

Министерство образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский государственный университет  
низкотемпературных и пищевых технологий



Кафедра теоретической механики

**ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
С ГИБКИМИ СВЯЗЯМИ С УЧЕТОМ ИХ ПРОЧНОСТИ**

Методические указания  
к выполнению задания по курсу  
“Теоретическая механика”  
для студентов всех специальностей

Санкт-Петербург 2000

УДК 531.8

**Корниенко Л.Н., Агапова Л.А., Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Федорова Л.А.** Динамика механических систем с гибкими связями с учетом их прочности: Метод. указания к выполнению задания по курсу “Теоретическая механика” для студентов всех спец. / Под ред. д.т.н., проф. В. А. Арета. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2000. – 17 с.

Приведены 30 вариантов задания, предусмотренного программой курса “Теоретическая механика”, с исходными данными для самостоятельной работы или решения в аудитории, а также указания к выполнению. Пособие может быть использовано при проведении контрольных работ.

Рецензент

Канд. техн. наук, доц. А.И. Ваньшин

Одобрены к изданию советом факультета холодильной техники

© Санкт-Петербургский государственн<sup>ый</sup>  
университет низкотемпературных  
и пищевых технологий, 2000

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое задание для самостоятельного выполнения в аудитории посвящено изучению темы “Динамика поступательного и вращательного движений тел, соединенных гибкими связями, с известными допустимыми усилиями в них”. Рассмотрены примеры выполнения задания.

### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение кинематических параметров динамической системы под действием движущего момента (или силы) на основе решения составленных уравнений движения с учетом прочности промежуточных гибких связей.

### 2. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Составляются дифференциальные уравнения движения отдельных элементов динамической системы путем замены гибких связей их внутренними усилиями, причем натяжение нити должно быть меньше (или равно) допускаемой величины, если нить может разорваться, и больше (или равно) допускаемой величины, если нить может провиснуть. С учетом этих силовых ограничений определяется допустимая величина движущего момента (или силы).

### 3. СОСТАВЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть приведены схемы движения тел, входящих в механическую систему, необходимые для получения дифференциальных уравнений и кинематических связей. В гибких связях необходимо показать направление действия внутренних усилий. Решение поставленной задачи следует сопровождать пояснениями.

### 4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

#### *Задача № 1*

*Дано:*

$m_1, m_2, R,$

$T_{21} \leq 6G_2$

*Определить:*

$a_2, M, \xi_1.$

(Рис. 1)

---

## Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух тел. Тело 1 совершает вращательное движение вокруг оси  $OX$  под действием пары сил с моментом  $M$ , направленным против часовой стрелки. При этом вектор вращательной (линейной) скорости любой точки тела 1 расположен в плоскости, перпендикулярной к оси  $OX$  и направлен по касательной к траектории точки в сторону вращения тела. Модуль скорости точки равен произведению модуля угловой скорости  $\omega$  на расстояние от точки до оси вращения тела:

Рис. 1

$$v_1 = \omega R; a_1 = \varepsilon R.$$

Тело 2 совершает поступательное движение вверх. Тогда  $v_2 = v_1$ .

Приложим к телам действующие на них силы: силы тяжести  $\overset{\cdot}{G}_1$  и  $\overset{\cdot}{G}_2$ , составляющие реакции подшипника  $\overset{\cdot}{R}_z$  и  $\overset{\cdot}{R}_y$ .

Мысленно разорвем нить, соединяющую тела 1 и 2, и покажем силы натяжения нитей  $\overset{\cdot}{T}_{12}$  и  $\overset{\cdot}{T}_{21}$  на схеме. При равенстве модулей сил действия и противодействия запишем  $\overset{\cdot}{T}_{12} = \overset{\cdot}{T}_{21}$ . Кроме того, к телу 1 приложен движущий момент  $M$ .

