

5924

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**



**Кафедра технической механики
и прочности**

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе по дисциплинам
«Механика материалов и конструкций»,
«Сопrotивление материалов», «Прикладная физика»,
«Техническая механика»
для студентов
всех специальностей

Второе издание, исправленное



Санкт-Петербург 2008

Петрова С.Б. Кручение призматических стержней: Метод. указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплинам «Механика материалов и конструкций», «Сопротивление материалов», «Прикладная физика», «Техническая механика» для студентов всех спец. 2-е изд., испр. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 33 с.

Приведен краткий теоретический материал и рассмотрены примеры расчета стержней круглого и прямоугольного сечений на прочность и жесткость. Даны примеры расчета цилиндрических пружин малого шага.

Рецензент
Профессор Д.П. Малявко

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

© Ленинградский технологический институт холодильной промышленности, 1987

© Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, 2008

1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПИРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k (рис.1,а).

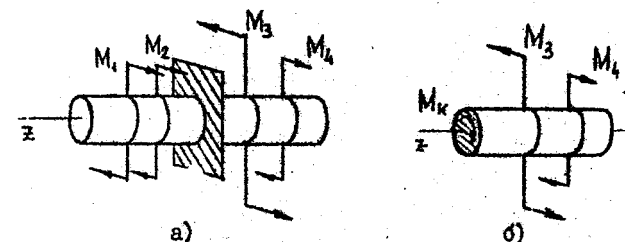


Рис.1

Деформация кручения возникает в стержне при нагружении его парами сил, действующими в плоскостях, перпендикулярных к его оси.

Величина крутящего момента M_k , действующего в данном поперечном сечении, определяется методом сечений (рис.1,б). Из условия равновесия отсеченной части стержня $\sum M_x = 0$ следует, что крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих по одну сторону от сечения.

Для наглядного представления о характере распределения и значении крутящих моментов по длине стержня строят эпюры (графики) этих моментов. При этом принимает следующее правило знаков для M_k . Если при взгляде на рассматриваемое сечение (со стороны внешней нормали) момент M_k направлен против часовой стрелки, то он считается положительным, если по часовой – отрицательным (рис.2).

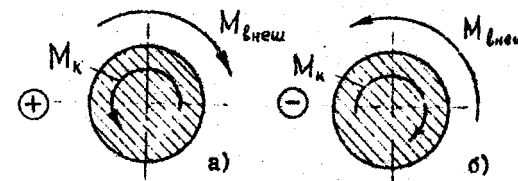


Рис.2

Примечание: приведенное правило знаков не является догматическим. Оно нужно лишь для того, чтобы построить эпюру M_K и найти из нее величину крутящего момента, действующего в любом сечении. В некоторых учебниках принято правило знаков, противоположное приведенному.

Покажем построение эпюры крутящих моментов на конкретных примерах.

Пример I.

Рассмотрим вал, опирающийся на подшипники A и B и вращающийся вокруг продольной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = const$ (рис.3,а). В ряде сечений по длине вала приложены внешние моменты (пары сил) M_1, M_2, M_3, M_4 . Момент M_2 - неизвестен. Требуется построить эпюру крутящих моментов.

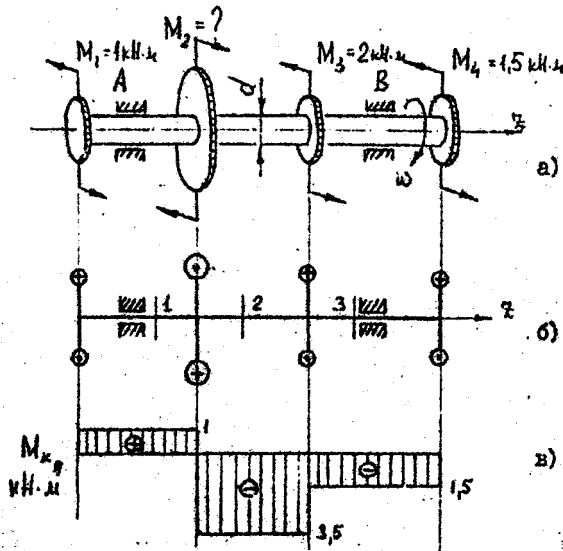


Рис.3

Решение:

I. Определяем величину M_2 . Так как $\omega = const$, то вал находится в динамическом равновесии. Значит

$$\sum M_z = 0; \quad M_2 - M_1 - M_3 - M_4 = 0;$$

$$M_2 = M_1 + M_3 + M_4 = 1 + 2 + 1.5 = 4.5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Разделим вал на грузовые участки. Границами участков прием поперечные сечения, в которых приложены внешние моменты M_i . Прономеруем грузовые участки 1, 2 и 3 (рис.3,б).

3. Определим величину M_K на каждом грузовом участке, используя метод сечений и правило знаков для M_K .

$$\text{I. участок: } M_{K1} = + M_1 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{II участок: } M_{K2} = M_1 - M_2 = 1 - 4.5 = 3.5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

(если рассмотреть равновесие правой части, то $M_{K2} = - M_3 - M_4 = -2 - 1.5 = -3.5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, значит величина и знак M_K не зависят от того, какую часть стержня рассматривать);

$$\text{III участок: } M_{K3} = - M_4 = -1.5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Строим эпюру M_K . Из нее видно, что наиболее опасным сечением будет любое сечение, расположенное на втором грузовом участке. Величину $|M_{K2}|$ на этом участке следует принять для расчета вала на прочность и жесткость (рис.3,в).

Пример 2.

Стержень круглого сечения нагружен внешними моментами $M_1 = -1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $M_2 = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и распределенным по длине моментом интенсивности $m = 1500 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{м}$ (рис.4,а). Длина стержня $l = 1 \text{ м}$.

Построить эпюру M_K и определить положение опасного сечения по длине стержня.

Решение:

Разбиваем стержень на два грузовых участка. Используя метод сечений и правило знаков для M_K , находим выражения для M_K на каждом из участков, идя со стороны свободного конца стержня (рис.4,б),

$$M_{K1} = - M_1 + mZ; \quad M_{K2} = - M_1 + mZ_2 + M_2.$$

Подставляя значение Z , соответствующее границам участков, получим

$$\text{I участок: } Z_1 = 0, \quad M_K = - M_1 = -1000 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$Z_2 = \frac{l}{2} = 0.5 \text{ м}, \quad M_K = - M_1 + m \frac{l}{2} =$$

$$= -1000 + 1500 \cdot 0.5 = 250 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

