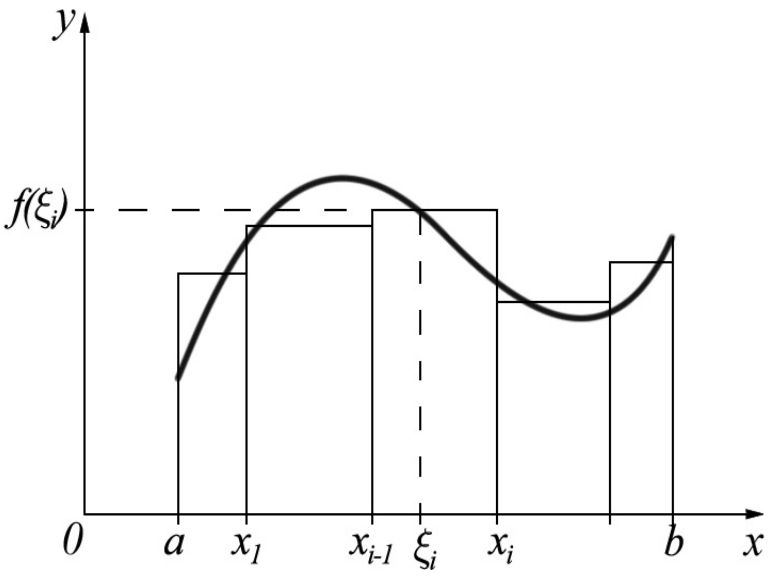
получим, что второе слагаемое в интегральной сумме ограничено, в то время как первое стремится к $+\infty$. Следовательно, числа I не существует. ☻

В дальнейшем мы покажем (глава 8), что определение интеграла можно разумно усовершенствовать так, что интеграл от функции, приведенной в этом примере, будет существовать.

Замечание 2. *Аналогично можно говорить об интеграле функции, заданной на интервале (a, b). Так как эта функция не определена в точках a и b, то эти точки нельзя брать в качестве промежуточных точек.*

1.2 Геометрическая и физическая интерпретация определенного интеграла

1. Пусть $f(x) \geqslant 0$. Тогда интегральную сумму можно интерпретировать как площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основаниями, равными Δx_i, и высотами, равными $f(\xi_i)$:



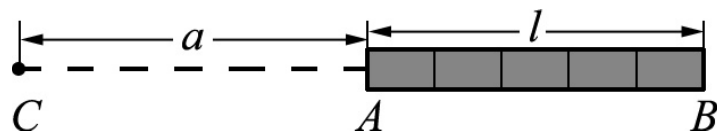
Очевидно, при уменьшении диаметра разбиения эта ступенчатая фигура приближается к фигуре, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу — осью абсцисс и с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис.). Эту фигуру будем называть ***криволинейной трапецией***.

Разумно принять за площадь этой криволинейной трапеции предел площади указанной ступенчатой фигуры, т.е. площадь криволинейной трапеции равна интегралу от данной функции по данному промежутку.

2. Определенный интеграл широко применяется при решении физических задач. Рассмотрим для примера одну из них.

Стержень AB, длина которого l и масса M притягивает точку C массы m, которая лежит на его продолжении на расстоянии a от A — ближайшего конца стержня. Найти силу взаимодействия стержня и точки (см. рис.).

(Сила взаимодействия двух точечных масс определяется по формуле $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где m_1 и m_2 — массы точек, а r — расстояние между ними. Предполагается, что плотность стержня постоянна.)



Разделим стержень на n равных частей и будем считать, что каждая часть стержня является точечной массой, равной $\dfrac{M}{n}$, а расстояние от точки C до i-ой части стержня равно $a + \dfrac{l}{n}(i-1)$. Тогда сила притяжения стержня и точки C будет приближенно равна

$$\sum_{i=1}^{n} k\frac{m\frac{M}{n}}{\left(a+\frac{l(i-1)}{n}\right)^2} = kmM\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(a+\frac{l(i-1)}{n}\right)^2}\frac{1}{n}.$$

Данная сумма будет интегральной суммой для функции $f(x) = \dfrac{1}{(a+x)^2}$ на промежутке $[0,l]$. Очевидно, точный ответ мы получим, если в этой интегральной сумме устремим n к ∞, и этот предел (если он существует) равен

$$kmM\int\limits_0^l \frac{dx}{(a+x)^2}.$$

§2 Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема 6.2.1. *Если функция интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

► Допустим, что функция не ограничена на данном промежутке. Возьмем некоторое число $\varepsilon_0 > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon_0)$, для которого выполнено условие, сформулированное в определении интеграла. Зафиксируем разбиение промежутка T такое, что $\lambda(T) < \delta(\varepsilon_0)$. Тогда неравенство $I-\varepsilon_0 < \sigma_T(\xi,f) < I+\varepsilon_0$ должно выполняться при любом выборе промежуточных точек ξ_i.

Если функция не ограничена на $[a,b]$, то она не ограничена, по крайней мере, на одном из промежутков деления этого отрезка. Не нарушая общности рассуждений допустим, что она не ограничена на $[x_0,x_1]$. Тогда на этом промежутке существует последовательность точек $\xi_1^{(m)}$, для которых $f\left(\xi_1^{(m)}\right) \underset{m\to\infty}{\to} \infty$. Зафиксируем точки ξ_i на остальных промежутках и рассмотрим последовательность интегральных сумм $\sigma_T^{(m)}\left(\xi^{(m)},f\right)$ для фиксированного разбиения T и последовательности промежуточных точек $\xi^{(m)} = \left(\xi_1^{(m)},\xi_2,\dots\xi_n\right)$.

Эти интегральные суммы равны

$$\sigma_T^{(m)}\left(\xi^{(m)},f\right) = f\left(\xi_1^{(m)}\right)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

и, очевидно, стремятся к бесконечности при $m\to\infty$, что противоречит тому, что все интегральные суммы должны быть ограничены. ◄

Данное условие является только необходимым. Как было показано выше, функция Дирихле является ограниченной, но не интегрируемой.

§3 Интегральные суммы Дарбу

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Будем считать, что на этом отрезке функция ограничена.

Выберем какое-нибудь разбиение T этого отрезка и обозначим

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{и} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Тогда суммы $\qquad s_T(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad$ и $\quad S_T(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

будем называть, соответственно, ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу*** данной функции на данном промежутке.

Так как на каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$, то для любой интегральной суммы данной функции справедливо

$$s_T(f) \leqslant \sigma_T(\xi, f) \leqslant S_T(f).$$

Эти суммы играют важную роль при выяснении вопроса об интегрируемости функции, поэтому изучим подробно их свойства.

Определение 6.3.1. *Пусть T и T' — два разбиения отрезка $[a, b]$. Будем говорить, что разбиение T' является* ***измельчением*** *разбиения T, если каждая точка деления из T является точкой деления из T'.*

Записывать этот факт будем следующим образом: $T \subset T'$. Иногда используют запись $T \prec T'$.

Сформулируем и докажем основные свойства сумм Дарбу.

Свойство 1. *Выполнены равенства*

$$S_T(f) = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi, f) \quad \text{и} \quad s_T(f) = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi, f).$$

► Докажем первое равенство. Для доказательства воспользуемся определением супремума.

Неравенство $\sigma_T(\xi, f) \leqslant S_T(f)$, как уже отмечалось, выполнено. Поэтому осталось доказать, что, взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, можно найти набор промежуточных точек $\left\{\tilde{\xi}_i\right\}_{i=1}^{n}$, для которых будет выполняться неравенство $S_T(f) - \varepsilon \leqslant \sigma_T\left(\tilde{\xi}_i, f\right)$.

Так как $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, то для каждого $i = 1, \ldots, n$ можно найти $\tilde{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, при котором $M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a} < f\left(\tilde{\xi}_i\right)$. Умножая последнее неравенство на Δx_i и суммируя по i, получим требуемое.

Второе равенство доказывается аналогично. ◄

Свойство 2. *Если $T \subset T'$, то $s_T \leqslant s_{T'}$ и $S_T \geqslant S_{T'}$.*

► Пусть разбиение T состоит из точек $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Достаточно рассмотреть случай, когда измельчение T' получается присоединением только одной точки. Обозначим эту точку через x' и положим, что $x_{k-1} < x' < x_k$.

Тогда будут выполнены равенства

$$s_T\left(f\right) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i \Delta x_i + m_k \Delta x_k, \quad \text{и}$$

$$s_{T'}\left(f\right) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i \Delta x_i + \bar{m}_k \left(x' - x_{k-1}\right) + \bar{\bar{m}}_k \left(x_k - x'\right),$$

где $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f\left(x\right), \quad \bar{m}_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x']} f\left(x\right), \quad \bar{\bar{m}}_k = \inf\limits_{x \in [x', x_k]} f\left(x\right).$

Так как промежутки $[x_{k-1}, x']$ и $[x', x_k]$ входят в промежуток $[x_{k-1}, x_k]$, то $m_k \leqslant \bar{m}_k$ и $m_k \leqslant \bar{\bar{m}}_k$, откуда следует, что

$$s_{T'}\left(f\right) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i \Delta x_i + \bar{m}_k \left(x' - x_{k-1}\right) + \bar{\bar{m}}_k \left(x_k - x'\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i \Delta x_i + m_k \left(x' - x_{k-1}\right) + m_k \left(x_k - x'\right) =$$
$$= \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i \Delta x_i + m_k \left(x_k - x_{k-1}\right) = s_T\left(f\right),$$

т.е. с измельчением разбиения T нижние суммы Дарбу не убывают.

Невозрастание верхних сумм доказывается аналогично и предоставляется читателю. ◄

Свойство 3. *Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху, а множество верхних сумм ограничено снизу.*

► Докажем сначала, что при любых разбиениях отрезка T' и T'' выполняется неравенство $s_{T'}\left(f\right) \leqslant S_{T''}\left(f\right)$.

Для этого возьмем разбиение $T = T' \cup T''$, состоящее из всех точек T' и T''. Очевидно, что T является измельчением разбиений T' и T''. Поэтому на основании первого свойства и неравенства $s_T\left(f\right) \leqslant S_T\left(f\right)$, которое выполняется для любого разбиения T, получим $s_{T'}\left(f\right) \leqslant s_T\left(f\right) \leqslant S_T\left(f\right) \leqslant S_{T''}\left(f\right)$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что каждая нижняя сумма Дарбу ограничена любой из верхних сумм сверху, а каждая верхняя любой из нижних снизу. ◄

Обозначим

$$I_* = \sup_T s_T(f) \quad \text{и} \quad I^* = \inf_T S_T(f).$$

Эти числа называются, соответственно, ***нижним*** и ***верхним интегралами Дарбу*** данной функции.

В силу доказанного для любых нижней и верхней сумм Дарбу выполняется неравенство $s(f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(f)$.

§4 Критерии интегрируемости функции

Теорема 6.4.1. *Для того чтобы заданная и ограниченная на отрезке функция $f(x)$ была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы, задав произвольное число $\varepsilon > 0$, можно было найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения T, мелкость которого меньше δ, выполнялось неравенство $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$.*

► *Необходимость.* Пусть данная функция интегрируема на отрезке. Тогда существует число I, для которого, какое бы $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, найдется такое $\delta > 0$, что выполняется неравенство $|\sigma_T(\xi, f) - I| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ при любом выборе точек $\{\xi_i\}$ и любом разбиении T, удовлетворяющем условию $\lambda(T) < \delta$.

Отсюда $I - \dfrac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(\xi, f) < I + \dfrac{\varepsilon}{4}$ и справедливы неравенства

$S_T(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma_T(\xi, f) \leqslant I + \dfrac{\varepsilon}{4}$ и $s_T(f) = \inf\limits_{\xi} \sigma_T(\xi, f) \geqslant I - \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Вычитая второе неравенство из первого, получим $S_T(f) - s_T(f) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть выполнено условие данной теоремы. Тогда, так как $I^* \leqslant S_T(f)$ и $I_* \geqslant s_T(f)$, то выполняется неравенство

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon.$$

Так как верхний и нижний интегралы Дарбу — константы, а ε — произвольно, то такое неравенство означает, что $I^* = I_*$.

Положим $I^* = I_* = I$ и докажем, что это число удовлетворяет определению интеграла.

Для этого из неравенства $s_T(f) \leqslant \sigma_T(\xi, f) \leqslant S_T(f)$ вычтем неравенство $S_T(f) \geqslant I \geqslant s_T(f)$.

Получим

$$s_T(f) - S_T(f) \leqslant \sigma_T(\xi, f) - I \leqslant S_T(f) - s_T(f)$$

или $|\sigma_T(\xi, f) - I| \leqslant S_T(f) - s_T(f)$. Так как для достаточно мелких разбиений $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, то для этих же разбиений будет выполнено $|\sigma_T(\xi, f) - I| < \varepsilon$. ◄

Определение 6.4.1. *Назовем* ***колебанием функции*** *на отрезке* $[a, b]$ *величину*

$$\omega(f) = \sup_{x', x'' \in [a,b]} (f(x') - f(x'')).$$

Нетрудно показать, что

$$\sup_{x', x'' \in [a,b]} (f(x') - f(x'')) = M - m,$$

где $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, поэтому $\omega(f) = M - m$.

Замечание. *Введем колебание функции* ω_i *на каждом из промежутков* $[x_{i-1}, x_i]$. *Тогда* $S_T(f) - s_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$.

Поэтому условие интегрируемости можно сформулировать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall T: \quad \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Теорема 6.4.2. *Функция, заданная и ограниченная на отрезке, интегрируема на нем тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны между собой.*

Это утверждение является очевидным следствием теоремы 6.4.1. При этом $I = I^* = I_*$.

Это равенство можно было принять за определение интеграла от данной функции на отрезке.

Теорема 6.4.3. *Для того чтобы функция, заданная и ограниченная на отрезке, была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое разбиение отрезка* T, *для которого выполняется неравенство* $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$.

► Необходимость этого утверждения очевидна, поэтому докажем только достаточность. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ и пусть T — разбиение отрезка, для которого $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$.

Тогда $I^* - I_* \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$. Так как ε произвольно, из этого неравенства следует, что $I^* = I_*$, а это означает, что функция интегрируема на данном отрезке. ◄

§5 Классы интегрируемых функций

Теорема 6.5.1. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

► Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке, т.е., задав произвольное $\varepsilon > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, что для любых таких чисел x' и x'', взятых на этом отрезке, что $|x' - x''| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Возьмем такое разбиение отрезка T, что $\lambda(T) < \delta$. Тогда для любого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполняется неравенство $0 < x_i - x_{i-1} < \delta$, следовательно, для любых x', $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ также будет верно $|x' - x''| < \delta$.

Так как функция непрерывна на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, то на этом отрезке она достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i')$ и $m_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i'')$. Тогда $\omega_i = M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ и выполнены условия критерия интегрируемости функции (см. замечание к теореме 6.4.1). ◄

Теорема 6.5.2. *Пусть функция $f(x)$ задана и ограничена на отрезке $[a, b]$, и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти конечное число интервалов, содержащих все точки разрыва этой функции, сумма длин которых не превосходит ε. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.*

► Так как функция ограничена, то существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant C$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем конечное число интервалов, содержащих все точки разрыва, сумма длин которых будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{4C}$. Можно считать, что эти интервалы не пересекаются. Обозначим их объединение через U. Очевидно, что U — открытое множество. Тогда множество $[a, b] \setminus U$ — замкнуто и так как данная функция непрерывна на нем, то она равномерно непрерывна на нем. Следовательно, можно найти такое $\delta > 0$, что если x', $x'' \in [a, b] \setminus U$ и $|x' - x''| < \delta$, то $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Разделим множество $[a, b] \setminus U$ на части, длина каждой из которых не превосходит найденного числа δ, и к точкам деления присоединим границы интервалов множества U. Получим некоторое разбиение отрезка T.

Множество индексов i, для которых промежутки $[x_{i-1}, x_i]$ входят в U (точнее говоря, в U входят внутренние точки этих промежутков) обозначим через I', а множество индексов i, для которых соответствующие промежутки входят в $[a,b]\setminus U$ — через I''.

Тогда $S_T(f) - s_T(f) = \sum\limits_i \omega_i \Delta x_i = \sum\limits_{i\in I'} \omega_i \Delta x_i + \sum\limits_{i\in I''} \omega_i \Delta x_i.$

Так как $\omega_i = \sup\limits_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')| \leqslant 2C$, то

$$\sum_{i\in I'} \omega_i \Delta x_i \leqslant 2C \sum_{i\in I'} \Delta x_i < \frac{2C\varepsilon}{4C} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

На каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in I''$ справедливо неравенство $\omega_i \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, поэтому

$$\sum_{i\in I''} \omega_i \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i\in I''} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_i \Delta x_i = \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно получаем

$$S_T(f) - s_T(f) = \sum_{i\in I'} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i\in I''} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда следует, что функция интегрируема. ◄

Следствие. *Если функция задана и ограничена на отрезке и имеет на нем конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

Пример 1. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = a$ будет интегрируемой на промежутке $[-1, 1]$ так как она ограничена и имеет одну точку разрыва.

Пример 2. Функция $f(x) = \operatorname{sign}\sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = a$ имеет бесконечное число точек разрыва. Это точки вида $x_k = \dfrac{1}{\pi k}$ и $x = 0$, которая является предельной точкой для x_k. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим окрестность точки $x = 0$ радиуса $\varepsilon/6$. Тогда вне этой окрестности окажется только конечное число точек x_k, и каждую из этих точек можно окружить окрестностью радиуса $\varepsilon/(4m)$, где m — число точек, лежащих вне первой окрестности. Тогда сумма длин всех построенных окрестностей равна $2\cdot\dfrac{\varepsilon}{6} + 2m\cdot\dfrac{\varepsilon}{4m} = \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Значит, на основании теоремы 6.5.2 данная функция интегрируема.

Следующая теорема дает еще один пример интегрируемой на отрезке функции, которая может иметь счетное число точек разрыва.

Теорема 6.5.3. *Если функция определена и монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

► Заметим, что если $f(a) = f(b)$, то функция $f(x)$ является константой, а, значит, она интегрируема на отрезке $[a, b]$ (пример 2, гл. 6, § 1). Будем считать, что $f(a) \neq f(b)$.

Так как функция определена и монотонна на $[a, b]$, то выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(b)$ для всех $x \in [a, b]$, т.е. функция ограничена на отрезке.

Кроме того, в силу монотонности функции, ее колебание на произвольном промежутке $[x', x''] \subset [a, b]$ будет равно $f(x'') - f(x')$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и пусть δ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда для всякого разбиения отрезка T, для которого $\lambda(T) < \delta$, будет справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta (f(b) - f(a)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Таким образом, выполняются условия критерия интегрируемости функции. ◄

Определение 6.5.1. *Будем говорить, что множество $E \subset R$ имеет* ***лебегову меру, равную нулю****, если существует покрытие этого множества интервалами, сумма длин которых не превосходит произвольного наперед заданного положительного ε.*

Теорема 6.5.4 (Лебега). *Для интегрируемости функции на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на этом отрезке, и множество ее точек разрыва имело лебегову меру, равную нулю.*

Каждое конечное или счетное множество имеет лебегову меру, равную нулю, т.е. эта теорема является обобщением предыдущих теорем. В дальнейшем мы покажем, что существуют и несчетные множества меры нуль. Теорема Лебега будет доказана в одной из следующих частей нашего курса.

Теорема 6.5.5. *Если функция $f(x)$ определена и ограничена на промежутке (a, b) и интегрируема на каждом промежутке $[c, d] \subset (a, b)$, то она интегрируема на (a, b).*

► Пусть $|f(x)| \leqslant M$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем точки c и d так, чтобы выполнялось неравенство $0 < 2M((c - a) + (b - d)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c, d]$, то для любого разбиения T этого отрезка будет выполнено неравенство $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$. Если к промежуткам разбиения T добавить еще два промежутка $(a, c]$, который будем считать нулевым, и $[d, b)$, который будем считать $n+1$-м, то получим разбиение отрезка $[a, b]$ (содержащее $n+2$ промежутка).

Так как на нулевом и на $n+1$-м промежутках справедливы неравенства

$$\omega_0 \Delta x_0 = \left(\sup_{x', x'' \in (a,c]} \left(f(x') - f(x'') \right) \right) \Delta x_0 \leqslant 2M(c-a),$$

$$\omega_{n+1} \Delta x_{n+1} = \left(\sup_{x', x'' \in [d,b)} \left(f(x') - f(x'') \right) \right) \Delta x_{n+1} \leqslant 2M(b-d),$$

то

$$\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i \Delta x_i = \omega_0 \Delta x_0 + \omega_{n+1} \Delta x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По критерию интегрируемости (см. замечание к теореме 6.4.1) функция интегрируема на промежутке (a, b). ◄

§6 Свойства определенного интеграла

6.1 Свойства, связанные с действиями над функциями

Теорема 6.6.1. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ тоже интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

► Возьмем некоторое разбиение отрезка T и составим интегральные суммы для функций $f(x)$, $g(x)$ и $\alpha f(x) + \beta g(x)$, выбрав некоторые значения промежуточных точек.

Очевидно, что $\sigma_T(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_T(f) + \beta \sigma_T(g)$, при любых значениях промежуточных точек.

Устремим мелкость разбиения $\lambda(T)$ к нулю. Так как существует предел правой части этого равенства, то существует предел и левой части. Следовательно, функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

◄

Следствие. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на промежутке $[a, b]$, совпадают для всех точек этого промежутка, кроме некоторого конечного числа точек, то их интегралы равны.*

► Введем функцию $h(x) = f(x) - g(x)$, которая отлична от нуля в конечном числе точек промежутка $[a, b]$. Она интегрируема (следствие к теореме 6.5.2) и $\int\limits_a^b h(x)\,dx = 0$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$. ◄

Теорема 6.6.2. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируема на этом отрезке.*

► Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то они ограничены на отрезке, т.е. существует такое число $C > 0$, что выполняются неравенства $|f(x)| \leqslant C$ и $|g(x)| \leqslant C$.

Тогда для любых точек x', $x'' \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&|f(x') \cdot g(x') - f(x'') \cdot g(x'')| = \\
&\qquad = |f(x') \cdot g(x') - f(x') \cdot g(x'') + f(x') \cdot g(x'') - f(x'') \cdot g(x'')| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C\left(\omega(g) + \omega(f)\right),
\end{aligned}$$

т.е. $\omega(f \cdot g) \leqslant C\left(\omega(g) + \omega(f)\right)$, откуда следует, что функция $f(x) \cdot g(x)$ интегрируема. ◄

Теорема 6.6.3. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и существует такое число $C > 0$, что для всех точек этого отрезка выполняется неравенство $|f(x)| > C$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ также интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

6.2 Свойства интеграла, связанные с промежутком интегрирования

В определении определенного интеграла функция задана на промежутке $[a, b]$, где $a < b$.

Для общности положим $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, если $a > b$.

Первое из этих равенств справедливо для любой функции, определенной в точке a, а второе имеет место для любой функции, интегрируемой на промежутке $[b, a]$. Эти равенства будем считать определениями. Теперь промежуток интегрирования может быть взят в любом направлении.

Легко проверить, что свойства интеграла, сформулированные в предыдущем пункте, выполняются для любых промежутков.

В дальнейшем, говоря об интеграле на промежутке $[a, b]$, будем считать возможным любой случай $a < b$, $a > b$ и $a = b$.

Теорема 6.6.4. *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$, то она интегрируема на любом промежутке $[c, d] \subset [a, b]$.*

► Будем считать, что $a \leqslant c < d \leqslant b$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что если $\lambda(T) < \delta$, то $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(f)\, \Delta x_i < \varepsilon$.

Выберем разбиение T, диаметр которого $\lambda(T) < \delta$ и которое содержит точки c и d. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\, \Delta x_i = \sum_{\Delta x_i \subset [c,d]} \omega_i(f)\, \Delta x_i + \sum_{\Delta x_i \not\subset [c,d]} \omega_i(f)\, \Delta x_i$$

и, так как каждое слагаемое последней суммы неотрицательно, то

$$\sum_{\Delta x_i \subset [c,d]} \omega_i(f)\, \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\, \Delta x_i < \varepsilon.$$

По теореме 6.4.3 и замечанию к теореме 6.4.1 функция интегрируема на промежутке $[c, d]$.

Если точки располагаются в другом порядке, например, если $a \leqslant d < c \leqslant b$, то теорема доказана для промежутка $[d, c]$, следовательно, она справедлива и для промежутка $[c, d]$. ◄

Теорема 6.6.5 (Свойство аддитивности определенного интеграла). *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$ $(a < b)$ и $c \in (a, b)$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

► По предыдущей теореме функция $f(x)$ будет интегрируемой на каждом из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$.

Возьмем некоторое разбиение отрезка T, причем, будем считать, что точка c входит в число точек деления. Обозначим через T' и T'' разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, порожденные разбиением T.

Тогда при любом выборе промежуточных точек будет выполняться равенство $\sigma_T(f,[a,b]) = \sigma_{T'}(f,[a,c]) + \sigma_{T''}(f,[c,b])$.

Переходя к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим требуемое равенство. ◄

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на промежутке* $[a,b]$ *и* $c_1, c_2, c_3 \in [a,b]$, *то* $\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx + \int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx.$

► Для доказательства нужно рассмотреть все возможные случаи.

Случай $c_1 < c_3 < c_2$ рассмотрен в теореме.

