

4) 3756

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**



**Кафедра технической механики
и прочности**

РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе по дисциплинам
«Механика материалов и конструкций»,
«Сопроотивление материалов», «Прикладная физика»,
«Техническая механика»
для студентов всех специальностей

Второе издание, исправленное



Санкт-Петербург 2008

Радченко Е.А., Петрова С.Б. Расчет балок на прочность при прямом плоском изгибе: Метод. указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплинам «Механика материалов и конструкций», «Сопротивление материалов», «Прикладная физика», «Техническая механика» для студентов всех спец. 2-е изд., испр. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 39 с.

Приведен краткий теоретический материал. Даны три метода построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Рассмотрены примеры расчета балок с полной проверкой прочности.

Рецензент
Профессор Д.П. Малявко

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

© Ленинградский технологический институт холодильной промышленности, 1989

© Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, 2008

Введение

Балками называются стержни, работающие на изгиб.

Рассматриваем случай прямого плоского поперечного изгиба, когда все нагрузки направлены перпендикулярно к оси балки, расположены в одной плоскости, которая проходит через ось балки и одну из главных центральных осей инерции ее поперечного сечения.

I. Определение опорных реакций

Напомним определение опорных реакций на примере простой балки (рис. I).

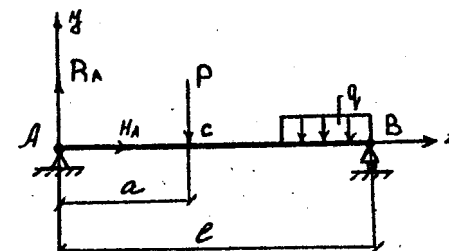


Рис. I.

Опоры обозначены буквами *A* и *B*. Три неизвестных реакции определяют из уравнений равновесия.

Сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю $\sum Z = 0$, откуда находят H_A . В рассматриваемом случае все нагрузки перпендикулярны к оси балки, поэтому $H_A = 0$.

Сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира *A* равна нулю $\sum M_A = 0$, откуда находят R_B .

Сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира *B* равна нулю $\sum M_B = 0$, откуда находят R_A .

Для контроля можно использовать или условие равенства нулю суммы проекций сил на вертикаль $\sum Y = 0$ или условие равенства нулю суммы моментов относительно какой-либо точки *C*, отличной от *A* и *B*, т.е. $\sum M_C = 0$. Условием $\sum Y = 0$ пользоваться проще, но оно дает надежную проверку только в тех случаях, когда к балке не приложены сосредоточенные моменты.

Перед составлением уравнений равновесия нужно выбрать направление реакции и показать их на рисунке. Если в результате вычисления какая-либо реакция получится отрицательной, это означает, что ее направление противоположно выбранному. Можно изменить на рисунке ее направление на обратное и в дальнейшем считать эту реакцию положительной.

Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций ее заменяют равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

2. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении балки

В поперечном сечении балки возникает два силовых фактора: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Поперечная сила Q в данном сечении балки равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к балке по одну сторону от рассматриваемого сечения, на главную центральную ось сечения Y .

Изгибающий момент M в данном сечении балки равен сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения.

При вычислении поперечной силы принято считать положительной силу, находящуюся слева от сечения и направленную вверх, или силу, находящуюся справа от сечения и направленную вниз.

При вычислении изгибающего момента принято считать положительным моментом внешних сил тот, который обуславливает вращение левой части балки по часовой стрелке или правой части против часовой стрелки.

Символически правила знаков для Q и M представлены на рисунке 2.

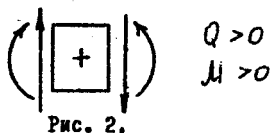


Рис. 2.

График распределения Q и M по длине балки называется эпюрами Q и M . В сопротивлении материалов принято положительные значения Q и M откладывать от оси балки вверх.

3. Дифференциальные зависимости при изгибе

Из условий равновесия элемента балки, нагруженной распределенной нагрузкой интенсивности q , могут быть получены зависимости

$$\frac{dQ}{dz} = -q; \quad \frac{dM}{dz} = Q; \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q,$$

где z - абсцисса центра тяжести произвольного сечения, отсчи-

тываемая вдоль оси балки слева направо. В качестве начала отсчета может быть выбран центр тяжести любого граничного сечения произвольного участка. В случае отсчета z в обратном направлении первые производные меняют знак на противоположный и тогда:

$$\frac{dQ}{dz} = +q; \quad \frac{dM}{dz} = -Q.$$

В приведенных дифференциальных зависимостях интенсивность распределенной нагрузки q положительна, если последняя действует вверх, для Q и M справедливо принятое ранее правило знаков.

В соответствии с геометрической интерпретацией первой производной тангенса угла наклона касательной к эпюре перерезывающих сил в произвольном сечении по отношению к оси z , равен интенсивности распределенной нагрузки в этом сечении. Очевидно, аналогичное утверждение справедливо и для эпюры M , только в этом случае тангенс угла наклона касательной к эпюре равен Q в соответствующем сечении. Из первых двух зависимостей следует: в сечениях, где $q = 0$, Q - экстремально; где $Q = 0$, M - экстремально.

Поскольку вторая производная определяет знак кривизны кривой, то при принятом правиле знаков справедливо так называемое правило "дождя" или правило "зонтика". Суть этого правила состоит в том, что выпуклость эпюры M всегда направлена навстречу распределенной нагрузке. Символично это правило представлено на рисунке 3.

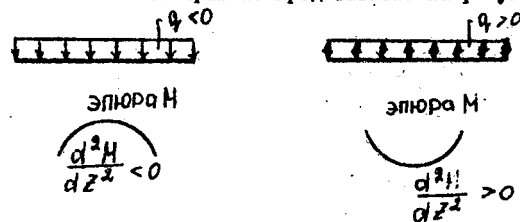


Рис. 3.

Следует помнить, что приведенное правило справедливо только для изгибающего момента. Дифференциальные зависимости используются для проверки правильности построенных эпюр, а также при построении эпюр по площадям.

4. Построение эппр Q и M по уравнениям

Рассмотрим порядок построения эппр Q и M для наиболее характерных случаев нагружения балок.

Расчетная схема балки должна быть вычерчена с соблюдением линейного (горизонтального) масштаба. На схеме должны быть показаны все нагрузки с их обозначениями и численными значениями, а также найденные опорные реакции. Необходимо проставить в метрах длины всех участков балки. Границы участков определяются опорными реакциями, сосредоточенными силами, моментами, началом и концом распределенной нагрузки или сечением, где закон изменения интенсивности распределенной нагрузки становится другим.

При большом числе участков балки объем вычислений, необходимых для построения эппр, велик. Кафедрой сопротивления материалов совместно с кафедрой вычислительной техники составлены "Методические указания и программы для определения на ЭЦВМ внутренних силовых факторов и необходимых моментов сопротивления балки".

Пример I.

Для заданной схемы двухопорной статически определимой балки (рис. 4, а) требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эппры Q и M по уравнениям.

I. Указываем на схеме направления опорных реакций R_A и R_B (рис. 4б). Определяем опорные реакции, составляя следующие уравнения равновесия:

$$\sum M_A = q(a+2b)\left(\frac{a+2b}{2} - a\right) - M - R_B(2b+c) + P(3b+c) = 0,$$

$$30 \cdot 2,6 \cdot 0,7 - 50 - R_B \cdot 2,5 + 40 \cdot 3,5 = 0,$$

$$R_B = 57,8 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = -q(a+2b)\left(\frac{a+2b}{2} + c + b\right) + R_A(2b+c) - M + P \cdot b = 0,$$

$$-30 \cdot 2,6 \cdot 1,8 + R_A \cdot 2,5 - 50 + 40 \cdot 1 = 0,$$

$$R_A = 60,2 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum Y = -q(a+2b) + R_A + R_B - P = 0,$$