Составим дифференциальные уравнения движения тел:

$$J_{ox}\varepsilon_1 = M - T_{12}R; \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = T_{21} - G_2. \quad (2)$$

Используя уравнение (2), определим величину допустимого ускорения тела 2 из условия прочности нити:

$$a_2 \leq \frac{6G_2 - G_2}{m_2} \quad \text{или} \quad a_2 \leq 5g.$$

Исключим из системы уравнений (1) и (2) внутреннее усилие в гибкой связи

$$\begin{array}{l} J_{ox}\varepsilon_1 = M - T_{12}R \\ m_2 a_2 = T_{21} - G_2 \end{array} \quad \left| \cdot R \right. + \longrightarrow J_{ox}\varepsilon_1 = M - (m_2 a_2 - G_2) R.$$

Выразим в последнем уравнении ускорение  $\varepsilon_1$  через  $a_2$  и решим его относительно неизвестного движущего момента  $M$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{R}, \quad a_1 = a_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{a_2}{R}.$$

Тогда

$$J_{ox} \frac{a_2}{R} = M - m_2 a_2 R - m_2 g R.$$

Откуда

$$M = a_2 \left( \frac{m_1 R}{2} + m_2 R \right) + m_2 g R.$$

Если ускорение  $a_2$ , найденное из условия прочности нити, меньше или равно  $5g$ , искомый движущий момент  $M$  должен удовлетворять неравенству

$$M \leq 5gR \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) + m_2 g R.$$

Ему соответствуют ускорения

$$a_2 = 5g, \quad \varepsilon_1 = \frac{a_2}{R} = \frac{5g}{R}.$$

### Задача № 2

*Дано:*

$m_1, m_2$

$R_1, r_1, i_{1x},$

$f_{np} = 0,1, \alpha = 60^\circ,$

$T_{12} \leq 4G_2,$

(Рис. 2)

*Определить:*

$\alpha, M, \varepsilon_1.$

**Решение**

Рис. 2

Механическая система состоит из двух тел. Движущий момент  $M$  вращает диск 1 вокруг оси  $OX$ , тело 2 под действием нити движется поступательно по наклонной плоскости вверх.

Найдем кинематические связи:

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 R_1, \quad v_1 = v_2, \quad v_2 = \omega_1 R_1, \\ a_1 &= \varepsilon_1 R_1, \quad a_1 = a_2, \quad a_2 = \varepsilon_1 R_1. \end{aligned}$$

Покажем на схеме силы, действующие на тела 1, 2 силы тяжести  $\dot{G}_1$  и  $\dot{G}_2$ , реакции подшипника  $\dot{R}_z$  и  $\dot{R}_y$ . К телу 2 приложим нормальную реакцию наклонной плоскости  $\dot{N}$  и силу трения  $\dot{F}_{TP}$ . Заменяем действие нити реакциями  $\dot{T}_{12} = \dot{T}_{21}$  и покажем их на схеме. Учтем действие движущего момента  $M$  на тело 1.

Составим дифференциальные уравнения движения тел 1 и 2:

$$J_{OX} \varepsilon_1 = M - T_{12} R_1; \quad (1)$$

$$m_2 a_{2X} = T_{21} - G_2 \sin \alpha - F_{TP}; \quad (2)$$

$$m_2 a_{2X} = N_2 - G_2 \cos \alpha. \quad (3)$$

Так как  $a_{2y} = 0$ , то из уравнения (3) найдем  $N_2$ :

$$N_2 = G_2 \cos \alpha.$$

По закону Кулона сила трения скольжения равна:

$$F_{TP} = f_{TP} N_2 = f_{TP} G_2 \cos \alpha$$

Момент инерции тела относительно оси "OX" запишем в виде:

$$J_{OX} = m_1 i_{OX}^2.$$

Подставим эти выражения в уравнения (1), (2):

$$m_1 i_{OX}^2 \varepsilon_1 = M - T_{12} R_1$$

$$m_2 a_{2X} = T_{21} - G_2 \sin \alpha - f_{TP} G_2 \cos \alpha.$$

Выразим  $\varepsilon_1$  через  $a_{2X}$  где  $a_{2X} = a_2$

$$m_1 i_{OX}^2 a_2 / R_1 = M - T_{12} R_1 \quad (4)$$

$$m_2 a_2 = T_{21} - G_2 \sin \alpha - f_{TP} G_2 \cos \alpha. \quad (5)$$

Из уравнения (5) найдем ускорение  $a_2$ :

$$a_2 = \frac{T_{21} - G_2(\sin a + f_{TP} \cos a)}{m_2}.$$

Из условия прочности нити  $T_{21} = T_{12} \leq 4G_2$  найдем

$$a_2 \leq \frac{4G_2 - G_2(\sin a + f_{TP} \cos a)}{m_2}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) найдем величину допустимого движущего момента М:

$$M = T_{12}R_1 + m_1 i_{OX}^2 a_2 / R_1.$$

С учетом неравенства (6) получим:

$$M \leq 4G_2 R_1 + m_1 i_{OX}^2 \frac{4G_2 - G_2(\sin a + f_{TP} \cos a)}{R_1 m_2}.$$