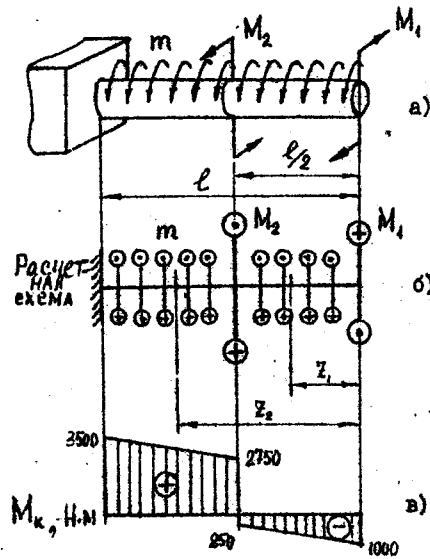


Рис. 4

II участок: $Z_2 = 0,5 \text{ м}, M_k = -M_1 + m \frac{l}{2} + M_2 =$
 $= -1000 + 1500 \cdot 0,5 + 3000 = 2750 \text{ Н·м};$
 $Z_2 = 1 \text{ м}, M_k = -M_1 + m l + M_2 =$
 $= -1000 + 1500 \cdot 1 + 3000 = 3500 \text{ Н·м}.$

По полученным данным строим эпюру M_k (рис.4,в). Из нее видно, что наиболее опасным является сечение заделки, где действует наибольший крутящий момент $|max M_k| = 3500 \text{ Н·м}.$

2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО СПЛОШНОГО И КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЙ

Стержни, работающие на кручение и вращающиеся вокруг продольной оси, называются валами.

На рис.5,а показан вал, нагруженный в торцевых сечениях двумя равными и противоположно направленными моментами M .

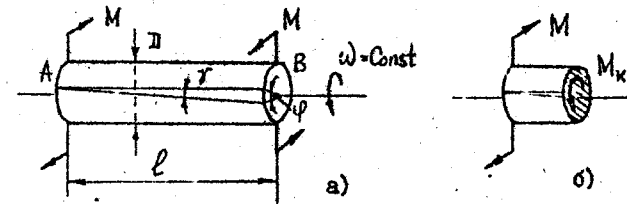


Рис.5

В поперечных сечениях вала действует крутящий момент M_k , численно равный $M: M_k = M$ (рис.5,б).

По физическому смыслу момент M_k представляет собой равнодействующий момент относительно оси вала (сех внутренних касательных сил в сечении (рис.6,а).

Чтобы рассчитать вал на прочность, нужно не только знать величину M_k , но и закон распределения касательных напряжений в сечении.

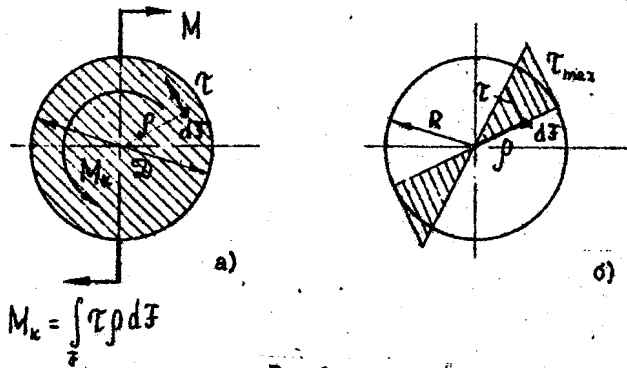


Рис. 6

Как следует из теории, касательные напряжения распределены по сечению неравномерно. Так, для валов круглого и кольцевого сечения касательные напряжения τ изменяются с удалением от центра по линейному закону (рис. 6.б)

$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p} \quad (1)$$

где ρ - текущее значение радиуса,
 $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$ - полярный момент инерции круглого сечения.

Наибольшие напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от центра, при $\rho = \rho_{\max} = R$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k \rho_{\max}}{J_p} = \frac{M_k}{J_p/R} = \frac{M_k}{W_p},$$

где $W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3$ - полярный момент сопротивления круглого сечения.

Условие прочности при кручении вала круглого сечения

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k|}{W_p} \leq [\tau], \quad (2)$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

При нагружении вала скручивающими моментами происходит его деформация. Поперечные сечения вала, плоские и перпендикулярные к его оси до деформации, поворачиваются в своей плоскости на некоторый угол относительно своего первоначального положения. Эти углы называются углами поворота сечений φ . Величину угла поворота сечения A относительно сечения B для случая нагружения, показанного на рис. 5 а, можно определить по формуле

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p} \quad (3)$$

где φ - угол поворота сечения B относительно сечения A, рад;

l - длина вала;

G - модуль сдвига материала;

J_p - полярный момент инерции круглого сечения.

Если вал имеет ступенчато-переменное сечение, причем на каждом из участков действует момент M_{ki} , то взаимный угол поворота торцевых сечений вала определится как алгебраическая сумма

$$\varphi_{AB} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{ki} l_i}{G J_{pi}} \quad (3a)$$

Если вал нагружен распределенными по длине моментами, то взаимный угол поворота торцевых сечений будет

$$\varphi_{AB} = \int \frac{M_k dz}{G J_p} \quad (3b)$$

где M_k - переменный по длине вала момент (пример 2).

Используя формулы (3), (3a) и (3b) можно построить эпюру углов поворота сечений по длине вала.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины вала, называется относительным углом закручивания θ . Если в пределах участка $M_k = \text{const}$, то

где $\theta = \frac{\varphi}{l}$,
 θ - относительный угол закручивания торцевых сечений данного участка, рад; l - длина участка, м.

Для того, чтобы вал не вибрировал и в нем не возникали большие крутильные колебания, он должен иметь достаточную жесткость.

Условие жесткости

$$\theta_{\max} = \frac{|M_k|}{G J_p} \leq [\theta], \quad (4)$$

где $[\theta]$ - допускаемый относительный угол закручивания, рад.

Формулы (1), (2), (3) и (4) пригодны для валов не только сплошного круглого, но и кольцевого поперечного сечения. В последнем случае в них нужно подставлять значения J_p и W_p для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

где α - безразмерный коэффициент ($0 < \alpha < 1$),

$\alpha = \frac{d}{D}$ - отношение внутреннего диаметра сечения к наружному.

В частном случае, когда $\alpha = \frac{d}{D} = 0$ последние формулы переходят в формулы для J_p и W_p для круглого сечения.

По формулам (2) и (4) можно решать три типа задач:

1. Проверка прочности или жесткости вала (по формулам (2) и (4) соответственно). При этом должны быть заданы форма и размеры сечения, внешняя нагрузка и материал вала.

Находят τ_{\max} и θ_{\max} , сравнивают их с допускаемыми значениями $[\tau]$ и $[\theta]$ и оценивают прочность и жесткость вала.

2. Определение размеров поперечного сечения,

В этом типе задач должны быть заданы внешняя нагрузка, форма сечения ($\alpha = d/D$) и материал вала.

Определяют внешний диаметр:

а) из условия прочности (2): $D \geq \sqrt[3]{\frac{16 |M_k|}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}}$;

б) из условия жесткости (4): $D \geq \sqrt[4]{\frac{32 |M_k|}{\pi G [\theta] (1 - \alpha^4)}}$.

Из двух найденных значений диаметра выбирают наибольшее.

3. Определение максимальной допустимой нагрузки (момента $[M_k]$) из условий прочности и жесткости.