Пусть $c_2 < c_1 < c_3$. Тогда по теореме $\int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx = \int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx.$

Но $\int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx = -\int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx = -\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$. Следовательно, $-\int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx = -\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx$, откуда

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx + \int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx.$$

Аналогично рассматриваются другие случаи. ◄

Теорема 6.6.6. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на каждом из промежутков* $[a,c]$ *и* $[c,b]$, *то она интегрируема и на промежутке* $[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

► Сначала предположим, что $a < c < b$. Возьмем разбиение T промежутка $[a,b]$, содержащее точку c, и пусть T' и T'' — разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, порожденные разбиением T.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\,\Delta x_i = \sum_{\Delta x_i \subset [a,c]} \omega_i(f)\,\Delta x_i + \sum_{\Delta x_i \subset [c,b]} \omega_i(f)\,\Delta x_i,$$

и, так как функция интегрируема на каждом из отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, то по $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $\lambda(t) < \delta$, то будут выполняться неравенства $\sum\limits_{\Delta x_i \subset [a,c]} \omega_i(f)\,\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\sum\limits_{\Delta x_i \subset [c,b]} \omega_i(f)\,\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(f)\,\Delta x_i < \varepsilon$ и функция интегрируема на промежутке $[a,b]$.

Тогда, выбирая произвольные промежуточные точки, получим равенство $\sigma_T(f,[a,b]) = \sigma_{T'}(f,[a,c]) + \sigma_{T''}(f,[c,b])$, из которого следует, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$

Возможны случаи $b < c < a$, $c < a < b$, $b < a < c$, $a < b < c$ и $c < b < a$.

Первый из них тривиально следует из доказанного.

Рассмотрим случай $c < a < b$. Так как промежуток $[a,b] \subset [c,b]$, то функция интегрируема на $[a,b]$. Равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ следует из следствия к теореме 6.6.5. Остальные случаи читателю предоставляется рассмотреть самостоятельно. ◄

6.3 Оценки интегралов

Теорема 6.6.7. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, $a < b$ и $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a,b]$, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

► Для любого разбиения отрезка и при любом выборе промежуточных точек интегральные суммы данных функций связаны неравенством: $\sigma_T(f) \leqslant \sigma_T(g)$.

Тогда, при $\lambda(T) \to 0$ получаем требуемое. ◄

Следствие. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то* $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$

► Неравенство следует из теоремы и того, что $\int\limits_a^b C\,dx = C(b-a)$. ◄

Теорема 6.6.8. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$

Эта теорема является следствием предыдущей.

Теорема 6.6.9. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $a<b$ и $f(x)\geqslant 0$, $x\in[a,b]$, и существует хотя бы одна точка $x_0\in[a,b]$, в которой функция непрерывна и строго положительна, то существует такое число $\alpha>0$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant\alpha>0$.*

► Допустим, что функция непрерывна в точке $x_0\in(a,b)$, причем $f(x_0)>0$. Тогда по теореме об отделимости непрерывной в точке функции можно найти такую окрестность $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ точки x_0, что для любого значения x из этой окрестности будет справедливо неравенство $f(x)\geqslant\gamma>0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx\geqslant\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx\geqslant\gamma\cdot 2\delta>0.$$

Если же точка x_0 совпадает с одним из концов a или b, то соответствующая окрестность выбирается односторонней. ◄

Замечание 1. *Если $a>b$, то во всех теоремах доказываемые неравенства меняют свой знак на противоположный.*

Теорема 6.6.10. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $a<b$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, причем*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

► Из неравенства $||f(x_1)|-|f(x_2)||\leqslant|f(x_1)-f(x_2)|$ следует, что при любом разбиении отрезка справедливо неравенство $\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)$ и, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(|f|)\,\Delta x_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\,\Delta x_i$. Последнее неравенство означает, что если интегрируема функция $f(x)$, то будет интегрируемой и функция $|f(x)|$.

Так как для любого разбиения отрезка и при любом выборе промежуточных точек интегральные суммы связаны неравенством $|\sigma_T(f)|\leqslant\sigma_T(|f|)$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. ◄

Замечание 2. *Следует отметить, что из интегрируемости функции $|f(x)|$ не следует интегрируемость функции $f(x)$. Например, функция*

$$f(x)=1-2d(x)=\begin{cases}1, & x\text{— \textit{рациональное}},\\ -1, & x\text{— \textit{иррациональное}},\end{cases}$$

где $d(x)$ — функция Дирихле, неинтегрируема на отрезке $[0,1]$, но ее модуль равен постоянной (единице), следовательно, интеграл от модуля существует.

Замечание 3. *Неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|$ выполняется и для произвольного промежутка.*

6.4 Первая интегральная теорема о среднем

Теорема 6.6.11 (Первая интегральная теорема о среднем)**.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, $a < b$, причем для всех значений x из промежутка $[a,b]$ выполняются неравенства $g(x) \geqslant 0$, и $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Тогда существует число μ, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant \mu \leqslant M$, при котором $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

► Умножим неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $g(x) \geqslant 0$ и проинтегрируем по промежутку $[a,b]$. Получим

$$\int\limits_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b Mg(x)\,dx$$

или
$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Допустим, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$. Тогда $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$ и обе части полученного неравенства можно разделить на этот интеграл:

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Обозначая $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} = \mu$, получим требуемое равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad \text{где} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то из неравенства

$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует, что $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$, следовательно, равенство $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$ будет верным при любом μ. ◄

Замечание 4. *Теорема остается верна и в случае, если $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a,b]$.*

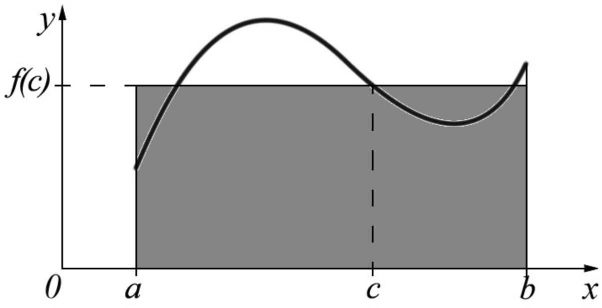
Следствие 1. *Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $a < b$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то существует число μ, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant \mu \leqslant M$, при котором $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$.*

► Для доказательства достаточно положить в условии теоремы $g(x) \equiv 1$. ◄

Следствие 2. *Если в теореме (или в следствии 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\cdot\int\limits_a^b g(x)\,dx \quad \left(\text{или} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)\right)$.*

► Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений. Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Так как непрерывная на отрезке функция принимает там любое промежуточное значение, то существует такое значение $x = c$, что $f(c) = \mu$. ◄

Замечание 5. *Если* $f(x) \geqslant 0$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *можно интерпретировать, как площадь криволинейной трапеции. Тогда следствие из теоремы означает, что площадь этой трапеции равна площади прямоугольника, основанием которого будет отрезок* $[a,b]$, *а высотой — значение функции в точке* $x = c$ *(см. рис.).*



§7 Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница

7.1 Определение и свойства интеграла с переменным верхним пределом

Рассмотрим функцию, интегрируемую на отрезке $[a,b]$, и возьмем $x \in [a,b]$.

Составим интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, который, очевидно, является функцией переменной x. Эта функция называется ***интегралом с переменным верхним пределом***. Обозначим ее через $F(x)$ и изучим ее свойства.

Теорема 6.7.1. *Функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *непрерывна на промежутке* $[a,b]$.

► Воспользуемся критерием непрерывности функции в точке, а именно, докажем, что в каждой точке промежутка выполнено условие $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$. (На концах промежутка рассматриваются соответствующие односторонние пределы.)

Используя свойство аддитивности интеграла, составим приращение функции:

$$\Delta F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Так как функция $f(t)$ ограничена, то $|f(x)| \leqslant C$, $x \in [a,b]$, и справедлива оценка

$$|\Delta F(x)| = \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \leqslant \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|\, dt \leqslant C\, |\Delta x|\,.$$

Отсюда следует, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta F \to 0$. ◄

Теорема 6.7.2. *Функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ *дифференцируема в каждой точке* x *из промежутка* $[a,b]$, *где функция* $f(t)$ *непрерывна, причем* $F'(x) = f(x)$.

► Пусть $x \in [a,b]$. Докажем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Для доказательства оценим разность

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - f(x) = \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - f(x)\,\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\, dt}{\Delta x} = \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x))\, dt}{\Delta x}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что

$$\Delta x = \int\limits_x^{x+\Delta x} dt \quad \text{и} \quad f(x)\cdot \int\limits_x^{x+\Delta x} dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\, dt,$$

так как число $f(x)$ является константой по отношению к переменной интегрирования t.)

Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке x, то по $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $|t - x| < \delta$, то $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Следовательно, если $|\Delta x| < \delta$, то получим

$$\left|\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - f(x)\right| \leqslant \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)|\, dt}{\Delta x} < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x)$. ◄

Следствие 1. *Если рассмотреть функцию* $F_1(x) = \int\limits_x^b f(t)\, dt$, *то аналогично можно доказать, что эта функция непрерывна и дифференци-*

руема в каждой точке промежутка $[a, b]$*, где* $f(t)$ *непрерывна, причем* $F_1'(x) = -f(x)$.

Следствие 2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a, b]$*, то на этом промежутке она имеет первообразную.*

► Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке промежутка, то в каждой точке промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$, следовательно, функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(x)$. ◄

Следствие 3. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a, b]$*, то любая ее первообразная на этом промежутке имеет вид* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C$.

В формуле $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C$ легко найти значение постоянной: положим $x = a$, тогда $\int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$ и $C = \Phi(a)$. Следовательно, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \Phi(a)$.

Полагая в последнем равенстве $x = b$, получим $\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + \Phi(a)$ или (учитывая, что значение интеграла — это число, не зависящее от переменной интегрирования)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона – Лейбница*** и является основной формулой интегрирования. Она сводит вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного.

Замечание 1. *Принято записывать разность* $\Phi(b) - \Phi(a)$ *как* $\Phi(x)\Big|_a^b$. *Поэтому при вычислении интеграла запись будет иметь следующий вид:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$.

☺ Применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \ln\sqrt{2}.$$

☻

Определение 6.7.1. *Если функция $\Phi(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и равенство $\Phi'(x) = f(x)$ выполняется во всех точках промежутка за исключением, может быть, конечного числа точек, то функцию $\Phi(x)$ будем называть* ***обобщенной первообразной*** *для функции $f(x)$ на этом промежутке.*

Замечание 2. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на промежутке $[a,b]$, а функция $\Phi(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$ (может быть, обобщенная) на всем этом промежутке, то имеет место формула Ньютона–Лейбница.*

► Разобьем промежуток $[a,b]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$, где x_i — точки разрыва функции $f(x)$ ($x_0 = a$, $x_m = b$). Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\left(\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})\right) =$$
$$= \Phi(x_m) - \Phi(x_0) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

◄

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{-1}^1 d\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$.

☺ Применяя формулу Ньютона–Лейбница, получим

$$\int\limits_{-1}^1 d\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Однако, этот ответ неверен. Если найти непосредственно подынтегральную функцию, то получим

$$\int\limits_{-1}^1 d\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = -\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

При вычислении интеграла первым способом полученная первообразная была разрывна в точке $x = 0$ и, следовательно, применение формулы Ньютона–Лейбница было незаконным.

В такой ситуации надо либо найти непрерывную первообразную, либо разбить промежуток на части точкой, где нарушается непрерывность первообразной.

Если в качестве обобщенной первообразной взять непрерывную функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

то возможно применить формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{1} d\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \Phi(x)\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{x=1} - \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \pi\right)\Big|_{x=-1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

☻

Но чаще поступают так, как мы это сделаем в следующем примере.

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \leqslant x < 1; \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

☺ По свойству аддитивности интеграла имеем:

$$\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} (x-1)\,dx + \int\limits_{1}^{2} (2-x)\,dx = \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} - \frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_{1}^{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

☻

Замечание 3. *Можно доказать, что формула Ньютона – Лейбница верна и в случае произвольной интегрируемой функции* $f(x)$. *(см. [5])*

Замечание 4. *В первой интегральной теореме о среднем было доказано, что если функция* $f(x)$ *непрерывна, то* $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$, *где* $\xi \in [a, b]$. *Используя формулу Ньютона–Лейбница, можно доказать, что найдется точка* ξ, *лежащая внутри указанного промежутка.*

► Действительно, так как первообразная удовлетворяет теореме Лагранжа, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$, где $\xi \in (a,b)$. ◄

7.2 Вторая интегральная теорема о среднем

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма Абеля. *Пусть* $\{a_i\}_1^n$ *и* $\{b_i\}_1^n$ *— два конечных набора чисел. Обозначим* $S_i = \sum\limits_{k=1}^{i} a_k$. *Тогда справедливо равенство* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i (b_i - b_{i+1})$, *в котором* $b_{n+1} = 0$.

► Положим $S_0 = 0$. Так как $a_i = S_i - S_{i-1}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1})\, b_i = \sum_{i=1}^{n} S_i b_i - \sum_{i=1}^{n} S_{i-1} b_i.$$

Во второй сумме положим $i - 1 = i'$ или $i = i' + 1$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} S_{i-1} b_i = \sum\limits_{i'=0}^{n-1} S_{i'} b_{i'+1} = \sum\limits_{i'=0}^{n} S_{i'} b_{i'+1}$. Так как сумма не зависит от обозначения индекса суммирования, то в последней сумме можно i' заменить на i.

Окончательно получим $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i b_i - \sum\limits_{i=1}^{n} S_{i-1} b_i =$

$$= \sum_{i=0}^{n} S_i b_i - \sum_{i=0}^{n} S_i b_{i+1} = \sum_{i=0}^{n} S_i (b_i - b_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} S_i (b_i - b_{i+1}).$$

◄

Формулу, полученную в лемме, часто записывают в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}).$$

Такое преобразование суммы было предложено норвежским математиком Абелем и называется ***преобразование Абеля***.

Теорема 6.7.3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$, $a < b$ *функция* $g(x)$ *интегрируема, а функция* $f(x)$ *интегрируема, неотрицательна и не возрастает. Тогда* *на промежутке существует такая точка ξ, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx.$$

► Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то их произведение $f(x)\,g(x)$ тоже интегрируемая функция.

Рассмотрим некоторое разбиение отрезка T и представим интеграл от произведения в виде суммы следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,g(x)\,dx.$$

Преобразуем каждое слагаемое этой суммы:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,g(x)\,dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\,g(x)\,dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\,g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_{i-1})\right) g(x)\,dx + f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx.$$

Тогда исходный интеграл будет равен

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_{i-1})\right) g(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx.$$

Очевидно, для любого $x \in [x_{i-1}, x_i]$ справедливо неравенство $0 \leqslant f(x_{i-1}) - f(x) \leqslant \omega_i(f)$, где $\omega_i(f)$ — колебание функции $f(x)$ на этом промежутке. Учитывая, что на промежутке $[a, b]$ функция $g(x)$ ограничена: $|g(x)| \leqslant C$, а функция $f(x)$ интегрируемая, т.е. по $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $\lambda(T) < \delta$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(f)\,\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{C}$. Получим отсюда:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_{i-1})\right) g(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i(f)\,C dx = C\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\,\Delta x_i < \varepsilon.$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))\,g(x)\,dx\to 0$ при $\lambda(T)\to 0$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,dx.$$

Преобразуем сумму, стоящую под знаком предела с помощью леммы Абеля, полагая $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,dx=a_i$, $f(x_{i-1})=b_i$ и $f(x_{n+1})=0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,dx=\sum_{m=1}^{n+1}(f(x_{m-1})-f(x_m))\int\limits_a^{x_m}g(x)\,dx.$$

Рассмотрим функцию $G(x)=\int\limits_a^x g(t)\,dt$. Так как она непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она ограничена на этом промежутке, т.е. существуют такие числа m и M, что $m\leqslant G(x)\leqslant M$ $\forall x\in[a,b]$. Тогда, учитывая, что $f(x_{m-1})-f(x_m)\geqslant 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,dx=\sum_{m=1}^{n+1}(f(x_{m-1})-f(x_m))\int\limits_a^{x_m}g(x)\,dx\geqslant$$
$$\geqslant m\sum_{m=1}^{n+1}(f(x_{m-1})-f(x_m))=mf(a)$$

и $$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,dx=\sum_{m=1}^{n+1}(f(x_{m-1})-f(x_m))\int\limits_a^{x_m}g(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant M\sum_{m=1}^{n+1}(f(x_{m-1})-f(x_m))=Mf(a).$$

Отсюда получим неравенство

$$m\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,dx}{f(a)}\leqslant M.$$

Переходя к пределу при $\lambda(T) \to 0$, придем к неравенству

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{f(a)} \leqslant M.$$

Так как функция $G(x)$ непрерывна на отрезке, то она принимает на этом отрезке любое значение, лежащее между своим максимальным и минимальным, т.е. существует значение $\xi \in [a,b]$, при котором $G(\xi) = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{f(a)}$.
◄

Замечание 5. *Если сохранить требование неотрицательности функции $f(x)$, но предположить ее неубывание, то формула будет иметь вид*

$$\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(b) \int\limits_\xi^b g(x)\, dx.$$

Следствие. *Если в условии теоремы предположить, что функция $f(x)$ интегрируема и монотонна (отбрасывается условие неотрицательности), то*

$$\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int\limits_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int\limits_\xi^b g(x)\, dx.$$

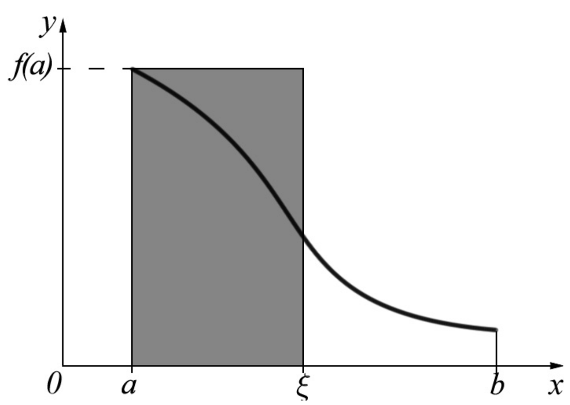
► Предположим, что функция не возрастает. Тогда $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(b)$ и функция $f(x) - f(b)$ неотрицательна. Применяя к ней теорему, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx - f(b) \int\limits_a^b g(x)\, dx = (f(a) - f(b)) \int\limits_a^\xi g(x)\, dx,$$

откуда несложными преобразованиями получим требуемое. В случае неубывающей функции доказательство аналогичное. ◄

Доказанная теорема называется ***второй теоремой о среднем***. Это название оправдано геометрической интерпретацией формулы для случая $g(x) \equiv 1$ (см.рис.).

Полученные формулы называют также ***формулами Бонне***.



§8 Методы вычисления определенного интеграла

Теорема 6.8.1 (О замене переменной в определенном интеграле)**.** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* Δ*, и функция* $x = x(t)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема на промежутке* $[\alpha, \beta]$*, где* $x([\alpha, \beta]) \subset \Delta$*. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt$*, где* $a = x(\alpha)$ *и* $b = x(\beta)$*.*

► Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\,dx(t) = F(x(t))\,|_\alpha^\beta = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◄

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$.

☺ Сделаем замену переменной $x = 2\sin t$. Так как $2\sin t = 0$ при $t = 0$ и $2\sin t = 2$ при $t = \pi/2$, то

$$\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

☻

Замечание 1. *Данный интеграл можно вычислить исходя из геометрического смысла интеграла. Так как это интеграл от неотрицательной функции, то он равен площади фигуры, ограниченной прямыми* $x = 0$*,* $x = 2$ *и* $y = 0$ *и кривой* $y = \sqrt{4 - x^2}$*. Легко видеть, что эта фигура является четвертью круга радиуса 2. Вычисляя площадь четверти круга, получим* $\frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$*.*

Теорема 6.8.2 (Об интегрировании по частям в определенном интеграле). *Пусть функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на промежутке* $[a, b]$. *Тогда* $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

► Очевидно, что функция $u \cdot v$ является первообразной для функции $u \cdot v' + v \cdot u'$ на указанном промежутке. Поэтому $\int\limits_a^b (uv' + vu')\, dx = uv\Big|_a^b$.

Но $\int\limits_a^b (uv' + vu')\, dx = \int\limits_a^b (udv + vdu) = \int\limits_a^b udv + \int\limits_a^b vdu$, поэтому верно равенство $\int\limits_a^b udv + \int\limits_a^b vdu = uv\Big|_a^b$ или $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$. ◄

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

☺ Положим $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Тогда $du = dx$, $v = \operatorname{tg} x$ и

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4} - \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

☻

§9 Свойства определенного интеграла от четной, нечетной и периодической функций

Свойство 1. *Интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля промежутку равен нулю, т.е., если* $f(x)$ *нечетная функция, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

► Разобьем интеграл на сумму двух: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx$ и в первом слагаемом сделаем замену переменной: $x = -t$. Тогда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,dt = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

(Воспользовались формулой замены переменной, правилом изменения порядка пределов интегрирования, определением нечетной функции и тем фактом, что величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.)

Окончательно получим $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$ ◄

Свойство 2. *Интеграл от четной функции по симметричному относительно нуля промежутку равен удвоенному интегралу по половине промежутка, т.е., если $f(x)$ четная функция, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

► Это свойство доказывается аналогично с учетом четности функции:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

◄

Свойство 3. *Если $f(x)$ периодическая функция с периодом T, то* $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx$, *т.е. интеграл по промежутку длиной в период не зависит от начала промежутка.*

► Разложим интеграл на сумму трех слагаемых:

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx + \int\limits_{T}^{a+T} f(x)\,dx.$$

В последнем слагаемом сделаем замену переменной: $x = t + T$. Тогда $\int\limits_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)\,dt = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$. (Воспользовались формулой замены переменной, определением периодической функции и тем, что интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования.) Тогда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_a^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

◄

Упражнение. Проиллюстрируйте свойства 1–3 на графиках.

§10 Некоторые формулы, связанные с определенным интегралом

10.1 Вычисление интегралов $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

Вычислим интегралы $I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ и $I_n^{(2)} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

► Заметим, что $I_1^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$ и $I_0^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \dfrac{\pi}{2}$.

Вычислим интегралы при $n \geqslant 2$. Сначала в интеграле $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ сделаем замену переменной $x = \dfrac{\pi}{2} - t$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = -\int\limits_{\pi/2}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

Следовательно, данные интегралы равны и можно вычислить только один из них.

Возьмем $I_n^{(1)}$ и преобразуем сначала подынтегральную функцию:

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\left(1 - \sin^2 x\right) dx = I_{n-2}^{(1)} - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx.$$

Второй интеграл в последнем равенстве проинтегрируем по частям, полагая $u = \sin x$, $dv = \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx$. Тогда $du = \cos x dx$ и $v = \int \cos^{n-2} x \sin x dx = -\dfrac{\cos^{n-1} x}{n-1}$, откуда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{I_n^{(1)}}{n-1}.$$

Отсюда $I_n^{(1)} = I_{n-2}^{(1)} - \dfrac{I_n^{(1)}}{n-1}$. Решая это равенство относительно $I_n^{(1)}$, получим рекуррентную формулу $I_n^{(1)} = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}^{(1)}$.

Тогда для четного n получим

$$I_n^{(1)} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}^{(1)} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \ldots \frac{1}{2} I_0^{(1)},$$

а для нечетного

$$I_n^{(1)} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}^{(1)} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \ldots \frac{2}{3} I_1^{(1)}.$$

Учитывая значения $I_1^{(1)}$ и $I_0^{(1)}$, получим окончательный ответ:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$. ◄

10.2 Формула Валлиса

Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$. Интегрируя это неравенство по промежутку $[0, \pi/2]$ и используя результат предыдущего пункта, получим неравенство

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Тогда будут верны оценки

$$0<\frac{\pi}{2}-\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}-\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$\text{и}\quad 0<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{2}<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}-\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Так как справедливо неравенство

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}-\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n\,(2n+1)}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n},$$

$$\text{то}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

называется ***формулой Валлиса***. Оно является одним из первых представлений числа π в виде бесконечного произведения и позволяет достаточно быстро вычислить число π с любой заданной точностью.

10.3 Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора

Пусть функция $f(t)$ на промежутке $[a,x]$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз. Тогда будет иметь место формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt.$$

Эта формула является уже известной нам формулой Тейлора, где остаточный член представлен в виде $R_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$.

► Применим к интегралу $\displaystyle\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$ формулу интегрирования по частям, полагая $u=(x-t)^n$, $dv=f^{(n+1)}(t)\,dt$. Тогда $du=-n\,(x-t)^{n-1}\,dt$,

$v = f^{(n)}(t)$. Получим

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$
$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big|_a^x + n\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt \right) =$$
$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Продолжая интегрирование по частям еще $n-1$ раз, получим

$$R_n =$$
$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-2} - \dots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \int_a^x f'(t)\,dt =$$
$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-2} - \dots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - f(a) + f(x),$$

что и доказывает требуемое равенство. ◀

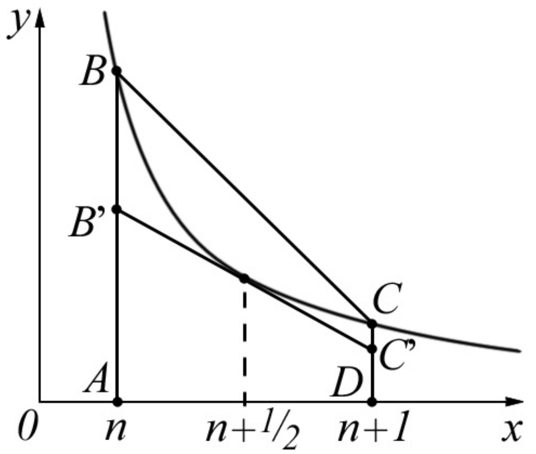
10.4 Формула Стирлинга

В заключение этого параграфа выведем асимптотическую формулу, известную под названием формулы Стирлинга.

Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$.

Составим отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$. Тогда

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$



Так как функция $y = 1/x$ монотонно убывает и выпукла вниз при $x > 0$, то площадь криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $y = 1/x$, осью OX и прямыми $x = n$ и $x = n+1$, меньше площади трапеции $ABCD$ и больше площади трапеции $AB'C'D$, где $B'C'$ — касательная к кривой $y = 1/x$ в точке $x = n + \dfrac{1}{2}$

(см. рис.), что записывается в виде неравенства:

$$\frac{1}{n+1/2} < \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Умножим это неравенство на $n+\dfrac{1}{2}$:

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n\,(n+1)}$$

и из каждой его части вычтем 1. Получим

$$0 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n\,(n+1)} - 1 = \frac{1}{4n\,(n+1)}$$

или

$$0 < \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4n\,(n+1)}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, т.е. последовательность положительных чисел a_n убывающая и ограниченная снизу, следовательно, она имеет предел. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Подставляя в последнее неравенство $n+1, n+2, \ldots n+k$ вместо n и складывая полученные неравенства, получим

$$0 < \ln\frac{a_n}{a_{n+k}} < \frac{1}{4n\,(n+1)} + \frac{1}{4\,(n+1)\,(n+2)} + \cdots + \frac{1}{4\,(n+k-1)\,(n+k)} = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$$

или $1 < \dfrac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)}$.

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим $1 < \dfrac{a_n}{\alpha} < e^{1/(4n)}$, откуда следует, что $\alpha > 0$ и выполняется неравенство $\alpha < a_n < \alpha e^{1/(4n)}$, что означает, что

$$a_n = \alpha e^{\theta/(4n)}, \quad 0<\theta<1. \qquad (*)$$

Далее из формулы Валлиса получаем:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,(2n)!!}{\sqrt{2n+1}\,(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,((2n)!!)^2}{\sqrt{2n+1}\,(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1/2}\,(n!)^2}{\sqrt{2n+1}\,(2n)!},$$

с другой стороны

$$\frac{(a_n)^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2}{n^{2n+1}e^{-2n}} \frac{(2n)^{2n+1/2}\, e^{-2n}}{(2n)!} = \frac{\sqrt{2}\,(n!)^2\, 2^{2n+1/2}}{\sqrt{2n}\,(2n)!}.$$

Следовательно, $\sqrt{\pi} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_n)^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

Подставляя найденное значение α в (*), получим $a_n = \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\theta/(4n)}$, $0 < \theta < 1$, откуда $n! = n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi n} \cdot e^{\theta/(4n)}$ или

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta/(4n)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Последнее равенство называется ***формулой Стирлинга*** и позволяет оценивать или приближенно вычислять значения $n!$ при больших n.

Замечание 1. *Можно доказать более точную формулу*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta/(12n)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Замечание 2. *Формулу Стирлинга часто применяют в асимптотическом виде:*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{\textit{при} } n \to \infty.$$

Пример 1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ на сходимость.

☺ Применим для исследования второй признак сравнения. Пусть $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ и $b_n = \dfrac{2^n e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = \left(\dfrac{2e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Из формулы Стирлинга следует, что $a_n \sim b_n$, следовательно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то данный ряд тоже сходится.

Очевидно, что если $n > 4e$, то $0 < b_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Отсюда по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ сходится.

☻

Глава 7

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

§1 Понятие об измерении множеств в $\mathbb{R}^n$

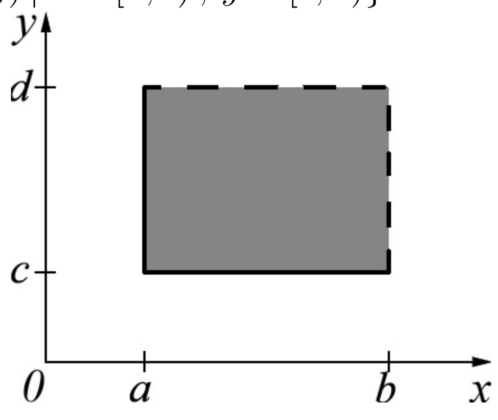
1.1 Определения

1. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^n$ — набор множеств произвольной природы. Множество, элементом которого будет упорядоченный набор $(x_1, x_2, \dots x_n)$, где $x_k \in X_k$, будем называть* ***декартовым произведением*** *множеств $X_1, X_2, \dots X_n$ и обозначать $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots X_n$.*

Пример 1. Пусть $X = [a, b]$ и $Y = [c, d]$ — отрезки числовой оси. Тогда $X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}$ — прямоугольник на декартовой плоскости.

2. *Декартово произведение $A = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$, где каждое множество $[a_k, b_k)$ — полуинтервал вещественной оси, будем называть* ***n-мерной клеткой****.*

Например, множество плоскости $A = \{(x, y) \,|\, x \in [a, b)\,,\ y \in [c, d)\}$ — двумерная клетка, представляет из себя прямоугольник, половина границы которого принадлежит этому прямоугольнику, а половина не принадлежит (см.рис.).



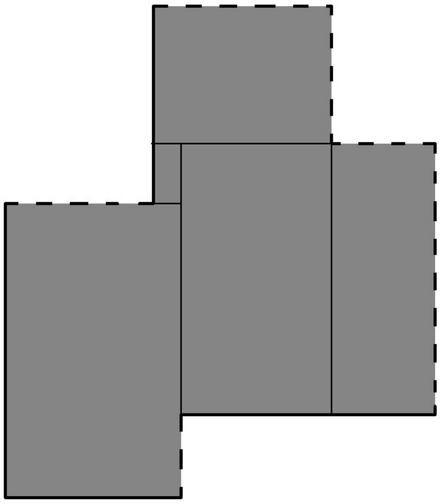
В общем случае n-мерная клетка является множеством пространства $\mathbb{R}^n$.

3. ***Мерой клетки*** *A будем называть число* $\mu(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

Меру двумерной клетки называют также ***площадью***, меру трехмерной клетки — ***объемом***.

Например, площадью двумерной клетки A будет число

$$\mu(A) = (b - a)(d - c)\,.$$



4. *Множество E будем называть* ***элементарным****, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся клеток* $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ *(см. рис.).*

5. *Пустое множество будем считать элементарным.*

6. ***Мерой элементарного множества*** *будем называть число* $\mu\,(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu\,(A_k)$.

Мера пустого множества равна нулю.

Множество элементарных множеств и мера, определенная на нем, обладают следующими свойствами:

Свойство 1. *Если множества E_1 и E_2 — элементарные, то множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ и $E_1 \setminus E_2$ тоже элементарные. Другими словами, множество элементарных множеств образуют алгебру.*

Свойство 2. *Если множество E можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся элементарных множеств E_n, то* $\mu\,(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu\,(E_k)$ *(аддитивность меры).*

Свойство 3. *Если E_1 и E_2 — элементарные множества и $E_1 \subset E_2$, то* $\mu\,(E_1) \leqslant \mu\,(E_2)$ *(монотонность меры).*

Свойство 4. *Если E_1 и E_2 — элементарные множества, то имеет место равенство*

$$\mu\,(E_1 \cup E_2) + \mu\,(E_1 \cap E_2) = \mu\,(E_1) + \mu\,(E_2)\,.$$

Первые три свойства очевидны, поэтому докажем только четвертое.

► Представим множества E_1, E_2 и $E_1 \cup E_2$ в виде объединений непересекающихся множеств:

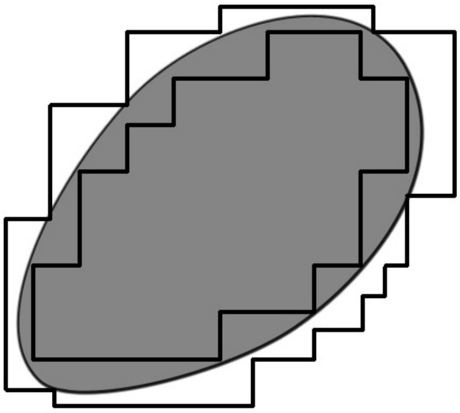
$$E_1 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_1 \cap E_2)\,, \quad E_2 = (E_2 \setminus E_1) \cup (E_1 \cap E_2)\,,$$
$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_1 \cap E_2)\,.$$

Тогда по свойству аддитивности меры получим

$$\mu\,(E_1) = \mu\,(E_1 \setminus E_2) + \mu\,(E_1 \cap E_2)\,,$$
$$\mu\,(E_2) = \mu\,(E_2 \setminus E_1) + \mu\,(E_1 \cap E_2)\,,$$
$$\mu\,(E_1 \cup E_2) = \mu\,(E_1 \setminus E_2) + \mu\,(E_2 \setminus E_1) + \mu\,(E_1 \cap E_2)\,,$$

откуда следует требуемое. ◄

Определение 7.1.1. *Пусть Ω — некоторое множество в пространстве R^n. Число $\mu_*(\Omega) = \sup\limits_{E\subset\Omega} \mu(E)$, где супремум берется по всевозможным элементарным множествам, входящим в Ω, будем называть* ***нижней мерой*** *множества Ω. Соответственно, число $\mu^*(\Omega) = \inf\limits_{E\supset\Omega} \mu(E)$, где инфимум берется по всевозможным элементарным множествам, содержащим Ω, будем называть* ***верхней мерой*** *множества Ω.*



Очевидно, если множество Ω ограничено, то $\mu_*(\Omega)$ и $\mu^*(\Omega)$ конечны и выполняется неравенство $\mu_*(\Omega) \leqslant \mu^*(\Omega)$.

Если при этом $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega) = \mu(\Omega)$, то будем говорить, что множество Ω ***измеримо***, а число $\mu(\Omega)$ называть его ***мерой***.

Мера, введенная таким образом, называется ***мерой Жордана***.

Пример 2. Замыкание n-мерной клетки $\bar{A} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ — измеримое множество и его мера равна $\mu\left(\bar{A}\right) = \mu(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

☺ Рассмотрим последовательность n-мерных клеток $A_k = \left[a_1, b_1 + \dfrac{1}{k}\right) \times \dots \times \left[a_n, b_n + \dfrac{1}{k}\right)$. Тогда $A \subset \bar{A} \subset A_k$.

Отсюда $\mu(A) \leqslant \mu_*\left(\bar{A}\right) \leqslant \mu^*\left(\bar{A}\right) \leqslant \mu(A_k)$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, то множество $\bar{A}$ измеримо и $\mu\left(\bar{A}\right) = \mu(A)$. ☻

Пример 3. Множество внутренних точек n-мерной клетки $\operatorname{int} A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ — измеримое множество и его мера равна $\mu(\operatorname{int} A) = \mu(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

Пример 4. Замыкание $\bar{\Omega}$ и множество внутренних точек $\operatorname{int}\Omega$ элементарного множества Ω — измеримые множества и $\mu\left(\bar{\Omega}\right) = \mu(\operatorname{int}\Omega) = \mu(\Omega)$.

Доказательство утверждений в примерах 3 и 4 предоставляем читателю.

1.2 Свойства измеримых множеств

Свойство 1. *Если множества Ω_1 и Ω_2 измеримы, то множества $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2$ также измеримы и*

$$\mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) = \mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

► Найдем такие элементарные множества E_1, E_2, E_3, E_4, что $E_1 \subset \Omega_1 \subset E_2$ и $E_3 \subset \Omega_2 \subset E_4$. Тогда будут выполняться включения

$$E_1 \cup E_3 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset E_2 \cup E_4 \quad \text{и}$$

$$E_1 \cap E_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 \subset E_2 \cap E_4.$$

Отсюда и из определений верхней и нижней мер множеств следует, что

$$\mu\left(E_1 \cup E_3\right) \leqslant \mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \leqslant \mu\left(E_2 \cup E_4\right) \quad \text{и}$$

$$\mu\left(E_1 \cap E_3\right) \leqslant \mu_*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) \leqslant \mu\left(E_2 \cap E_4\right).$$

Складывая эти неравенства, и, учитывая, что для элементарных множеств верно равенство $\mu\left(E_1 \cup E_2\right) + \mu\left(E_1 \cap E_2\right) = \mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_2\right)$, получим

$$\mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_3\right) \leqslant \mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \leqslant \mu\left(E_2\right) + \mu\left(E_4\right).$$

Переходя к супремуму в левой части этого неравенства и инфимуму в правой, придем к неравенству

$$\mu\left(\Omega_1\right) + \mu\left(\Omega_2\right) \leqslant \mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu_*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) \leqslant \\ \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu^*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) \leqslant \mu\left(\Omega_1\right) + \mu\left(\Omega_2\right),$$

откуда следует, что

$$\mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu_*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) = \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu^*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right).$$

Это равенство влечет за собой равенства $\mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) = \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$ и $\mu_*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) = \mu^*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right)$. (В противном случае, так как

$$\mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$$

и $\mu_*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right)$, то, если нарушено, например, первое равенство, будет выполнено неравенство $\mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) < \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$ и, следовательно, неравенство
$\mu_*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu_*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) < \mu^*\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu^*\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right)$.)

Отсюда следует, что множества $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2$ измеримы и $\mu\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) + \mu\left(\Omega_1 \cap \Omega_2\right) = \mu\left(\Omega_1\right) + \mu\left(\Omega_2\right)$. ◄

Следствие 1. *Если множества Ω_1 и Ω_2 измеримы и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $\mu\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) = \mu\left(\Omega_1\right) + \mu\left(\Omega_2\right)$ (аддитивность меры).*

Свойство 2. *Если множества Ω_1 и Ω_2 измеримы и $\Omega_2 \subset \Omega_1$, то множество $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ также измеримо и $\mu\left(\Omega_1 \backslash \Omega_2\right) = \mu\left(\Omega_1\right) - \mu\left(\Omega_2\right)$.*

► Найдем такие элементарные множества E_1, E_2, E_3, E_4, что $E_1 \subset \Omega_1 \subset E_2$ и $E_3 \subset \Omega_2 \subset E_4$. Тогда $E_1 \backslash E_4 \subset \Omega_1 \backslash \Omega_2 \subset E_2 \backslash E_3$ и

$$\mu\left(E_1 \backslash E_4\right) \leqslant \mu_*\left(\Omega_1 \backslash \Omega_2\right) \leqslant \mu^*\left(\Omega_1 \backslash \Omega_2\right) \leqslant \mu\left(E_2 \backslash E_3\right).$$

Так как

$$\mu(E_1 \backslash E_4) = \mu(E_1) - \mu(E_1 \cap E_4) \geqslant \mu(E_1) - \mu(E_4),$$

то

$$\mu(E_1) - \mu(E_4) \leqslant \mu(E_1 \backslash E_4) \leqslant \mu_*(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \leqslant \mu^*(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \leqslant \mu(E_2) - \mu(E_3)$$

и, переходя к супремуму в левой части неравенства и к инфимуму в правой, получим

$$\mu(\Omega_1) - \mu(\Omega_2) \leqslant \mu_*(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \leqslant \mu^*(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \leqslant \mu(\Omega_1) - \mu(\Omega_2).$$

Отсюда следует, что множество $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ измеримо и $\mu(\Omega_1 \backslash \Omega_2) = \mu(\Omega_1) - \mu(\Omega_2)$. ◄

Следствие 2. *Если множества Ω_1 и Ω_2 измеримы и $\Omega_2 \subset \Omega_1$, то $\mu(\Omega_2) \leqslant \mu(\Omega_1)$ (монотонность меры).*

► Из свойства 2 следует, что в этом случае $\mu(\Omega_1) = \mu(\Omega_2) + \mu(\Omega_1 \backslash \Omega_2)$. Так как $\mu(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \geqslant 0$, то $\mu(\Omega_1) \geqslant \mu(\Omega_2)$. ◄

1.3 Необходимые и достаточные условия измеримости множеств

Теорема 7.1.1. *Для того чтобы множество Ω было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти два таких элементарных множества E_1 и E_2, что $E_1 \subset \Omega \subset E_2$ и для которых $0 < \mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon$.*

► *Необходимость.* Пусть Ω — измеримое множество. Тогда $\inf\limits_{E \supset \Omega} \mu(E) = \sup\limits_{E \subset \Omega} \mu(E) = \mu(\Omega)$.

Это означает, что найдется такое элементарное множество $E_2 \supset \Omega$, что $\mu(E_2) < \mu(\Omega) + \dfrac{\varepsilon}{2}$, и найдется элементарное множество $E_1 \subset \Omega$, что $\mu(E_1) > \mu(\Omega) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Вычитая из первого неравенства второе и учитывая, что $E_1 \subset E_2$, получим $0 < \mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть для $\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества E_1 и E_2, что $E_1 \subset \Omega \subset E_2$, для которых $0 < \mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon$. Тогда, так как $\mu^*(\Omega) = \inf\limits_{E \supset \Omega} \mu(E) \leqslant \mu(E_2)$ и $\mu_*(\Omega) = \sup\limits_{E \subset \Omega} \mu(E) \geqslant \mu(E_1)$, то, вычитая эти неравенства, получим $\mu^*(\Omega) - \mu_*(\Omega) \leqslant \mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon$, что возможно только тогда, когда $\mu^*(\Omega) = \mu_*(\Omega)$. ◄

Теорема 7.1.2. *Множество Ω измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти два таких измеримых множества Ω_1 и Ω_2, что $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$ и для которых $0 < \mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1) < \varepsilon$.*

► Если Ω измеримо, то в качестве Ω_1 и Ω_2 можно взять элементарные множества из теоремы 7.1.1, поэтому докажем только обратное утверждение.

Найдем два таких измеримых множества Ω_1 и Ω_2, что $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$ и для которых $0 < \mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда существуют такие элементарные множества E_1 и E_2, что $E_1 \subset \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2 \subset E_2$ и выполнены неравенства $\mu(E_2) < \mu(\Omega_2) + \frac{\varepsilon}{4}$ и $\mu(E_1) > \mu(\Omega_1) - \frac{\varepsilon}{4}$. Вычитая эти неравенства, получим

$$\mu(E_2) - \mu(E_1) < \mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Тогда по теореме 7.1.1 множество Ω — измеримо. ◄

Теорема 7.1.3. *Измеримое множество Ω имеет меру равную нулю тогда и только тогда, когда по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое элементарное множество E, что $\Omega \subset E$ и $\mu(E) < \varepsilon$.*

► Пусть $\mu(\Omega) = 0$, т.е. $\inf\limits_{E \supset \Omega} \mu(E) = 0$, это означает, что по $\varepsilon > 0$ можно найти такое элементарное множество $E \supset \Omega$, что $\mu(E) < \varepsilon$.

Обратно, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое элементарное множество $E \supset \Omega$, что $\mu(E) < \varepsilon$, то $\inf\limits_{E \supset \Omega} \mu(E) = 0$. ◄

Теорема 7.1.4. *Ограниченное множество Ω измеримо тогда и только тогда, когда его граница имеет меру, равную нулю.*

► Граница множества $\partial\Omega$ – это множество точек, удовлетворяющее соотношению $\partial\Omega = \bar{\Omega} \backslash (\operatorname{int} \Omega)$, т.е. это точки, входящие в замыкание множества Ω, но не являющиеся его внутренними точками. При этом $\operatorname{int} \Omega \subset \bar{\Omega}$.

Пусть множество Ω измеримо. Тогда можно найти два таких элементарных множества E_1 и E_2, что $E_1 \subset \Omega \subset E_2$ и $\mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon$.

Так как выполнено включение $\operatorname{int} E_1 \subset \operatorname{int} \Omega \subset \bar{\Omega} \subset \bar{E}_2$ и множества $\operatorname{int} E_1$, $\operatorname{int} \Omega$, $\bar{\Omega}$ и $\bar{E}_2$ измеримы, то (по свойству 2)

$$\mu(\partial\Omega) = \mu\left(\bar{\Omega}\right) - \mu(\operatorname{int} \Omega) \leqslant \mu\left(\bar{E}_2\right) - \mu(\operatorname{int} E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon.$$

Обратно, пусть $\mu(\partial\Omega) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое элементарное множество $E \supset \partial\Omega$, что $\mu(E) < \varepsilon$.

Положим $E_2 = \Omega \cup E$, $E_1 = E_2 \backslash E$. Эти множества — элементарные, причем $E_2 \supset \Omega \supset E_1$. Так как $E \subset E_2$, то $\mu(E_1) = \mu(E_2) - \mu(E)$, откуда $\mu(E_2) - \mu(E_1) = \mu(E) < \varepsilon$, а это означает, что Ω — измеримое множество. ◄

Пример 5. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ множество рациональных точек. Границей этого множества является сам отрезок $[0, 1]$ (так как каждая окрестность любой точки этого отрезка содержит и рациональные точки, и иррациональные). Мера отрезка $\mu([0,1]) = 1 \neq 0$, следовательно, это множество неизмеримо по Жордану.

Замечание. *Очевидно, мера одной точки на прямой равна нулю. По свойству аддитивности меры множество, состоящее из конечного числа точек, также измеримо, и его мера будет равна нулю. Пример 5 показывает, что свойство аддитивности меры Жордана не распространяется на объединение счетного числа множеств.*

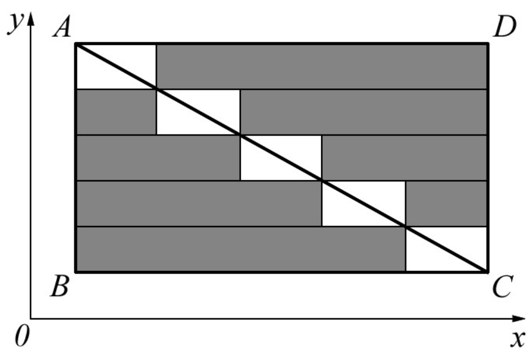
§2 Вычисление площадей плоских фигур

2.1 Площадь элементарного множества

Прежде всего заметим, что, так как для любого отрезка можно найти элементарное множество, мера которого меньше произвольного положительного ε, то любой многоугольник является измеримым множеством. Докажем, что мера Жордана многоугольника совпадает с площадью этого многоугольника, вычисленной по формулам, известным из школьного курса.

Из определения меры Жордана следует, что мера прямоугольника A, стороны которого параллельны координатным осям, вычисляется по хорошо известной формуле $\mu(A) = S_A = a \cdot b$, где a и b — длины сторон этого прямоугольника.

Отсюда следует, что мера прямоугольного треугольника, катеты длинами a и b которого параллельны координатным осям, равна $\dfrac{1}{2}ab$. Действительно, если дополнить этот треугольник до прямоугольника, то в каждый из двух полученных треугольников можно вписать элементарные множества одинаковой меры (см. рис.).



Разделим катет AB на n равных частей. Если обозначить через E_n и E_n' элементарные множества, вписанные соответственно в треугольники ABC и CDA, то $\mu(\Delta ABC) = \sup \mu(E_n)$, $\mu(\Delta CDA) = \sup \mu\left(E_n'\right)$ и $\mu(E_n) = \mu\left(E_n'\right)$.

Отсюда $\mu(\Delta ABC) = \mu(\Delta CDA) = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC$.

Теперь докажем, что равные фигуры имеют равные меры.

(Этот факт называется свойством ***инвариантности меры***.)

Напомним, что фигуры называются равными, если при взаимно однозначном отображении плоскости на себя с сохранением расстояния одна фигура отображается на другую. Такие отображения называются движениями плоскости.

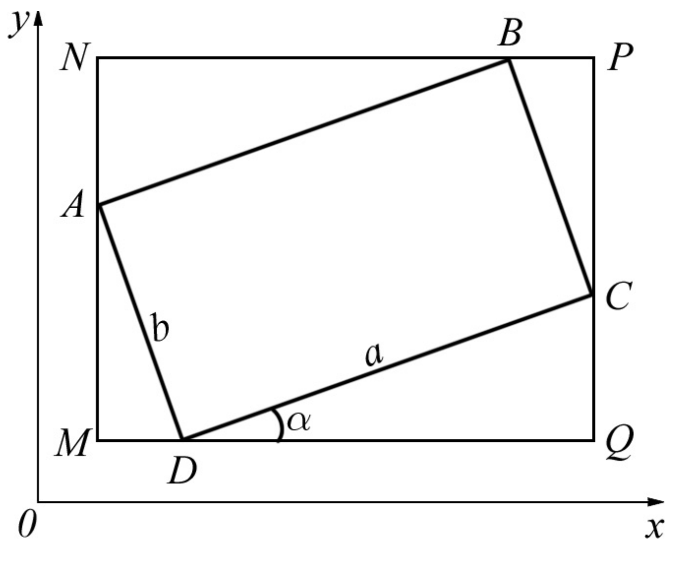
Из геометрии известно, что все движения сводятся к параллельному переносу, симметрии относительно плоскости и повороту относительно какой-либо точки.

Очевидно, что мера множества будет сохраняться при параллельном переносе и симметрии относительно прямой.

Докажем, что мера множества сохраняется и при повороте. Для этого рассмотрим прямоугольник $ABCD$, повернутый относительно системы координат.

