

Д 5892

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ



Кафедра теоретической механики

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ
ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Методические указания
и задания для самостоятельной работы
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов специальностей 140401, 140504,
190603, 220301, 260601, 260602

Второе издание, исправленное



УДК 531(075)

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы / Д.П. Малявко, Л.А. Агапова, Л.А. Фёдорова, Л.Н. Корниенко: Метод. указания и задания для самостоятельной работы по курсу «Теоретическая механика» для студентов спец. 140401, 140504, 190603, 220301, 260601, 260602. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 26 с.

Приводятся 72 варианта заданий с исходными данными к курсовой работе, предусмотренной программой курса «Теоретическая механика», а также пример решения типовой задачи.

Рецензент
Канд. техн. наук, доц. В.И. Лысов

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

© Санкт-Петербургский технологический институт холодильной промышленности, 1990

© Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, 2008

I. ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания предназначены для самостоятельного выполнения заданий по применению теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы студентами под руководством преподавателей и могут быть использованы при проведении контрольных работ. Для пояснения порядка выполнения заданий рассмотрим пример решения типовой задачи.

2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Механическая система под действием силы тяжести (или момента) приводится в движение из состояния покоя. Учитывая трение скольжения тела f и сопротивление качению тела δ , катящегося без скольжения в соответствии с вариантами задачи и пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость первого тела в тот момент, когда проходимый им путь (S или S_c) станет равным заданному или когда угол поворота φ достигнет указанной величины.

В задачах приняты следующие обозначения:

- m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4;
- R, r – радиусы больших и малых блоков или катков соответственно;
- i_x – радиус инерции тела относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести;
- d, β – угол наклона соответствующей плоскости к горизонту;
- f – коэффициент трения скольжения тела;
- δ – коэффициент трения качения тела.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующей наклонной плоскости.

Пример.

Дано: $m_1; m_2; m_3; r_2; R_2; i_{z_1}; d; f; \delta; S$
(нить натянута).

На рис. I показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 - скорость груза в конечном положении S .

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

$$T - T_0 = \sum \Delta E_i, \quad (1)$$

где T - кинетическая энергия в конечном положении;

T_0 - кинетическая энергия в начальном положении ($T_0 = 0$);

$\sum \Delta E_i$ - сумма работ внешних сил, приложенных к системе при ее перемещении из начального положения в конечное.

Определим T и $\sum \Delta E_i$ в конечном положении системы.

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \text{ где}$$

$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ - кинетическая энергия груза 1, совершающего поступательное движение.

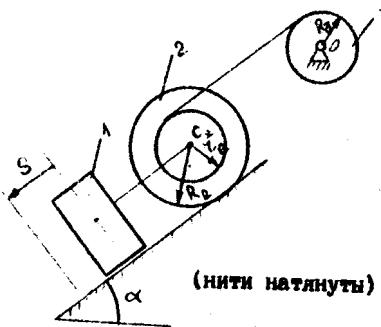


Рис. 1

$T_2 = \frac{m_2 v_{c2}^2}{2} + \frac{J_{c2} \omega_2^2}{2}$ - кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение.

J_{c2} - момент инерции катка 2 относительно его центральной оси C_2 .

$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2}$ - кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси Ox .

Выразим скорость v_{c2} и ω_2 через v_1 - скорость груза 1, используя кинематические соотношения между ними (рис. 2)

$$v_1 = v_{c2},$$

$$\omega_2 = \frac{v_{c2}}{(C_2 P_2)} = \frac{v_{c2}}{R_2} = \frac{v_1}{R_2} \quad (2)$$

где P_2 - мгновенный центр скоростей катка 2.

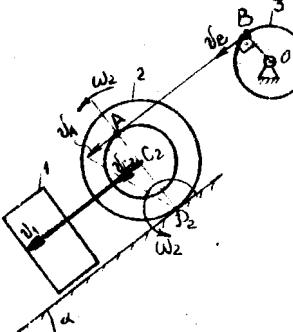


Рис. 2

Так как

$$v_1 = \omega_2 (R_2 + z_2) = v_1 (R_2 + z_2) / R_2,$$

$$v_1 = v_3, \quad v_3 = \omega_3 R_3,$$

получим

$$\omega_3 R_3 = v_1 (R_2 + z_2) / R_2.$$

Откуда следует

$$\omega_3 = \frac{v_1}{R_2 \cdot R_3} (R_2 + z_2). \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в выражения для T_2 и T_3 и запишем в виде

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = v_1^2 \left[\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{J_{c2}}{2 R_2^2} + \frac{J_{c3}}{2} \left(\frac{R_2 + z_2}{R_2 R_3} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к механической системе, на заданном перемещении S .

Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 3).

Работа силы тяжести

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g S \sin \alpha.$$

Работа силы трения скольжения

$$A_{F_{Tp}} = -F_{Tp} \cdot S.$$

Так как

$$F_{Tp} = f N_1 = f G_1 \cos \alpha,$$

$$\text{то } A_{F_{Tp}} = -f G_1 S \cos \alpha = -f m_1 g S \cos \alpha.$$

Работа силы тяжести

$$A_{G_2} = G_2 h_2 = m_2 g S \sin \alpha.$$

Работа силы сцепления F_{Cu} катка 2 равна нулю, так как эта сила приложена в мгновенном центре скоростей P_2 этого катка.

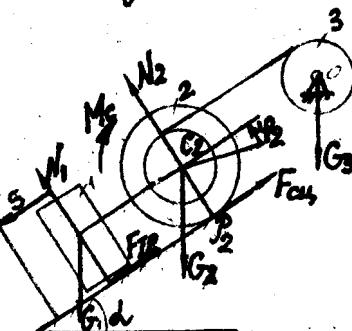


Рис. 3

Работа момента сопротивления качению катка 2

$$\Delta M_c = -M_c \cdot \varphi_2,$$

$$\text{где } M_c = \delta N_2 = \delta G_2 \cos \alpha,$$

φ_2 - угол поворота катка 2.