$$-30 \cdot 2,6 + 60,2 + 57,8 - 40 = 118 - 118 = 0.$$

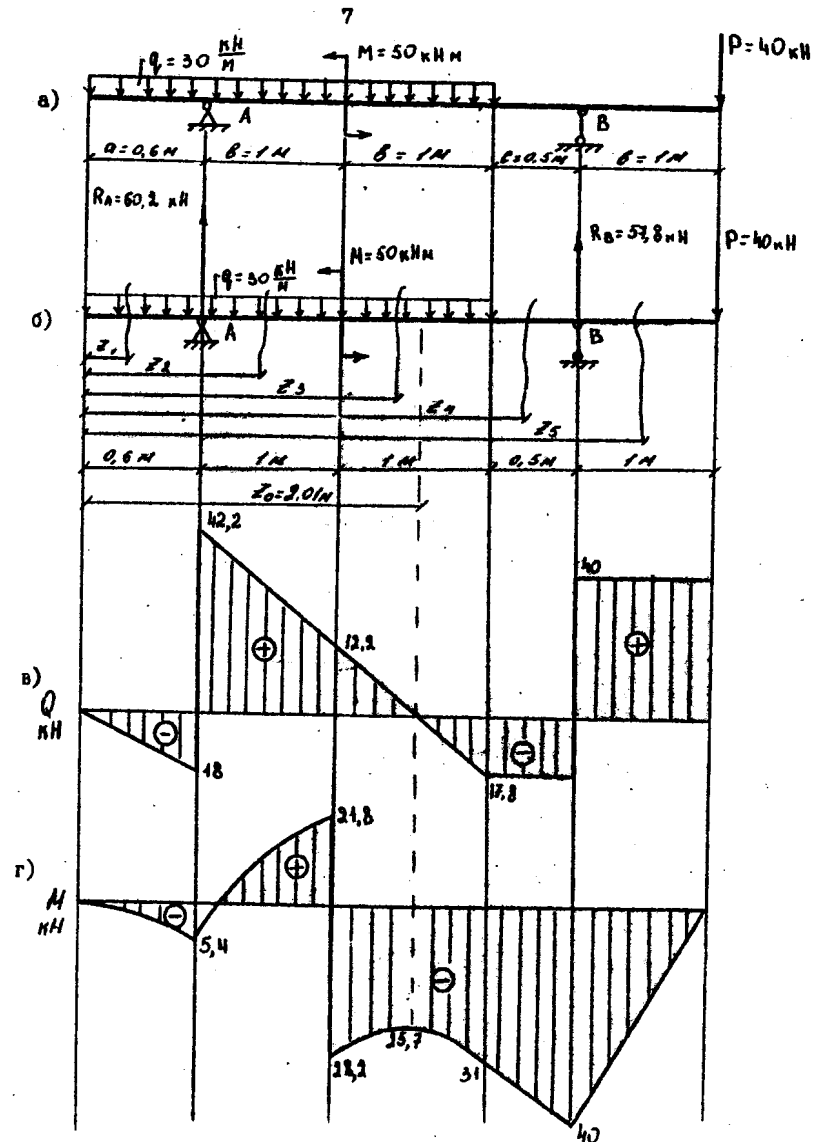


Рис. 4.

2. Записываем уравнения усилий для произвольного сечения какого участка балки, указывая границы участков. Балка имеет пять участков, начало координат поместим в крайнюю левую точку балки.

I участок: $0 \leq Z_1 \leq 0,6$.

$$Q = -q \cdot Z_1; \quad M = -q \frac{Z_1^2}{2}.$$

Поперечная сила выражается уравнением первой степени относительно Z , т.е. эпюра Q имеет вид прямой, наклонной к оси. Для ее построения достаточно двух ординат: в начале и в конце участка.

Результаты всех вычислений сведены далее в таблицу I.

Изгибающий момент на первом участке выражен уравнением второй степени относительно Z , т.е. эпюра M на этом участке кривая второго порядка, причем, согласно дифференциальным зависимостям, в сечении, где $Q(Z) = 0$, эпюра M имеет экстремальное значение, т.е. здесь касательная к эпюре M будет горизонтальной.

II участок: $0,6 \leq Z_2 \leq 1,6$.

$$Q = -q Z_2 + R_A;$$

$$M = -q \frac{Z_2^2}{2} + R_A (Z_2 - 0,6).$$

III участок: $1,6 \leq Z_3 \leq 2,6$.

$$Q = -q Z_3 + R_A;$$

$$M = -q \frac{Z_3^2}{2} + R_A (Z_3 - 0,6) - M.$$

При вычислениях получим граничные значения Q с разными знаками. Следовательно, на этом участке в сечении, определяемом координатой Z_0 , где Q переходит через нуль, меняя знак с плюса на минус, изгибающий момент имеет экстремум. Значение Z вычисляем, приравняв выражение для Q на этом участке нулю:

$$Q = -q \cdot Z_0 + R_A = 0,$$

откуда

$$Z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{60 \cdot 2}{30} = 2,01 \text{ м.}$$

Эпюру M будем строить на этом участке по граничным значениям изгибающего момента и значению, вычисленному при Z_0 .

IV участок: $2,6 \leq Z_4 \leq 3,1$.

$$Q = P - R_B;$$

$$M = -P(4,1 - Z_4) + R_B(3,1 - Z_4).$$

У участок: $3,1 \leq Z_5 \leq 4,1$.

$$Q = P;$$

$$M = -P(4,1 - Z_5).$$

Записываем все вычисления в таблицу I и строим эпюры усилий (рис. 4, в, г). Ординаты эпюр, соответствующие положительным значениям внутренних усилий, откладываем вверх от осей этих эпюр, а отрицательным - вниз (оси эпюр параллельны оси балки). При таком построении ординаты эпюр M получатся расположенными со стороны сжатых волокон балки.

Таблица I

№ участка	Z м	Q	M
		кН	кН·м
I	$0 \leq Z_1 \leq 0,6$	$-q Z_1$	$-q \frac{Z_1^2}{2}$
	0	0	0
	0,6	18	5,4
II	$0,6 \leq Z_2 \leq 1,6$	$-q Z_2 + R_A$	$-q \frac{Z_2^2}{2} + R_A (Z_2 - 0,6)$
	0,6	42,2	5,4
	1,6	12,2	21,8
III	$1,6 \leq Z_3 \leq 2,6$	$-q Z_3 + R_A$	$-q \frac{Z_3^2}{2} + R_A (Z_3 - 0,6) - M$
	1,6	12,2	-28,2
	2,01	0	-25,7
	2,6	-17,8	-31
IV	$2,6 \leq Z_4 \leq 3,1$	$P - R_B$	$-P(4,1 - Z_4) + R_B(3,1 - Z_4)$
	2,6	-17,8	-31
	3,1	-17,8	-40
V	$3,1 \leq Z_5 \leq 4,1$	P	$-P(4,1 - Z_5)$
	3,1	40	-40
	4,1	40	0

После построения эпюр Q и M рекомендуется проверить правильность их на основании приемов, вытекающих из известных дифференциальных зависимостей между M , Q и q , из определения понятий об изгибающем моменте и поперечной силе (см. параграф 5).

Пример 2.

Для заданной схемы консольной балки, заделанной правым концом, (рис. 5, а) требуется построить эпюры Q и M по уравнениям.

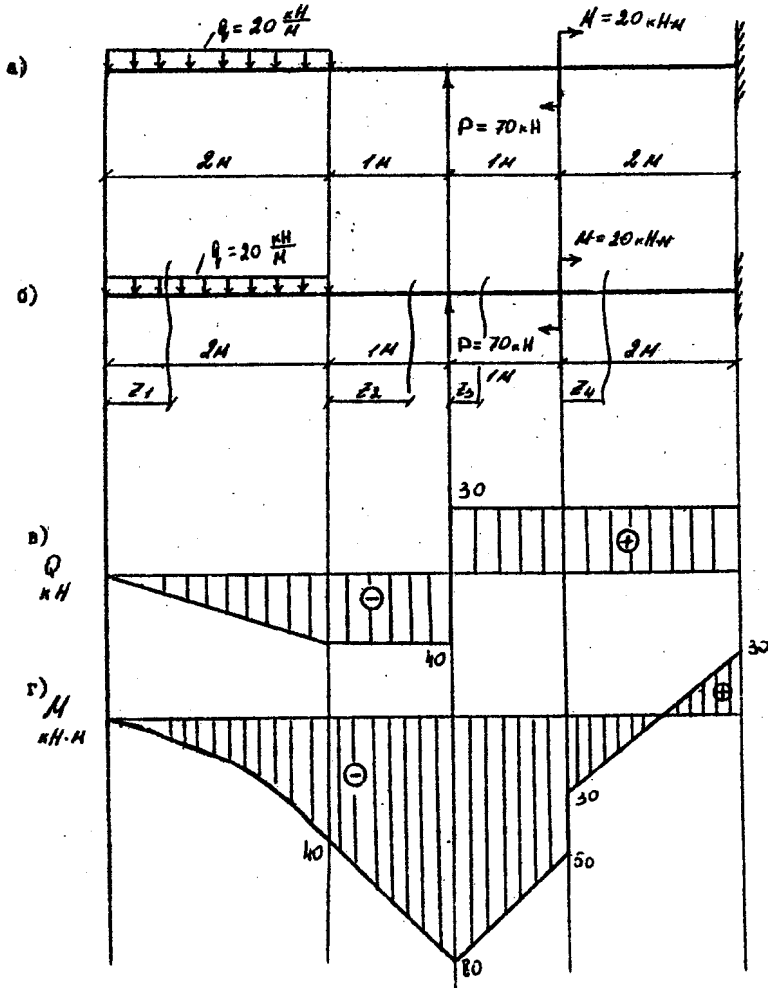


Рис. 5.

Для консольной балки эпюры усилий можно построить, не определяя опорных реакций в заделке, если рассматривать свободный конец балки, т.е. в данном случае левую часть от сечения.

Записываем уравнения усилий для произвольного сечения каждого участка балки, указывая границы участков. Балка имеет четыре участка, начало координат помещаем каждый раз в начало рассматриваемого участка (рис. 5б).

I участок: $0 \leq z_1 \leq 2$.

$$Q = -q z_1;$$

$$M = -q \frac{z_1^2}{2}.$$

II участок: $0 \leq z_2 \leq 1$.

$$Q = -q \cdot 2;$$

$$M = -q \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + z_2 \right).$$

III участок: $0 \leq z_3 \leq 1$.

$$Q = -q \cdot 2 + P;$$

$$M = -q \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + z_3 \right) + P z_3.$$

IV участок: $0 \leq z_4 \leq 2$.

$$Q = -q \cdot 2 + P;$$

$$M = -q \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + z_4 \right) + P (1 + z_4) + H \cdot z_4.$$

Записываем все вычисления в таблицу 2 и строим эпюры усилий (рис. 5, в).

