Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра теоретической механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Методические указания
для практических занятий
и самостоятельной работы для студентов
всех специальностей и форм обучения

Санкт-Петербург
2008

УДК 531(075)

Григорьев А.Ю. Теоретическая механика. Кинематика: Метод. указания для практических занятий и самостоятельной работы для студентов всех спец. и форм обучения. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008. – 45 с.

Кратко представлен весь необходимый теоретический материал, приведены примеры решения задач и даны несколько десятков задач, в том числе с ответами, для самостоятельной работы студентов по темам раздела кинематика: «Вращательное движение твердого тела», «Составное движение материальной точки».

Рецензент
Доктор техн. наук, проф. В.А. Арет

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

ВВЕДЕНИЕ

Изучение теоретической механики необходимо инженеру любой специальности. С одной стороны, эта дисциплина имеет общеобразовательное значение, объясняя и описывая различные явления, происходящие в окружающем нас мире. С другой стороны она является основой большого количества других дисциплин, таких как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидравлики и др., без знания которых нельзя стать инженером.

При работе над курсом теоретической механики следует иметь в виду, что изучение теоретической части курса должно обязательно сопровождаться самостоятельным решением задач, без чего полное усвоение теории невозможно. Решение задач имеет и свое особое значение, так как оно способствует выработки у студентов навыков схематизирования механических явлений и применения известных математических методов.

При изучении раздела кинематики студент должен свободно оперировать с тригонометрическими функциями и решать тригонометрические уравнения, должен уметь решать задачи геометрии и знать теоремы синусов, косинусов, Пифагора и др. Иметь навыки решения систем алгебраических уравнений, владеть основами векторной алгебры: сложение и вычитание векторов, проектирование вектора или векторной суммы на ось, скалярное и векторное произведение векторов.

Данное пособие для самостоятельной работы студентов состоит из трех частей:

1. Часть. Кратко дается вся необходимая теория для решения задач кинематики на темы:
   - Вращательное движение твердого тела.
   - Составное движение материальной точки.
2. Часть. Приведены примеры решения задач.
3. Часть. Даны задачи для самостоятельного решения, с ответами, для большого числа задач.

Часть I. ТЕОРИЯ, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

1. Вращательное движение твердого тела

§1. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Определение: Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором какие–нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются во всё время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через эти две неподвижные точки, называется осью вращения (рис. 1).

Так как расстояния между точками твёрдого тела должны оставаться постоянными, то при вращательном движении все точки, лежащие на оси вращения неподвижны. Остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры их лежат на оси.

Проведём через ось вращения Az две полуплоскости: полуплоскость I – неподвижную и полуплоскость II подвижную, жёстко связанную с телом. Тогда угол между плоскостями I и II – угол φ, будет однозначно определять положение тела в любой момент времени. Угол φ называется угломповорота тела. Будем считать φ>0, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az, и отрицательным (φ<0), если он отложен по ходу часовой стрелки. Например, на рис.1 φ>0.

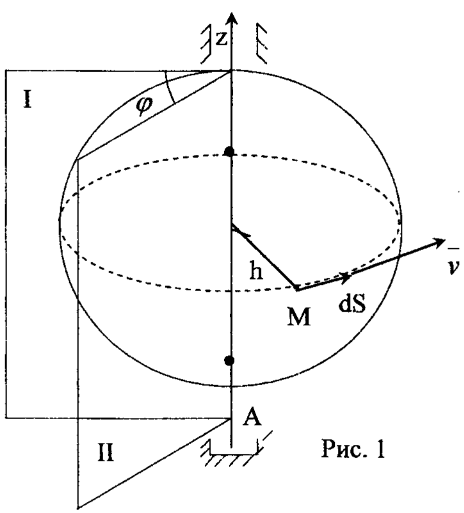


Рис. 1

Следовательно, для того чтобы задать положение твёрдого тела, при вращательном движении, необходимо и достаточно знать закон изменения угла поворота тела со временем, то есть знать $$\varphi = \varphi(t). \qquad (1)$$

Выражение (1) еще называют уравнением вращательного движения тела.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твёрдого тела является его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, то средняя угловая скорость тела за этот промежуток времени определится: $$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Угловой скоростью вращения тела в данный момент времени t называется предел, к которому стремится значение ω_{cp}, если $\Delta t \to 0$, т. е. $$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (3)$$

Легко видеть, что если вращение происходит по часовой стрелки для наблюдателя находящегося со стороны положительного направления оси z, то ω<0, если против часовой стрелки, то ω>0. Размерность угловой скорости вращения в системе СИ: $[\omega]$=рад/с.

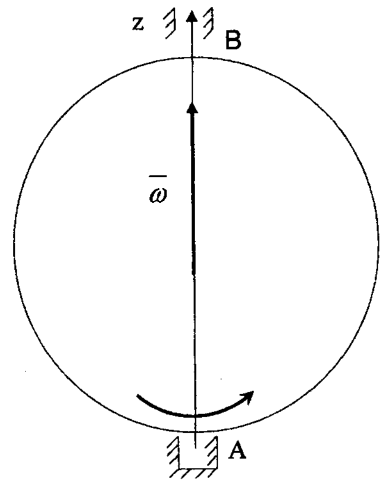


Рис. 2

Угловую скорость вращения тела можно изобразить в виде вектора $\bar{\omega}$, модуль которого $\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$, а направлен он вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки, например см. рис. 2.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$

угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, то среднее угловое ускорение тела за этот промежуток времени равно:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{4}$$

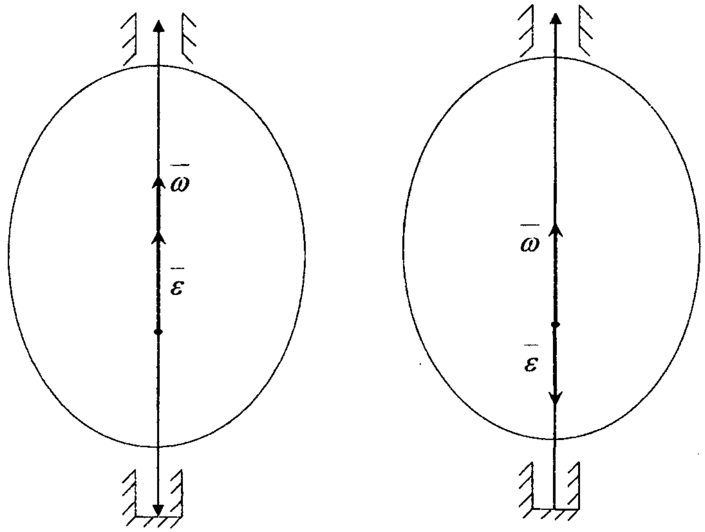
Угловым ускорением в данный момент времени t **называется предел:**

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{5}$$

или, принимая во внимание (3) получим , $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$.

Размерность углового ускорения в системе СИ: $[\varepsilon] = {рад}/{с^2}$.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно представить вектором $\bar{\varepsilon}$ (рис. 3), его модуль определится формулой



ускоренное вращение   замедленное вращение

Рис. 3

$\varepsilon = \left|\dfrac{d\omega}{dt}\right| = \left|\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\right| = |\ddot{\varphi}|$, а направлен он вдоль оси вращения тела. При этом направление вектора $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}$, если тело вращается ускоренно, и противоположно $\bar{\omega}$, при замедленном движении (см. рис. 3).

§2 Скорости и ускорения точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим движение какой – либо точки M абсолютно твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 1). Пусть h - кратчайшее расстояние от точки M до оси вращения. Тогда точка M при своём движении будет описывать окружность радиуса h.

Нарисуем плоскость, в которой движется точка M в плоскости чертежа (рис. 4). Точка O - след оси вращения. Пусть I – след неподвижной полуплоскости, а II – след подвижной полуплоскости, жестко связанной с вращающимся телом и проходящей через точку М. Пусть направление положительного отсчёта криволинейной координаты S совпадает с положительным направлением отсчёта угла поворота тела φ (см. рис. 4). И в начальный момент времени I и II полуплоскости совпадают. Тогда значение криволинейной координаты точки М определится выражением: $S = \breve{M}M_0 = h \cdot \varphi$, где размерность угла поворота тела φ в радианах.

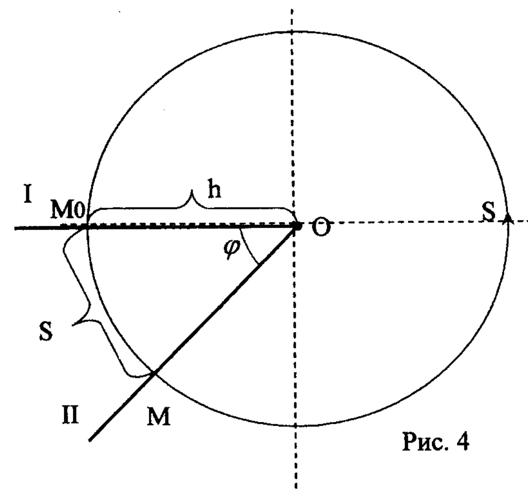


Рис. 4

Следовательно, модуль вектора скорости точки M, **движущейся по окружности, найдется из выражения:**

$$V=\left|\frac{dS}{dt}\right|=\left|\frac{d(h\cdot\varphi)}{dt}\right|=h\cdot\frac{d\varphi}{dt}=h\cdot\omega, \qquad (6)$$

где ω - угловая скорость вращения твёрдого тела.

Направлен вектор скорости $\overline{V}$ по касательной к траектории в сторону вращения (см. рис. 1, 4). $\overline{V}$ - носит название линейной скорости движения точки вращающегося тела.

Из выражения (6) следует, что модуль вектора скорости любой точки твёрдого тела равен произведению модуля угловой скорости вращения на кратчайшее расстояние от точки до оси вращения.

