

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

Кафедра фотоники и оптоинформатики

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Часть II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ДВИЖУЩИХСЯ
ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Учебное пособие по дисциплине
«Фотоника и оптоинформатика»



Санкт-Петербург
2006

УДК 538.56

«Специальные разделы математической физики.

Часть II. Электромагнитные волны в движущихся линейных средах»

СПб: СПбГУ ИТМО, 2006 – 38 с.

АННОТАЦИЯ

На основе дифференциальных уравнений Максвелла и материальных уравнений Минковского систематически изложена теория электромагнитных волн в движущихся линейных средах с включением актуальных вопросов современной оптики (геометрическая оптика движущихся сред, эффект Ферми, детектирование движущихся объектов-«невидимок»). Методы решения задач используют теорию возмущений и асимптотические подходы. Включены задания для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области фотоники и оптоинформатики, а также в других областях оптического профиля.

Учебное пособие одобрено к изданию на заседании факультета фотоники и оптоинформатики, протокол № 3 от 27.11.2006 г.

© Санкт-Петербургский
государственный университет
информационных технологий,
механики и оптики, 2006

© Н.Н. Розанов, 2006

Содержание

1. Введение	4
2. Дифференциальные уравнения электродинамики сплошных сред	5
3. Ковариантная форма дифференциальных уравнений электродинамики сплошных сред	8
4. Материальные уравнения электродинамики сплошных сред	9
5. Материальные уравнения электродинамики движущихся сред	11
6. Эффект Френеля–Физо	13
7. Неоднородность скорости движения среды	14
8. Геометрическая оптика движущихся сред	16
8.1. Исходные соотношения и уравнение эйконала	16
8.2. Энергетические соотношения и траектории лучей	18
8.3. Поляризационные эффекты	20
9. Невзаимные волноводы и линзы	23
10. Рассеяние света на неоднородностях скорости движения среды	25
10.1. Малые размеры неоднородностей	29
10.2. Неоднородность цилиндрической формы	33
11. Оптическое детектирование движущихся объектов-«невидимок»	36
Литература	38

1. Введение

Теория электромагнитных волн служит основой современной оптики и лазерной физики. Этому классическому вопросу посвящены многие учебники и монографии [1-9]. По сравнению с классической (в отличие от квантовой) теорией электромагнитного поля в вакууме, теория электромагнитных волн в средах существенно сложнее, так как включает, помимо поля, еще и описание среды. В современной науке широко используется так называемый полуклассический подход (классическое описание электромагнитного поля и квантовое описание среды). Он оправдан, когда квантовые эффекты для поля выражены слабо (достаточно сильное электромагнитное поле с большим числом фотонов в существенных модах).

Но и полуклассический подход сравнительно сложен и доступен далеко не для всех оптических и лазерных задач. Заметно более простым и достаточным для решения большого числа важных вопросов является феноменологический подход, основанный на введении восприимчивостей среды. Этот подход превращается в последовательный в случае квантовомеханического вычисления этих восприимчивостей, но возможно и их экспериментальное задание.

Настоящее учебное пособие является продолжением пособия [10], где изложены основы классической теории электромагнитных волн в вакууме. Естественно, что предметом следующего раздела теории должны служить электромагнитные волны в сплошной среде. При этом к электромагнитному полю добавляется новая система – сплошная среда – с бесконечным числом степеней свободы. Принято разделять этот раздел на линейную и нелинейную электродинамику. Основным критерием для отнесения теории к линейной или нелинейной служит то, не учитывается (линейная теория) или учитывается (нелинейная теория) влияние самого излучения на электродинамические характеристики среды, в которой распространяется излучение. Часто в качестве отличительного признака называют линейность или нелинейность эволюционных уравнений и выполнение или нарушения принципа суперпозиции. Однако, здесь необходимы оговорки. Формальная линейность или нелинейность уравнений не является абсолютной, так как известны преобразования, переводящие уравнения из одного класса в другой. Что же касается принципа суперпозиции, то нельзя забывать, что помимо уравнений для решения эволюционных задач необходимо задавать и начальные условия. При этом для среды с инерционным откликом (с частотной дисперсией) даже в линейных моделях принцип суперпозиции может не соблюдаться в масштабе чрезвычайно коротких импульсов, актуальных для современной лазерной физики.

Данное пособие посвящено линейным электромагнитным волнам в сплошных средах. И эта тема весьма обширна и описана также во многих учебниках, среди которых особо выделим [2-4, 6]. Поэтому здесь мы

ограничились более детальным изложением тех вопросов, которые ранее были представлены только в периодической литературе. А именно, в пособии систематически изложена теория электромагнитных волн в движущихся средах, и в значительной мере в средах с пространственно неоднородным распределением скорости движения среды. В этой области в учебниках неизменно присутствует эффект Френеля-Физо частичного увлечения света и реже менее известный эффект Ферми поворота плоскости поляризации излучения, проходящего через вращающуюся среду. Однако, этими примерами тема не исчерпывается, и актуальность вопроса возрастает в связи с прогрессом в повышении точности оптических и лазерных измерений. Изложение в пособии в значительной степени основывается на обзоре [11], но не ограничивается им. Кроме того, для доступности материала в начале пособия приведен принадлежащий Лоренцу вывод уравнений электродинамики сплошной среды, исходя из представленных в предыдущем пособии [10] уравнений Максвелла в вакууме с зарядами и токами (разделы 2 и 3). Далее представлен общий вид линейных материальных уравнений (раздел 4) и их вариант для движущихся сред (раздел 5).

Методы решения задач включают теорию возмущений и асимптотические подходы. Наличие малого параметра – отношения скорости движения среды к скорости света в вакууме – позволяет обойти технически сложную проблему учёта условий непрерывности на границах раздела сред. Представляется, что читателю будет полезным самостоятельное решение ряда приведенных задач. При этом рекомендуется использовать и предыдущее учебное пособие [10], так как в данном пособии не повторяются приведенные в [10] Приложения с математическими формулами. Как и в [10], здесь номер формул включает (на первом месте) номер раздела, но при ссылках внутри раздела его номер опускается.

2. Дифференциальные уравнения электродинамики сплошных сред

Здесь приводится принадлежащий Лоренцу вывод макроскопических уравнений Максвелла для сплошной среды [2, 12]. Исходными служат микроскопические уравнения Максвелла в вакууме с зарядами, причем здесь мы будем пользоваться обозначениями [10].

Микровеличины – напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей, плотность электрических зарядов ρ и токов \mathbf{j} – в вакууме будем помечать индексом μ . Уравнения Максвелла в вакууме (в [10] это уравнения (14.1)-(14.4)) имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\mu} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{\mu}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_\mu}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\mu \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\mu = 0, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_\mu = 4\pi\rho_\mu. \quad (2.4)$$

При этом уравнение непрерывности в [10] (14.5) записывается в форме

$$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\mu = 0. \quad (2.5)$$

Смысл операторов rot и div пояснялся в [10], величина c – скорость света в вакууме, t – время.

Усреднение проводится по физически бесконечно малым объемам V и временным интервалам 2τ (размер объема много больше межатомного расстояния, но много меньше характерного размера изменения поля, в том числе длины волны, или размера тела. Аналогично, временной интервал усреднения много больше характерного времени изменения микрополей, но много меньше времени изменения поля, в том числе оптического периода, и свойств среды. Определение среднего значения величины f следующее:

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = f(\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{2\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} d\tau \frac{1}{V} \int_V dV f(\mathbf{r}, \tau). \quad (2.6)$$

Конкретная форма объема V не существенна, можно считать, что это куб, включающий точку \mathbf{r}_0 , в которой вычисляется усредненная величина.

При усреднении (1)-(5) требуется менять местами операции усреднения и дифференцирования. Нетрудно убедиться, что это оправдано, то есть операции усреднения и дифференцирования коммутируют.

Задание 1. Пользуясь определением (6), показать, что $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle$.

Задание 2. Аналогично, показать, что $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle$.

Введем средние значения напряженностей полей

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_\mu \rangle, \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{H}_\mu \rangle. \quad (2.7)$$

Тогда усреднением (1) и (3) сразу получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.9)$$

Усреднение двух оставшихся уравнений Максвелла дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}_\mu \rangle, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \langle \rho_\mu \rangle, \quad (2.11)$$

а из уравнения непрерывности (5) следует

$$\frac{\partial \langle \rho_\mu \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \mathbf{j}_\mu \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Преобразование этих уравнений, в которые входят плотности заряда и тока, требует задания некоторых свойств среды. Будем разделять заряды на связанные (индекс b , от англ. *bound*) и свободные (индекс f , от англ. *free*), в зависимости от того, локализовано ли их движение под действием полей пределами атома или молекулы, или же значительно превышает эти размеры:

$$\rho_\mu = \rho_b + \rho_f, \quad \mathbf{j}_\mu = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_f. \quad (2.13)$$

Будем считать, что заряды не переходят из одной группы в другую (тем самым мы исключаем из рассмотрения такие процессы как, например, ионизация). Тогда уравнение непрерывности можно записать для каждой из двух групп

$$\frac{\partial \langle \rho_b \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \mathbf{j}_b \rangle = 0, \quad \frac{\partial \langle \rho_f \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \mathbf{j}_f \rangle = 0. \quad (2.14)$$

Введем вектор поляризации среды \mathbf{P} (его смысл поясняется позже) соотношением

$$\langle \rho_b \rangle = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (2.15)$$

Поскольку поляризация \mathbf{P} пропорциональна плотности связанных зарядов, дополнительно считаем, что вне тела, где $\rho_b = 0$, и $\mathbf{P} = 0$. Связь \mathbf{P} с ρ_b выражается оператором div по следующим причинам. Проинтегрируем (15) по объему, охватывающему тело:

$$\int \rho_b dV = -\int \operatorname{div} \mathbf{P} dV = -\oint_S \mathbf{P} dS = 0. \quad (2.16)$$

Здесь S – поверхность объема интегрирования. Это соотношение подтверждает (15).

Теперь

$$\operatorname{div} \left\{ \langle \mathbf{j}_b \rangle - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\} = 0. \quad (2.17)$$

Так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ для любого вектора \mathbf{V} , то

$$\langle \mathbf{j}_b \rangle - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (2.18)$$

где введен вектор намагниченности среды \mathbf{M} , смысл которого также следует выяснить отдельно. Теперь традиционно вводятся вектор электрической индукции \mathbf{D} и вектор магнитной напряженности \mathbf{H}

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad (2.19)$$

а также положим

$$\rho = \langle \rho_f \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle \mathbf{j}_f \rangle. \quad (2.20)$$

Теперь оставшиеся два уравнения Максвелла примут вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (2.22)$$

По смыслу введенных поляризаций вне вещества (в вакууме), где связанных зарядов нет, $\mathbf{P} = 0, \mathbf{M} = 0$. Рассматривая диэлектрик (без свободных зарядов), можно преобразовать выражение для дипольного момента $\mathbf{d} = \int_V dV \langle \rho_b \rangle \mathbf{r}$ к виду $\mathbf{d} = \int_V dV \mathbf{P}$ [2, 12]. Отсюда следует, что \mathbf{P} имеет смысл плотности электрического дипольного момента связанных зарядов среды. Аналогично \mathbf{M} имеет смысл плотности магнитного дипольного момента:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}], \quad (2.23)$$

где \mathbf{v} – скорость движения свободных зарядов.