Таблица 2

№ участка	z м	Q кН	M кН·м
I	$0 \leq z_1 \leq 2$	$-q z_1$	$-q \frac{z_1^2}{2}$
	0	0	0
	2	-40	-40
II	$0 \leq z_2 \leq 1$	$-q \cdot 2$	$-q \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + z_2 \right)$
	0	-40	-40
	I	-40	-80
III	$0 \leq z_3 \leq 1$	$-q \cdot 2 + P$	$-q \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + z_3 \right)$
	0	30	-80
	I	30	-50
IV	$0 \leq z_4 \leq 2$	$-q \cdot 2 + P$	$-q \cdot 2 \left(\frac{2}{2} + 1 + z_4 \right) + P (1 + z_4) + H \cdot z_4$
	0	30	-30
	2	30	30

Пример 3.

Для заданной схемы двухопорной статически определимой балки (рис. 6, а) требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры Q и M по уравнениям.

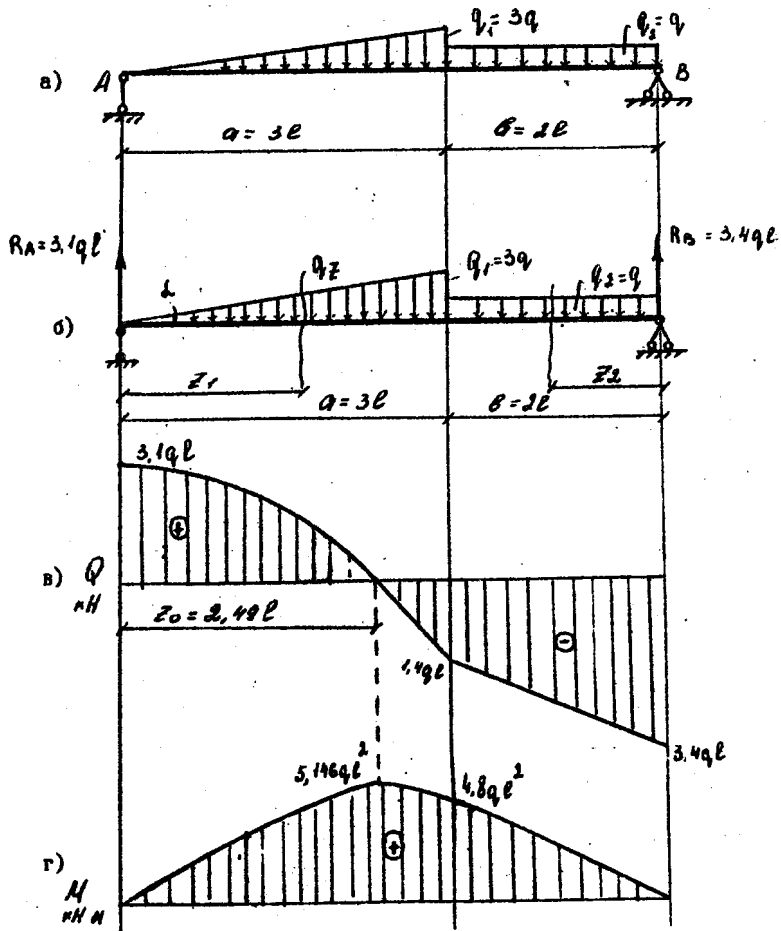


Рис. 6.

1. Указываем на схеме направление опорных реакций R_A и R_B (рис. 6, б). Определяем опорные реакции из уравнения равновесия:

$$\sum M_A = R_B(a+b) - q_2 \cdot b \left(a + \frac{b}{2}\right) - \frac{1}{2} q_1 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0;$$

$$R_B = 5l - q \cdot 2l \cdot 4l - \frac{1}{2} \cdot 3q \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} \cdot 3l = 0;$$

$$R_B = 3.4ql.$$

$$\sum M_B = -R_A(a+b) + \frac{1}{2} q_1 \cdot a \left(\frac{2}{3} \cdot a + b\right) + q_2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot b = 0;$$

$$-R_A \cdot 5l + \frac{1}{2} \cdot 3q \cdot 3l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3l + 2l\right) + q \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l = 0;$$

$$R_A = 3.1ql.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_A - \frac{1}{2} q_1 \cdot a - q_2 \cdot b + R_B = 0;$$

$$3.1ql - \frac{1}{2} \cdot 3q \cdot 3l - q \cdot 2l + 3.4ql = 0.$$

2. Записываем уравнения усилий для произвольного сечения каждого участка балки, указывая границы участков. Балка имеет два участка, начало координат помещаем для первого участка в крайнюю левую точку балки, для второго - в крайнюю правую точку балки (рис. 6, б).

1 участок: $0 \leq z_1 \leq 3l$.

$$Q = R_A - \frac{1}{2} q_2 \cdot z_1.$$

В зависимости от величины z_1 интенсивность распределенной нагрузки q_z меняется от 0 до q_1 , так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_z}{z_1} = \frac{q_1}{a} = \frac{3q}{3l} = \frac{q}{l},$$

отсюда

$$q_z = z_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

тогда

$$Q = R_A - \frac{1}{2} z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot z_1 = R_A - \frac{1}{6} z_1^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Эпюра распределенной нагрузки на этом участке выражена линией первого порядка, причем, в начале участка ордината $q_1 = 0$, следовательно, касательная к эпюре Q в начале участка горизонтальна, т.е. поперечная сила в этом сечении имеет относительный экстремум. Уравнение кривой третьего порядка

$$M = R_A \cdot z_1 - \frac{1}{2} z_1^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{3} z_1 = R_A z_1 - \frac{1}{6} z_1^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

При вычислении получим граничные значения Q с разными знаками. Следовательно, на этом участке в сечении, определяемом координатой Z_0 , где Q переходит через нуль, меняя знак с плюса на минус, изгибающий момент имеет относительный экстремум. Значение Z_0 вычислим, приравняв выражение для Q на этом участке к нулю:

$$Q = RA - \frac{1}{2} Z_0^2 \gamma g L = 0,$$

откуда

$$Z_0 = \sqrt{\frac{2RA}{\gamma g L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,1 q L}{9/k}} = 2,49 L.$$

Эпюру M будем строить на этом участке по граничным значениям изгибающего момента и значению, вычисленному при Z_0 .

II участок: $0 \leq Z_2 \leq 2L$.

$$Q = -R_0 + q_2 Z_2;$$

$$M = R_0 Z_2 - q_2 \frac{Z_2^2}{2}.$$

Записываем все вычисления в таблицу 3 и строим эпюры усилий.

Таблица 3

№ участка	Z м	Q кН	M кН·м
I	$0 \leq Z_1 \leq 3L$	$RA - \frac{1}{2} Z_1^2 \gamma g L$	$RA Z_1 - \frac{1}{6} Z_1^3 \gamma g L$
	0	3,1	0
	2,49L	0	$5,196 q L^2$
	3L	$-1,4 q L$	$4,8 q L^2$
2	$0 \leq Z_2 \leq 2L$	$-R_0 + q_2 Z_2$	$RA Z_2 - q_2 \frac{Z_2^2}{2}$
	0	$-3,4 q L$	0
	2L	$-1,4 q L$	$4,8 q L^2$

5. Некоторые приемы проверки правильности построения эпюр Q и M при условии рассмотрения балки слева направо:

На основании дифференциальных зависимостей и понятий об изгибающем моменте и поперечной силе можно сделать следующие выводы:

1. На участках балки, где $Q > 0$, изгибающий момент возрастает, где $Q < 0$, момент убывает.

2. В сечении, где Q обращается в нуль, изгибающий момент имеет экстремальное значение.

3. На том участке, где $Q = 0$, на эпюре M будет горизонтальная прямая (прямая нулевого порядка), т.е. $M = const$ (чистый изгиб).

4. При $M = 0$ изгиба нет, данный участок балки остается прямым, хотя и может изменить свое положение (переместиться) на плоскости.

5. На участке, где отсутствует распределенная нагрузка ($q=0$), поперечная сила постоянна, т.е. эпюра Q представляет собой прямую, параллельную оси балки (прямая нулевого порядка), а эпюра M — наклонную прямую (прямая первого порядка).

6. На участке, загруженном равномерно распределенной нагрузкой (линия нулевого порядка), эпюра Q представляет собой прямую первого порядка, а эпюра M — дугу квадратной параболы (линия второго порядка).

Если при этом q действует сверху вниз, то, при движении по эпюре слева направо, линия эпюры Q направлена вниз; если q действует снизу вверх, линия эпюры Q направлена вверх.

Если линия эпюры Q пересекает горизонтальную ось по нисходящей прямой, то на эпюре M имеется максимум, а если по восходящей — то — минимум.

7. На участке, загруженном треугольной или трапециoidalной нагрузкой (линия первого порядка), на эпюре Q — кривая второго порядка, на эпюре M — третьего.

Пересечение эпюрой Q горизонтальной оси с переходом с плюса на минус дает на эпюре M максимум, а с минуса на плюс — минимум.

8. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q имеет место скачок на величину этой силы и направлений в сторону действия силы. На эпюре M в этом сечении должен быть перелом.

9. В сечении, где приложена пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре M имеет место скачок на величину момента этой пары в направлении, соответствующем правилу знаков для моментов слева от сечения. Значение поперечной силы в этом сечении не изменяется.

Ю. В конечных сечениях балки поперечная сила и изгибающий момент равны соответственно приложенным в этих сечениях сосредоточенной силе и моменту пары, т.е. эпюры Q и M должны быть замкнутыми.

б. Построение эпюр Q и M по характерным точкам

Эпюры Q и M можно строить, не составляя аналитических выражений для $Q(z)$ и $M(z)$ в функции z . Лишь в некоторых случаях приходится составлять для отдельных участков аналитическое выражение $Q(z)$, чтобы определить координаты того сечения, где $Q = 0$.

По виду нагрузки на данном участке устанавливается порядок линий, выражающих эпюру Q и эпюру M , и определяется минимальное количество характерных точек на оси балки, в которых надо непосредственно подсчитать численные значения ординат, необходимых и достаточных для построения соответствующих эпюр.

Характерными сечениями считаются те, в которых приложены сосредоточенные силы и моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка, а так же, в которых Q обращается в нуль.

Пример 4.

Для заданной схемы двухопорной статически определимой балки (рис. 7, а) требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры Q и M по характерным точкам.

1. Определяем опорные реакции (рис. 7, б) из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = -P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 1 + M + q \cdot 3 \left(4 + \frac{1}{2} \cdot 3\right) = 0;$$

$$-30 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 51 + 20 \cdot 3 \left(4 + \frac{1}{2} \cdot 3\right) = 0;$$

$$R_B = 48 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -P_1 \cdot 9 + R_A \cdot 7 - P_2 \cdot 6 + M - q \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 0;$$

$$-30 \cdot 9 + R_A \cdot 7 - 15 \cdot 6 + 51 - 20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0;$$

$$R_A = 57 \text{ кН};$$

Проверка:

$$\sum Y = -P_1 + R_A - P_2 - q \cdot 3 + R_B = 0;$$

$$-30 + 57 - 15 + 20 \cdot 3 + 48 = 0.$$

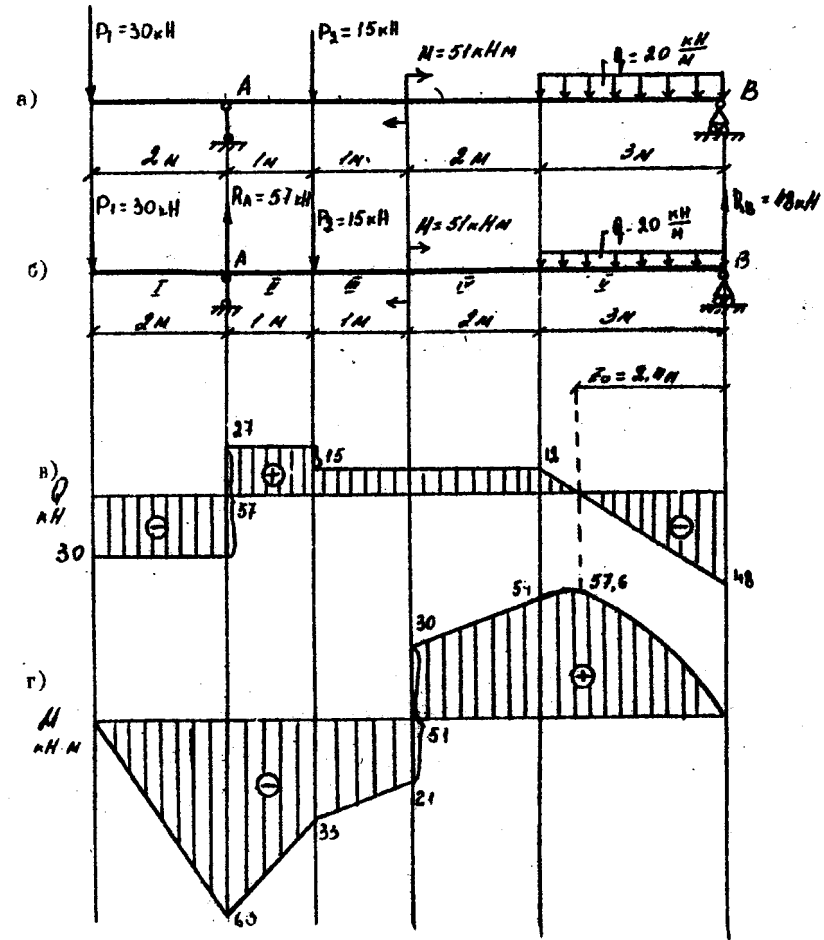


Рис. 7.

2. Строим эпюры усилий по характерным точкам (рис. 7, в, г). По длине балки пять участков (рассматриваем балку слева направо). На участках I, II, III, IV эпюра Q ограничена прямыми нулевого порядка (прямые параллельные линии отсчета), так как

на этих участках отсутствует распределенная нагрузка. Для построения прямой нулевого порядка достаточно иметь одну ординату.

На участке I поперечная сила постоянна и равна $-P_1 = -30$ кН, так как от любого сечения этого участка действует только направленная вниз сила P_1 .

На границе участков I и II поперечная сила скачкообразно возрастает на 57 кН, так как в сечении на этой границе приложена направленная вверх сосредоточенная сила $R_A = 57$ кН.

На границе участков II и III поперечная сила также скачкообразно уменьшается на 15 кН, так как на этой границе приложена направленная вниз сосредоточенная сила $P_2 = 15$ кН.

На участках III и IV поперечные силы одинаковы, так как проекция пары сил (момента $M = 51$ кН·м), приложенной на границе этих участков, на любую ось равна нулю.

На участке V расположена равномерно распределенная нагрузка. Эпюра Q на этом участке должна выражаться линией первого порядка, т.е. наклонной прямой. Для ее построения достаточно вычислить две ординаты: в начале и в конце пятого участка.

На границе IV и V участков поперечная сила не изменяется (так как в сечении на этой границе не приложено никаких сосредоточенных сил) и равняется 12 кН. В конце участка V поперечная сила равна опорной реакции R_B , взятой со знаком минус согласно правилу знаков для построения эпюры Q .

На участках I, II, III, IV эпюра M ограничена прямыми первого порядка, так как в пределах каждого из этих участков поперечная сила постоянна, поэтому для построения эпюры вычисляем значения в начале и в конце каждого участка через внешние силы, взятые справа или слева от сечения:

- в начале участка I

$$M = 0;$$

- в конце участка I и в начале участка II

$$M = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- в конце участка II и в начале участка III

$$M = -30 \cdot 3 + 57 \cdot 1 = -33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- в конце участка III

$$M = -30 \cdot 4 + 57 \cdot 2 - 15 \cdot 1 = -21 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- в начале участка IV

$$M = -30 \cdot 4 + 57 \cdot 2 - 15 \cdot 1 + 51 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- в конце участка IV и в начале участка V

$$M = 48 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 54 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Заметим, что значения M в конце участка III и в начале участка IV отличаются на 51 кН·м, что соответствует величине внешнего момента M_0 , приложенного к балке на границе этих участков.

На участке V эпюра M будет выражаться кривой второго порядка, так как эпюра Q на этом участке имеет вид прямой первого порядка. В этом случае эпюра M может быть достаточно точно построена по трем ординатам, особенно в том случае, если одна из них соответствует максимальному или минимальному изгибающему моменту.

Прямая, ограничивающая эпюру M на участке IV, является касательной к кривой эпюры M на участке V на границе этих участков, так как величины поперечных сил в конце участка IV и в начале участка V одинаковы.

Определим координату сечения, где изгибающий момент на V участке имеет максимальное значение

$$Q(z_0) = -R_B + q \cdot z_0 = 0,$$

$$z_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{48}{20} = 2,4 \text{ м}.$$

Изгибающий момент в этом сечении:

$$M = R_B \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} = 48 \cdot 2,4 - 20 \cdot \frac{2,4^2}{2} = 57,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В конце участка V изгибающий момент равен нулю.

Расчет на прочность при изгибе

При одновременном действии в каком-то сечении балки изгибающего момента M и поперечной силы Q нормальные σ и касательные τ напряжения в произвольной точке поперечного сечения определяются формулами

$$\sigma = \frac{M y}{J_x}; \quad \tau = \frac{Q S_x^0}{J_x b}, \quad (1)$$

где J_x - момент инерции сечения относительно главной центральной оси сечения, совпадающей с главной осью;
 S_x^0 - статический момент относительно оси x части площади поперечного сечения, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через точку, в которой ищется напряжение, параллельной оси x ;
 b - ширина сечения (измерена вдоль оси x) на уровне точки, в которой определяется напряжение;
 y - координата точки, в которой ищется напряжение, в системе главных центральных осей инерции x и z .

Анализируя формулы можно установить, что σ по высоте сечения изменяется по прямолинейному закону, достигая наибольших зна-

чений в наиболее удаленных от оси Z точках ($\sigma_{max}^p, \sigma_{max}^c$), касательные же напряжения, изменяясь по криволинейному закону, в этих точках равны нулю, достигая для большинства встречающихся в практике сечений максимального значения в точках, лежащих на нейтральной оси Z .