Через точки A, B, C и D проведем прямые параллельные координатным осям. Обозначим получившийся прямоугольник $MNPQ$. Тогда по свойству аддитивности меры получим

$$\mu(MNPQ) = \mu(ABCD) + \mu(MAD) + \mu(ANB) + \mu(BPC) + \mu(DCQ).$$



Пусть $AD = b$, $DC = a$ и $\angle CDQ = \alpha$, тогда $MD = b\sin\alpha$, $DQ = a\cos\alpha$, $QC = a\sin\alpha$, $CP = b\cos\alpha$, $PB = b\sin\alpha$, $BQ = a\cos\alpha$, $QA = a\sin\alpha$ и $AM = b\cos\alpha$. Отсюда

$$\mu(ABCD) = (b\sin\alpha + a\cos\alpha)(b\cos\alpha + a\sin\alpha) - \\ - 2\left(\frac{1}{2}b^2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha\right) = ab.$$

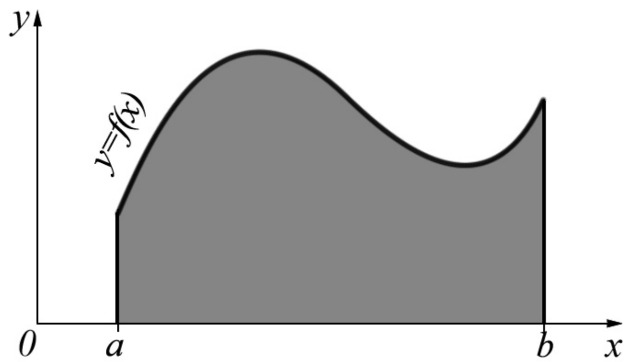
Значит, мера любого множества, которое можно представить в виде объединения прямоугольников, сохраняется при повороте относительно координатнатных осей, а так как в равные фигуры вписываются равные элементарные множества, то меры равных фигур будут равны между собой.

Отсюда легко получить, что площадь любого многоугольника, вычисленная по формуле, полученной в школьном курсе, совпадает с мерой Жордана этого многоугольника.

2.2 Площадь криволинейной трапеции

Теперь рассмотрим фигуру на плоскости, ограниченную графиком функции $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$.

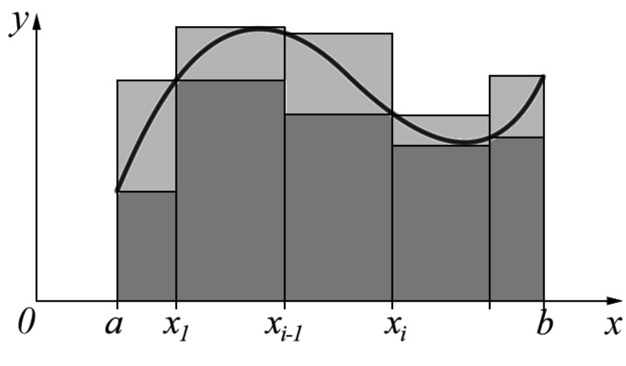
Такую фигуру будем называть ***криволинейной трапецией***.



Докажем, что если функция $y = f(x)$ интегрируема, то криволинейная трапеция измерима, и ее мера (площадь) равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке, то, взяв достаточно мелкое разбиение этого отрезка, получим, что разность сумм Дарбу $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$.

Но $S_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\Delta x_i$ и $s_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\Delta x_i$ — площади двух ступенчатых фигур, большая из которых содержит криволинейную трапецию, а меньшая — содержится в ней.



Так как ступенчатые фигуры измеримы, то по теореме 7.1.2 эта трапеция измерима и ее площадь равна

$$\inf_T S_T(f) = \sup_T s_T(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь круга радиуса R.

☺ Вычислим площадь четверти круга. Поскольку площадь не зависит от положения круга на плоскости, расположим его центр в начале координат и возьмем четверть этого круга, лежащую в первой координатной четверти. Уравнение верхней части окружности будет иметь вид $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, поэтому, чтобы найти нужную площадь, надо проинтегрировать эту функцию на

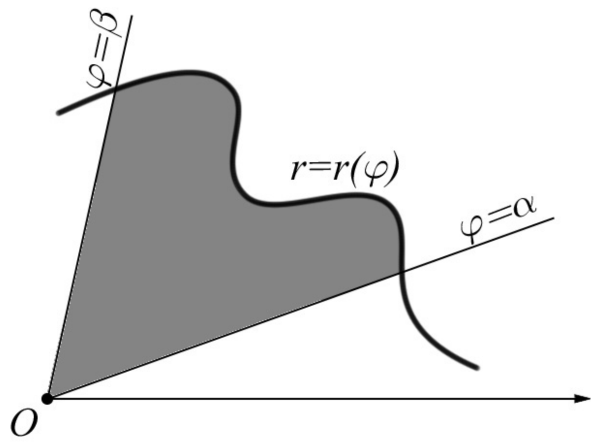
промежутке $[0, R]$, т.е. площадь четверти круга будет равна $\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx$.
Для вычисления этого интеграла применим подстановку $x = R\sin t$. Тогда

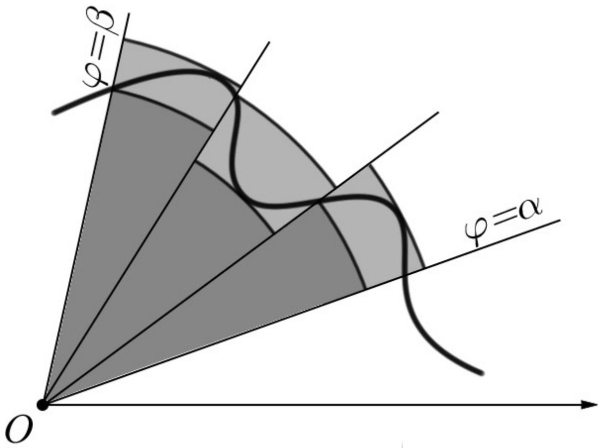
$$\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = R^2 \int\limits_1^{\pi/2} \cos^2 t dt = R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Следовательно, мы получили уже известную нам формулу $S_{\text{кр}} = \pi R^2$. ☻

Отсюда получается формула, которая понадобится нам в следующем пункте. Если радиусами разделить круг на 2π частей, то получим площадь сектора с углом в 1 радиан: $\dfrac{R^2}{2}$. Тогда площадь сектора с углом α радиан равна $S_{\text{сект}} = \dfrac{R^2\alpha}{2}$.





Рассмотрим фигуру на плоскости, ограниченную кривой, заданной в полярных координатах $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$.

Предположим, что функция $r = r(\varphi)$ непрерывна, тогда эта фигура будет измеримой. Вычислим ее площадь S.

Для этого разделим угол между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ на n частей: $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n = \beta$. Между каждыми двумя лучами деления проведем дуги двух окружностей с радиусами $r_i = \min\limits_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$ и $R_i = \max\limits_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$.

Тогда выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\varphi_i \leqslant S \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.

Очевидно, что суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\varphi_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} R_i^2 \Delta\varphi_i$ являются, соответственно, нижней и верхней суммами Дарбу для интеграла $\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$. Поэтому искомая площадь S будет равна $\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$.

§3 Кривые в $\mathbb{R}^n$. Длина кривой

Определение 7.3.1. ***Кривой*** *будем называть отображение отрезка* $[a,b]$ *в* $\mathbb{R}^n$*, которое будем обозначать как* $\vec{r} = \vec{r}(t)$*,* $t \in [a,b]$ *или* $(x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots x_n = x_n(t))$*,* $t \in [a,b]$.

Если при $t_1 \neq t_2$ будет выполнено $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, то будем говорить, что кривая ***имеет точку самопересечения***. Если кривая имеет единственную точку самопересечения при $t_1 = a$ и $t_2 = b$, т.е. $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, то ее будем называть ***простой замкнутой кривой***.

Если все функции $x_i(t)$ непрерывны на $[a,b]$, то кривую будем называть ***непрерывной***, а, если эти функции непрерывно дифференцируемы, причем $\forall t \in [a,b]$ $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0$, то кривую будем называть ***гладкой***.

При $n = 2$ или $n = 3$ это отображение имеет геометрический образ, который является графиком векторной функции скалярного аргумента. В этой ситуации будем считать, что $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ или $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, соответственно.

Сформулируем несколько свойств этих функций, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Если функция* $\vec{r}(t)$ *дифференцируема на отрезке* $[a,b]$*, то существует такое значение* $\tau \in [a,b]$*, что выполняется неравенство*

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\tau)|\,(b-a).$$

► Введем орт $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}(b) - \vec{r}(a)}{|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|}$. Тогда

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b) - \vec{r}(a), \vec{e}) = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}).$$

Теперь рассмотрим функцию $f(t) = (\vec{r}(t), \vec{e}) = x(t)\,e_x + y(t)\,e_y + z(t)\,e_z$. Так как эта функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, то существует $\tau \in [a,b]$, при котором $f(b) - f(a) = f'(\tau)(b-a)$. Следовательно,

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}) = f(b) - f(a) =$$
$$= f'(\tau)(b-a) = (\vec{r}\,'(\tau), \vec{e})(b-a) \leqslant |\vec{r}\,'(\tau)|\,(b-a). ◄$$

Определение 7.3.2. ***Определенным интегралом от векторной функции*** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *будем называть вектор*

$$\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt = \vec{i}\int\limits_a^b x(t)\,dt + \vec{j}\int\limits_a^b y(t)\,dt + \vec{k}\int\limits_a^b z(t)\,dt.$$

Из определения ясно, что если $\vec{r}(t)$ — непрерывна, то выполнена формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b \vec{r}'(t)\,dt = \vec{r}(b) - \vec{r}(a)$.

Лемма 2. *Если $\vec{r}(t)$ — непрерывная функция, то справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |\vec{r}(t)|\,dt.$$

► Обозначим $p = \int\limits_a^b x(t)\,dt$, $q = \int\limits_a^b y(t)\,dt$, $s = \int\limits_a^b z(t)\,dt$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt\right| = \sqrt{p^2+q^2+s^2}.$$

Используя формулу для модуля вектора и неравенство Коши–Буняковского, получим оценку

$$\left|\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt\right|^2 = p\int\limits_a^b x(t)\,dt + q\int\limits_a^b y(t)\,dt + s\int\limits_a^b z(t) =$$

$$= \int\limits_a^b (px(t) + qy(t) + sz(t))\,dt \leqslant \int\limits_a^b \sqrt{p^2+q^2+s^2}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}dt =$$

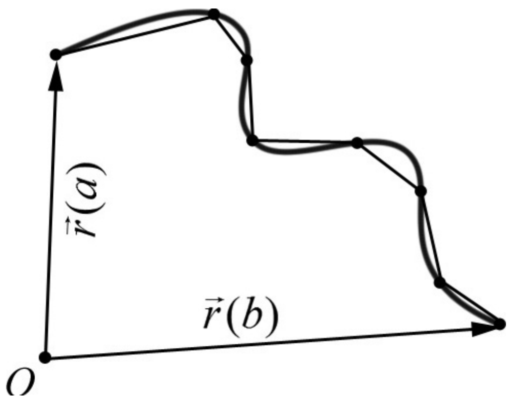
$$= \left|\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt\right| \int\limits_a^b |\vec{r}(t)|\,dt.$$

Если $\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt = 0$, то доказываемое неравенство очевидно. В противном случае, сокращая неравенство на $\left|\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt\right|$, получаем требуемое. ◄

Пусть $n = 3$ и $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ — гладкая простая кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей так, что $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ и рассмотрим выражение

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}\left(t_i\right) - \vec{r}\left(t_{i-1}\right)\right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\left(x\left(t_i\right) - x\left(t_{i-1}\right)\right)^2 + \left(y\left(t_i\right) - y\left(t_{i-1}\right)\right)^2 + \left(z\left(t_i\right) - z\left(t_{i-1}\right)\right)^2\right)}.$$

Значение этого выражения равно длине ломаной, вписанной в данную кривую, вершины которой соответствуют точкам деления t_i.



Длиной кривой будем называть $\sup \sigma_n$, где супремум берется по всевозможным ломаным, вписанным в данную кривую (т.е. по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$ на части). Если этот супремум конечен, то кривую называют ***спрямляемой***.

Теорема 7.3.1. *Если кривая гладкая, то она спрямляема.*

► По лемме 1 получим неравенство

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}\left(t_i\right) - \vec{r}\left(t_{i-1}\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}'\left(\tau_i\right)\right| \Delta t_i.$$

Так как функция $\left|\vec{r}'\left(t\right)\right|$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, следовательно, $0 < \sigma_n \leqslant C\left(b - a\right)$, т.е σ_n ограничена и имеет конечный супремум. ◄

Теорема 7.3.2. *Длина гладкой кривой $\vec{r} = \vec{r}\left(t\right)$ равна $\int\limits_a^b \left|\vec{r}'\left(t\right)\right| dt$.*

► Обозначим длину кривой через L. Тогда

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}\left(t_i\right) - \vec{r}\left(t_{i-1}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}'\left(t\right) dt\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\vec{r}'\left(t\right)\right| dt = \int\limits_a^b \left|\vec{r}'\left(t\right)\right| dt,$$

откуда $L \leqslant \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt$.

Чтобы доказать противоположное неравенство, воспользуемся тем, что функция $|\vec{r}\,'(t)|$ непрерывна на отрезке, следовательно, равномерно непрерывна на этом отрезке. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, чтобы для любых t_1 и t_2, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, было выполнено $||\vec{r}\,'(t_1)| - |\vec{r}\,'(t_2)|| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Выберем разбиение отрезка $T = \{t_i\}$ такое, чтобы $\max(t_i - t_{i-1}) < \delta$. Тогда для $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ справедливо неравенство $|\vec{r}\,'(t)| < |\vec{r}\,'(t_i)| + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ и, интегрируя это неравенство по промежутку $[t_{i-1}, t_i]$, получим

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)|\,dt < \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t_i)|\,dt + \frac{\varepsilon\Delta t_i}{2(b-a)}.$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части неравенства:

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t_i)|\,dt =$$

$$= |\vec{r}\,'(t_i)|\,\Delta t_i = |\vec{r}\,'(t_i)\,\Delta t_i| = \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t_i)\,dt\right| = \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t) + \vec{r}\,'(t))\,dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t))\,dt + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t))\,dt\right| + \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t)\,dt\right|.$$

В последней сумме первое слагаемое можно оценить:

$$\left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t))\,dt\right| < \frac{\varepsilon\Delta t_i}{2(b-a)},$$

а второе слагаемое: $\left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t)\,dt\right| = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$.

Окончательно получим $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)|\,dt < |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| + \dfrac{\varepsilon\Delta t_i}{(b-a)}$.

Суммируя полученные неравенства по i, будем иметь

$$\int\limits_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt < \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| + \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)} = \sigma_n + \varepsilon,$$

откуда $\int\limits_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt < L + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $\int\limits_a^b |\vec{r}'(t)|\,dt \leqslant L$. ◀

Формулы для вычисления длины кривой

Из доказанной теоремы следует, что если гладкая кривая задана параметрическими уравнениями, то ее длина вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Если кривая плоская, то будем считать, что она лежит в плоскости OXY и $z(t) = 0$. Тогда предыдущая формула упрощается:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Если кривая лежит в плоскости OXY и является графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[a,b]$, то, принимая x за параметр, из последней формулы получаем

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'_x)^2 + (y'_x(x))^2}dx = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где r и φ — полярные координаты точки плоскости, то, полагая $t = \varphi$ в интеграле $L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$, получим

$$x'_\varphi = (r(\varphi)\cos\varphi)'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$
$$y'_\varphi = (r(\varphi)\sin\varphi)'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$$

Тогда $(x')^2 + (y')^2 =$

$$= (r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2$$

$$\text{и} \quad L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r\left(\varphi\right)\right)^2 + \left(r'\left(\varphi\right)\right)^2} d\varphi.$$

§4 Вычисление объемов

Во избежании путаницы, в этом пункте будем обозначать меру плоского множества E (т.е. площадь) как $\mu_2(E)$, а меру множества E в трехмерном пространстве (т.е. объем) как $\mu_3(E)$.

Теорема 7.4.1. *Пусть задана непрерывная функция $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in G \subset R^2$, где G — измеримое ограниченное замкнутое множество на плоскости. Тогда множество точек*
$E = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in G,\, z = \varphi(x,y)\}$ измеримо в пространстве R^3 и $\mu_3(E) = 0$.

► Множество G является компактом, и, следовательно, для функции $\varphi(x,y)$ справедливы теоремы Вейерштрасса и Кантора. (Из доказательства легко видеть, что теоремы о функциях непрерывных на компакте (4.4.4, 4.4.5 и 4.4.7) не зависят от размерности пространства, в котором рассматривается функция.)

Тогда по теореме Вейерштрасса функция $\varphi(x,y)$ будет ограниченной, т.е. существуют такие числа M и m, что $m \leqslant \varphi(x,y) \leqslant M$, $(x,y) \in G$. Так как множество G — измеримо, то можно найти два таких элементарных множества G_1 и G_2, что $G_1 \subset G \subset G_2$ и $\mu_2(G_2) - \mu_2(G_1) < \dfrac{\varepsilon}{M-m}$.

Образуем декартовы произведения $E_1 = G_1 \times [m,M]$ и $E_2 = G_2 \times [m,M]$. Очевидно, что эти множества элементарны, и

$$\begin{gathered}
\mu_3(E_2) = \mu_3\left(G_2 \times [m,M]\right) = (M-m)\,\mu_2(G_2), \\
\mu_3(E_1) = \mu_3\left(G_1 \times [m,M]\right) = (M-m)\,\mu_2(G_1) \\
\text{и} \quad \mu_3(E_2) - \mu_3(E_1) = (M-m)\left(\mu_2(G_2) - \mu_2(G_1)\right) < \varepsilon.
\end{gathered}$$

Так как $E_1 \subset E \subset E_2$, то множество E — измеримо.

Теперь найдем объем множества E. Используя теорему Кантора по ε >0 найдем такое $\delta > 0$, что если $\rho\left(M'(x',y'), M''(x'',y'')\right) < \delta$, то $\left|\varphi(x',y') - \varphi(x'',y'')\right| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu_2(G)}$.

Возьмем такое элементарное множество G_1, что $G \subset G_1$ и $\mu_2(G_1) < 2\mu_2(G)$, причем будем считать, что клетки множества G_1 настолько малы, что диаметр наибольшей из них меньше найденного δ.

Обозначим клетки этого множества через Δ_i и пусть $M_i = \max\limits_{(x,y)\in\Delta_i} \varphi(x,y)$ и $m_i = \min\limits_{(x,y)\in\Delta_i} \varphi(x,y)$. Очевидно, что $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{2\mu_2(G)}$. Тогда множество $E_1 = \bigcup\limits_i (\Delta_i \times [m_i, M_i])$ — клеточное, содержит E, и его мера

$$\mu_3(E_1) = \mu_3\left(\bigcup_i (\Delta_i \times [m_i, M_i])\right) = \sum_i \mu_3(\Delta_i \times [m_i, M_i]) =$$
$$= \sum_i (M_i - m_i)\,\mu_2(\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2\mu_2(G)}\mu_2(G_1) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\mu_3(E) \leqslant \mu_3(E_1) < \varepsilon$ и, ввиду произвольности ε, $\mu_3(E) = 0$. ◄

Замечание. *Геометрический смысл доказанной теоремы состоит в том, что объем ограниченной поверхности в пространстве, заданной непрерывной функцией двух переменных, равен нулю.*

Следствие. Если в пространстве рассматривается ограниченная фигура, границей которой является конечное множество поверхностей, заданных непрерывными функциями двух переменных, то такая фигура измерима.

Это следует из доказанной теоремы и теоремы 7.1.4.

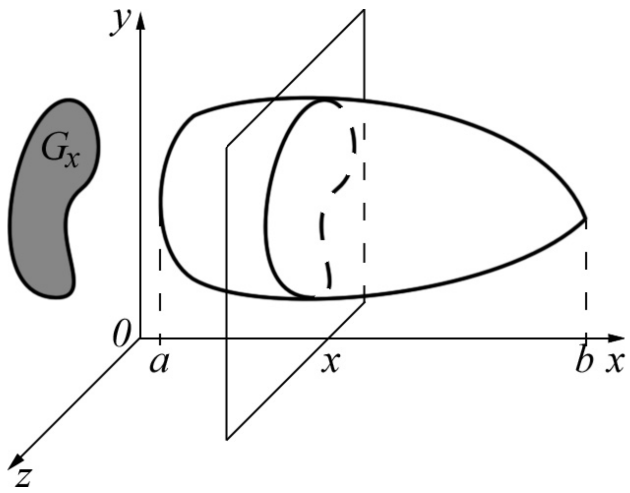
Теорема 7.4.2. *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *задано измеримое множество точек* $E = \{M(x,y,z)\}$ *такое, что если* $M \in E$, *то* $a \leqslant x_M \leqslant b$ *и для всякого* $x \in [a,b]$ *множество* $G_x = \{(y,z)\,|\,(x,y,z) \in E\}$ — *измеримо и* $\mu_2(G_x) = S(x)$ — *непрерывная функция. Тогда*

$$\mu_3(E) = V(E) = \int\limits_a^b S(x)\,dx.$$

Множество $G_x = \{(y,z)\,|\,(x,y,z) \in E\}$ будем называть ***сечением*** множества E плоскостью $x = const$ (см. рис.).

► Так как множество E измеримо, то для $\forall\varepsilon > 0$ существуют два таких элементарных множества E_1 и E_2, что $E_1 \subset E \subset E_2$ и $\mu_3(E_2) - \mu_3(E_1) < \varepsilon$.

Рассмотрим клетки, образующие множества E_1 и E_2, и выберем все значения x, образующие эти клетки. Располагая эти значения в порядке возрастания, получим разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Измельчая, если надо, клетки множеств E_1 и E_2, будем считать, что все точки этого разбиения участвуют в образовании клеток. Тогда, если $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$, то сечения $G_x^{(1)}$ и $G_x^{(2)}$ множеств E_1 и E_2



будут двумерными клеточными множествами, причем $G_x^{(1)} \subset G_x \subset G_x^{(2)}$ и $G_x^{(1)} \times [x_{i-1}, x_i] \subset E_i \subset G_x^{(2)} \times [x_{i-1}, x_i]$, где E_i — та часть множества E, которая находится между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$. Тогда

$$V\left(G_x^{(1)} \times [x_{i-1}, x_i]\right) < V(E_i) < V\left(G_x^{(2)} \times [x_{i-1}, x_i]\right)$$

или, учитывая, что $V\left(G_x^{(1)} \times [x_{i-1}, x_i]\right) = \mu_2 G_{x_{i-1}}^{(1)} \cdot \Delta x_i$ и $V\left(G_x^{(2)} \times [x_{i-1}, x_i]\right) = \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(2)}\right) \cdot \Delta x_i$, получим неравенство

$$\mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(1)}\right) \cdot \Delta x_i < V(E_i) < \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(2)}\right) \cdot \Delta x_i.$$

Суммируя эти неравенства по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(1)}\right) \cdot \Delta x_i < V(E) < \sum_{i=1}^{n} \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(2)}\right) \cdot \Delta x_i.$$

Очевидно, что если составить суммы Дарбу s_T и S_T для функции $S\,(x)$ на промежутке $[a, b]$ для указанного разбиения этого промежутка, то

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(1)}\right) \cdot \Delta x_i \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(2)}\right) \cdot \Delta x_i,$$

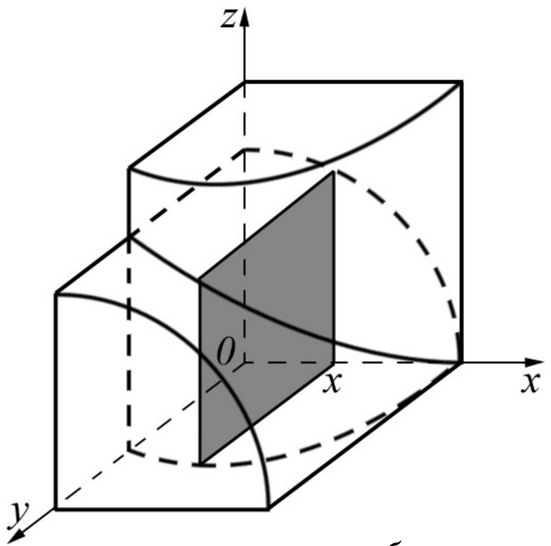
следовательно, единственное число, которое можно поставить между числами $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(1)}\right) \cdot \Delta x_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_2\left(G_{x_{i-1}}^{(2)}\right) \cdot \Delta x_i$ при любом выборе множеств E_1 и E_2, это $\int\limits_a^b S\,(x)\,dx$. Отсюда $V(E) = \int\limits_a^b S\,(x)\,dx$. ◄

Пример 1. Найти объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ и координатными плоскостями $(x, y, z \geqslant 0)$.

☺Очевидно (см. рис.), что в сечении этой фигуры плоскостью $x = const$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ образуется квадрат, сторона которого равна $\sqrt{a^2 - x^2}$. Поэтому

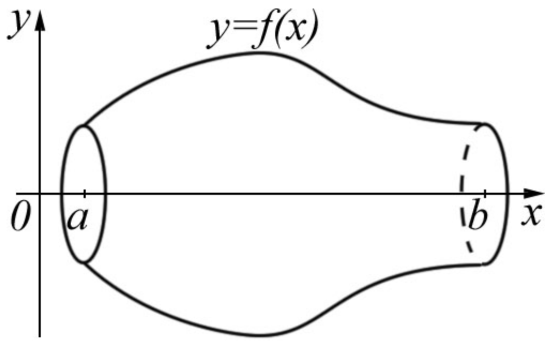
$$V = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx = \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

☻



Доказанную теорему легко применить к случаю, когда тело, объем которого мы ищем, образуется путем вращения некоторой кривой вокруг оси OX (см. рис.).