Таким образом, основные дифференциальные уравнения электродинамики сплошных сред имеют вид (8), (9), (21) и (22). Эта система незамкнутая (неполная), так как даже если мы знаем в начальный момент времени все фигурирующие в этих уравнениях величины, то число динамических (включающих временную производную) уравнений недостаточно для предсказания дальнейшей эволюции (решения задачи Коши). Поэтому необходимо привлечение «материальных уравнений» – соотношений между величинами $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \rho, \mathbf{j}$, которые обсуждаются ниже в разделе 4. Условия применимости уравнений электродинамики сплошной среды, помимо указанных в [10], связаны с возможностью усреднения величин по физически бесконечно малым объемам и промежуткам времени. Основное условие состоит в требовании большого числа частиц (электронов, атомов и т.д.) в объеме с размерами порядка характерной длины волны излучения. Поэтому нельзя непосредственно применять эту теорию в случаях разреженных газов или коротковолнового (рентгеновского) излучения. В то же время для длинноволнового излучения эта теория может описывать среды со сравнительно сложной микроструктурой, в том числе созданные искусственно (наноструктуры и так называемые метаматериалы) для достижения желательных оптических свойств среды.

3. Ковариантная форма дифференциальных уравнений электродинамики сплошных сред

Для сплошной среды, в отличие от вакуума (см. [10]), требуется уже ввести не один антисимметричный 4-тензор электромагнитного поля, а два (в ковариантном и контравариантном видах)

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & H_z & -H_y \\ D_y & -H_z & 0 & H_x \\ D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Тогда можно проверить, что «дифференциальные» уравнения Максвелла для сплошной среды (2.8), (2.9), (2.21) и (2.22) могут быть записаны в следующей ковариантной форме

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k} = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial Q^{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^i, \quad (3.4)$$

где 4-вектор тока \mathbf{j}^i имеет компоненты $j^0 = c\rho$, $j^k = j_k$, $k=1,2,3$.

Поскольку закон преобразования 4-векторов и тензоров при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую известен (см. соотношения (3.4)-(3.7) в [10]), мы можем найти преобразование соответствующих величин в разных системах отсчета. В отличие от вакуума, наличие среды выделяет здесь предпочтительную систему координат, в которой покоится центр инерции среды.

Задание 3. Получить из (3) и (4) уравнения (2.8), (2.9), (2.21) и (2.22).

Указание: См. *Задание 5* в [10] и пояснения к нему.

4. Материальные уравнения электродинамики сплошных сред

В области линейной электродинамики (не сильные поля) соотношения между индукциями \mathbf{D} , \mathbf{B} и плотностью тока \mathbf{j} , с одной стороны, и напряженностями \mathbf{E} , \mathbf{H} , с другой стороны, линейные. Поскольку в обычных условиях скорости движения электронов в среде $v \ll c$, то, например, электрическая индукция \mathbf{D} - линейная функция напряженности \mathbf{E} , а вклад в \mathbf{D} от \mathbf{H} мал. Тогда

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^t dt' \int \varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4.1)$$

$$B_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^t dt' \int \mu_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') H_j(t', \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4.2)$$

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (4.3)$$

Пределы интегрирования в (1)–(3) по времени отражают принцип причинности – зависимость отклика среды в момент времени t только от значений напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} только в предшествующие моменты времени $t' < t$. По координатам интегрирование обычно проводится в бесконечных пределах. Более точно, из теории относительности следует, что отклик среды в момент времени t в точке с координатами \mathbf{r} может зависеть только от значений полей в моменты времени $t' < t$ с координатами \mathbf{r}' , удовлетворяющими соотношению $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < c(t - t')$. Однако, обычно нелокальность отклика (пространственная дисперсия) оптических сред пренебрежимо мала, так что можно считать $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'$, то есть $\varepsilon_{ij} \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – дельта-функция, и т.д. Тензорный характер ε_{ij} , μ_{ij} и σ_{ij} учитывает анизотропию среды, в изотропной среде $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, и т.д. Соотношения (1)–(3) описывают в общем случае нелокальность и инерционность отклика среды, а также ее неоднородность и нестационарность.

Будем теперь считать, что среда стационарна и однородна. Тогда диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости и проводимость σ зависят только от разностей координат $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и времени $\tau = t - t'$, так что

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \varepsilon_{ij}(\tau, \mathbf{R}) E_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (4.4)$$

$$B_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \mu_{ij}(\tau, \mathbf{R}) H_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (4.5)$$

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \sigma_{ij}(\tau, \mathbf{R}) E_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (4.6)$$

Электрическая и магнитная поляризация среды вводятся соотношениями (2.19). Для них (далее для сокращения записи будем говорить о средах без свободных зарядов и токов)

$$P_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \kappa_{ij}(\tau, \mathbf{R}) E_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (4.7)$$

$$M_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \nu_{ij}(\tau, \mathbf{R}) H_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (4.8)$$

Ввиду однородности и стационарности среды удобно перейти к Фурье-преобразованию, то есть разложению полей в спектр по плоским монохроматическим волнам:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (4.9)$$

Тогда

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad B_i(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij}(\omega, \mathbf{k}) H_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.10)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \kappa_{ij}(\tau, \mathbf{R}) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)], \quad (4.11)$$

$$\mu_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - 4\pi \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \nu_{ij}(\tau, \mathbf{R}) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)]. \quad (4.12)$$

Введенные в соотношениях (7) и (8) функции κ и ν – вещественные, тогда как ε и μ в общем случае комплексны.

Зависимость свойств среды в (11) и (12) от ω и \mathbf{k} выражает, соответственно, частотную (временную) и пространственную дисперсию. Частотная дисперсия отражает наличие характерных (резонансных) частот в среде, например, частот переходов между электронными уровнями. Пространственная дисперсия служит проявлением характерных пространственных размеров «микроструктуры» сплошной среды, например, размеров атомов. Обычно более важна роль частотной дисперсии.

Случай вакуума входит в данное описание, если считать $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Простейший вариант для среды отвечает пренебрежению дисперсией, когда

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon \delta_{ij}, \quad \mu_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \mu \delta_{ij}, \quad (4.13)$$

где ε и μ – постоянные величины, не зависящие от частоты и волнового вектора волны излучения.

Стандартное описание распространения пучков и импульсов (пакетов) электромагнитного излучения в однородной линейной среде основывается на разложении электрического и магнитного полей в спектр плоских волн и задания характеристик среды $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Применительно к излучению это предполагает его локализованность в пространстве и времени или же близость излучения к монохроматическому (когда переходными процессами можно пренебречь). Что же касается материальных уравнений, то, вообще говоря, при решении задачи эволюции системы «поле + среда» (задача Коши) нужно задавать начальное состояние не только поля, но и среды. В указанном только что подходе начальное состояние среды в явном виде не задается. Однако, неявно предполагается, что до прихода импульса излучения среда была невозбужденной. Эти вопросы, связанные с переходными процессами

установления состояния даже линейной среды, в которой распространяется излучение, наиболее актуальны для предельно коротких (фемтосекундных или даже субфемтосекундных) импульсов.

5. Материальные уравнения электродинамики движущихся сред

Движение среды влияет на вид материальных уравнений. Задача данного раздела ставится так. Имеется лабораторная система отсчета (обозначения без штрихов). Среда движется в этой системе со скоростью \mathbf{v} . Вид материальных уравнений для неподвижной среды известен. Требуется получить вид материальных уравнений для электрической и магнитной индукций движущейся среды.

В системе координат, движущейся вместе с изотропным диэлектриком (отмечается штрихами), материальные уравнения записываются в простейшей форме (4.13)

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}', \quad \mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}'. \quad (5.1)$$

Используя преобразования Лоренца (см. [10]), найдем, что в лабораторной системе тело становится анизотропным. При этом поляризации зависят как от электрической, так и от магнитной напряженностей. Для компонент, параллельных и перпендикулярных скорости \mathbf{v} , получим (введен показатель преломления $n^2 = \varepsilon\mu$)

$$D_{\parallel} = \varepsilon E_{\parallel}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{D}_{\perp} = \frac{\varepsilon \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_{\perp} + \frac{n^2 - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]}{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}, \quad (5.3)$$

$$B_{\parallel} = \mu H_{\parallel}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{H}_{\perp} - \frac{n^2 - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}. \quad (5.5)$$

Недостатком вида материальных уравнений Минковского (3),(5) служит то обстоятельство, что при $n^2 > 1$ знаменатель в этих выражениях может обращаться в нуль [12]. Это связано с выбором в качестве независимых переменных для материальных соотношений величин \mathbf{E}, \mathbf{H} . Избежать этой особенности можно, если принять за независимые переменные величины \mathbf{E}, \mathbf{B} . Тогда материальные соотношения записываются в виде

$$D_{\parallel} = \varepsilon E_{\parallel}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{D}_{\perp} = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_{\perp} + \frac{n^2 - 1}{n^2 c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\}, \quad (5.7)$$

$$H_{\parallel} = \frac{1}{\mu} B_{\parallel}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{1}{\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left\{ \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2} \right) \mathbf{B}_{\perp} + \frac{n^2 - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right\}. \quad (5.9)$$

При малых скоростях движения среды, когда $n^2 v^2 / c^2 < 1$, различие между этими двумя формами материальных соотношений исчезает. Поэтому с точностью до членов первого порядка по малой величине v/c материальные уравнения Минковского можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

6. Эффект Френеля–Физо

Одним из наиболее ярких эффектов электродинамики движущихся сред является эффект частичного увлечения света движущейся средой. Он был предсказан Френелем (1818 г.) задолго до создания теории относительности и вывода уравнений Максвелла при использовании несостоятельных с современной точки зрения модельных представлений об эфире и его конденсации в порах среды [13]. Тем не менее, результат Френеля был экспериментально подтвержден Физо (1851 г.), получен из дорелятивистской электронной теории Лоренца с поправками за счет частотной дисперсии, зарегистрированными в экспериментах Зеемана (1914 г.) [13], и лишь затем выведен из релятивистской формулы сложения скоростей в первом порядке по малой величине v/c . В этом разделе мы выведем основную формулу для этого эффекта из дифференциальных уравнений Максвелла и материальных соотношений Минковского.

Для упрощения записи рассмотрим распространение плоской монохроматической волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , параллельным скорости движения однородной среды. Считаем, что это направление совпадает с осью z , то есть трехмерные вектора $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, $k > 0$. Для неподвижной среды дисперсионное соотношение (между частотой и волновым вектором) имеет стандартный вид

$$k = \frac{\omega}{c} n, \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad v = 0, \quad (6.1)$$

где n – показатель преломления.

Фиксируем также линейную поляризацию излучения, положив $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{D} = (D, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H, 0)$, $\mathbf{B} = (0, B, 0)$. В комплексной записи напряженности полей пропорциональны множителю $\exp(ikz - i\omega t)$, который мы будем опускать (как и знак вещественной части). Тогда дифференциальные уравнения Максвелла (2.8), (2.9), (2.21) и (2.22) вместе с материальными уравнениями Минковского (5.10) приводят к следующим соотношениям между амплитудами полей

$$\begin{aligned} \left[k + \frac{\omega}{c^2}(\varepsilon\mu - 1)v \right] E - \frac{\omega}{c} \mu H &= 0, \\ \frac{\omega}{c} \varepsilon E - \left[k + \frac{\omega}{c^2}(\varepsilon\mu - 1)v \right] H &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Будем рассматривать (2) как однородную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно E и H . Тогда условие ее разрешимости состоит в равенстве нулю определителя системы, и это условие можно записать в форме (из двух корней выбираем положительный)

$$k = \frac{\omega}{c} n_{eff}, \quad n_{eff} = n - (n^2 - 1) \frac{v}{c}. \quad (6.3)$$

Здесь n_{eff} играет роль эффективного показателя преломления (ср. с (1)). Видно, что движение среды в направлении распространения волны уменьшает эффективный показатель преломления и, соответственно, увеличивает фазовую скорость $v_{ph} = c/n_{eff}$ по сравнению со случаем неподвижной среды. При встречном движении среды эффективный показатель преломления увеличивается, а фазовая скорость уменьшается. Это и составляет смысл эффекта Френеля-Физо, показывающего, что для полного описания распространения излучения в среде необходимо задавать не только ее электродинамические характеристики, но и скорость движения.

