

25888

**Федеральное агентство по образованию**  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

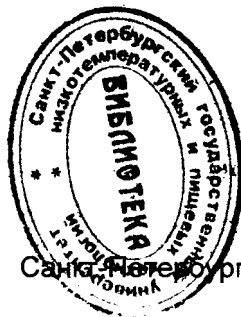


**Кафедра технической механики  
и прочности**

**НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ  
СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ**  
**ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ**

Методические указания к практическим занятиям  
и самостоятельной работе по дисциплинам  
«Механика материалов и конструкций»,  
«Сопротивление материалов», «Прикладная физика»  
для студентов специальностей  
140401, 140504, 190603, 260601, 260602  
и направлений 140400, 140500, 150400

Второе издание, исправленное



Санкт-Петербург 2008

Улитин В.В. Напряженное и деформированное состояние в точке. Теории прочности: Метод. указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплинам «Механика материалов и конструкций», «Сопrotивление материалов», «Прикладная физика» для студентов спец. 140401, 140504, 190603, 260601, 260602 и направлений 140400, 140500, 150400. 2-е изд., испр. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 26 с.

Даны рекомендации для оценки прочности деталей машин и элементов конструкций в условиях сложного напряженного состояния.

Рецензент  
Профессор Д.П. Малявко

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

© Ленинградский технологический институт холодильной промышленности, 1988

© Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, 2008

## ВВЕДЕНИЕ

Напряженное состояние (НС) в какой-либо точке нагруженного тела характеризуется совокупностью напряжений, возникающих на множестве площадок, проходящих через эту точку.

Для анализа напряженного состояния в данной точке в окрестности ее обычно выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда с гранями  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и затем "стягивают" его в точку. В пределе все грани проходят через исследуемую точку и напряжения в соответствующих секущих плоскостях можно рассматривать как напряжения в исследуемой точке.

Полный вектор напряжения на каждой секущей площадке можно разложить на 3 компонента:  $\sigma_i$ ;  $\tau_{ij}$ ;  $\tau_{ik}$ .

Таким образом, в общем случае на гранях элемента могут действовать 9 компонентов напряжений (рис.1).

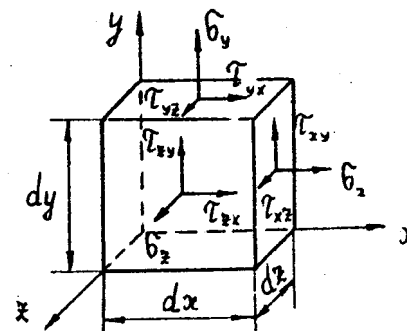


Рис. 1.

Для того, чтобы не затемнять чертеж, компоненты напряжений на рис.1 нанесены лишь на лицевые грани. На противоположных гранях эти компоненты будут той же величины, но обратными по направлениям.

Совокупность этих напряжений определяет вид напряженного состояния и составляет тензор

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Если компоненты тензора  $T$  известны, то можно вычислить напряжения на любой другой наклонной площадке, проходящей через исследуемую точку.

Система сил, приложенных к элементу, уравновешена. Первые три уравнения равновесия ( проекции сил на оси ) удовлетворяются тождественно. Оставшиеся три уравнения ( суммы моментов относительно каждой из осей ) выполняются, если касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных гранях, равны между собой и направлены либо к общему ребру, либо от ребра

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2)$$

Зависимости (2) называют законом парности касательных напряжений. Следствие из этого закона: из девяти компонентов напряженного состояния независимыми являются только шесть.

Если ориентацию граней параллелепипеда изменить, то действующие на них напряжения также будут изменяться. При этом можно отыскать такое угловое положение граней параллелепипеда, при котором касательные напряжения на них обратятся в нуль. Эти площадки называют главными. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называют главными напряжениями и обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При этом индексы расставляют так, чтобы выполнялось условие

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (3)$$

Тензор напряжений при этом имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Различают три вида напряженного состояния (рис. 2):

1. Объемное напряженное состояние (трехосное), когда на главных площадках действуют отличные от нуля три главных напряжения (рис. 2, а).
2. Плоское напряженное состояние (двухосное), когда одно из главных напряжений равно нулю (рис. 2, б).

3. Линейное напряженное состояние (одноосное), когда только одно из главных напряжений не равно нулю (рис. 2, в).

