

3849

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

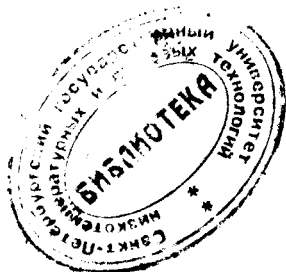


**Кафедра технической механики
и прочности**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе по дисциплинам
«Механика материалов и конструкций»,
«Сопротивление материалов», «Прикладная физика»,
«Техническая механика»
для студентов всех специальностей

Второе издание, исправленное



Санкт-Петербург 2008

Радченко Е.А., Петрова С.Б. Определение перемещений при плоском изгибе: Метод. указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплинам «Механика материалов и конструкций», «Сопротивление материалов», «Прикладная физика», «Техническая механика» для студентов всех спец. 2-е изд., испр. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 37 с.

Приведены краткий теоретический материал и рекомендации практического применения аналитических методов определения перемещений при изгибе статически определимых и неопределимых балок.

Рецензент
Профессор Д.П. Малявко

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

© Ленинградский технологический институт холодильной промышленности, 1987

© Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, 2008

I. Изогнутая ось балки

При практических расчетах балок помимо обязательного обеспечения прочности часто возникает необходимость проверить не превышают ли перемещения точек балки установленных нормами пределов (проверка жесткости). Без умения определить перемещения невозможен также расчет статически неопределимых балок.

Ось балки (рис. I) под действием нагрузки, расположенной в одной из главных плоскостей инерции ZOY , искривляется в той же плоскости и называется изогнутой осью балки.

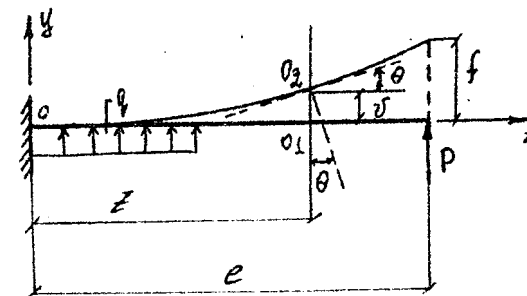


Рис. I

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к первоначальной оси балки (неподвижная ось Z), называется прогибом балки в данном сечении и обозначается буквой v .

Наибольший по модулю прогиб называется стрелой прогиба и обозначается буквой f .

Угол $\theta = v'$, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Знак прогиба определяется направлением оси Y , а знак угла поворота – видом принятой неподвижной системы осей ZOY (левой или правой). При изображенной на рис. I правой системе ZOY $\theta > 0$, если сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

В дальнейшем речь будет идти об упругих перемещениях балки, для которых справедлив закон Гука.

2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Для большинства применяемых в машиностроении и строительстве балок стрелка прогиба f не должна превосходить $(0,01 - 0,001) l$ и наибольший угол поворота сечения при этом не превышает 1° . В связи с малостью углов поворота $\tan \theta = \theta$ (θ в радианах). Тогда в соответствии с рис. 1 на основании геометрической интерпретации производной $\theta = \frac{df}{dz} = \psi$. Таким образом, если аналитическое выражение упругой линии балки известно ($f = f(z)$), легко может быть определен и угол поворота произвольного сечения.

Прогиб балки $f = f(z)$ может быть определен путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, которое для рассматриваемых балок имеет вид

$$\psi'' = \frac{M}{EY}, \quad (1)$$

где M - изгибающий момент в произвольном сечении балки,
 E - модуль упругости,
 Y - момент инерции произвольного поперечного сечения относительно нейтральной оси этого сечения, $Y = \frac{d^2 f}{dz^2}$.

Произведение EY , характеризующее способность балки сопротивляться упругому деформированию, называется жесткостью балки.

Первое интегрирование уравнения (1) дает выражение углов поворота сечений

$$\frac{d\psi}{dz} = \theta = \int \frac{M dz}{EY} + C.$$

Второе интегрирование позволяет получить уравнение изогнутой оси балки

$$f = \int dz \int \frac{M dz}{EY} + CZ + D.$$

Таким образом, для балки постоянной жесткости

$$\theta = \frac{1}{EY} \int M dz + C, \quad (2)$$

$$f = \frac{1}{EY} \int dz \int M dz + CZ + D. \quad (3)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки в самом общем случае может быть представлен полиномом n -й степени

$$M = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\int M dz = A_0 z + \frac{A_1 z^2}{2} + \dots + \frac{A_n z^{n+1}}{n+1}.$$

При $z = 0$, $\int M dz = 0$ и из (2) следует, что $\theta(0) = C$. Совершенно аналогично можно показать, что при $z = 0$ $\int dz \int M dz = 0$ и из (3) следует, что $f(0) = D$.

Следовательно, для балки постоянной жесткости постоянные интегрирования C и D представляют собой соответственно угол поворота и прогиб в начале координат. Эти постоянные находятся из двух граничных условий. Граничные условия - это заранее известные значения или соотношения прогибов либо углов поворота в конкретных сечениях балки. Обычно такими сечениями являются опорные сечения и границы грузовых участков.

В некоторых случаях удобнее применять дифференциальное уравнение оси балки в другом виде. Дифференцируя уравнение (1) дважды и вспоминая дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами и интенсивностью распределенной нагрузки, можно получить $(EY\psi'')'' = q$.

Если $EY = \text{const}$,

$$\psi^{(4)} = \frac{q}{EY}. \quad (4)$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений требует определения уже четырех постоянных. Можно показать, что две дополнительные постоянные интегрирования для балки постоянной жесткости представляют собой поперечную силу и изгибающий момент в начале координат. При определении постоянных интегрирования в этом случае к граничным условиям, указанным ранее, необходимо добавить еще два: значения поперечной силы и изгибающего момента в

тех же конкретных сечениях балки. Из уравнения (4) следует, что при $q = const$ изогнутая ось балки представляет собой кривую четвертого порядка.

3. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси одноучастковой балки

Пример I

Для балки, изображенной на рис. 2, определить прогибы и углы поворота сечений на конце консоли и в середине пролета: $P = 10$ кН, $e = 2$ м, $q = 10$ кН/м, материал балки сталь 3, в сечении балки двутавр №20.

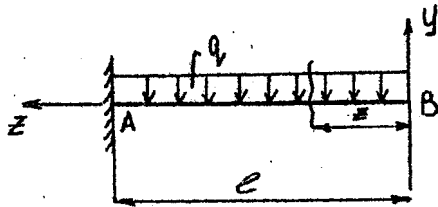


Рис. 2

Начало координат поместим в крайнюю правую точку балки (точка В). Изгибающий момент в произвольном сечении на расстоянии Z от начала координат $M = -qZ^2$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$y'' = \frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{qZ^2}{2}$$

Интегрируем это уравнение дважды:

$$y' = \theta = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{qZ^3}{6} + C, \quad (a)$$

$$y = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{qZ^4}{24} + Cz + D. \quad (б)$$

Для определения постоянных интегрирования C и D запишем граничные условия:

1. При $Z = e$ $\theta_A = y'_A = 0$.
2. При $Z = e$ $y_A = 0$.

Подставим первое граничное условие в уравнение (a)

$$0 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{qe^3}{6} + C, \text{ откуда } C = \frac{qe^3}{6EI}.$$

Зная C , подставим второе граничное условие в уравнение (б)

$$0 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{qe^4}{24} + \frac{qe^3}{6EI} e + D, \text{ откуда } D = -\frac{qe^4}{8EI}.$$

Окончательно уравнения углов поворота и прогибов балки принимают вид

$$y' = \theta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qZ^3}{6} + \frac{qe^3}{6} \right); \quad (a)$$

$$y = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qZ^4}{24} + \frac{qe^3}{6} Z - \frac{qe^4}{8} \right). \quad (б)$$

Из полученных уравнений можно определить углы поворота и прогибы любого сечения балки, подставляя соответствующие координаты Z .