Задание 4. Оценить величину дополнительного фазового набега плоской волны с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм в условиях эксперимента Физо (скорость движения воды в трубе $v = 7$ м/с, длина трубы $L = 1,5$ м, показатель преломления воды $n = 1,3$).

7. Неоднородность скорости движения среды

Как уже указывалось, для описания распространения электромагнитного излучения в сплошной среде, помимо ее электродинамических характеристик (диэлектрическая и магнитная проницаемости ε и μ), нужно еще задать скорость движения среды относительно лабораторной системы отсчета. Эта скорость в общем случае зависит от времени и координат, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Если ускорение достаточно

мало, то локально можно по-прежнему пользоваться выведенными для случая $\mathbf{v} = \text{const}$ материальными уравнениями Минковского (5.10) (при $v \ll c$). В то же время наличие ускорений может приводить к дополнительным, «паразитным» (по сравнению с релятивистским) эффектам. Более точно вместо (5.10) следует записать

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \delta \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 - 1}{c} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] + \delta \mathbf{B}, \quad (7.1)$$

где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости однородной неподвижной среды (при $\mathbf{v} = 0$). Величины $\delta \mathbf{D}$ и $\delta \mathbf{B}$ представляют, соответственно, динамооптические и гироманнитные явления, а также другие возможные малые возмущения, например, обычное рассеяние на неоднородностях среды. Так, для твердых тел с вызванными неоднородностью скорости движения малыми механическими деформациями компоненты вектора $\delta \mathbf{D}$ имеют вид [11]

$$\delta D_i = a_{iklm} u_{lm} E_k. \quad (7.2)$$

Здесь a_{iklm} – тензор четвертого ранга, связанный с упругооптическими постоянными, u_{ik} – тензор деформации, E_k – компоненты вектора \mathbf{E} , индексы пробегают значения 1,2,3, соответствующие декартовым координатам x, y, z , а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Аналогично (2) соотношение для $\delta \mathbf{B}$, а также поправки за счет рассеяния на неоднородностях среды [11].

Решение рассматриваемых задач существенно облегчается малостью параметра v/c . Прежде всего, хотя это и звучит неожиданно, малость v/c позволяет отстроиться от нерелятивистских паразитных эффектов. Действительно, если рассмотреть распространение излучения, например, во вращающемся твердом диэлектрике, то вращение вызывает механические напряжения, в свою очередь приводящие к изменению оптических свойств диэлектрика (эффекты фотоупругости). Однако, эти эффекты квадратичны по скорости движения, то есть меняют эффективный показатель преломления среды на величину $\sim (v/v_s)^2$, где v_s – скорость звука в среде [11, 14]. Величина же релятивистских эффектов – первого порядка по скорости, $\sim v/c$. Таким образом, интересующие нас релятивистские эффекты являются основными при условии малости скорости движения среды: $v < v_0 = v_s^2/c$. Более точно, в этих соотношениях вместо скорости v должен фигурировать ее перепад.

Далее следует выделить два типа распределения скорости движения среды. Во-первых, скорость может быть пространственно неоднородной, но стационарной, так что в любой точке среды скорость не зависит от времени. Примером служит среда в форме тела с осью симметрии, вращающегося вокруг оси симметрии. В этом случае при падении на тело монохроматического излучения оно таким и остается, то есть

доплеровский сдвиг частоты отсутствует. Второй случай отвечает нестационарному распределению скорости. Так, уже в первой работе А. Эйнштейна по теории относительности (1905 г.) рассматривалось отражение излучения от движущегося плоского зеркала. В этой задаче свойства среды резко меняются во времени в момент приближения зеркала к точке с фиксированными координатами (в лабораторной системе). Соответственно, здесь имеет место доплеровский сдвиг частоты.

Далее мы более детально рассмотрим первый вариант, так как в нем наиболее ярко проявляются релятивистские эффекты. Второй вариант кратко обсуждается в разделе 11. Более подробное изложение можно найти в обзоре [11] и приведенной там литературе.

Задание 5. Получить выражение для доплеровского сдвига частоты плоской волны, падающей нормально на идеальное зеркало,двигающееся в направлении нормали со скоростью v .

Указание: Исходить из задачи об отражении волны от неподвижного зеркала, перейдя к системе координат, связанной с зеркалом, и воспользоваться преобразованием Лоренца.

8. Геометрическая оптика движущихся сред

8.1. Исходные соотношения и уравнение эйконала

Рассмотрим распространение монохроматического излучения с частотой ω излучения в среде с плавной (по сравнению с длиной волны излучения) неоднородностью скорости движения. Это движение считаем стационарным, со скоростью, не зависящей от времени в каждой точке пространства. Тогда, как уже указывалось, излучение остается монохроматическим и после прохождения через движущуюся среду (отсутствуют доплеровские сдвиги частоты). Нас будут интересовать траектории световых лучей и изменение поляризации света из-за движения среды. В рассматриваемом случае малых скоростей движения среды v при использовании комплексной записи поля (множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается) уравнения Максвелла (2.8) и (2.21) в отсутствие свободных зарядов и токов можно заменить следующими:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}. \quad (8.1)$$

Отсюда следуют волновые уравнения для неоднородной движущейся среды:

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} + [\text{grad ln } \mu \times \text{rot} \mathbf{E}] + \text{grad}(\text{grad ln } \varepsilon, \mathbf{E}) = \\
& = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \left\{ k_0^2 \mu [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + ik_0 \text{rot} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - ik_0 [\text{grad ln } \mu \times [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]] \right\} - \\
& - ik_0 \frac{2n}{c} [\text{grad } n \times [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]] - \text{div} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \text{grad} \frac{\varepsilon \mu - 1}{c \varepsilon} - \frac{2}{c} \text{grad} \left\{ \frac{n}{\varepsilon} (\text{grad } n, [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]) \right\}, \\
& \hspace{20em} (8.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} + [\text{grad ln } \varepsilon \times \text{rot} \mathbf{H}] + \text{grad}(\text{grad ln } \mu \times \mathbf{H}) = \\
& = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \left\{ k_0^2 \varepsilon [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] - ik_0 \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \frac{1}{\mu} \text{grad div} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] + ik_0 [\text{grad ln } \varepsilon \times [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]] \right\} - \\
& - ik_0 \frac{2n}{c} [\text{grad } n \times [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]] - \text{rot} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] \text{grad} \frac{\varepsilon \mu - 1}{c \mu} - \frac{2}{c} \text{grad} \left\{ \frac{n}{\mu} (\text{grad } n, [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]) \right\}, \\
& \hspace{20em} (8.3)
\end{aligned}$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме и $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ – по-прежнему показатель преломления среды. Отметим, что правые части этих уравнений содержат малый множитель v/c .

В приближении геометрической оптики локальная структура поля та же, что у плоской волны в однородной среде. Важно, что в среде даже с постоянной скоростью движения \mathbf{v} направления волнового вектора \mathbf{k} и среднего по времени потока энергии (вектора Пойнтинга, см. [10])

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \quad (8.4)$$

различаются (как в анизотропной среде, так как движение среды выделяет некоторое направление в пространстве) [15]. Действительно, в рассматриваемом случае из (1) и (2) для плоской волны вида $\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r})]$, $\mathbf{H} = \mathbf{h}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r})]$ следует

$$[\mathbf{q} \times \mathbf{e}_0] = \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{h}_0, \quad [\mathbf{q} \times \mathbf{h}_0] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{e}_0, \quad (8.5)$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} + \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \mathbf{v}. \quad (8.6)$$

Нетрудно видеть, что (5) при замене \mathbf{q} на \mathbf{k} совпадает с уравнениями плоской волны в неподвижной среде. Поэтому в движущейся среде вектор Пойнтинга направлен вдоль вектора \mathbf{q} (ненормированный лучевой вектор, см. ниже).

Рассмотрим теперь среду с плавным пространственным изменением скорости движения, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ищем решение в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{r}) \exp[ik_0 L(\mathbf{r})], \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}(\mathbf{r}) \exp[ik_0 L(\mathbf{r})], \quad (8.7)$$

где волновое число k_0 рассматривается как большой параметр асимптотической теории, а векторы $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ в общем случае комплексные. Подставив (7) в (1) и (2), в первом приближении по v/c и основном порядке по малому параметру k_0^{-1} получим

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ [\text{grad} L \times \mathbf{h}] + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \right\}, \quad \mathbf{h} = -\frac{1}{\mu} \left\{ [\mathbf{e} \times \text{grad} L] + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} [\mathbf{e} \times \mathbf{v}] \right\}, \quad (8.8)$$

$$(\mathbf{e}, \text{grad} L) = -\frac{\varepsilon\mu - 1}{c} (\mathbf{e}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{h}, \text{grad} L) = -\frac{\varepsilon\mu - 1}{c} (\mathbf{h}, \mathbf{v}). \quad (8.9)$$

Из (8) следует

$$n^2 - (\text{grad} L)^2 - 2 \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} (\mathbf{v}, \text{grad} L) = 0. \quad (8.10)$$

Это уравнение эйконала для случая медленно движущейся среды (при $\mathbf{v} = 0$ оно переходит в стандартное уравнение эйконала). Его можно также записать в такой форме:

$$\left(\text{grad} L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{v} \right)^2 = n^2. \quad (8.11)$$

Произвольное распределение скорости \mathbf{v} можно разложить на безвихревое (индекс 1) и соленоидальное (без источников, индекс 2), причем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \text{rot} \mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_1 = \text{grad} U, \quad \text{div} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_2 = \text{rot} \mathbf{W},$$

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div} \mathbf{v}}{r} dV, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot} \mathbf{v}}{r} dV, \quad (8.12)$$

или

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int \frac{\text{div} \mathbf{v}}{r} dV, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\text{rot} \mathbf{v}}{r} dV, \quad (8.13)$$

где r – расстояние от элемента объёма интегрирования dV до точки наблюдения.

Для движения со скоростью \mathbf{v}_1 (потенциальное течение, завихренность $\text{rot} \mathbf{v}_1 = 0$) уравнение эйконала примет вид

$$(\text{grad} M)^2 = n^2, \quad M = L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} U. \quad (8.14)$$

Уравнение эйконала для M отвечает неподвижной среде. Если среда однородна, то решением (14) служит, например, плоский волновой фронт. Тогда, зная M , из (14) найдем и L , причем в неоднородно движущейся среде волновые фронты будут искривленными.

Второй случай (движение со скоростью \mathbf{v}_2) отвечает несжимаемой жидкости. Уравнение эйконала приводится к виду

$$\left(\text{grad } M + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{v}_2 \right)^2 = n^2, \quad (8.15)$$

где $\text{div } \mathbf{v}_2 = 0$.