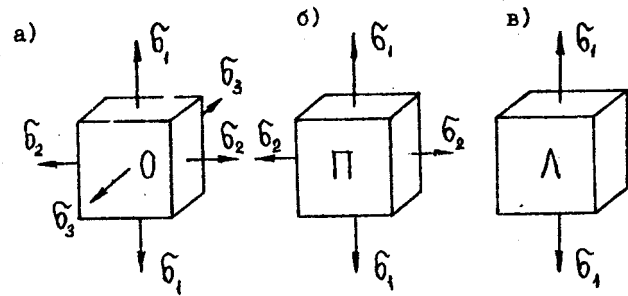


Рис. 2

Для того, чтобы установить, находится ли материал тела в данной точке в линейном, плоском или объемном напряженном состоянии, необходимо найти главные напряжения из кубического уравнения

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты этого уравнения  $I_1, I_2$  и  $I_3$  представляют собой инварианты напряженного состояния. Их величина не зависит от ориентации в пространстве граней параллелепипеда

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Из уравнения (4) видно, что если  $I_3 = 0$ , то имеет место плоское напряженное состояние.

Если  $I_2 = I_3 = 0$ , то имеет место линейное напряженное состояние.

После того, как определен вид напряженного состояния и

величина главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , можно оценить прочность по одному из критериев прочности.

Если требуется определить величину максимальных касательных напряжений, которые действуют, как известно из теории, на площадках, наклоненных под углом  $\alpha/4$  к главным площадкам с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , то их можно найти из формулы

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5)$$

### ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Оно возникает, например, при осевом растяжении (сжатии) (рис. 3), чистом изгибе.

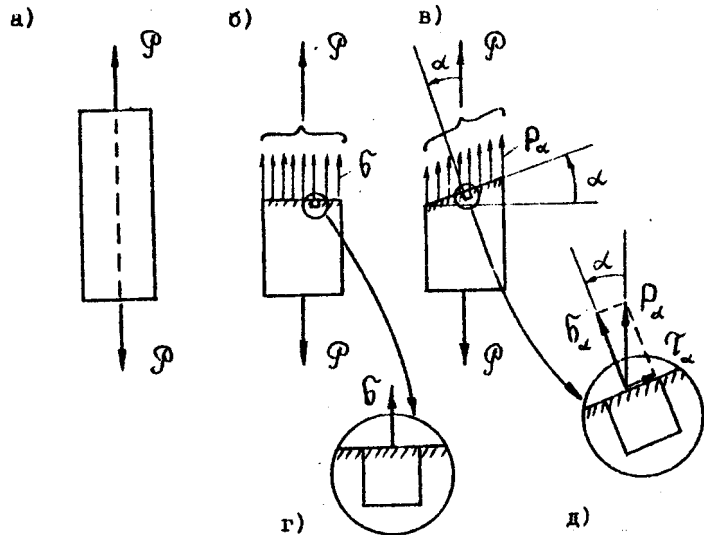


Рис. 3

При этом виде НС нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке можно вычислить по формулам

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (6)$$

$$\tau_\alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha, \quad (7)$$

где

$\sigma$  - величина главного напряжения;

$\alpha$  - угол между нормалью к наклонной площадке и нормалью к главной площадке.

Для того, чтобы правильно определить величину и направление напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ , в сопротивлении материалов приняты следующие правила знаков:

- нормальное напряжение считается положительным, если вектор  $\sigma$  совпадает с направлением внешней нормали к площадке (растяжение);
- касательное напряжение считается положительным, если вектор  $\tau$  стремится повернуть элемент по часовой стрелке;
- за положительное направление угла  $\alpha$  принимает направление против часовой стрелки.

На рис. 3, д изображены положительные  $\sigma_2, \tau_2$  и  $\alpha$ .

### ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Этот вид НС чаще всего встречается в задачах сопротивления материалов. Один из примеров, когда материал находится в условиях плоского НС, показан на рис. 4, а.

Если на торцевой поверхности диска мысленно вырезать элементарный параллелепипед так, как это показано на рис. 4, в, то на его боковых гранях будут действовать главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Если же вырезать параллелепипед наклонными плоскостями, то на его гранях кроме нормальных будут действовать и касательные напряжения (рис. 4, б). При изменении угла наклона секущих плоскостей напряжения на боковых гранях элемента также изменятся.

Рассмотрим общий случай плоского напряженного состояния.

Будем считать, что положение одной из главных площадок известно (фронтальная грань элемента), а положение двух других главных площадок и величина главных напряжений, действующих на них, пока не известны (рис. 5, а).