Так как точка М движется по окружности, то её ускорение складывается из нормального и касательного ускорений:

$$\vec{w}=\vec{w}_\tau+\vec{w}_n.$$

1. **Касательное ускорение по величине определяется выражением:** $w_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{d(h\cdot\omega)}{dt}=h\cdot\varepsilon$. Это ускорение направлено по касательной к окружности в туже сторону, что и скорость $\vec{V}$, если вращение ускоренное и направлено в противоположную сторону, если вращение замедленное. На рис. 5 вращение ускоренное.

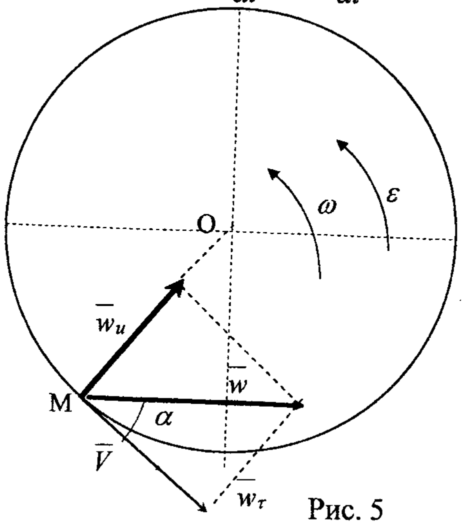


Рис. 5

2. **Нормальное ускорение по модулю определяется выражением:**

$$w_n=\frac{V^2}{\rho}=\frac{\omega^2h^2}{h}=\omega^2h.$$

Это ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения ($\rho=h$ - радиус кривизны для любой точки окружности равен радиусу этой окружности). Так как $\overline{w_\tau}\perp\overline{w_u}$, то модуль полного ускорения определяется по формуле:

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_u^2}=h\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}, \text{ а}$$

$$tg\alpha=\frac{|\overline{w_u}|}{|\overline{w_\tau}|}=\frac{\omega^2}{\varepsilon}. \qquad (7)$$

2. Составное движение материальной точки

§1. Основные понятия и определения

Пусть точка M движется внутри или по поверхности тела A, которое перемещается относительно другого, условно неподвижного, тела B (рис. 6). Тогда точка M участвует одновременно в 2-х движениях:

1. Движение относительно тела A.
2. Движение вместе с телом A относительно неподвижного тела B.

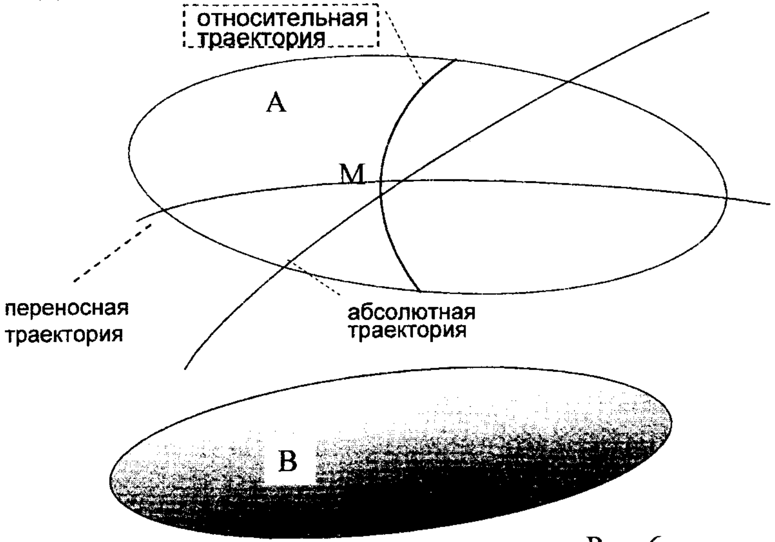


Рис. 6

Если мы сумели рассмотреть такие два движения материальной точки, то говорят, что точка совершает составное или сложное движение.

Движение точки M, относительно подвижного тела A, называется <u>относительным движением точки М</u>. Движение точки M, относительно неподвижного тела B, называется <u>абсолютным движением точки М</u>.

Движение той точки тела A, в которой в данный момент времени находится точка M, относительно неподвижного тела B называется <u>переносным движением точки М</u>. Само тело A ещё называют <u>переносной средой.</u>

Во всех этих движениях точка M имеет свою траекторию, скорость и ускорение (рис. 6).

Траектория точки M в абсолютном движении называется <u>абсолютной траекторией</u>. Скорость движения точки М, относительно неподвижного тела В, называется абсолютной скоростью ($\overline{v_a}$), ускорение движения точки М относительно неподвижного тела В называется абсолютным ускорением движения точки М ($\overline{w_a}$).

<u>Относительная траектория</u> точки M в относительном движении неизменно связана с переносной средой (телом A) и перемещается вместе с ней. Скорость движения точки М относительно подвижного тела А называется относительной скоростью ($\overline{v_r}$), ускорение движения точки М относительно подвижного тела А называется относительным ускорением движения точки М ($\overline{w_r}$).

<u>Переносной траекторией</u> называется траектория той точки переносной среды (подвижного тела А), в которой в данный момент времени находится точка M, соответственно, скорость и ускорение этой точки тела А, в которой находится точка М называются - переносные скорость и ускорение точки M (соответственно $\overline{v_e}$ и $\overline{w_e}$).

Заметим, что в разные моменты времени точка M совпадает с различными точками переносной среды (тела A), каждая из которых в общем случае имеет свою траекторию, т. е. каждому положению материальной точки М на теле А соответствует своя переносная траектория движения.

Рассмотрим пример:

Диск вращается вокруг своей оси, вдоль его радиуса движется ползун (рис. 7). Вращающийся диск - это переносная среда. Ползун – наблюдаемая точка. Тогда переносная траектория – это окружность, которую описывает точка диска, в которой, в данный момент времени находится ползун (1 на рис. 7).

Траектория относительного движения – прямая, направленная от центра диска к периферии (2 на рис 7).

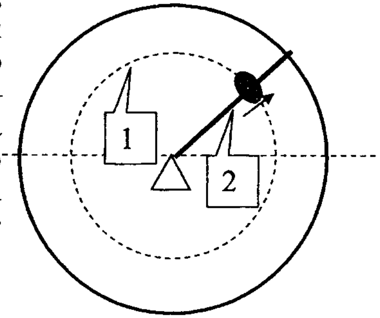


Рис. 7

Траектория абсолютного движения имеет вид раскручивающейся из центра диска спирали.

§2. Скорости и ускорения материальной точки в составном движении

Пусть $Oxyz$ - неподвижная система координат, жёстко связано с неподвижным телом B (см. §1 этой главы), а $C\xi\eta\zeta$ (читается С, кси, эта, дзета) – подвижная система координат жёстко связанная с переносной средой (подвижным телом A) рис. 8. Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$, точка M - наблюдаемая материальная точка.

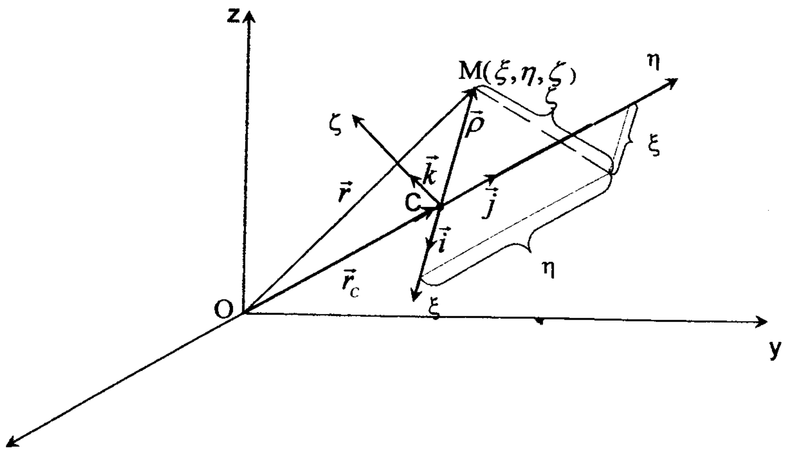


Рис. 8

Проведём радиусы – векторы наблюдаемой точки:

$\bar{r}$ - абсолютный радиус – вектор точки M ;

$\bar{\rho}$ - относительный радиус – вектор точки M ;

$\bar{r}_c$ - радиус – вектор начала координат подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$ относительно неподвижной.

Пусть ξ,η,ζ - текущие координаты наблюдаемой точки М в относительном движении.

Очевидно, что в любой момент времени справедливо равенство: $\bar{r} = \bar{r}_c + \bar{\rho}$.

Координатное представление относительного радиуса – вектора можно записать в следующем виде: $\bar{\rho} = \xi \cdot \bar{i} + \eta \cdot \bar{j} + \zeta \cdot \bar{k}$, откуда

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \xi \cdot \bar{i} + \eta \cdot \bar{j} + \zeta \cdot \bar{k}. \qquad (1)$$

С течением времени положение точки С и направление координатных ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ меняется. Так же меняются относительные координаты ξ, η и ζ положения материальной точки, поэтому все записанные параметры в выражении (1) являются функциями времени:

$$\bar{r}_c = \bar{r}_c(t),\ \bar{i} = \bar{i}(t),\ \bar{j} = \bar{j}(t),\ \bar{k} = \bar{k}(t),\ \xi = \xi(t),\ \eta = \eta(t),\ \zeta = \zeta(t).$$

Согласно определению относительного движения материальной точки для нахождения относительной скорости и относительного ускорения мы не должны рассматривать переносное движение, и поэтому можем считать, что подвижная система $C\xi\eta\zeta$ условно неподвижна.