Учитывая, что силы действуют только в одной из главных плоскостей, можно заключить, что во всех точках поперечного сечения, исключая наиболее удаленные от оси Z , имеет место плоское напряженное состояние. Для этих точек условия прочности могут быть записаны в следующем виде:

а) для пластичных материалов по третьей теории прочности

$$\sigma_{\bar{II}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

по четвертой теории

$$\sigma_{\bar{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma];$$

б) для хрупких материалов по теории прочности Мора

$$\sigma_M = \frac{1-K}{2} \sigma + \frac{1+K}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p],$$

где K равно отношению допускаемого напряжения при растяжении $[\sigma_p]$ к допускаемому напряжению при сжатии $[\sigma_c]$.

В наиболее же удаленных от нейтральной оси точках имеет место линейное напряженное состояние и условия прочности в этом случае:

а) для пластичных материалов

$$|\sigma_{max}| \leq [\sigma];$$

б) для хрупких материалов

$$|\sigma_{max}^p| \leq [\sigma_p];$$

$$|\sigma_{max}^c| \leq [\sigma_c].$$

В точках, лежащих на нейтральной оси, имеет место частный случай плоского напряженного состояния - чистый сдвиг ($\sigma = 0$) и для них условия прочности примут следующий вид:

а) для пластичных материалов

$$\sigma_{\bar{II}} = 2|\tau| \leq [\sigma], \quad \sigma_{\bar{IV}} = \sqrt{3}|\tau| \leq [\sigma];$$

б) для хрупких материалов

$$\sigma_M = (1+K)|\tau| \leq [\sigma_p].$$

Для балок постоянного поперечного сечения условия прочности должны быть выполнены в опасных точках опасных поперечных сечений. Под опасными сечениями понимают такие, в которых:

- 1) либо M наибольший по модулю;
- 2) либо Q наибольший по модулю;
- 3) либо M и Q достаточно велики по модулю.

Нетрудно заметить, что последний тип опасного сечения определен наименее точно, в связи с чем в качестве вероятных опасных часто приходится рассматривать несколько сечений, в которых выполняется указанное условие. В некоторых случаях опасное сечение третьего типа может совпасть с первым или вторым.

Для сечений первого типа наиболее опасными будут точки максимально удаленные от нейтральной оси. Условия прочности (3) в этом случае могут быть записаны в следующем виде:

а) для пластичных материалов

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

б) для хрупких материалов

$$\sigma_{max}^p = \frac{M_{max} y_{max}^p}{J_x} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{max}^c = \frac{M_{max} y_{max}^c}{J_x} \leq [\sigma_c],$$

где W_x - момент сопротивления при изгибе (осевой момент сопротивления) равен $\frac{J_x}{y_{max}}$,
 y_{max}^p, y_{max}^c - координаты наиболее удаленных от нейтральной оси растянутых и сжатых точек.

При необходимости подбора размеров поперечного сечения используются именно эти условия.

В связи с тем, что для хрупких материалов $[\sigma_p] < [\sigma_c]$, при постоянстве знака M по длине балки рациональной формой поперечного сечения в этом случае следует признать сечение, несимметричное относительно нейтральной оси (тавр, треугольник и т.п.), расположенное таким образом, чтобы $|y_{max}^p| < |y_{max}^c|$. Для наиболее полного использования материала следует соблюдать соотношение

$$\frac{|y_{max}^p|}{|y_{max}^c|} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}.$$

Для сечения второго типа опасными следует признать точки, расположенные на нейтральной оси. Условия прочности (4) в этом случае могут быть представлены в виде

$$\sigma_{max} = \left| \frac{Q_{max} S_x^*}{b J_x} \right| \leq [\tau],$$

где b - ширина сечения на уровне нейтральной оси;
 S_x^* - статический момент части площади сечения, расположенный по одну сторону от нейтральной оси;

$$[\sigma] = \frac{1}{3} [\sigma] \approx 0,6 [\sigma]$$

или $[\sigma] = 0,5 [\sigma]$, соответственно по четвертой и третьей теориям прочности; для хрупких материалов $[\sigma] = \frac{1}{11k} [\sigma_p]$ по теории прочности Мора.

Для балок с толстостенным поперечным сечением (треугольник, круг, прямоугольник и т.п.) достаточно выполнение только условий (5) и (6). В случае тонкостенного поперечного сечения (двутавр, швеллер, тавр и т.п.) необходима проверка прочности в опасном сечении третьего типа. Дело в том, что в точке перехода от стенки к полке в указанных сечениях велики как σ (близко к σ_{max}), так и σ (близко к σ_{max}). Таким образом, для опасных сечений третьего типа опасной является точка перехода от стенки к полке. Условия прочности в этом случае определяются выражениями (2) с использованием формул (1). Если хотя бы в одной из опасных точек прочность не обеспечена, необходимо увеличить размеры сечения или выбрать больший номер профиля и снова проверить прочность в этой точке. При этом прочность считается обеспеченной, если действующее напряжение больше допустимого, но не более чем на 5%.

7. Подбор размеров поперечного сечения балки и проверка прочности.

1. Для балки, рассмотренной в примере 1 (рис. 4) подобрать прямоугольное поперечное сечение с соотношением сторон $h/b = 2$. Материал балки - дерево, $[\sigma] = 12$ МПа.

Из эпюры M , представленной на рис. 4, г следует, что опасным сечением первого типа является опорное сечение B, в котором

$$|M| = |M_{max}| = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}. \text{ Выписываем условие прочности (5)}$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для прямоугольного сечения $W_x = \frac{bh^2}{6}$, что с учетом $h/b = 2$ дает $W_x = \frac{2}{3} b^3$.

Из условия прочности необходимый минимальный размер

$$b = \sqrt[3]{\frac{3|M_{max}|}{W_x}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 12 \cdot 10^6}} = 0,0793 \text{ м}.$$

Принимаем $b = 8$ см, $h = 16$ см.

С целью снижения материалоемкости (но в ущерб технологичности) можно было бы принять $b = 7,8$ см и $h = 15,8$ см. Но в этом случае

случае, поскольку размеры приняты меньше необходимых, следует обязательно найти σ_{max} при принятых размерах и сравнить его с $[\sigma]$. При этом превышение σ_{max} по сравнению с $[\sigma]$ (перегрузка) не должно превосходить 5%.

Из эпюры Q (рис. 4, в) следует, что опасным сечением второго типа является опорное сечение A, где $|Q| = |Q_{max}| = 42,2$ кН.

Учитывая, что дерево пластичный материал и применяя четвертую теорию прочности, выписываем условие прочности (6)

$$\sigma_{max} = \frac{|Q_{max}| S_x^*}{b^2 J_x} \leq 0,6 [\sigma].$$

Для прямоугольного сечения

$$S_x^* = \frac{bh^2}{8}; \quad J_x = \frac{bh^3}{12}$$

и тогда

$$\sigma_{max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_{max}|}{bh} = \frac{3 \cdot 42,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 4,94 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,94 \text{ МПа}.$$

$$[\sigma] = 0,6 [\sigma] = 0,6 \cdot 12 = 7,2 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{max} < [\sigma].$$

Прочность балки обеспечена.

Окончательно принимаем $b = 8$ см, $h = 16$ см.

2. Для балки, рассмотренной в примере 2 (рис. 5а) определить необходимый диаметр круглого поперечного сечения. Материал балки - дерево, $[\sigma] = 12$ МПа.

Из эпюры M (рис. 5, г) следует, что опасным сечением первого типа является сечение приложения силы P , где $|M| =$

$$= |M_{max}| = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Условие прочности (5)

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для круглого сечения $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$.

Из условия прочности необходимый минимальный диаметр

$$d = \sqrt[3]{\frac{32|M_{max}|}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 80 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 12 \cdot 10^6}} = 0,189 \text{ м}.$$

Принимаем $d = 19$ см.

Из эпюры Q (рис. 5, в) следует, что опасным сечением второго типа является то же сечение приложения силы P , в котором $|Q| = |Q_{max}| = 40$ кН.

Условие прочности (6) с использованием третьей теории

$$\sigma_{max} = \frac{|Q_{max}| S_x^*}{b^2 J_x} \leq 0,5 [\sigma].$$

Для круглого сечения

$$S_x^* = \frac{d^3}{12}; \quad d_x = \frac{\pi d^4}{64}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}; \quad \theta = \alpha$$

и тогда

$$\sigma_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{F} = \frac{4 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 4}{3 \cdot 3,14 \cdot 19^2 \cdot 10^{-4}} = 1,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,88 \text{ МПа},$$

$$[\sigma] = 0,5[\sigma] = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{max} < [\sigma].$$

Прочность балки обеспечена.

Окончательно принимаем $d = 19 \text{ см}$.

8. Полная проверка прочности двутавровой балки.

Для балки, рассмотренной в примере 5 (рис. 18, а), подобрать двутавровое поперечное сечение, если допустимое напряжение

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

По эпюре M (рис. 18, г) устанавливаем, что опасным сечением первого типа является сечение D , где $M = |M_{max}| = 121 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Условие прочности (5)

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Отсюда необходимый минимальный момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{121 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,755 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 755 \text{ см}^3.$$

В сортаменте имеются: двутавр №36 с $W_x = 743 \text{ см}^3$ и двутавр №40 с $W_x = 947 \text{ см}^3$.