Для упрощения рисунка элемент обычно изображают плоским (рис. 5, б)

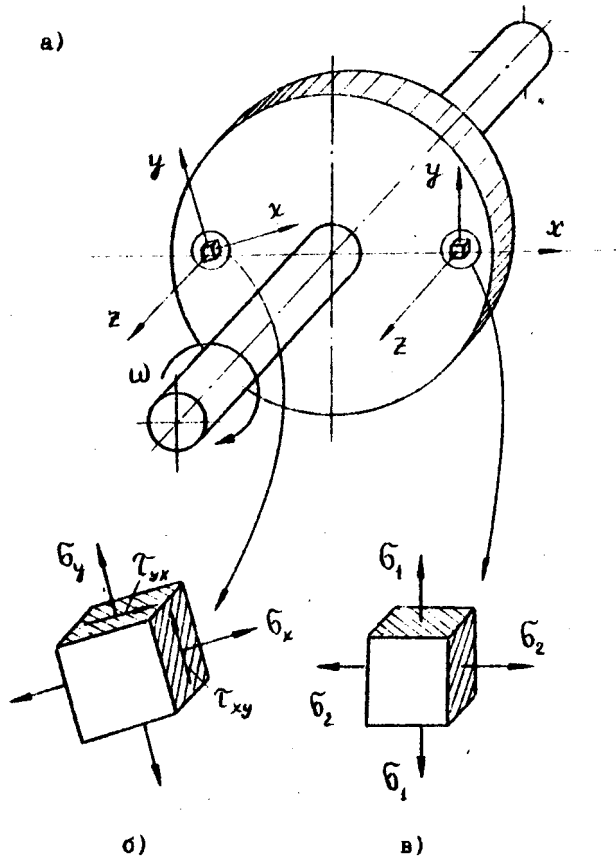


Рис. 4

Общая задача состоит в установлении зависимостей, по которым будут изменяться напряжения на боковых гранях элемента при изменении ориентации секущих площадок (рис. 5, в).

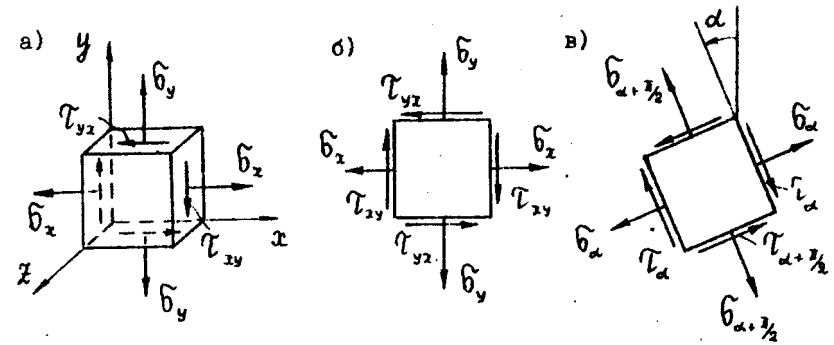


Рис. 5

Как следует из теории, эти зависимости имеют следующий вид:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (8)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (9)$$

По своей структуре они полностью аналогичны уравнениям для моментов инерции плоской фигуры при повороте координатных осей

$$J_{x_{\alpha}} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{x_{\alpha}y_{\alpha}} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

Это позволяет все закономерности, установленные ранее для моментов инерции относительно пучка осей, отнести к напряжениям на семействе площадок, наклоненных к исходным осям, а именно:

1. Сумма нормальных напряжений, действующих на двух взаимно перпендикулярных площадках, инвариантна по отношению к наклону этих площадок:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \text{const.}$$

2. Напряжения, действующие на главных площадках, (т.е. главные напряжения) есть экстремальные напряжения.

3. Положение главных площадок (угол  $\alpha_0$ ) и величину главных напряжений, действующих на них, можно определить по формулам, аналогичным тем, которые получены ранее при определении положения главных осей и главных моментов инерции плоской фигуры:

$$\text{tg } 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (10)$$

$$\sigma_{\text{гла}} = \sigma_{\text{max/min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (11)$$

Формулу (11) легко получить из уравнения (4) для случая плоского напряженного состояния, при котором  $J_3 = 0$ .

Используя формулы (8) и (9), можно решить задачу о нахождении величины нормальных и касательных напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ , действующих на наклонной площадке, параллельной оси  $Z$ , а с помощью формул (10) и (11) — задачу о нахождении положения главных площадок и величины главных напряжений, действующих на них.

#### ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

В общем случае напряженного состояния на гранях элемента действуют нормальные  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и касательные  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  напряжения (рис. 1).

Нормальные напряжения вызывают линейные деформации ребер элемента  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ . От действия касательных напряжений возникают угловые деформации  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  в координатных плоскостях. (Одна из деформаций  $\gamma_{xy}$ , возникающая от действия попарно одинаковых напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ , показана на рис. 6)

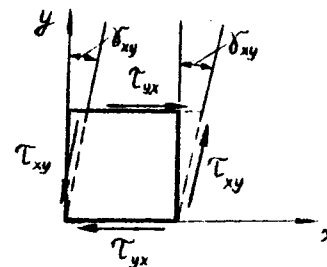


Рис. 6

Совокупность линейных и угловых деформаций возле рассматриваемой точки в различных направлениях характеризует деформированное состояние в точке. Деформированное состояние характеризуется тензором

$$T_1 = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Анализ деформированного состояния показывает полную аналогию математических зависимостей между компонентами напряженного и деформированного состояний. Так, например, среди множества осей, проведенных через исследуемую точку, существуют три взаимно-перпендикулярные оси, в системе которых отсутствуют угловые деформации. Эти оси называют главными осями деформированного состояния, а линейные деформации в направлении этих осей  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — главными деформациями. В изотропном материале направления главных деформаций и главных напряжений совпадают.

Главные деформации определяются из кубического уравнения

$$\epsilon^3 - J_1 \epsilon^2 + J_2 \epsilon - J_3 = 0, \quad (13)$$

коэффициентами которого являются инварианты деформированного состояния:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$J_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 =$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Первый инвариант  $J_1$  представляет собой относительное изменение объема

$$J_1 = e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (14)$$

Величина  $e$  не меняется при повороте осей координат. Связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] ; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] ; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] ; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Зависимости (15) называют обобщенным законом Гука.

Сложив левые и правые части первых трех равенств, получим выражение для объемной деформации

$$e = 3 \cdot \frac{1-2\mu}{E} \cdot p, \quad (16)$$

где  $p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  — среднее напряжение.

Формулу (16) называют объемным законом Гука.

#### УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

При деформации элемента внешние силы производят работу  $dA$ ,

которая идет на увеличение потенциальной энергии  $dU_0$ , накапливаемой материалом. Если энергию  $dU_0$  отнести к единице объема, то получим удельную потенциальную энергию деформации  $u_0$ .

$$u_0 = \frac{dU_0}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]. \quad (17)$$

При деформации меняется объем и форма элемента. В связи с этим удельную потенциальную энергию  $u_0$  обычно представляют в виде двух составляющих

$$u_0 = u_{ov} + u_{of},$$

$$\text{где } u_{ov} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad - \text{удельная потенциальная энергия изменения объема;}$$

$$u_{of} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad - \text{удельная потенциальная энергия изменения формы.}$$

#### КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

При сложном напряженном состоянии (двухосном или трехосном) оценку прочности в опасной точке производят по одному из критериев прочности. Выбор критерия прочности связан с видом разрушения материала в данных условиях, который зависит от многих факторов: вида НДС, скорости нагружения, температуры, физических и механических свойств материала и т.д.

В основном различают два вида разрушения: хрупкое и пластическое (вязкое). Первое характеризуется появлением разрывов, трещин; а второе начинается с возникновения пластических деформаций. В соответствии с этим различают два вида сопротивления материала разрушению: сопротивление отрыву и сопротивление сдвигу.

Если сопротивление материала отрыву выше, чем сдвигу, то нарушение прочности выражается прежде всего в появлении пластических деформаций. Разрушение в этом случае является пластическим.

Если материал сопротивляется сдвигу лучше, чем отрыву, то нарушение прочности выражается в трещинообразовании, разрыве волокон без предшествующих пластических сдвигов, так что разрушение наступает внезапно и является хрупким.

В соответствии с этим применяют критерии разрушения и критерии пластичности.

#### Критерии разрушения

Согласно первому критерию (первой теории прочности) прочность обеспечивается, если наибольшее из главных напряжений не превосходит величины  $[\sigma]$ . Условие прочности в этом случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \text{или } \sigma_{\max}^I &= \sigma_1 \leq [\sigma]_p \\ \sigma_{\max}^I &= |\sigma_3| \leq [\sigma]_c, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_c$  - допускаемые напряжения, полученные из опытов при линейном НС, т.е. при обычном растяжении (сжатии).