Тогда относительная скорость $\bar{v}_r = \left.\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|_{\bar{r}_c,\, \bar{i}, \bar{j} \text{ и } \bar{k} = const}$. (2)

Дифференцируя выражение (1) по скалярному аргументу t с учётом (2), получим выражение для определения вектора скорости точки в относительном движении:

$$\bar{v}_r = \dot{\xi} \cdot \bar{i} + \dot{\eta} \cdot \bar{j} + \dot{\zeta} \cdot \bar{k}. \qquad (3)$$

Продифференцируем левую и правую части равенства (3) по скалярному аргументу t, при условии, что для относительного ускорения $\bar{r}_c,\, \bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k} = const$.

$$\bar{w}_r = \left.\frac{d\bar{v}_r}{dt}\right|_{\bar{r}_c,\, \bar{i}, \bar{j} \text{ и } \bar{k} = const}.$$

величина относительного ускорения точки будет:

$$\bar{w}_r = \ddot{\xi} \cdot \bar{i} + \ddot{\eta} \cdot \bar{j} + \ddot{\zeta} \cdot \bar{k}. \qquad (4)$$

При определении переносной скорости и переносного ускорения мы не должны рассматривать относительное движение. Поэтому, должны считать, что координаты ξ,η,ζ условно постоянны.

Тогда переносная скорость:

$$\bar{v}_e = \left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{\xi,\eta,\zeta = const} = \frac{d\bar{r}_c}{dt} + \xi\frac{d\bar{i}}{dt} + \eta\frac{d\bar{j}}{dt} + \zeta\frac{d\bar{k}}{dt}. \qquad (5)$$

А переносное ускорение:

$$\bar{w}_e = \left.\frac{d\bar{v}_e}{dt}\right|_{\xi,\eta,\zeta = const} = \frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} + \xi\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + \eta\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}. \qquad (6)$$

При определении абсолютных скоростей и ускорений необходимо дифференцировать выражение (1) по времени без всяких предположений: $\bar{v}_a = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$, $\bar{w}_a = \dfrac{d\bar{v}_a}{dt}$.

§3. Теорема о сложении скоростей в составном движении

Абсолютная скорость материальной точки в составном движении равна геометрической сумме её переносной и относительной скоростей:

$$\bar v_a = \bar v_e + \bar v_r .$$

Доказательство:

Продифференцируем по времени равенство (1) предыдущего параграфа без всяких предположений, получим:

$$\bar v_a = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{d\bar r_c}{dt} + \left(\dot\xi \bar i + \xi \frac{d\bar i}{dt}\right) + \left(\dot\eta \bar j + \eta \frac{d\bar j}{dt}\right) + \left(\dot\zeta \bar k + \zeta \frac{d\bar k}{dt}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d\bar r_c}{dt} + \xi\frac{d\bar i}{dt} + \eta\frac{d\bar j}{dt} + \zeta\frac{d\bar k}{dt}}_{\bar v_e} + \underbrace{\dot\xi\cdot\bar i + \dot\eta\cdot\bar j + \dot\zeta\cdot\bar k}_{\bar v_r}. \qquad (7)$$

Следовательно: $\bar v_a = \bar v_e + \bar v_r .$ (8)

Теорема доказана.

Пример (рис. 9): Пусть диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Ползун M в момент времени $t = 0$ выходит из центра и движется вдоль радиуса диска с постоянной по модулю скоростью $\vec v$. Очевидно при таком движении относительная скорость: $\vec v_r = \vec v$. Переносная скорость – это скорость точки подвижной среды (вращающегося диска), в которой в данный момент времени находится точка М, следовательно: $v_e = OM\cdot\omega$, где $OM = v\cdot t$, окончательно, $v_e = v\cdot t\cdot\omega$ и $\bar v_e \perp OM$

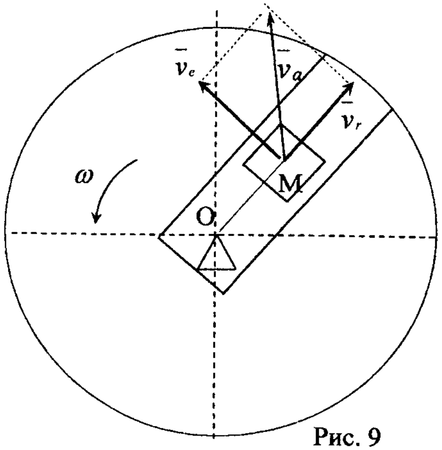


Рис. 9

Согласно ранее доказанной теореме: $\bar v_a = \bar v_e + \bar v_r$, тогда модуль вектора абсолютной скорости точки М в таком движении определится выражением: $v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = v\sqrt{\omega^2 t^2 + 1}$.

§4. Теорема о сложении ускорений в составном движении (теорема Кориолиса)

Абсолютное ускорение материальной точки в составном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и Кориолисова ускорений:

$$\bar w_a = \bar w_e + \bar w_r + \bar w_c .$$

Доказательство

Продифференцируем по времени левую и правую части выражения (7), полученного в предыдущем параграфе:

$$\bar w_a = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d\bar r_c}{dt^2} + \left(\dot\xi\frac{d\bar i}{dt} + \xi\frac{d^2\bar i}{dt^2}\right) + \left(\dot\eta\frac{d\bar j}{dt} + \eta\frac{d^2\bar j}{dt^2}\right) + \left(\dot\zeta\frac{d\bar k}{dt} + \zeta\frac{d^2\bar k}{dt^2}\right) +$$

$$+ \left(\ddot\xi\bar i + \dot\xi\frac{d\bar i}{dt}\right) + \left(\ddot\eta\bar j + \dot\eta\frac{d\bar j}{dt}\right) + \left(\ddot\zeta\bar k + \dot\zeta\frac{d\bar k}{dt}\right) = \underbrace{\frac{d^2\bar r_c}{dt^2} + \xi\frac{d^2\bar i}{dt^2} + \eta\frac{d^2\bar j}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\bar k}{dt^2}}_{\bar w_e\left(\text{из } (6)\right)} +$$

$$+ \underbrace{\ddot\xi\bar i + \ddot\eta\bar j + \ddot\zeta\bar k}_{\bar w_r(\text{из}(4))} + \underbrace{2\dot\xi\frac{d\bar i}{dt} + 2\dot\eta\frac{d\bar j}{dt} + 2\dot\zeta\frac{d\bar k}{dt}}_{\vec w_C}. \qquad (9)$$

Обозначим последнее выражение $\bar w_c$ и назовём его Кориолисовым ускорением, тогда получим:

$$\bar w_a = \bar w_e + \bar w_r + \bar w_c . \qquad (10)$$

Теорема доказана.

§5. Частные случаи движения переносной среды

1. Поступательное движение переносной среды

Если переносная среда движется поступательно, то оси жёстко связанной с ней подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$ остаются всё время параллельными самим себе, следовательно, орты этой системы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - не меняются по направлению (а по модулю они всегда равны единице). Тогда $\dfrac{d\bar{i}}{dt}=\dfrac{d\bar{j}}{dt}=\dfrac{d\bar{k}}{dt}=0$ (производная от $const$ равна нулю).

В этом случае согласно выражению (9) Кориолисово ускорение обращается в ноль: $\bar{w}_c=0$.

Следовательно, при поступательном движении переносной среды абсолютное ускорение равно геометрической сумме только переносного и относительного ускорений: $\bar{w}_a=\bar{w}_e+\bar{w}_r$.

2. Переносная среда вращается вокруг неподвижной оси

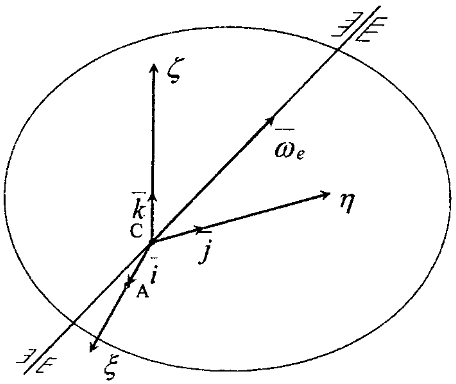


Рис. 10

Пусть переносная среда вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$. Выберем подвижную систему координат $C\xi\eta\zeta$ с ортами осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, что её центр, точка С, лежит на оси вращения (рис. 10), тогда система координат $C\xi\eta\zeta$ будет вращающейся вокруг точки С прямоугольной системой координат. Рассмотрим точку A переносной среды находящегося на конце вращающегося орта $\bar{i}$. Абсолютная скорость этой точки согласно кинематике точки определяется по формуле:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}_A}{dt}=\frac{d\bar{i}}{dt}. \qquad (*)$$

С другой стороны, по векторной формуле из кинематики вращательного движения тела имеем:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}_A \Rightarrow \bar{v}=\bar{\omega}_e\times\bar{i}. \qquad (**)$$

Сравнивая выражения (*) и (**), получаем векторное равенство:

$$\frac{d\bar{i}}{dt}=\bar{\omega}_e\times\bar{i}. \qquad (11)$$

Если аналогично рассмотреть точки на концах ортов $\bar{j}$ и $\bar{k}$, и определить их скорости двумя способами, то получим:

$$\frac{d\bar{j}}{dt}=\bar{\omega}_e\times\bar{j}, \qquad (12)$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt}=\bar{\omega}_e\times\bar{k}. \qquad (13)$$

Подставим эти выражения в выражение (9) для определения Кориолисова ускорения, получим:

$$\bar{w}_c=2\left(\dot{\xi}\cdot\bar{\omega}_e\times\bar{i}+\dot{\eta}\cdot\bar{\omega}_e\times\bar{j}+\dot{\zeta}\cdot\bar{\omega}_e\times\bar{k}\right)= = 2\bar{\omega}_e\times\underbrace{\left(\dot{\xi}\cdot\bar{i}+\dot{\eta}\cdot\bar{j}+\dot{\zeta}\cdot\bar{k}\right)}_{\bar{v}_r(\text{из выр.}(3))}==2\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r; \qquad (14)$$

Откуда следует, что <u>**Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости вращения переносной среды на вектор относительной скорости движения наблюдаемо точки.**</u>

Так как в каждый данный момент времени любое движение переносной среды можно представить как сумму поступательного и вращательного движения, а при поступательном движении переносной среды $\bar{w}_c=0$, то и **для произвольного движения переносной среды вектор Кориолисова ускорения определяется по формуле:**

$$\vec{w}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \qquad (15)$$

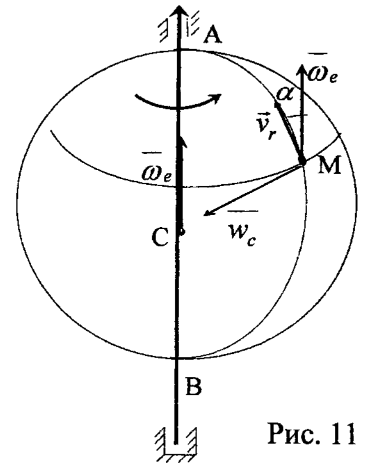


Рис. 11

Рассмотрим пример (рис. 11): Пусть имеется шар, вращающийся с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$, вокруг оси AB, проходящей через центр шара точку С.

