Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра технологии мясных,
рыбных продуктов
и консервирования холодом

РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ОХЛАЖДЕНИЯ И НАГРЕВАНИЯ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Методические указания
к дипломному и курсовому проектированию
для студентов специальностей 260301, 260504,
бакалавров, магистрантов по направлению 552400
всех форм обучения

Второе издание, исправленное

Санкт-Петербург 2008

УДК 519.25

Фролов С.В. Расчет времени охлаждения и нагревания тел простой формы: Метод. указания к дипломному и курсовому проектированию для студентов специальностей 260301, 260504, бакалавров, магистрантов по направлению 552400 всех форм обучения / Под. ред. В.И. Куцаковой. 2-е изд., испр. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 20 с.

Изложен необходимый теоретический материал для расчета времени охлаждения и нагревания тел простой формы, т.е. формы, допускающей явное решение уравнения теплопроводности (бесконечная пластина, бесконечный брус, параллелепипед, бесконечный и конечный цилиндры, шар). Приведена программа, выполняющая все необходимые расчеты, и инструкция по пользованию ею.

Рецензент
Доктор техн. наук, проф. Л.В. Красникова

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

1. ВВЕДЕНИЕ

В холодильной технологии пищевых продуктов часто необходимо рассчитывать время охлаждения или нагревания тел различной формы от какой-либо начальной температуры (как правило, она равна температуре помещения, в котором хранился продукт) до заданной температуры на поверхности тела, либо в центре тела, либо среднеобъемной температуры тела. Первый случай обычно реализуется тогда, когда охлаждение происходит в среде, температура которой ниже криоскопической. При этом необходимо не допустить подмораживания продукта, поэтому охлаждение прерывают в момент, когда температура поверхности близка к криоскопической (кроме того, часто бывает необходимо знать и среднеобъемную температуру тела в этот момент). Наиболее часто реализуется третий случай, так как при хранении продукта после охлаждения температура во всех точках тела выравнивается и становится равна среднеобъемной температуре, которую имело тело на момент окончания охлаждения. Второй случай обычно реализуется при стерилизации консервов, так как необходимо, чтобы все точки тела были прогреты до температуры пастеризации, а наиболее холодной точкой является центр тела.

Для определения времени охлаждения (нагревания) необходимо решить задачу нестационарной теплопроводности тела, т. е. задачу математической физики. Как известно, такая задача может быть явно решена лишь для тел такой формы, которая допускает разделение переменных в уравнении теплопроводности [1], что позволяет свести решение уравнения в частных производных к решению одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений. К этим телам относятся, во-первых, тела простой формы - бесконечная пластина, бесконечный круговой цилиндр и шар и, во-вторых, некоторые их комбинации - бесконечный прямоугольный брус, параллелепипед и цилиндр конечной длины. Поэтому на практике обычно аппроксимируют реальную форму продукта какой-либо из вышеперечисленных форм

Однако вычисления времени охлаждения (нагревания) по известным формулам для тел простой формы на практике достаточно трудоемки. Во-первых, распределение температуры внутри тела описывается посредством бесконечного ряда, и выразить из него явным образом время невозможно. Однако, как правило, на практике вполне достаточно точности, достигаемой посредством учета только первого члена ряда. Во-вторых, в этот ряд входят характеристические числа, определяемые как корни уравнения, которые опять же явно не выражаются. При вычислениях пользуются таблицами этих корней (см., например, [2]), однако далеко не всегда в них можно найти нужный корень.

Учитывая все вышеописанные трудности, мы видим, что вычислять время охлаждения (нагревания) достаточно трудоемко. Лучше поручить это машине. В настоящем указании описывается программа, которая производит все необходимые рассчеты. Она реализована на языке Basic и превращена в непосредственно исполняемый .EXE - файл компилятором TurboBasic .

2.РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

2.1. Бесконечная пластина

Пусть бесконечная пластина толщиной $2R$ (м) с температурой $T_{нач}$ (°С) погружается в среду с температурой $T_{ср}$ (°С). Коэффициент теплопроводности пластины λ (Вт/(м К)), теплоемкость ее C (Дж/(кг К)), плотность ρ (кг/м^3), коэффициент теплоотдачи с поверхности пластины α (Вт/(м^2 К)). (Мы полагаем, что что все эти величины постоянны, т. е. не зависят ни от времени , ни от температуры). Выберем начало координат на осевой плоскости пластины и направим ось x перпендикулярно ей. Координата $x=0$ отвечает центру пластины, $x=R$ – ее поверхности. Тогда распределение температуры $T(x,\tau)$ внутри пластины, зависящее от координаты x (м) и времени τ (с), описывается формулой

$$\theta(x,\tau) = \frac{T(x,\tau) - T_{ср}}{T_{нач} - T_{ср}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\sin(\mu_i)\cos(\mu_i x/R)}{\mu_i^2 + \sin(\mu_i)\cos(\mu_i)} \exp(-\mu_i^2 \lambda \tau / C\rho R^2) . \qquad (1.1)$$