Согласно второму критерию (второй теории прочности) прочность обеспечивается, если наибольшая относительная деформация не превосходит допускаемой величины  $[\varepsilon]$ . Условие прочности имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \text{или } \varepsilon_1 &\leq [\varepsilon]_p \\ |\varepsilon_3| &\leq [\varepsilon]_c, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $[\varepsilon]_p$  и  $[\varepsilon]_c$  - допускаемые значения относительных деформаций, полученные из опытов при линейном напряженном состоянии.

Условие прочности (19) можно записать иначе, выразив деформации через напряжения

$$\left. \begin{aligned} \text{или } \sigma_{\max}^I &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p \\ \sigma_{\max}^I &= |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \leq [\sigma]_c. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Критерии прочности (18) и (20) применяются сравнительно редко, так как они пригодны лишь для хрупких материалов. Большинство же деталей машин и элементов конструкций изготавливают из пластичных материалов. Для них используют другие критерии.

#### Критерии пластичности

Согласно критерию максимальных касательных напряжений (третьей теории прочности) прочность обеспечивается, если максимальное касательное напряжение не превосходит величины  $[\tau]$ , т.е.

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (21)$$

Условие прочности (21) можно записать в виде

$$\sigma_{\max}^{\text{II}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (22)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  - наибольшее и наименьшее из главных напряжений;  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение для данного материала, величина которого определяется из опытов при линейном НС.

На практике широко применяется еще один критерий пластичности - критерий максимальной энергии формоизменения (энергетическая теория прочности). Условие прочности в этом случае имеет вид

$$U_{\text{оф}} \leq [U_{\text{оф}}]. \quad (23)$$

Выразив  $U_{\text{оф}}$  и  $[U_{\text{оф}}]$  через главные напряжения, условие прочности (23) можно придать вид

$$\sigma_{\max}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma], \quad (24)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения;  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение при одноосном напряженном состоянии.

Для оценки прочности материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, применяют критерий прочности Мора (теорию предельных состояний). Условие прочности в этом случае

$$\sigma_p^{\text{M}} = \sigma_1 - \kappa \sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad (25)$$

где  $\kappa = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тс}}}$  - безразмерный коэффициент;  
 $\sigma_{\text{тр}}, \sigma_{\text{тс}}$  - пределы текучести при растяжении и сжатии для данного материала.



Таким образом, вычислив главные напряжения при сложном напряженном состоянии, и зная величину допустимых напряжений при линейном напряженном состоянии, можно оценить прочность материала в данной точке.

Прежде чем переходить к решению задач о напряженном и деформированном состоянии, следует тщательно проработать главы VII и VIII в учебнике В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1979, - С. 227-277.

#### ПРИМЕР 1

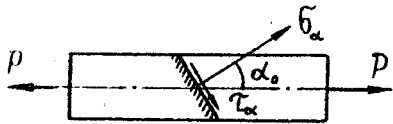


Рис. 7

#### Решение:

напряженное состояние в данном случае является одноосным. Согласно формулам (6) и (7)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha_0,$$

$$\tau_{\alpha} = \sigma \sin \alpha_0 \cos \alpha_0.$$

Откуда

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}} = \frac{\sigma \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sigma \cos^2 \alpha_0} = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Значит

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{43,3}{75} = 0,577 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 30^\circ.$$

Напряжение  $\sigma_1$  в поперечном сечении стержня

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{\alpha}}{\cos^2 \alpha_0} = \frac{75}{\cos^2 30^\circ} = 100 \text{ МПа.}$$

Дано: в растянутом вдоль оси стержне (рис. 7) напряжения, действующие по одному из наклонных сечений, равны  $\sigma_{\alpha} = 75 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{\alpha} = 43,3 \text{ МПа}$ .

#### Требуется:

- определить угол  $\alpha$  между нормалью к сечению и осью стержня;
- вычислить напряжение  $\sigma_1$  в поперечном сечении.

#### ПРИМЕР 2

Дано: из нагруженной детали вырезан элемент, по грани которого действует напряжения

$\sigma_x = 40 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_y = -20 \text{ МПа}$ ;  
 $\tau_{xy} = -10 \text{ МПа}$ . Материал пластичный.  $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\mu = 0,3$ ;  
 $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ .

#### Требуется:

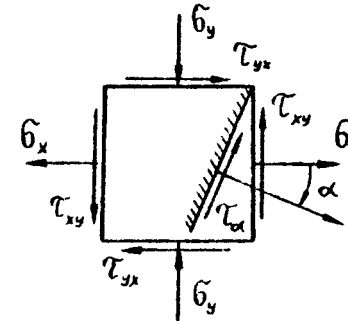


Рис. 8

- определить вид напряженного состояния;
- найти напряжения на площадке, нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с направлением  $\sigma_x$ ;

- определить положение главных площадок и вычислить величину главных напряжений, действующих на них;
- определить величину максимальных касательных напряжений;
- оценить прочность, используя соответствующую теорию прочности;
- вычислить относительные линейные деформации в направлении координатных осей;
- определить относительную объемную деформацию  $\epsilon$ ;
- вычислить удельную потенциальную энергию деформации  $U_0$ .

#### Решение:

I. Определение вида напряженного состояния.

Как видно из схемы рис. 8, на передней (фронтальной) грани  $\sigma = 0$  и  $\tau = 0$ . Отсутствие на этой грани касательных напряжений указывает на то, что эта площадка главная, а отсутствие на этой грани нормальных напряжений говорит о том, что одно из главных напряжений равно нулю. Значит, напряженное состояние является либо двухосным, либо одноосным. Установим вид напряженного состояния.

В рассматриваемом случае

$$I_3 = \begin{vmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 40 \cdot (-20) - 100 = -9 \cdot 10^2,$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y = 40 + (-20) = 20.$$

Так как  $J_3 = 0$ , а  $J_2 \neq 0$  и  $J_1 \neq 0$ , то напряженное состояние является двухосным (плоским).

2. Определение напряжений на площадке, наклоненной под углом  $\alpha$ .

Пусть  $\alpha = -30^\circ$  (рис. 8). Согласно формулам (8) и (9) имеем:

$$\sigma_\alpha = \frac{40 - 20}{2} + \frac{40 + 20}{2} \cdot \cos(-60^\circ) - (-10) \cdot \sin(-60^\circ) = 16,3 \text{ МПа},$$

$$\tau_\alpha = \frac{40 + 20}{2} \cdot \sin(-60^\circ) + (-10) \cdot \cos(-60^\circ) = -18,05 \text{ МПа}.$$

На рис. 8 стрелками показаны направления полученных напряжений с учетом их знака.

3. Определение положения главных площадок и величины главных напряжений.

Величина одного из главных напряжений уже определена

$$\sigma_{rA} = 0.$$

Величину двух других определяем с помощью формулы (II).

$$\sigma_{rA} = \frac{40 - 20}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(40 + 20)^2 + 4(-10)^2} = 10 \pm 31,62 \text{ МПа}$$

Откуда имеем

$$\sigma_{\max} = 41,62 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -21,62 \text{ МПа}.$$

Согласно условию расстановки индексов (3) окончательно получаем:

$$\sigma_1 = 41,62 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -21,62 \text{ МПа}.$$

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0$  (рис. 9), величину которого вычисляем по формуле (10)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2 \cdot (-10)}{40 - (-20)} = 0,333.$$

Откуда

$$2\alpha_0 = 18^\circ 24',$$

$$\alpha_0 = 9^\circ 12'$$

Отложив угол  $\alpha_0$  с учетом его знака от направления  $\sigma_x$ , получим направление, вдоль которого действует напряжение  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  (рис. 9).

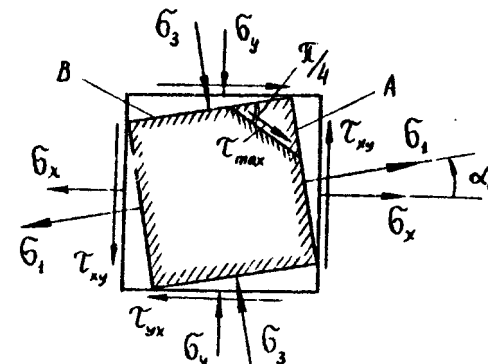


Рис. 9

Найденное направление определяет положение двух взаимно перпендикулярных главных площадок А и В. На одной из них действует  $\sigma_1$ , на другой  $\sigma_3$ . Третья главная площадка совпадает с фронтальной плоскостью (плоскостью чертежа). На ней  $\sigma_2 = 0$ .

4. Определение наибольших касательных напряжений.

Используя формулу (5), находим

$$\max \tau = \frac{41,62 - (-21,62)}{2} = 31,62 \text{ МПа}.$$

Наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (рис. 9).