8.2. Энергетические соотношения и траектории лучей

Из (7)-(9) следует вид среднего по времени значения потока электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга (4)):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi\mu} (\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) \left(\text{grad } L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{v} \right). \quad (8.16)$$

Введём усреднённые по времени плотности электрической $\langle w_e \rangle$ и магнитной $\langle w_m \rangle$, а также полной энергии $\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle$:

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{e}, \mathbf{d}^*), \quad \langle w_m \rangle = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{h}, \mathbf{b}^*), \quad (8.17)$$

где \mathbf{d} и \mathbf{b} – амплитуды электрической и магнитной индукции. Можно показать, что

$$\langle w_e \rangle = -\frac{1}{16\pi} (\mathbf{e} [\text{grad } L \times \mathbf{h}^*]) = \frac{1}{16\pi} ([\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*] \text{grad } L), \quad (8.18)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{h}^* [\text{grad } L \times \mathbf{e}]) = \frac{1}{16\pi} ([\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*] \text{grad } L),$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = c_p \langle w \rangle \frac{\mathbf{s}}{\left(\mathbf{s}, \frac{\text{grad } L}{n} \right)}, \quad (8.19)$$

где $c/n = c_p$ – фазовая скорость света в неподвижной среде, а \mathbf{s} – единичный лучевой вектор, направленный вдоль вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{n} \left(\text{grad } L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{v} \right). \quad (8.20)$$

Нетрудно увидеть, что в среде с единой скоростью движения лучевой вектор направлен вдоль вектора \mathbf{q} . Для составляющей скорости света, направленной вдоль вектора \mathbf{s} , имеем

$$\mathbf{c}_s = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{\langle w \rangle} = \frac{\mathbf{s}}{\left(\mathbf{s}, \frac{\text{grad } L}{n} \right)} c_p. \quad (8.21)$$

Составляющая же скорости вдоль нормали к волновому фронту будет равна фазовой скорости c_p . Действительно, проектируя \mathbf{c}_s на это направление и привлекая (21), получим

$$c_p = \left(\mathbf{c}_s, \frac{\text{grad } L}{n} \right). \quad (8.22)$$

Определим луч как траекторию, касательная к которой в каждой точке направлена вдоль лучевого вектора \mathbf{s} . Если радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ точки, расположенной на луче, рассматривать как функцию длины s луча, то уравнение луча в движущейся среде будет иметь вид

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\text{grad } L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{v} \right) \quad (8.23)$$

или же

$$\frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad } n + \frac{2}{c} \{ \mathbf{v}(\mathbf{s}, \text{grad } n) - \text{grad } n(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \} + \frac{n^2 - 1}{c} [\mathbf{s} \times \text{rot } \mathbf{v}]. \quad (8.24)$$

Из этих соотношений можно получить и выражение для отношения интенсивностей в двух произвольных точках луча

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1} \exp \left\{ - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 L}{n} ds \right\} \left\{ 1 - \int_{s_1}^{s_2} \frac{2n}{c} (\text{grad } n, \mathbf{v}) + \frac{n^2 - 1}{c} \text{div } \mathbf{v} \right. \\ \left. - \int_{s_1}^{s_2} \frac{2n}{c} (\text{grad } n, \mathbf{v}) + \frac{n^2 - 1}{c} \text{div } \mathbf{v} ds \right\}; \quad (8.25)$$

интегрирование проводится вдоль луча, интенсивность света I определена как абсолютное значение вектора $\langle \mathbf{S} \rangle$.

Приведенные выше результаты аналогичны обычной геометрической оптике за исключением члена, пропорционального скорости в эйконе (10) и (11) и в лучевом векторе (20). Наличие этого члена приводит к искажению геометрического волнового фронта и эффективной анизотропии движущейся среды. Для среды с пространственно однородным показателем преломления из (24) следует

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{n^2 - 1}{cn} [\mathbf{s} \times \text{rot } \mathbf{v}]. \quad (8.26)$$

В этом случае среды с однородным показателем преломления лучи остаются прямыми при безвихревом движении среды, когда завихренность $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, и искривляются при наличии завихренности. Изменение же интенсивности в однородной несжимаемой среде ($\text{grad } n = 0, \text{div } \mathbf{v} = 0$) вследствие кривизны волнового фронта аналогично изменению интенсивности в вакууме, например, при распространении сферической волны.

8.3. Поляризационные эффекты

Перейдём к рассмотрению изменений векторных амплитуд \mathbf{e} и \mathbf{h} при распространении излучения. Ограничимся здесь случаем среды с однородным показателем преломления (но с неоднородным распределением скорости движения). Тогда волновые уравнения примут вид

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \left\{ k_0^2 \mu [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + ik_0 \text{rot} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\}, \quad (8.27)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \left\{ k_0^2 \varepsilon [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] - ik_0 \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \frac{1}{\mu} \text{grad div} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] \right\}. \quad (8.28)$$

Подставляя (7) в (27) и (28) и приравнивая члены при одинаковых степенях k_0 , мы получим, наряду с уравнением эйконала (10) (члены при k_0^2), и следующие уравнения для амплитуд \mathbf{e} и \mathbf{h} (члены при ik_0):

$$\begin{aligned} & (\text{grad } L \cdot \text{grad}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \nabla^2 L + \\ & + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \left\{ [\mathbf{e} \times \text{rot } \mathbf{v}] + (\mathbf{v}, \text{grad}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \text{div } \mathbf{v} - \frac{1}{2\varepsilon \mu} (\text{rot } \mathbf{v}, \text{grad } L) [\mathbf{e} \times \text{grad } L] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} & (\text{grad } L \cdot \text{grad}) \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h} \nabla^2 L + \\ & + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \left\{ [\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{v}] + (\mathbf{v}, \text{grad}) \mathbf{h} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \text{div } \mathbf{v} - \frac{1}{2\varepsilon \mu} (\text{rot } \mathbf{v}, \text{grad } L) [\mathbf{h} \times \text{grad } L] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Это и есть искомые векторные уравнения переноса, описывающие изменения \mathbf{e} и \mathbf{h} вдоль луча. Введём комплексные вектора с единичным модулем

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{(\mathbf{e}, \mathbf{e}^*)}}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{(\mathbf{h}, \mathbf{h}^*)}} \quad (8.31)$$

и параметр τ , характеризующий положение вдоль луча, причём

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \left((\text{grad } L + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \mathbf{v}), \text{grad} \right). \quad (8.32)$$

Тогда из (29)-(32) следует

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) + (\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) \left(\nabla^2 L + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \text{div } \mathbf{v} \right) = 0, \quad (8.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{h}, \mathbf{h}^*) + (\mathbf{h}, \mathbf{h}^*) \left(\nabla^2 L - \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \text{div } \mathbf{v} \right) = 0. \quad (8.34)$$

Для самих амплитуд с учетом тождества $d/d\tau = nd/ds$ имеем

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{cn} \left\{ [\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}] + \frac{1}{2} \mathbf{w} (\mathbf{s}, \text{rot } \mathbf{v}) \right\}, \quad (8.35)$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{ds} = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{cn} \left\{ [\mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{v}] - \frac{1}{2} \mathbf{u} (\mathbf{s}, \text{rot } \mathbf{v}) \right\}. \quad (8.36)$$

Последние два соотношения позволяют найти изменения поляризации излучения, к которым приводит движение среды. Их правые части

пропорциональны малому параметру v/c , поэтому в них можно заменить поле его распределением в неподвижной среде, ввиду чего эти уравнения расщепляются. Их решение удобно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \end{pmatrix}, \quad (8.37)$$

нулевые индексы соответствуют неподвижной среде.

В (37) фигурирует матрица Джонса [16], описывающая поворот вектора поляризации на угол

$$\theta = \int A ds, \quad (8.38)$$

где

$$A = \frac{\varepsilon\mu - 1}{cn} \left\{ a_z - \frac{1}{2}(\mathbf{s}, \text{rot } \mathbf{v}) \right\}, \quad (8.39)$$

Выражение для поворота плоскости поляризации согласуется с предсказанием Ферми (см. [11]), которое следует рассматривать как оценочное, поскольку при прохождении исходной плоской волны через слой вращающейся среды волну можно считать плоской только локально в приближении геометрической оптики.

При прохождении луча через слой движущейся среды толщины z_0 его траектория отклоняется от исходной прямолинейной. Модуль угла отклонения α по порядку величины

$$\alpha = \frac{(n^2 - 1)}{n} \frac{|\mathbf{v}|}{c}, \quad (8.40)$$

а сдвиг поперечных координат луча $\delta \sim \alpha z_0$. Как указывалось выше, релятивистские эффекты превалируют над динамооптическими при сравнительно малых скоростях. Для воды такая критическая скорость v_0 порядка нескольких сантиметров в секунду, а для стёкол может достигать 10 м/с. Тогда для воды ($n = 1,34$) угол отклонения $\alpha \approx 10^{-10}$, а для стекла ($n = 1,5$) $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-8}$. Сдвиги лучей могут стать заметными для достаточно протяженных трасс.

Другим эффектом служит изменение поляризационных характеристик, описываемое соотношениями (37)–(39). Отметим, что при их выводе еще не делалось никаких предположений о скорости движения среды, кроме её малости по сравнению со скоростью света. Учитывая малость искривления лучей, можно заменить интегрирование в (38) на интегрирование вдоль оси z , так что $ds \cong dz$ (параксиальное приближение [17]). Если рассматривается среда, вращающаяся вокруг направления распространения света с угловой скоростью Ω , то угол поворота

$$\theta = \frac{(n^2 - 1) \Omega z_0}{n c} = \alpha \left(\frac{z_0}{r_0} \right), \quad (8.41)$$

где z_0 – толщина слоя среды, а r_0 – удаление луча от оси вращения. Из (41) следует, что угол поворота вектора поляризации может значительно превосходить угол отклонения луча α . Наблюдение таких поворотов доступно ввиду высокой точности поляризационных измерений. Их учет может стать необходимым в схемах дальней оптической связи. Реально использование этих эффектов для диагностики распределения скорости движения жидкостей и, возможно, газов.

9. Невзаимные волноводы и линзы

В данном разделе мы продемонстрируем, что эффект частичного увлечения света движущейся жидкостью Френеля-Физо в случае поперечной неоднородности скорости движения среды может приводить к волноводному распространению излучения и его фокусировке, причем эффект оказывается невзаимным (различается для противоположных направлений распространения излучения).

Рассмотрим сначала распространяющуюся в направлении оси x плоскую монохроматическую волну с частотой ω , волновым числом k и напряженностями электрического и магнитного поля вида (комплексная форма записи)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(ikx - i\omega t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(ikx - i\omega t). \quad (9.1)$$

Пусть среда, в которой распространяется волна, движется также вдоль оси x со скоростью v ($v > 0$, если направления движения среды и света совпадают, и $v < 0$ при противоположных направлениях). Тогда для фазовой скорости волны $v_{ph} = \omega/k$ в первом порядке по малому параметру $v/c \ll 1$ имеем (см. раздел 6)

$$v_{ph} = c_p + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (9.2)$$

где n – показатель преломления неподвижной среды на частоте ω (имеется в виду частота излучения в среде, которая из-за эффекта Доплера отличается от частоты излучения, падающего извне на движущуюся среду). Это соотношение можно переписать в виде

$$v_{ph} = \frac{c}{n_{eff}}, \quad (9.3)$$

где использовано обозначение для эффективного показателя преломления (6.3).

Рассмотрим теперь среду (жидкость), скорость движения которой пространственно неоднородна. Точнее, будем считать, что скорость v зависит от поперечных (по отношению к оси x) координат. Если изменение

скорости плавное, то излучение локально близко к плоской волне, и для него можно пользоваться выражением (6.3) для эффективного показателя преломления. Тогда эффективный показатель преломления будет меняться в поперечном направлении. В зависимости от знака скорости v среда будет обладать волноводным или антиволноводным характером. Это и означает возможность создания невзаимного волновода (с различающимися свойствами для волн, распространяющихся в противоположных направлениях).

Заметим теперь, что неоднородность скорости движения жидкости характерна для большинства течений в трубах, поскольку скорость стационарного движения обычно максимальна на оси трубы и $v = 0$ на её стенках. В трубах стандартного вида (например, формы кругового цилиндра радиуса R) скорость течения квадратично зависит от расстояния от оси трубы [14]. При этом из (6.3) следует, что и эффективный показатель преломления квадратично зависит от этого расстояния:

$$n_{eff}(r) = n_{0r} - \frac{1}{2}n_{1r}r^2, \quad (9.4)$$

где

$$n_{0r} = n - \frac{v_0}{c}(n^2 - 1), \quad n_{1r} = -\frac{2}{R^2} \frac{v_0}{c}(n^2 - 1), \quad (9.5)$$

и v_0 – (максимальная) скорость течения жидкости на оси трубы.