Если принять больший из двутавров, то будет значительный расход материала. Поэтому проверим возможность применения двутавра №36. В этом случае перегрузка составит

$$\frac{755 - 743}{755} \cdot 100\% = 1,6\%, \text{ что вполне допустимо.}$$

Таким образом, принимаем двутавр №36, для которого $W_x = 743 \text{ см}^3$,

$d_x = 13380 \text{ см}^4$, $S_x^* = S_x = 423 \text{ см}^3$, толщина стенки $d = 0,75 \text{ см}$, толщина полки $t = 1,23 \text{ см}$, высота $h = 36 \text{ см}$. По

эпюре Q (рис. 18, в) устанавливаем, что опасным сечением второго типа является опорное сечение A , где $Q = |Q_{max}| = 115 \text{ кН}$.

Условие прочности (6) с использованием четвертой теории

$$\tau_{max} = \left| \frac{Q_{max} S_x}{\theta W_x} \right|.$$

В нашем случае $\theta = \alpha$ и тогда

$$\tau_{max} = \frac{115 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 48,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48,5 \text{ МПа},$$

$$[\tau] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа},$$

$$\tau_{max} < [\tau].$$

Прочность в опасной точке этого опасного сечения обеспечена.

Однако у двутавра, как указывалось ранее, имеется еще одна опасная точка - точка перехода от стенки к полке. Вероятными опасными сечениями (сечениями третьего типа) следует принять:

- 1) либо сечение, где приложена сила P , в котором $M = 110 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q = 55 \text{ кН}$;
- 2) либо опорное сечение A , где $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q = 115 \text{ кН}$.

Проверим сначала прочность в первом опасном сечении. Для вычисления нормального напряжения в опасной точке предварительно вычислим координату y этой точки, ограничиваясь рассмотрением только растянутого волокна, поскольку двутавр симметричное сечение и знак σ не имеет значения в условиях прочности (2). Получим

$$y = \frac{1}{2}h - t = \frac{1}{2} \cdot 36 - 1,23 = 16,77 \text{ см}.$$

В соответствии с формулой (1)

$$\sigma = \frac{My}{I_x} = \frac{110 \cdot 10^3 \cdot 16,77 \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 138 \cdot 10^6 \text{ Па} = 138 \text{ МПа}.$$

Для вычисления касательного напряжения предварительно определим статический момент площади полки S_x^* . Проще всего S_x^* определить как разность статического момента полусечения и статического момента половины стенки по формуле

$$S_x^* = S_x^* - \int d \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 = S_x^* - \int d y^2 = 423 - \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 16,77^2 = 317 \text{ см}^3.$$

В качестве ширины сечения на уровне этой точки могут быть приняты либо толщина стенки d , либо ширина полки. При оценке прочности очевидно надо принять ту величину, которая дает большее значение напряжения.

С учетом этого в соответствии с формулой (1)

$$\sigma = \frac{QS_x^0}{\alpha J_x} = \frac{55 \cdot 10^3 \cdot 317 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 17,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 17,4 \text{ МПа}.$$

Применяя четвертую теорию прочности, проверяем условие (2)

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{138^2 + 3 \cdot 17,4^2} = 142,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 142,5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\Sigma} < [\sigma].$$

Прочность обеспечена.

Во втором опасном сечении.

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 16,77 \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 75,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 75,6 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{QS_x^0}{\alpha J_x} = \frac{115 \cdot 10^3 \cdot 317 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 39,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 39,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{75,6^2 + 3 \cdot 39,8^2} = 102,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 102,5 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Прочность обеспечена.

По полученным значениям напряжений в точках этого сечения (опорное сечение *A*) можно построить эпюры распределения по высоте двутаврового сечения нормальных и касательных напряжений, (рис.8).

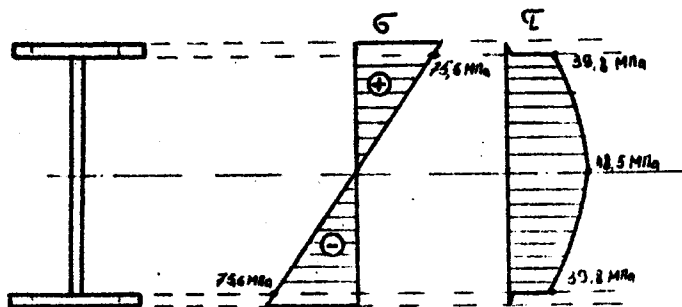


Рис. 8.

Окончательно принимаем двутавр №36.

9. Расчет на прочность балки, изготовленной из материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению-сжатию

Для балки, рассмотренной в примере 3 (рис. 6а), определить допустимую величину интенсивности распределенной нагрузки q , если $l = 1$ м. Материал балки - чугун, $[\sigma_c] = 30$ МПа, $[\sigma_t] = 140$ МПа. Поперечное сечение балки - сварной тавр, размеры которого в сантиметрах представлены на рисунке 9.

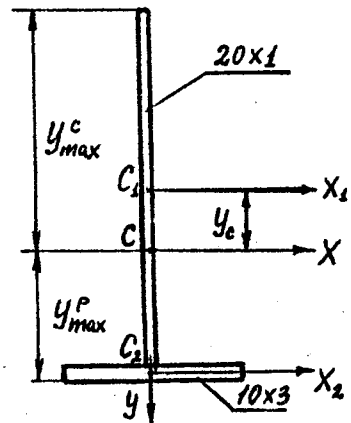


Рис. 9.

Из эпюры M (рис.6,г) следует, что опасным сечением первого типа является сечение, расположенное на расстоянии $2,49 l$ от левой опоры, в котором $|M| = |M_{max}| = 5,146 q l^2$.

Поскольку чугун хрупкий материал, для применения условия прочности (б) необходимо предварительно вычислить J_x , y_{max}^p и y_{max}^c . Для определения указанных величин надо найти положение нейтральной оси, которая, как известно, проходит через центр тяжести сечения. Положение центра тяжести сечения с осью симметрии Y относительно оси X_1 , проходящей через центр тяжести первой фигуры C_1 ,

$$y_c = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{F^{(1)} + F^{(2)}} = \frac{0 + 30 \cdot 11,5}{20 + 30} = 6,9 \text{ см}.$$

При положительном M (рис.16,г) верхние волокна сжаты, а

нижние растянуты и рациональное расположение сечения в этом случае указано на рисунке 9, из которого следует:

$$y_{max}^p = -(10 + 6,9) = -16,9 \text{ см};$$

$$y_{max}^c = 13 - 6,9 = 6,1 \text{ см}.$$

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси x

$$J_x = \frac{b_1 k_1^3}{12} + y_c^2 F^{(1)} + \frac{b_2 k_2^3}{12} + (y_{c2} - y_c)^2 F^{(2)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 20^3}{12} + 6,9^2 \cdot 20 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} + (11,5 - 6,9)^2 \cdot 30 = 2260 \text{ см}^4.$$

Выписываем условия прочности (5)

$$\sigma_{max}^p = \frac{|M_{max} y_{max}^p|}{J_x} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{max}^c = \frac{|M_{max} y_{max}^c|}{J_x} \leq [\sigma_c].$$

Подставляя в эти условия числовые значения, получаем уравнения для определения допускаемой максимальной величины q . Из условия обеспечения прочности в растянутом волокне

$$\frac{5,146 \cdot q \cdot 1,6 \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{2260 \cdot 10^{-8}} = 30 \cdot 10^6.$$

Из условия обеспечения прочности в сжатом волокне

$$\frac{5,146 \cdot q_c \cdot 1 \cdot 16,9 \cdot 10^{-2}}{2260 \cdot 10^{-8}} = 140 \cdot 10^6.$$

Из полученных условий

$$q_p = 2,16 \cdot 10^3 \text{ н/м} = 2,16 \text{ кН/м};$$

$$q_c = 3,65 \cdot 10^3 \text{ н/м} = 3,65 \text{ кН/м}.$$

Для обеспечения прочности в растянутом и сжатом волокнах необходимо принять $q = 2,16 \text{ кН/м}$.

Из эпюры Q (рис.6,в) следует, что опасным сечением второго типа является опорное сечение B , где $|Q| = |Q_{max}| = 3,4 \text{ кВ}$.

При принятом значении q $|Q_{max}| = 3,4 \cdot 2,16 \cdot 1 = 7,35 \text{ кН}$.

Записываем условие прочности (6)

$$\tau_{max} = \left| \frac{Q_{max} S_x^*}{b J_x} \right| \leq \frac{1}{1,1k} [\tau_p].$$

В нашем случае

$$K = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} = \frac{30}{140} = 0,214; \quad b = 1 \text{ см},$$

$$S_x^* = b y_{max}^c \frac{1}{2} y_{max}^c = 1 \cdot 16,9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16,9 = 143,0 \text{ см}^3,$$

тогда

$$\tau_{max} = \frac{7,35 \cdot 10^3 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 2260 \cdot 10^{-8}} = 4,65 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,65 \text{ МПа},$$

$$[\tau] = \frac{1}{1 + 0,214} 30 = 24,7 \text{ МПа},$$

$$\tau_{max} < [\tau].$$

Прочность обеспечена.