При решении задач этого типа должны быть заданы форма сечения, его размеры и материал вала:

а) из условия прочности (2): $[M_k] \leq W_p [\tau]$;

б) из условия жесткости: $[M_k] \leq G J_p [\theta]$.

Из двух найденных значений $[M_k]$ выбирают меньшее.

Пример 3.

Вал круглого сечения вращается со скоростью $n = 240$ об/мин и передает мощность $N = 100$ л.с. (рис.7, а, б). Шестерня 3 - ведущая, шестерни 1, 2, 4 передают мощность потребителям.

Известно, что шестерня 1 передает 20 % мощности, шестерня 2 - 35 %, шестерня 4 - 45 % мощности, подаваемой на вал. Модуль сдвига материала вала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 60$ МПа. Требуется определить диаметр D вала из условия прочности и построить эпюру углов закручивания.

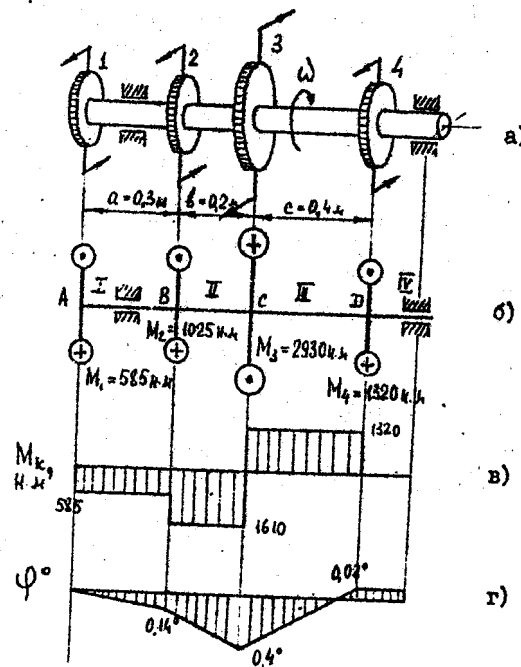


Рис. 7

Решение:

1. По заданной мощности N и частоте вращения n определяем вращающий момент на ведущей шестерне

$$M_3 = 7,02 \frac{N \cdot \frac{1}{n}}{\text{об/мин}} = 7,02 \cdot \frac{100}{240} = 2,93 \text{ кН.м} = 2930 \text{ Н.м.}$$

Примечание: если мощность задана в киловаттах, то вращающий момент вычисляют по формуле

$$M_3 = 9,55 \frac{N \cdot \frac{1}{n}}{\text{об/мин}} \cdot \text{кВт} \cdot \text{об/мин} \cdot \text{Н.м.}$$

При этом величину M_3 получают в килоньютонах-метрах.

2. Вычисляем моменты M_1, M_2, M_4 :

$$M_1 = 0,2 M_3 = 0,2 \cdot 2930 = 585 \text{ Н.м.};$$

$$M_2 = 0,35 M_3 = 0,35 \cdot 2930 = 1025 \text{ Н.м.};$$

$$M_4 = 0,45 M_3 = 0,45 \cdot 2930 = 1320 \text{ Н.м.}$$

3. Вычисленные моменты M_1, M_2, M_4 наносим на схему и строим эпшру M_x . Она имеет вид, показанный на рис. 7, в. Из эпшры M_x видно, что наибольший момент $|\max M_x| = 1610 \text{ Н.м}$ действует на втором участке.

4. Определяем диаметр вала D из условия прочности на втором участке

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1610}{\pi \cdot 60 \cdot 10^6}} = 5,15 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 51,5 \text{ мм.}$$

Округляем полученный диаметр до значения

$$D = 55 \text{ мм} = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

5. Определяем углы закручивания на каждом из участков:

$$\varphi_I = \frac{M_{x1} \alpha}{G \cdot J_p} = \frac{(-585) \cdot 0,3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-7}} = -0,00244 \text{ рад} = -0,14 \dots^\circ;$$

$$\varphi_{II} = \frac{M_{x2} \beta}{G \cdot J_p} = \frac{(-1610) \cdot 0,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-7}} = -0,00447 \text{ рад} = -0,26 \dots^\circ;$$

$$\varphi_{III} = \frac{M_{x3} \gamma}{G \cdot J_p} = \frac{1320 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-7}} = 0,00731 \text{ рад} = 0,42 \dots^\circ;$$

$$\varphi_{IV} = 0,$$

где $J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi (5,5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$

Принимаем левое торцевое сечение вала A за условно неподвижное и строим эпшру углов закручивания, используя вычисленные значения $\varphi_I, \varphi_{II}, \varphi_{III}, \varphi_{IV}$. Для этого проводим ось эпшры и откладываем от нее значения углов поворота с учетом их знака. Сечение B поворачивается относительно сечения A на угол $\varphi_{AB} = \varphi_I$, сечение C относительно сечения A — на угол $\varphi_{AC} = \varphi_I + \varphi_{II} = -0,14 - 0,26 = -0,4$ град, сечение D относительно сечения A — на угол $\varphi_{AD} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = -0,14 - 0,26 + 0,42 = 0,02$ град, сечение E относительно сечения A — на угол $\varphi_{AE} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = 0,02$ град (рис. 7, г).

Пример 4.

Стержень ступенчато-переменного сечения нагружен внешними скручивающими моментами $M_1 = 2M$ и $M_2 = 7M$ (рис. 8, а). На первом участке вал имеет сплошное круглое сечение, на втором и на третьем — кольцевое сечение ($\alpha = \frac{d}{D} = 0,6$). Известно также: $M = 280 \text{ Н.м}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $[\tau] = 90 \text{ МПа}$, $[\theta] = 1 \text{ град/м}$. Требуется определить диаметр D из условия прочности и жесткости.

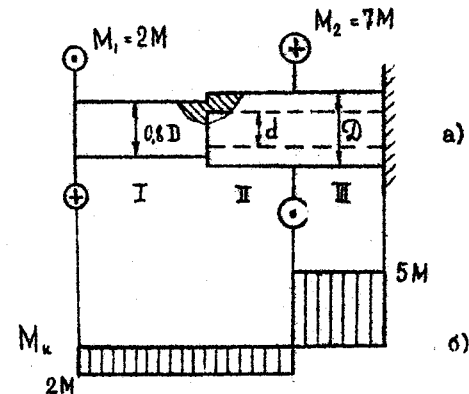


Рис. 8

Решение:

1. Вычисляем J_p и W_p на каждом из участков:

$$J_{p1} = \frac{\pi (0,8D)^4}{32} = 0,0412 D^4;$$

$$J_{p2} = J_{p3} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = 0,0855 D^4;$$

$$W_{p1} = \frac{\pi (0,8D)^3}{16} = 0,1011 D^3;$$

$$W_{p2} = W_{p3} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = 0,1711 D^3.$$

2. Строим эпюру M_k в общем виде (рис.8,б). Величина M_k по длине стержня меняется. Меняется также и величина W_p . Значит, положение опасного участка, где действует максимальное касательное напряжение, можно определить лишь после того, как будет вычислено максимальное напряжение на каждом из участков

$$\max \tau_i = \frac{|M_{ki}|}{W_{pi}}.$$

3. Вычисляем эти напряжения в общем виде:

$$\tau_1 = \frac{|M_{k1}|}{W_{p1}} = \frac{2M}{0,1011 D^3} = 19,8 \frac{M}{D^3};$$

$$\tau_2 = \frac{|M_{k2}|}{W_{p2}} = \frac{2M}{0,1711 D^3} = 11,7 \frac{M}{D^3};$$

$$\tau_3 = \frac{|M_{k3}|}{W_{p3}} = \frac{5M}{0,1711 D^3} = 29,3 \frac{M}{D^3}.$$

Оказалось, что наибольшие напряжения действуют на третьем участке.