Так, на конце консоли $Z = 0$:

$$y'_{Z=0} = \theta = \frac{1}{EI} \cdot \frac{qe^3}{6} = \frac{10 \cdot 2^3}{2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \cdot 6} = 0,004 \text{ рад.}$$

$$y_{Z=0} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qe^4}{8} \right) = -\frac{10 \cdot 2^4}{2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \cdot 8} = -0,005 \text{ м.}$$

В середине пролета $Z = e/2 = 1$ м:

$$y'_{Z=1} = \theta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{q \cdot 1}{6} + \frac{qe^3}{6} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \times$$

$$\times \left(-\frac{10 \cdot 1}{6} + \frac{10 \cdot 2^3}{6} \right) = 0,003 \text{ рад.}$$

$$y_{Z=1} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{q \cdot 1}{24} + \frac{qe^3}{6} \cdot 1 - \frac{qe^4}{8} \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \left(-\frac{10 \cdot 1}{24} + \frac{10 \cdot 2^3}{6} - \frac{10 \cdot 2^4}{8} \right) = -0,005 \text{ м.}$$

Пример 2

Балка на двух опорах загружена моментом M_0 , приложенным на правой опоре (рис. 3).

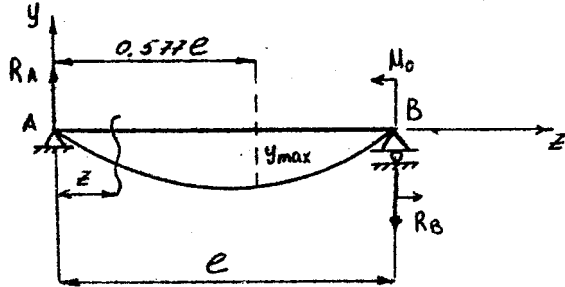


Рис. 3

Определяем опорные реакции $R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$. Расположим начало координат на левой опоре, тогда получим:

$$\sigma'' = \frac{M}{EY} = \frac{R_A z}{EY} = \frac{M_0 z}{EY \cdot l};$$

$$\sigma' = \frac{M_0}{EYl} \cdot \frac{z^2}{2} + C; \quad (a)$$

$$\sigma = \frac{M_0}{EYl} \cdot \frac{z^3}{6} + Cz + D. \quad (b)$$

Граничные условия:

1. При $z = 0$ $\sigma = \sigma_A = 0$.

2. При $z = l$ $\sigma = \sigma_B = 0$.

Подставим поочередно граничные условия в уравнение (b) и получим

$$0 = D; \quad 0 = \frac{M_0}{EYl} \cdot \frac{l^3}{6} + Cl, \quad \text{откуда } C = -\frac{M_0}{6EY}.$$

Определив постоянные интегрирования C и D , можно записать уравнения (a) и (b) в следующем виде:

$$\sigma' = \frac{1}{EY} \left(\frac{M_0}{l} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{M_0 l}{6} \right); \quad (a)$$

$$\sigma = \frac{1}{EY} \left(\frac{M_0}{l} \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{M_0 l}{6} z \right), \quad (b)$$

или

$$\sigma' = -\frac{M_0 l}{6EY} \left(1 - 3 \frac{z^2}{l^2} \right); \quad (a)$$

$$\sigma = -\frac{M_0 l}{6EY} z \left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right). \quad (b)$$

Сечению с наибольшим прогибом соответствует $\frac{d\sigma}{dz} = 0$, поэтому

$$1 - 3 \frac{z_0^2}{l^2} = 0, \quad \text{откуда } z_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l.$$

Наибольший прогиб равен

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_0 z_0}{6EY_x} \left(1 - \frac{z_0^2}{l^2} \right) = -\frac{M_0 l}{6 \cdot 1,5 EY_x} \left(1 - \frac{l^2}{3l^2} \right) = -\frac{M_0 l^2}{9 \cdot 1,5 EY_x} = -\frac{M_0 l^2}{13,5 EY_x}$$

прогиб же посередине пролета при $z = \frac{l}{2}$ равен:

$$\sigma_{\frac{l}{2}} = -\frac{M_0 \frac{l}{2}}{6EY_x} \left[1 - \left(\frac{\frac{l}{2}}{l} \right)^2 \right] = -\frac{M_0 l^2}{12 EY_x} \left[1 - \frac{l^2}{4l^2} \right] = -\frac{M_0 l^2}{16 EY_x}$$

Разница с наибольшим прогибом составляет всего 2,5%, таким образом, в большинстве случаев за наибольший прогиб для балки на двух опорах можно с достаточной точностью принимать прогиб посередине пролета.

4. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси многоучастковой балки

Если нагрузки на балке делят ее на n участков, то дифференциальных уравнений придется составлять по числу участков n , а число постоянных интегрирования будет $2n$. Используя граничные условия, можно составить систему уравнений и, решая их, найти постоянные интегрирования.

Пример 3

Балка на двух опорах пролетом l нагружена силой P на расстоянии a от левого и b от правого конца (рис. 4).

Требуется определить постоянные интегрирования.

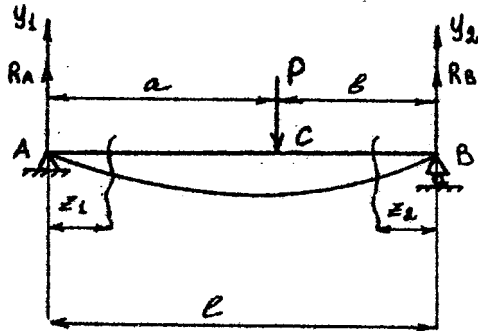


Рис. 4

Опорные реакции балки равны: $R_A = \frac{Pb}{l}$; $R_B = \frac{Pa}{l}$.
 Изгибающие моменты на первом и втором участке будут разными.
 Возьмем два произвольных сечения с координатами z_1 и z_2 и напишем два дифференциальных уравнения:

$$\mathcal{M}_1'' = \frac{M_1}{EY} = \frac{R_A z_1}{EY} = \frac{Pb}{EYl} z_1; \tag{a}$$

$$\mathcal{M}_1' = \frac{Pb}{EYl} \frac{z_1^2}{2} + C_1; \tag{a}$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{Pb}{EYl} \frac{z_1^3}{6} + C_1 z_1 + \mathcal{D}_1; \tag{б}$$

$$\mathcal{M}_2'' = \frac{M_2}{EY} = \frac{R_B z_2}{EY} = \frac{Pa}{EYl} z_2; \tag{в}$$

$$\mathcal{M}_2' = \frac{Pa}{EYl} \frac{z_2^2}{2} + C_2; \tag{в}$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{Pa}{EYl} \frac{z_2^3}{6} + C_2 z_2 + \mathcal{D}_2. \tag{г}$$

В выражения для прогибов и углов поворота вошли четыре постоянных интегрирования, вдвое больше, чем число участков. Для определения этих постоянных надо иметь четыре граничных условия. Два граничных условия на опорах очевидны:

1. При $z_1 = 0$ $\mathcal{M}_1 = 0$.
2. При $z_2 = 0$ $\mathcal{M}_2 = 0$.

Еще два граничных условия следует из условия гладкости и непрерывности упругой линии на границе грузовых участков в сечении C. Эти условия требуют, чтобы в сечении C $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ и $|\theta_1| = |\theta_2|$, следовательно:

3. При $z_1 = a$ и $z_2 = b$ $\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_2$.
4. При $z_1 = a$ и $z_2 = b$ $\theta_1 = \theta_2$.