По поверхности шара, в сторону от B к A, в верхнем полушарии, движется точка M со скоростью $\bar{v}_r$.

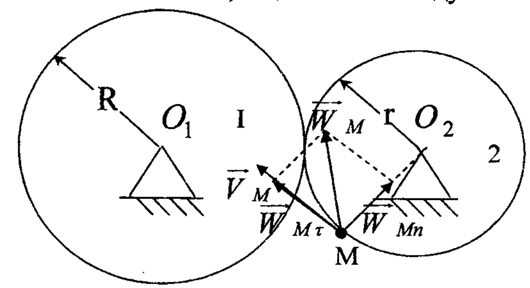
Требуется определить величину и направление вектора Кориолисова ускорения точки M. Перенесём мысленно вектор угловой скорости $\bar{\omega}_e$ в точку M параллельно самому себе. Тогда согласно определению $\bar{w}_c = 2\cdot(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$. Модуль вектора ускорения определится выражением: $w_c = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin\alpha$.

В силу определения векторного произведения 2$^{\text{ух}}$ векторов, направлен вектор $\vec{w}_c$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение первого вектора $\bar{\omega}_e$ со вторым вектором $\bar{v}_r$, видится поворотом вектора $\bar{\omega}_e$ против хода часовой стрелки на наименьший угол. Т. е. он перпендикулярен плоскости $ACBM$, в которой лежат и вектор $\bar{\omega}_e$, и вектор $\bar{v}_r$ и направлен, как показано на рис. 11.

Часть II. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

ПРИМЕР 1: Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 20$ см и $r = 10$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = \frac{1}{4}\left(3t^2 - 2t\right)$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 1$ с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



Решение

Так как колеса вращаются без проскальзывания, то линейные скорости движения соприкасающихся точек колес должны быть одинаковые, следовательно: $V_1 = V_2 = V_M$. Линейная скорость точки вращающегося тела определяется формулой: $V = \omega \cdot h$, где ω - угловая скорость вращения тела, h - кратчайшее расстояние от точки до оси вращения. Поэтому, $V_1 = \omega_1 \cdot R$, а $V_2 = \omega_2 \cdot r$. Но так как $V_1 = V_2$, то и $\omega_1 \cdot R = \omega_2 \cdot r$ (*). Угловая скорость вращения тела $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, следовательно, $\omega_1 = \frac{1}{4}(6t - 2) = \frac{3t-1}{2}$ рад/с. Тогда из выражения (*) получим $\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot R}{r} = \frac{3t-1}{2}\cdot\frac{R}{r}$. Для заданного момента времени $t_1 = 1$ с получим: $\omega_2 = \frac{3t-1}{2}\cdot\frac{R}{r} = \frac{3\cdot 1 - 1}{2}\cdot\frac{0.2}{0.1} = 2$ рад/с, $V_2 = V_M = \omega_2 \cdot r = 2\cdot 0.1 = 0.2$ м/с.

Направлен вектор скорости $\vec{V}_M$ по касательной к траектории движения точки М, т.е. по касательной к ободу колеса 2 в сторону относительного вращения колеса 2 по часовой стрелке как показано на рисунке.

Точка М движется по окружности, поэтому вектор её полного ускорения равен векторной сумме её касательного и нормального ускорений: $\vec{W}_M = \vec{W}_{Mn} + \vec{W}_{M\tau}$.

Величина нормального ускорения может быть определена двумя выражениями: $W_{Mn} = \omega_2^2 \cdot r$ или $W_{Mn} = \frac{V_M^2}{r}$. Так как и ω_2, и V_M нам известны, то величину нормального ускорения можно определить из любой формулы: $W_{Mn} = \omega_2^2 \cdot r = 2^2 \cdot 0.1 = 0.4$ м/с^2. Направлен вектор нормального ускорения по радиусу вращения к центру вращения т. O_2.

Модуль вектора касательного ускорения определится из выражения: $W_{M\tau} = \varepsilon_2 \cdot r$, где ε_2 - угловое ускорение вращения второго колеса, $\varepsilon_2 = \frac{d(\omega_2)}{dt} = \frac{3R}{2r}$ рад/с^2. Тогда $W_{M\tau} = \varepsilon_2 \cdot r = \frac{3R}{2} = \frac{3 \cdot 0.2}{2} = 0.3$ м/с^2.

Направлен вектор $\vec{W}_{M\tau}$ по касательной к траектории движения в ту же сторону, что и вектор скорости $\vec{V}_M$, так как вращение колес в данный момент времени ускоренное (точнее для данной задачи равноускоренное $\varepsilon = const$).

Так как вектора $\vec{W}_{Mn}$ и $\vec{W}_{M\tau}$ взаимно перпендикулярны, то их векторная сумма – это вектор лежащий на диагонали прямоугольника со сторонами $\vec{W}_{Mn}$ и $\vec{W}_{M\tau}$ (см. рис.), а его величина определится по теореме Пифагора:

$$W_M = \sqrt{W_{Mn}^2 + W_{M\tau}^2} = \sqrt{(0.4)^2 + (0.3)^2} = 0.5\,\text{м/с}^2.$$

Задача решена.

<u>ПРИМЕР 2:</u> Колесо радиуса 20 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\pi \cdot t}{2}$ рад. Найти скорость, касательное и нормальное ускорения точки обода колеса в момент времени, когда угловая скорость колеса станет равной $\pi/2$ рад/с.

Решение

Известно, что угловая скорость вращения тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{2}.$$

Если в это выражение подставить значение времени t_1, когда угловая скорость вращения равна $\omega_1 = \pi/2$ рад/с, то получим уравнение для определения неизвестного момента времени t_1: $\omega_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi \cdot t_1}{2}$, откуда

$$t_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \omega_1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \pi/2}{\pi}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0.5c.$$

Таким образом, все неизвестные параметры требуется определить в момент времени $t_1 = 0.5$ с. Скорость точки обода колеса: $V_1 = \omega_1 \cdot r = \frac{\pi}{2} \cdot 0.2 = 0.1\pi$ м/с.

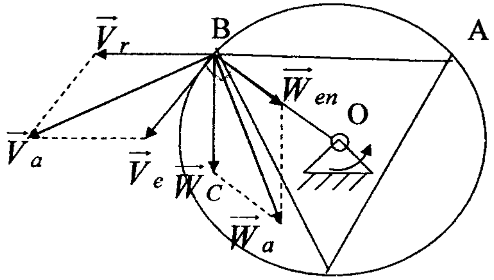
Нормальное ускорение точки:

$$W_{n1} = \omega_1^2 \cdot r = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot r = \frac{\pi^2}{4} \cdot 0.2 \approx 0.5\,\text{м/с}^2.$$

Касательное ускорение $W_{\tau 1} = \varepsilon_1 \cdot r$, где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2}{4} \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{2}$, в момент $t_1 = 0.5$ с: $\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2}{4} \cdot \sin\frac{\pi \cdot t_1}{2} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2}{4} \cdot \sin\frac{\pi \cdot 0.5}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.5$ рад/с^2, а $W_{\tau 1} = \varepsilon_1 \cdot r \approx 2.5 \cdot 0.2 = 0.5$ м/с^2.

Задача решена.

2. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



ПРИМЕР 1: Диск радиуса 0,5 м вращается с постоянной угловой скоростью ω=10 рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр О. По стороне АВ, вписанного равностороннего треугольника, равномерно движется точка со скоростью v=3 м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигает положения В.

Решение

1. Определим абсолютную скорость движения точки.

Согласно теореме о сложении скоростей в составном движении абсолютная скорость материальной точки в составном движении равна геометрической сумме её переносной и относительной скоростей: $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Следовательно, для того чтобы определить вектор абсолютной скорости $\vec{V}_a$, сначала необходимо определить вектор скорости точки в переносном движении $\vec{V}_e$ и по величине, и по направлению, затем вектор скорости точки в относительном движении $\vec{V}_r$, так же и по величине, и по направлению, а затем их векторно сложить.

Согласно определению, переносное движение точки – это движение не самой точки, а той точки подвижной переносной среды, в которой она в этот момент времени находится. Переносной подвижной средой в этой задаче является вращающийся диск. Таким образом, скорость точки диска В, в которой в данный момент времени находится движущаяся точка и есть переносная скорость $\vec{V}_e$. По величине скорость точки вращающегося тела определяется выражением: $V_e = \omega \cdot h$, где ω - угловая скорость вращения диска задана, h - кратчайшее расстояние от точки В до оси вращения известно $h = r = 0.5$ м. Тогда $V_e = \omega \cdot r = 10 \cdot 0.5 = 5$ м/с. Направлен вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярно радиусу вращения ОВ в сторону относительного вращения диска (см. рис.).

Относительное движение точки – это движение относительно подвижной среды, т.е. вращающегося диска. Это равномерное прямолинейное движение по хорде АВ. Поэтому скорость относительного движения равна скорости движения точки по стороне вписанного треугольника V_r =v=3 м/с. Направлен вектор скорости относительного движения по стороне АВ от А в сторону В (см. рис.).

Направление вектора скорости в абсолютном движении совпадает с направлением диагонали параллелограмма со сторонами векторами $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ (см. рис.). Так как угол между векторами $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ равен $\dfrac{\pi}{3}$ рад, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 0.5} = 7\,\text{м/с}.$$

2. Определим абсолютное ускорение движения точки.

Согласно теореме о сложении ускорений в составном движении (теорема Кориолиса) абсолютное ускорение материальной точки в составном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и Кориолисова ускорений: $\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c$.

Следовательно, для того чтобы определить вектор абсолютного ускорения $\vec{W}_a$, сначала необходимо определить по величине и направлению вектора $\vec{W}_e$, $\vec{W}_r$ и $\vec{W}_C$, затем их надо векторно сложить.

Как уже отмечалось выше переносное движение точки – это движение точки В диска, в которой в рассматриваемый момент времени находится наша точка. Точка В диска движется по окружности, следовательно переносное ускорение складывается из двух ускорений нормального и касательного: $\vec{W}_e = \vec{W}_{en} + \vec{W}_{e\tau}$.

Вектор нормального ускорения по величине определяется или выражением $W_{en} = \omega^2 \cdot r$, или $W_{en} = \dfrac{V_e^2}{r}$. Так как на данном этапе решения задачи нам известно и ω, и V_e, то W_{en} можем определить по любой из указанных формул, например:

$W_{en} = \omega^2 \cdot r = 10^2 \cdot 0.5 = 50$ м/с^2. Направлен этот вектор по радиусу вращения от точки В к центру вращения т. О.

Величина вектора касательного ускорения $W_{e\tau} = \varepsilon \cdot r$, где ε - угловое ускорение вращения диска $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$, так как $\omega = const$. Отсюда и $W_{e\tau} = 0$.

Относительное движение – это равномерное, прямолинейное движение по стороне АВ треугольника, поэтому $\vec{W}_r = \dfrac{d\vec{V}_r}{dt} = 0$.

Вектор Кориолисова ускорения определяется выражением:

$$\vec{W}_C = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r.$$

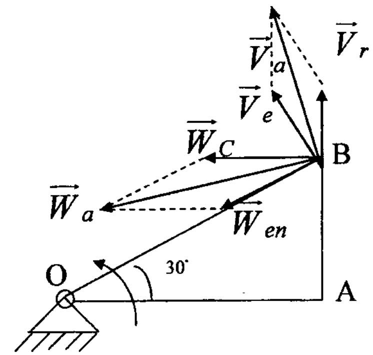
Здесь $\vec{\omega}_e$ - вектор угловой скорости вращения подвижной переносной среды, т.е. нашего диска. По величине $\omega_e = \omega = 10$ рад/с. Направлен этот вектор по оси вращения диска в ту сторону, откуда его вращение видится против хода часовой стрелки, таким образом, вектор $\vec{\omega}_e$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас. Тогда, согласно векторному произведению двух векторов вектор $\vec{W}_C$ направлен перпендикулярно перемножаемым векторам $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ в ту сторону, откуда совмещение первого вектора $\vec{\omega}_e$ со вторым вектором $\vec{V}_r$ видится поворотом на наименьший угол против хода часовой стрелки. Наименьший угол поворота равен $\dfrac{\pi}{2}$ рад. Следовательно, вектор $\vec{W}_C$ лежит в плоскости чертежа и направлен вертикально вниз (см. рис.). По величине $W_C = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin\dfrac{\pi}{2} = 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ м/с^2.

В итоге, вектор абсолютного ускорения складывается из двух векторов: $\vec{W}_a = \vec{W}_{en} + \vec{W}_c$. Направление вектора $\vec{W}_a$ совпадает с диагональю параллелограмма со сторонами векторами $\vec{W}_{en}$ и $\vec{W}_c$ см. рис. Так как угол между векторами $\vec{W}_{en}$ и $\vec{W}_c$ равен $\dfrac{\pi}{3}$ рад (см. рис.), то величина вектора $\vec{W}_a$ определится выражением:

$$W_a = \sqrt{W_{en}^2 + W_C^2 + 2 \cdot W_{en} \cdot W_C \cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{50^2 + 60^2 + 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 0.5} \approx 95 \text{ м/с}^2.$$

Задача решена.

ПРИМЕР 2. Прямоугольный треугольник ОАВ вращается вокруг своей вершины О с постоянной угловой скоростью ω=1рад/с. По катету АВ равномерно движется точка со скоростью u=2м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигает вершины В, если ОА= $2\sqrt{3}$ м.



Решение

1. Определим абсолютную скорость движения точки.

Согласно теореме о сложении скоростей в составном движении абсолютная скорость материальной точки в составном движении равна геометрической сумме её переносной и относительной скоростей: $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Следовательно, для того чтобы определить вектор абсолютной скорости $\vec{V}_a$, сначала необходимо определить вектор скорости точки в переносном движении $\vec{V}_e$ и по величине, и по направлению, затем вектор скорости точки в относительном движении $\vec{V}_r$, так же и по величине, и по направлению, а затем их векторно сложить.

Согласно определению, переносное движение точки – это движение не самой точки, а той точки подвижной переносной среды, в которой она в этот момент времени находится. Переносной подвижной средой в этой задаче является вращающийся треугольник ОАВ. Таким образом, скорость точки треугольника В, в которой в данный момент времени находится движущаяся точка и есть переносная скорость $\vec{V}_e$ движущейся точки. По величине скорость точки вращающегося тела определяется выражением: $V_e = \omega \cdot h$, где ω - угловая скорость вращения треугольника ОАВ задана, h - кратчайшее расстояние от точки В до оси вращения т. О: $h = OB = OA/\cos 30^0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 4$ м. Тогда $V_e = \omega \cdot OB = 1 \cdot 4 = 4$ м/с.

Направлен вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярно радиусу вращения ОВ в сторону относительного вращения треугольника ОАВ (см. рис.).

Относительное движение точки – это движение относительно подвижной среды, т.е. вращающегося треугольника ОАВ. Это равномерное прямолинейное движение по катету АВ. Поэтому скорость относительного движения равна скорости движения точки по стороне треугольника $V_r = u = 2$ м/с . Направлен вектор скорости относительного движения по стороне АВ от А в сторону В (см. рис.).

Направление вектора скорости в абсолютном движении совпадает с направлением диагонали параллелограмма со сторонами векторами $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ (см. рис.). Так как угол между векторами $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ равен $\frac{\pi}{6}$ рад, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cdot \cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}/2} \approx 5{,}8 \text{ м/с}.$$

2. Определим абсолютное ускорение движения точки.

Согласно теореме о сложении ускорений в составном движении (теорема Кориолиса) абсолютное ускорение материальной точки в составном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и Кориолисова ускорений:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c .$$

Следовательно, для того чтобы определить вектор абсолютного ускорения $\vec{W}_a$, сначала необходимо определить и по величине, и по направлению вектора $\vec{W}_e$, $\vec{W}_r$ и $\vec{W}_C$, а затем их векторно сложить.

Как уже отмечалось выше переносное движение точки – это движение точки В треугольника ОАВ, в которой в рассматриваемый момент времени находится наша движущаяся материальная точка. Точка В диска движется по окружности, следовательно переносное ускорение складывается из двух ускорений нормального и касательного: $\vec{W}_e = \vec{W}_{en} + \vec{W}_{e\tau}$.

Вектор нормального ускорения по величине определяется или выражением $W_{en} = \omega^2 \cdot OB$, или $W_{en} = \frac{V_e^2}{OB}$. Так как на данном этапе решения задачи нам известно и ω, и V_e, то W_{en} можем определить по любой из указанных формул, например: $W_{en} = \omega^2 \cdot OB = 1^2 \cdot 4 = 4 \text{ м/с}^2$.

Направлен этот вектор по радиусу вращения от точки В к центру вращения т. О.

Величина вектора касательного ускорения $W_{e\tau} = \varepsilon \cdot OB$, где ε - угловое ускорение вращения диска $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$, так как $\omega = const$. Отсюда и $W_{e\tau} = 0$.

Относительное движение – это равномерное, прямолинейное движение по стороне АВ треугольника, поэтому $\vec{W}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} = 0$.

Вектор Кориолисова ускорения определяется выражением:

$$\vec{W}_C = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r .$$

Здесь $\vec{\omega}_e$ - вектор угловой скорости вращения подвижной переносной среды, т.е. треугольника ОАВ. По величине $\omega_e = \omega = 1$ рад/с. Направлен этот вектор по оси вращения треугольника ОАВ в ту сторону, откуда вращение треугольника видится против хода часовой стрелки, таким образом, вектор $\vec{\omega}_e$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас. Тогда, согласно векторному произведению двух векторов вектор $\vec{W}_C$ направлен перпендикулярно перемножаемым векторам $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ в ту сторону, откуда совмещение первого вектора $\vec{\omega}_e$ со вторым вектором $\vec{V}_r$ видится поворотом на наименьший угол против хода часовой стрелки. Наименьший угол поворота равен $\pi/2$ рад. Следовательно, вектор $\vec{W}_C$ лежит в плоскости чертежа и направлен горизонтально влево (см. рис.). По величине $W_C = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$.

В итоге, вектор абсолютного ускорения складывается из двух векторов: $\vec{W}_a = \vec{W}_{en} + \vec{W}_c$. Направление вектора $\vec{W}_a$ совпадает с диагональю параллелограмма со сторонами векторами $\vec{W}_{en}$ и $\vec{W}_c$ (см. рис.). Так как угол между векторами $\vec{W}_{en}$ и $\vec{W}_c$ равен $\pi/6$ рад (см. рис.), то величина вектора $\vec{W}_a$ определится выражением:

$$W_a = \sqrt{W_{en}^2 + W_C^2 + 2 \cdot W_{en} \cdot W_C \cdot \cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}/2} \approx 7{,}7 \text{ м/с}^2.$$

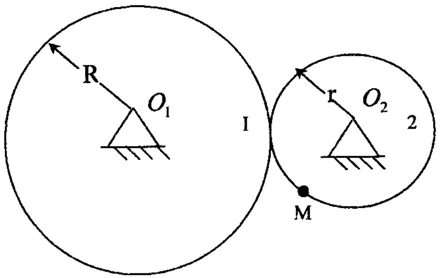
Задача решена.