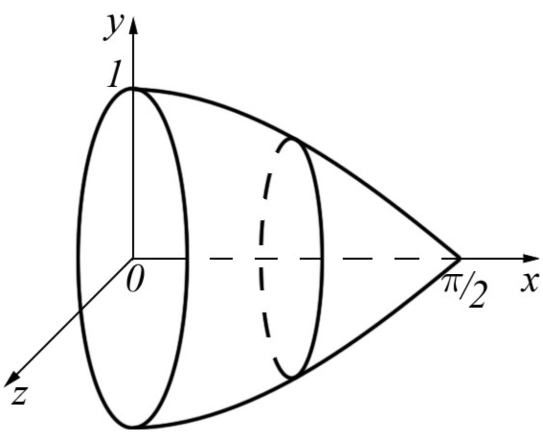
Если на промежутке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ и фигура E получается вращением графика этой функции вокруг оси OX, то объем этой фигуры равен $V(E) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$



Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением графика функции $y = \cos x$, заданной на промежутке $[0, \pi/2]$, вокруг оси OX (см. рис.).

$$☺V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi^2}{4}.☻$$



Глава 8

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

§1 Определения

1.1 Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

В определении интеграла Римана существенную роль играл тот факт, что промежуток интегрирования был ограниченным. Здесь мы распространим понятие интеграла на бесконечный промежуток.

Определение 8.1.1. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на каждом промежутке вида $[a, A]$ и существует $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$. Тогда этот предел будем называть* ***несобственным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по промежутку*** $[a, +\infty)$**.**

Такой несобственный интеграл обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если предел, указанный в определении, конечен, то мы будем говорить, что ***интеграл сходится***, если же он бесконечен или не существует, то будем говорить, что ***интеграл расходится***, однако, в последнем случае выражение $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже используют, но только как символ.

Аналогично можно ввести интеграл на промежутке $(-\infty, a]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл по всей прямой понимают как сумму:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A_1\to-\infty}\int\limits_{A_1}^{a} f(x)\,dx + \lim_{A_2\to+\infty}\int\limits_{a}^{A_2} f(x)\,dx,$$

где числа A_1 и A_2 не зависят друг от друга.

Пример 1. Исследовать, сходятся ли интегралы: a) $\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$; b) $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^s}$; c) $\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{x-1}$; d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1}$. Если они сходятся, то вычислить их.

☺ a) По определению:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg} x)\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2},$$

т.е. интеграл сходится и равен $\pi/2$.

b) $$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^s} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x^s} = \lim_{A\to+\infty}\begin{cases}\dfrac{A^{1-s}}{1-s}-\dfrac{1}{1-s}, & s\neq 1;\\ \ln A, & s=1.\end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл сходится, если $1-s<0$, т.е. при $s>1$, и расходится при $s\leqslant 1$. Если интеграл сходится, то он равен $\dfrac{1}{s-1}$.

c) $$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x-1} = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{0}\frac{dx}{x-1} = \lim_{A\to-\infty}(\ln|x-1|)\Big|_A^0 =$$

$= \lim\limits_{A\to-\infty}(-\ln|A-1|) = -\infty$. Следовательно, интеграл расходится.

d) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1} = \lim_{A_1\to-\infty}\int\limits_{A_1}^{0}\frac{xdx}{x^2+1} + \lim_{A_2\to+\infty}\int\limits_{0}^{A_2}\frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{A_2\to+\infty}\ln\left(A_2^2+1\right) - \lim_{A_1\to-\infty}\ln\left(A_1^2+1\right)\right).$$

Последнее выражение представляет собой неопределенность, и, таким образом, предела не существует, и интеграл расходится. ☻

Замечание 1. *Если в последнем интеграле положить $A_1 = A_2$, то указанный предел существует и будет равен нулю. Такое значение предела называют* ***главным значением интеграла****, но мы такими значениями сейчас заниматься не будем.*

1.2 Несобственный интеграл от неограниченной функции

Необходимым условием существования интеграла Римана была ограниченность подынтегральной функции. Теперь расширим понятие интеграла, отказавшись от этого условия.

Определение 8.1.2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на каждом промежутке вида $[a, b-\delta]$ $(a < b-\delta < b)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Рассмотрим функцию $I(\delta) = \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{\delta\to 0+} I(\delta)$ будем называть* ***несобственным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по промежутку*** $[a, b)$**.**

Этот несобственный интеграл обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$.

Если этот предел — конечное число, то будем говорить, что ***интеграл сходится***. Если этот предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что ***интеграл расходится***, и выражение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ употреблять как символ.

Точку b, при стремлении к которой подынтегральная функция не ограничена, будем называть ***особой точкой***.

Если особой точкой является левый конец промежутка, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Особая точка может лежать и внутри промежутка. Пусть это будет точка c. Тогда по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to 0+} \int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to 0+} \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx.$$

В этой ситуации переменные δ_1 и δ_2 не зависят друг от друга.

Пример 2. Определить, сходятся ли интегралы: a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$;

c) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^s}$. Если они сходятся, то вычислить их.

☺ a) В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ особая точка $x = 1$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0+} (\arcsin x)\Big|_0^{1-\delta} = \lim_{\delta\to 0+} (\arcsin(1-\delta)) = \frac{\pi}{2}.$$

b) В интеграле $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ особая точка $x = 0$ лежит внутри промежутка. Поэтому

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\delta_1\to 0+} \int\limits_{-1}^{-\delta_1} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\delta_2\to 0+} \int\limits_{\delta_2}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\delta_1\to 0+} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{-\delta_1} + \lim_{\delta_2\to 0+} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{\delta_2}^1 =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{\delta_1\to 0+} \left(-\frac{1}{\delta_1^2} + 1\right) + \frac{1}{2} \lim_{\delta_2\to 0+} \left(-1 + \frac{1}{\delta_2^2}\right).$$

Так как δ_1 и δ_2 не зависят друг от друга, то последнее выражение представляет собой неопределенность. Таким образом, предела не существует и интеграл расходится.

Замечание 2. *При вычислении несобственных интегралов в случае, если интеграл сходится, можно использовать формулу Ньютона – Лейбница. Предположим, что особая точка $x = b$ - правый конец промежутка. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$, а $F(b-0) = \lim\limits_{\delta\to 0+} F(x-\delta)$.*

При вычислении несобственного интеграла с особой точкой внутри промежутка необходимо использовать свойство аддитивности и делить промежуток на части.

c) В интеграле $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^s}$ особая точка $x = b$. Поэтому

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^s} = \lim_{\delta\to 0+} \begin{cases} -\dfrac{\delta^{1-s}}{1-s} + \dfrac{(b-a)^{1-s}}{1-s}, & s \neq 1; \\ -(\ln\delta - \ln(b-a)), & s = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл сходится, если $1-s>0$ или $s<1$, и расходится, если $s \geqslant 1$. Если интеграл сходится, то он равен $\dfrac{(b-a)^{1-s}}{1-s}$. ☻

1.3 Обобщение

Интегралы, рассмотренные в первом пункте, называются ***несобственными интегралами первого рода*** или ***интегралами по бесконечному промежутку***, а интегралы, рассмотренные во втором пункте, — ***интегралами второго рода*** или ***интегралами от неограниченной функции***.

В дальнейшем объединим рассмотрение интегралов обоих типов, обозначая их символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. При этом будем считать, что особой точкой является точка $x=b$, которая либо конечна и при этом $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, либо $b=+\infty$.

Тогда можно говорить, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится к числу I, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая левосторонняя окрестность точки $x=b$, что для всякого значения ξ, взятого из этой окрестности, будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx - I\right| < \varepsilon$.

§2 Признаки сходимости несобственных интегралов

2.1 Критерий Коши сходимости интегралов

Теорема 8.2.1 (Критерий Коши). *Пусть для любого δ $(0<\delta<b-a)$ функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b-\delta]$. Тогда, для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала такая левосторонняя окрестность точки $x=b$, что для всяких двух значений ξ_1 и ξ_2, взятых из этой окрестности, было выполнено неравенство* $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

► Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится и его значение равно I. Тогда, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, можно найти такую левостороннюю окрестность точки $x = b$, что для всякого значения ξ из этой окрестности будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_a^\xi f(x)\,dx - I\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, которое, в силу аддитивности интеграла, приводит к неравенству $\left|\int\limits_\xi^b f(x)\,dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (так как $\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$ также сходится).

Взяв два значения ξ_1 и ξ_2 из этой окрестности, получим

$$\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{\xi_1}^{b} f(x)\,dx - \int\limits_{\xi_2}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\xi_1}^{b} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\xi_2}^{b} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такая левосторонняя окрестность точки $x = b$, что для всяких двух значений ξ_1 и ξ_2, взятых из этой окрестности, будет выполнено неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Последнее означает, что для этих значений ξ_1 и ξ_2 выполняется неравенство $|I(\xi_2) - I(\xi_1)| < \varepsilon$, где $I(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)\,dx$, а тогда по критерию Коши существования предела функции (теорема 3.3.8) получим, что функция $I(\xi)$ имеет предел при $\xi \to b - 0$. ◄

Пример 1. Исследовать на сходимость интегралы

a) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}dx$; b) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+5}}$.

☺ a) В интеграле $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}dx$ особой точкой является только верхний предел интегрирования, равный $+\infty$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и фиксируем какое-нибудь число $A > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{1}{A} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если взять ξ_1 и ξ_2 большие, чем A, то, используя неравенство $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$ и теорему (6.6.7) для оценки интеграла, получим $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{x^2}\right| = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} < \frac{2}{A} < \varepsilon$. Значит, выполнено достаточное условие сходимости интеграла, и интеграл сходится.

b) В этом интеграле тоже только одна особая точка, равная $+\infty$. Докажем расходимость этого интеграла. Для этого надо показать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что, какое бы значение $A > 0$ мы ни взяли, всегда найдутся значения ξ_1 и ξ_2, большие взятого A, при которых будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+5}}\right| > \varepsilon_0$. Положим $\xi_1 = n$ и $\xi_2 = 2n$. Тогда, используя монотонность функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+5}}$, получим оценку

$$\left|\int\limits_{n}^{2n} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+5}}\right| > \frac{1}{\sqrt[3]{(2n)^5+5}} \int\limits_{n}^{2n} xdx = \frac{4n^2 - n^2}{2\sqrt[3]{32n^5+5}} = \frac{3n^2}{2\sqrt[3]{32n^5+5}}.$$

Так как при $n \to \infty$ последнее выражение стремится к бесконечности, оно, начиная с некоторого значения n, будет больше, например, единицы. Поэтому в качестве ε_0 можно взять, в частности, единицу. ☻

Замечание 1. *Критерий Коши на практике обычно используют для доказательства расходимости интеграла, так как для доказательства сходимости существуют достаточные признаки сходимости, применение которых намного легче.*

Пример 2. Доказать, что $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^3}\ln x}$ расходится.

☺ Здесь особой точкой является точка $x = 0$. Поэтому нужно показать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что, какое бы значение $\delta > 0$ мы ни взяли, можно найти такие значения ξ_1 и ξ_2, удовлетворяющие неравенству $0 < \xi_{1,2} < \delta$, для которых выполнено неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{\sqrt{x^3}\ln x}\right| \geqslant \varepsilon_0$. Положим $\xi_1 = 1/n^2$ и $\xi_2 = 1/n$. Тогда, используя монотонность функции $1/\ln x$ и теорему об оценке интеграла, получим

$$\left|\int\limits_{1/n^2}^{1/n} \frac{dx}{\sqrt{x^3}\ln x}\right| > \left|\frac{1}{\ln n^2}\int\limits_{1/n^2}^{1/n} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}\right| = \frac{n-\sqrt{n}}{\ln n}.$$

Т.к. эта величина стремится к бесконечности, то, начиная с некоторого номера, она будет больше числа ε_0, т.е. расходимость интеграла доказана. ☻

2.2 Теоремы сравнения

В этом пункте будем рассматривать только интегралы от неотрицательных функций ($f(x) \geqslant 0$ при $x \in [a,b)$). Тогда очевидно, что с изменением параметра ξ от a до b интеграл $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$ возрастает. Следовательно, сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильна ограниченности интеграла $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$ как функции от переменной ξ, а его расходимость будет означать, что $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int_a^\xi f(x)\,dx = +\infty$.

Теорема 8.2.2. *Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, причем для всех $x \in [a,b)$ выполнено неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Допустим также, что функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на каждом промежутке вида $[a,\xi]$, $a < \xi < b$. Тогда, если интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ тоже сходится, и, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.*

(Сравните с теоремой 2.5.7)

► По критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность точки b вида $(b-\delta, b)$, что для всяких значений $a < \xi_{1,2} < b$, лежащих в этой окрестности, будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Но, в силу условий теоремы, для любых $a < \xi_{1,2} < b$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} g(x)\,dx\right|$, откуда $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Наоборот, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что, какую бы окрестность указанного вида мы ни взяли, найдутся такие $a < \xi_{1,2} < b$, лежащие в этой окрестности, что будет выполнено неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0$. Отсюда $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} g(x)\,dx\right| \geqslant \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0$, а это означает, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится. ◄

Замечание 2. *В условии теоремы выполнение неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ или $f(x) \geqslant g(x)$ можно требовать только в некоторой окрестности особой точки. Тогда надо промежуток $[a, b)$ разбить на два: $[a, c]$ и $[c, b)$ таким образом, чтобы заданное неравенство выполнялось на промежутке $[c, b)$. Интеграл по первому промежутку существует, как интеграл Римана, и признак сходимости достаточно применить только к интегралу по промежутку $[c, b)$.*

Теорема 8.2.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$*

1) неотрицательны на промежутке $[a, b)$;

2) интегрируемы на каждом промежутке вида $[a, \xi]$, $a < \xi < b$;

3) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b - 0$.

Тогда, если один из интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ или $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то сходится и второй, и, если один из них расходится, то расходится и второй.

► Эквивалентность функций, заданная в третьем условии теоремы, означает, что существует такая функция $h(x)$, что $f(x) = h(x)\,g(x)$ в некоторой левосторонней окрестности точки $x = b$ и $\lim\limits_{x \to b-0} h(x) = 1$. Возьмем $\varepsilon = 1/2$ и найдем такое $\delta > 0$, чтобы для всех $x \in (b-\delta, b)$ выполнялось неравенство $\frac{1}{2} = 1 - \varepsilon < h(x) < 1 + \varepsilon = \frac{3}{2}$. Тогда для этих значений x будет верным неравенство $\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$.

Если интеграл от функции $g(x)$ по промежутку $[a, b)$ сходится, то по теореме 8.2.2 (с учетом замечания) интеграл от функции $f(x)$ тоже сходится, если же первый интеграл расходится, то второй интеграл тоже расходится. ◄

При исследовании интегралов на практике, подынтегральную функцию чаще всего сравнивают с функцией вида $\frac{1}{x^s}$, если особая точка — бесконечная, или $\frac{1}{(b-x)^s}$, если особая точка $x = b$, где b — конечно. Сходимость таких интегралов была исследована в предыдущем параграфе.

Пример 3. Исследовать на сходимость интегралы

$$\text{a)} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \text{ b)} \int\limits_0^1 \frac{3x dx}{(1-x)(x^5+1)}; \text{ c)} \int\limits_0^{\pi/2} |\ln \sin x| \, dx; \text{ d)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\ln(x^7+2)}.$$

☺ a) Как мы уже говорили, данный интеграл имеет только одну особую точку ∞. Выполняется очевидное неравенство $0 \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Так как $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится, то $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ тоже сходится, следовательно, сходится и данный интеграл.

b) В этом интеграле особая точка $x = 1$, причем при $x \to 1 - 0$ выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x}{x^5+1} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $\frac{3x}{(1-x)(x^5+1)} \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$ расходится, поэтому данный интеграл тоже расходится.

c) В этом интеграле особой точкой является $x = 0$. Из известного предела $\lim\limits_{t \to 0} (t^\alpha \ln t) = 0$, $\alpha > 0$ (его можно вычислить по правилу Лопиталя), следует, что в окрестности нуля будет выполнено неравенство $|\sin^\alpha x \cdot \ln \sin x| < 1$, где в качестве α можно взять любое положительное число. Тогда, полагая $\alpha = 1/2$, получим $|\ln \sin x| < \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Так как $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, сходится $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ и, следовательно, сходится данный интеграл.

d) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, то для достаточно больших значений x выполняется неравенство $\ln x < x$ и $\frac{1}{\ln(x^7+1)} \sim \frac{1}{7\ln x} > \frac{1}{7x}$. Интеграл $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, следовательно, на этом промежутке интеграл от функции $\frac{1}{\ln(x^7+1)}$ тоже расходится. Расходится и данный интеграл. ☻

2.3 Исследование интеграла от функции, меняющей знак

Пусть функция задана на промежутке $[a, b)$, интегрируема на каждом промежутке $[a, \xi]$, $a < \xi < b$ и принимает на области своего определения как положительные, так и отрицательные значения. Тогда для интеграла от такой функции изучается два вида сходимости: обыкновенная, о которой мы говорили выше, и абсолютная.

Прежде, чем давать определение абсолютной сходимости интеграла, докажем теорему.

Теорема 8.2.4. *Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков вида $[a, \xi]$, $a < \xi < b$ и сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

► Применим для доказательства критерий Коши.

По свойству интеграла Римана $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} |f(x)|\,dx\right|$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое число ξ_0, чтобы для любых значений ξ_1 и ξ_2 таких, что $\xi_0 < \xi_{1,2} < b$, было выполнено $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$. Тогда для этих же значений ξ_1 и ξ_2 будет выполняться и неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. ◄

Определение 8.2.1. *Будем говорить, что интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ***сходится абсолютно****, если сходится интеграл* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 8.2.4 утверждает, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится в обычном смысле. Сразу заметим, что существуют функции, интегралы от которых сходятся, но не абсолютно. Примеры таких функций будут приведены ниже.

Определение 8.2.2. *Если несобственный интеграл сходится, но не сходится абсолютно, то будем говорить, что такой интеграл* ***сходится условно****.*

Очевидно, что для исследования интеграла на абсолютную сходимость можно применять признаки сравнения.

Докажем еще два признака, которые можно применять для интегралов от функций, меняющих свой знак.

Теорема 8.2.5 (признак Дирихле)**.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

1) определены на промежутке $[a, b)$*;*

2) интегрируемы на любом промежутке вида $[a, \xi]$, $a < \xi < b$*;*

3) на промежутке $[a, b)$ *функция* $g(x)$ *имеет ограниченную первообразную;*

4) $f(x)$ *монотонна и* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = 0$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ *сходится.*

► Так как каждая из данных функций интегрируема на промежутках вида $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, то их произведение тоже интегрируемо на этих промежутках.

Возьмем какой-либо промежуток $[\xi_1, \xi_2]$, $a < \xi_{1,2} < b$ и применим к нему вторую теорему о среднем:

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi_1)\int\limits_{\xi_1}^{\chi} g(x)\,dx + f(\xi_2)\int\limits_{\chi}^{\xi_2} g(x)\,dx, \quad \text{где } \chi \in [\xi_1, \xi_2].$$

Пусть $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$, причем по условию $|G(x)| \leqslant C$. Тогда $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\chi} g(x)\,dx\right| = |G(\chi) - G(\xi_1)| \leqslant 2C$ и, аналогично $\left|\int\limits_{\chi}^{\xi_2} g(x)\,dx\right| \leqslant 2C$. Отсюда

$$\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant |f(\xi_1)| \left|\int\limits_{\xi_1}^{\chi} g(x)\,dx\right| + |f(\xi_2)| \left|\int\limits_{\chi}^{\xi_2} g(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2C\,(|f(\xi_1)| + |f(\xi_2)|)\,.$$

Так как $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = 0$, то по $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\xi_0 \in (a,b)$, что если $\xi_0 \leqslant \xi_{1,2} < b$, то выполняются неравенства $|f(\xi_1)| < \dfrac{\varepsilon}{4C}$ и $|f(\xi_2)| < \dfrac{\varepsilon}{4C}$. Тогда, для этих значений ξ_1 и ξ_2 будет выполнено $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon$ и по критерию Коши интеграл сходится. ◄

Теорема 8.2.6 (признак Абеля)**.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$*

1) определены на промежутке $[a,b)$;

2) интегрируемы на любом промежутке вида $[a,\xi]$, $a < \xi < b$;

3) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится;

4) $f(x)$ монотонна и ограничена.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сходится.

► Снова применим вторую интегральную теорему о среднем:

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi_1)\int\limits_{\xi_1}^{\chi} g(x)\,dx + f(\xi_2)\int\limits_{\chi}^{\xi_2} g(x)\,dx.$$

Положим $|f(x)| \leqslant C$.

Так как $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то по $\varepsilon > 0$ можно найти такое значение $\xi_0 \in (a,b)$, для которого при любых ς_1 и ς_2, лежащих на промежутке (ξ_0, b), будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} g\left(x\right)dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$. Тогда, если $\xi_{1,2} \in (\xi_0, b)$, то справедлива оценка:

$$\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right| \leqslant \left|f\left(\xi_1\right)\right|\left|\int\limits_{\xi_1}^{\chi} g\left(x\right)dx\right| + \left|f\left(\xi_2\right)\right|\left|\int\limits_{\chi}^{\xi_2} g\left(x\right)dx\right| < \varepsilon,$$

откуда следует, что данный интеграл сходится. ◀

Теорема 8.2.7. *Пусть в некоторой окрестности точки b подынтегральная функция представима в виде* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right)$*, причем* $\int\limits_a^b f_2\left(x\right)dx$ *сходится абсолютно. Тогда*

a) если интеграл $\int\limits_a^b f_1\left(x\right)dx$ *расходится, то интеграл* $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ *расходится;*

b) если интеграл $\int\limits_a^b f_1\left(x\right)dx$ *сходится условно, то интеграл* $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ *сходится условно;*

c) если интеграл $\int\limits_a^b f_1\left(x\right)dx$ *сходится абсолютно, то интеграл* $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ *также сходится абсолютно.*

► Утверждение a) очевидно.

Утверждение c) следует из неравенства $\left|f\left(x\right)\right| \leqslant \left|f_1\left(x\right)\right| + \left|f_2\left(x\right)\right|$ и теоремы 8.2.2.

В утверждении b) очевидно, что интеграл $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ сходится. Если бы эта сходимость была абсолютной, то, так как выполняется неравенство $\left|f_1\left(x\right)\right| = \left|f\left(x\right) - f_2\left(x\right)\right| \leqslant \left|f\left(x\right)\right| + \left|f_2\left(x\right)\right|$, сходимость интеграла $\int\limits_a^b f_1\left(x\right)dx$ тоже была бы абсолютной, что противоречит условию. ◀

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos kx}{x^s} dx, \ k > 0$; b) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(1-x)\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}} dx$; c) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x}} dx$;

d) $\int\limits_0^1 \sin\frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$; e) $\int\limits_1^{\infty} \sin\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) dx$; f) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x} - \sin x}$.

☺ a) Очевидно, что при $s > 1$ интеграл сходится абсолютно, так как $\left|\frac{\cos(kx)}{x^s}\right| \leqslant \frac{1}{x^s}$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ сходится.

Если $s < 0$, то интеграл расходится по признаку Коши. Действительно, возьмем $\xi_1 = \frac{2\pi n}{k} + \frac{\pi}{2k}$ и $\xi_2 = \frac{\pi}{k}(2n+1) + \frac{\pi}{2k}$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\frac{2\pi n}{k}+\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{k}(2n+1)+\frac{\pi}{2k}} \frac{\cos(kx)}{x^s} dx\right| \geqslant \left(\frac{2\pi n}{k} + \frac{\pi}{2k}\right)^{-s} \left|\int\limits_{\frac{2\pi n}{k}+\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{k}(2n+1)+\frac{\pi}{2k}} \cos(kx)\, dx\right| =$$

$$= \frac{2}{k}\left(\frac{2\pi n}{k} + \frac{\pi}{2k}\right)^{-s}.$$

Так как последняя величина стремится к бесконечности при $n \to \infty$, то в качестве ε_0 можно взять произвольное положительное число, чтобы утверждать, что, какую бы окрестность бесконечности мы ни взяли, всегда найдутся такие значения ξ_1 и ξ_2, что будет выполняться неравенство $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\cos(kx)}{x^s} dx\right| \geqslant \varepsilon_0$.

При $s = 0$ непосредственным интегрированием убеждаемся, что интеграл расходится.

Наконец рассмотрим случай, когда $0 < s \leqslant 1$. С помощью признака Дирихле докажем, что интеграл сходится условно. Положим $g(x) = \cos(kx)$ и $f(x) = \frac{1}{x^s}$. Тогда

$$\left|\int\limits_1^x g(t)\, dt\right| = \left|\int\limits_1^x \cos(kx)\, dx\right| = \left|\frac{\sin(kx) - \sin k}{k}\right| \leqslant \frac{|\sin(kx)| + |\sin k|}{k} \leqslant \frac{2}{k},$$

т.е. первообразная от этой функции ограничена. Функция $f(x) = \frac{1}{x^s}$ убывает на промежутке интегрирования и стремится к нулю. Условия теоремы Дирихле выполнены, и интеграл сходится.

В этом случае абсолютной сходимости интеграла нет, так как

$$\left|\frac{\cos(kx)}{x^s}\right| \geqslant \frac{\cos^2(kx)}{x^s} = \frac{1+\cos(2kx)}{x^s}.$$

Интеграл от последней функции расходится, так как

$$\int\limits_1^\infty \frac{1+\cos(2kx)}{x^s}dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^s} + \int\limits_1^\infty \frac{\cos(2kx)}{x^s}dx,$$

и в последней сумме второй интеграл сходится (условно, по признаку Дирихле), а первый расходится.

b) В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(1-x)\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}}dx$ особая точка $x = 0$. Применим признак Абеля, положив $g(x) = \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}}$ и $f(x) = \arcsin(1-x)$.