4. Определяем диаметр стержня D из условия прочности на этом участке

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 280}{\pi \cdot 90 \cdot 10^6 (1 - 0,6^4)}} = 4,48 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 44,8 \text{ мм}.$$

Округляем полученный диаметр до значения $D = 45$ мм.

5. Проверяем, будет ли стержень удовлетворять условию жесткости. Относительный угол закручивания на каждом из участков:

$$\theta_1 = \frac{|M_{k1}|}{G J_p} = \frac{2 \cdot 280}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,0412 (4,5 \cdot 10^{-2})^4} = 0,0421 \text{ рад/м} = 2,4 \text{ град/м};$$

$$\theta_2 = \frac{|M_{k2}|}{G J_p} = \frac{2 \cdot 280}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,0855 \cdot (4,5 \cdot 10^{-2})^4} = 0,0201 \text{ рад/м} = 1,15 \text{ град/м};$$

$$\theta_3 = \frac{|M_{k3}|}{G J_p} = \frac{5 \cdot 280}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,0855 (4,5 \cdot 10^{-2})^4} = 0,0502 \text{ рад/м} = 2,9 \text{ град/м};$$

Наибольший из них $\theta_{max} = \theta_3 = 2,9$ град/м значительно превосходит допускаемое значение $[\theta] = 1$ град/м. Значит, условие жесткости $\theta < [\theta]$ при выбранном значении $D = 45$ мм не выполняется.

6. Определяем величину D из условия жесткости на третьем участке

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_k}{\pi G [\theta] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1400 \cdot 180}{\pi \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,6^4)}} = 5,83 \cdot 10^{-2} = 58,3 \text{ мм}.$$

Округляем полученное значение и принимаем окончательно $D = 60$ мм.

3. РАСЧЕТ НА КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении бруса прямоугольного сечения касательные напряжения распределяются по сечению весьма неравномерно (рис.9). Наибольшей величины они достигают в точках контура сечения посередине длинных сторон. Несколько меньшие напряжения возникают посередине коротких сторон. В угловых точках сечения $\tau = 0$. Как видно из рис.9, напряжение τ зависит теперь не от одной переменной ρ , а от двух (x и y). Такие задачи решаются методами теории упругости.

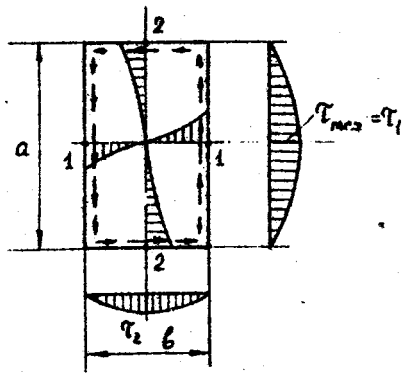


Рис.9

Результаты решения можно привести к простому и удобному виду

$$\tau_1 = \tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}; \quad (5)$$

$$\varphi = \frac{M_k l_0}{G J_k}; \quad (6)$$

$$\tau_2 = \gamma \tau_{max}, \quad (7)$$

где $W_k = \alpha ab^2;$ (8)

$$J_k = \beta ab^3. \quad (9)$$

W_k и J_k называются моментом сопротивления и моментом инерции при кручении. Коэффициенты α , β и γ зависят от отношения сторон a/b (табл. I).

Таблица I

a/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Используя формулы (5)-(9) и данные табл. I, можно решать задачи на кручение стержней прямоугольного сечения.

Как и при расчете стержней круглого сечения, условия прочности и жесткости при этом имеют вид.

$$\tau_{max} = \frac{|M_k|}{W_k} \leq [\tau]; \quad (10)$$

$$\theta_{max} = \frac{|M_k|}{G J_k} \leq [\theta]. \quad (11)$$

Пример 5.

Стальной стержень прямоугольного сечения передает крутящий момент $M_k = 1000$ Н·м. Отношение сторон $a/b = 2,5$. Допускаемое напряжение $[\tau] = 40$ МПа, модуль сдвига материала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 1,5$ град/м. Определить размеры сечения a и b из условий прочности и жесткости.

Решение:

I. Из условия прочности (10) находят момент сопротивления при кручении

$$W_k = \frac{M_k}{[\tau]} = \frac{1000}{40 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

Зная отношение сторон $a/b = 2,5$ и беря из табл. I соответствующее значение $\alpha = 0,258$, из формулы (8) находим

$$W_k = \alpha ab^2 = 0,258 \cdot 2,5b \cdot b^2 = 0,645 b^3$$

Откуда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_k}{0,645}} = \sqrt[3]{\frac{0,25 \cdot 10^{-4}}{0,645}} = 0,338 \cdot 10^{-1} \text{ м} \approx 34 \text{ мм};$$

$$a = 2,5b = 85 \text{ мм.}$$

Размеры сечения из условия прочности $a \times b = 85 \times 34 \text{ мм}$.

2. Делаем проверку выбранного сечения на жесткость. Из табл. I находим коэффициент β : при $a/b = 2,5$; $\beta = 0,249$.

Момент инерции при кручении будет

$$J_k = \beta a b^3 = 0,249 \cdot 85 \cdot 10^{-3} \cdot (34 \cdot 10^{-3})^3 = 0,835 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{M_k}{G J_k} = \frac{1000}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,835 \cdot 10^{-6}} = 0,015 \text{ рад/м} = 0,86 \text{ град/м}.$$

Так как $\theta < [\theta]$, условие жесткости удовлетворяется.

Окончательно принимаем сечение $a \times b = 85 \times 34 \text{ мм}$.

Примечание: в случае, если бы оказалось $\theta > [\theta]$, нужно определить размеры сечения $a \times b$ из условия жесткости (II)

$$\frac{M_k}{G \beta 2,5 b b^3} \leq [\theta],$$

откуда

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \beta 2,5 [\theta]}}; \quad a = 2,5b.$$

Найденные из условия жесткости размеры $a \times b$ следует принять за окончательные.

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕЙ НА КРУЧЕНИЕ

Статическая неопределимость есть результат наложения на систему "лишних" связей, т.е. таких связей, удаление которых превращает систему в статически определимую. При этом число неизвестных (реакций и усилий) превышает число возможных уравнений статики.