Используя первое и второе граничные условия и соответственно уравнения (б) и (г) получим, что $\mathcal{D}_1 = 0$ и $\mathcal{D}_2 = 0$. Используя третье граничное условие и уравнения (а) и (в), получим

$$\frac{Pb}{EYl} \frac{a^3}{6} + C_1 a = -\frac{Pa}{EYl} \frac{b^3}{6} - C_2 b \text{ откуда}$$

$$-C = \frac{2ab}{2EYl} (b-a) + C_2.$$

Зная \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , используем четвертое граничное условие и уравнения (б) и (г)

$$\frac{Pb}{EYl} \frac{a^3}{6} + C_1 a = \frac{Pa}{EYl} \frac{b^3}{6} + C_2 b;$$

из этого уравнения определим C_1 , используя полученное ранее соотношение между C_1 и C_2 .

$$\frac{Pb}{EYl} \frac{a^3}{6} - \left(\frac{Pab}{2EYl} (b-a) + C_2 \right) a = \frac{Pa}{EYl} \frac{b^3}{6} + C_2 b, \text{ откуда}$$

$$C_2 = -\frac{Pab}{6EYl} (4a^2 - 3ab - b^2), \text{ тогда}$$

$$C_1 = -\frac{Pab}{2EYl} (b-a) - \frac{Pab}{6EYl} (4a^2 - 3ab - b^2) = \\ = \frac{Pab}{6EYl} (3ab - a^2 - 2b^2).$$

Теперь формулы, по которым можно определять σ и σ' в любом сечении балки, получат вид:

$$\sigma_1' = \frac{1}{EY} \left[\frac{\rho b}{2} \frac{z_1^2}{2} + \frac{\rho ab}{6l^2} (3ab - a^2 - 2b^2) \right];$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{EY} \left[\frac{\rho b}{2} \frac{z_1^3}{6} + \frac{\rho ab}{6l^2} (3ab - a^2 - 2b^2) z_1 \right];$$

$$\sigma_2' = \frac{1}{EY} \left[\frac{\rho a}{2} \frac{z_2^2}{2} + \frac{\rho ab}{6l^2} (4a^2 - 3ab - b^2) \right];$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{EY} \left[\frac{\rho a}{2} \frac{z_2^3}{6} + \frac{\rho ab}{6l^2} (4a^2 - 3ab - b^2) z_2 \right].$$

Пример 4

Подобрать сечение стальной двутавровой балки (рис. 5), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа, а допускаемый прогиб $[f]$ не должен превышать 1/1000 длины пролета; $l = 2$ м; $q = 40$ кН/м.

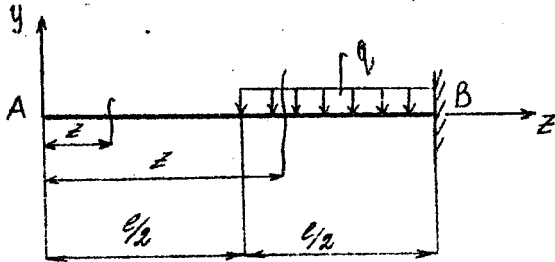


Рис. 5

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\sigma'' = \frac{M}{EY} = -\frac{1}{EY} q \frac{(l-z)^2}{2};$$

$$\sigma' = -\frac{1}{EY} q \frac{(l-z)^3}{6} + C; \quad (a)$$

$$\sigma = -\frac{1}{EY} q \frac{(l-z)^4}{24} + C_1 z + D. \quad (b)$$

Запишем граничные условия:

1. При $z = l$ $\sigma' = \sigma_B' = 0$.

2. При $z = l$ $\sigma = \sigma_B = 0$.

Вычислим постоянные интегрирования, используя граничные условия,

$$0 = -q \frac{(l-l)^3}{6EY} + C, \text{ откуда } C = \frac{ql^3}{48EY};$$

$$0 = -q \frac{(l-l)^4}{24EY} + \frac{ql^3}{48EY} \cdot l + D, \text{ откуда } D = -\frac{7ql^4}{384EY}$$

Наибольший прогиб будет на конце консоли, т.е. в точке А, при $z = 0$, тогда уравнение (б) примет вид $\Delta_A = \Delta_{\max} = D$.

Условие жесткости $\Delta_{\max} \leq [f]$, где $[f] = l/1000 = 2/1000 = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тогда $|\Delta_{\max}| = |D| \leq [f]$, откуда

$$Y \geq \frac{191}{[f]E}.$$

Определяем осевой момент инерции сечения

$$Y = \frac{7ql^4}{384[f]E} = \frac{7 \cdot 40 \cdot 16}{384 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,292 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 = 2920 \text{ см}^4.$$

Необходимо поставить двутавр №24 с моментом инерции $J_x = 2920 \text{ см}^4$.

Определим момент сопротивления из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где } M_{\max} = q \frac{l^2}{2} \frac{l}{4}.$$

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{q l^3}{8 [\sigma]} = \frac{40 \cdot 8}{100 \cdot 10^6 \cdot 8} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 200 \text{ см}^3$$

Из расчета на прочность достаточно было бы поставить двутавр №20а с $W_x = 203 \text{ см}^3$.

Следовательно, в данном случае для удовлетворения условий прочности и жесткости сечение балки определяется из условия жесткости. Окончательный ответ: двутавр №24.

5. Метод начальных параметров

При использовании дифференциального уравнения для определения перемещений многоучастковой балки вычисления, связанные с определением постоянных интегрирования, становятся слишком громоздкими. На преодоление этих трудностей было потрачено много усилий. Были предложены графические и графоаналитические методы построения упругой линии, которые в настоящее время в связи с широким внедрением ЭЦВМ не представляют практического интереса.

Наиболее универсальным, легко реализуемым на ЭЦВМ методом, позволяющим избежать этих трудностей, является метод начальных параметров. Оказывается, что при соблюдении определенных условий число постоянных интегрирования, подлежащих определению, можно сократить до двух, независимо от количества грузовых участков балки. Очевидно это возможно только тогда, когда в выражениях изгибающих моментов, углов поворота и прогибов повторяются все члены предыдущего участка, а вновь появляющиеся слагаемые обращаются в нуль на границах предыдущего и последующего участков.

Для обеспечения этих условий при составлении дифференциальных уравнений и их интегрировании необходимо соблюдать следующие правила:

1. Общее для всех участков начало координат следует располагать на одном из концов балки.

2. Выражения для изгибающего момента составлять, вычисляя моменты сил, расположенных со стороны общего начала координат. При этом сосредоточенный внешний момент M_0 следует включать в это выражение в виде $M_0 (z - a)^0$, где a - абсцисса сечения, в котором приложен M_0 .

3. Распределенную нагрузку необходимо продолжить до противоположного началу координат конца балки, введя на участке, где нагрузка не прикладывалась, компенсирующую нагрузку, равную по величине дополнительно приложенной, но обратной по направлению.

4. Интегрирование уравнений на всех участках следует произ-

водить без раскрытия скобок типа $(z - a)$, что возможно, так как $d(z - a) = dz$.

Применяя указанные правила можно показать, что постоянные интегрирования на всех участках равны между собой (пример 4). На первом участке, как отмечалось ранее, постоянные интегрирования равны углу поворота и прогибу в начале координат и поэтому называются начальными параметрами θ_0 и δ_0 .

В результате может быть записано выражение прогиба любого сечения балки, которое называется универсальным уравнением изогнутой оси.

$$\delta = \delta_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI} \left(\sum M_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{4!} + \sum t_i \frac{(z - d_i)^5}{5!} \right) \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (5) без раскрытия скобок, можно получить уравнение углов поворота

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left(\sum M_i \frac{(z - a_i)}{1!} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{3!} + \sum t_i \frac{(z - d_i)^4}{4!} \right) \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) обозначены: M_i - i -тый сосредоточенный внешний момент, при направлении по ходу часовой стрелки положительный, если начало координат на левом конце балки, и отрицательный в случае противоположного расположения начала координат; P_i - i -тая сосредоточенная внешняя сила, положительная при направлении вверх; q_i - i -тая равномерно распределенная нагрузка, положительная при направлении вверх; t_i - тангенс угла наклона треугольной распределенной нагрузки к оси z , положительный при возрастании модуля последней по направлению z ; a_i, b_i - абсциссы сечений, в которых соответственно приложены M_i и P_i ; c_i, d_i - абсциссы сечений, в которых начинаются соответственно распределенные нагрузки, равномерная q_i и треугольная, характеризуемая t_i .

Следует заметить, что рациональным выбором начала координат (на левом или на правом конце балки) можно в значительной мере упростить решение задачи (см. пример 8).

Начальные параметры θ_0 и ψ_0 определяются из двух граничных условий. Знаки суммирования означают, что число слагаемых того типа, который указан за знаком, должно равняться числу M_i, P_i, q_i, t_i . При применении уравнений (5) и (6) для вычисления перемещений в конкретных сечениях балки (при заданном Z) следует слагаемые, в которых выражение в скобках типа $(Z - a_i)$ отрицательно, опускать.