Так как каток 2 катится без скольжения, то его угол поворота

$$\varphi_2 = S_{c2}/R_2,$$

где $S_{c2} = S$ - перемещение центра тяжести C_2 катка 2.

$$M_{fc} = -\delta m_2 g \cos \alpha \frac{S_{c2}}{R_2} = -\delta m_2 g \cos \alpha \frac{S}{R_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum F_i^E &= f_{ta_1} + f_{fr_1} + f_{ta_2} + f_{fr_2} = m_1 g S \sin \alpha + \\ &+ m_2 g S \sin \alpha - \delta m_2 g \cos \alpha \frac{S}{R_2}, \end{aligned}$$

или

$$\sum F_i^E = Sg [m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + m_2 (\sin \alpha - \delta \frac{\cos \alpha}{R_2})] \quad (5)$$

Подставим (4) и (5) в (1)

$$\begin{aligned} \tau_1^2 \left[\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{\mathcal{J}_{c2}}{2 R_2^2} + \frac{\mathcal{J}_{3x}}{2} \left(\frac{R_2 + z_2}{R_2 \cdot R_3} \right)^2 \right] &= \\ &= Sg [m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + m_2 (\sin \alpha - \delta \frac{\cos \alpha}{R_2})], \end{aligned}$$

откуда находим

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{Sg [m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + m_2 (\sin \alpha - \delta \frac{\cos \alpha}{R_2})]}{\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{\mathcal{J}_{c2}}{2 R_2^2} + \frac{\mathcal{J}_{3x}}{2} \left(\frac{R_2 + z_2}{R_2 \cdot R_3} \right)^2}}. \quad (6)$$

По условию задачи:

$$\mathcal{J}_{c2} = m_2 i_{ax}^2 \text{ - для составного катка;}$$

$$\mathcal{J}_{3x} = m_3 R_3^2 / 2 \text{ - для однородного цилиндра.}$$

После подстановки в (6) исходных данных, найдем

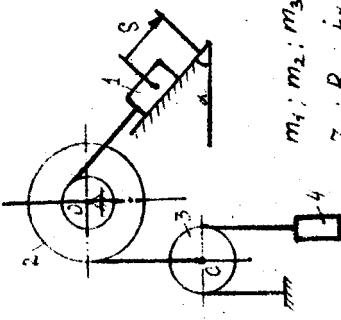
$$\tau_1 = \sqrt{\frac{Sg [m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + m_2 (\sin \alpha - \delta \frac{\cos \alpha}{R_2})]}{\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_2 i_{ax}^2}{2 R_2^2} + \frac{m_3 (R_2 + z_2)^2}{4 R_2}}}.$$

Список литературы

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А.Яблонского. - М.: Высшая школа, 1985. - 367 с.

2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. - М.: Высшая школа, 1984. - 424 с.

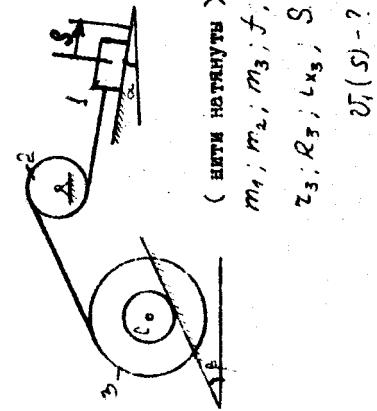
(2)



(НЕТ НАГРУЗКИ)
 $m_1; m_2; m_3; f; \beta; \alpha;$
 $z_3; R_3; i_{x_3}; S$

$v_i(s) - ?$

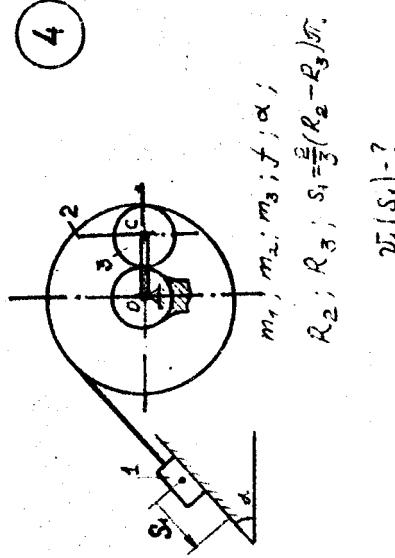
(3)



$m_1; m_2; m_3; f; \delta;$
 $\alpha; \beta; z_1; R_1; S; i_{x_2}$

$v_i(s) - ?$

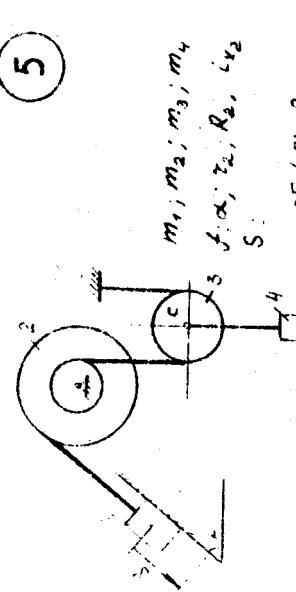
(4)



$m_1; m_2; m_3; f; \alpha;$
 $R_2; R_3; S = \frac{2}{3}(R_2 - R_3)f$

$v_i(s) - ?$

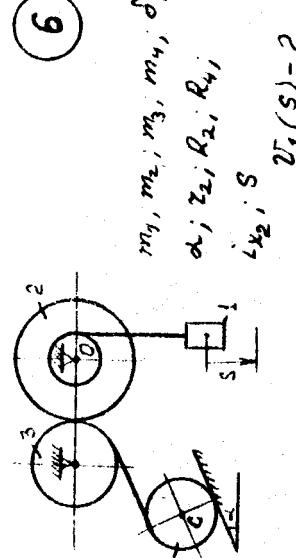
(5)



$m_1; m_2; m_3; m_4; f;$
 $\delta; z_2; R_2; R_3;$
 $i_{x_2}; S$

$v_i(s) - ?$

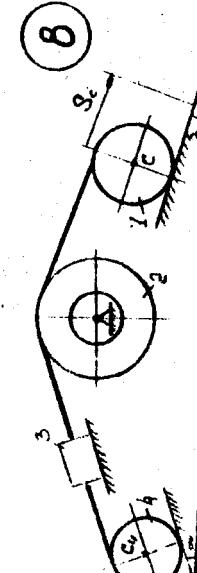
(6)



$m_1; m_2; m_3; m_4; f;$
 $\delta; z_2; R_2; R_3;$
 $i_{x_2}; S$

$v_i(s) - ?$

(7)

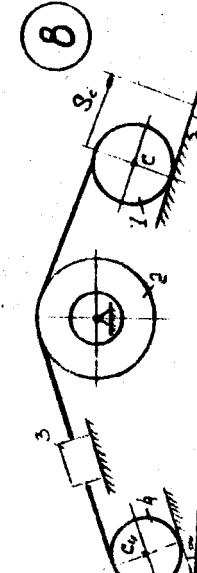


(НЕТ НАГРУЗКИ)
 $m_1; m_2; m_3; f; \alpha;$

$\alpha; \beta; z_3; R_3; i_{x_3}; S$

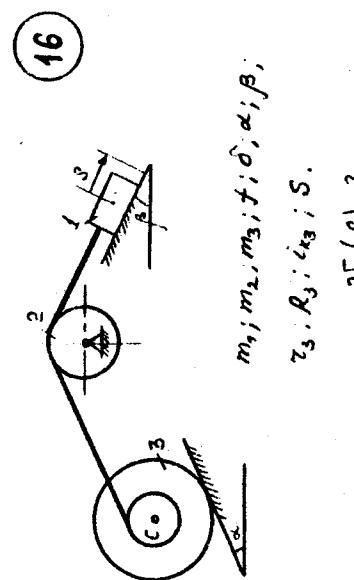
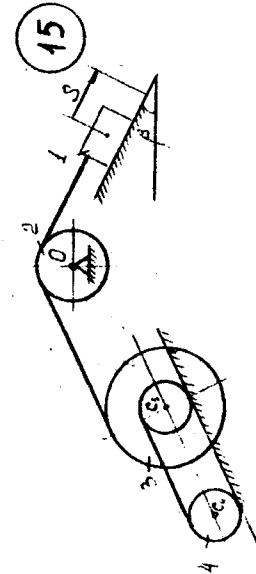
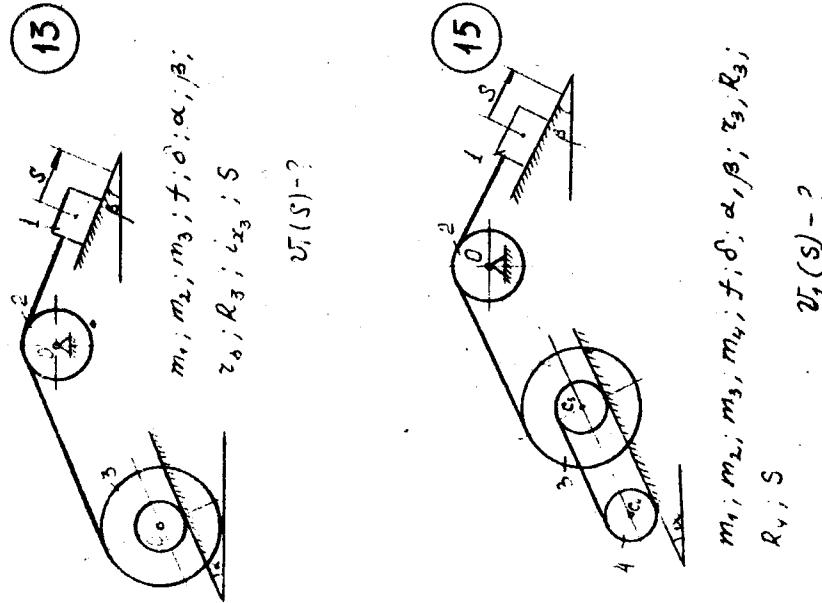
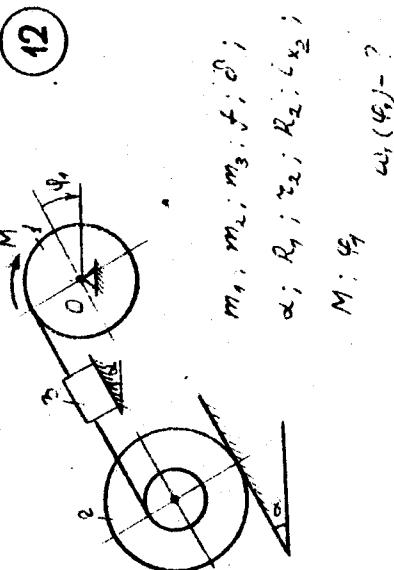
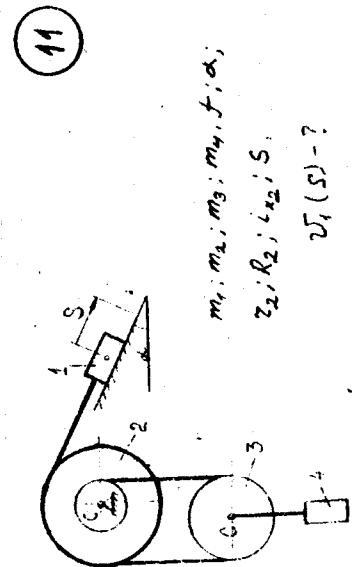
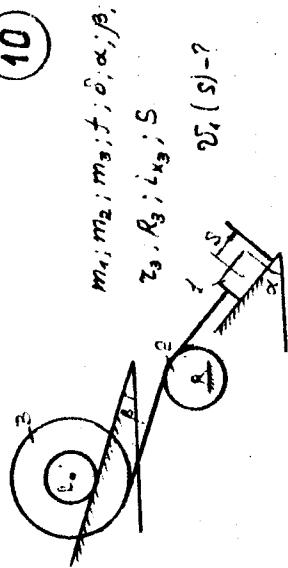
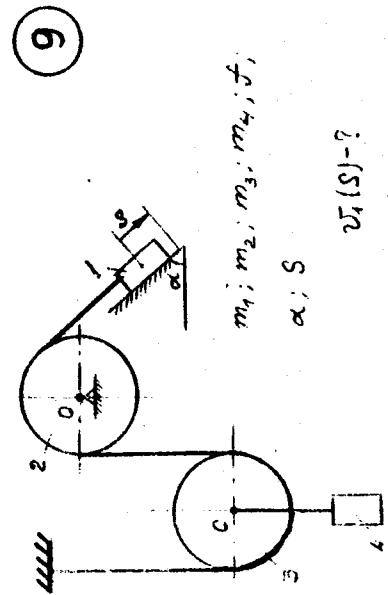
$v_i(s) - ?$