Способ раскрытия статической неопределимости, по существу, остается одним и тем же независимо от того, работает ли конструкция на растяжение (сжатие) или на кручение. В обоих случаях требуется составить дополнительные (к статическим) уравнения, которые называются уравнениями совместности перемещений. В обоих случаях условия для

установления этих уравнений служит то обстоятельство, что перемещения точек приложения "лишних" связей по направлению этих связей или равны нулю (жесткие "лишние" связи), или равны их деформациям (упругие "лишние" связи). Различие заключается лишь в том, что в случае растяжения (сжатия) в уравнения совместности перемещений входят линейные перемещения некоторых сечений вдоль стержня, а в случае кручения это будут углы поворота некоторых сечений вокруг оси стержня.

Рассмотрим примеры решения типовых задач.

Пример 6.

Ступенчатый вал круглого сечения жестко закреплен по торцам и нагружен моментами M и $4M$, диаметры сечений вала d , $2d$, $3d$, длина участков кратна l (рис. 10, а), модуль сдвига материала G . Требуется построить эпюру крутящих моментов, определить максимальные касательные напряжения τ_{\max} и угол поворота сечения A .

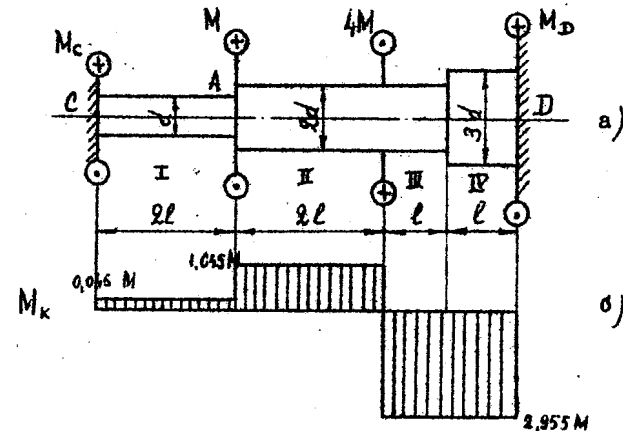


Рис. 10

Решение:

1. Определим полярные моменты инерции сечений вала по участкам

$$J_{p1} = J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad J_{p2} = J_{p3} = 16 J_p; \quad J_{p4} = 81 J_p.$$

2. Уравнение совместности перемещений $\Delta \varphi_{CD} = 0$ представим в виде

$$\Delta \varphi_{CD} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = 0. \quad (12)$$

3. Определим значения углов закручивания на каждом из участков

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \frac{M \cdot 2l}{G J_p}; & \varphi_{II} &= \frac{(M_c + M) \cdot 2l}{16 G J_p}; \\ \varphi_{III} &= \frac{(M_c + M - 4M) \cdot l}{16 G J_p}; & \varphi_{IV} &= \frac{(M_c + M - 4M) \cdot l}{81 G J_p} \end{aligned} \quad (13)$$

4. Подставляя соотношения (13) в зависимость (12), получим

$$\Delta \varphi_{CD} = \frac{l}{G J_p} \left[2M_c + 2(M_c + M) \frac{1}{16} + (M_c - 3M) \frac{1}{16} + (M_c - 3M) \frac{1}{81} \right] = 0,$$

откуда

$$M_c = \frac{129}{2851} M = 0,0453 M.$$

5. Из уравнения статики $M_c + M - 4M + M_D = 0$ определим реактивный момент в заделке D

$$M_D = 3M - M_c = 2,9547 M.$$

6. По полученным значениям моментов M_c и M_D строим эпюру крутящего момента (рис. 10, б).7. Определим участок вала, на котором действует наибольшее касательное напряжение $\max \tau = \frac{M_{kI}}{W_{pI}}$. Так как

$$\frac{M_{kII}}{M_{kI}} = \frac{2,9547}{0,0453} \approx 65, \quad \text{а} \quad \frac{W_{pII}}{W_{pI}} = \frac{\pi (2d)^3}{\pi d^3} = 8,$$

то наибольшее касательное напряжение действует в сечении с диаметром $2d$ на участке III.

8. Определим угол поворота сечения A-A относительно сече-

ния C

$$\varphi_{AC} = \frac{M_c \cdot 2l}{G J_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0,0453 M \cdot 2l \cdot 180 \cdot 32}{G J_p \cdot \pi} \approx 52,2 \frac{Ml}{G d^4}.$$

Примечание: Реактивный момент в заделке M_D можно было определить на основании принципа независимости действия сил. В этом случае левую часть выражения $\Delta \varphi_{CD} = 0$ следует представить как сумму углов закручивания вала, вызванных каждым вращающим моментом в отдельности

$$\varphi_{CD}(M_c) + \varphi_{CD}(M) + \varphi_{CD}(4M) = 0.$$

Предлагаем студентам самостоятельно выполнить это решение.

Пример 7.

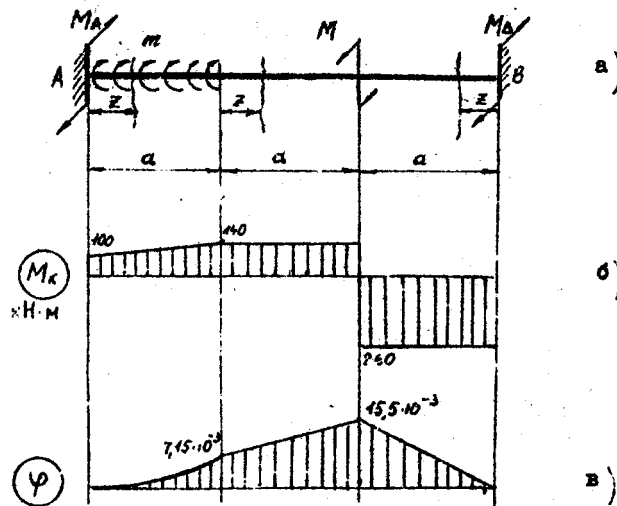
Стержень постоянного сечения жестко закреплен с обоих торцов (рис. II, а). Дано: $m = 80$ Н/м, $M = 400$ Н·м, $a = 0,5$ м, $[\tau] = 40$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Требуется определить диаметр стержня D из условия прочности, построить эпюры M_k и φ .

Рис. II

Решение:

1. Пусть в заделках A и B возникают неизвестные пока реактивные моменты M_A и M_B . Составляем единственно возможное уравнение статики

$$M_A + m\alpha - M + M_B = 0.$$

В нем два неизвестных M_A и M_B . Для их нахождения нужно составить еще одно уравнение, рассмотрев условия деформации стержня. Поскольку сечение A не поворачивается относительно сечения B , то можно написать

$$\Delta \varphi_{AB} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0.$$

Используя формулы (3), (3а) и (3б) и учитывая, что $GJ_p = \text{const}$, второе уравнение перепишем в виде

$$M_A \alpha + m \int_0^\alpha dz + (M_A + m\alpha)\alpha + (M_A + m\alpha - M)\alpha = 0.$$

Откуда

$$3M_A \alpha = M\alpha - 2m\alpha^2 - \frac{m\alpha^2}{2}$$

и

$$M_A = \frac{1}{3}(M - 2,5m\alpha) = \frac{1}{3}(400 - 2,5 \cdot 80 \cdot 0,5) \approx 100 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Статическая неопределимость системы раскрыта.