Здесь в левой части стоит безразмерная температура $\theta(x,\tau)$, а μ_i суть корни характеристического уравнения $\mathrm{Bi}\cos(\mu) = \mu\sin(\mu)$, где $\mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda$ – число Био. Как известно, эти корни образуют бесконечную возрастающую последовательность, причем i-й корень лежит в промежутке $[\pi(i-1) ; \pi(i-1) + \pi/2]$. При $\mathrm{Bi} \to 0$ все корни μ_i стремятся к нижним границам промежутков $\pi(i-1)$, а при $\mathrm{Bi} \to \infty$ – к верхним $\pi(i-1) + \pi/2$. При достаточно больших значениях времени решающее влияние на распределение температуры $T(x,\tau)$ оказывает первый член ряда в правой части уравнения (1.1), так как он содержит наиболее медленно убывающую по времени экспоненту. Так, если безразмерное время (число Фурье) $\mathrm{Fo} = \lambda\tau / C\rho R^2 > 0{,}5$, то уже вторая экспонента $\exp(-\mu_2^2\,\mathrm{Fo}) < 0{,}007$, при первой $\exp(-\mu_1^2\,\mathrm{Fo}) > 0{,}3$ (при любых Bi). Если отбросить все члены ряда, кроме первого, то время может быть явно выражено через заданную температуру какой-либо точки пластины :

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{2\sin(\mu_1)\cos(\mu_1 x/R)\,(T_{нач} - T_{ср})}{(\mu_1 + \sin(\mu_1)\cos(\mu_1))(T(x,\tau) - T_{ср})} . \qquad (1.2)$$

В частности, если задана температура поверхности $T_{пов}$:

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{\sin(2\mu_1)\,(T_{нач} - T_{ср})}{(\mu_1 + \sin(\mu_1)\cos(\mu_1))\,(T_{пов} - T_{ср})} . \qquad (1.3)$$

Если задана температура в центре $T_{ц}$:

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{\sin(\mu_1)\,(T_{нач} - T_{ср})}{(\mu_1 + \sin(\mu_1)\cos(\mu_1))\,(T_{ц} - T_{ср})} . \qquad (1.4)$$

Для того чтобы получить среднеобъемную температуру пластины $\overline{T}(\tau)$, необходимо усреднить температуру $T(x,\tau)$ по координате x :

$$\overline{T}(\tau) = \frac{1}{R}\int_0^R T(x,\tau)\,dx .$$

Подставляя в эту формулу (1.1) и проведя интегрирование , получим выражение для среднеобъемной температуры пластины :

$$\overline{\theta}(\tau) = \frac{\overline{T}(\tau) - T_{ср}}{T_{нач} - T_{ср}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\sin^2(\mu_i)\exp(-\mu_i^2\lambda\tau / C\rho R^2)}{\mu_i(\mu_i + \sin(\mu_i)\cos(\mu_i))} . \qquad (1.5)$$

Если отбросить все члены ряда в правой части (1.5), кроме первого, получим время, необходимое для охлаждения (нагревания) пластины до заданной среднеобъемной температуры $\overline{T}$:

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{2\sin^2(\mu_1)\,(T_{нач} - T_{ср})}{\mu_1(\mu_1 + \sin(\mu_1)\cos(\mu_1))\,(\overline{T} - T_{ср})} . \qquad (1.6)$$

Сравнивая (1.3) и (1.6), получим выражение для среднеобъемной температуры в момент, когда температура поверхности станет равна заданной $T_{пов}$:

$$\overline{T} - T_{ср} \approx \frac{\mathrm{Bi}}{\mu_1^2}(T_{пов} - T_{ср}) . \qquad (1.7)$$

Необходимо отметить, что приближение по первому члену ряда всегда дает время меньше истинного. При некоторых значениях параметров (а именно, если заданная температура $T_{пов}$ или $T_{ц}$ или T близка к $T_{нач}$) формулы (1.2), (1.3), (1.4) или (1.6) могут дать и отрицательное время . Это означает, что реальное время охлаждения (нагревания) мало, и им можно пренебречь.

При использовании этих формул необходимо по возможности более точно определять корень μ_1 (особенно при малых значениях числа Bi). Для этого рекомендуется воспользоваться самым простым из стандартных алгоритмов – делением отрезка пополам .

2.2. Бесконечный брус

Рассмотрим бесконечный брус толщиной $2R_1$ и шириной $2R_2$. Все исходные посылки те же, что и для пластины. Пусть x_1 - координата вдоль ребра R_1, а x_2 - вдоль R_2 (начало координат выбираем на центральной оси бруса) . Также введем два числа Био : $\mathrm{Bi}_1 = \alpha R_1/\lambda$, $\mathrm{Bi}_2 = \alpha R_2/\lambda$. Тогда распределение температуры внутри бруса выражается как произведение двух рядов типа (1.1) :

$$\theta(x_1,x_2,\tau) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4\sin(\mu_i^{(1)})\sin(\mu_j^{(2)})\cos(\mu_i^{(1)}x_1/R_1)\cos(\mu_j^{(2)}x_2/R_2)}{(\mu_i^{(1)}+\sin(\mu_i^{(1)})\cos(\mu_i^{(1)}))(\mu_j^{(2)}+\sin(\mu_j^{(2)})\cos(\mu_j^{(2)}))} \times$$

$$\times \exp(-((\mu_i^{(1)}/R_1)^2+(\mu_j^{(2)}/R_2)^2)\lambda\tau/C\rho) . \qquad (2.1)$$

Здесь $\mu^{(1)}$ – корни уравнения $\mathrm{Bi}_1\cos(\mu) = \mu\sin(\mu)$, а $\mu^{(2)}$ – уравнения $\mathrm{Bi}_2\cos(\mu) = \mu\sin(\mu)$. Если оставить в (2.1) только первый член, то получим выражение для времени охлаждения (нагревания) бесконечного бруса :