Последнее равнозначно применению в уравнениях (5) и (6) ограничителей

$$\theta = \theta_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI} \left(\sum_{z > a_i} M_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \sum_{z > b_i} P_i \frac{(z - b_i)^3}{3!} + \sum_{z > c_i} q_i \frac{(z - c_i)^4}{4!} + \sum_{z > d_i} t_i \frac{(z - d_i)^5}{5!} \right).$$

В дальнейшем при рассмотрении примеров ограничители опущены.

Рассмотренный метод начальных параметров реализован на ЭЦВМ и представлен в методических указаниях (Радченко Е.А., Канева Е.Н. Методические указания и программы для определения на ЭЦВМ упругих перемещений балки и необходимых по условиям жесткости моментов инерции сечений. - Д 3657).

Пример 5

Считая, что прочность балки (рис. 6) обеспечена, подобрать номер двутавра, если допустимое значение стрелки прогиба $[f] = 0,01a$. Определить прогибы и углы поворота на концах консолей и прогиб посередине пролета, если $P = qa$, $M_0 = qa^2$, $q = 10$ кН/м, $a = 2$ м.

Чтобы написать универсальное уравнение для данной балки, необходимо знать все внешние силы, действующие на нее, в число которых входят и реакции опор.

Из уравнений равновесия следует

$$R_B = P + \frac{1}{2}qa - \frac{Pa + \frac{1}{6}qa^2}{2a} - \frac{M_0}{2a};$$

$$R_D = -\frac{Pa + \frac{1}{6}qa^2}{2a} + \frac{M_0}{2a}.$$

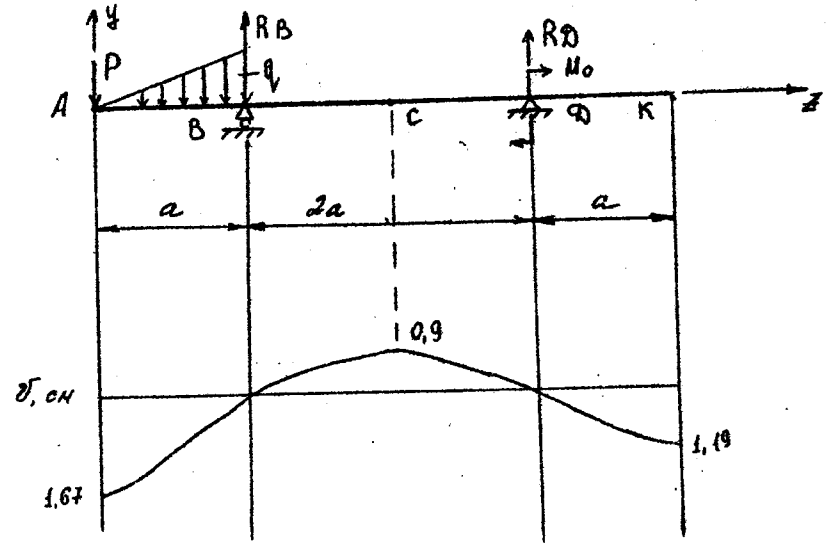


Рис. 6

Подставляя значения P и M_0 , получаем

$$R_B = qa + \frac{1}{2}qa + \frac{1}{2}qa + \frac{1}{2}qa - \frac{1}{2}qa = \frac{13}{2}qa;$$

$$R_D = -\frac{1}{2}qa - \frac{1}{2}qa + \frac{1}{2}qa = -\frac{1}{2}qa.$$

Далее в соответствии с изложенными выше требованиями делаем преобразование распределенной нагрузки (рис. 7).

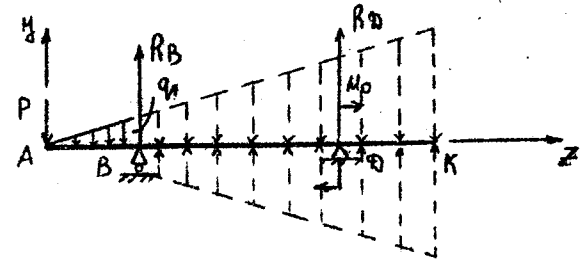


Рис. 7

В результате преобразования балка до правого конца нагружена треугольной нагрузкой, характеризуемой $t = -\frac{q}{a}$, и компенсирующей нагрузкой, которую можно представить как сумму равномерной интенсивности q и треугольной, характеризуемой $t_1 = \frac{q}{a}$.

Знак минус в выражении t принят в связи с тем, что распределенная нагрузка, действующая вниз, отрицательна.

Универсальное уравнение для данной балки

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{(z-3a)^2}{2!} - P \frac{(z-0)^3}{3!} + R_B \frac{(z-a)^3}{3!} + R_D \frac{(z-3a)^3}{3!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} + t \frac{(z-0)^5}{5!} + t_1 \frac{(z-a)^5}{5!} \right]$$

Подставляя заданные значения P , M_0 и найденные R_B , R_D , t и t_1 , получаем

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI} \left[qa^2 \frac{(z-3a)^2}{2!} - qa \frac{z^3}{3!} + \frac{19}{12} qa \frac{(z-a)^3}{3!} - \frac{1}{12} qa \frac{(z-3a)^3}{3!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} - \frac{q}{a} \frac{z^5}{5!} + \frac{q}{a} \frac{(z-a)^5}{5!} \right]$$

Граничные условия для данной балки следуют из рис. 6:

1. При $z = a$, $v = 0$.

2. При $z = 3a$, $v = a$.

Подставляя граничные условия в выражение для v , приходим к системе уравнений:

$$v_{(a)} = v_0 + \theta_0 a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{qa^4}{3!} - \frac{qa^5}{5!} \right) = 0.$$

$$v_{(3a)} = v_0 + \theta_0 3a + \frac{1}{EI} \left[-qa \frac{(3a)^3}{3!} + \frac{19}{12} qa \frac{(2a)^3}{3!} + q \frac{(2a)^4}{4!} - \frac{q}{a} \frac{(3a)^5}{5!} + \frac{q}{a} \frac{(2a)^5}{5!} \right] = 0.$$

В первом из этих уравнений остальные слагаемые сдвинуты, так как выражение в скобках типа $(z-a)$ отрицательно. После преобразований получаем систему уравнений

$$v_0 + \theta_0 a = \frac{21}{120 EI} qa^4; \quad v_0 + 3\theta_0 a = \frac{12539a^4}{360 EI}$$

После решения системы уравнений получаем:

$$\theta_0 = \frac{119 qa^3}{72 EI}$$

$$v_0 = -\frac{133 qa^4}{90 EI}$$

Поскольку начало координат совмещено с левым концом балки, то полученные начальные параметры (угол поворота и прогиб на конце левой консоли в сечении A)

$$\theta_A = \theta_0 = \frac{119 qa^3}{72 EI}$$

$$v_A = v_0 = -\frac{133 qa^4}{90 EI}$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки представит в виде

$$v = -\frac{133 qa^4}{90 EI} + \frac{119}{72} \frac{qa^3}{EI} z + \frac{1}{EI} \left[qa^2 \frac{(z-3a)^2}{2!} - qa \frac{z^3}{3!} + \frac{19}{12} qa \frac{(z-a)^3}{3!} - \frac{1}{12} qa \frac{(z-3a)^3}{3!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} - \frac{q}{a} \frac{z^5}{5!} + \frac{q}{a} \frac{(z-a)^5}{5!} \right]$$

Для определения перемещения в середине пролета подставляем в это уравнение абсциссу этого сечения $z = 2a$

$$v_c = -\frac{133 qa^4}{90 EI} + \frac{119 qa^3}{72 EI} \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left(-qa \frac{(2a)^3}{3!} + \frac{19}{12} qa \frac{a^3}{3!} + q \frac{a^4}{4!} - \frac{q}{a} \frac{a^5}{5!} + \frac{q}{a} \frac{a^5}{5!} \right) = \frac{72 qa^4}{90 EI} = \frac{36 qa^4}{45 EI}$$