Подставляя найденное значение M_A в уравнение статики, определим значение M_B

$$M_B = \frac{1}{3}(2M - 0,5m\alpha) = \frac{1}{3}(800 - 0,5 \cdot 80 \cdot 0,5) = 260 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов (рис. II, б), из которой устанавливаем, что $|\max M_k| = 260 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

3. Определим диаметр стержня D из условия прочности. Согласно формуле (2а)

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 |\max M_k|}{\pi [\tau]}} \approx 1,72 \sqrt[3]{\frac{260}{40 \cdot 10^6}} \approx 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,2 \text{ см}.$$

4. Определим углы закручивания по участкам:

$$\varphi_{Iz} = \frac{1}{GJ_p} \int_0^z (M_A + mz) dz = \frac{M_A z + \frac{mz^2}{2}}{GJ_p};$$

$$\varphi_{I|z=0} = 0; \quad \varphi_{I|z=\alpha} = \frac{M_A \alpha + \frac{m\alpha^2}{2}}{GJ_p} = \frac{100 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 80 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 3,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,00715 \text{ рад}$$

$$\varphi_{IIz} = \varphi_{Iz} + \frac{M_B \alpha + m\alpha^2}{GJ_p} = 0,00715 + \frac{100 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 3,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,0155 \text{ рад};$$

$$\varphi_{IIIz} = \frac{M_B z}{GJ_p}; \quad \varphi_{III|z=0} = 0; \quad \varphi_{III|z=\alpha} = \frac{M_B \alpha}{GJ_p} = \frac{260 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 3,2^4} = 0,0155 \text{ рад}.$$

5. По вычисленным значениям углов закручивания строим эпюру φ (рис. II, в).

Пример 8

Труба длиной $4a$, диаметрами D и d заделана нижним концом C (рис. 12). В эту трубу сверху вставлен на длину $2a$ стержень круглого сечения диаметром $d_0 = \frac{D}{2} = \frac{d}{1,6}$. Нижний конец B стержня жестко скреплен с трубой, а верхний конец E трубы жестко скреплен со стержнем.

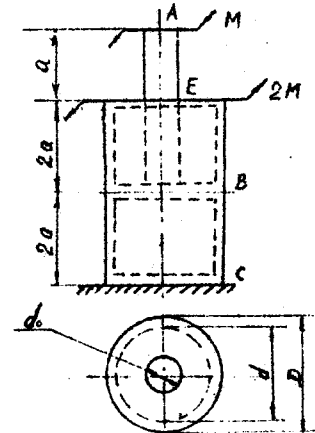


Рис. 12

Вокруг геометрической оси системы на концевом сечении A выступающей части стержня действует пара с моментом M_1 , а на верхнем сечении E трубы - пара с моментом $2M$. Модуль сдвига материала G известен. Определить: моменты M_I и M_{II} , действующие в стержне и в трубе на участке BE , максимальные напряжения $\tau_{max I}$ (в стержне) и $\tau_{max II}$ (в трубе) на участках AE , BE , BC , а также угол закручивания сечения A .

Решение:

1. Раскроем статическую неопределенность системы на участке BE . Применяя метод сечений на этом участке, из уравнения равновесия находим: $M_K = M_I + M_{II} = 3M$, где M_I - момент, передающийся через стержень; M_{II} - момент, передающийся через трубу.

По условию совместности перемещений углы закручивания стержня φ_I и трубы φ_{II} на участке $B-E$ равны между собой, т.е.

$$\frac{M_I \cdot 2a}{G J_{PI}} = \frac{M_{II} 2a}{G J_{PII}}$$

откуда
$$M_{II} = M_I \frac{J_{PI}}{J_{PII}}$$

Подставляя это значение в уравнение статики, имеем

$$M_I \left(1 + \frac{J_{PI}}{J_{PII}}\right) = 3M \quad \text{или} \quad M_I = \frac{3M}{1 + \frac{J_{PI}}{J_{PII}}}; \quad M_{II} = \frac{3M}{1 + \frac{J_{PI}}{J_{PII}}}$$

Так как

$$J_{PI} = \frac{\pi d_0^4}{32}, \quad J_{PII} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{16\pi d_0^4}{32} (1 - 0,8^4) \cong 9,45 J_{PI},$$

то окончательно

$$M_I = \frac{3M}{1 + 9,45} \cong 0,287M \quad \text{и} \quad M_{II} \cong 2,713M.$$

Статическая неопределенность системы раскрыта.

2. Определим наибольшие касательные напряжения по участкам:

- для стержня на участке $A-E$

$$\tau_{max I} = \frac{M}{W_{PI}} = \frac{16M}{\pi d_0^3} \cong 5,09 \frac{M}{d_0^3}$$

- для трубы на участке $B-C$

$$\tau_{max II} = \frac{3M}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)} = 0,636 \tau_{max I} = 3,21 \frac{M}{d_0^3}$$

- для стержня на участке $B-E$

$$\tau_{max I} = \frac{M_I}{W_{PI}} = \frac{0,287M}{\frac{\pi d_0^3}{16}} = 1,46 \frac{M}{d_0^3}$$

- для трубы на участке BE

$$\tau_{max II} = \frac{M_{II}}{W_{PII}} = \frac{2,713M}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - 0,8^4)} = 2,92 \frac{M}{d_0^3}$$

3. Вычислим угол поворота сечения A относительно сечения C

$$\varphi_{A-C} = \varphi_{A-E} + \varphi_{B-E} + \varphi_{B-C} = \frac{M d}{6 J_{PI}} + 0,287 \frac{M 2a}{6 J_{PI}} + \frac{3M 2a d}{6 \cdot 9,45 J_{PI}} = 2,21 \frac{M d}{6 J_{PI}}$$

Примечание: если бы по условию задачи не требовалось определения моментов M_I и M_{II} на участке BE , то для нахождения максимальных касательных напряжений $\tau_{max I}$ и $\tau_{max II}$, а также угла закручивания φ_{A-C} систему можно было бы рассматривать как статически определимую с составным сечением на участке BE .

5. РАСЧЕТ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН С МАЛЫМ ШАГОМ ВИНТОВ

Винтовые пружины являются одним из наиболее распространенных упругих элементов современных механизмов и машин. Рассмотрим пружины, которые подвергаются действию растягивающих и сжимающих сил.

Точный расчет на прочность винтовых пружин достаточно сложен, так как стержень пружины может испытывать одновременно кручение, сдвиг, растяжение (сжатие) и изгиб. Однако при малых углах наклона витков влиянием изгиба и растяжения (сжатия) можно пренебречь.