(8)

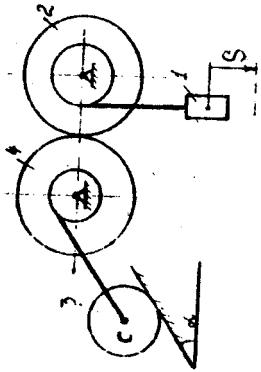


$m_1; m_2; m_3; f; \alpha;$
 $R_1; R_2; i_{x_2}; S$

$v_i(s) - ?$

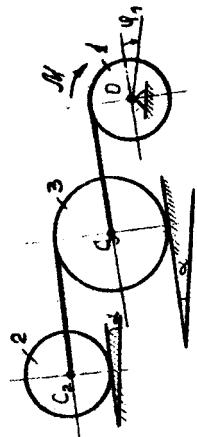


(17)



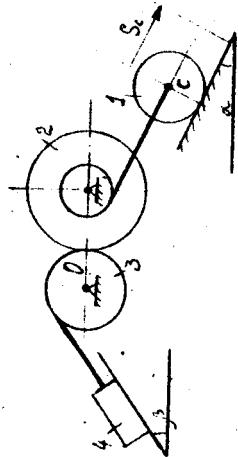
$m_1; m_2; m_3; m_4; \delta; \alpha;$
 $R_1; R_2; R_3; R_4; I_1; I_2; I_3; I_4;$
 S
 $\omega_1(S) - ?$

(18)



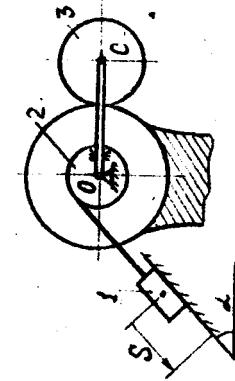
$m_1; m_2; m_3; \delta; \alpha;$
 $R_1; R_2; R_3; I_1; I_2; I_3;$
 $M; S$
 $\omega_1(S) - ?$

(19)



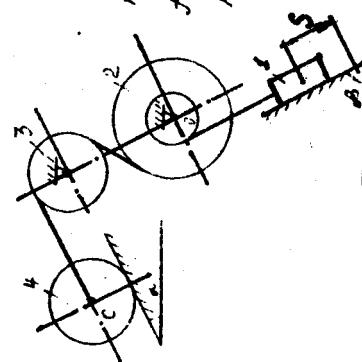
$m_1; m_2; m_3; m_4; \delta; \alpha;$
 $R_1; R_2; R_3; R_4; I_1; I_2; I_3; I_4;$
 S
 $\omega_1(S) - ?$

(20)



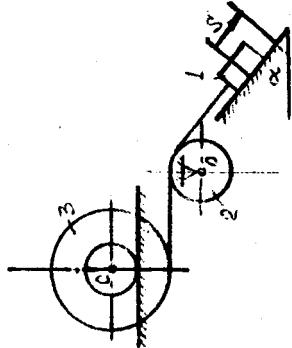
$m_1; m_2; m_3; m_4; \delta; \alpha;$
 $R_1; R_2; OC = 2R_1; I_1; I_2;$
 $S = \frac{\pi R_2}{4}$
 $\omega_1(S) - ?$

(21)



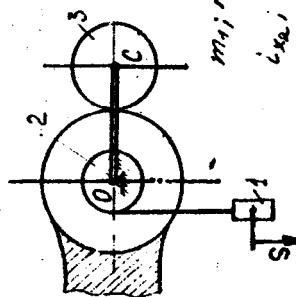
$m_1; m_2; m_3; m_4;$
 $\delta; \alpha; I_1; I_2;$
 $R_1; R_2; R_3; R_4; S$
 $\omega_1(S) - ?$

(22)



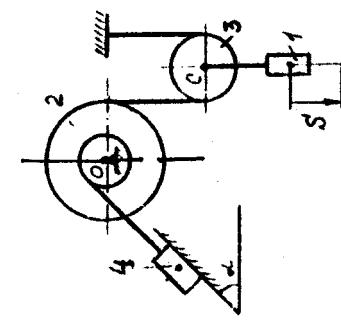
$m_1; m_2; m_3; \delta; \alpha;$
 $R_1; R_2; R_3; I_1; I_2; I_3;$
 S
 $\omega_1(S) - ?$

(23)



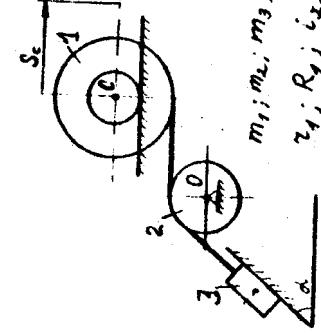
$m_1; m_2; m_3; R_1; R_2;$
 $I_1; I_2; OC = 2,5R_2;$
 $S = \frac{\pi R_2}{4}$
 $\omega_1(S) - ?$

(24)



$m_1; m_2; m_3; m_4;$
 $R_1; R_2; R_3; \alpha; I_1; I_2; I_3;$
 S
 $\omega_1(S) - ?$

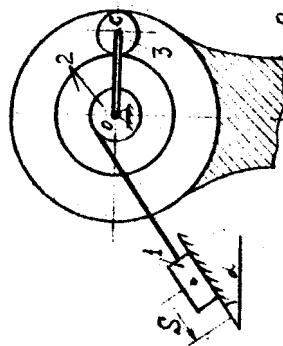
$\omega_1(S) - ?$



$m_1; m_2; m_3; m_4; \alpha; \delta; \alpha;$
 $\tau_1; R_1; i_{x_1}; S_c$

$$U_e(S_c) - ?$$

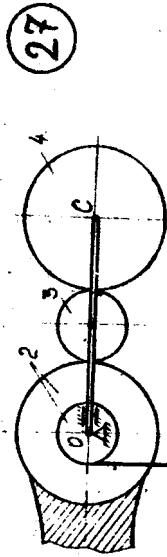
(26)



$m_1; m_2; m_3; f; \delta; \alpha;$
 $R_2; \tau_2 = 0.8R_2;$
 $R_3; i_{x_2}; S = \frac{\pi R_2}{g(R_2 + R_3)}$

$$U_e(S) - ?$$

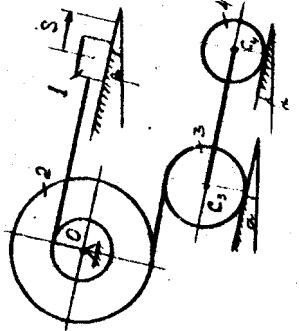
(27)



$m_1; m_2; m_3; m_4; \alpha = 6R_3;$
 $R_4 = 2R_3; \tau_2; R_3; i_{x_2}$
 $S = \frac{f}{3} \tau_2$

$$U_e(S) - ?$$

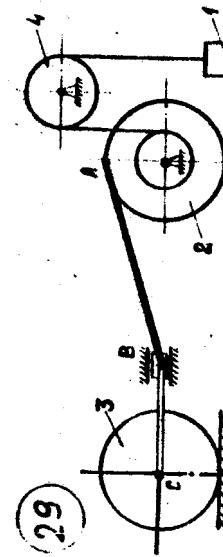
(28)



$m_1; m_2; m_3; m_4; \delta;$
 $f; \alpha; \beta; \tau_2; R_2;$
 $R_3; R_4; i_{x_2}; S$

$$U_e(S) - ?$$

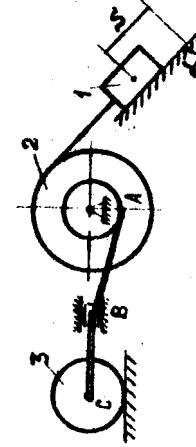
(29)



$m_1; m_2; m_3; m_4 = m_{AC} = m_B = C; f; \delta; \alpha;$
 $\tau_2; R_1; R_3; AB = 5R_2; i_{x_2}; S = \pi R_2$
 $\delta; \tau_2; R_2; R_3; i_{x_2}; S = \pi R_2$

$$U_e(S) - ?$$

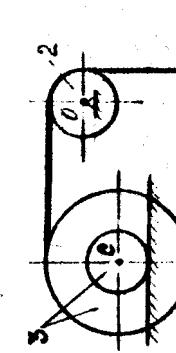
(30)



$m_1; m_2; m_3; m_4 = m_{AC} = m_B = C; f; \delta; \alpha;$
 $\tau_2; R_1; R_3; AB = 6\tau_2; i_{x_2}; S = \pi R_2$

$$U_e(S) - ?$$

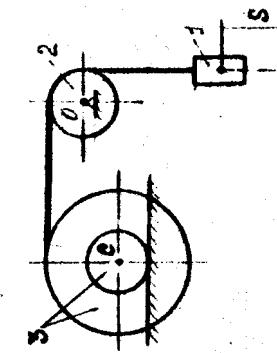
(31)



$m_1; m_2; m_3; \delta; \alpha; \beta;$
 $R_1; \tau_2; R_2; R_3; i_{x_2}; S_c$

$$U_e(S_c) - ?$$

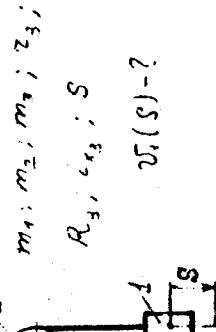
(32)



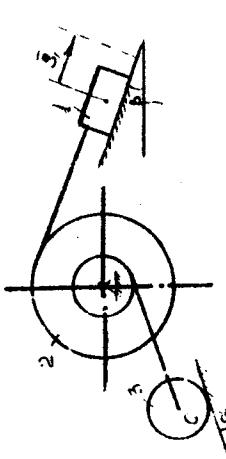
$m_1; m_2; m_3; \tau_3; R_3; i_{x_3}; S.$

$$U_e(S) - ?$$

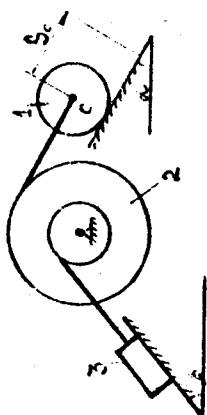
(34)



(35)



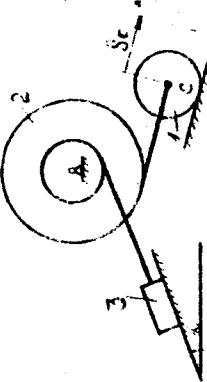
(35)



$m_1, m_2, m_3; f; \delta; \alpha, \beta;$
 $\Sigma_1; R_2; R_3; S; c_{x_2}$

$v_t(S_i) - ?$

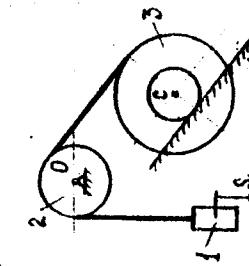
(36)



$m_1, m_2, m_3; f; \delta; \alpha, \beta;$
 $\Sigma_1; R_2; R_3; c_{x_2}; S;$
 $v_t(S_i) - ?$

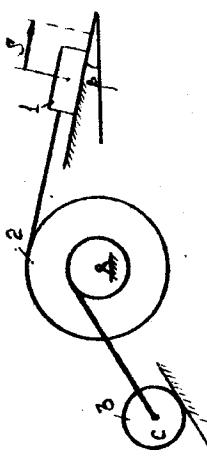
$v_t(S_i) - ?$

(38)



$m_1, m_3; f; \delta; \alpha, \beta;$
 $\Sigma_1; R_3; c_{x_3}; S;$
 $v_t(S_i) - ?$

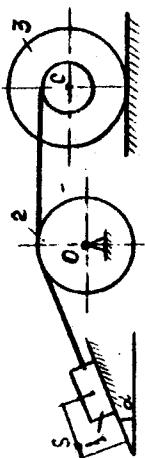
(37)



$m_1, m_2; f; \delta; \alpha, \beta;$
 $\Sigma_1; R_2; R_3; S; c_{x_2}$

$v_t(S_i) - ?$

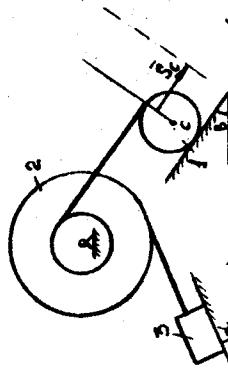
(39)



$m_1, m_2, m_3; f; \delta; \alpha, \beta;$
 $\Sigma_1; S$

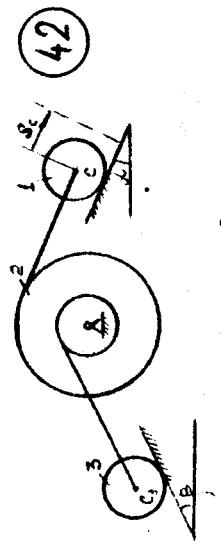
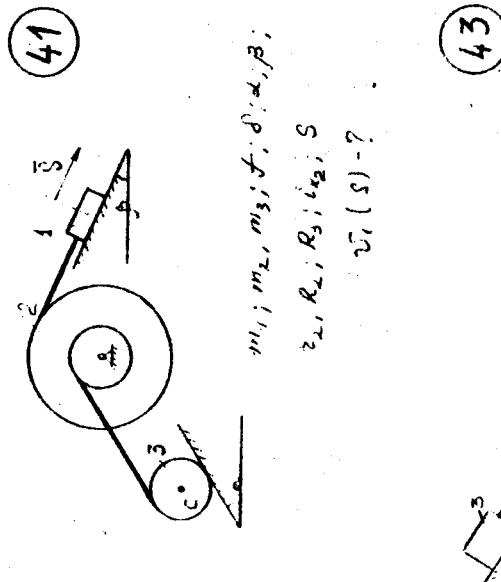
$v_t(S_i) - ?$

(40)

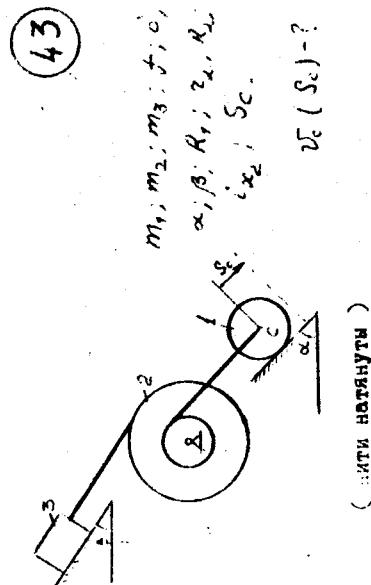


$m_1, m_2, m_3; f; \delta; \alpha, \beta;$
 $\Sigma_1; R_2; c_{x_2}; S$

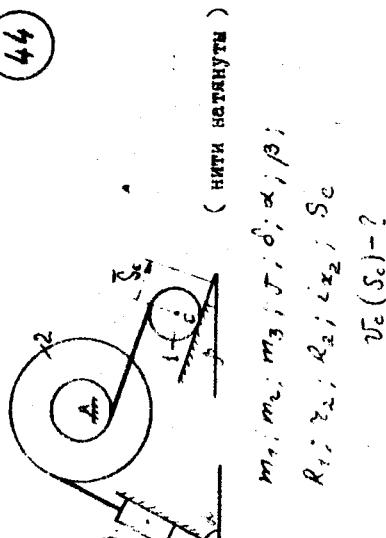
$v_t(S_i) - ?$



- 18 -



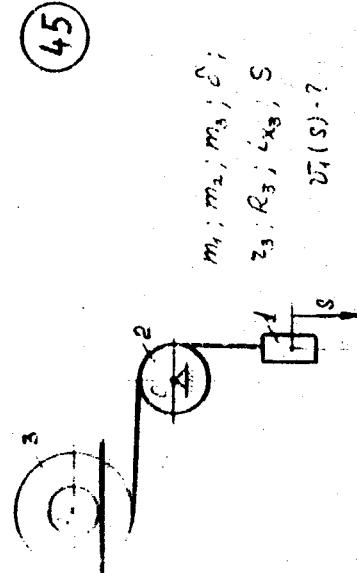
44



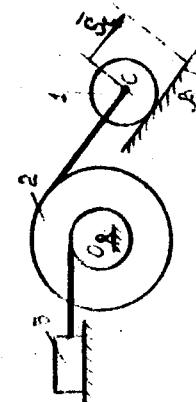
44

- 19 -

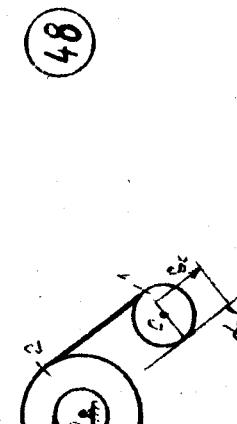
45



46



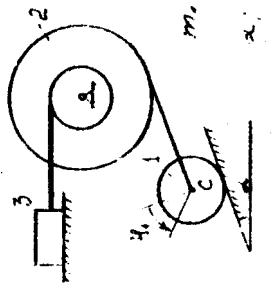
47



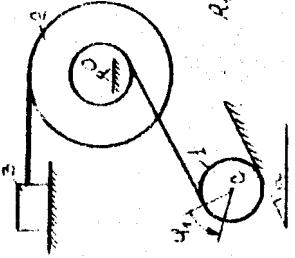
48



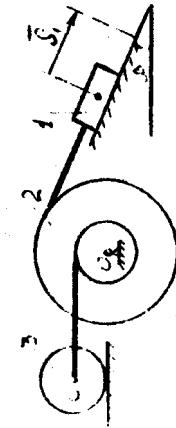
(49)



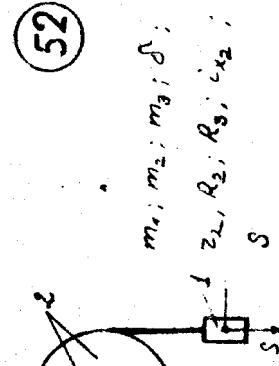
(50)



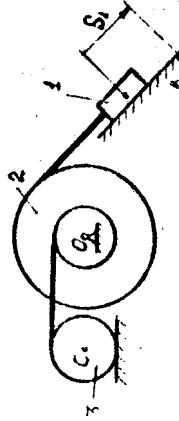
(51)



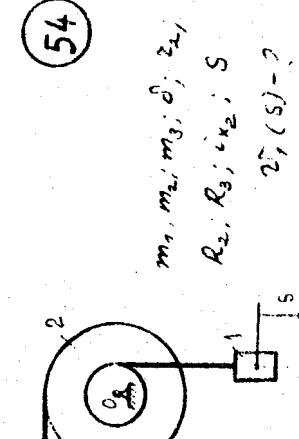
(52)



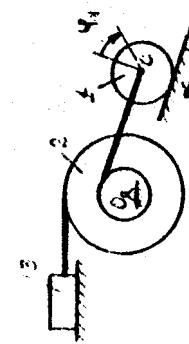
(53)



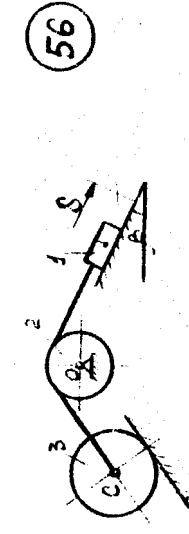
(54)

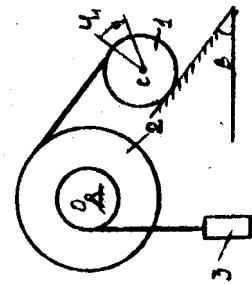
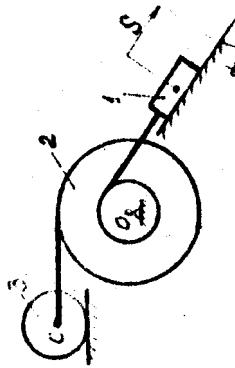
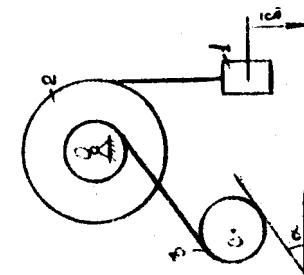
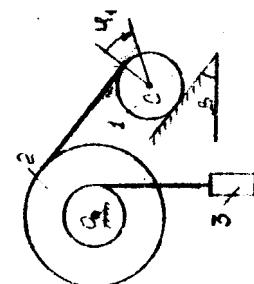
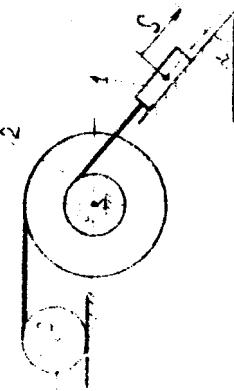
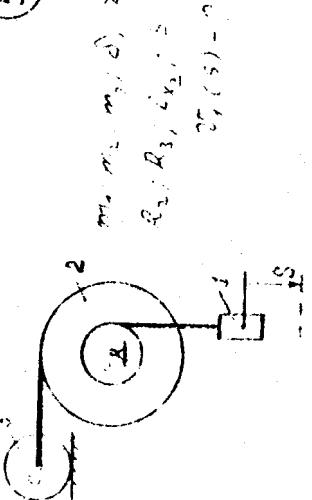
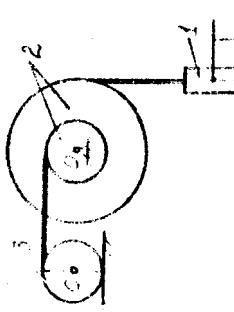
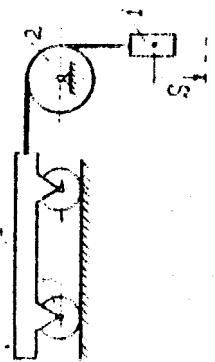