Распространение излучения в таких квадратичных средах детально изучено в литературе (см., например, [17]). Волновод реализуется при $n_1 > 0$, то есть при $v_0 < 0$, что имеет простой физический смысл. Среду можно считать неограниченной в поперечном направлении, если поперечные размеры трубы значительно превосходят ширину моды. Полуширина низшей (основной) моды w определяется соотношением

$$w^2 = \frac{2}{k_0 \sqrt{nn_1}}. \quad (9.6)$$

Здесь, с учетом малости параметра v/c , можно пренебречь различием между n_0 и n , а волновое число k_0 определять как в однородной неподвижной среде.

Волноводный эффект реализуется в трубе, длина которой превышает характерную длину дифракции пучка с полушириной w :

$$l \gg L_d = k_0 w^2. \quad (9.7)$$

В противоположном случае короткой трубы она будет эквивалентна линзе с фокусным расстоянием

$$f = \frac{1}{n_1 L}. \quad (9.8)$$

Хотя рассматриваемый эффект возрастает при увеличении скорости течения жидкости, возможность такого увеличения ограничивается

требованием ламинарности течения. Течение может превратиться в турбулентное, если число Рейнольдса Re

$$Re = \frac{vD}{\nu_m}, \quad \nu_m = \frac{\eta}{\rho} \quad (9.9)$$

превышает некоторое критическое значение Re_{cr} [14]. Здесь ν_m – кинематическая вязкость, η – вязкость, D – характерный поперечный размер (в трубе – её диаметр), ρ – плотность жидкости. Вообще говоря, критическое значение Re_{cr} не является универсальным. Для трубы кругового сечения движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых числах Рейнольдса. При тщательном устранении возмущений у входа в трубу ламинарное течение поддерживается вплоть до значения $Re \approx 10^5$ [14].

Таким образом, при пропускании светового пучка через трубу с водой, текущей во встречном направлении, можно получить волновое распространение света, тогда как при попутном течении пучок света будет расширяться. Условия достижения волнового распространения и фокусировки за счет эффекта Френеля-Физо в оптическом диапазоне реалистичны. И радиус пучка (моды), и фокусное расстояние можно уменьшить, если использовать прозрачную жидкость с большим показателем преломления, чем у воды.

Из приведенного рассмотрения следует возможность реализации невзаимных элементов, которые ранее в лазерной технике строились преимущественно на основе эффекта Фарадея в магнитооптических материалах [18]. Применение таких невзаимных элементов способно обеспечить, например, надежную одностороннюю генерацию кольцевых лазеров. Рассмотренные релятивистские эффекты могут быть существенными и в случае газодинамических лазеров.

10. Рассеяние света на неоднородностях скорости движения среды

В этом разделе мы рассмотрим задачу дифракции электромагнитного излучения на неоднородностях скорости движения среды [11]. Удобно оперировать с получающимися из уравнений Максвелла (2.8), (2.9), (2.21) и (2.22) и Минковского (5.10) волновыми уравнениями для \mathbf{D} и \mathbf{B}

$$\square \mathbf{D} = \mathbf{f}_D, \quad \square \mathbf{B} = \mathbf{f}_B, \quad (10.1)$$

где

$$\square = \Delta - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\mathbf{f}_D = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0 - 1}{c} \left\{ \text{rot rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] \right\} - \text{rot rot} \delta \mathbf{D} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \delta \mathbf{B}, \quad (10.2)$$

$$\mathbf{f}_B = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c} \left\{ \text{rot rot} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] + \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} - \text{rot rot } \delta\mathbf{B} - \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \delta\mathbf{D}.$$

Ввиду малости скорости движения среды уравнения (1)–(2) могут быть решены по теории возмущений. При этом рассеянное излучение находится из первого порядка теории возмущений решением (1) в форме запаздывающих потенциалов [1], причем правые части этих уравнений можно считать заданными (выраженными через решения нулевого порядка, см. ниже (3)–(5)). Члены в фигурных скобках в (2) представляют релятивистские эффекты, а следующие за ними члены вне скобок – нерелятивистские. Далее мы будем учитывать только релятивистские эффекты, то есть пренебрегать $\delta\mathbf{D}$ и $\delta\mathbf{B}$, полагая, что скорость движения среды удовлетворяет этому условию.

Для решения (1) полагаем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \dots$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \dots$ и т.д. В нулевом приближении по параметру v/c (сплошная однородная неподвижная среда) невозмущенное решение \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 считаем известным. В первом приближении теории возмущений из (1) находим

$$\square \mathbf{E}_1 = \mathbf{f}_E, \quad \square \mathbf{H}_1 = \mathbf{f}_H, \quad (10.3)$$

где

$$\mathbf{f}_E = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c\varepsilon_0} \left\{ \text{grad div} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] - \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{v}] \right\}, \quad (10.4)$$

$$\mathbf{f}_H = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c\mu_0} \left\{ \text{grad div} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{v}] - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{v}] + \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \right\}.$$

Поскольку правые части уравнений (3) известны, то их решения даются в виде запаздывающих потенциалов:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{f}_E(t - R/c)}{R} dV, \quad \mathbf{H}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{f}_H(t - R/c)}{R} dV. \quad (10.5)$$

Здесь интегрирование ведется по объему движущейся среды, а R – расстояние от элементарного объема dV до точки, в которой ищутся поля. Амплитуды рассеянного поля (в первом приближении) пропорциональны, как и \mathbf{f} , малому параметру v/c . Будем считать, что неоднородности скорости сосредоточены в некоторой ограниченной области среды, и поместим начало координат в какую-либо «среднюю» точку этой области. Обозначим радиус-вектор, соединяющий начало координат и точку наблюдения, через \mathbf{R}_0 , единичный вектор в том же направлении через \mathbf{n} , радиус-вектор объема интегрирования через \mathbf{r} и радиус-вектор от объема интегрирования в точку наблюдения через \mathbf{R} , так что $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} + \mathbf{r}$. В дальнем поле (на достаточно большом расстоянии от области неоднородности скорости) можно заменить R в знаменателе

подынтегральных выражений в (5) на R_0 , а в аргументах функций в числителях на более точное выражение $R = R_0 - \mathbf{nr}$. Тогда (5) примет вид

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi R_0} \int \mathbf{f}_E \left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{nr}}{c} \right) dV, \quad \mathbf{H}_1 = -\frac{1}{4\pi R_0} \int \mathbf{f}_H \left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{nr}}{c} \right) dV. \quad (10.6)$$

Выражения (5) и (6) дают общее решение задачи дифракции (рассеяния) излучения на неоднородностях скорости движения среды произвольного вида. Падающее излучение в них также имеет произвольный вид. Более того, достаточно решить только одно из уравнений (3) или (4). Второе получается простой заменой исходных параметров. Действительно правые части этих уравнений получаются одна из другой заменой $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$ и $\mathbf{E}_0 \leftrightarrow \mathbf{H}_0$.

Важным случаем является стационарное движение среды, когда скорость ее движения в каждой точке не зависит от времени. Тогда спектр излучения не меняется, то есть частота рассеянного излучения совпадает с частотой падающего излучения (доплеровский сдвиг частоты отсутствуют). Это обстоятельство позволяет свести линейную задачу о рассеянии импульса электромагнитного излучения к рассмотрению рассеяния отдельных плоских монохроматических волн. Далее мы применим этот результат к случаю падающего излучения в виде плоской монохроматической волны с частотой ω и волновым числом $k = n\omega/c$

$$\mathbf{E}_0 = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}\mathbf{m}}(b_1, b_{11}, 0), \quad \mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}\mathbf{m}}(b_1, -b_{11}, 0), \quad (10.7)$$

где \mathbf{m} – единичный вектор направления падения волны, $b_{1,11} = |b_{1,11}| \exp(i\Delta_{1,11})$ – комплексные числа, характеризующие эллиптическую поляризацию падающего излучения, для конкретных вариантов распределения скорости. Практически в связи с большим значением скорости света к этой задаче сводится и случай квазистационарного движения среды, когда за время пробега светом области неоднородности скорости эта скорость существенно не меняется. Полагаем, что рассеивающий объект (неоднородность) представляет собой тело вращения с линейной скоростью вращения

$$\mathbf{v} = \begin{cases} [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}], & \mathbf{r} \in V, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V, \end{cases} \quad (10.8)$$

где V – объем вращающегося тела и $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения. Ниже в этом разделе мы рассмотрим рассеяние электромагнитных волн для случаев, когда решение задачи представляется в аналитическом виде. Это задача рассеяния на неоднородностях скорости вращения, размеры которых малы по сравнению с длиной волны λ и которые имеют произвольную осесимметричную форму, и задача рассеяния на неоднородности вращения цилиндрической формы.

Разделим поляризации, представив электрическое и магнитное поле падающей волны в виде

$$\mathbf{E}_0 = b_I \mathbf{E}_{0II} + b_I \mathbf{E}_{00I}, \quad \mathbf{H}_0 = b_I \mathbf{H}_{0I} + b_I \mathbf{H}_{00I}, \quad (10.9)$$

$$\mathbf{E}_{0I} = e^{-i\omega t + ikrm} \tilde{\mathbf{E}}_0, \quad \mathbf{H}_{0I} = -\sqrt{\varepsilon/\mu} e^{-i\omega t + ikrm} \tilde{\mathbf{H}}_0, \quad (10.10)$$

$$\mathbf{E}_{00I} = e^{-i\omega t + ikrm} \tilde{\mathbf{H}}_0, \quad \mathbf{H}_{00I} = \sqrt{\varepsilon/\mu} e^{-i\omega t + ikrm} \tilde{\mathbf{E}}_0,$$

где $\tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{H}}_0$ – постоянные векторы. Из-за линейности задачи общее решение при падении такой волны будет выглядеть аналогично (9):

$$\mathbf{E}_I = b_I \mathbf{E}_{II} + b_{II} \mathbf{E}_{II}, \quad \mathbf{H}_I = b_I \mathbf{H}_I + b_{II} \mathbf{H}_{II}. \quad (10.11)$$

Ввиду симметрии задачи, отмеченной выше, поля \mathbf{E}_{II} и \mathbf{H}_{II} связаны с \mathbf{E}_I и \mathbf{H}_I простыми соотношениями

$$\mathbf{E}_{II} = -\sqrt{\mu/\varepsilon} \mathbf{H}_I, \quad \mathbf{H}_{II} = \sqrt{\varepsilon/\mu} \mathbf{E}_I. \quad (10.12)$$

Отметим, что векторы $\mathbf{E}_I, \mathbf{H}_I, \mathbf{E}_{II}, \mathbf{H}_{II}, \mathbf{n}$ ортогональны между собой.