Из эпюр Q и M (рис.6,в,г) следует, что в качестве опасного сечения третьего типа может быть принято сечение, где изменяется характер распределенной нагрузки, в котором $|Q| = 1,4 \text{ кВ}$, $|M| = 4,8 \text{ кВ} \cdot \text{м}$. Для вычисления напряжений в точке перехода от стелки к полке по формулам (1) определим:

$$S_x^{*max} = 3 \cdot 10 \cdot (11,5 - 6,9) = 138 \text{ см}^3; \quad y = 11,5 - 1,5 - 6,9 = 3,1 \text{ см};$$

$$b = 1 \text{ см}.$$

$$\sigma = \frac{M y}{J_x} = \frac{4,8 \cdot 2,16 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2}}{2260 \cdot 10^{-8}} = 14,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 14,4 \text{ МПа}.$$

$$\tau = \frac{Q S_x^{*max}}{b J_x} = \frac{1,4 \cdot 2,16 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 138 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 2260 \cdot 10^{-8}} = 1,85 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,85 \text{ МПа}.$$

Условие прочности (2)

$$\sigma = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

$$\sigma = \frac{1 - 0,214}{2} \cdot 14,4 + \frac{1 + 0,214}{2} \sqrt{14,4^2 + 4 \cdot 1,85^2} =$$

$$= 14,7 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Прочность обеспечена.

Окончательно принимаем $q = 2,16 \text{ кН/м}$.

Ю. Укороченный метод определения реакций

По этому методу уравнения равновесия записываются в виде, разрешенном относительно искомых реакций. При этом реакция считается положительной, если она направлена вверх.

1. Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную сосредоточенным моментом, приложенным в произвольном сечении (рис. Ю). Направляя реакции вверх, из уравнений равновесия можно получить:

$$R_A = \frac{M}{e}; R_B = -\frac{M}{e}, \quad \text{т.е.}$$

момент M уравновешивается моментом пары сил R_A и $-R_B$ с плечом e ; причем полученные значения справедливы независимо от места приложения момента.

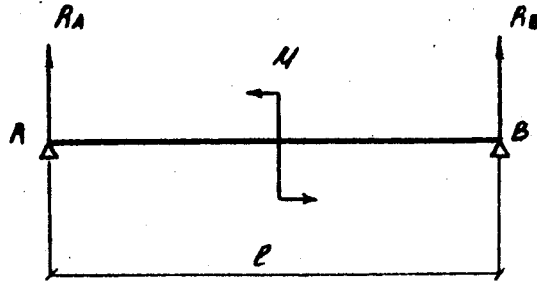


Рис. Ю.

2. Теперь рассмотрим ту же балку, нагруженную сосредоточенной силой (рис. II).

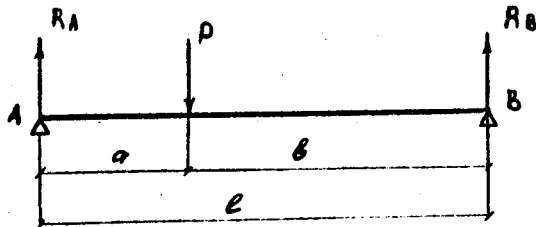


Рис. II.

Принимая то же правило знаков для реакций, из уравнения равновесия получаем:

$$R_A = \frac{Pb}{e}; R_B = \frac{Pa}{e}.$$

3. При приложении к той же балке распределенной нагрузки все сказанное в пункте 2 справедливо, если распределенную нагрузку заменить равнодействующей. Например, для приведенной ниже балки (рис. 12)

$$R_B = \frac{Q(a + \frac{2}{3}b)}{e}; R_A = \frac{Q \cdot \frac{1}{3}b}{e},$$

причем

$$Q = \frac{1}{2} q b.$$

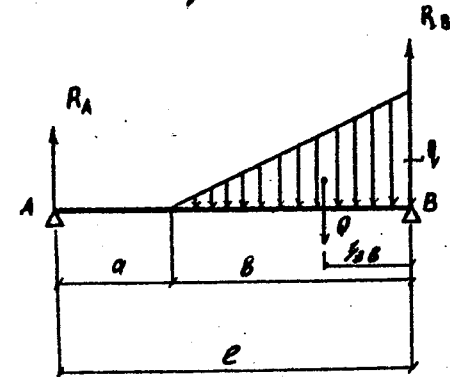


Рис. 12.

Таким образом, используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции), можно написать выражение для реакций двухопорной балки при произвольной нагрузке, если сформулировать четко уже полученное правило знаков.

Реакция опоры положительна, если силовой фактор, вызывающий ее, прижимает балку к соответствующей опоре (давит на опору сверху вниз).

Рассмотрим пример (рис. 13)

$$R_A = \frac{M_1}{e} + \frac{P(b+c)}{e} - \frac{1}{2} q c \cdot \frac{1}{3} c - \frac{M_2}{e};$$

$$R_B = \frac{M_2}{e} + \frac{Pa}{e} - \frac{1}{2} q \cdot c \cdot (a + b + \frac{2}{3}c) - \frac{M_1}{e}.$$

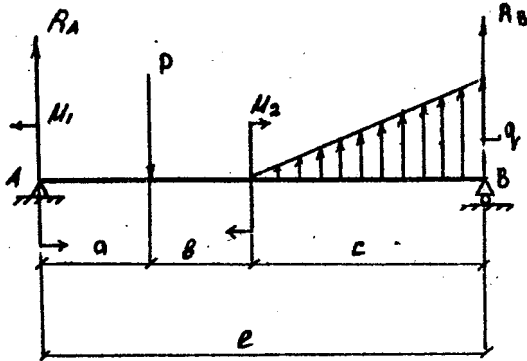


Рис. 13.

Последние два слагаемых взяты со знаком "минус", потому что соответствующие нагрузки отрывают балку от опор, в которых реакции определяются.

4. В случае, если двухопорная балка имеет консоль, то на этапе определения реакций можно силы, действующие на консоль, привести к ближайшей опоре. В результате приведения придет к двухопорной балке без консоли, реакции опор которой будут равны реакциям заданной балки.

Рассмотрим примеры (рис. 14, 15, 16), в которых:

а) заданная балка, б) балка после приведения сил на консоль.

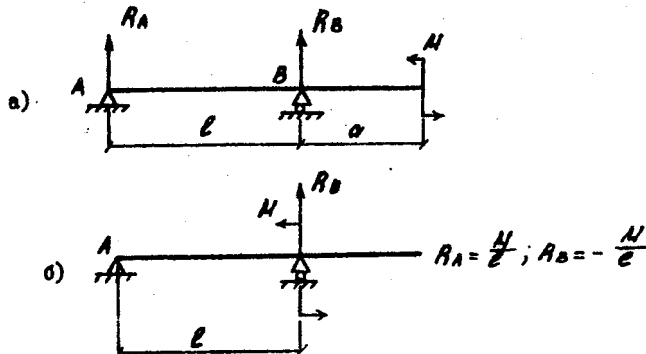


Рис. 14.

На рис. 15 к опоре B прикладываем взаимно уравновешенные силы P, что равнозначно приложению к опоре силы P и пары сил, образованной двумя силами P с плечом a. Момент этой пары $M = Pa$.

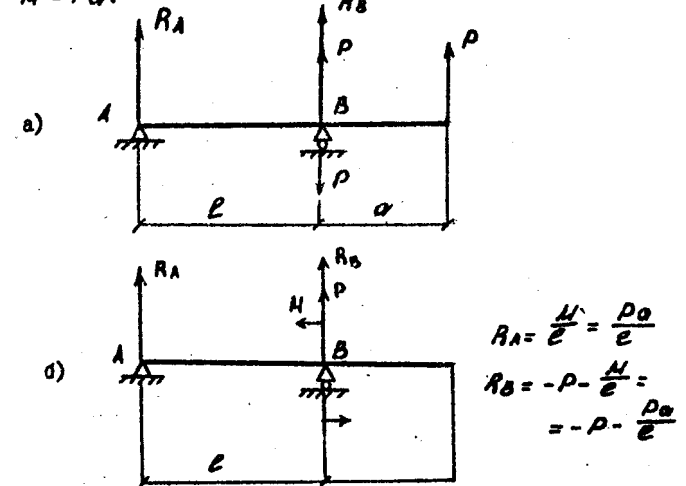


Рис. 15.

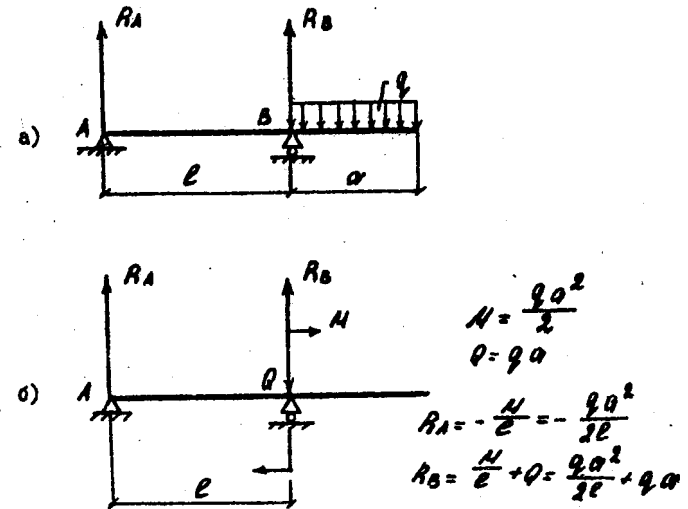


Рис. 16.