5. Вычисление расчетных напряжений по критериям прочности.

По условию задачи-материал пластичный. Значит, для оценки прочности нужно воспользоваться критериями пластичности, из кото-

рык чаще всего применяют критерий максимальных касательных напряжений и критерий предельного значения энергии формоизменения.

Условие прочности согласно критерию максимальных касательных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 41,62 - (-21,62) = 62,24 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} < [\sigma].$$

Прочность обеспечена.

Условие прочности согласно критерию предельного значения энергии формоизменения:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(41,62 - 0)^2 + [0 - (-21,62)]^2 + (-21,62 - 41,62)^2]} = 55,67 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} < [\sigma].$$

Прочность обеспечена.

6. Вычисление относительных линейных деформаций  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ .

Подставив заданные значения  $E$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  в формулы (15), найдем численные значения искомых величин

$$\epsilon_x = \frac{1}{1 \cdot 10^5} \cdot [40 - 0,3(0 - 20)] = 4,6 \cdot 10^{-4},$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{1 \cdot 10^5} \cdot [-20 - 0,3(40 + 0)] = -3,2 \cdot 10^{-4},$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{1 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0,3(40 - 20)] = -0,6 \cdot 10^{-4}.$$

7. Определение относительной объемной деформации.

Эту величину можно вычислить по формуле (14) или по формуле (16)

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (4,6 - 3,2 - 0,6) \cdot 10^{-4} = 0,8 \cdot 10^{-4}$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-0,3}{2 \cdot 10^5} (40 - 20 + 0) = 0,8 \cdot 10^{-4}$$

8. Вычисление удельной потенциальной энергии деформации  $u_0$ .

Подставив величины  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  в формулу (17), определим удельную потенциальную энергию упругой деформации  $u_0$ .

$$u_0 = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11}} \cdot [41,62^2 + 0 + (-21,62)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot (-41,62 \cdot 21,62)] = 2,74 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3.$$

ПРИМЕР 3

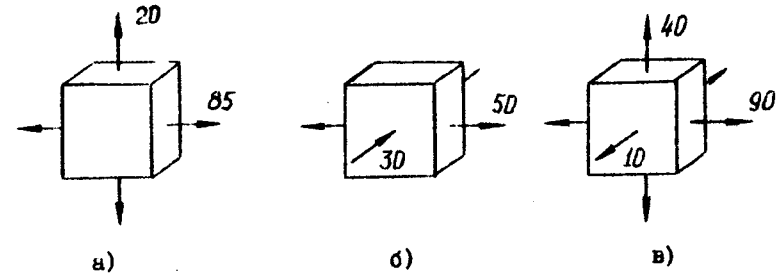


Рис. 10.

Дано: из различных точек нагруженного тела вырезаны элементарные параллелепипеды, на гранях которых действуют напряжения, показанные на рис.10. Напряжения заданы в мегапаскалях. Материал пластичный.

Требуется: определить, какое из трех напряженных состояний является наиболее опасным.

Решение:

определим величину  $\sigma_{\text{экв}}$  по III теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Для состояния а):  $\sigma_1 = 85 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 20 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_3 = 0$ .

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 85 - 0 = 85 \text{ МПа}.$$

Для состояния б):  $\sigma_1 = 50 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -30 \text{ МПа}$ .

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 50 - (-30) = 80 \text{ МПа}.$$

Для состояния в):  $\sigma_1 = 90 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 40 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_3 = 10 \text{ МПа}$ .

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 90 - 10 = 80 \text{ МПа}.$$

Значит, наиболее опасным является состояние а). Состояния б) и в) равноопасны.

#### ПРИМЕР 4

Дано: в наиболее опасной точке чугунной детали главные напряжения имеют величину  $\sigma_1 = 15 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = -40 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_3 = -60 \text{ МПа}$ . Известно, что для данной марки чугуна  $[\sigma]_p = 30 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_c = 100 \text{ МПа}$ .

Требуется: проверить прочность.

Решение:

поскольку для данного материала  $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$ , следует применить теорию прочности Мора (формулу (25)).

Расчетное напряжение

$$\sigma_p^{\text{M}} = \sigma_1 - k \sigma_3 = 15 - \frac{30}{100} \cdot (-60) = 33 \text{ МПа}.$$

Поскольку  $\sigma_p^{\text{M}} > [\sigma]_p$ , то условие прочности не выполняется.