В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}}dx$ сделаем замену переменной $t = \frac{1}{x}$. Тогда $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t}}dt$ и этот интеграл сходится. Функция $f(x) = \arcsin(1-x)$ ограничена и монотонна. Следовательно, данный интеграл сходится условно. Абсолютной сходимости здесь нет, так как на промежутке $[0, 1/2]$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\arcsin(1-x)\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}}\right| \geqslant \frac{\pi}{6}\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x^{5/3}} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{x^{5/3}} + \frac{\cos\frac{2}{x}}{x^{5/3}}\right).$$

Интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos\frac{2}{x}}{x^{5/3}}dx$ сходится (аналогично предыдущему), а интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^{5/3}}$ расходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{1/2}\left|\frac{\arcsin(1-x)\cos\frac{1}{x}}{x^{5/3}}\right|dx$ расходится, и данный интеграл не сходится абсолютно.

c) В интеграле $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\ln x}{\sqrt{x}}dx$ две особые точки: $x = 0$ и $x = \infty$. Поэтому разобьем этот интеграл на сумму двух:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} (x^\alpha \ln x) = 0$, $\alpha > 0$, то в некоторой окрестности нуля выполняется неравенство $|x^\alpha \ln x| < 1$ или $|\ln x| < \dfrac{1}{x^\alpha}$. Следовательно, если взять $\alpha = 1/4$, то в этой окрестности будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x^{3/4}}.$$

Так как $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ сходится, то первый интеграл сходится абсолютно.

Во втором интеграле положим $g(x) = \cos x$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ и применим признак Дирихле. Первообразная от функции $g(x)$: $\displaystyle\int_1^x \cos x dx = \sin x - \sin 1$ ограничена. Функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Исследуем ее на монотонность с помощью производной:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Эта производная будет отрицательной для всех значений $x \in \left(e^2, +\infty\right)$, следовательно, условия теоремы Дирихле выполнены и интеграл сходится условно.

Абсолютной сходимости второго интеграла нет. Действительно, выполнено неравенство

$$\left|\frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x}}\right| \geqslant \frac{\cos^2 x \ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x \ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x \ln x}{\sqrt{x}}.$$

Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 2x \ln x}{\sqrt{x}} dx$ сходится (доказывается аналогично доказанному выше), а интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится. Следовательно, расходится интеграл от суммы, и данный интеграл не сходится абсолютно.

d) Сделаем замену переменной по формуле $t = \dfrac{1+x}{1-x}$. Тогда

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}, \quad 1 - x^2 = \frac{2t}{(1+t)^2} \quad \text{и}$$

$$\int\limits_0^1 \sin\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t\,(t+1)}{t^{3/2}}dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}dt.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, доказывается, что первый интеграл сходится условно, а второй абсолютно. Следовательно, данный интеграл сходится условно.

e) Особой точкой является точка $x = \infty$. Очевидно, выполняется условие $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, поэтому для подынтегральной функции справедлива формула Тейлора – Маклорена: $\sin\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + R\,(x)$. Используя известное неравенство $t > \sin t > t - \dfrac{t^3}{3!}$, $t > 0$, оценим остаток

$$|R\,(x)| = \left|\sin\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{3!}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^3.$$

Так как для достаточно больших значений x справедливо неравенство $\ln x < x^{1/12}$, то для этих же значений x будет справедливо неравенство $0 < \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^3 < \dfrac{1}{x^{5/4}}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{5/4}}$ сходится, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} R\,(x)\,dx$ сходится абсолютно, и поведение данного интеграла совпадает с поведением интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ (теорема 8.2.7). Последний интеграл расходится, следовательно, данный тоже расходится.

f) Этот пример доказывает, что условие монотонности функции $f\,(x)$ в теореме Дирихле существенно и не может быть отброшено.

Если к этому интегралу попытаться применить признак Дирихле, положив $g\,(x) = \sin x$ и $f\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sin x}$, то будут справедливы только два условия теоремы: ограниченность первообразной от $g\,(x)$ и стремление к нулю функции $f\,(x)$. Однако будет нарушена монотонность этой функции.

Докажем, что интеграл расходится. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}=\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}+\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}+o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right).$$

Тогда $\int\limits_1^{+\infty} o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right)dx$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}dx$ сходятся абсолютно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится, следовательно, данный интеграл расходится. ☻

Глава 9

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§1 Ряды с положительными членами

Понятие о числовом ряде было введено в § 5 главы II. Здесь мы изучим эту тему подробнее.

Рассмотрим сначала числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где} \quad a_n \geqslant 0,\, n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Как мы уже знаем, такие ряды можно исследовать на сходимость с помощью признаков сравнения (п. 5.2 главы II). Рассмотрим еще несколько признаков сходимости этих рядов.

Теорема 9.1.1 (Признак Даламбера)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, где* $a_n > 0$*. Тогда*

а) Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, то ряд сходится;*

б) Если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, то ряд расходится.*

► а) Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$. По свойству верхнего предела (теорема 2.4.3) существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon = \dfrac{1+\ell}{2}$. Обозначим $\gamma = \dfrac{1+\ell}{2} < 1$. Тогда для всех $n \geqslant n_0$ будут выполняться неравенства $a_{n+1} < \gamma a_n$, т.е.

$$\begin{aligned}
&a_{n_0+1} < \gamma a_{n_0},\\
&a_{n_0+2} < \gamma a_{n_0+1} < \gamma^2 a_{n_0},\\
&\qquad \dots\\
&a_{n_0+k} < \gamma^k a_{n_0}.
\end{aligned}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0}\gamma^k$ сходится (как геометрическая прогрессия), то по признаку сравнения (2.5.7) данный ряд тоже сходится.

б) Пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2}$. По свойству нижнего предела (теорема 2.4.3) существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon = \dfrac{1+\ell}{2} > 1$.

Следовательно, для указанных значений n последовательность $\{a_n\}$ возрастает. Тогда для этих же значений n выполняется неравенство $a_n > a_{n_0} \neq 0$, откуда следует, что $a_n \not\to 0$, следовательно, ряд расходится. ◀

Замечание 1. *Если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*, то вопрос о сходимости ряда остается открытым (т.е. можно найти как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых выполняется данное условие).*

Приведем примеры таких рядов.

Пример 1. Рассмотрим ряд $2 + \dfrac{1}{2^2} + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^3}\right) + \dfrac{1}{4^2} + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2}\right) + \ldots$.

☺

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)^2}\right) : \frac{1}{4k^2}\right) = \infty,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4k^2} : \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right)\right) = 0.$$

Этот ряд расходится, так как для его частичной суммы выполняется неравенство

$$S_n > \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{2i+1} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)^2}\right) > \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2i+1},$$

а правая часть этого неравенства стремится к бесконечности, как частичная сумма ряда, общий член которого эквивалентен общему члену гармонического ряда. ☻

Пример 2. Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

☺ $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Но, как известно, данный ряд сходится. ☻

Теорема 9.1.2 (Радикальный признак Коши). *а) Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд (*) сходится;*

б) Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд (*) расходится.

► а) Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$ и найдем номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2} < 1$. Обозначая $\dfrac{\ell+1}{2} = \gamma$, получим, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $a_n < \gamma^n$, т.е. общий член данного ряда не превосходит общего члена геометрической прогрессии со знаменателем γ $(0 < \gamma < 1)$. Следовательно, по признаку сравнения данный ряд сходится.

б) Пусть теперь $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$. Это означает, что существует такая подпоследовательность $\{a_{n_i}\}$, что $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \to \ell$. Тогда, взяв $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2}$, можно найти номер n_0, начиная с которого выполняется неравенство $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} > \ell - \varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2} > 1$, т.е. для всех $n_i > n_0$ выполняется неравенство $a_{n_i} > \gamma^{n_i} \to +\infty$, $\left(\gamma = \dfrac{l+1}{2}\right)$. Следовательно, последовательность не стремится к нулю и данный ряд расходится. ◄

Замечание 2. *Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым (существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых выполняется данное условие). Для доказательства достаточно рассмотреть те же примеры, что и в признаке Даламбера. Легко видеть, что в обоих случаях будет $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$.*

Замечание 3. *Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ в теореме 9.1.1 или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell$ в теореме 9.1.2, то ряд сходится, если $\ell < 1$, расходится, если $\ell > 1$ и невозможно сделать вывод о сходимости ряда, если $\ell = 1$.*

Замечание 4. *Можно доказать, что признак Коши сильнее признака Даламбера в следующем смысле: если признак Даламбера дает сходимость ряда, то признак Коши тоже дает сходимость; если признак Коши не позволяет сделать никаких заключений, то признак Даламбера тоже не позволяет сделать никаких заключений; однако, существуют ряды, сходимость которых можно установить по признаку Коши, но при этом признак Даламбера не позволяет сделать никаких заключений.*

Пример 3. Исследуем на сходимость ряд $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots$.

☺ Применим сначала признак Коши.

Рассмотрим две сходящиеся подпоследовательности последовательности $\{\sqrt[n]{a_n}\}$: для $n = 2k$ и для $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. (Других сходящихся подпоследовательностей, по существу отличных от двух, указанных выше, нет.) Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{5^k}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, ряд сходится.

Теперь попробуем применить к этому ряду признак Даламбера.

Рассмотрим две подпоследовательности последовательности $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$: для $n = 2k$ и для $n = 2k-1$. Здесь

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^k}{2^{k+1}} = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^k}{5^k} = 0$$

и признак Даламбера не дает ответа. ☻

Замечание 5. *Из доказательства теорем следует, что если признаки Даламбера или Коши дают расходимость ряда, то общий член ряда не стремится к нулю. Это замечание будет использовано в дальнейшем.*

Лемма (4-ый признак сравнения). *Пусть даны два ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \textit{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2),$$

причем $a_n > 0$ и $b_n > 0$, и для всех n (может быть, начиная с некоторого) выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда

а) если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится;

б) если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

► Неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ равносильно неравенству $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_n}{b_n}$, откуда следует, что последовательность $\dfrac{a_n}{b_n}$ невозрастающая. Следовательно, она ограничена сверху, т.е. для всех значений n выполняется неравенство $a_n \leqslant Cb_n$. Тогда утверждение леммы следует из первого признака сравнения рядов. ◄

Теперь мы уточним признак Даламбера. Следующие две теоремы применяются в случаях, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Теорема 9.1.3 (Признак Раабе)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, где* $a_n > 0$*, и* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = s$*. Тогда, если* $s > 1$*, то ряд сходится, и если* $s < 1$*, то ряд расходится.*

► Возьмем $\varepsilon = \dfrac{s-1}{2}$ и найдем n_0, начиная с которого, выполняется неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > s - \varepsilon = \dfrac{s+1}{2} = r > 1$. Преобразуя это неравенство, сначала получим $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \dfrac{r}{n}$, откуда $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \dfrac{r}{n-r} > 1 + \dfrac{r}{n}$. Избавляясь в последнем неравенстве от знаменателя, получаем $na_n > na_{n+1} + ra_{n+1}$, откуда $na_n - na_{n+1} - a_{n+1} > ra_{n+1} - a_{n+1}$ или

$$na_n - (n+1)\,a_{n+1} > (r-1)\,a_{n+1}. \tag{**}$$

Так как $r > 1$, то $na_n - (n+1)\,a_{n+1} > 0$, откуда следует, что положительная последовательность na_n убывающая, следовательно, она имеет предел. Обозначим этот предел через α.

Частичная сумма ряда с общим членом $b_n = na_n - (n+1)\,a_{n+1}$ будет равна

$$\sum_{n=1}^{m} (na_n - (n+1)\,a_{n+1}) = a_1 - (m+1)\,a_{m+1}$$

и ряд сходится к $a_1 - \alpha$. Следовательно, в силу неравенства (**) данный ряд тоже сходится.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = s$, где $s < 1$. Тогда, начиная с некоторого номера будет выполняться неравенство $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$. Отсюда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1/n}{1/(n-1)}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то по доказанной выше лемме данный ряд тоже расходится. ◄

Теорема 9.1.4 (Признак Гаусса)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, где* $a_n > 0$*, и* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\gamma}}\right)$*, где* λ*,* μ *и* γ *— постоянные, причем* $\gamma > 0$*. Тогда* *ряд сходится, если $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$ и $\mu < -1$, и расходится, если $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$ и $\mu \geqslant -1$.*

► Если $\lambda \neq 1$, то утверждение теоремы следует из признака Даламбера.

Если $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$, то $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\mu + O\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ и утверждение теоремы следует из признака Раабе.

Осталось рассмотреть случай, когда $\lambda = 1$, $\mu = -1$.

Для доказательства расходимости ряда используем лемму (4-ый признак сравнения). Возьмем расходящийся ряд с общим членом $\dfrac{1}{(n-1)\ln n}$ (этот ряд расходится, потому что его общий член эквивалентен членам последовательности $b_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ расходится) и докажем, что для всех натуральных n, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1/\left(n\ln(n+1)\right)}{1/\left((n-1)\ln n\right)} = \frac{(n-1)\ln n}{n\ln(n+1)}.$$

По условию теоремы

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right) \quad \text{или} \quad n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1)\left(n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = 0$ и можно найти номер, начиная с которого выполняется неравенство $\ln(n+1)\left(n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) < \dfrac{1}{2}$ или

$$n\ln(n+1)\,\frac{a_{n+1}}{a_n} > (n-1)\ln(n+1) - \frac{1}{2}. \qquad (***)$$

Докажем, что, начиная с некоторого номера, будет выполнено неравенство $(n-1)\ln(n+1) - \dfrac{1}{2} > (n-1)\ln n$. Действительно, последнее неравенство равносильно неравенству $(n-1)\left(\ln(n+1) - \ln n\right) > \dfrac{1}{2}$ или $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{(n-1)} > \dfrac{1}{2}$, что будет верным для достаточно больших значений n, так как $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{(n-1)} \to e$, и $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{(n-1)} \to 1$. Из доказанного неравенства и неравенства (***) будет следовать, что $n\ln(n+1)\,\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > (n-1)\ln n$, откуда получим $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{(n-1)\ln n}{n\ln(n+1)}$, следовательно, исходный ряд расходится. ◄

Замечание 6. *Часто в теореме Раабе вычисляется* $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$*, а в теореме Гаусса рассматривается асимптотическое представление отношения* $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\gamma}}\right)$*,* $\gamma > 0$*. Тогда ряд сходится, если* $\lambda < 1$ *или* $\lambda = 1$*, а* $\mu > 1$*, и расходится, если* $\lambda = 1$ *и* $\mu \leqslant 1$*. Это утверждение равносильно доказанным теоремам.*

Пример 4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(1+e)(2+e)\ldots(n+e)}$ на сходимость.

☺ Так как $a_n = \dfrac{n!}{(1+e)(2+e)\ldots(n+e)}$, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,(1+e)\ldots(n+e)}{(1+e)(2+e)\ldots(n+e)(n+1+e)\,n!} = \frac{n+1}{n+1+e} \to 1.$$

Следовательно, признак Даламбера не может решить вопрос о сходимости данного ряда. Воспользуемся признаком Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{n+1+e}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{ne}{n+1+e} = e > 1.$$

Ряд сходится. ☻

Пример 5. Исследовать ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!\cdot 5\cdot 11\cdot 16\cdot\ldots\cdot(6n-1)}$ на сходимость.

☺ Находим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!\cdot 1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot n!\cdot 5\cdot 11\cdot\ldots\cdot(6n-1)}{(n+1)!\cdot 5\cdot 11\cdot\ldots\cdot(6n+5)\cdot(2n-1)!!\cdot 1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)} = \\ = \frac{(2n+1)(3n+1)}{(n+1)(6n+5)} \to 1.$$

Признак Даламбера неприменим. Представим полученное отношение в виде:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(3n+1)}{(n+1)(6n+5)} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{5}{6n}\right)} = \\ = \left(1 + \frac{5}{6n} + \frac{1}{6n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{-1}.$$

Применяя формулу Тейлора, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{11}{6n} + \frac{5}{6n^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{11}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{5}{6n} + \frac{1}{6n^2}\right)\left(1 - \frac{11}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

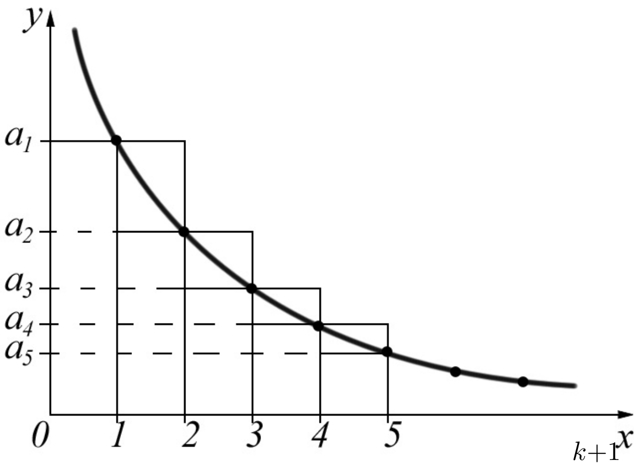
откуда по признаку Гаусса следует, что ряд расходится. ☻

Теорема 9.1.5 (Интегральный признак Коши)**.** *Пусть даны*

a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n > 0)$, *причем последовательность* $\{a_n\}$ *— убывающая.*

b) функция $f(x)$, *определенная на промежутке* $[1, \infty)$, *положительная и убывающая на этом промежутке, причем* $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.



► Пусть k — произвольное натуральное число. На промежутке $[k, k+1]$ будет выполняться неравенство $a_{k+1} \leqslant f(x) \leqslant a_k$. Интегрируя последнее неравенство по взятому промежутку, получим

$$a_{k+1} \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant a_k. \qquad (*)$$

Теперь просуммируем последнее неравенство по k от $k = 1$ до $k = n$. Получим

$$S_{n+1} - a_1 \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n. \qquad (**)$$

Если сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = I$, то

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant I = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

следовательно, любая частичная сумма ряда будет ограничена: $S_{n+1} \leqslant I + a_1$ и ряд сходится.

Если интеграл расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = +\infty$, то произвольная частичная сумма ряда S_n тоже стремится к бесконечности, следовательно, ряд расходится. ◄

Замечание 7. *Очевидно, что теорема остается верной, если условия, наложенные на члены ряда и функцию $f(x)$ могут быть выполнены только для $n \geqslant n_0$ и $x \geqslant x_0$.*

Следствие 1. Допустим, что в доказанной теореме интеграл (и, следовательно, ряд) сходятся. Просуммируем неравенство (*) от $k = n$ до $k = n + \ell$. Получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+\ell+1} a_k \leqslant \int\limits_n^{n+\ell} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{n+\ell} a_k.$$

Устремляя ℓ к бесконечности, приходим к неравенству:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant \int\limits_n^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

которое дает оценку для остатка ряда:

$$\int\limits_n^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leqslant \int\limits_{n-1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Следствие 2. Теперь допустим, что интеграл (и, следовательно, ряд) расходятся. Тогда из неравенства (**) можно получить оценку частичной суммы ряда:

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n \leqslant \int\limits_1^{n} f(x)\,dx + a_1.$$

Пример 6. Исследовать ряд $\sum\limits_2^{\infty} \dfrac{1}{n\ \ln n\ \ \ln^2(\ln n)}$ на сходимость. Если он сходится, оценить скорость сходимости (остаток), если он расходится, оценить частичную сумму ряда.

☺ Введем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x\ \ \ln^2(\ln x)}$ и вычислим несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln^2(\ln x)} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x\ln^2(\ln x)} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln\ln x)}{\ln^2(\ln x)} = -\left.\frac{1}{\ln\ln x}\right|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, ряд тоже сходится. Оценим скорость сходимости ряда:

$$-\left.\frac{1}{\ln\ln x}\right|_{n}^{\infty} \leqslant \sum_{n}^{\infty}\frac{1}{k\ \ln k\ \ \ln^2(\ln k)} \leqslant -\left.\frac{1}{\ln\ln x}\right|_{n-1}^{\infty}$$

или

$$\frac{1}{\ln\ln n} \leqslant \sum_{n}^{\infty}\frac{1}{k\ \ln k\ \ \ln^2(\ln k)} \leqslant \frac{1}{\ln\ln(n-1)}.$$

☻

Пример 7. Оценить частичную сумму гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

☺ Известно, что этот ряд расходится. Оценим его частичную сумму: $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n \leqslant \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx + a_1$, что дает $\int\limits_{1}^{n+1}\frac{dx}{x} \leqslant S_n \leqslant \int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x} + 1$ или $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$. ☻

§2 Ряды с произвольными членами

2.1 Абсолютная сходимость

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где члены ряда a_n могут быть как положительными, так и отрицательными. Для таких рядов наряду с обычной сходимостью, рассматривается еще абсолютная сходимость.

Определение 9.2.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Очевидно, что для исследования числового ряда на абсолютную сходимость, можно применить любой из признаков, рассмотренных ранее.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha n)}{n^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ на абсолютную сходимость.

☺ Нужно исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(\alpha n)|}{n^2}$. Применим первый признак сравнения: $\frac{|\sin(\alpha n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Отсюда, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то сходится и ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin(\alpha n)|}{n^2}$, а это означает, что данный ряд сходится абсолютно. ☻

Теорема 9.2.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

► При любых натуральных n и ℓ будет выполнено неравенство $\left|\sum\limits_{n}^{n+\ell} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{n}^{n+\ell} |a_k|$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то на основании критерия Коши, по $\varepsilon > 0$ можно найти такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что если $n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n}^{n+\ell} |a_n| < \varepsilon$. Тогда $\left|\sum\limits_{n}^{n+\ell} a_k\right| < \varepsilon$ и на основании того же критерия Коши, данный ряд тоже сходится. ◄

Замечание 1. *Эта теорема необратима. Например, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *сходится (это будет доказано ниже), но не абсолютно. Ряд, составленный из модулей его членов — гармонический ряд. Его расходимость уже была доказана (гл. II, п. 5.1).*

Про ряды, которые сходятся, но не абсолютно, иногда говорят, что они ***сходятся условно***.

2.2 Признаки сходимости рядов с произвольными членами

Теорема 9.2.2 (Признак Лейбница)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, *где* $a_n > 0$, *причем последовательность* $\{a_n\}$ *— невозрастающая и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *сходится.*

► Рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m}.$$

Группируя слагаемые следующим образом:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}),$$

и замечая, что разности в каждой скобке неотрицательны, получим, что последовательность S_{2m} неубывающая.

С другой стороны, группируя эти же слагаемые иначе:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m},$$

и, замечая, что разности в каждой скобке неотрицательны, получим, что последовательность S_{2m} ограничена сверху: $S_{2m} \leqslant a_1$.

Следовательно, последовательность S_{2m} имеет предел. Обозначим этот предел через S. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{2m} + a_{2m+1}\right) = S + 0 = S.$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и ряд сходится. ◄

Ряд, о котором говорится в теореме, называется ***знакочередующимся рядом***, так как знаки двух соседних членов ряда различны.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

☺ Условия теоремы Лейбница выполнены: 1) последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ - убывающая; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Следовательно, ряд сходится. Абсолютной сходимости здесь нет, т.к. ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно. ☻

Замечание 2. *Из доказательства теоремы легко получить оценку для суммы такого ряда: $S \leqslant a_1$. Если применить эту оценку к остатку знакочередующегося ряда (остаток тоже является знакочередующимся рядом), то получим неравенство: $|R_n| < |a_{n+1}|$, которое удобно применять при приближенных вычислениях.*

Пример 3. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$? Если да, то, сколько надо взять членов, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

☺ Применим признак Лейбница. Здесь $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

Для доказательства монотонного убывания предположим, что аргумент функции $f(n) = \dfrac{\ln n}{n}$ меняется на промежутке $[2, +\infty)$. Тогда эту функцию можно исследовать на монотонность с помощью методов дифференциального исчисления. $f'(n) = \dfrac{1 - \ln n}{n^2}$. Отсюда, если $n \geqslant 3$, то $f'(n) < 0$, следовательно, последовательность модулей членов ряда, начиная со второго, убывающая и ряд сходится.

Для определения нужного количества первых членов ряда воспользуемся оценкой остатка $|R_n| < |a_{n+1}| = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$. Заметим, что

$$|a_{647}| = \frac{\ln 647}{647} \approx 0,010003; \quad |a_{648}| = \frac{\ln 648}{648} \approx 0,009991;$$

т.е. $|R_{647}| < 0,01$. Значит для достижения заданной точности нужно взять частичную сумму $S_{647} = a_2 + \cdots + a_{647}$, т.е. первые 646 членов ряда. ☻

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{\ln n}$.

☺ Ряд знакочередующийся, причем $a_n = \dfrac{n}{\ln n} \to \infty$. Ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости. В этом примере нельзя ссылаться на невыполнение условия теоремы Лейбница, так как эта теорема является только достаточным условием сходимости ряда. ☻

Теорема 9.2.3 (Признак Дирихле). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, *где*

1) суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничены в совокупности, т.е.* $\exists C > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant C$;

2) последовательность $\{b_n\}$ *убывающая и стремится к нулю.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

► Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=n}^{n+\ell} a_k b_k$ и применим к ней преобразование Абеля (гл. 6, п. 7.2):

$$\sum_{k=n}^{n+\ell} a_k b_k = \sum_{i=0}^{\ell-1} S_{n+i} \left(b_{n+i} - b_{n+i+1}\right) + S_{n+\ell} b_{n+\ell},$$

где $S_{n+i} = \sum\limits_{k=n}^{n+i} a_k$.