Часть III. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

1. Колесо радиуса 1 м имело начальную угловую скорость 4π рад/с. Сделав, 20 оборотов, оно остановилось. Определить угловое ускорение вращения колеса, считая его постоянным, а также ускорение и скорость точки обода колеса в момент времени $t_1 = 1\,c$.
Ответ: $\varepsilon \approx -0{,}63$ рад/с^2, $V \approx 12$ м/с, W≈ 144 м/с^2.

2. Два колеса 1 и 2 радиуса $R = 20$ см и $r = 15$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = \frac{1}{4}\left(2t^2 + t\right)$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.

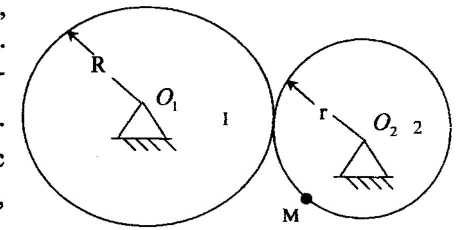


Ответ: V=0,15 м/с, W=0,25 м/с^2.

3. Написать уравнение вращения махового колеса при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и за 2 секунды оно сделало 4 оборота. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса в момент времени t_1=1с.
Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi \cdot t^3}{2}$ рад, $\omega_1 = 1{,}5\pi$ рад/с, $\varepsilon_1 = 3\pi$ рад/с^2.

4. Маховое колесо, вращаясь равнозамедленно, сделало 800 оборотов в течение 30 с. В момент времени $t_1 = 20\,c$ оно имело угловую скорость вращения $\omega_1 = 40\pi$ рад/с. Найти начальную угловую скорость вращения тела и ускорение точки обода колеса в момент времени t_1. Радиус колеса равен 5 см.
Ответ: $\omega_0 \approx 293$ рад/с, W≈ 800 м/с^2.

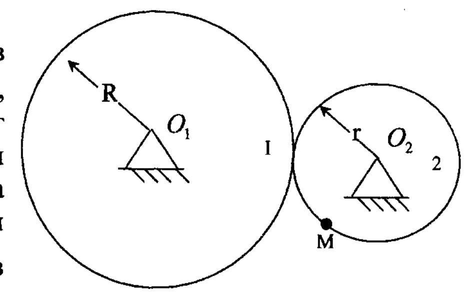
5. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 15$ см и $r = 8$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = \left(3t^2 + 2t\right)/15$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 1$с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



6. Колесо радиуса 60 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \sqrt{2}/2\cos t$ рад. Найти скорость, касательное и нормальное ускорения точки обода колеса в момент времени, когда угловая скорость вращения станет равной 1/2 рад/с.

7. Маховое колесо радиуса 1 м получило начальную угловую скорость $\omega_0 = 4\pi$ рад/с. Найти уравнение вращения колеса, считая его равнозамедленным, а также касательное и нормальное ускорения точки обода в момент $t_2 = 3c$, если скорость этой точки через 2с после начала движения равна 6,28 м/с.
Ответ: $\varphi = -\dfrac{\pi \cdot t^2}{2} + 4\pi \cdot t$ (рад), $W_n = \pi^2 \approx 10$ м/с^2, $W_\tau = \pi \approx 3{,}14$ м/с^2.

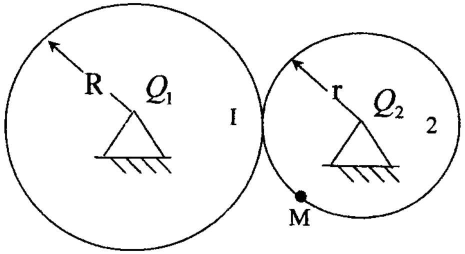
8. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 10$ см и $r = 5$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = \left(2t^3 + 3t^2\right)/10$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 1$с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



9. Написать уравнение вращения махового колеса при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален четвёртой степени времени и за время 2с колесо сделало 8 оборотов. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса в момент времени $t_1 = 1$ с.

10. Тело вращается по закону $\varphi = \left(30t - 3t^2/2\right)$ рад. Найти сколько оборотов сделает тело до мгновенной остановки, а также скорость и ускорение точки тела в момент времени $t_1 = \frac{28}{3}$ с, если точка отстоит от оси вращения на расстоянии 10 см.
Ответ: $N \approx 24$ об., $V_1 = 0{,}2$ м/с, $W_1 = 0{,}5$ м/с^2.

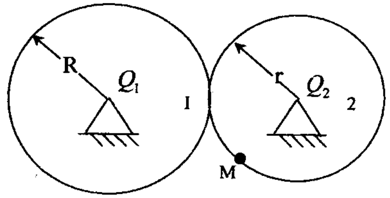
11. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 15$ см и $r = 10$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = \left(t^3 + t^2\right)/3$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 1$с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



12. Колесо радиуса 10 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2\sin 4t$ рад. Найти скорость, касательное и нормальное ускорение точки обода колеса в момент времени, когда его угловая скорость первый раз достигнет значения 4 рад/с. Определить, сколько оборотов сделает колесо за это время.
Ответ: $V_1 = 0{,}4$ м/с, $W_{\tau 1} = 1{,}6\sqrt{3}$ м/с^2, $W_{n1} = 1{,}6$ м/с^2, $N \approx 0{,}28$ об.

13. Колесо радиуса 0,5м начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно, через 10 мин. после начала движения оно имеет угловую скорость, равную 120 об/мин. Найти, сколько оборотов сделало колесо за эти 10 мин. Найти также ускорение точки, лежащей на ободе колеса в момент времени 5 мин.
Ответ: $N = 600$ об., $W \approx 40$ м/с^2.

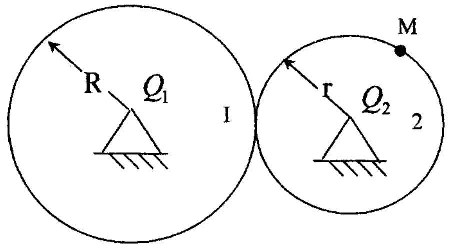
14. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 9$ см и $r = 8$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = t^3/3$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 4/3$ с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



15. Написать уравнение вращения махового колеса при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален четвёртой степени времени. В момент времени $t_2 = 2$ с его угловая скорость соответствует 240 об/мин. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса в момент времени $t_1 = 1$с.

16. Маховик радиуса 1 м совершает 600 об/мин. С некоторого момента он начинает замедлять ход и, сделав 100 оборотов, останавливается. Найти время замедления маховика и его угловое ускорение. Найти также скорость, касательное и нормальное ускорение точки обода маховика после совершения им 36 оборотов от начала замедленного вращения.
Ответ: $t = 20$ с, $\varepsilon = -\pi$ рад/с^2, $V = 16\pi$ м/с, $W_\tau = \pi$ м/с^2, $W_n = 256\pi^2$ м/с^2.

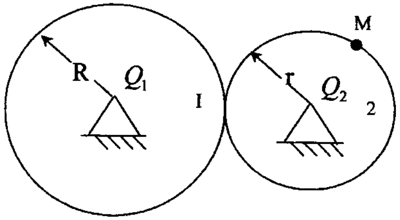
17. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 9$ см и $r = 6$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = t^2$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 2/3$ с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



18. Колесо радиуса 36 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \sin 2t$ рад. Найти скорость, касательное и нормальное ускорения точки обода колеса в момент времени, когда угловая скорость вращения впервые достигнет значения 1 рад/с.

19. При равноускоренном вращении маховика радиуса 1 м из состояния покоя угловая скорость его достигает 10π рад/с по истечении 10с. Сколько оборотов совершит маховик за это время? Вычислить скорость и ускорение точки обода маховика в момент времени $t_1 = 5$ с.

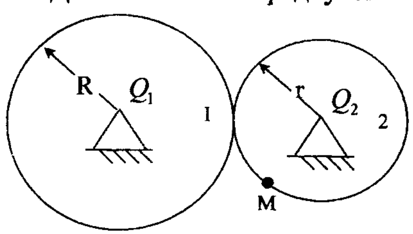
20. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 12$ см и $r = 4$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = (3t^2 - 3t)$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 1$ с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



21. Тело вращается по закону $\varphi = (\pi t^4 - 3\pi t^2)$рад. Найти угловую скорость и угловое ускорение тела в момент, когда оно сделает два оборота. Найти скорость, касательное и нормальное ускорения точки, отстоящей от оси на расстоянии 10 см, в момент времени $t_1 = 1$с.

22. Колесо радиуса 2 м начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно и делает 8 оборотов за время $4\sqrt{\pi}$ с. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точки обода колеса в момент времени $t_1 = 2$ с.

23. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 15$ см и $r = 5$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = (5t^3 - 3t^2)$ рад.

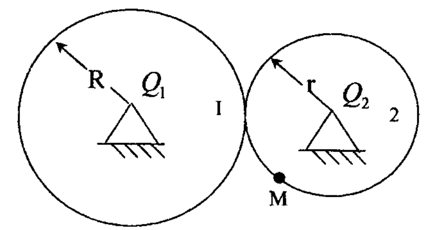


Найти в момент времени $t_1 = 1$с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.

24. Тело вращается по закону $\varphi = (\pi t^4 - 3\pi t^2)$ рад. Найти угловое ускорение тела в момент, когда его угловая скорость соответствует 270 об/мин. Найти также в момент времени $t_1 = 2$с скорость и ускорение точки, отстоящей от оси на расстоянии 0,5м.

25. Диск вращается из состояния покоя равноускоренно. За 50 с он совершил 625 оборотов. Найти в момент времени $t_1 = 25$с скорость и ускорение точки, отстоящей от центра диска на расстоянии 10 см.
Ответ: $V = 2{,}5\pi$ м/с, $W \approx 625$ м/с^2.