Подставляя в универсальное уравнение $z = 4a$, получаем перемещение правого конца балки

$$\begin{aligned} \delta_K = & -\frac{133qa^4}{90EJ} + \frac{119qa^3}{72EJ} 4a + \frac{1}{EJ} \left[qa^2 \cdot \frac{a^2}{2!} - \right. \\ & - qa \frac{(4a)^3}{3!} + \frac{19}{12} qa \frac{(3a)^3}{3!} - \frac{1}{12} qa \frac{a^3}{3!} + q \frac{(3a)^4}{4!} - \\ & \left. - \frac{q}{2} \frac{(4a)^5}{5!} + \frac{q}{2} \frac{(3a)^5}{5!} \right] = -\frac{95qa^4}{90EJ} = -\frac{19qa^4}{18EJ} \end{aligned}$$

Продифференцировав универсальное уравнение, получаем уравнение углов поворота

$$\begin{aligned} \theta = \theta' = & \frac{119qa^3}{72EJ} + \frac{1}{EJ} \left[qa^2 \frac{(z-3a)}{2!} - qa \frac{z^2}{2!} + \right. \\ & + \frac{19}{12} q \frac{(z-a)^2}{3!} - \frac{1}{12} qa \frac{(z-3a)^2}{2!} + q \frac{(z-a)^3}{3!} - \\ & \left. - \frac{q}{2} \frac{z^4}{4!} + \frac{q}{2} \frac{(z-a)^4}{4!} \right] \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение $z = 4a$, получаем угол поворота правого конца балки

$$\begin{aligned} \theta_K = & \frac{119qa^3}{72EJ} + \frac{1}{EJ} \left[qa^2 \frac{a}{1!} - qa \frac{(4a)^2}{2!} + \frac{19}{12} qa \frac{(3a)^2}{2!} - \right. \\ & - \frac{1}{12} qa \frac{a^2}{2!} + q \frac{(3a)^3}{3!} - \frac{q}{2} \frac{(4a)^4}{4!} + \frac{q}{2} \frac{(3a)^4}{4!} \left. \right] = \\ & = -\frac{19qa^3}{18EJ} \end{aligned}$$

При принятой системе осей координат устанавливаем по знакам полученных прогибов и углов поворота, что концы консолей переместятся вниз, середина пролета поднимется вверх, левое концевое сечение повернется против часовой стрелки, правое - по часовой стрелке.

Максимальный по модулю прогиб (стрелка прогиба) имеет место в сечении А

$$f = |f_A| = \frac{133qa^4}{90EJ}$$

Из условия обеспечения жесткости $f \leq [f]$ получаем минимально необходимый момент инерции

$$J = \frac{133qa^4}{90E[f]}$$

Учитывая, что для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, и подставляя в полученное выражение численные значения, получаем

$$J = \frac{133 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{90 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,012} = 59 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 = 5900 \text{ см}^4$$

Из сортамента выбираем двутавр №30, у которого $J_x = J = 7080 \text{ см}^4$.

По полученным формулам вычисляем значения перемещений:

$$\delta_A = -\frac{133 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{90 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = -1,67 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,67 \text{ см}$$

$$\delta_C = \frac{36 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{45 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,9 \text{ см}$$

$$\delta_K = -\frac{19 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{18 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = -1,19 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,19 \text{ см}$$

$$\theta_A = \frac{119 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{72 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0,935 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,54^\circ$$

$$\theta_K = -\frac{19 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{18 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = -0,596 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = -0,34^\circ$$

По численным значениям перемещений можно построить примерный вид изогнутой оси балки (рис.6).

Пример 6

Для консольной балки (рис. 8) длиной l , постоянной жесткости EY , нагруженной на свободном конце и посередине длины противоположно направленными силами P , определить угол поворота и прогиб свободного конца, а также прогиб посередине длины балки.

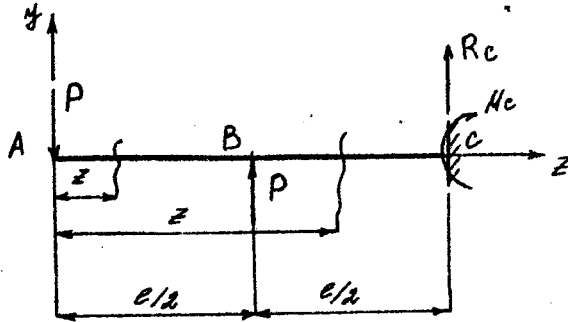


Рис. 8

Универсальное уравнение изогнутой оси для данной балки имеет вид

$$\delta = \delta_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EY} \left[-P \frac{(z-0)^3}{3!} + P \frac{(z-\frac{l}{2})^3}{3!} + R_c \frac{(z-l)^3}{3!} + M_c \frac{(z-l)^2}{2!} \right].$$

Поскольку последние два слагаемых в скобках действительны только при $z > l$, т.е. за пределами балки, эти слагаемые можно опустить и не определять реакции опоры. Вообще следует заметить, что при применении универсального уравнения сосредоточенные силы и моменты, приложенные в концевом сечении, свободном от начала координат, можно не вводить в уравнение по той же причине.

Граничные условия:

1. При $z = l$ $\delta = 0$.
2. При $z = l$ $\theta = \delta' = 0$.

Для выполнения второго граничного условия запишем уравнение углов поворота

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EY} \left[-P \frac{(z-0)^2}{2!} + P \frac{(z-\frac{l}{2})^2}{2!} \right].$$

Подставляя граничные условия в выражения δ и θ , получаем систему уравнений

$$1. \quad 0 = \delta_0 + \theta_0 l + \frac{1}{EY} \left[-P \frac{l^3}{3!} + P \frac{(\frac{l}{2})^3}{3!} \right].$$

$$2. \quad 0 = \theta_0 + \frac{1}{EY} \left[-P \frac{l^2}{2!} + P \frac{(\frac{l}{2})^2}{2!} \right].$$

Из второго уравнения следует $\theta_0 = \frac{3Pl^2}{8EY}$.

Подставляя это значение в уравнение 1, получаем

$$\delta_0 = -\frac{3Pl^3}{8EY} - \frac{1}{EY} \left(P \frac{l^3}{48} - P \frac{l^3}{6} \right) = -\frac{11Pl^3}{48EY}.$$

С учетом значений начальных параметров универсальное уравнение можно записать в виде

$$\delta = -\frac{11Pl^3}{48EY} + \frac{3Pl^2}{8EY} z + \frac{1}{EY} \left[-P \frac{(z-0)^3}{3!} + P \frac{(z-\frac{l}{2})^3}{3!} \right].$$

Поскольку начало координат совмещено с левым концом балки, искомые прогиб и угол поворота этого сечения

$$\delta_A = \delta_0 = -\frac{11Pl^3}{48EY}; \quad \theta_A = \theta_0 = \frac{3Pl^2}{8EY}.$$

Подставляя в выражение для δ значение $z = l/2$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_B &= -\frac{11Pl^3}{48EY} + \frac{3Pl^2}{8EY} \frac{l}{2} + \frac{1}{EY} \left(-P \frac{(\frac{l}{2})^3}{6} \right) = \\ &= -\frac{Pl^3}{16EY} \end{aligned}$$

По знакам полученных перемещений устанавливаем, что конец консоли и середина балки опустятся вниз, а свободное концевое сечение повернется против часовой стрелки.

Пример 7

Для балки (рис. 9) построить изогнутую ось, если $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $Y = 6550$ см⁴, $a = 1$ м.