Введём безразмерную переменную $\mathbf{q} = k\mathbf{r}$. Тогда исходя из (3), (4), (8), (9) и (10), выражения для рассеянного поля можно представить в виде

$$\mathbf{E}_I = S_E \iiint d\mathbf{q} \left\{ \boldsymbol{\Omega}_\perp(\tilde{\mathbf{H}}_0, \mathbf{q}) - \mathbf{q}_\perp(\tilde{\mathbf{H}}_0, \boldsymbol{\Omega}) + [\mathbf{n} \times \mathbf{q}](\tilde{\mathbf{E}}_0, \boldsymbol{\Omega}) - [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}](\tilde{\mathbf{E}}_0, \mathbf{q}) \right\} \Phi(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{n}-\mathbf{m})} \quad (10.13)$$

$$\mathbf{H}_I = S_H \iiint d\mathbf{q} \left\{ -\boldsymbol{\Omega}_\perp(\tilde{\mathbf{E}}_0, \mathbf{q}) + \mathbf{q}_\perp(\tilde{\mathbf{E}}_0, \boldsymbol{\Omega}) + [\mathbf{n} \times \mathbf{q}](\tilde{\mathbf{H}}_0, \boldsymbol{\Omega}) - [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}](\tilde{\mathbf{H}}_0, \mathbf{q}) \right\} \Phi(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{n}-\mathbf{m})} \quad (10.14)$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_\perp, \mathbf{q}_\perp$ – двумерные вектора, перпендикулярные направлениям соответствующих векторов. Коэффициенты перед интегралами имеют вид

$$S_E = \frac{n^2 - 1}{4\pi c n k^2} \frac{e^{-i\omega t + ikR_0}}{R_0}, \quad S_H = \sqrt{\varepsilon/\mu} S_E, \quad (10.15)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V. \end{cases}$$

При непосредственной регистрации рассеянного излучения без его смешения с опорной волной энергетические характеристики будут квадратичны по угловой скорости (и по параметру v_c/c) и определяются дифференциальным сечением рассеяния $P(\theta, \phi, \alpha)$, где α – угол между осью вращения и направлением падения электромагнитной волны. Последнее вводится соотношением

$$P(\theta, \phi, \alpha) = \frac{w}{w_0} R_0^2, \quad (10.16)$$

где w_0 – плотность энергии в падающей волне, w – плотность рассеянной электромагнитной энергии, определяемая выражением

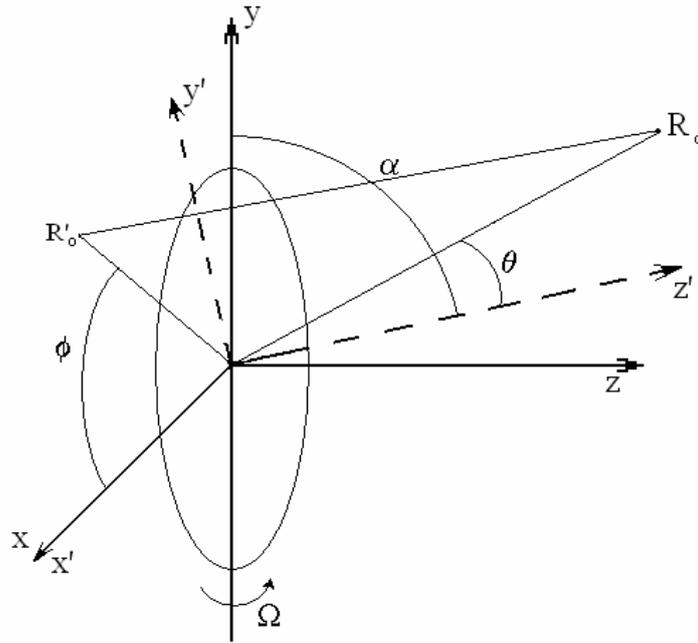


Рис. 1. Системы координат (см. текст)

$$w = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} (\text{Re} \mathbf{E}_1)^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} (\text{Re} \mathbf{H}_1)^2. \quad (10.17)$$

Интегрируя дифференциальное сечение $P(\theta, \phi, \alpha)$ по телесному углу, получим полное сечение рассеяния σ .

Прежде чем перейти к конкретным расчётам покажем используемые в задаче системы координат. Они приведены на рис. 1. Здесь система (x, y, z) связана с областью вращающейся среды, причём ось y совпадает с осью вращения неоднородности. Система (x', y', z') связана с падающей плоской волной. Направление распространения волны совпадает с осью z' и образует с осью вращения y угол α . Оси x и x' совпадают, поэтому оси z' и y' лежат в плоскости (z, y) . Радиус-вектор \mathbf{OR}_0 , связывающий центр системы координат и точку наблюдения, образует с осью z' угол θ , а его проекция R'_0 на плоскость (x', y') образует с осью x' угол ϕ .

10.1. Малые размеры неоднородностей

Вычисления более просты в случае рассеивающих неоднородностей малых размеров, то есть при $|\mathbf{q}| \ll 1$. Тогда рассеивающая частица приобретает, из-за малости изменения напряженностей электромагнитного поля в пределах частицы, определенные электрический и магнитный моменты. Зависимость их от времени даётся множителем $\exp(-i\omega t)$. Разлагая в (13) и (14) экспоненту под интегралами в ряд Тейлора, видим, что первый неисчезающий член является квадратичным по \mathbf{q} . Считая направление оси вращения совпадающим с осью y и учитывая симметрию

решения по x и z , для малых рассеивающих неоднородностей выражения (13) и (14) можно свести к виду

$$\mathbf{E}_1 = K_E \mathbf{\Lambda}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \Omega), \quad (10.18)$$

$$\mathbf{H}_1 = K_H \mathbf{M}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \Omega), \quad (10.19)$$

где

$$K_{E,H} = -if S_{E,H}, \quad f = \int d\mathbf{q} \mathbf{q}_x^2 = \frac{\pi}{4} k^5 \int dy \rho^4(y). \quad (10.20)$$

Векторные функции в правых частях (18), (19) зависят только от угловых характеристик задачи, а зависимость от размеров и формы входит в множитель f .

Как следует из (18) и (19), угловая зависимость рассеянного поля одна и та же для малых вращающихся неоднородностей произвольной формы. Отличия полей лишь в некотором форм-факторе, определяемом размером неоднородности. Приведём выражение для $\mathbf{\Lambda}$, поскольку из него получается и \mathbf{M} , согласно (11) и (12):

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \Omega) = 4\Omega \left(A(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mathbf{e}_x + B(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mathbf{e}_y + C(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mathbf{e}_z \right),$$

$$A = b_1 A_1 + b_2 A_2, \quad B = b_1 B_1 + b_2 B_2, \quad C = b_1 C_1 + b_2 C_2. \quad (10.21)$$

Их значения следующие

$$A_1 = 2\gamma^2 n_x \sin \alpha + (1 + \sin^2 \alpha - n_y \cos \alpha) 2n_x (n_z - \sin \alpha),$$

$$A_2 = \gamma^2 (n_y + \cos \alpha) \left(1 + 2 \sin \alpha \cdot \frac{(n_z - \sin \alpha)}{\gamma^2} \right) + (n_y + \cos \alpha) (n_x^2 - (n_z - \sin \alpha)^2), \quad (10.22)$$

$$B_1 = 2(n_z - \sin \alpha) (n_y + \cos \alpha) (1 - n_y \cos \alpha) + 2n_y \gamma^2 \sin \alpha, \quad (10.23)$$

$$B_2 = 2n_x (n_y^2 - \cos^2 \alpha),$$

$$C_1 = 2\gamma^2 n_z \sin \alpha - \cos \alpha (n_y + \cos \alpha) (\gamma^2 + 2(n_z - \sin \alpha) \sin \alpha) -$$

$$-(1 + \sin^2 \alpha - n_y \cos \alpha) (n_x^2 - (n_z - \sin \alpha)^2), \quad (10.24)$$

$$C_2 = 2n_x (n_z - \sin \alpha) (n_y - \cos \alpha).$$

Здесь введены проекции единичного вектора направления рассеяния на оси

$$n_{x'} = \sin \theta \cos \phi, \quad n_{y'} = \sin \theta \sin \phi \sin \alpha - \cos \theta \cos \alpha,$$

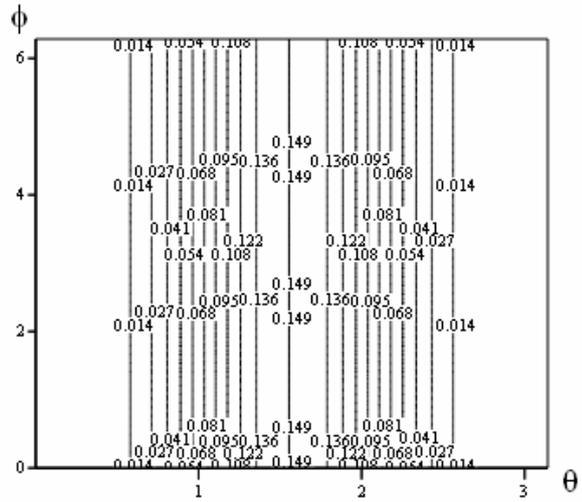
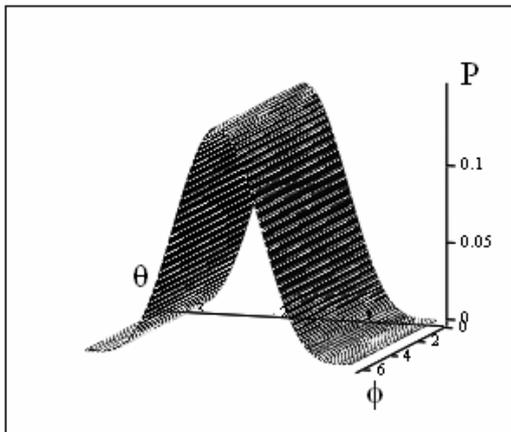
$$n_{z'} = \sin \theta \sin \phi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha, \quad (10.25)$$

а параметр γ связан с ними соотношением $\gamma = \sqrt{n_{x'}^2 + (n_{z'} - \sin \alpha)^2}$.

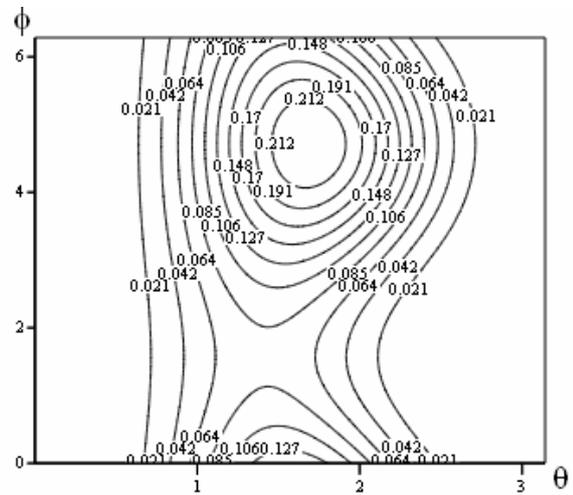
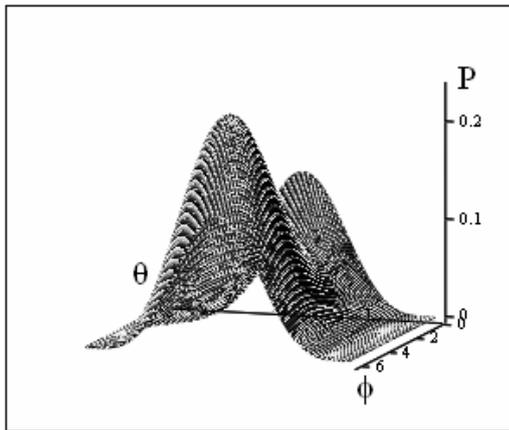
Выражения для дифференциальных сечений рассеяния на малых неоднородностях в случае падения волны перпендикулярно оси вращения имеют вид

$$P_s(\theta, \phi, \pi/2) = |S|^2 f^2 (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta. \quad (10.26)$$

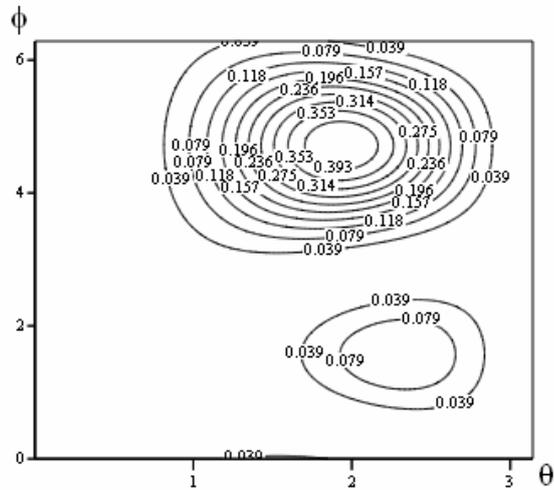
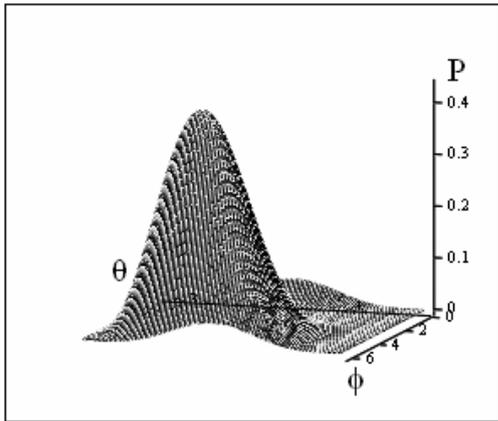
$$\alpha = 0$$



$$\alpha = \pi/12$$



$$\alpha = \pi/3$$



$$\alpha = \pi/2$$

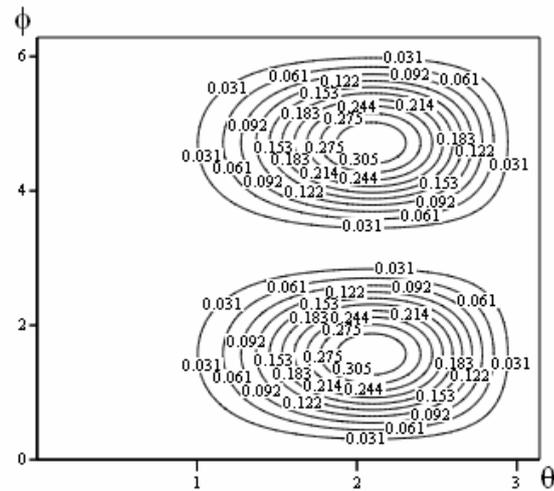
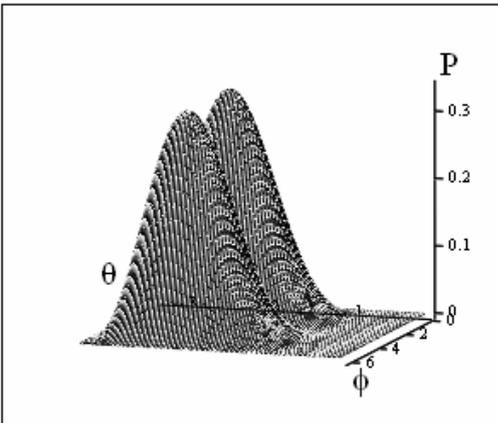


Рис. 2 (окончание)

Максимумы по углу ϕ будут при $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, а по θ – при $\theta = \frac{2}{3}\pi$. В случае падения волны вдоль оси вращения ($\alpha = 0$) аналогичное выражение будет

$$P_s(\theta, \phi, 0) = |S|^2 f^2 \sin^4 \theta, \quad (10.27)$$

то есть максимальное рассеяние идёт в угол $\theta = \pi/2$. Кроме того, в этом случае сечение не зависит от полярного угла ϕ , а следовательно, разница в рассеянии поляризованного и естественного света будет только в численном коэффициенте.

Приведём также выражения для полных сечений рассеяния:

$$\sigma_s(\pi/2) = \frac{8\pi}{5} |S|^2 f^2, \quad (10.28)$$

$$\sigma_s(0) = \frac{32\pi}{15} |S|^2 f^2. \quad (10.29)$$

Величины полных сечений (28) и (29) отличаются только численным множителем порядка единицы. На рис. 2 приведено в двух видах – пространственного графика (левый столбец) и плоского (вид сверху, правый столбец) – нормированное дифференциальное сечение $p(\theta, \phi) = P(\theta, \phi) / \sigma$ для случая малой неоднородности. Эта функции не зависят от угловой скорости вращения, в отличие от полного сечения σ . В этом случае, даже если размеры цилиндра отличаются в десятки раз, нормированные дифференциальные сечения рассеяния практически совпадают. Расчеты показывают, что, как и в теории Ми, можно пользоваться приближением малых частиц до размеров, определяемых соотношениями $k\rho_0, kh < 0,5$ для цилиндра, или $kr_0 < 0,5$ для шара. При этом полные сечения существенно отличаются.

10.2. Неоднородность цилиндрической формы

Теперь рассмотрим рассеяние плоской волны на диэлектрической неоднородности скорости, имеющей форму кругового цилиндра с радиусом основания ρ_0 и высотой $2h$ (ось вращения y), вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω в среде с тем же показателем преломления. Будем полагать, что направление падения плоской волны перпендикулярно оси вращения. Выполнив интегрирование в (6), получим в этом случае

$$\mathbf{E}_I = b_I \mathbf{E}_I + b_{II} \mathbf{E}_{II}, \quad (10.30)$$

$$\mathbf{E}_I = K_E \{ -\mathbf{e}_x \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta + \mathbf{e}_y (1 - \cos \theta - \sin^2 \phi \sin^2 \theta) + \mathbf{e}_z \sin \phi \sin \theta (1 - \cos \theta) \}$$

$$\mathbf{E}_{II} = K_E \{ -\mathbf{e}_x (1 - \cos \theta - \cos^2 \phi \sin^2 \theta) + \mathbf{e}_y \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta - \mathbf{e}_z \cos \phi \sin \theta (1 - \cos \theta) \} \quad (10.31)$$

$$K_E = -i \frac{n^2 - 1}{cn} \Omega \frac{e^{-i\omega t + ikR_0}}{R_0} \frac{\rho_0^2 J_2(k\rho_0\gamma)}{\gamma^2} \sin(kh \sin \phi \sin \theta), \quad (10.32)$$

$$\gamma = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta \sin^2 \phi},$$

где J_2 – функция Бесселя второго порядка (см. [M1]). Напряженность магнитного поля получается из (30)–(32) согласно правилу (12).

В случае наклонного падения плоской волны на цилиндр результаты аналогичны, причем значение коэффициента K_E в системе координат (x', y', z') следующее:

$$K_E = -i \frac{n^2 - 1}{2cn} \frac{e^{-i\omega t + ikR_0}}{R_0} \rho_0^2 \frac{J_2(k\rho_0\gamma)}{\gamma^2} \frac{\sin(\kappa h (n'_y - \cos \alpha))}{(n'_y - \cos \alpha)}. \quad (10.33)$$

Угловая зависимость для этого случая описывается так же, как и для малых частиц, функциями $\Lambda(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{\Omega})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{\Omega})$ (см. (18), (19) и (21)).

Приведём явные выражения дифференциальных сечений для рассеяния на конечном цилиндре. Из-за громоздкости формул ограничимся случаями падения излучения перпендикулярно оси вращения и параллельно ей. Дифференциальное сечение рассеяния на конечном круговом цилиндре при падении излучения перпендикулярно оси вращения имеет вид

$$P(\theta, \phi, \pi/2) = |K_E(\pi/2)|^2 \sin^2(kh \sin \phi \sin \theta) (1 - \cos \theta)^2. \quad (10.34)$$

В случае параллельности направлению оси для сечения имеем

$$P(\theta, \phi, 0) = |K_E(0)|^2 \frac{\sin^2(kh(1 - \cos \theta))}{(1 - \cos \theta)^2}. \quad (10.35)$$

Проанализируем зависимость дифференциальных сечений (34) и (35) от углов в предельных случаях цилиндра малых размеров и длинного тонкого цилиндра.

Для цилиндра малых размеров ($k\rho_0, kh \ll 1$) дифференциальное сечение $P(\theta, \phi, \pi/2)$ получается подстановкой в (26)–(28) множителя

$$f = \frac{\pi}{2} (\rho_0 k)^4 h k. \quad (10.36)$$

Отметим, что для шара малого радиуса ($kr_0 \ll 1$)

$$f = \frac{4\pi}{15} (kr_0)^5. \quad (10.37)$$

Для вытянутого цилиндра ($kh \gg 1$) квадрат синуса в (36) приводит к высокочастотным осцилляциям. Если проследить за их огибающей, заменив квадрат синуса на $1/2$, то сохранится только слабая зависимость от угла ϕ через параметр γ . При малом диаметре цилиндра эта зависимость вообще исчезает. Зависимость от угла θ будет следующая

$$P_i(\theta, \phi, \pi/2) = \frac{(n^2 - 1)^2 \Omega^2}{128 n^2 c^2} k^4 \rho_0^8 (1 - \cos \theta)^2. \quad (10.38)$$

Максимальное значение достигается при $\theta = \pi$. Отметим, что выражение (38) справедливо вне малой области углов, где произведение $\sin \phi \sin \theta$ близко к нулю. При малых углах θ дифференциальное сечение пропорционально θ^6 , тогда как при $\theta \rightarrow \pi$ лишь $\sim (\theta - \pi)^2$.

Обозначим полное сечение рассеяния для случаев малого и длинного цилиндров через σ_s и σ_i , соответственно. Тогда

$$\sigma_s(\pi/2) = \frac{(n^2 - 1)^2 \Omega^2}{40 n^2 c^2} \pi k^6 \rho_0^8 h^2, \quad \sigma_i(\pi/2) = \frac{(n^2 - 1)^2 \Omega^2}{96 n^2 c^2} \pi k^4 \rho_0^8. \quad (10.39)$$

Представляет интерес зависимость дифференциального и полного сечений рассеяния от длины световой волны λ . Из (39) видно, что для малого цилиндра сечение $\sigma_s \sim \lambda^{-6}$, тогда как для тонкого длинного цилиндра $\sigma_t \sim \lambda^{-4}$ (как при рэлеевском рассеянии [2, 19]).

В случае, описываемом (35), для малых размеров цилиндра будем иметь

$$P_s(\theta, \phi, 0) = \frac{(n^2 - 1)^2}{64n^2} \frac{\Omega^2}{c^2} k^6 \rho_0^8 h^2 \sin^4 \theta, \quad (10.40)$$

то есть для малых размеров неоднородностей максимальное рассеяние идёт в углы около $\theta = \pi/2$. Для вытянутого цилиндра получим

$$P_t(\theta, \phi, 0) = \frac{(n^2 - 1)^2}{128n^2} \frac{\Omega^2}{c^2} k^4 \rho_0^8 \sin^4 \theta. \quad (10.41)$$

Полные сечения будут

$$\sigma_s(0) = \frac{(n^2 - 1)^2}{30n^2} \frac{\Omega^2}{c^2} \pi k^6 \rho_0^8 h^2, \quad \sigma_t(0) = \frac{(n^2 - 1)^2}{60n^2} \frac{\Omega^2}{c^2} \pi k^4 \rho_0^8. \quad (10.42)$$

Естественно, что найденная в первом порядке теории возмущений амплитуда рассеянного излучения линейна по угловой скорости вращения тела. Для регистрации такого линейного эффекта следует смешать рассеянное излучение с опорным (нерассеянным) когерентным излучением с той же частотой. Пусть это смешение (интерференция) происходит в плоскости $z = Z_0$. Считаем опорное излучение плоской волной:

$$\mathbf{E}_s = e^{ikL + ik\mathbf{q}\mathbf{a} - i\omega t} (\mathbf{e}_x a_I + \mathbf{e}_y a_{II}), \quad (10.43)$$

где первый член в показателе экспоненты – постоянный набег фазы, второй член учитывает поворот фронта этой волны на малый двумерный угол \mathbf{a} с компонентами в декартовой системе координат α_x, α_y , $\mathbf{q} = (x, y)$ – двумерный вектор поперечных координат, а величины a_I, a_{II} характеризуют состояние поляризации излучения и представляются в

форме $a_j = |a_j| e^{i\delta_j}$, $j = I, II$. Тогда интерференционный член имеет вид

$$I_{12} = 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_1^* \rangle, \quad (10.44)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени за период много больший периода световых колебаний. Теперь с учётом (24), (25), (29) и (30) получим

$$I_{12} = \frac{\Omega \rho_0}{c} \frac{\rho_0}{R_0} \frac{n^2 - 1}{n} \frac{J_2(k \rho_0 \gamma)}{\gamma^2} \sin(kh \sin \phi \sin \theta) \times$$

$$\times \left\{ \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta \left[|a_I| |b_I| \sin(S_I - \Lambda_I) - |a_{II}| |b_{II}| \sin(S_{II} - \Lambda_{II}) \right] + \right.$$

$$\left. + (1 - \cos \theta - \sin^2 \phi \sin^2 \theta) \left[|a_I| |b_{II}| \sin(S_I - \Lambda_{II}) - |a_{II}| |b_I| \sin(S_{II} - \Lambda_I) \right] \right\}. \quad (10.45)$$

Здесь введены обозначения

$$S_j = kL + k \mathbf{q} \mathbf{a} + \delta_j, \quad \Lambda_j = kR_0 + \Delta_j, \quad j = I, II. \quad (10.46)$$

Первый множитель в (45) является отношением линейной скорости вращения на боковой грани цилиндра к скорости света v_c/c , второй – отношение радиуса цилиндра к расстоянию до точки приёма, а третий пропорционален коэффициенту увлечения Френеля.

В приосевой области, то есть при малых углах θ ,

$$I_{12} = \frac{\Omega \rho_0}{c} \frac{\rho_0}{R_0} \frac{n^2 - 1}{2n} \cdot (k \rho_0)^2 \theta^2 \sin(\kappa h \theta \sin \phi) \times$$

$$\times \left\{ \sin 2\phi \left[|a_I| |b_I| \sin(S_I - \Lambda_I) - |a_{II}| |b_{II}| \sin(S_{II} - \Lambda_{II}) \right] + \right.$$

$$\left. + \cos 2\phi \left[|a_I| |b_{II}| \sin(S_I - \Lambda_{II}) - |a_{II}| |b_I| \sin(S_{II} - \Lambda_I) \right] \right\}. \quad (10.47)$$

Здесь мы положили, что $kh\theta > 1$. В зоне дифракции Френеля $R_0 \approx k\rho_0^2$ и интерференционный член $I_{12} \sim k\rho_0^2 \theta^2 v_c/c$, то есть существенно определяется отношением скоростей. Простейший вид соотношения (45) и (47) принимают в случае, когда в падающей на цилиндр и опорной волнах электрический вектор направлен по оси x , то есть $a_{II} = b_{II} = 0$, или по оси y , то есть $a_I = b_I = 0$.

11. Оптическое детектирование движущихся объектов-«невидимок»

Если показатель преломления некоторого объекта, например, изготовленного из стекла, совпадает с показателем преломления окружающей среды, например, жидкости, то такой объект-«невидимка» (по Г. Уэллсу) не может быть обнаружен оптическими методами. Как мы видели в предыдущих разделах, при наличии движения среды внутри объекта сохраняющейся формы возникает релятивистское рассеяние света, которое в случае стационарности распределения скорости не сопровождается доплеровским сдвигом частоты. В данном разделе мы рассмотрим несколько иной вариант, когда этот объект движется относительно среды с некоторой скоростью v . Ввиду перемещения границ объекта распределение скорости движения нестационарно, и поэтому в данном варианте будет иметь место доплеровский сдвиг. Это предоставляет принципиальную возможность оптического обнаружения подобных объектов, если коэффициент отражения излучения будет достаточно велик [20]. В этом разделе мы оценим величину эффекта.

Пусть объект с показателем преломления n движется прямолинейно с постоянной скоростью v (малой по сравнению со скоростью света в вакууме c) в неподвижной среде с тем же показателем преломления n . Вновь используем представление о зависящем от скорости движения эффективном показателе преломления (6.3) или же, эквивалентно, о коэффициенте увлечения Френеля. Тогда эффективные показатели преломления объекта и среды будут различаться, а вследствие движения объекта излучение, отраженное от объекта, будет сдвинуто по частоте относительно падающего на него излучения на величину

$$\delta\omega = 2\frac{v}{c}\omega. \quad (11.1)$$

Здесь для простоты мы считаем, что волновой вектор падающего излучения параллелен скорости движения объекта.

Если граница объекта достаточно резкая (ширина приграничного слоя в распределении скорости движения меньше длины волны света) и объект обладает достаточно большими размерами (также по отношению к длине волны излучения) и границей, близкой к плоской, то коэффициент отражения по амплитуде r можно оценить по формуле Френеля:

$$|r| = \frac{n^2 - 1}{2n} \frac{v}{c}. \quad (11.2)$$

Порядок величины коэффициента отражения не изменится при учете других границ объекта и наличия соответствующих дополнительных интерференционных эффектов.

Практически при движении объекта в жидкости в распределении скорости движения имеется пограничный слой, ширина которого w зависит от вязкости и других характеристик жидкости. Для излучения оптического диапазона выполняется соотношение $\lambda \ll w$, хотя для длинноволнового излучения это соотношение может быть обратным. Точный учет конечности ширины пограничного слоя требует задания его конкретного профиля. В то же время для оценок достаточно использовать приближенный подход [21]. Тогда, при $\lambda \ll w$, коэффициент отражения будет включать дополнительный, по сравнению с (2), множитель вида $\exp(-Kw/\lambda)$,

$$(11.3)$$

где K – численный множитель порядка единицы. Естественно, что коэффициент отражения в случае плавного приграничного слоя существенно снижается по сравнению со случаем резкой границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М., Физматлит, 1960.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 2001).
3. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. М., Наука, 1970.
4. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. М., Наука, 1991.
5. Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. М., Сов. радио, 1957.
6. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М., Техтеорлит, 1956.
7. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматлит, 1961.
8. В.А. Фок. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Сов. радио, 1970.
9. Дж. Джексон. Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
10. Н.Н. Розанов. Специальные разделы математической физики. Ч. I. Электромагнитные волны в вакууме. Учебное пособие. Спб, ИТМО, 2005.
11. Н.Н. Розанов, Г.Б. Социлин. УФН, 176(4), 421 (2006).
12. В.И.Денисов. Введение в электродинамику материальных сред. Учебное пособие. М., МГУ, 1989.
13. Р. Вуд. Физическая оптика. М.: ОНТИ, 1936.
14. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
15. В. Паули. Теория относительности. М.: Наука, 1983.
16. У. Шерклифф. Поляризованный свет. М.: Мир, 1965.
17. Д. Маркузе. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974.
18. Справочник по лазерам (под ред. А.М. Прохорова). М.: Советское радио, 1978. Т. 2.
19. А. Исимару. Распространение и рассеяние волн в случайно – неоднородных средах. т. 1. Однократное рассеяние и теория переноса. М., Мир, 1981.
20. Н.Н. Розанов. Опт. спектроск. 96(6), 938 (2004).
21. А.Б. Мигдал, В.П. Крайнов. Приближенные методы квантовой механики. М., Наука, 1966.



ФАКУЛЬТЕТ ФОТОНИКИ И ОПТОИНФОРМАТИКИ

Факультет фотоники и оптоинформатики призван обеспечивать подготовку бакалавров и магистров по одноименному образовательному направлению “Фотоника и оптоинформатика”, инициатива создания которого в начале XXI века в России принадлежит именно профессорско-преподавательскому и научному коллективу факультета.

“Фотоника” — это область науки и техники, связанная с использованием светового излучения (или потока фотонов) в оптических элементах, устройствах и системах, в которых генерируются, усиливаются, модулируются, распространяются и детектируются оптические сигналы.

“Оптоинформатика” — это недавно выделившаяся и доминирующая в последние годы область фотоники, в которой создаются новые технологии передачи, приема, обработки, хранения и отображения информации на основе фотонов.

Таким образом, в рамках образовательного направления “Фотоника и оптоинформатика” готовят специалистов для одной из самых инновационных областей современной науки и техники, в которой разрабатываются оптические технологии сверхбыстрой передачи, обработки и записи информации, создаются сверхбыстродействующие оптические процессоры, оптические системы искусственного интеллекта и другие информационно-телекоммуникационные системы нового поколения, строящиеся на оптических материалах и технологиях. Фотоника и оптоинформатика – это энергично развивающаяся высокотехнологическая отрасль, ежегодный доход от продаж устройств и систем которой составляет в мире десятки миллиардов долларов США.

В состав факультета входят пять кафедр. Три выпускающие:

- кафедра Фотоники и оптоинформатики;
- кафедра Оптоинформационных технологий и материалов;
- кафедра Компьютерной фотоники,

и две помогающие обеспечивать учебный процесс:

- кафедра Оптической физики и современного естествознания;
- кафедра Оптики квантоворазмерных систем.

Профессорско-преподавательский состав факультета включает более пятидесяти докторов и кандидатов наук, имеющих богатый опыт преподавания дисциплин по современным проблемам оптики и информатики. Профессором факультета является академик РАН Е.Б. Александров – признанный лидер квантовой магнетометрии. Научную

поддержку образовательному направлению “Фотоника и оптоинформатика” оказывает являющийся структурным подразделением Университета НИИ Оптоинформатики во главе с профессором Н.В. Никоноровым.

В процессе обучения бакалавры и магистры получают глубокие знания и практические навыки, как в традиционных общих дисциплинах высшей школы, так и в области оптической физики, теории информации и кодирования, архитектуры вычислительных систем, оптического материаловедения, оптической информатики, систем и технологий фотоники, по различным технологиям программирования, а также по инновационному менеджменту в области высоких технологий.

Важнейшим компонентом подготовки специалистов факультетом является политика активного сотрудничества с фирмами и компаниями, стремящимися получить этих специалистов. В соответствии с учебными планами направления “Фотоника и оптоинформатика”, включающими сквозную систему курсовых исследовательских работ и научно-технических практик, уже со второго курса студенты факультета получают возможность участвовать в работе этих фирм, а также в научно-исследовательских и опытно конструкторских проектах Университета ИТМО, ГОИ им. С.И.Вавилова и других научно-инновационных центров Санкт-Петербурга, проводимых в области фотоники и оптоинформатики по госзаказу Министерства РФ, российским и международным грантам и контрактам.

Важным компонентом в подготовке высококлассных молодых специалистов и ученых является организация и проведение факультетом совместно с другими образовательными и научными организациями и обществами Международных молодежных школ и конференций, создание и развитие молодежных научных ассоциаций и Российских и Международных отделений научных обществ. Среди студентов и аспирантов факультета – стипендиаты Президента РФ и Правительства РФ, победители конкурсов лучших научных работ, проводимых Российской Академией наук, Министерством образования РФ, крупнейшими мировыми научными обществами и фондами, такими как INTAS (Фонд научно-исследовательских работ Европейского сообщества), SPIE (Международное общество инженеров-оптиков), CRDF (Американский фонд гражданских исследований и развития), OSA (Оптическое общество Америки) и др.

Декан факультета фотоники и оптоинформатики
профессор С.А. Козлов

Николай Николаевич Розанов
СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Часть II. Электромагнитные волны в движущихся линейных средах
Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерный набор и верстка

Дизайн обложки

Н.Н. Розанов

А.С. Киселев

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. редакцией

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати 14.12.06

Тираж 100 экз.

Заказ № 996

Отпечатано на ризографе