Условие прочности таких пружин имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{P}{F} + \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau], \quad (14)$$

где P - осевая сила, действующая на каком-либо участке пружины;
 F - площадь поперечного сечения стержня пружины;
 M - крутящий момент ($M = \frac{P D}{2}$, где D - средний диаметр пружины);
 W_P - момент сопротивления при кручении, $W_P = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2 d^3$;
 $[\tau]$ - допустимое напряжение.

В формуле (14) первое слагаемое представляет собой напряжение от сдвига, второе - напряжение от кручения проволоки пружины.

Наибольшее напряжение возникает на внутренней стороне сечения пружины в точке C (рис. 13), где складываются напряжения от сдвига

и от кручения.

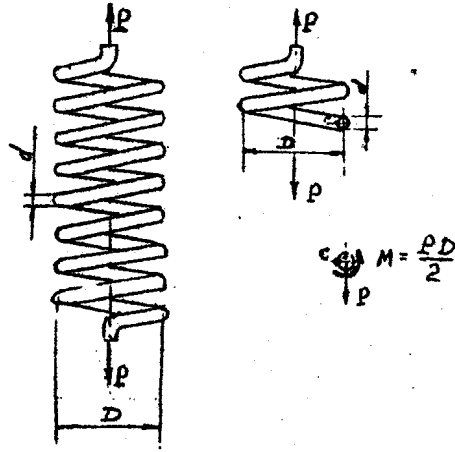


Рис. 13

Подставляя в (14) параметры пружины (рис.13), получим

$$\tau_{\max} = \frac{P}{\pi d^2} + \frac{PD}{2 \cdot \frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right). \quad (15)$$

Обычно $\frac{d}{2D} \ll 1$. Тогда можно считать

$$\tau_{\max} \approx \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (16)$$

что равносильно пренебрежению напряжениями от сдвига по сравнению с напряжениями от кручения.

В инженерной практике часто используют условие прочности в виде

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (17)$$

где k - поправочный коэффициент, зависящий от соотношения D/d и определяемый на основе точных методов расчета пружин.

Условие жесткости пружины

$$\lambda = \frac{8PDn}{Gd^4} \leq [\lambda], \quad (18)$$

где λ - осадка пружины под действием внешней нагрузки;

n - число витков пружины;

G - модуль упругости при сдвиге;

$[\lambda]$ - допускаемая осадка пружины.

По условиям прочности (16), (17) и жесткости (18) можно производить расчет как статически определяемых, так и статически неопределимых пружин с малым шагом витков.

Пример 9.

Цилиндрическая винтовая пружина (рис.14) нагружена осевой силой $P = 100$ Н. Параметры пружины: $D = 6$ см; $d = 0,5$ см; $n = 20$. Модуль сдвига материала $G = 8 \cdot 10^9$ МПа. Определить максимальное напряжение τ_{\max} и осадку пружины λ .

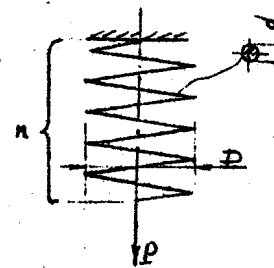


Рис.14

Решение:

На основании формулы (14)

$$\tau_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_k}{W_p} = \frac{100 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,5^3 \cdot 10^{-4}} = 205 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 205 \text{ МПа.}$$

На основании формулы (18)

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 100 \cdot 0,06^3 \cdot 20}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,005^4} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7 \text{ см.}$$

Пример Ю.

Винтовая пружина (рис. 14) диаметром $D = 100$ мм, изготовленная из прочной проволоки диаметром $d = 10$ мм, нагружена силой $P = 500$ Н; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 150$ МПа. Требуется определить, какое число витков должна иметь пружина, чтобы ее осадка λ была равна 36 мм.

Решение:

Определяем наибольшее напряжение в проволоке пружины. Отношение $\frac{d}{2D} = 0,05$ дает возможность применить формулу (16)

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 500 \cdot 0,1}{\pi \cdot 0,01^3} = 127 \cdot 10^6 \text{ Па} = 127 \text{ МПа} < 150 \text{ МПа}.$$

Следовательно, деформация является упругой и все расчетные формулы применимы.

Определим из формулы (18) число витков

$$n = \frac{16d^4}{8PD^3} = \frac{0,036 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,01^4}{8 \cdot 500 \cdot 0,1^3} = 7,2;$$

Принимаем число витков равное 7.

Пример II.

Винтовая пружина изготовлена из проволоки диаметром $d = 4$ мм. Средний диаметр пружины $D = 50$ мм. В ненагруженном состоянии зазор в свету между витками пружины $t = 1$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Определить, какая потребуется сила для сжатия пружины, чтобы зазор исчез.

Решение:

Зазор закроется, если осадка одного витка λ_0 будет равна величине просвета t , т.е.

$$\lambda_0 = t = \frac{8PD^3}{46J_p} = \frac{8PD^3}{6d^4}$$

откуда

$$P = \frac{6d^4 t}{8D^3} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,004^4 \cdot 0,001}{8 \cdot 0,05^3} = 20,5 \text{ Н}.$$

Пример 12.

Цилиндрическая стальная пружина со средним диаметром $D = 120$ мм и диаметром круглого стержня пружины $d = 20$ мм закреплена

в точках A и B и нагружена силой $P = 3$ кН в точке C (рис. 15, а). Число витков в верхней части пружины $n_0 = 6$, в нижней части $n_n = 10$.

Требуется определить наибольшее напряжение в каждой части пружины и осадку каждой части.

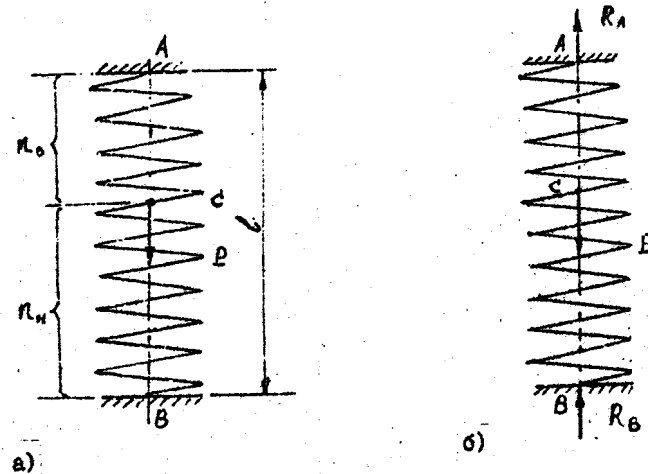


Рис. 15

Решение:

Эта задача статически неопределима, так как закрепление верхнего конца пружины в точке A влияет на деформирование нижней части пружины, нагруженной силой в точке C . Сжатие нижней части пружины происходит с одновременным растяжением верхней части пружины. Для определения неизвестных реакций (рис. 15, б) в точках A и B необходимо составить уравнение статики

$$\sum Y = R_A - P + R_B = 0. \quad (19)$$

Других уравнений равновесия составить нельзя. В уравнении (19) два неизвестных усилия R_A и R_B , значит, задача один раз статически неопределима.