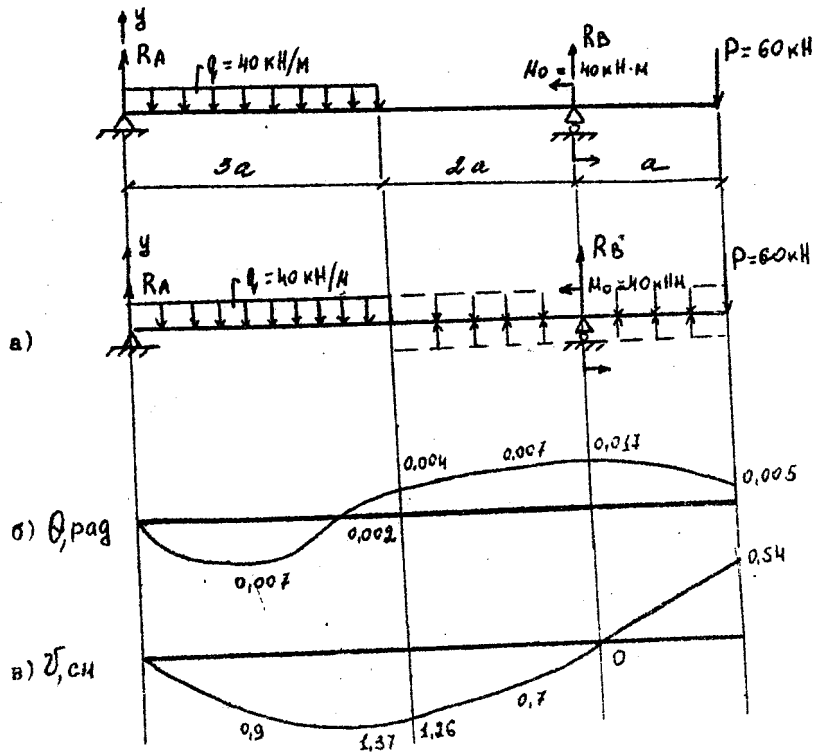


Рис. 9

Из уравнения равновесия получаем значения опорных реакций

$$R_A = q \cdot 3a \cdot \frac{3,5a}{3a} + \frac{M_0}{5a} - \frac{Pa}{5a} = 40 \cdot 3 \cdot \frac{3,5}{5} + \frac{40}{5} - \frac{60}{5} = 80 \text{ кН}$$

$$R_B = q \cdot 3a \cdot \frac{1,5a}{5a} - \frac{M_0}{5a} + \frac{Pa}{5a} + P = 40 \cdot 3 \cdot \frac{1,5}{5} - \frac{40}{5} + \frac{60}{5} + 60 = 100 \text{ кН.}$$

Продолжим распределенную нагрузку до правого конца балки и введем компенсирующую (рис. 9, а).

Универсальное уравнение упругой линии для данной балки

$$\begin{aligned} \delta = \delta_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EY} \left(M_0 \frac{(z-5a)^2}{2!} + R_A \frac{(z-0)^3}{3!} + R_B \frac{(z-5a)^3}{3!} - \right. \\ \left. - P \frac{(z-6a)^3}{3!} - q \frac{(z-0)^4}{4!} + q \frac{(z-3a)^4}{4!} \right). \end{aligned}$$

Поскольку слагаемое, содержащее силу P , справедливо только при $z > 6a$, его можно опустить.

Граничные условия:

1. При $z = 0$, $\delta = 0$.

2. При $z = 5a$, $\delta = 0$.

Подставляя граничные условия в универсальное уравнение, получаем:

1. $0 = \delta_0$.

2. $0 = \theta_0 \cdot 5a + \frac{1}{EY} \left(R_A \frac{5a^3}{3!} - q \frac{(5a)^4}{4!} + q \frac{(2a)^4}{4!} \right)$.

Подставляя в уравнение 2 численные значения входящих в него величин, находим

$$\begin{aligned} \theta_0 = - \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 6550 \cdot 10^{-8}} \left(80 \cdot \frac{5^3}{6} - 40 \cdot \frac{5^4}{24} + 40 \cdot \frac{2^4}{24} \right) = \\ = -0,01 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{EY} = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 6550 \cdot 10^{-8}} = 0,765 \cdot 10^{-4} \text{ (кН} \cdot \text{м}^2)^{-1}$$

Уравнение упругой линии балки с учетом численных значений входящих в него величин

$$\begin{aligned} \delta = -0,0099z + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(40 \frac{(z-5)^2}{2!} + 80 \frac{z^3}{3!} + \right. \\ \left. + 100 \frac{(z-5)^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!} + \frac{(z-3)^4}{4!} q \right). \end{aligned}$$

Дифференцируя это уравнение без раскрытия скобок, получаем выражение углов поворота

$$\theta = \delta' = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(40 \frac{(z-5)}{1!} + 80 \frac{z^2}{2!} + \right.$$

$$+ 100 \frac{(z-5)^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!} + q \frac{(z-3)^4}{4!}.$$

Дифференцируя это уравнение без раскрытия скобок, получаем выражение углов поворота

$$\theta = \theta' = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(40 \frac{(z-5)}{1!} + 80 \frac{z^2}{2!} + 100 \frac{(z-5)^2}{2!} - q \frac{z^3}{3!} + q \frac{(z-3)^3}{3!} \right).$$

Поскольку начало координат совмещено с опорой А, $\theta_A = \theta_0 = 0$, $\theta_A = \theta_0 = -0,0099$. Подставляя значения абсциссы ряда конкретных сечений в выражение для θ' и θ , находим:

$$z = 1 \text{ м: } \theta = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{1}{2} - 40 \frac{1}{6} \right) = -0,007 \text{ рад;}$$

$$\theta' = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{1}{6} - 40 \frac{1}{24} \right) = -0,9 \text{ см;}$$

$$z = 2 \text{ м: } \theta = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{2^2}{2} - 40 \frac{2^3}{6} \right) = -0,002 \text{ рад;}$$

$$\theta' = -0,0099 \cdot 2 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{2^3}{6} - 40 \frac{2^4}{24} \right) = -1,37 \text{ см;}$$

$$z = 3 \text{ м: } \theta = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{3^2}{2} - 40 \frac{3^3}{6} \right) = 0,004 \text{ рад;}$$

$$\theta' = -0,0099 \cdot 3 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{3^3}{6} - 40 \frac{3^4}{24} \right) = -1,26 \text{ см;}$$

$$z = 4 \text{ м: } \theta = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{4^2}{2} - 40 \frac{4^3}{6} + 40 \frac{1^3}{6} \right) = 0,007 \text{ рад;}$$

$$\theta' = -0,0099 \cdot 4 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{4^3}{6} - 40 \frac{4^4}{24} + 40 \frac{1^4}{24} \right) = -0,7 \text{ см;}$$

$$z = 5 \text{ м: } \theta = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{5^2}{2} - 40 \frac{5^3}{6} + 40 \frac{2^3}{6} \right) = 0,017 \text{ рад,}$$

$$\theta' = -0,0099 \cdot 5 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(80 \frac{5^3}{6} - 40 \frac{5^4}{24} + 40 \frac{2^4}{24} \right) = 0;$$

$$z = 6 \text{ м: } \theta = -0,0099 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(40 \frac{1}{1} + 80 \frac{6^2}{2} + 100 \frac{1^2}{2} - 40 \frac{6^3}{6} + 40 \frac{3^3}{6} \right) = 0,005 \text{ рад,}$$

$$\theta' = 0,0099 \cdot 6 + 0,765 \cdot 10^{-4} \left(40 \frac{1}{2} + 80 \frac{6^3}{6} + 100 \frac{1^3}{6} - 40 \frac{6^4}{24} + 40 \frac{3^4}{24} \right) = 0,54 \text{ см.}$$

Полученные результаты сведем в табл. I. По данным таблицы построены графики θ и θ' (рис. 9, б, в).

Таблица I

Пере- менная	Абсциссы сечений балки, м						
	0	1	2	3	4	5	6
θ рад	-0,01	-0,007	-0,002	0,004	0,007	0,017	0,005
θ' см	0	-0,90	-1,37	-1,26	-0,70	0	0,54

Пример 8

Для балки (рис. 10) постоянной жесткости определить углы поворота опорных сечений и прогиб посередине пролета.

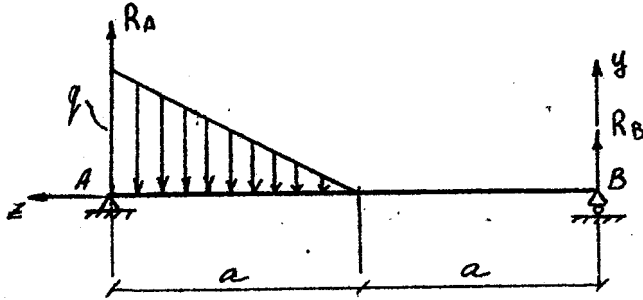


Рис. 10

Если для данной балки принять начало координат на левой опоре, то потребуются довольно сложные преобразования распределенной нагрузки, что усложнит универсальное уравнение упругой линии и приведет к громоздким вычислениям.

В данном случае при выборе начала координат на правой опоре не требуется вообще преобразовывать распределенную нагрузку, так как она продолжается до левого конца балки.

Из уравнения равновесия определяем реакции опор

$$R_A = \frac{\frac{1}{2} q a \frac{3}{2} a}{2a} = \frac{5}{12} q a;$$

$$R_B = \frac{\frac{1}{2} q a \frac{1}{2} a}{2a} = \frac{1}{12} q a.$$

При принятой системе осей координат $t = -\frac{q}{2}$ и универсальное уравнение изогнутой оси балки запишется в виде

$$\delta = \delta_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EY} \left[R_B \frac{(z-0)^3}{3!} - \frac{q}{2} \frac{(z-a)^5}{5!} \right].$$

Слагаемое, содержащее вторую реакцию R_B опущено, так как оно справедливо только при $z > 2a$, т.е. за пределами балки.

Граничные условия:

1. При $z = 0$, $\delta = 0$.

2. При $z = 2a$, $\delta = 0$.

Из условия 1 следует $\delta_0 = 0$. Подставляя условие 2 в универсальное уравнение, получаем

$$0 = \theta_0 \cdot 2a + \frac{1}{EY} \left(\frac{1}{12} q a \frac{(2a)^3}{6} - \frac{q}{2} \frac{a^5}{120} \right).$$

Отсюда

$$\theta_0 = -\frac{1 q a^3}{2 EY} \left(\frac{8}{12 \cdot 6} - \frac{1}{120} \right) = -\frac{37 q a^3}{720 EY}.$$

Так как начало координат совпадает с правым опорным сечением, $\theta_B = \theta_0 = -\frac{37 q a^3}{720 EY}$.

При принятой левой системе осей координат знак "минус" означает, что сечение повернется против часовой стрелки.

Универсальное уравнение упругой линии с учетом значения θ_0 запишется в виде

$$\delta = -\frac{37 q a^3}{720 EY} z + \frac{1}{EY} \left[R_B \frac{(z-0)^3}{3!} - \frac{q}{2} \frac{(z-a)^5}{5!} \right].$$

Подставляя в это уравнение $z = a$, получаем прогиб в середине пролета

$$\delta_c = -\frac{37 q a^4}{720 EY} + \frac{1}{EY} \frac{1}{12} q a \frac{a^3}{6} = -\frac{27 q a^4}{720 EY}.$$

Уравнение углов поворота получаем из универсального дифференцированием последнего

$$\theta = -\frac{37 q a^3}{720 EY} + \frac{1}{EY} \left(R_B \frac{(z-0)^2}{2!} - \frac{q}{2} \frac{(z-a)^4}{4!} \right).$$

Подставляя в это уравнение $z = 2a$, получаем угол поворота левого опорного сечения

$$\theta_A = -\frac{37 q a^3}{720 EY} + \frac{1}{EY} \left(\frac{1}{12} q a \frac{(2a)^2}{2} - \frac{q}{2} \frac{a^4}{24} \right) = \frac{53 q a^3}{720 EY}.$$

При принятой левой системе осей координат положительное значение θ_A свидетельствует о повороте сечения по часовой стрелке.

6. Статически неопределимые балки

Статически неопределимыми называются балки, для которых число реакций больше числа уравнений равновесия. Это означает, что на балку наложено связей больше, чем необходимо для ее фиксации (на плоскости или в пространстве) как абсолютно жесткого тела. Под связью понимается опорное устройство, дающее одну составляющую реакций. Связи, наложенные на балку помимо необходимых (трех), называются "лишними", а соответствующие им реакции - "лишними" реакциями.

Разница между числом реакций и числом уравнений равновесия называется степенью статической неопределимости.

Раскрытие статической неопределимости означает определение "лишних" реакций.

Умение определять перемещения в случае статически неопределимых балок необходимо не столько для определения собственно перемещений, сколько для раскрытия статической неопределимости, так как без раскрытия статической неопределимости невозможно не только определить перемещения, но и оценить прочность балки.

При раскрытии статической неопределимости путем отбрасывания "лишних" связей и приложения соответствующих им "лишних" реакций образуется так называемая эквивалентная балка, для которой записываются условия равенства нулю перемещений на "лишних" связях (опорах). В результате к уравнениям равновесия добавляются уравнения перемещений, число которых равно степени статической неопределимости.

При записи уравнений перемещений могут быть использованы ранее рассмотренные методы, если в число заданных внешних сил включить "лишние" реакции. После раскрытия статической неопределимости перемещения могут быть найдены теми же методами, если их применить к эквивалентной балке.

Пример 9

Раскрыть статическую неопределимость балки (рис. II), если балка имеет постоянную жесткость, $P = qa$.

Степень статической неопределимости данной балки равна единице. Поэтому для образования эквивалентной балки необходимо отбросить одну из опор, так как каждая из них дает одну реакцию, а

действие этой опоры заменить реакцией. Предположим, что "лишней" является опора A , тогда эквивалентная балка будет иметь вид, изображенный на рис. I2.

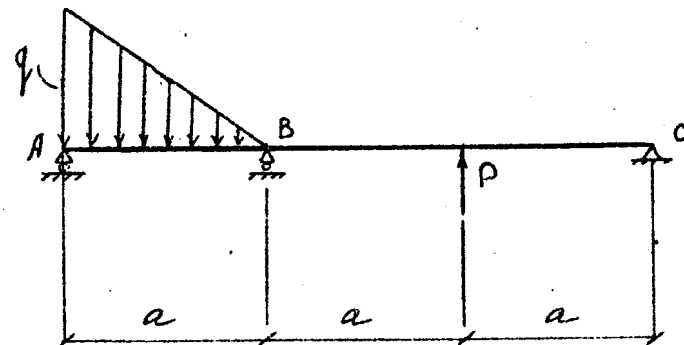


Рис. II

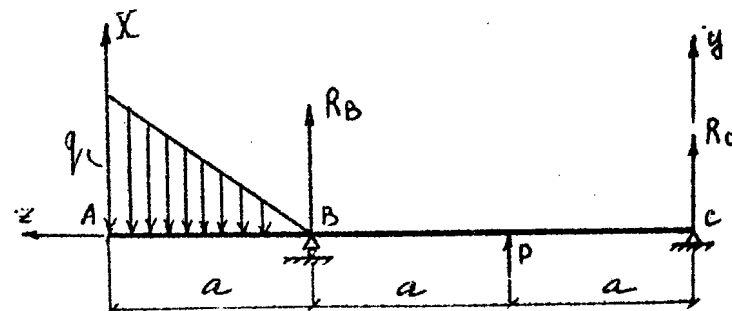


Рис. I2

На рис. I2 "лишняя" реакция обозначена буквой X , чтобы подчеркнуть то, что она подлежит определению при раскрытии статической неопределимости.

Для эквивалентной балки необходимо, чтобы перемещение сечения A было равно нулю, так как в заданной балке это сечение опорное.

2

При определении перемещения сечения A рационально начало координат выбрать в правом концевом сечении C .

Из уравнений равновесия для эквивалентной балки получаем

$$R_C = \frac{Xa}{2a} - \frac{\frac{1}{2}qa \cdot \frac{3}{2}a}{2a} - \frac{P}{2} = \frac{1}{2}X - \frac{1}{6}qa - \frac{1}{2}qa = \frac{1}{2}X - \frac{2}{3}qa$$

$$R_B = -X + \frac{1}{2}qa - \frac{Xa}{2a} + \frac{\frac{1}{2}qa \cdot \frac{3}{2}a}{2a} - \frac{P}{2} = -X - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}qa + \frac{1}{6}qa - \frac{1}{2}qa = -\frac{3}{2}X + \frac{1}{6}qa$$

Универсальное уравнение изогнутой оси эквивалентной балки при $z = -\frac{z}{2}$

$$\delta = \delta_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left[R_C \frac{(z-0)^3}{3!} + P \frac{(z-a)^3}{3!} + R_B \frac{(z-2a)^3}{3!} - \frac{q}{2} \frac{(z-2a)^5}{5!} \right]$$

Слагаемое, содержащее X опущено, так как оно справедливо при $z > 3a$.

Граничные условия:

1. При $z = 0$, $\delta = 0$.
2. При $z = 2a$, $\delta = 0$.

Из первого граничного условия следует, что $\delta_0 = 0$. Подставляя второе граничное условие в универсальное уравнение с учетом значений R_C , R_B и P , получаем

$$0 = \theta_0 \cdot 2a + \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2}X - \frac{2}{3}qa \right) \frac{a^3}{3!} + qa \frac{a^3}{3!} \right]$$

Решая это уравнение относительно θ_0 , находим

$$\theta_0 = -\frac{1}{2aEJ} \left(\frac{1}{3}Xa^3 - \frac{2}{3}qa^3 + \frac{1}{6}qa^3 \right) = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3}Xa^2 - \frac{13}{36}qa^2 \right)$$

Подставляя значения θ_0 , R_C , R_B и P в универсальное уравнение, получаем

$$\delta = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3}Xa^2 - \frac{13}{36}qa^2 \right) \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2}X - \frac{2}{3}qa \right) \frac{(z-0)^3}{3!} + qa \frac{(z-a)^3}{3!} + \left(-\frac{3}{2}X + \frac{1}{6}qa \right) \frac{(z-2a)^3}{3!} - \frac{q}{2} \frac{(z-2a)^5}{5!} \right]$$

При $z = 3a$ получаем прогиб в сечении A

$$\delta_A = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3}Xa^2 - \frac{13}{36}qa^2 \right) \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2}X - \frac{2}{3}qa \right) \frac{(3a)^3}{3!} + qa \frac{(2a)^3}{3!} + \left(-\frac{3}{2}X + \frac{1}{6}qa \right) \frac{a^3}{3!} - \frac{q}{2} \frac{a^5}{5!} \right]$$

Приравняв δ_A к нулю, получаем уравнение для определения X .

$$-Xa^3 + \frac{39}{36}qa^4 + \frac{11}{12}Xa^3 - \frac{54}{18}qa^4 + \frac{1}{3}qa^4 - \frac{1}{4}Xa^3 + \frac{1}{36}qa^4 - \frac{1}{120}qa^4 = 0$$

Отсюда $X = \frac{203}{360} qa$

При необходимости прогиб любого сечения заданной балки можно определить по универсальному уравнению упругой линии, после подстановки в последнее значения найденной "лишней" реакции X .

Пример Ю

Для балки (рис. 13) определить прогиб сечения, где приложена сила P , если балка изготовлена из двутавра К27, $P = 9a$, $q = 20$ кН/м, $a = 2$ м.

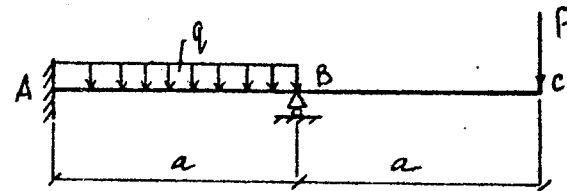


Рис. 13

Степень статической неопределенности балки равна единице. Считая "лишней" опору B , получаем эквивалентную систему, представленную на рис. 14.

Из уравнений равновесия $R_A = 2qa - X$

$$M_A = qa \frac{a^2}{2} - Xa + P \cdot 2a - \frac{1}{2}qa^2 \cdot 2a - Xa = \frac{1}{2}qa^2 - Xa$$

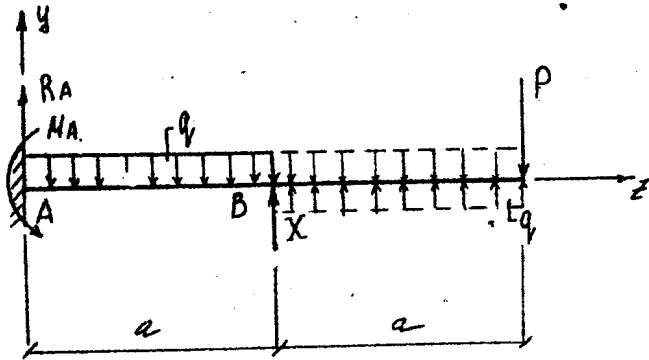


Рис. 14

Выбрав начало координат на левом конце эквивалентной балки и сделав преобразование распределенной нагрузки, запишем универсальное уравнение упругой линии

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EY} \left[M_A \frac{(z-0)^2}{2!} + R_A \frac{(z-0)^3}{3!} - q \frac{(z-0)^4}{4!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} + X \frac{(z-a)^3}{3!} \right]$$

Уравнение углов поворота

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EY} \left[-M_A \frac{(z-0)}{1!} + R_A \frac{(z-0)^2}{2!} - q \frac{(z-0)^3}{3!} + q \frac{(z-a)^3}{3!} + X \frac{(z-a)^2}{2!} \right]$$

Граничные условия:

1. При $z = 0$, $\mathcal{V} = 0$.

2. При $z = 0$, $\theta = 0$.

Из граничных условий следует $\mathcal{V}_0 = \theta_0 = 0$. Последнее очевидно, так как начало координат расположено в жестко заделанном сечении.

Подставляя в универсальное уравнение \mathcal{V}_0 , θ_0 , R_A , M_A , при $z = a$ определяем прогиб сечения B

$$\mathcal{V}_B = \frac{1}{EY} \left[-\left(\frac{5}{2} qa^2 - Xa\right) \frac{a^2}{2} + (2qa - X) \frac{a^3}{6} - \frac{qa^4}{24} \right]$$

Поскольку сечение B в заданной балке совпадает с опорным, $\mathcal{V}_B = 0$. В результате получаем уравнение для определения "лишней" реакции X.

$$-\frac{5}{24} qa^4 + \frac{1}{2} Xa^3 + \frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} Xa^3 - \frac{1}{24} qa^4 = 0.$$

$$\text{Отсюда } X = \frac{23}{8} qa.$$

Подставляя в универсальное уравнение значения \mathcal{V}_0 , θ_0 , R_A , M_A , X, получаем

$$\mathcal{V} = \frac{1}{EY} \left[-\left(\frac{5}{2} qa^2 - \frac{23}{8} qa^2\right) \frac{(z-0)^2}{2!} + (2qa - \frac{23}{8} qa) \frac{(z-0)^3}{3!} - q \frac{(z-0)^4}{4!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} + \frac{23}{8} qa \frac{(z-a)^3}{3!} \right]$$

После преобразований

$$\mathcal{V} = \frac{1}{EY} \left[\frac{3}{8} qa^2 \frac{(z-0)^2}{2!} - \frac{7}{8} qa \frac{(z-0)^3}{3!} - q \frac{(z-0)^4}{4!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} + \frac{23}{8} qa \frac{(z-a)^3}{3!} \right]$$

При $z = 2a$ получаем выражение искомого прогиба сечения C

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{EY} \left[\frac{3}{8} qa^2 \frac{(2a)^2}{2} - \frac{7}{8} qa \frac{(2a)^3}{6} - q \frac{(2a)^4}{24} + q \frac{a^4}{24} + \frac{23}{8} qa \frac{a^3}{6} \right] = -\frac{27 qa^4}{48 EY}$$

Из сортамента для двутавра №27 $J_y = J_x = 5010 \text{ см}^4$. Для стали $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Подставляя в выражение для \mathcal{V}_C численные значения, получаем

$$\mathcal{V}_C = -\frac{27 \cdot 20 \cdot 10^4}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^8} = -9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,9 \text{ см}$$

СОДЕРЖАНИЕ

1. Изогнутая ось балки	3
2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки	4
3. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси одночастковой балки	6
Пример 1	6
Пример 2	8
4. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси многочастковой балки	9
Пример 3	9
Пример 4	12
5. Метод начальных параметров	14
Пример 5	16
Пример 6	22
Пример 7	23
Пример 8	28
6. Статистически неопределимые балки	30
Пример 9	30
Пример 10	33

Радченко Евгений Александрович
Петрова Светлана Борисовна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе по дисциплинам
«Механика материалов и конструкций»,
«Сопротивление материалов», «Прикладная физика»,
«Техническая механика»
для студентов всех специальностей

Второе издание, исправленное

Редакторы

Т.В. Белянкина, Э.С. Литвинова

Корректор

Н.И. Михайлова

Подписано в печать 03.03.08. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,33. Печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,25
Тираж 700 экз. Заказ № 76. С 58