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2+(\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{4\sin(\mu_1^{(1)})\sin(\mu_1^{(2)})\cos(\mu_1^{(1)}x_1/R_1)\cos(\mu_1^{(2)}x_2/R_2)(T_{нач}-T_{ср})}{(\mu_1^{(1)}+\sin(\mu_1^{(1)})\cos(\mu_1^{(1)}))(\mu_1^{(2)}+\ldots)(T(x_1,x_2,\tau)-T_{ср})} . \qquad (2.2)$$

Формулы для времени охлаждения (нагревания) до заданной температуры поверхности бруса написать, строго говоря, невозможно, так как поверхность бруса, в отличие от пластины, не будет иметь одинаковой температуры . Быстрее всего будут охлаждаться (нагреваться) ребра бруса, координаты которых $x_1 = R_1$; $x_2 = R_2$. Поэтому именно в местах нахождения ребер возможно нежелательное подмораживание продукта, если $T_{ср} < 0$. Время охлаждения (нагревания) бруса до заданной температуры $T_{пов}$ на ребре

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2+(\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{\sin(2\mu_1^{(1)})\sin(2\mu_1^{(2)})(T_{нач}-T_{ср})}{(\mu_1^{(1)}+\sin(\mu_1^{(1)})\cos(\mu_1^{(1)}))(\mu_1^{(2)}+\sin(\mu_1^{(2)})\cos(\mu_1^{(2)}))(T_{пов}-T_{ср})} . \qquad (2.3)$$

Время достижения заданной температуры $T_ц$ в центре бруса :

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2+(\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{\sin(\mu_1^{(1)})\sin(\mu_1^{(2)})(T_{нач}-T_{ср})}{(\mu_1^{(1)}+\sin(\mu_1^{(1)})\cos(\mu_1^{(1)}))(\mu_1^{(2)}+\sin(\mu_1^{(2)})\cos(\mu_1^{(2)}))(T_ц-T_{ср})} . \qquad (2.4)$$

Ряд для среднеобъемной температуры бруса :

$$\bar\theta(\tau) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4\sin(\mu_i^{(1)})\sin(\mu_j^{(2)})\exp(-((\mu_i^{(1)}/R_1)^2+(\mu_j^{(2)}/R_2)^2)\lambda\tau/C\rho)}{\mu_i^{(1)}\mu_j^{(2)}(\mu_i^{(1)}+\sin(\mu_i^{(1)})\cos(\mu_i^{(1)}))(\mu_j^{(2)}+\ldots)} . \qquad (2.5)$$

Отсюда время охлаждения (нагревания) до заданной среднеобъемной температуры $\bar T$:

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2+(\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{4\sin(\mu_1^{(1)})\sin(\mu_1^{(2)})(T_{нач}-T_{ср})}{\mu_1^{(1)}\mu_1^{(2)}(\mu_1^{(1)}+\sin(\mu_1^{(1)})\cos(\mu_1^{(1)}))(\mu_1^{(2)}+\ldots)(\bar T-T_{ср})} . \qquad (2.6)$$

Сравнивая (2.3) и (2.6) , получим выражение для среднеобъемной температуры бруса в момент , когда температура ребра станет равна $T_{пов}$:

$$\bar T - T_{ср} \approx \frac{\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2}{(\mu_1^{(1)})^2(\mu_1^{(2)})^2}(T_{нач}-T_{ср}) . \qquad (2.7)$$

2.3. Параллелепипед

Рассмотрим параллелепипед со сторонами $2R_1$, $2R_2$ и $2R_3$. Вычисления необходимо проводить аналогично тому, как излагалось применительно к брусу, только следует взять произведение не двух, а трех множителей во всех формулах. Подробно эти формулы здесь не приводятся, поскольку переход от формул для бруса (2.1) – (2.7) к аналогичным формулам для параллелепипеда очевиден, а выражения получаются довольно громоздкими. Необ ходимо отметить только, что если для бруса в формулах (2.3) и (2.7) под $T_{пов}$ подразумевалась температура на ребрах, то для параллелепипеда необходимо в качестве $T_{пов}$ взять температуру в угловых точках (именно они будут охлаждаться (нагреваться) быстрее всего).

2.4. Бесконечный цилиндр

Рассмотрим бесконечный цилиндр радиуса R, r - текущий радиус цилиндра. Все исходные данные аналогичны п. 2.1. Распределение температуры внутри цилиндра выглядит следующим образом :

$$\theta(r,\tau) = 2\,\mathrm{Bi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_i r/R)\exp(-\mu_i^2\lambda\tau/C\rho R^2)}{J_0(\mu_i)(\mu_i^2+\mathrm{Bi}^2)}, \qquad (4.1)$$

где μ_i - корни уравнения $\mu J_0(\mu) + \mathrm{Bi}\, J_0(\mu) = 0$. В формулу (4.1) входит $J_0(\mu)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Это хорошо известная в математической физике функция, имеются подробные таблицы ее значений (см. [3]). Чтобы ее вычислить, можно воспользоваться одним из ее выражений – через ряд

$$J_0(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(i!)^2}(\mu/2)^{2i} = 1-(\mu/2)^2+(\mu/2)^4/4-(\mu/2)^6/36+\ldots$$

Этот ряд хорошо сходится при не очень больших значениях аргумента. Характеристические числа μ_i образуют возрастающую последовательность, первый корень μ_1 лежит в пределах от 0 (при $\mathrm{Bi}\to 0$) до приблизительно 2,4048 (при $\mathrm{Bi}\to\infty$). Для определения времени охлаждения (нагревания) опять воспользуемся приближением первого члена ряда