(55)

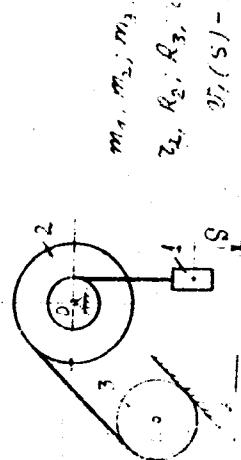


(56)



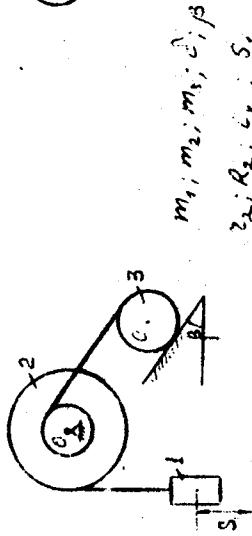
$m_1, m_2, R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2, S_1, S_2$
 $\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \beta_1, \beta_2$
 $v_C(\varphi_1) = ?$
 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, S$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, R_1, R_2, R_3, R_4$
 $v_C(\varphi_1) = ?$
64

 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, R_4, S$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
 $v_C(S) = ?$
62

 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, R_4, S$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
 $v_C(S) = ?$
63

61

 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, R_4, S$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
 $v_C(\varphi_1) = ?$
 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, R_4, S$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
 $v_C(S) = ?$
59

57

 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, S$
 $v_C(S) = ?$
60

 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, S$
 $v_C(S) = ?$
58

 $m_1, m_2, m_3, \delta; R_1, R_2, R_3, S$
 $v_C(S) = ?$

65



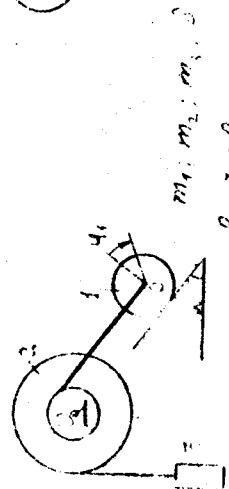
$m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta$,
 $\tau_1, R_2, R_3, c_{x_2}, S$,
 $U_e(S) - ?$

66



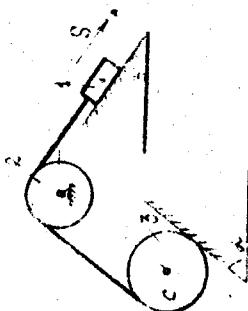
$m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta$,
 τ_2, R_2, c_{x_2}, S ,
 $U_e(S) - ?$

67



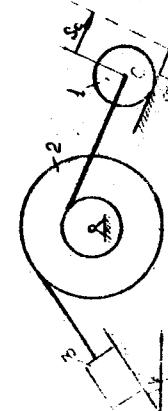
$m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta$,
 τ_1, R_2, c_{x_2}, S ,
 $U_e(S) - ?$

68



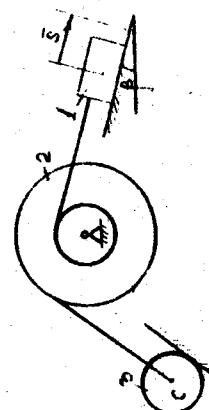
$m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta, R_3, S$,
 $U_e(S) - ?$

69



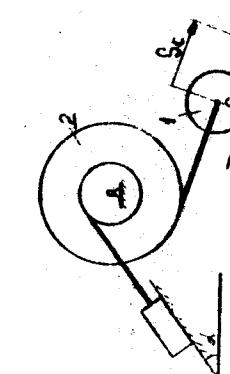
$m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta$,
 τ_1, R_2, c_{x_2}, S ,
 $U_e(S) - ?$

70



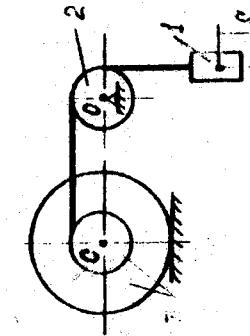
$m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta$,
 τ_2, R_2, c_{x_2}, S ,
 $U_e(S) - ?$

71



(НИТИ НАГРЯНУТЫ)
 $m_1, m_2, m_3, f, \alpha, \beta, R$,
 τ_2, R_2, c_{x_2}, S ,
 $U_e(S) - ?$

72



m_1, m_2, m_3, f ,
 τ_3, R_3, c_{x_3} ,
 S ,
 $U_e(S) - ?$

Маявко Дмитрий Пантелеимонович
Агапова Лидия Анатольевна
Федорова Людмила Анатольевна
Корниенко Лев Николаевич

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ
ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Методические указания
и задания для самостоятельной работы
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов специальностей 140401, 140504,
190603, 220301, 260601, 260602

Второе издание, исправленное

Редакторы
Е.О. Трусова, Л.Г. Лебедева

Корректор
Н.И. Михайлова

Подписано в печать 18.03.08. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 1,63. Печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,56
Тираж 500 экз. Заказ № 116. С 104

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
НИК СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9