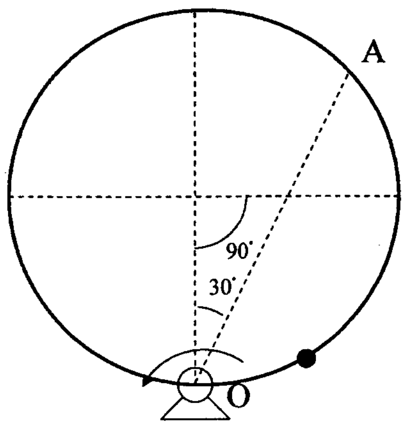
26. Два колеса 1 и 2 радиусов $R = 1$м и $r = 50$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей, сцеплены между собой. Вращение колеса 1 задано уравнением $\varphi_1 = (4t^3 - 3t)$ рад. Найти в момент времени $t_1 = 1$с скорость и ускорение точки M, лежащей на ободе колеса 2.



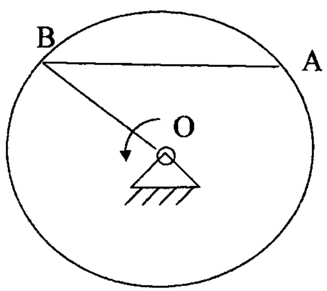
27. Тело вращается по закону $\varphi = (\frac{\pi \cdot t^5}{5} + \frac{\pi \cdot t^3}{3})$ рад. Найти угловое ускорение тела в момент, когда его угловая скорость соответствует 60 об/мин. Найти также в момент времени $t_2 = 2$с скорость, нормальное и касательное ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 10 см.
Ответ: $\varepsilon_1 = 6\pi$ рад/с^2, $V_2 = 2\pi$ м/с, $W_{n2} = 40 \cdot \pi^2$ м/с^2, $W_{\tau 2} = 3{,}6 \cdot \pi$ м/с^2.

28. Вал ротора сделал 15 оборотов. Сначала вращение его было равноускоренным, затем равнозамедленным. Сколько времени вал вращался равноускоренно, если начальная и конечная угловые скорости равны нулю? Максимальная угловая скорость равна 40 об/с, а время равнозамедленного вращения вдвое больше времени ускоренного вращения.

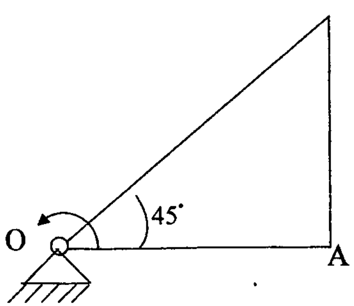
2. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



1. По обручу, радиуса $3\sqrt{3}$ см, вращающемуся с постоянной угловой скоростью 20 рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости обруча и проходящей через точку О, из точки О в сторону точки А начинает двигаться материальная точка со скоростью 2,4 м/с относительно обруча. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения А.
Ответ: $V_a \approx 4$ м/с, $W_a \approx 240$ м/с^2.

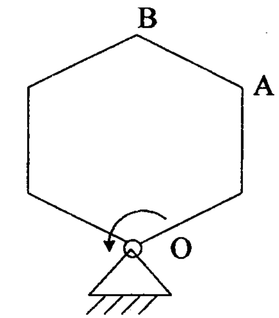


2. Диск радиуса 1м вращается с постоянной угловой скоростью ω=3рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр О. По стороне АВ вписанного квадрата равномерно движется точка со скоростью u=$3\sqrt{2}$ м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет положения В.
Ответ: $V_a \approx 6.7$ м/с, $W_a \approx 28$ м/с^2.

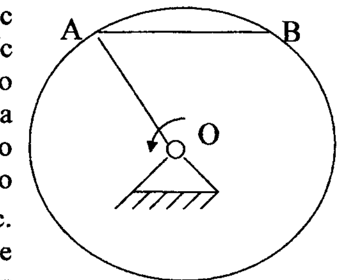


3. Прямоугольный треугольник ОАВ вращается вокруг своей вершины О с постоянной угловой скоростью ω=1рад/с. По катету АВ равномерно движется точка со скоростью u=4см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины В, если ОА=3см.
Ответ: $V_a \approx 7.6$ см/с, $W_a \approx 11.4$ см/с^2.

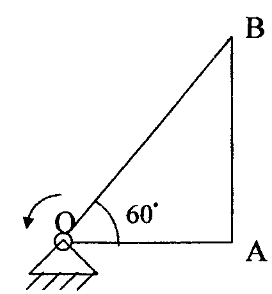
4. Правильный шестиугольник со стороной 5 см вращается вокруг вершины О с постоянной угловой скоростью $\omega=\sqrt{3}$ рад/с. По его стороне АВ равномерно движется точка со скоростью u=10см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины В.
Ответ: $V_a \approx 26.5$ см/с, $W_a \approx 62.4$ см/с^2.



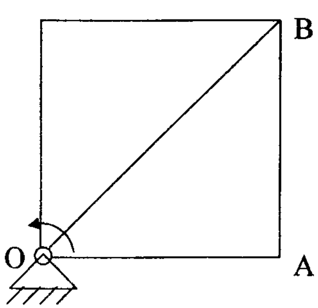
5. Диск радиуса r = 1 м. вращается с постоянной угловой скоростью ω=2 рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр диска т. О. По стороне АВ вписанного правильного шестиугольника равномерно движется точка со скоростью u=$3\sqrt{3}$ м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины В.
Ответ: $V_a = 7$ м/с, $W_a \approx 24.3$ м/с^2.



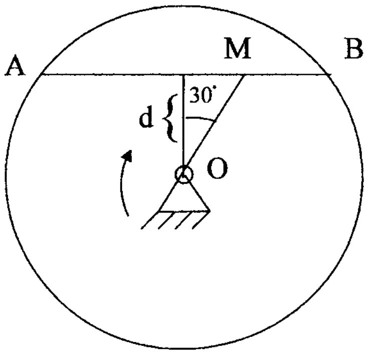
6. Прямоугольный треугольник ОАВ вращается вокруг своей вершины О с постоянной угловой скоростью ω=1рад/с. По катету АВ равномерно движется точка со скоростью u=6 м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины В, если ОА=5 м.
Ответ: $V_a = 14$ м/с, $W_a \approx 19$ м/с^2.



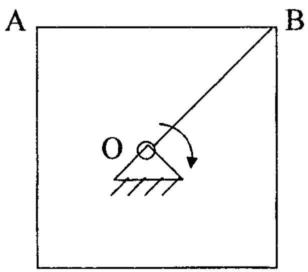
7. Квадрат со стороной 50 см вращается вокруг своей вершины O с постоянной угловой скоростью 20 рад/с. По стороне AB равномерно движется точка со скоростью u=2 м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет вершины B.
Ответ: $V_a \approx 17$ м/с, $W_a \approx 344$ м/с^2.



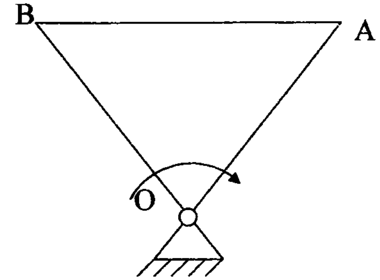
8. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω=1,5 рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр т. O. По хорде AB отстоящей от центра на расстоянии d=4 см, равномерно движется точка со скоростью u=2см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения M.



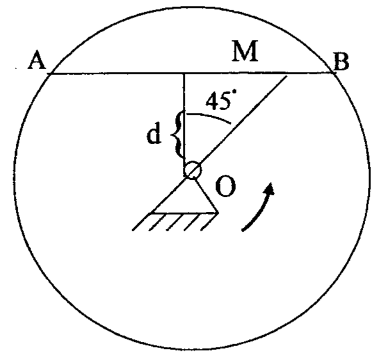
9. Квадрат со стороной 8 см вращается с постоянной угловой скоростью 30 рад/с вокруг своего центра O. По стороне AB равномерно движется точка со скоростью u=100 см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет вершины B.
Ответ: $V_a \approx 2{,}5$ м/с, $W_a \approx 102.5$ м/с^2.



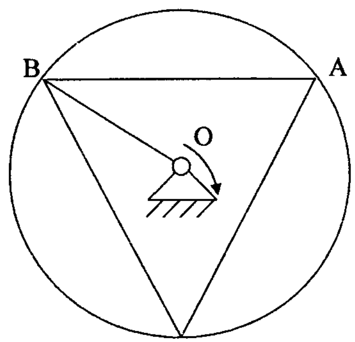
10. Равносторонний треугольник со стороной 2 см вращается в плоскости чертежа вокруг своей вершины O с постоянной угловой скоростью w=$\sqrt{3}$ рад/с. По стороне AB равномерно движется точка со скоростью u=2см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения B.

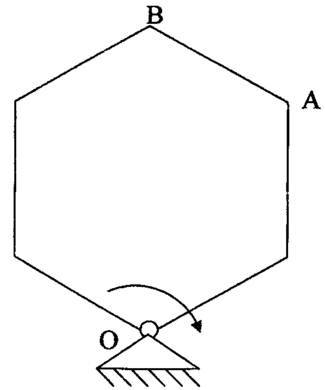


11. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω=12 рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр O. По хорде AB отстоящей от центра на расстоянии d=20 см, равномерно движется точка со скоростью u=10см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет положения M.

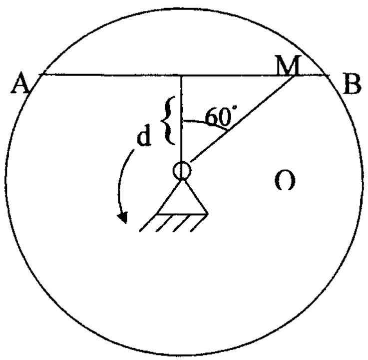


12. Диск радиуса 2 м вращается с постоянной угловой скоростью ω=2рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр O. По стороне AB вписанного равностороннего треугольника равномерно движется точка со скоростью u=4м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет положения B.