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda\mu_1^2}\ln\frac{2\,\mathrm{Bi}\,J_0(\mu_1 r/R)(T_{нач}-T_{ср})}{J_0(\mu_1)(\mu_1^2+\mathrm{Bi}^2)(T(r,\tau)-T_{ср})}. \qquad (4.2)$$

Если цилиндр охлаждается (нагревается) до заданной температуры поверхности $T_{пов}$:

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda\mu_1^2}\ln\frac{2\,\mathrm{Bi}(T_{нач}-T_{ср})}{(\mu_1^2+\mathrm{Bi}^2)(T_{пов}-T_{ср})}. \qquad (4.3)$$

Если до заданной температуры центра $T_ц$:

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda\mu_1^2}\ln\frac{2\,\mathrm{Bi}(T_{нач}-T_{ср})}{J_0(\mu_1)(\mu_1^2+\mathrm{Bi}^2)(T_ц-T_{ср})}. \qquad (4.4)$$

Ряд для среднеобъемной температуры цилиндра :

$$\overline{\theta}(\tau) = 4\,\mathrm{Bi}^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\exp(-\mu_i^2\lambda\tau/C\rho R^2)}{\mu_i^2(\mu_i^2+\mathrm{Bi}^2)}. \qquad (4.5)$$

Время охлаждения (нагрева) до заданной среднеобъемной температуры $\overline{T}$:

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda\mu_1^2}\ln\frac{4\,\mathrm{Bi}^2(T_{нач}-T_{ср})}{\mu_1^2(\mu_1^2+\mathrm{Bi}^2)(\overline{T}-T_{ср})}. \qquad (4.6)$$

Связь между среднеобъемной температурой и температурой поверхности :

$$\overline{T}-T_{ср} \approx \frac{2\,\mathrm{Bi}}{\mu_1^2}(T_{пов}-T_{ср}). \qquad (4.7)$$

Первый корень характеристического уравнения может быть найден также посредством деления отрезка пополам.

2.5. Конечный цилиндр

Рассмотрим цилиндр радиуса R_1 и конечной высоты $2R_2$. Аналогично случаю бесконечного бруса п. 2.2 распределение температуры внутри цилиндра будет представляться в виде произведения двух рядов : ряда для бесконечного цилиндра (4.1) и ряда для пластины (1.1). Пусть r - текущий радиус цилиндра, x - координата вдоль его оси, отсчитываемая от середины, $\mathrm{Bi}_1 = \alpha R_1/\lambda$, $\mathrm{Bi}_2 = \alpha R_2/\lambda$, все исходные данные такие же, как в предыдущих пунктах. Тогда распределение температуры внутри цилиндра описывается рядом

$$\theta(r,x,\tau) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4\,\mathrm{Bi}_1 \sin(\mu_j^{(2)}) \cos(\mu_j^{(2)} x / R_2)\, J_0(\mu_i^{(1)} r / R_1)}{(\mu_j^{(2)} + \sin(\mu_j^{(2)}) \cos(\mu_j^{(2)}))\, J_0(\mu_i^{(1)})\, ((\mu_i^{(1)})^2 + \mathrm{Bi}_1^2)} \times$$

$$\times \exp\left(-\left((\mu_i^{(1)}/R_1)^2 + (\mu_j^{(2)}/R_2)^2\right) \lambda \tau / C\rho\right). \quad (5.1)$$

Здесь $\mu_j^{(2)}$ - корни характеристического уравнения для пластины : $\mathrm{Bi}_2 \cos(\mu^{(2)}) = \mu^{(2)} \sin(\mu^{(2)})$, а $\mu_i^{(1)}$ - для бесконечного цилиндра : $\mu^{(1)} J_0'(\mu^{(1)}) + \mathrm{Bi}_1 J(\mu^{(1)}) = 0$. В приближении первого члена время охлаждения (нагревания) цилиндра

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2 + (\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{4\,\mathrm{Bi}_1 \sin(\mu_1^{(2)}) \cos(\mu_1^{(2)} x / R_2)\, J_0(\mu_1^{(1)} r / R_1)(T_{\text{нач}} - T_{\text{ср}})}{(\mu_1^{(2)} + \sin(\mu_1^{(2)}) \cos(\mu_1^{(2)}))\, J_0(\mu_1^{(1)})\, ((\mu_1^{(1)})^2 + \mathrm{Bi}_1^2)\, (T(x,r,\tau) - T_{\text{ср}})} \quad (5.2)$$

Для конечного цилиндра, как и для бруса и параллелепипеда, температура поверхности неодинакова в разных точках. Если под $T_{\text{пов}}$ подразумевать температуру на ребре цилиндра (ребро охлаждается (нагревается) быстрее всего), то время достижения ребром температуры $T_{\text{пов}}$

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2 + (\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{2\,\mathrm{Bi}_1 \sin(2\mu_1^{(2)})\, (T_{\text{нач}} - T_{\text{ср}})}{(\mu_1^{(2)} + \sin(\mu_1^{(2)}) \cos(\mu_1^{(2)}))\, ((\mu_1^{(1)})^2 + \mathrm{Bi}_1^2)\, (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}})} . \quad (5.3)$$

Время достижения центром цилиндра температуры $T_{\text{ц}}$.