#### ПРИМЕР 5

Дано: в двух точках нагруженного тела, выполненного из пластичного материала, возникает напряженное состояние, изображенное на рис. II.

Требуется: установить какое напряженное состояние с точки зрения максимальных касательных напряжений является более опасным.

Решение:

для случая а), проводя секущие площадки, параллельные вектору  $\sigma$ , находим положение главных площадок (угол  $\alpha_0$ )

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{0-0} = -\infty \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

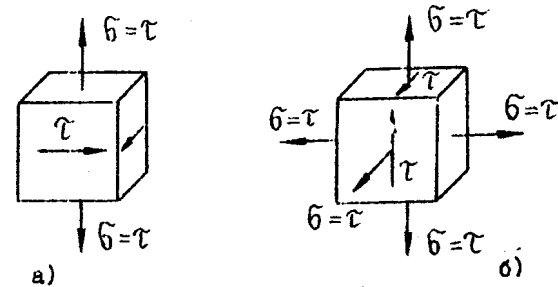


Рис. II

Главные напряжения:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{0+0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0+0)^2 + 4\tau^2} = \pm \tau.$$

Таким образом,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau$ ;  $\sigma_3 = -\tau$ .

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau.$$

Для случая б), поступая аналогичным образом, находим

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma + \sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + 4\tau^2} = \sigma \pm \tau = \tau \pm \tau.$$

Значит, главные напряжения для случая б)

$$\sigma_1 = 2\tau; \quad \sigma_2 = \tau; \quad \sigma_3 = 0.$$

Расчетное напряжение по III теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau - 0 = 2\tau.$$

Таким образом, состояния а) и б) равноопасны.

## ПРИМЕР 6

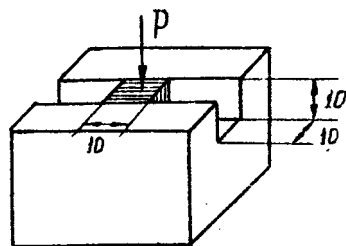


Рис. 12

Дано:  
в стальную недеформируе-  
мую плиту с пазом  
10x10 мм плотно, без  
зазора, вставлен кубик  
из дуралюминия, который  
сжимается силой  $P = 8$  кН  
(рис. 12). Упругие по-  
стоянные дуралюминия из-  
вестны:  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа,  
 $\mu = 0,33$ .

Требуется:  
определить главные напря-  
жения на гранях кубика.

Решение:

наибольшее сжимающее напряжение

$$\sigma_3 = -\frac{P}{F} = -\frac{8 \cdot 10^3}{10^2} = -80 \text{ Н/мм}^2 = -80 \text{ МПа.}$$

Поскольку деформация кубика в направлении, перпендикулярном продольной оси паза отсутствует, из обобщенного закона Гука (15) получаем

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]. \quad (*)$$

На боковых гранях кубика, перпендикулярных оси паза, напряжения отсутствуют, т.е.  $\sigma_1 = 0$ . Из уравнения (\*) находим

$$\sigma_2 = \mu \sigma_3 = 0,33 \cdot (-80) = -26,4 \text{ МПа.}$$

Итак, окончательно имеем

$$\sigma_1 = 0 ; \quad \sigma_2 = -26,4 \text{ МПа} ; \quad \sigma_3 = -80 \text{ МПа.}$$

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Виды напряженного состояния .....	4
Линейное напряженное состояние .....	6
Плоское напряженное состояние .....	7
Деформированное состояние в точке .....	10
Удельная потенциальная энергия деформации .....	12
Критерии пластичности и разрушения .....	13
Пример 1 .....	16
Пример 2 .....	17
Пример 3 .....	21
Пример 4 .....	22
Пример 5 .....	22
Пример 6 .....	24

Улитин Виктор Васильевич

## **НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ**

### **ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ**

Методические указания к практическим занятиям  
и самостоятельной работе по дисциплинам  
«Механика материалов и конструкций»,  
«Сопротивление материалов», «Прикладная физика»  
для студентов специальностей  
140401, 140504, 190603, 260601, 260602  
и направлений 140400, 140500, 150400

Второе издание, исправленное

*Редакторы*

Т.В. Белянкина, Н.М. Бахметьева

*Корректор*

Н.И. Михайлова

---

Подписано в печать 07.03.08. Формат 60×84 1/16  
Усл. печ. л. 1,63. Печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,56  
Тираж 450 экз. Заказ № 92. С 66

---

СПбГУНИПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9  
ИИК СПбГУНИПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9