Если балка состоит только из консоли (рис. 17), то реакция равна алгебраической сумме всех сил, а реактивный момент равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно сечения закрепления.

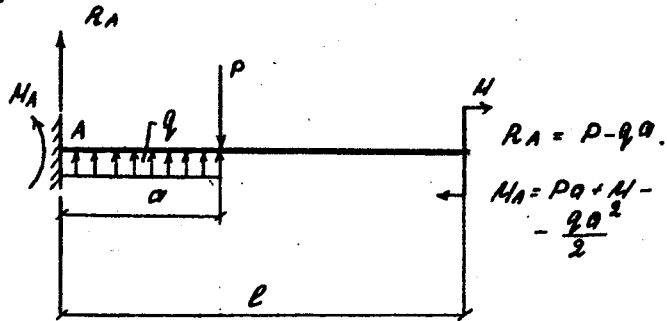


Рис. 17.

В выражении реакции R_A минус во втором слагаемом свидетельствует о том, что распределенная нагрузка интенсивностью q отрывает балку от опоры, а минус в выражении M_A означает, что направление момента от той же нагрузки совпадает с указанным на рисунке опорным моментом M_A .

II. Построение эпюр Q и M по площадям

Пример 5.

Для заданной схемы двухопорной статически определимой балки (рис. 18, а) требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры Q и M по площадям.

I. Определяем опорные реакции, составляя уравнения равновесия, указав на схеме направления опорных реакций R_A и R_B (рис. 18б):

$$\sum M_A = -R_A \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 5 + P \cdot 4 + M_1 - M_2 = 0,$$

$$-R_A \cdot 6 + 30 \cdot 6 \cdot 5 + 30 \cdot 4 + 60 - 30 = 0,$$

$$R_A = 175 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = R_B \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 1 - P \cdot 2 + M_1 - M_2 = 0,$$

$$R_B \cdot 6 - 30 \cdot 6 \cdot 1 - 30 \cdot 2 + 60 - 30 = 0,$$

$$R_B = 35 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum Y = -q \cdot 6 + R_A - P + R_B = 0,$

$$-30 \cdot 6 + 175 - 30 + 35 = -210 + 210 = 0.$$

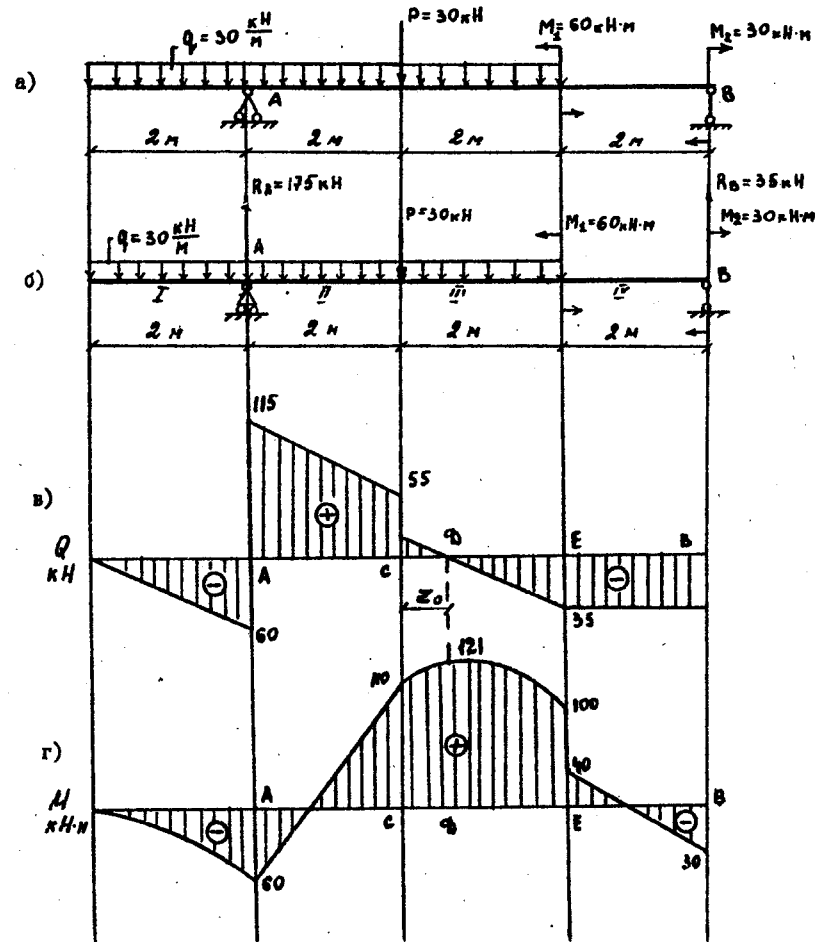


Рис. 18.

2. Вычисление ординат эпюр Q и M по площадям. На основании интегральных зависимостей при изгибе можно записать

$$Q(z) = Q_0 - \omega_q \int_0^z, \quad (7)$$

$$M(z) = M_0 + \omega_Q \int_0^z, \quad (8)$$

где Q_0 и M_0 - поперечная сила и изгибающий момент в начале участка;

$\omega q l_0^2$ - площадь эпюры распределенной нагрузки на участке z с учетом ее знака (при направлении q вниз $\omega q > 0$ и наоборот);

$\omega Q l_0^2$ - площадь эпюры поперечной силы на участке z с учетом ее знака.

Используем формулу (7) для вычисления ординат эпюры Q для балки, изображенной на рисунке 18,б.

Для точки A первого участка (рис. 18р) получим:

$$Q_A^I = Q_0^I - \omega q l_0^2 = 0 - 30 \cdot 2 = -60 \text{ кН.}$$

Здесь $Q_0^I = 0$.

Для точки C второго участка

$$Q_C^II = Q_A^I + R_A = -60 + 175 = 115 \text{ кН;}$$

$$Q_C^II = Q_C^II - \omega q l_0^2 = 115 - 30 \cdot 2 = 55 \text{ кН.}$$

Для точки E третьего участка

$$Q_E^III = Q_C^II - P = 55 - 30 = 25 \text{ кН;}$$

$$Q_E^III = Q_E^III - \omega q l_0^2 = 25 - 30 \cdot 2 = -35 \text{ кН.}$$

На четвертом участке получим:

$$Q_D^IV = Q_E^III - 35 \text{ кН;}$$

$$Q_D^IV = Q_D^IV - \omega q l_0^2 = -35 - 0 = -35 \text{ кН.}$$

По формуле (8) вычислим ординаты M для такой же балки (рис. 18г).

На I участке

$$M_0^I = 0;$$

$$M_A^I = M_0^I + \omega Q l_0^2 = 0 - \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 2 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На II участке

$$M_C^II = M_A^I = -60 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

$$M_C^II = M_C^II + \omega Q l_0^2 = -60 + \frac{155 + 55}{2} \cdot 2 = 110 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На III участке

$$M_E^III = M_C^II = 110 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

$$M_D^IV = M_E^III + \omega Q l_0^2 = 110 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0,83 = 121 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Здесь $z_0 = 0,83 \text{ м.}$

На участке

$$Q(z_0) = R_A - q \cdot 4 - q \cdot z_0 - P = 0.$$

$$M_E^III = M_C^II + \omega Q l_0^2,$$

здесь площадь $\omega Q l_0^2$ представляет собой алгебраическую сумму площадей двух треугольников на эпюре Q (рис. 18р). Тогда

$$M_E^III = 110 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0,83 - \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 1,17 = 100 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке IV

$$M_D^IV = M_E^III - M_1 = 100 - 60 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

$$M_D^IV = M_D^IV + \omega Q l_0^2 = 40 - 35 \cdot 2 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По вычисленным значениям ординат Q и M построим эпюры, используя дифференциальные зависимости (рис. 18,в,г).

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение	3
1. Определение опорных реакций	3
2. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении балки	4
3. Дифференциальные зависимости при изгибе	4
4. Построение эпюр Q и M по уравнениям	6
Пример 1	6
Пример 2	10
Пример 3	12
5. Некоторые приемы проверки правильности построения эпюр Q и M при условии рассмотрения балки слева направо	15
6. Построение эпюр Q и M по характерным точкам .	16
Пример 4	16
Расчет на прочность при изгибе	19
7. Подбор размеров поперечного сечения балки и проверка прочности	22
8. Полная проверка прочности двутавровой балки	24
9. Расчет на прочность балки, изготовленной из материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению-сжатию ..	27
Ю. Укороченный метод определения реакций	30
II. Построение эпюр Q и M по площадям	34
Пример 5	34

Радченко Евгений Александрович
Петрова Светлана Борисовна

РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе по дисциплинам
«Механика материалов и конструкций»,
«Сопротивление материалов», «Прикладная физика»,
«Техническая механика»
для студентов всех специальностей

Второе издание, исправленное

Редакторы
Т.В. Белянкина, Л.М. Трухина

Корректор
Н.И. Михайлова

Подписано в печать 07.03.08. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,33. Печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,31
Тираж 700 экз. Заказ № 75. С 57

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИИК СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9