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2 + (\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{4\,\mathrm{Bi}_1 \sin(\mu_1^{(2)})\, (T_{\text{нач}} - T_{\text{ср}})}{(\mu_1^{(2)} + \sin(\mu_1^{(2)}) \cos(\mu_1^{(2)}))\, J_0(\mu_1^{(1)})\, ((\mu_1^{(1)})^2 + \mathrm{Bi}_1^2)\, (T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}})} . \quad (5.4)$$

Ряд для среднеобъемной температуры цилиндра :

$$\bar{\theta}(\tau) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{8\,\mathrm{Bi}_1^2 \sin(\mu_j^{(2)}) \exp\left(-\left((\mu_i^{(1)}/R_1)^2 + (\mu_j^{(2)}/R_2)^2\right) \lambda\tau / C\rho\right)}{(\mu_i^{(1)})^2 \mu_j\, ((\mu_i^{(1)})^2 + \mathrm{Bi}_1^2)\, (\mu_j^{(2)} + \sin(\mu_j^{(2)}) \cos(\mu_j^{(2)}))} . \quad (5.5)$$

Время охлаждения (нагрева) до заданной среднеобъемной температуры $\bar{T}$:

$$\tau \approx \frac{C\rho/\lambda}{(\mu_1^{(1)}/R_1)^2 + (\mu_1^{(2)}/R_2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{8\,\mathrm{Bi}_1^2 \sin^2(\mu_1^{(2)})\, (T_{\text{нач}} - T_{\text{ср}})}{(\mu_1^{(1)})^2 \mu_1^{(2)}\, ((\mu_1^{(1)})^2 + \mathrm{Bi}_1^2)\, (\mu_1^{(2)} + \sin(\mu_1^{(2)}) \cos(\mu_1^{(2)}))\, (\bar{T} - T_{\text{ср}})} . \quad (5.6)$$

Связь между среднеобъемной температурой и температурой поверхности :

$$\bar{T} - T_{\text{ср}} = \frac{2\,\mathrm{Bi}_1 \mathrm{Bi}_2}{(\mu_1^{(1)})^2 (\mu_1^{(2)})^2} (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}) . \quad (5.7)$$

2.6. Шар

Рассмотрим шар радиуса R, r - текущий радиус. Все исходные данные такие же , как в предыдущих пунктах. Ряд для распределения температуры внутри шара :

$$\theta(r,\tau) = \frac{2\,\mathrm{Bi}\,R}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} (\mu_i^2 + (\mathrm{Bi}-1)^2)^{1/2} \sin(\mu_i r / R)}{\mu_i (\mu_i^2 + \mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}-1))} \times$$

$$\times \exp(-\mu_i^2 \lambda \tau / C\rho R^2) . \quad (6.1)$$

Здесь μ_i – корни характеристического уравнения $\mu \cos(\mu) + (\mathrm{Bi} - 1) \sin(\mu) = 0$. Они также образуют бесконечную возрастающую последовательность, первый корень лежит в пределах от 0 до π . Время охлаждения (нагревания) шара до заданной температуры в приближении первого члена ряда (6.1) :

$$\tau \approx \frac{C\rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{2\,\mathrm{Bi}\,R \sin(\mu_1 r / R)\, (\mu_1^2 + (\mathrm{Bi}-1)^2)^{1/2}\, (T_{\text{нач}} - T_{\text{ср}})}{r \mu_1 (\mu_1^2 + \mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}-1))\, (T(r,\tau) - T_{\text{ср}})} . \quad (6.2)$$

В случае заданной температуры поверхности $T_{пов}$:

$$\tau \approx \frac{C \rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{2\,Bi \sin(\mu_1)\,(\mu_1^2 + (Bi - 1)^2)^{1/2}\,(T_{нач} - T_{ср})}{\mu_1\,(\mu_1^2 + Bi\,(Bi - 1))\,(T_{пов} - T_{ср})} . \qquad (6.3)$$

В случае заданной температуры центра $T_ц$:

$$\tau \approx \frac{C \rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{2\,Bi\,(\mu_1^2 + (Bi - 1)^2)^{1/2}\,(T_{нач} - T_{ср})}{(\mu_1^2 + Bi\,(Bi - 1))\,(T_ц - T_{ср})} . \qquad (6.4)$$

Ряд для среднеобъемной температуры шара :

$$\overline{\theta}(\tau) = 6\,Bi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}\,(\mu_i^2 + (Bi-1)^2)^{1/2}\,\sin(\mu_i)\,\exp(-\mu_i^2 \lambda \tau / C \rho R^2)}{\mu_i^3\,(\mu_i^2 + Bi\,(Bi - 1))} . \qquad (6.5)$$

Время охлаждения (нагревания) до заданной среднеобъемной температуры $\overline{T}$:

$$\tau \approx \frac{C \rho R^2}{\lambda \mu_1^2} \ln \frac{6\,Bi^2\,(\mu_1^2 + (Bi - 1)^2)^{1/2} \sin(\mu_1)\,(T_{нач} - T_{ср})}{\mu_1^3\,(\mu_1^2 + Bi\,(Bi - 1))\,(\overline{T} - T_{ср})} . \qquad (6.6)$$

Связь между среднеобъемной температурой и температурой поверхности :

$$\overline{T} - T_{ср} \approx \frac{3\,Bi}{\mu_1^2}\,(T_{пов} - T_{ср}) . \qquad (6.7)$$

3. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Программа для расчета времени охлаждения (нагревания) представлена в приложении . Рассмотрим ее структуру.

Строки 1 - 29. Вводим необходимые числовые данные, каждое из которых программа запрашивает по отдельности, что уменьшает вероятность ошибки при вводе. Для выявления возможной ошибки при вводе температур программа обеспечена защитой – строки 13 - 16. В этих строках происходит проверка: лежит ли значение температуры, до которого необходимо охладить (нагреть) тело, между начальной температурой и температурой среды. Если это не так, программа выражает недовольство и вновь запрашивает данные.