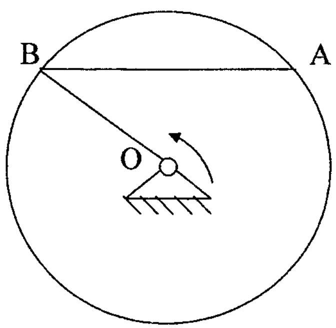




13. Правильный шестиугольник со стороной 50 см. вращается вокруг вершины O с постоянной угловой скоростью $\omega=10\sqrt{3}$ рад/с. По стороне AB равномерно движется точка со скоростью u=1 м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет положения B.

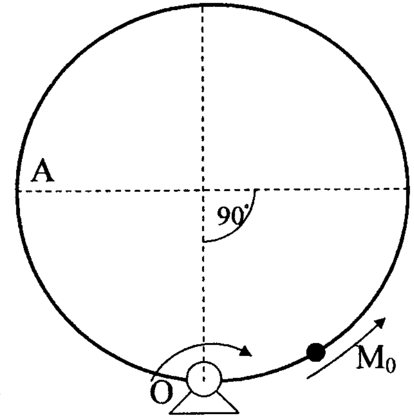


14. Диск вращается с постоянной угловой скоростью w=6рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр т. O. По хорде AB, отстоящей от центра на расстоянии d=20 см, равномерно движется точка со скоростью u=25 см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигнет положения M.



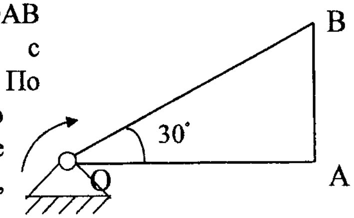
15. Диск радиус 1 м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=0{,}25$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр O. По стороне AB вписанного квадрата равномерно движется точка со скоростью u=$\sqrt{2}$ м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения B.

16. По обручу радиуса $80\sqrt{2}$ см, вращающемуся с постоянной угловой скоростью 10 рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости обруча и проходящей через точку O, из точки M_0 в сторону точки A (как показано на рис.) начинает двигаться материальная точка со скоростью 6 м/с относительно обруча. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения A.

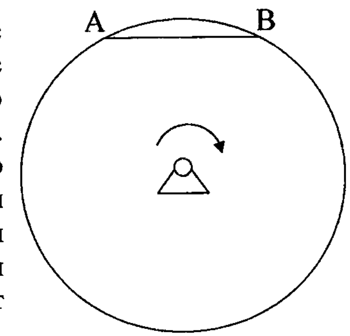


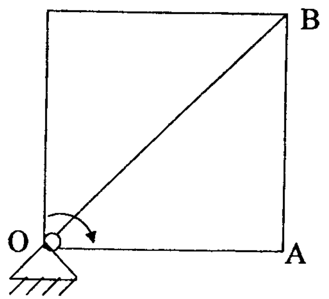
17. Прямоугольный треугольник OAB вращается вокруг своей вершины O с постоянной угловой скоростью ω=3рад/с. По катету AB равномерно движется точка со скоростью u=4м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигает вершины B, если OA= $50\sqrt{3}$ см.

Ответ: $V_a = 5$ м/с, $W_a \approx 25.6$ м/с^2.



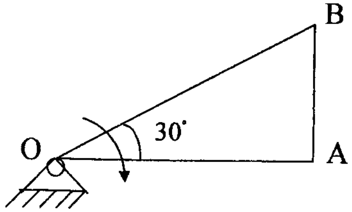
18. Диск радиус 60 см вращается с постоянной угловой скоростью ω=5рад/с вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр O. По стороне AB вписанного правильного шестиугольника равномерно движется точка со скоростью u=$2\sqrt{3}$ см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения B.



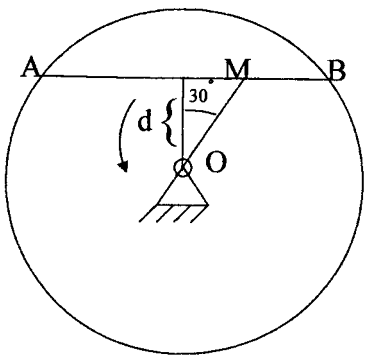


19. Квадрат со стороной 60 см вращается вокруг своей вершины О с постоянной угловой скоростью ω=0,5рад/с. По стороне АВ равномерно движется точка со скоростью u=30см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет вершины В.

Ответ: $V_a = 0{,}3$ м/с, $W_a \approx 0.24$ м/с^2.



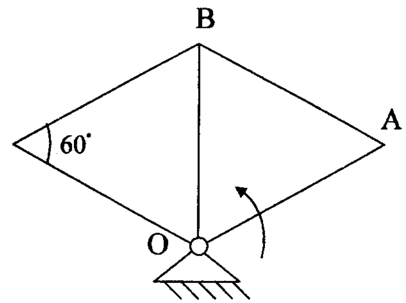
20. Прямоугольный треугольник ОАВ вращается вокруг своей вершины О с постоянной угловой скоростью ω=30рад/с. По катету АВ равномерно движется точка со скоростью u=20см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигает вершины В, если ОА=$5\sqrt{3}$ см.



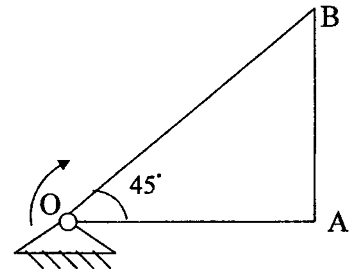
21. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω=3 рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр О. По хорде АВ отстоящей от центра на расстоянии d=10 см, равномерно движется точка со скоростью u=20см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения М.

22. Ромб со стороной 30см вращается вокруг вершины О с постоянной угловой скоростью $\omega=10\sqrt{3}$ рад/с. По стороне АВ равномерно движется точка со скоростью u=200 см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет вершины В.

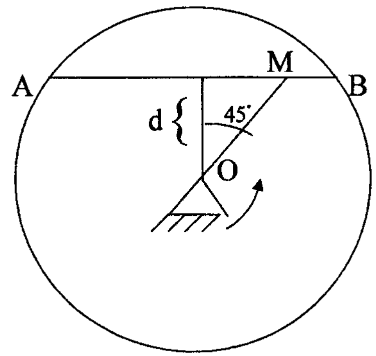
Ответ: $V_a = 7$ м/с, $W_a \approx 154$ м/с^2.

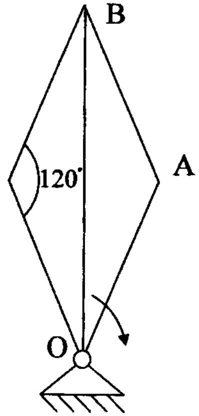


23. Прямоугольный треугольник ОАВ вращается вокруг своей вершины О с постоянной угловой скоростью ω=10рад/с. По катету АВ равномерно движется точка со скоростью u=20см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигает вершины В, если ОА= $80\sqrt{2}$ см.

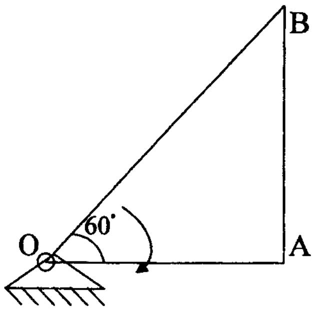


24. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω=3 рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр О. По хорде АВ отстоящей от центра на расстоянии d=15 см, равномерно движется точка со скоростью u=10см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения М.

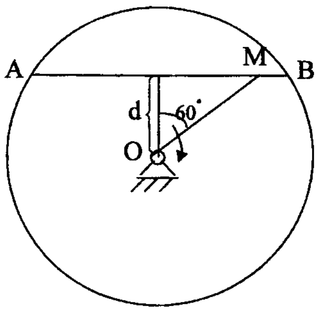




25. Ромб со стороной $10\sqrt{3}$ см вращается вокруг вершины O с постоянной угловой скоростью ω=1рад/с. По стороне AB равномерно движется точка со скоростью u=30см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет вершины B.

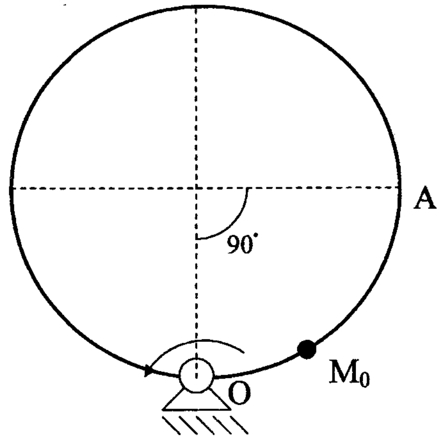


26. Прямоугольный треугольник OAB вращается вокруг своей вершины O с постоянной угловой скоростью ω=10рад/с. По катету AB равномерно движется точка со скоростью u=60см/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в момент, когда она достигает вершины B, если OA= 15см.



27. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω=20 рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр O. По хорде AB отстоящей от центра на расстоянии d=60 см, равномерно движется точка со скоростью u=1м/с. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения M.

28. По обручу радиуса $50\sqrt{2}$ см, вращающемуся с постоянной угловой скоростью 10 рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости обруча и проходящей через точку O, из точки M_0 в сторону точки A начинает двигаться материальная точка со скоростью 4 м/с относительно обруча. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она достигнет положения A.



СОДЕРЖАНИЕ

Григорьев Александр Юрьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Методические указания
для практических занятий
и самостоятельной работы для студентов
всех специальностей и форм обучения

Титульный редактор

Т.Г. Смирнова

Корректор

Н.И. Михайлова

Печатается

в авторской редакции

Подписано в печать 30.10.2008. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,56. Печ. л.2,75 . Уч.-изд.л. 2,5.
Тираж 500 экз. Заказ № 407. С 73а

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИИК СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9