Окончательно получим:

$$\varepsilon_1 = a_2 / R_1 = \frac{4G_2 - G_2(\sin a + f_{TP} \cos a)}{R_1 m_2}.$$

### **Задача № 3**

*Дано:*

$$m_1, m_2, m_3$$

$$R_1,$$

$$T_{32} = T_{23} \leq 5G_3$$

$$T_{12} = T_{21} \leq 5(G_1 + G_2)$$

(Рис. 3)

*Определить:*

$$\min \alpha, M, \varepsilon_1.$$

Рис. 3

## Решение

Механическая система состоит из трех тел: Тело 1 совершает вращательное движение вокруг оси  $OX$  под действием движущего момента  $M$ . Тела 2 и 3 совершают поступательные движения (рис. 3).

Найдем кинематические связи:

$$v_1 = \omega_1 R_1, \quad v_1 = v_2 = v_3, \quad a_1 = \varepsilon_1 R_1, \quad a_1 = a_2 = a_3.$$

Приложим к телам действующие силы: силы тяжести  $\dot{G}_1, \dot{G}_2, \dot{G}_3$ , реакции подшипника  $R_z, R_y$  и реакции нитей  $\dot{T}_{12}, \dot{T}_{21}, \dot{T}_{23}, \dot{T}_{32}$ .

Составим дифференциальные уравнения движения тел:

$$J_{OX} \varepsilon_1 = M - T_{12} R_1; \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = T_{21} - G_2 - T_{23}; \quad (2)$$

$$m_3 a_3 = T_{32} - G_3. \quad (3)$$

Из уравнения (3) найдем ускорение  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{T_{32} - G_3}{m_3}.$$

Учитывая условие прочности нити  $T_{32} \leq 5G_3$  из последнего уравнения получим:

$$a_2 \leq \frac{5m_3 g - m_3 g}{m_3} \text{ или } a_3 \leq 4g.$$

Исключим из уравнений (2) и (3) внутреннее усилие  $T_{23} = T_{32}$ :

$$\begin{array}{l} m_2 a_2 = T_{21} - G_2 - T_{23} \\ m_3 a_3 = T_{32} - G_3 \end{array} \quad \left| \quad + \right.$$

Учитывая, что  $a_2 = a_3$  получим:

$m_2 a_2 = T_{21} - G_2 - (m_3 a_2 + G_3)$ , откуда

$$a_2 = \frac{T_{21} - G_2 - G_3}{m_2 + m_3} = \frac{T_{21} - g(m_2 + m_3)}{m_2 + m_3}.$$

Принимая во внимание условие прочности нити, найдем:



$$a_2 \leq \frac{5g(m_1 + m_2) - g(m_2 + m_3)}{m_2 + m_3}.$$

Выбираем наименьшее значение ускорения  $a = \min \alpha$ , где  $i = 2,3$ .  
Из уравнения (1) находим величину движущего момента  $M$ :

$$M = J_{OX} \varepsilon_1 + T_{12} R_1, \text{ где } J_{OX} = \frac{m_1 R_1^2}{2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{a}{R_1}, \quad T_{12} \leq 5g (m_1 + m_2).$$

Окончательно получим:

$$M = \frac{m_1 R_1 a}{2} + 5g (m_1 + m_2) R_1 .$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2-х т. – М.: Наука, 1982. – т. 2 – 152 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.Н. Курс теоретической механики: в 2-х т. – М.: Высш. шк., 1977. – т. 2 – 430 с.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1968. – 384 с.
4. Ден Г.Н. Теоретическая механика. Конспект лекций. – СПб.: СПбА-ХиПТ, 1993. – 206 с.

Приложение

Таблица и схемы вариантов заданий

№ Вар.	m1 кг	m2 кг	m3 кг	R м	r м	f	i <sub>x</sub> м	Mc КН·м	T <sub>12</sub> кН	T <sub>23</sub> КН	Найти
1	3m	m	2m	0,1	–	0,2	–	–	≥0,1G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
2	m	3m	4m	0,2	–	0,1	–	–	≥0,1G <sub>1</sub>	≤6G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
3	m	2m	3m	0,3	0,1	0,1	√3R	–	≤5G <sub>1</sub>	≥0,1G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
4	m	2m	2m	0,3	–	0,1	–	–	≤7G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
5	2m	3m	m	0,1	–	0,2	–	–	≤6G <sub>1</sub>	≥0,1G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
6	m	3m	2m	0,3	0,1	0,2	–	–	≥0,2G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
7	2m	3m	m	0,1	–	0,2	–	–	≤5G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
8	m	3m	2m	0,2	–	0,3	–	–	≤6G <sub>1</sub>	≥0,1G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
9	2m	3m	m	0,2	–	0,1	–	2,0	≤5G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
10	m	3m	2m	0,3	0,1	0,2	√2R	3,0	≥0,5G <sub>1</sub>	≤6G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
11	2m	3m	m	0,3	0,1	0,2	√3R	–	≥0,1G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
12	3m	2m	m	0,3	0,1	0,1	√2R	–	≤5G <sub>1</sub>	≥0,1G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
13	2m	3m	m	0,2	0,1	–	√3R	–	≥0,3G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
14	3m	2m	m	0,2	–	–	–	0,3M	≥0,2G <sub>1</sub>	≤6G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
15	m	3m	2m	0,2	0,1	–	√2R	0,2M	≤6G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
16	m	2m	3m	0,3	0,1	–	√3R	–	≤7G <sub>1</sub>	≤5(G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub> )	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
17	m	2m	3m	0,3	0,1	0,1	√2R	–	≤5G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
18	m	2m	3m	0,1	–	0,3	–	0,3M	≤6G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
19	2m	3m	m	0,1	–	0,2	–	0,2M	≥0,3G <sub>1</sub>	≤4G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
20	2m	3m	M	0,3	0,1	0,3	√3R	–	≥0,1G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
21	2m	3m	M	0,1	–	0,2	–	0,3M	J7G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
22	m	3m	2m	0,1	–	–	–	0,2M	≥0,1G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>2</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
23	3m	2m	4m	0,3	–	–	–	0,1M	≤7G <sub>1</sub>	≤7(G <sub>1</sub> +G <sub>3</sub> )	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
24	m	2m	3m	0,3	–	0,1	–	0,3M	≤6G <sub>1</sub>	≥0,1G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
25	3m	m	3m	0,2	0,1	0,1	√5R	0,3M	≥0,1G <sub>1</sub>	≥0,2G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
26	2m	3m	M	0,3	0,1	0,2	√3R	0,2M	≤6G <sub>1</sub>	≥0,3G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
27	m	2m	3m	0,2	–	0,3	–	0,1M	≥0,3G <sub>1</sub>	≤5G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
28	3m	2m	M	0,2	0,1	0,1	√2R	0,3M	≥0,2G <sub>1</sub>	≤4G <sub>3</sub>	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P
29	m	2m	3m	0,3		0,2	–	0,1M	≤6G <sub>1</sub>	≤5(G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub> )	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, M
30	m	3m	2m	0,3	0,2	0,3	√3R	–	≤5G <sub>1</sub>	≤6(G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub> )	a <sub>1</sub> , a <sub>3</sub> , ε, P











## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Цель работы.....	3
2. Порядок решения задач.....	3
3. Составление отчета.....	3
4. Примеры решения.....	3
Задача № 1.....	3
Задача № 2.....	5
Задача № 3.....	7
Список литературы.....	9
Приложение. Таблица и схемы вариантов заданий.....	10



**Корниенко Лев Николаевич  
Агапова Лидия Анатольевна  
Григорьев Александр Юрьевич  
Малявко Дмитрий Пантелеймонович  
Федорова Людмила Анатольевна  
Под редакцией  
Арета Вальдура Аулисовича**

**ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
С ГИБКИМИ СВЯЗЯМИ С УЧЕТОМ ИХ ПРОЧНОСТИ**

**Методические указания  
к выполнению задания по курсу  
“Теоретическая механика”  
для студентов всех специальностей**

Редактор В.А. Соловьева

Корректор Н.И. Михайлова

---

ЛР № 020414 от 12. 02. 97

Подписано в печать 29.12.2000. Формат 60×84 1/16. Бум. писчая  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,16. Печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,13  
Тираж 100 экз. Заказ № С 61

---

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9  
ИПЦ СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9