Строки 31 - 42. Здесь происходит вычисления для случая бесконечной пластины. Программа вначале запрашивает толщину пластины (строки 31 - 32), затем вычисляет число Био (строка 33) , находит первый корень характеристического уравнения методом деления отрезка [0 ; $\pi/2$] пополам с точностью 0,0005 (строки 34 - 37) и считает время по формулам , приведенным в пункте 2 (строки 38 - 42) .

Строки 45 - 65 - то же для бесконечного бруса , 67 - 92 - для параллелепипеда , 95 - 109 - для бесконечного цилиндра, 112 - 135 - для конечного цилиндра и 137 - 148 - для шара. Отметим, что в строках 101 - 102 и 122 - 123 J0 - функция Бесселя нулевого порядка , вычисляемая по первым 6 членам ее ряда Тейлора , а J1 - производная функции J0 с обратным знаком , вычисляемая так же.

Строки 30 , 43 - 44 , 65 - 66 , 93 - 94 , 110 - 111 и 136 являются управляющими - в зависимости от коэффициента формы тела они отдают управление нужному блоку программы.

Строки 149 - 168. Здесь происходит вывод результатов на экран. Если вычисленное по приближению первого члена ряда время оказывается отрицательным , то программа пишет, что оно незначительно (см. пункт 2) . Так же проверяется на осмысленность и вычисляемая по первому члену среднеобъемная температура (она должна лежать между температурой среды и температурой поверхности). Отметим, что независимо от того, задана ли конечная среднеобъемная температура , температура на поверхности или в центре , программа вычисляет время для всех трех случаев, а затем нужное время выводит на экран (остальные остаются в оперативной памяти). Это делается исключительно для уменьшения размеров программы, и практически не сказывается на ее быстродействии – все вычисления происходят за 1 - 2 секунды.

Строки 169 - 175. Здесь программа запрашивает, нужно ли провести вычисления еще раз. Если нажать клавишу с буквой "Д" ("Да"), то программа снова начнет работать с самого начала. Если же нажать "Н" ("Нет"), то программа закончит работу.

4. ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С ПРОГРАММОЙ

В настоящем разделе будет приведена подробная инструкция по пользованию программой. Она рассчитана на пользователя, не имеющего никаких навыков работы на компьютере .

1. Включить машину. Для этого воткнуть вилку блока питания в розетку, включить сам блок переключателем "сеть" и нажать кнопку "power" на корпусе компьютера.

2. Подождать около 1 минуты,пока машина загрузится, т. е. до появления на экране синих панелей (Norton Commander).

3. На экране будет виден курсор, который перемещается по экрану пос-

редством нажатия кнопок со стрелочками (курсорных клавиш). Необходимо подвести курсор к названию файла "temper.exe" и нажать клавишу "Enter".

4. После этого программа сама начнет запрашивать исходные данные. Вводить их следует посредством клавиш с цифрами. Вместо запятой, которая отделяет целую часть числа от дробной , нужно использовать точку (клавиша с буквой "ю"). Если целая часть числа равна нулю , то вводить перед точкой нуль не обязательно (например,число 0,5 можно набрать так: .5). При вводе отрицательных чисел перед ними необходимо набрать знак "минус" – клавиша справа от клавиши "нуль". После того как число набрано, нужно нажать клавишу "Enter". После этого машина запросит следующее данное .

5. После того как все данные будут введены , машина выдаст на экран расчетное время и спросит, нужно ли еще раз произвести расчет. Если нажать клавишу с буквой "Н", то программа закончит работу, и вы снова увидите на экране синие панели Norton Commander.

6. Если при вводе данных вы ошиблись и набрали не то:

а) если при этом вы не успели нажать клавишу "Enter", то вы можете убрать неправильные цифры с помощью клавиши "Back Space" ;

б) если вы уже нажали "Enter" , т. е. ввели неправильное данное в программу, то придется досчитать до конца с неправильными данными, а затем запустить программу снова.

7. После того как все вычисления закончены, нужно выключить машину в последовательности , обратной позиции 1 (кнопка "Power", переключатель "сеть" на блоке питания , вилка из розетки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. , Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Главиздат, 1953. - 680 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
1 PRINT "Введите температуру окружающей тело среды (градусы Цельсия)"
2 INPUT TA
3 PRINT "Введите начальную температуру тела (градусы Цельсия)"
4 INPUT TB
5 PRINT "Введите номер задачи ( 1 - если необходимо вычислить время до "
6 PRINT "заданной среднеобъемной температуры , 2 - до за данной "
7 PRINT "температуры поверхности , 3 - до заданной темпе ратуры в центре )"
8 INPUT w
9 PRINT "Введите  температуру , до которой необходимо"
10 PRINT " охладить или нагреть тело (градусы Цельсия)"
11 INPUT T
12 DT = (TB - TA) / (T - TA)
13 IF DT < 1 THEN
14 PRINT "Что за чушь ?! Введите нормальные данные !"
15 GOTO 1
16 END IF
17 PRINT "Введите коэффициент теплопроводности тела (Вт/(м*К))"
18 INPUT L
19 PRINT "Введите коэффициент теплоотдачи от тела (Вт/(К*м^2))"
20 INPUT A
21 PRINT "Введите теплоемкость тела (Дж/кг*К)"
22 INPUT CU
23 PRINT "Введите плотность тела (кг/м^3)"
24 INPUT ro
25 C = CU * ro
26 PRINT "Введите коэффициент формы тела ( 0 - бесконечная пластина , "
27 PRINT " 1 - бесконечный прямоугольный брус , 2 - параллелепипед ,"
28 PRINT " 3 - бесконечный цилиндр , 4 - конечный цилиндр , 5 - шар ) "
29 INPUT k
30 IF k > .5 THEN GOTO 44
31 PRINT "Введите толщину пластины (м)"
32 INPUT R
33 Bi = .5 * A * R / L
34 m = .785398
35 FOR i = 3 TO 13 STEP 1
36 m = m + 3.141593 * SGN(Bi * COS(m) - m * SIN(m)) / 2 ^ i
37 NEXT i
38 SC = C * R ^ 2 / (4 * L * m ^ 2)
39 TI1 = SC * LOG(2 * (SIN(m)) ^ 2 * DT / (m * (m + .5 * SIN(2 * m))))
40 TI2 = SC * LOG(SIN(2 * m) * DT / (m + .5 * SIN(2 * m)))
41 T2 = TA + (T - TA) * Bi / m ^ 2
42 TI3 = SC * LOG(2 * SIN(m) * DT / (m + .5 * SIN(2 * m)))
```

```
43 GOTO 149
44 IF k > 1.5 THEN GOTO 66
45 PRINT "Введите ширину и толщину бруса (м)"
46 INPUT R1
47 INPUT R2
48 Bi1 = .5 * A * R1 / L
49 Bi2 = .5 * A * R2 / L
50 m1 = .785398
51 m2 = .785398
52 FOR i = 3 TO 13 STEP 1
53 m1 = m1 + 3.141593 * SGN(Bi1 * COS(m1) - m1 * SIN(m1)) / 2 ^ i
54 m2 = m2 + 3.141593 * SGN(Bi2 * COS(m2) - m2 * SIN(m2)) / 2 ^ i
55 NEXT i
56 SC = C / (4 * L * (m1 ^ 2 / R1 ^ 2 + m2 ^ 2 / R2 ^ 2))
57 n1 = 2 * (SIN(m1)) ^ 2 / (m1 * (m1 + .5 * SIN(2 * m1)))
58 n2 = 2 * (SIN(m2)) ^ 2 / (m2 * (m2 + .5 * SIN(2 * m2)))
59 TI1 = SC * LOG(n1 * n2 * DT)
60 n1 = n1 * m1 * COS(m1) / SIN(m1)
61 n2 = n2 * m2 * COS(m2) / SIN(m2)
62 TI2 = SC * LOG(n1 * n2 * DT)
63 T2 = TA + (T - TA) * Bi1 * Bi2 / (m1 * m2) ^ 2
64 TI3 = SC * LOG(n1 * n2 * DT / (COS(m1) * COS(m2)))
65 GOTO 149
66 IF k > 2.5 THEN GOTO 94
67 PRINT "Введите длину , ширину и высоту параллелепипеда (м)"
68 INPUT R1
69 INPUT R2
70 INPUT R3
71 Bi1 = .5 * A * R1 / L
72 Bi2 = .5 * A * R2 / L
73 Bi3 = .5 * A * R3 / L
74 m1 = .785398
75 m2 = .785398
76 m3 = .785398
77 FOR i = 3 TO 13 STEP 1
78 m1 = m1 + 3.141593 * SGN(Bi1 * COS(m1) - m1 * SIN(m1)) / 2 ^ i
79 m2 = m2 + 3.141593 * SGN(Bi2 * COS(m2) - m2 * SIN(m2)) / 2 ^ i
80 m3 = m3 + 3.141593 * SGN(Bi3 * COS(m3) - m3 * SIN(m3)) / 2 ^ i
81 NEXT i
82 n1 = 2 * (SIN(m1)) ^ 2 / (m1 * (m1 + .5 * SIN(2 * m1)))
83 n2 = 2 * (SIN(m2)) ^ 2 / (m2 * (m2 + .5 * SIN(2 * m2)))
84 n3 = 2 * (SIN(m3)) ^ 2 / (m3 * (m3 + .5 * SIN(2 * m3)))
85 SC = C / (4 * L * (m1 ^ 2 / R1 ^ 2 + m2 ^ 2 / R2 ^ 2 + m3 ^ 2 / R3 ^ 2))
86 TI1 = SC * LOG(n1 * n2 * n3 * DT)
```



```
87 n1 = n1 * m1 * COS(m1) / SIN(m1)
88 n2 = n2 * m2 * COS(m2) / SIN(m2)
89 n3 = n3 * m3 * COS(m3) / SIN(m3)
90 TI2 = SC * LOG(n1 * n2 * n3 * DT)
91 T2 = TA + (T - TA) * Bi1 * Bi2 * Bi3 / (m1 * m2 * m3) ^ 2
92 TI3 = SC * LOG(n1 * n2 * n3 * DT / (COS(m1) * COS(m2) * COS(m3)))
93 GOTO 149
94 IF k > 3.5 THEN GOTO 111
95 PRINT "Введите радиус цилиндра (м)"
96 INPUT R
97 Bi = A * R / L
98 m = 1.2024
99 FOR i = 1 TO 13 STEP 1
100 x = m / 2
101 J0 = 1 - x ^ 2 + x ^ 4 / 4 - x ^ 6 / 36 + x ^ 8 / 576 - x ^ 10 / 14400
102 J1 = x - x ^ 3 / 2 + x ^ 5 / 12 - x ^ 7 / 144 + x ^ 9 / 2880
103 m = m + 1.2024 * SGN(Bi * J0 - m * J1) / 2 ^ i
104 NEXT i
105 SC = C * R ^ 2 / (L * m ^ 2)
106 TI1 = SC * LOG(4 * Bi ^ 2 * DT / (m ^ 2 * (m ^ 2 + Bi ^ 2)))
107 TI2 = SC * LOG(2 * Bi * DT / (m ^ 2 + Bi ^ 2))
108 T2 = TA + (T - TA) * 2 * Bi / m ^ 2
109 TI3 = SC * LOG(2 * Bi * DT / ((m ^ 2 + Bi ^ 2) * J0))
110 GOTO 149
111 IF k > 4.5 THEN GOTO 137
112 PRINT "Введите радиус цилиндра"
113 INPUT R1
114 PRINT "Введите высоту цилиндра"
115 INPUT R2
116 Bi1 = A * R1 / L
117 Bi2 = .5 * A * R2 / L
118 m1 = 1.2024
119 m2 = .785398
120 FOR i = 1 TO 13 STEP 1
121 x = m1 / 2
122 J0 = 1 - x ^ 2 + x ^ 4 / 4 - x ^ 6 / 36 + x ^ 8 / 576 - x ^ 10 / 14400
123 J1 = x - x ^ 3 / 2 + x ^ 5 / 12 - x ^ 7 / 144 + x ^ 9 / 2880
124 m1 = m1 + 1.2024 * SGN(Bi1 * J0 - m1 * J1) / 2 ^ i
125 m2 = m2 + 3.141593 * SGN(Bi2 * COS(m2) - m2 * SIN(m2)) / 2 ^ (i + 2)
126 NEXT i
127 SC = C / (L * (4 * m2 ^ 2 / R2 ^ 2 + m1 ^ 2 / R1 ^ 2))
128 n1 = 4 * Bi1 ^ 2 / (m1 ^ 2 * (m1 ^ 2 + Bi1 ^ 2))
129 n2 = 2 * (SIN(m2)) ^ 2 / (m2 * (m2 + .5 * SIN(2 * m2)))
130 TI1 = SC * LOG(n1 * n2 * DT)
```

```
131 n1 = .5 * n1 * m1 ^ 2 / Bi1
132 n2 = n2 * m2 * COS(m2) / SIN(m2)
133 TI2 = SC * LOG(n1 * n2 * DT)
134 T2 = TA + (T - TA) * 2 * Bi1 * Bi2 / (m1 * m2) ^ 2
135 TI3 = SC * LOG(n1 * n2 * DT / (J0 * SIN(m2)))
136 GOTO 149
137 PRINT "Введите радиус шара"
138 INPUT R
139 Bi = A * R / L
140 m = 1.570796
141 FOR i = 2 TO 13 STEP 1
142 m = m + 3.141593 * SGN((Bi - 1) * SIN(m) + m * COS(m)) / 2 ^ i
143 NEXT i
144 n = SQR(m ^ 2 + (Bi - 1) ^ 2) * SIN(m) / (m ^ 3 * (m ^ 2 + Bi * (Bi - 1)))
145 TI1 = C * R ^ 2 * LOG(6 * Bi ^ 2 * n * DT) / (L * m ^ 2)
146 TI2 = C * R ^ 2 * LOG(2 * Bi * n * DT * m ^ 2) / (L * m ^ 2)
147 T2 = TA + (T - TA) * 3 * Bi / m ^ 2
148 TI3 = C * R ^ 2 * LOG(2 * Bi * n * DT * m ^ 3 / SIN(m)) / (L * m ^ 2)
149 IF TA < TB THEN PRINT "Время охлаждения (с)"
150 IF TA > TB THEN PRINT "Время нагрева (с)"
151 IF w > 1.5 THEN GOTO 156
152 PRINT "до заданной среднеобъемной температуры "
153 IF TI1 > 0 THEN PRINT TI1
154 IF TI1 < 0 THEN PRINT " незначительно"
155 GOTO 169
156 IF w > 2.5 THEN GOTO 166
157 PRINT " до заданной температуры поверхности "
158 IF k = 1 OR k = 4 THEN PRINT "(температура на ребре)"
159 IF k = 2 THEN PRINT "(температура в угловой точке)"
160 IF TI2 > 0 THEN PRINT TI2
161 IF TI2 < 0 THEN PRINT " незначительно "
162 PRINT "при этом среднеобъемная температура "
163 IF (TB - T2) * (T2 - T) > 0 THEN PRINT T2
164 IF (TB - T2) * (T2 - T) < 0 THEN PRINT "не успевает заметно измениться"
165 GOTO 169
166 PRINT "до заданной температуры в центре "
167 IF TI3 > 0 THEN PRINT TI3
168 IF TI3 < 0 THEN PRINT " незначительно"
169 PRINT " Хотите запустить программу снова ? (Д/Н) "
170 WHILE INKEY$ <> "": WEND
171 DO
172 kbd$ = UCASE$(INKEY$)
173 LOOP UNTIL kbd$ = "L" OR kbd$ = "Y"
174  IF kbd$ = "L" THEN GOTO 1
175 END
```

СОДЕРЖАНИЕ

Фролов Сергей Владимирович

РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ОХЛАЖДЕНИЯ И НАГРЕВАНИЯ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Методические указания
к дипломному и курсовому проектированию
для студентов специальностей 260301, 260504,
бакалавров, магистрантов по направлению 552400
всех форм обучения

Второе издание, исправленное

Редакторы
Т.Г. Смирнова, Е.Л. Масальцева

Корректор
Н.И. Михайлова

Подписано в печать 15.02.07. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 1,16. Печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,13
Тираж 50 экз. Заказ № 49. С 16

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИИК СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9