Составим дополнительное уравнение совместности перемещений, выразившее ту мысль, что полная длина пружины не изменяется

$$\lambda_0 = \lambda_n, \quad (20)$$

где λ_B - осадка верхней части пружины;
 λ_H - осадка нижней части пружины.

Усилие, растягивающее верхнюю часть пружины, равно реакции опор в точке А, т.е. $P_B = R_A$; усилие, сжимающее нижнюю часть пружины, равно реакции опоры в точке В, т.е. $P_H = R_B$. Тогда уравнение (19) примет вид

$$\begin{aligned} \text{откуда} \quad P_H - P + P_B &= 0, \\ P_B + P_H &= P, \end{aligned} \quad (21)$$

Удлинение верхней части пружины

$$\lambda_B = \frac{\pi P_B D^3 n_B}{4 G J_p} = \frac{8 P_B D^3 n_B}{G d^4}$$

Осадка (укорочение) нижней части пружины равна

$$\lambda_H = \frac{8 P_H D^3 n_H}{G d^4}$$

Согласно (20)

$$\frac{8 P_B D^3 n_B}{G d^4} = \frac{8 P_H D^3 n_H}{G d^4},$$

$$\text{откуда} \quad P_B n_B = P_H n_H, \quad (22)$$

Решим совместно уравнения (21) и (22)

$$P_B + P_H = 3;$$

$$P_B \cdot 5 = 10 P_H;$$

$$\text{откуда} \quad P_B = 1,875 \text{ кН}; \quad P_H = 1,125 \text{ кН}.$$

Наибольшее напряжение в верхней части пружины

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{P_B}{F} + \frac{M_k}{W_p} = \frac{P_B \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{P_B D \cdot 16}{2 \pi d^3} = \\ &= \frac{1,875 \cdot 4}{3,14 \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}} + \frac{1,875 \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot 16}{2 \cdot 3,14 \cdot 2^3 \cdot 10^{-6}} = 77,7 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Наибольшее напряжение в нижней части пружины

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{P_H}{F} + \frac{M_k}{W_p} = \frac{P_H \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{P_H D \cdot 16}{2 \pi d^3} = \\ &= \frac{1,125 \cdot 4}{3,14 \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}} + \frac{1,125 \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot 16}{2 \cdot 3,14 \cdot 2^3 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 3,6 \cdot 10^3 + 4,3 \cdot 10^3 = 46,6 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 46,6 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Осадка каждой части пружины

$$\begin{aligned} \lambda_B &= \frac{8 P_B D^3 n_B}{G d^4} = \frac{8 \cdot 1,875 \cdot 12^3 \cdot 10^{-6} \cdot 6}{8 \cdot 10^7 \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,2 \text{ см.} \\ \lambda_H &= \frac{8 P_H D^3 n_H}{G d^4} = - \frac{8 \cdot 1,125 \cdot 12^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{8 \cdot 10^7 \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}} = -1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,2 \text{ см} \end{aligned}$$

Пример 13.

Две пружины вставлены одна в другую (рис. 16). До приложения к плите силы $P = 1,2$ кН вторая пружина короче первой на $\delta = 2$ см.

Параметры пружин:

$$\begin{aligned} D_1 &= 20 \text{ см}, \quad d_1 = 2 \text{ см}, \\ n_1 &= 15, \quad D_2 = 10 \text{ см}, \\ d_2 &= 1 \text{ см}, \quad n_2 = 10, \quad G = \\ &= 8 \cdot 10^7 \text{ кПа.} \end{aligned}$$

Найти наибольшее касательные напряжения в пружинах и вычислить перемещение плиты.

Решение:

Если при нагрузке $P = 1,2$ кН плита опустится на величину, меньшую или равную δ , то сжиматься будет лишь первая пружина. В этом случае система статически определяема. Если же перемещение плиты больше δ ,

то сжимаются обе пружины, и система статически неопределима, так как в единственное уравнение статики $\sum \lambda = 0$ входят два неизвестных усилия в пружинах P_1 и P_2 . Поэтому прежде всего выясним характер работы данной системы: найдем силу P_0 , необходимую для осадки первой пружины на величину $\delta = 2$ см, и сопоставим эту силу с заданной

$$\delta = \frac{8 P_0 D_1^3 n_1}{G d_1^4},$$

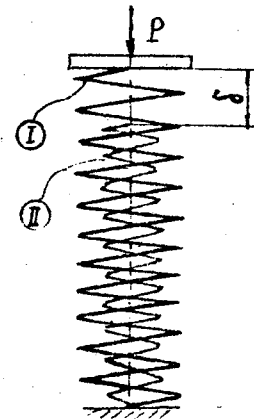


Рис. 16

откуда

$$P_0 = \frac{\delta G d_1^4}{8 D_1^3 n_1} = \frac{9,02 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 9,02^4}{8 \cdot 0,2^3 \cdot 15} = 0,267 \text{ кН.}$$

Следовательно, при действии силы $P = 1,2$ кН нагружены обе пружины. При этом осадка первой пружины λ_1 больше осадки второй пружины λ_2 на величину δ .

Уравнение равновесия: $P_1 + P_2 - P = 0$. Уравнение перемещений $\lambda_1 - \lambda_2 = \delta$.

Подставляя в эту систему уравнений числовые значения, находим силы P_1 и P_2

$$P_1 + P_2 = P = 1,2 \text{ кН};$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{8 P_1 \cdot 0,2^3 \cdot 15}{8 \cdot 10^7 \cdot 9,02^4} - \frac{8 P_2 \cdot 0,1^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^7 \cdot 9,01^4} = 9,02 \text{ м,}$$

откуда $P_1 = 0,8$ кН и $P_2 = 0,4$ кН.

Определим наибольшие касательные напряжения в пружинах. Согласно (16) имеем

$$\max \tau_1 = \frac{8 P_1 D_1}{\pi d_1^3} = \frac{8 \cdot 0,8 \cdot 9,2}{3,14 \cdot 0,02^3} = 51 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 51 \text{ МПа};$$

$$\max \tau_2 = \frac{8 P_2 D_2}{\pi d_2^3} = \frac{8 \cdot 0,4 \cdot 0,1}{3,14 \cdot 0,01^3} = 102 \text{ МПа.}$$

Определяем перемещение плиты, равное осадке первой пружины

$$\lambda_1 = \frac{8 P_1 D_1^3 n_1}{6 \cdot d_1^4} = \frac{8 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 \cdot 15}{8 \cdot 10^7 \cdot 9,02^4} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6 \text{ см.}$$

Петрова Светлана Борисовна

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания к практическим занятиям
и самостоятельной работе по дисциплинам
«Механика материалов и конструкций»,
«Сопrotивление материалов», «Прикладная физика»,
«Техническая механика»
для студентов
всех специальностей

Второе издание, исправленное

Редакторы
Т.В. Белянкина, Е.О. Трусова

Корректор
Н.И. Михайлова

Подписано в печать 25.04.08. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,09. Печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,0
Тираж 500 экз. Заказ № 180. С 131

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИИК СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9