Тогда выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+\ell} a_k b_k\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{\ell-1} S_{n+i} \left(b_{n+i} - b_{n+i+1}\right)\right| + |S_{n+\ell} b_{n+\ell}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\ell-1} |S_{n+i}| \, |(b_{n+i} - b_{n+i+1})| + |S_{n+\ell}| \, |b_{n+\ell}| \leqslant C \left(\sum_{0}^{\ell-1} (b_{n+i} - b_{n+i+1}) + b_{n+\ell}\right).$$

В последнем выражении модули можно отбросить, так как по условию теоремы должно быть $b_{n+i} > b_{n+i+1} \geqslant 0$.

Далее, заметим, что $\sum\limits_{i=0}^{\ell-1} (b_{n+i} - b_{n+i+1}) + b_{n+\ell} = b_n$, и, так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то по $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого $b_n < \dfrac{\varepsilon}{C}$. Следовательно, если $n \geqslant n_0$, то $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+i} a_k b_k\right| < C\dfrac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$ и по критерию Коши данный ряд сходится. ◀

Замечание 3. *Теорема справедлива и тогда, когда последовательность* b_n *возрастающая. Тогда для всех* $n \in \mathbb{N}$ *значения* b_n *отрицательны, следовательно, по доказанному, сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\left(-b_k\right) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, *а, следовательно, сходится и данный.*

Замечание 4. *Теорема Лейбница является следствием из теоремы Дирихле. Действительно, в ряде Лейбница* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *будет выполнено*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — нечетное;} \\ 0, & \text{если } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

следовательно, эти суммы будут ограничены, а последовательность $\{a_n\}$ *убывает и стремиться к нулю.*

Однако, мы не будем опускать самостоятельное доказательство теоремы Лейбница, так как замечание к этому доказательству крайне ценно для приложений.

Теорема 9.2.4 (Признак Абеля). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, *где*

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2) последовательность $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

► Так как последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел. Пусть $b_k \to b$. Преобразуем исходный ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(b_k - b\right) + b\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Первый ряд удовлетворяет условиям признака Дирихле (теорема 9.2.3), а второй ряд сходится по условию теоремы. ◀

Пример 5. Исследовать ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n^{\alpha}}$ на сходимость в зависимости от α.

☺ Очевидно, что если $\alpha > 1$, то верно неравенство $\left|\dfrac{\sin(2n)}{n^{\alpha}}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ и, так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$ сходится, то данный ряд сходится абсолютно.

Пусть теперь $0 < \alpha \leqslant 1$. Воспользуемся признаком Дирихле, полагая в нем $a_k = \sin(2k)$ и $b_k = \dfrac{1}{k^{\alpha}}$.

Найдем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\sin(2k) = \frac{2\sin 1\cdot\sin 2 + 2\sin 1\cdot\sin 4 + \dots + 2\sin 1\cdot\sin 2n}{2\sin 1} =$$
$$= \frac{\cos 1 - \cos 3 + \cos 3 - \cos 5 + \dots + \cos(2n-1) - \cos(2n+1)}{2\sin 1} =$$
$$= \frac{\cos 1 - \cos(2n+1)}{2\sin 1}.$$

Отсюда следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \frac{|\cos 1| + |\cos(2n+1)|}{2\sin 1} \leqslant \frac{1}{\sin 1},$$

т.е. частичные суммы $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничены в совокупности.

Далее при $0 < \alpha \leqslant 1$ последовательность $b_k = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ убывает и стремится к нулю. Следовательно, ряд сходится.

Докажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости ряда. Очевидно неравенство: $\left|\dfrac{\cos(2k)}{k^{\alpha}}\right| \geqslant \dfrac{\cos^2(2k)}{k^{\alpha}} = \dfrac{1}{k^{\alpha}} + \dfrac{\cos 4k}{k^{\alpha}}$. Так как ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 4k}{k^{\alpha}}$ сходится, а ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ расходится, то ряд $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}} + \frac{\cos 4k}{k^{\alpha}}\right)$ расходится (замечание к теореме 2.5.2), следовательно, ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(2k)}{k^{\alpha}}\right|$ тоже расходится и данный ряд сходится условно.

Наконец, так как $\sin(2n) \nrightarrow 0$, то тем более $\dfrac{\sin(2n)}{n^{\alpha}} \nrightarrow 0$ при $\alpha < 0$, следовательно, при отрицательных значениях α ряд расходится. ☻

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n$.

☺ Воспользуемся признаком Абеля. Пусть $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ и $b_n = \operatorname{arctg} n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится (доказано в предыдущем примере), а последовательность b_n монотонно возрастает и ограничена, то ряд сходится. ☻

§3 Законы сложения для рядов. Теорема Римана

Теорема 9.3.1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то его слагаемые можно объединять в произвольные группы, т.е., если сходится ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

то ряд

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}) + \dots$$

сходится, причем к той же сумме.

► Обозначим сумму исходного ряда через S.

Возьмем частичную сумму второго ряда:

$$S_m^{(2)} = (a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots \left(a_{n_{m-1}+1} + \dots + a_{n_m}\right).$$

Очевидно, выполнено равенство $S_m^{(2)} = S_{n_m}^{(1)}$, где $S_{n_m}^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{n_m} a_k$ — частичная сумма первого ряда. Так как $\lim\limits_{m\to\infty} S_{n_m}^{(1)} = S$, то $\lim\limits_{m\to\infty} S_m^{(2)} = S$. ◄

Доказанное означает, что для сходящихся рядов выполнен ассоциативный закон сложения.

В теореме 9.3.1 объединение в группы происходило без изменения порядка слагаемых, и каждая группа содержала конечное число слагаемых. Докажем еще одну теорему, в которой члены ряда объединяются в бесконечные группы с изменением их порядка.

Теорема 9.3.2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то ряды, составленные только из положительных* a_n *и только из отрицательных* a_n *тоже сходятся и* $S = S^{(1)} - S^{(2)}$, *где* S *— сумма данного ряда,* $S^{(1)}$ *— сумма ряда, составленного из его положительных членов и* $S^{(2)}$ *— сумма ряда, составленного из модулей отрицательных членов.*

▶ Обозначим через $S^{(n)}$ и $S_M^{(n)}$ частичные суммы данного ряда и ряда, составленного из модулей членов данного ряда. Введем две последовательности:

$$b_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n > 0; \\ 0, & \text{если } a_n \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad b_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{если } a_n < 0; \\ 0, & \text{если } a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Обозначим $S_n^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^+$ и $S_n^{(2)} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^-$. Очевидно, что $S^{(n)} = S_n^{(1)} - S_n^{(2)}$ и $S_M^{(n)} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$. Тогда

$$0 \leqslant S_n^{(1)} \leqslant S_M^{(n)} \leqslant S_M \quad \text{и} \quad 0 \leqslant S_n^{(2)} \leqslant S_M^{(2)} \leqslant S_M,$$

где $S_M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_n|$, и последовательности $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ сходятся к некоторым числам $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ соответственно.

Тогда $S^{(n)} = S_n^{(1)} - S_n^{(2)} \to S^{(1)} - S^{(2)}$. ◀

Замечание. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, но не абсолютно, то* $S^{(1)} = S^{(2)} = +\infty$.

▶ Действительно, если обе суммы конечны, то $S_M^{(n)} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} \to S^{(1)} + S^{(2)}$ и ряд сходится абсолютно. Если конечна одна из этих сумм, а вторая бесконечна, то $S_n = S_n^{(1)} - S_n^{(2)} \to \infty$, что противоречит сходимости ряда. ◀

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Он сходится (не абсолютно) по признаку Лейбница. Обозначим его сумму через S и покажем, что утверждение теоремы 9.3.2 здесь не выполняется.

☺ Покажем вначале, что $S \neq 0$. По замечанию 2 к теореме 9.2.2. для суммы ряда верна оценка $S = a_1 + R = 1 + R$, где $|R| < |a_2| = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\dfrac{1}{2} < S < \dfrac{3}{2}$, откуда $S \neq 0$.

Перегруппируем члены этого ряда следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots$$

и рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, где

$$b_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2}\right) - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2}S,$$

откуда получим $S = \dfrac{1}{2}S$. Так как $S \neq 0$, то полученное равенство невозможно. ☻

Этот пример показывает, что коммутативный закон сложения нельзя распространить на бесконечную сумму, если ряд сходится условно.

Однако для абсолютно сходящихся рядов этот закон выполняется.

Определение 9.3.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, полученный перестановкой членов ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$*, будем называть* ***перестановкой ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$*.*

Теорема 9.3.3. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится абсолютно, то любая его перестановка* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ *сходится к той же сумме.*

► Сначала предположим, что все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ положительны.

Рассмотрим частичную сумму перестановки $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} b_m$. Для каждого m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ найдется такое число k_m, что $b_m = a_{k_m}$. Пусть $\ell = \max(k_1, k_2, \dots k_n)$. Тогда

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} b_m \leqslant \sum_{k=1}^{\ell} a_k \leqslant S,$$

где S — сумма исходного ряда. Но тогда все частичные суммы перестановки ограничены в совокупности, что означает, что этот ряд сходится.

Теперь рассмотрим ряд с членами произвольного знака.

Для такого ряда, как было доказано в предыдущем пункте, выполняется равенство $S = S^{(1)} - S^{(2)}$, где $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ — суммы рядов, составленных из неотрицательных членов данного ряда и модулей отрицательных его членов. Перестановка членов данного ряда вызовет перестановки в этих рядах, но, так как это ряды с неотрицательными членами, то их суммы не изменятся, следовательно, перестановка данного ряда будет иметь сумму $S = S^{(1)} - S^{(2)}$. ◄

Теорема 9.3.4 (Римана). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно и пусть* L *— произвольное вещественное число. Тогда существует перестановка ряда, которая будет сходиться к* L.

► При данных условиях теоремы ряды, составленные из неотрицательных членов ряда и модулей отрицательных членов, расходятся, причем их частичные суммы стремятся к бесконечности. Поэтому для любого положительного числа M можно найти такое количество членов каждого из этих рядов, сумма которых будет превосходить M.

Допустим (для определенности), что $L \geqslant 0$. Тогда можно найти такое n_1, что, взяв n_1 положительных членов данного ряда, получим $S_1^{(n_1-1)} \leqslant L < S_1^{(n_1)}$. Обозначим числа a_n, входящие в сумму $S_1^{(n_1)}$ через b_k, $(1 \leqslant k \leqslant n_1)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \leqslant L < \sum_{k=1}^{n_1} b_k.$$

Далее, возьмем n_2 отрицательных члена данного ряда так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} b_k - S_2^{(n_2)} \leqslant L < \sum_{k=1}^{n_1} b_k - S_2^{(n_2-1)}.$$

Обозначая члены суммы $S_2^{(n_2)}$ через $-b_k$, $n_1 < k \leqslant n_2$, получим

$$\sum_{k=1}^{n_2} b_k \leqslant L < \sum_{k=1}^{n_2-1} b_k.$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим на каждом нечетном шаге

$$\sum_{k=1}^{n_{2m-1}-1} b_k \leqslant L < \sum_{k=1}^{n_{2m-1}} b_k$$

и на каждом четном шаге

$$\sum_{k=1}^{n_{2k}} b_k \leqslant L < \sum_{k=1}^{n_{2k}-1} b_k.$$

Так как в любом случае справедливо равенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k\right| = |b_n|$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$ (как общий член сходящегося ряда), то

$$\left|\sum_{k=1}^{n_s} b_k - L\right| < \left|\sum_{k=1}^{n_s} b_k - \sum_{k=1}^{n_s-1} b_k\right| \to 0.$$

Следовательно, перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет сумму, равную L. ◀

Глава 10

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§1 Область сходимости

Пусть дана последовательность функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на некотором множестве E. Символ

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_3(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

будем называть ***функциональным рядом***.

Как и в случае числовых рядов, определяется частичная сумма: $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Если взять некоторое значение $x_0 \in E$ и подставить его в функции $u_k(x)$, то получим числовой ряд, который может сходиться и может расходиться.

Определение 10.1.1. *Множество значений $x \in E$, для которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится, называется **областью сходимости** функционального ряда.*

Обозначим область сходимости ряда через D. Очевидно, $D \subset E$.

Для нахождения области сходимости часто применяют признак Даламбера или радикальный признак Коши.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n(2n-1)}$.

☺ Для нахождения области сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Так как признак Даламбера применим только к рядам с положительными членами, а члены нашего ряда могут иметь любой знак, то исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{x-1}{2}\right| \frac{2n-1}{2n+1} \right) = \left|\frac{x-1}{2}\right|.$$

Следовательно, если $\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1$, т.е. $x \in (-1,3)$, то ряд сходится абсолютно. Если $\left|\frac{x-1}{2}\right| > 1$, т.е. $x > 3$ или $x < -1$, то ряд расходится, т.к. его общий член не стремится к нулю (см. замечание 5 к признакам Даламбера и Коши, п. 9.1). В случаях, когда $\left|\frac{x-1}{2}\right| = 1$, надо провести дополнительное исследование.

Равенство $\left|\frac{x-1}{2}\right| = 1$ выполняется в точках $x = -1$ и $x = 3$.

При $x = -1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$. Этот числовой ряд сходится условно по признаку Лейбница.

В точке $x = 3$ имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. Этот ряд расходится, так как его общий член одного порядка с общим членом гармонического ряда.

Следовательно, областью сходимости данного ряда будет промежуток $[-1,3)$. ☻

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{n^2 x}$.

☺ Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{n^2 x}} = \lim_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x = 0; \\ \infty, & x > 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ общий член ряда $e^0 = 1$ — не стремится к нулю. Следовательно, ряд сходится при $x < 0$ и расходится при $x \geqslant 0$. ☻

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^2\right)^n$.

☺ Очевидно, что, так как $1 + x^2 \geqslant 1$, то $\left(1 + x^2\right)^n \nrightarrow 0$, поэтому областью сходимости этого ряда является пустое множество. ☻

Очевидно, что суммой произвольного функционального ряда будет функция $S\left(x\right)$, к которой в каждой точке области сходимости стремится последовательность частичных сумм этого ряда. Другими словами, функция $S\left(x\right)$ будет суммой ряда в точке $x \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|S_n\left(x\right) - S\left(x\right)\right| < \varepsilon$.

В этом определении номер n_0 будет зависеть от ε и точки x, в которой мы рассматриваем ряд.

Однако, для этих рядов рассматривается еще один вид сходимости.

§2 Равномерная сходимость последовательности функций

2.1 Определение

Определение 10.2.1. *Пусть на области D задана последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить, что эта последовательность* ***сходится*** *к функции $f(x)$ при n, стремящемся к бесконечности,* ***равномерно*** *относительно переменной x на области D, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого для всех $x \in D$ будет выполняться неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Равномерную сходимость будем обозначать так: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in D$.

Данное определение очень похоже на определение, приведенное в предыдущем пункте. Однако, оно существенно отличается от него тем, что номер n_0, начиная с которого выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, один и тот же для всех значений $x \in D$, в то время как в предыдущем определении он зависел от взятого значения. Приведем несколько примеров.

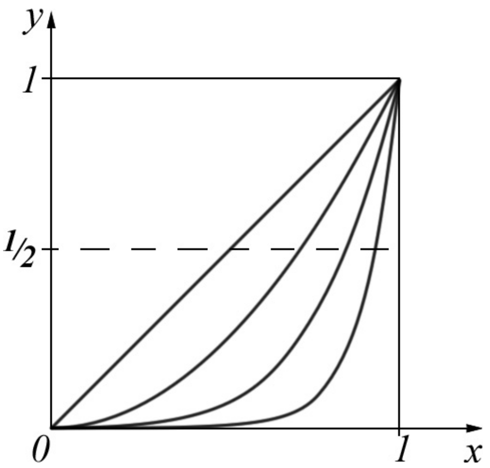
Пример 1. Найти предел последовательности функций $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$, $0 \leqslant x < 1$. Будет ли сходимость последовательности к своему пределу равномерной?

☺При каждом значении $x \in [0,1)$ последовательность представляет собой убывающую геометрическую прогрессию и, следовательно, ее предел в каждой точке данного промежутка равен нулю. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство $|x^n - 0| < \varepsilon$. Очевидно, это неравенство равносильно неравенству $x^n < \varepsilon$ или $n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$, т.е. можно взять $n_0 = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right] + 1$. Из найденной формулы видно, что, чем ближе значение x к единице, тем больше будет n_0.

Чтобы строго доказать, что невозможно выбрать n_0, не зависящим от x, покажем, что выполняется отрицание определения равномерной сходимости.

Сначала сформулируем это отрицание:

Последовательность функций $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ не сходится к функции $f(x)$ равномерно на D, если можно найти такое значение $\varepsilon_0 > 0$, что какой бы номер n_0 мы ни взяли, найдется такой номер $n \geqslant n_0$ и такое значение x_n, что будет выполняться неравенство $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

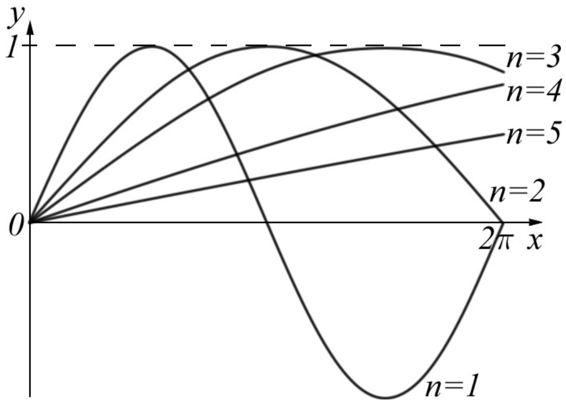


В нашем примере положим $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$. Тогда, используя неравенство Бернулли, получим

$x_n^n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{2}$, если $n \geqslant 2$. Таким образом, мы доказали, что если в качестве ε_0 взять число $1/2$, то будет выполняться отрицание определения равномерной сходимости (см. рис.). ☻

Пример 2. Найти предел последовательности функций $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{x}{n}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Будет ли сходимость последовательности к своему пределу равномерной?

☺Очевидно, что если фиксировать значение x на данном промежутке, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0$. Докажем, что эта сходимость равномерная.



Справедливо неравенство $\left|\sin\dfrac{x}{n} - 0\right| = \left|\sin\dfrac{x}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{x}{n}\right| \leqslant \dfrac{2\pi}{n}$, следовательно, если взять произвольное $\varepsilon > 0$, то, начиная с номера $n_0 = \left[\dfrac{2\pi}{\varepsilon}\right] + 1$, это неравенство будет выполняться для всех значений x из заданного промежутка (см. рис.). Это означает, что сходимость равномерная. ☻

Из определения равномерной сходимости следует, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $x \in D$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Этот факт можно использовать на практике для доказательства равномерной сходимости.

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на множестве a) $[0, +\infty)$; b) $[1, +\infty)$.

☺ a) Очевидно, что $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при каждом фиксированном значении $x \in [0, +\infty)$. Так как при каждом значении n функция $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ дифференцируема, найдем ее экстремумы на данном промежутке. Имеем

$$f_n'(x) = \left(nxe^{-nx^2}\right)' = ne^{-nx^2}\left(1 - 2nx^2\right).$$

На указанном промежутке каждая функция $f_n(x)$ имеет одну критическую точку $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, причем легко видеть, что это будет точка максимума. Максимальное значение $\sqrt{\dfrac{n}{2}}e^{-1/2} \to \infty$, следовательно, на первом промежутке последовательность сходится неравномерно.

b) Очевидно, что точки x_n не входят в промежуток $[1, +\infty)$, и, так как на этом промежутке каждая функция убывает, то ее наибольшее значение будет равно $f_n(1) = ne^{-n}$. Это числовая последовательность, стремящаяся к нулю, следовательно, на этом промежутке последовательность функций сходится к предельной функции равномерно. ☻

Теорема 10.2.1 (Критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась равномерно на D, необходимо и достаточно, чтобы по любому $\varepsilon > 0$ можно было найти такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$, для любых $\ell \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in D$ выполнялось неравенство $|f_n(x) - f_{n+\ell}(x)| < \varepsilon$.*

► *Необходимость.* Пусть последовательность сходится равномерно. Тогда существует такая функция $f(x)$, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если $n \geqslant n_0$ и $\ell \in \mathbb{N}$ для любых $x \in D$ будет верным неравенство

$$|f_n(x) - f_{n+\ell}(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Тогда по $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$, для любых $\ell \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in D$ выполнялось неравенство $|f_n(x) - f_{n+\ell}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда при каждом фиксированном значении $x \in D$ последовательность $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ является числовой последовательностью, которая сходится в себе (т.е. фундаментальной, см. гл. II, п. 4.3). Следовательно, по критерию Коши для числовой последовательности, она сходится к некоторому числу, которое мы будем считать значением предельной функции в точке x. Таким образом, предельная функция $f(x)$ определена.

В неравенстве $|f_n(x) - f_{n+\ell}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ перейдем к пределу при $\ell \to \infty$, получим, что если $n \geqslant n_0$ и для любых $x \in D$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. ◄

2.2 Свойства равномерно сходящихся последовательностей

Теорема 10.2.2. *Пусть дана последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что*

1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n(x)$ непрерывна на D;

2) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in D$.

Тогда предельная функция $f(x)$ *непрерывна на* D.

► Фиксируем некоторую точку $x_0 \in D$, возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такую окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что если $x \in U_\delta(x_0)$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (Если точка x_0 — граничная, то нужно искать одностороннюю окрестность.)

Для этого сначала найдем номер n_0, начиная с которого для любых x выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда и $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

В частности $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Так как функция $f_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0, то можно найти такое $\delta > 0$, что если $x \in U_\delta(x_0)$, то $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда получим, что если $x \in U_\delta(x_0)$, то

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

◄

Теорема 10.2.3. *Пусть дана последовательность функций* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ *функция* $f_n(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$*;*

2) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a, b]$.

Тогда для всякого $x_0 \in [a, b]$ *выполнено* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(x)\,dx \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

► Заметим сначала, что интегрируемость всех функций следует из их непрерывности.

Для доказательства равенства $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x} (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_n(x) - f(x)|\,dx \right|.$$

Используя равномерную сходимость последовательности функций, по ε найдем номер n_0, начиная с которого для всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_n(x) - f(x)|\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x - x_0| < \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство выполняется для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $x \in [a, b]$, то сходимость последовательности интегралов к интегралу от предельной функции равномерная. ◄

Теорема 10.2.4. *Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций*

1) сходится хотя бы в одной точке промежутка $[a, b]$;

2) последовательность $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на промежутке $[a, b]$,

то последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ тоже сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$, $x \in [a, b]$.

► Обозначим точку, в которой сходится последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ через x_0, а $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$ через $g(x)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f'_n(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx$ или $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx$. Последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по условию, поэтому, обозначая ее предел через C, получим, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в произвольной точке к функции $f(x) = C + \int\limits_{x_0}^{x} g(x)\,dx$, причем, по теореме 10.2.3 эта сходимость равномерная.

Осталось доказать, что $f'(x) = g(x)$. Это равенство следует из правила дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу. ◄

§3 Равномерная сходимость ряда

3.1 Определение

Так как сходимость функционального ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, то все, изложенное в предыдущем пункте, применимо к функциональным рядам.

Определение 10.3.1. *Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$* ***сходится равномерно*** *к функции $S(x)$ на области D, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на D, т.е. если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.*

Если ввести понятие остатка функционального ряда: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, то можно сказать, что ряд сходится равномерно тогда и только тогда, когда его остаток равномерно стремится к нулю.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+x}}$ на равномерную сходимость на промежутке $[0, +\infty)$.

☺ В каждой точке данного промежутка дробь $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+x}}$ убывает и стремится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница. Для ряда Лейбница справедлива оценка остаточного члена

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого n_0, остаточный член будет меньше произвольного $\varepsilon > 0$ для всех значений x из указанного промежутка. Следовательно, ряд сходится равномерно. ☻

Перефразируем некоторые утверждения, сформулированные в предыдущем пункте, для рядов.

1. *Ряд сходится равномерно на D тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{x \in D} R_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

2. ***Критерий Коши.*** *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на D, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер n_0, начиная с которого для всех $\ell \in \mathbb{N}$ и всех $x \in D$ выполняется неравенство* $\left| \sum\limits_{n+1}^{n+\ell} u_k(x) \right| < \varepsilon$.

Последнее следует из того, что $S_{n+\ell}(x) - S_n(x) = \sum\limits_{n+1}^{n+\ell} u_k(x)$.

Пример 2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+k^2x^2}$ сходится неравномерно на промежутке $[0, 1]$.

☺ При $x = 0$ выполнено $u_k(0) = 0$. При $x \neq 0$ общий член ряда $\dfrac{x}{1+k^2x^2} \sim \dfrac{1}{xk^2}$, поэтому на данном промежутке ряд сходится.

Для доказательства того, что он сходится неравномерно, воспользуемся отрицанием критерия Коши, т.е. докажем, что можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом n_0 найдутся $n \geqslant n_0$, $\ell \in \mathbb{N}$ и $x_n \in D$, для которых выполняется неравенство $\sum\limits_{n+1}^{n+\ell} \dfrac{x_n}{1+k^2x_n} \geqslant \varepsilon_0$.

Возьмем $\ell = n$, $x_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда

$$\frac{x_n}{1+k^2x_n^2} \geqslant \frac{1}{n\left(1+\frac{(2n)^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{5n} \quad \text{и} \quad \sum_{n+1}^{n+l} \frac{x_n}{1+k^2x_n} \geqslant \frac{1}{5n}\cdot n = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, в качестве ε_0 можно взять число $1/5$ и отрицание критерия Коши выполнено. Ряд сходится, но не равномерно. ☻

3.2 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 10.3.1 (признак Вейерштрасса)**.** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, *причем для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и для любого* $x \in D$ *выполняется неравенство* $|u_k(x)| \leqslant a_k$, *где последовательность* $\{a_k\}$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* D.

► Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого для всех $\ell \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\sum\limits_{n+1}^{n+\ell} a_k < \varepsilon$. Следовательно, для тех же значений n и для всех значений $x \in D$ будет выполняться неравенство $\sum\limits_{n+1}^{n+\ell} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{n+1}^{n+\ell} a_k < \varepsilon$, что означает (по достаточности критерия Коши) абсолютную и равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. ◄

Пример 3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}$ на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

☺ Так как $|\operatorname{arctg} nx| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то выполняется неравенство $\left|\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$, откуда следует, что данный ряд сходится абсолютно и равномерно на всей вещественной оси. ☻

Теорема 10.3.2 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x)$ *и на области* D *выполняются условия:*

1) суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ *ограничены в совокупности на* D*, т.е.* $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M$*, где постоянная* M *не зависит от* n *и* x*;*

2) при каждом фиксированном значении x *последовательность функций* $\{v_k(x)\}$ *монотонна (нестрого) и* $v_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

► Применим к сумме $\sum\limits_{k=n}^{n+\ell} u_k(x)\, v_k(x)$ преобразование Абеля (гл. 6, п. 7.2):

$$\sum_{k=n}^{n+\ell} u_k(x) \cdot v_k(x) = \sum_{i=0}^{\ell-1} S_{n+i}(x) \cdot (v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x)) + S_{n+\ell}(x) \cdot v_{n+\ell}(x),$$

где $S_{n+i}(x) = \sum\limits_{k=n}^{n+i} u_k(x)$.

Тогда выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+\ell} u_k(x)\, v_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{\ell-1} S_{n+i}(x)\,(v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x))\right| + |S_{n+\ell}(x)\, v_{n+\ell}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{\ell-1} |S_{n+i}(x)|\,|(v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x))| + |S_{n+\ell}(x)|\,|v_{n+\ell}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} |v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x)| + |v_{n+\ell}(x)|\right).$$

Так как последовательность $\{v_k(x)\}$ монотонна, то разности $v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x)$ имеют одинаковый знак и поэтому

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} |v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x)| = \left|\sum_{i=0}^{\ell-1} v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x)\right| = |v_n(x) - v_{n+\ell}(x)|.$$

Так как $v_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, то по $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого для всех $x \in D$ справедливо неравенство $v_k(x) < \dfrac{\varepsilon}{3M}$. Следовательно, если $n \geqslant n_0$, то для всех $x \in D$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+i} u_k(x)\, v_k(x)\right| < M\left(|v_n(x) - v_{n+\ell}(x)| + |v_{n+\ell}(x)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(|v_n(x)| + 2\,|v_{n+\ell}(x)|\right) < M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

и по критерию Коши данный ряд сходится равномерно. ◄

Теорема 10.3.3 (признак Абеля). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x)$ *и на области* D *выполняются условия:*

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на* D*;*

2) при каждом фиксированном значении x *последовательность функций* $\{v_k(x)\}$ *ограничена на* D*, т.е. существует такое* C*, что* $|v_k(x)| \leqslant C$ *для* $k \in \mathbb{N}$ *и* $x \in D$*;*

3) при каждом фиксированном значении x *последовательность функций* $\{v_k(x)\}$ *монотонна (нестрого).*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x)$ *сходится равномерно на* D*.*

► Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве признака Дирихле, применим преобразование Абеля к сумме $\sum\limits_{k=n}^{n+\ell} u_k(x)\, v_k(x)$. Тогда получим

$$\left|\sum_{k=n}^{n+\ell} u_k(x)\, v_k(x)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{\ell-1} |S_{n+i}(x)|\,|(v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x))| + |S_{n+\ell}(x)|\,|v_{n+\ell}(x)|,$$

где $S_{n+i}(x) = \sum\limits_{k=n}^{n+i} u_k(x)$.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно, то по $\varepsilon > 0$ можно найти номер n_0, начиная с которого для всех $x \in D$ и $\ell \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+\ell} u_k(x)\right| = |S_{n+\ell}(x)| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=n}^{n+\ell} u_k(x)\, v_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3C}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} |v_{n+i}(x) - v_{n+i+1}(x)| + |v_{n+\ell}(x)|\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{3C}\left(|v_n(x) - v_{n+\ell}(x)| + |v_{n+\ell}(x)|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}\cdot 3C = \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд сходится равномерно на D. ◀

Пример 4. Исследовать ряды на равномерную сходимость:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$, $x \in [1/2, 3]$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+x}} \ln\left(2+\frac{x}{n}\right)$, $x \in [0, 5]$.

☺ a) Применим признак Дирихле. С одной стороны

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right),$$

откуда $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\right) \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$.

С другой стороны для $x \in [1/2, 3]$ выполняется неравенство $0 \leqslant \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqslant \frac{x}{k} \leqslant \frac{3}{k}$, откуда следует, что $\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \rightrightarrows 0$. Кроме того, последовательность $\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ монотонно убывает при каждом фиксированном неотрицательном значении x. Следовательно, данный ряд сходится равномерно на $[1/2, 3]$.

b) Для исследования этого ряда воспользуемся признаком Абеля.

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+x}}$ сходится равномерно на данном промежутке (см. пример 1).

Последовательность $\ln\left(2+\frac{x}{n}\right)$ убывает при любом неотрицательном значении x и ограничена: $0 < \ln\left(2+\frac{x}{n}\right) \leqslant \ln 5$. Следовательно, условия признака Абеля выполнены и ряд сходится равномерно на промежутке $[0, 5]$. ☻

Свойства суммы равномерно сходящегося ряда

Для суммы равномерно сходящегося ряда выполнены свойства, которыми обладает предел равномерно сходящейся последовательности функций.

Теорема 10.3.4. *1) Если члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *непрерывны на* D *и ряд сходится равномерно на* D*, то сумма ряда будет функцией, непрерывной на* D*.*

2) Если члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *непрерывны на промежутке* $[a,b]$ *и ряд сходится равномерно на этом промежутке к некоторой сумме* $S(x)$*, то ряд можно интегрировать почленно на любом промежутке* $[c,d] \subset [a,b]$*, т.е.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_c^d u_k(x)\,dx = \int_c^d S(x)\,dx.$$

3) Если члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[a,b]$ *функции, ряд сходится хотя бы в одной точке этого промежутка, а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$*, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *также сходится равномерно на* $[a,b]$ *к некоторой сумме* $S(x)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) = S'(x)$*.*

§4 Степенные ряды

Определение 10.4.1. ***Степенным рядом*** *будем называть ряд вида* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$*, где* $\{a_k\}$ *— числовая последовательность,* x_0 *— фиксированное вещественное число и* $x \in \mathbb{R}$ *— переменная.*

Отметим, что область сходимости степенного ряда всегда непустое множество, так как ряд сходится в точке $x = x_0$.

Заменой $t = x - x_0$ переместим начала координат в точку $x = x_0$. Тогда ряд примет более простой вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. Очевидно, что эта замена не влияет на сходимость ряда, поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды такого вида.

Теорема 10.4.1 (Первая теорема Абеля). *1) Если ряд вида* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в точке* x_1*, то он сходится абсолютно на промежутке* $|x| < |x_1|$.

2) Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится в точке* x_2*, то он расходится на промежутках* $|x| > |x_2|$.

► 1) Пусть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ сходится. Тогда $a_k x_1^k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, следовательно, последовательность $a_k x_1^k$ ограничена, т.е. существует такая постоянная C, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|a_k x_1^k\right| \leqslant C$.

Возьмем значение x, принадлежащее промежутку $|x| < |x_1|$. Тогда

$$\left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \leqslant C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$

Ряд, с общим членом $C\left|\dfrac{x}{x_1}\right|^k$ сходится, так как является геометрической прогрессией со знаменателем $\left|\dfrac{x}{x_1}\right| < 1$, следовательно, в точке x данный ряд сходится абсолютно.

2) Вторая часть легко доказывается от противного. Допустим, что в какой-нибудь точке $\bar{x}$, удовлетворяющей неравенству $|\bar{x}| > |x_2|$, ряд сходится. Тогда по доказанному в первой части ряд будет сходиться для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |\bar{x}|$, значит он будет сходиться и в точке x_2, что противоречит условию. ◄

Следствие. Существует такое вещественное число R, что в промежутке $(-R, R)$ степенной ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится, а на множестве $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ — расходится.

Определение 10.4.2. *Число* R*, для которого в промежутке* $(-R, R)$ *степенной ряд вида* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится, а на множестве* $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ *расходится, называется* ***радиусом сходимости*** *степенного ряда.*

Теорема 10.4.2 (Адамара). *Радиус R сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ равен* $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

► Возьмем произвольное значение переменной x и исследуем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на сходимость в этой точке с помощью радикального признака Коши (теорема 9.1.2).

Для этого вычислим $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Если этот предел меньше единицы, т.е. если $|x| < R$, то ряд сходится, причем абсолютно; если этот предел больше единицы, то ряд расходится, так как в этом случае общий член ряда стремится к бесконечности и не выполняется необходимое условие сходимости. ◄

Замечание 1. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *то* $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Замечание 2. *Аналогично, можно доказать, что если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *то* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n!}x^n$.

☺ Применяя формулу $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Ряд сходится в одной точке $x = 0$. ☻

Пример 2. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!x^n}{2^{n^2}}$.

☺ Применим формулу $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^{n^2}}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{\sqrt[n]{n!}}$. Так как по формуле Стирлинга $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$, то $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e2^n}{n} = \infty$. Областью сходимости данного ряда является множество всех вещественных чисел. ☻

Пример 3. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n-1)!!}\,(x-2)^n$.

☺ Применим формулу $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!\,(2n+1)!!}{(2n-1)!!\,(n+1)!}\right|=2$. Следовательно, на множестве $|x-2|<2$ ряд сходится, а на множестве $|x-2|>2$ — расходится. Исследуем ряд на сходимость в точках, где $|x-2|=2$, т.е. в точках $x=4$ и $x=0$.

Если $x=4$, то общий член ряда имеет вид $v_n=\dfrac{2^n n!}{(2n-1)!!}$. Исследуем частное

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2\,(n+1)}{(2n+1)}=1+\frac{1}{2n+1}=1+\frac{1/2}{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}=1+\frac{1/2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

По теореме Гаусса ряд расходится.

Наконец, рассмотрим точку $x=0$. Общий член ряда в этой точке имеет вид $u_n=\dfrac{(-1)^n\,2^n n!}{(2n-1)!!}$. Как мы только что доказали, этот ряд не сходится абсолютно, неабсолютной сходимости здесь тоже нет так как $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{v_{n+1}}{v_n}>1$, следовательно, последовательность $|u_n|$ возрастает и для любого n выполняется неравенство $|u_n|>|u_1|=2$, т.е. $u_n\nrightarrow 0$.

Область сходимости данного ряда — промежуток $(0,4)$. ☻

Теорема 10.4.3 (О равномерной сходимости степенного ряда)**.** *Пусть* R *— радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$. *Тогда ряд сходится равномерно на промежутке* $[-R+\delta,R-\delta]$, *где* $0<\delta<R$.

► Если $x\in[-R+\delta,R-\delta]$, то для общего члена данного ряда выполняется неравенство $|a_n x^n|\leqslant|a_n|\,|R-\delta|^n$. Так как данный ряд абсолютно сходится в точке $R-\delta$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\,|R-\delta|^n$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса на указанном промежутке ряд сходится равномерно. ◄

Следствие 1. Сумма степенного ряда непрерывна в каждой точке промежутка $(-R,R)$.

Следствие 2. Степенной ряд можно интегрировать почленно на любом промежутке $[c,d]\subset(-R,R)$, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{n}a_n\int\limits_c^d x^n dx=\int\limits_c^d S\,(x)\,dx$.

Следствие 3. Степенной ряд в любой точке промежутка сходимости $(-R,R)$ можно дифференцировать почленно бесконечное число раз.

► Для доказательства первого следствия возьмем некоторое значение $x_0 \in (-R, R)$ и положим $\delta = \dfrac{|x_0| + R}{2}$. Тогда $x_0 \in [-R + \delta, R - \delta]$ и на этом промежутке ряд сходится равномерно. Следовательно, сумма ряда будет непрерывна в точке x_0 (теорема 10.3.4(1)).

Второе следствие очевидно следует из теоремы 10.3.4(2) и равномерной сходимости степенного ряда на промежутке $[c, d]$.

Для доказательства третьего следствия сначала нужно доказать, что области сходимости данного ряда и ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ совпадают.

Действительно, радиус сходимости второго ряда вычисляется по формуле $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|na_n|}} = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = R$, где R — радиус сходимости первого ряда.

Отсюда и из теоремы следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ сходится равномерно на каждом промежутке вида $[-R + \delta, R - \delta]$ и, следовательно, выполнены условия теоремы 10.3.4(3) о почленном дифференцировании ряда.

Так как после первого дифференцирования получается тоже степенной ряд, то рассуждение можно продолжить на любой порядок производной. ◄

Теорема 10.4.4 (Вторая теорема Абеля)**.** *Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и ряд сходится в точке $x = R$. Тогда он сходится равномерно на промежутке $[0, R]$ и на этом промежутке его сумма непрерывна.*

► Представим общий член ряда в виде $a_k x^k = a_k R^k \left(\dfrac{x}{R}\right)^k$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ сходится, а последовательность $\left(\dfrac{x}{R}\right)^k$ ограничена и убывает при каждом значении $x \in [0, R]$. Следовательно, по теореме Абеля, ряд сходится равномерно на промежутке $[0, R]$.

Из равномерной сходимости следует непрерывность предельной функции на этом промежутке. ◄

§5 Ряды Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ и бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

будем называть ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Если $x_0 = 0$, то этот ряд часто называют ***рядом Маклорена***.

Изучим поведение этого ряда. Оказывается, этот ряд может сходиться не к значению данной функции в точке, а иметь совсем другую сумму.

Пример 1. Составить ряд Тейлора для функции $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

☺ Данная функция определена и непрерывна на всей вещественной прямой. Найдем ее первую производную: $f'(x) = \dfrac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$, $x \neq 0$ и

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0, \quad t = \frac{1}{x};$$

вторую производную: $f''(x) = \left(\dfrac{4}{x^6} - \dfrac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$ и

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^4} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0.$$

Докажем по индукции, что $f^{(n)}(x) = P_{3n}(t)\, e^{-t^2}$, $x \neq 0$, где $P_{3n}(t)$ — некоторый многочлен степени $3n$.

Эта формула верна для первой и второй производных. Предположим, что она верна для производной порядка n. Тогда, учитывая, что $t'_x = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} = -t^2$, получим:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(P_{3n}(t)\, e^{-t^2}\right)'_x = \left(P'_{3n}(t)\, e^{-t^2} - 2tP_{3n}(t)\, e^{-t^2}\right) t'_x =$$
$$= Q_{3n+1}(t)\, e^{-t^2}\left(-t^2\right) = P_{3(n+1)}(t)\, e^{-t^2}.$$

Тогда также, предполагая, что $f^{(n)}(0) = 0$, получим

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{n}(0)}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{tP_{3n}(t)}{e^{t^2}} = 0.$$

Следовательно, ряд Тейлора будет иметь вид $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots$. Последний ряд сходится к функции, тождественной равной нулю на всей оси и, следовательно, сумма ряда отличается от исходной функции. ☻

Частичная сумма ряда Тейлора и остаток ряда равны, соответственно, многочлену Тейлора данной функции в заданной точке и остаточному члену формулы Тейлора (гл. IV, п. 5.2).

Для остаточного члена формулы Тейлора было получено две формулы:

1) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (гл. IV, п. 5.2) Этот вид остатка будем называть ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

2) $R_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ (гл. 6, п. 10.3). Эту формулу будем называть ***интегральной формой остаточного члена***.

Эти формулы можно использовать при исследовании ряда.

Теорема 10.5.1. *Ряд Тейлора* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *функции* $f(x)$ *сходится к данной функции на промежутке* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *тогда и только тогда, когда на этом промежутке остаточный член ряда стремится к нулю при* n*, стремящемся к бесконечности.*

► Доказательство теоремы тривиально следует из формулы Тейлора: $f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$. ◄

Замечание. *Вернемся к примеру 1, приведенному в начале этого пункта. Формула Тейлора для заданной функции будет иметь вид*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases} = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + R_n(x),$$

откуда получим $R_n(x) = f(x)$*. Остаточный член ряда не стремится к нулю при* $n \to \infty$ *(он вообще не зависит от* n*), поэтому ряд Тейлора данной функции сходится не к самой функции.*

Следствие. *Если все производные функции* $f(x)$ *ограничены на промежутке* $(x_0 - R, x_0 + R)$*, то ряд Тейлора этой функции, построенный в точке* x_0*, сходится к самой функции.*

► Пусть $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant C$. Тогда оценим остаточный член ряда в форме Лагранжа:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leqslant C \cdot \frac{|x-x_0|^n}{(n+1)!}.$$

Так как $\frac{a^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ при любом $a > 0$, то $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. На основании теоремы ряд сходится в каждой точке указанного промежутка. ◄

Теорема 10.5.2 (единственности). *Если на промежутке* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *функция* $f(x)$ *представима в виде степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, *то этот ряд является ее рядом Тейлора в точке* x_0.

► Нам дано, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$, причем его сумма в любой точке этого промежутка равна $f(x)$.

Известно, что сумма степенного ряда является бесконечное число раз дифференцируемой функцией и

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\,a_k (x-x_0)^{k-n}.$$

Тогда $f^{(n)}(x_0) = n(n-1)\dots 1 \cdot a_k = n!a_n$, откуда $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, т.е. коэффициенты ряда суть коэффициенты ряда Тейлора. ◄

§6 Разложение в ряд Маклорена элементарных функций

Найдем разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций. При этом воспользуемся тем, что в гл. IV(5.3) уже найдены значения производных n-ого порядка показательной, логарифмической, степенной, тригонометрических и гиперболических функций.

1. $f(x) = e^x$.

Известно, что $f^{(n)}(0) = 1$. Тогда ряд Маклорена имеет вид

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

Возьмем произвольную точку x вещественной оси и выберем такое число $r > 0$, что $|x| < r$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ получим оценку производной функции $e^x < e^r$ и, следовательно, остаток ряда будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. Отсюда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2. $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Так как радиус сходимости ряда для экспоненты равен бесконечности, то этот ряд в каждой точке сходится абсолютно. Следовательно, ряд Маклорена для $\operatorname{ch} x$ можно найти, как сумму двух рядов

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{и}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

Складывая их почленно, получим

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

3. $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Аналогично пункту 2, получим требуемое разложение, как разность разложений, полученных для функций e^x и e^{-x}. Тогда

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4. $f(x) = \cos x$.

Известно, что $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, откуда

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } n = 2m; \\ 0, & \text{если } n = 2m - 1. \end{cases}$$

Кроме того, все производные от данной функции не превосходят единицы, поэтому рад Маклорена будет сходиться к самой функции. Следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

5. $f(x) = \sin x$.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad \text{откуда} \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } n = 2m+1; \\ 0, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Так как все производные ограничены, то ряд сходится к функции и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

6. $f(x) = \ln(1+x)$.

Как мы уже знаем, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n}$ и $f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!$, поэтому ряд Маклорена будет иметь вид $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \dots$.

Заметим, что радиус сходимости этого ряда равен $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$. Для доказательства того, что ряд сходится к исходной функции, рассмотрим остаточный член ряда в интегральной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

В последнем интеграле сначала сделаем замену $t = xz$. Тогда

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1}} dz.$$

Так как $|x| < 1$ и $0 \leqslant z \leqslant 1$, то $1 + xz \geqslant 1 - |xz| \geqslant 1 - z$ и $1 + xz \geqslant 1 - |xz| \geqslant 1 - |x|$. Тогда

$$\frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1}} = \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^n (1+xz)} \leqslant \frac{(1-z)^n}{(1-z)^n (1-|x|)} = \frac{1}{1-|x|}$$

$$\text{и} \quad |R_n(x)| = |x|^{n+1} \left| \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1}} dz \right| \leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{dz}{1-|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда следует, что на промежутке $(-1, 1)$ остаточный член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$ и ряд сходится к исходной функции. Заметим также, что ряд $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \dots$ сходится в точке $x = 1$ (по признаку Лейбница). Поэтому сумма этого ряда будет непрерывна в точке $x = 1$ по второй теореме Абеля (10.4.4), т.е. ее значение будет равно $\ln 2$. Отсюда имеем место формула

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots .$$

Следовательно, справедливо разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

7. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

Напомним, что $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ и $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$. Поэтому ряд будет иметь вид

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots .$$

Сначала найдем радиус сходимости полученного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(n+1)}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Исследуем остаточный член в интегральной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n-\alpha+1}}dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = xz$:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)\,x^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 \frac{(1-z)^n\,dz}{(1+xz)^{n-\alpha+1}}.$$

Так как α — фиксированное число, то существует такое натуральное число m, что $m \geqslant |\alpha|$. Тогда при $n \geqslant m$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \leqslant \frac{m(m+1)\dots(m+n)}{n!} \leqslant \frac{(m+n)!}{n!} =$$

$$= (n+1)(n+2)\dots(m+n) \leqslant (2n)^m.$$

Кроме того, используя неравенство $1+xz \geqslant 1-z$ при $|x|<1$ и $0 \leqslant z \leqslant 1$, получим

$$\frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n-\alpha+1}} = \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^n}(1+xz)^{\alpha-1} \leqslant \frac{(1-z)^n}{(1-z)^n}(1+xz)^{\alpha-1} = (1+xz)^{\alpha-1}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \alpha \geqslant 1; \\ (1-|x|)^{\alpha-1}, & \alpha < 1. \end{cases}$

Так как имеют место неравенства $1+xz \geqslant 1-|x|$ при $|x|<1$ и $0 \leqslant z \leqslant 1$, и неравенство $1+xz \leqslant 1+|x|$, то $(1+xz)^{\alpha-1} \leqslant \varphi(x)$ и для всех $x \in (-1,1)$ будет выполнено неравенство

$$|R_n(x)| \leqslant 2^m n^m |x|^{n+1} \varphi(x).$$

При фиксированных m и x последовательность $n^m|x|^{n+1}$ стремится к нулю, следовательно, ряд сходится к исходной функции.

Частные случаи

При $\alpha=-1$ получим $\dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\ldots$.

Если $\alpha=-1$ и x заменить на $(-x)$, то получим

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots.$$

Последняя формула представляет собой уже известную формулу для суммы бесконечной убывающей прогрессии.

8. Рассмотрим еще одну функцию: $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Применим другой способ разложения функции в степенной ряд.

Найдем первую производную данной функции $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ и, пользуясь полученным разложением для функции $\left(1+x^2\right)^{-1}$, получим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\ldots.$$

Этот ряд сходится на интервале $(-1,1)$ и его можно интегрировать почленно на любом промежутке, входящем в этот интервал. Проинтегрируем его по промежутку $[0,x]$, $|x|<1$. Получим

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots \quad \text{или}$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Пример 1. Разложить в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{4}$ функцию $f(x) = \sin^2 x$.

☺ Сначала применим формулу понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Затем сделаем подстановку $t = x - \frac{\pi}{4}$ или $x = t + \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2t).$$

Окончательно, применяя формулу ряда Тейлора для функции $\sin x$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2t)^{2k-1}}{2\cdot(2k-1)!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}t^{2k-1}}{(2k-1)!} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k-1}.$$

Область сходимости ряда — вся вещественная ось. ☻

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ и с помощью полученного разложения вычислить $\ln 2$.

☺ Возьмем ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

Заменив в нем x на $-x$, получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in [-1, 1).$$

Вычитая эти ряды, получим требуемое разложение

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \dots + \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Положим в полученном разложении $x = \frac{1}{3}$. Тогда

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \dots + \frac{2}{(2k-1)\,3^{2k-1}} + \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

Очевидно, этот ряд обладает большим преимуществом перед рядом, полученным в п. 6, так как он сходится намного быстрее. ☻

Пример 3. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \arcsin x$.

☺ Разложим функцию в ряд Маклорена. Для этого сначала найдем производную от этой функции:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$$

и разложим ее в ряд, используя биномиальное разложение, в котором заменим x на $-x^2$ и положим $\alpha = -\frac{1}{2}$. Получим для $x \in (-1, 1)$

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \ldots .$$

Интегрируя этот ряд по промежутку $[0, x]$, получим ряд Маклорена для функции

$$f(x) = \arcsin x =$$
$$= x + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1!}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!}x^5 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot 2^n \cdot n!}x^{2n+1} + \ldots,$$

откуда

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n! = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot 2^n}.$$

☻

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тер-Крикоров А.М.,Шабунин М.И. Курс математического анализа. — Лаборатория базовых знаний, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 672 с.

[2] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в 3-х томах). — М.: Дрофа, 2003–2006.

[3] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[4] Никольский С.М. Курс математического анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ,2001. — 592 с.

[5] Яковлев Г.Н. Лекции по математическому анализу (в 2-х частях). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[6] Ильин В.А.,Садовничий В.А.,Сендов Бл.Х. Математический анализ(в 2-х частях). — М.: Издательство московского университета, 1985–1987.

[7] Рудин У. Основы математического анализа. —М.: Мир, 1976. — 320 с.

[8] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 5-е. — М.:МЦНМО, 2007. — 664 с.

[9] Виноградова И.А., Олехник С.Н. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу (в 3-х томах), Т. 1,2. — М.: Дрофа, 2004.

[10] Кудрявцев Л.Д.,Кутасов А.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу (в 3-х томах). — 2003.

[11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — АСТ, 2009. — 560 с.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 7 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом.