

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**



Кафедра теоретической

механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольных работ № 3; 4; 5
для студентов специальностей 190603, 140504
факультета заочного обучения и экстерната

Санкт-Петербург 2006

УДК 531(075)

Федорова Л.А., Агапова Л.А., Береснев В.Н. Теоретическая механика: Метод. указания по выполнению контрольных работ № 3; 4; 5 для студентов спец. 190603, 140504 факультета заочного обучения и экстерната; Под ред. А.Ю. Григорьева. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2006. – 50 с.

Представлены текстовые и графические условия задач, выполняемых студентами в процессе самостоятельного изучения разделов «Статика» и «Кинематика» курса «Теоретическая механика», даны примеры их решения.

Рецензент

Канд. техн. наук, доц. В.И. Лысев

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

© Санкт-Петербургский государственный
университет низкотемпературных
и пищевых технологий, 2006

ВВЕДЕНИЕ

Студенты специальностей 190603, 140504 факультета заочного обучения и экстерната выполняют всего пять контрольных работ по теоретической механике. В этих методических указаниях представлены текстовые и графические условия контрольных работ № 3, 4, 5, посвящённых изучению **динамики**.

К контрольным работам предъявляются следующие требования:

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной (ученической) тетради, страницы которой должны быть пронумерованы. На обложке указываются: номер работы, фамилия, имя, отчество студента, шифр и домашний адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, перечень решаемых задач, год издания методических указаний.

2. Решение каждой задачи обязательно начинают на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается рисунок и записывается, что в задаче дано и что требуется определить. Рисунок выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел или их расположения должны соответствовать этим условиям. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получается тот или иной результат и т. п.). На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

Если работа не зачтена, студент должен внести исправления в решение задач и представить ее на повторную рецензию. **К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.**

3. Контрольные работы выполняются студентами в порядке возрастания номеров, т. е. сначала работа № 3, после получения на нее рецензии и зачета – работа № 4, затем – работа № 5.

4. При возникновении затруднений в проработке теории, решении задач студент может обратиться на кафедру за консультацией.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Динамика

Задача 1

Для решения этой задачи на составление дифференциальных уравнений движения материальной точки студент по первой букве имени определяет номер схемы и номер варианта по табл. 1.

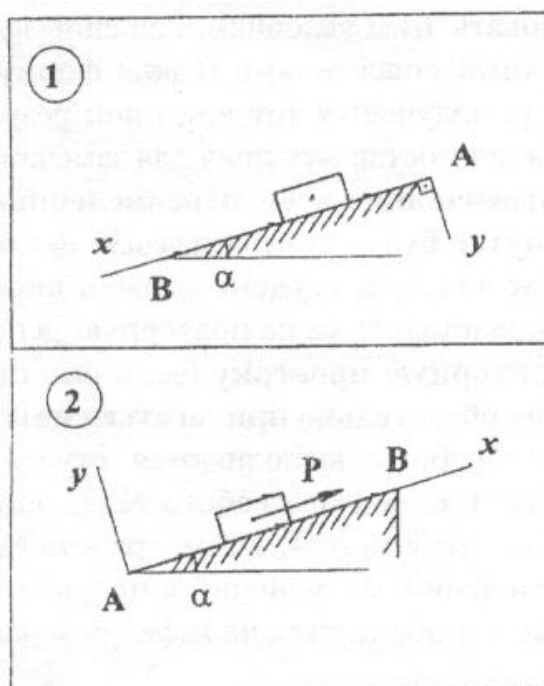
Исходные данные приведены в табл. 2.

Таблица 1

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т
Схема	1						2						3					
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Буква	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я
Схема	4						5			
Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Схемы к задаче 1



Схемы к задаче 1

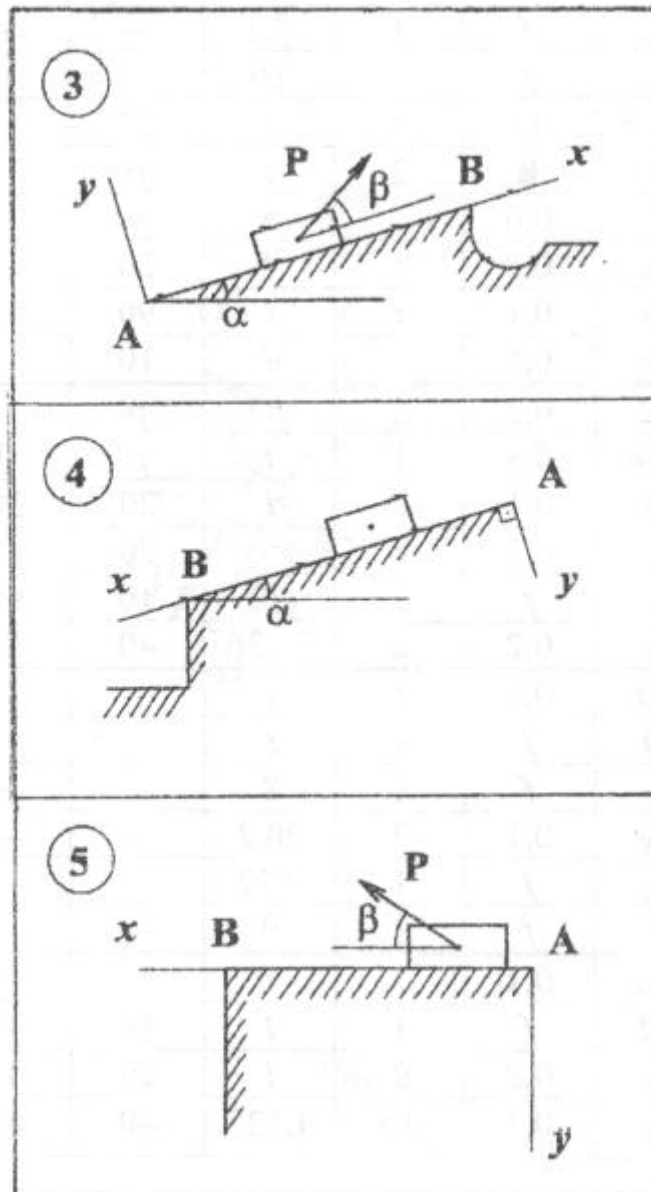


Таблица 2

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	V_A , м/с	V_B , м/с	f , безр.	t , с	l , м	p , Н	β , град	α , град	m , кг
1	2	10	0,2	t	l	–	–	30	–
2	1	8	f	t	9	–	–	45	–
3	0	V_B	f	2	9,8	–	–	60	–
4	V_A	V_B	0,1	1	10	–	–	15	–
5	2	V_B	f	1	5,3	–	–	60	–
6	2	8	f	t	10	–	–	45	–
7	4	36,28	0,1	t	l	22	–	30	2
8	1	21	0	2	l	p	–	30	2
9	2	8	0,6	t	5	p	–	60	4
10	20	V_B	0,2	3	l	20	–	15	1
11	20	40	0,1	t	l	90	–	60	4
12	10	V_B	0,1	1	l	10	–	60	2
13	10	5,2	0,2	2	l	p	0	45	3
14	20	14,8	0,3	1	l	p	0	15	2
15	10	29	0,1	t	l	20	30	45	2
16	V_A	5	0,1	t	5	20	45	60	3
17	25	V_B	f	1	20	10	60	30	4
18	V_A	V_B	0,2	2	27,36	40	75	30	2
19	2	5,28	0,1	t	l	–	–	15	–
20	0	30	f	t	8	–	–	30	–
21	5	V_B	f	1	8	–	–	45	–
22	V_A	V_B	0,1	2	20,2	–	–	60	–
23	2	V_B	f	1	2,72	–	–	10	–
24	2	4	f	t	9	–	–	15	–
25	4	13,2	0,1	t	l	10	15	–	2
26	3	3,2	f	1	l	10	30	–	2
27	2	V_B	0,2	2	l	20	45	–	2
28	V_A	V_B	0,3	0,5	4,125	40	60	–	2

Примечание. В первой задаче требуется определить величины, обозначенные в таблице буквами.

Пример решения задачи 1

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение t секунд. Его начальная скорость V_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f (рис. 1).

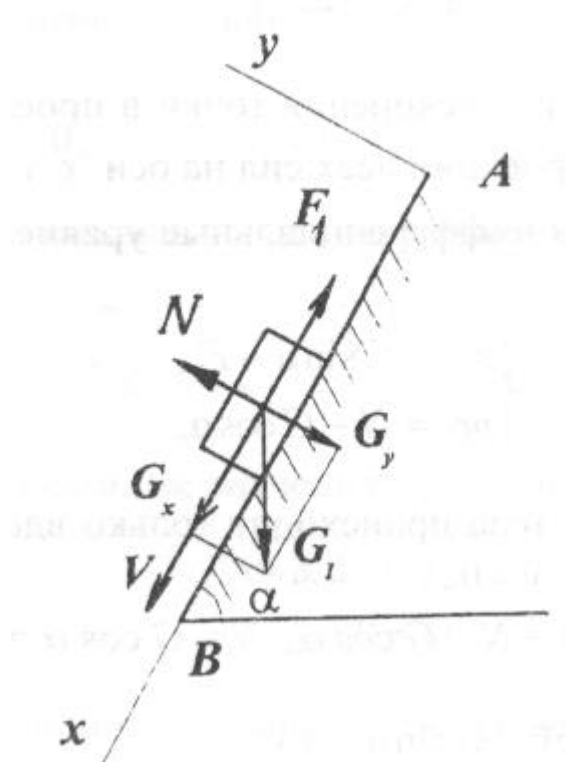


Рис. 1

Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $l = 10$ м.

Определить: t , V_B .

Решение

Рассмотрим движение тела на участке AB , принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы тяжести $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}_1$.

Составим дифференциальные уравнения движения тела на участке AB :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \end{cases}$$

где m – масса точки; $\ddot{x}, \ddot{y}$ – ускорения точки в проекциях на оси x, y ; $\sum F_{ix}, \sum F_{iy}$ – сумма проекций всех сил на оси x, y . F_1

Для данной задачи дифференциальные уравнения будут записаны так:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = G \sin \alpha - F_1; \\ m\ddot{y} = N - G \cos \alpha. \end{cases}$$

Так как движение тела происходит только вдоль оси x , а вдоль оси y движения нет, то $\ddot{y} = 0$.

Следовательно, $0 = N - G \cos \alpha$, $N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= G \sin \alpha - fN, \\ m\ddot{x} &= mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha, \\ \ddot{x} &= g \sin \alpha - fg \cos \alpha, \\ \ddot{x} &= 3,2. \end{aligned}$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= 3,2; \quad d\dot{x} = 3,2 dt; \\ \int d\dot{x} &= 3,2 \int dt; \\ \dot{x} &= 3,2t + C_1. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3,2t + C_1; & dx &= 3,2tdt + C_1dt; \\ \int dx &= 3,2 \int t dt + C_1 \int dt; \\ x &= 3,2 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.\end{aligned}\tag{2}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий:

$$t_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_A = 2 \text{ м/с}, \quad x_0 = 0 \text{ м}.$$

Подставим начальные условия в уравнения (1) и (2):

$$\begin{aligned}2 &= 3,2 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2, \\ 0 &= 3,2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.\end{aligned}$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в уравнения (1) и (2):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3,2t + 2 \\ x = 1,6t^2 + 2t. \end{cases}$$

Данные уравнения описывают движение тела на участке AB . Для момента времени t перепишем эти уравнения:

$$\begin{aligned}\begin{cases} V_B = 3,2t + 2 \\ l = 1,6t^2 + 2t. \end{cases} \\ 10 &= 1,6t^2 + 2t, \\ 1,6t^2 + 2t - 10 &= 0. \\ t_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1,6(-10)}}{3,2} = \frac{-2 \pm 8,2}{3,2}; \\ t_1 &= -3,2, \\ t_2 &= 1,9.\end{aligned}$$

Так как время – величина положительная, выбираем $t = 1,9$ с. Скорость тела в точке B : $V_B = 3,2t + 2 = 3,2 \cdot 1,9 + 2 = 6,08 + 2 = 8,08$ м/с.

Задача 2

Для решения этой задачи на составление дифференциальных уравнений движения материальной точки студент определяет номер схемы и номер варианта по первой букве отчества.

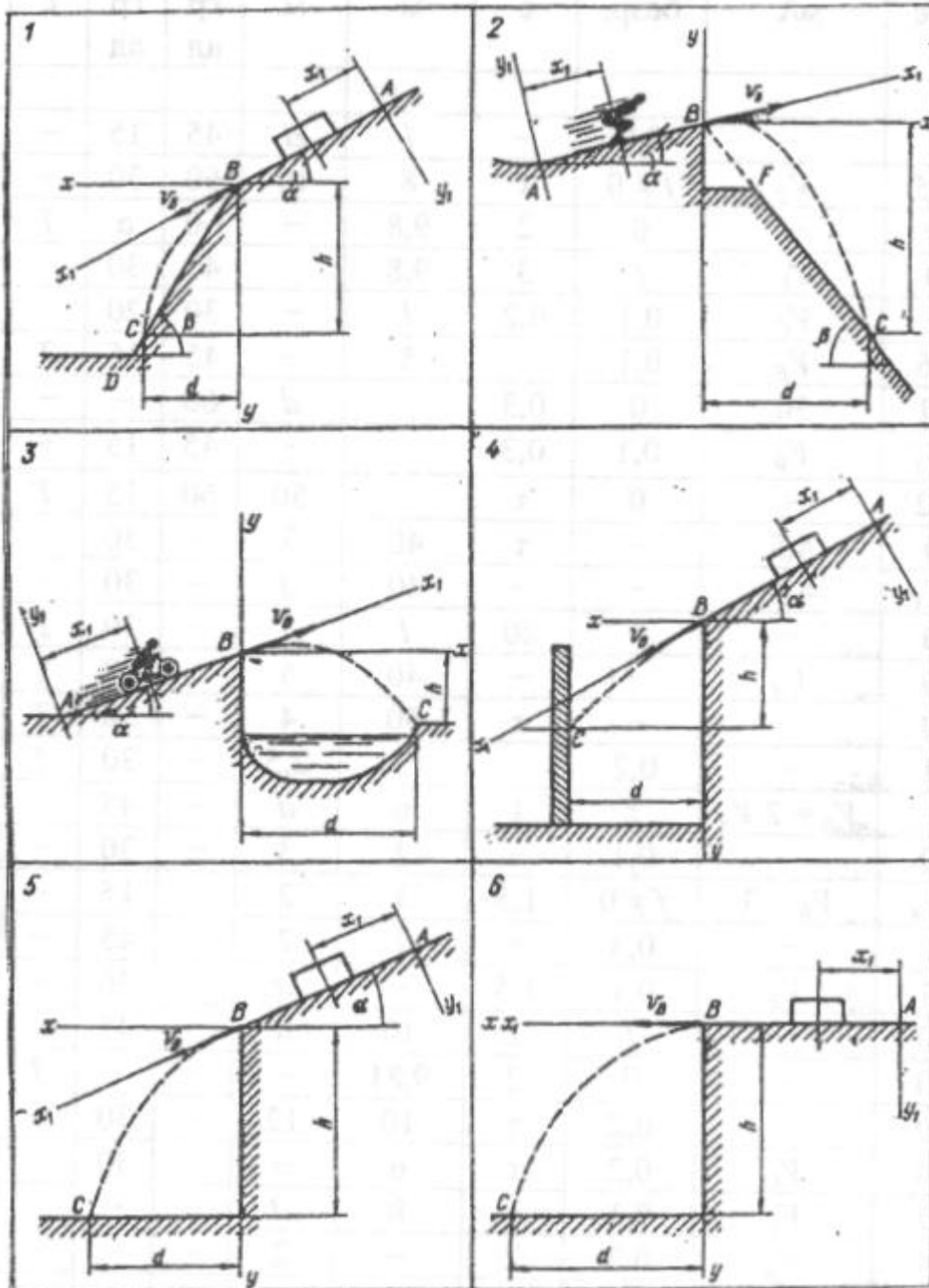
Таблица 1

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
Схема	1					2					3				
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Продолжение табл.1

Буква	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я
Схема	4					5					6		
Вариант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Схемы к задаче 2



Исходные данные для решения задачи 2

№ вари- анта	V_A , м/с	V , м/с	f , безр.	t , с	l , м	d , м	β , гр ад	α , гр ад	T , с	h , м	P , кН
1											
2	2	—	0,2	—	l	d	45	15	—	4	—
3	2,5	V_B	$f \neq 0$	τ	8	10	60	30	—	—	—
4	0	—	0	2	9,8	—	60	α	T	—	—
5	0	V_C	f	3	9,8	—	45	30	—	—	—
6	—	V_C	0,1	0,2	l	—	30	20	—	40	—
7	16	V_B	0,1	—	5	—	45	15	T	—	—
8	21	20	0	0,3	—	d	60	—	—	—	—
9	V_A	V_B	0,1	0,3	—	—	45	15	—	$30\sqrt{2}$	—
10	12	—	0	τ	—	50	60	15	T	—	—
11	0	4,5	—	τ	40	3	—	30	—	h	$P \neq 0$
12	V_A	4,5	—	—	40	d	—	30	—	1,5	0
13	0	—	—	20	l	3	—	30	T	1,5	3
14	0	V_B	—	—	40	5	—	30	T	—	4
15	0	—	—	τ	50	4	—	30	T	2	2
16	1	—	0,2	—	3	2,5	—	30	T	h	—
17	—	$V_B = 2 V_A$	f	1	6	d	—	45	—	6	—
18	0	—	0,1	—	2	3	—	30	—	h	—
19	V_A	$V_B = 3$	$f \neq 0$	1,5	3	2	—	15	—	h	—
20	0	—	0,3	τ	l	2	—	45	—	4	—
21	1	V_B	0,1	1,5	—	d	—	30	—	10	—
22	0	—	f	2	10	d	—	45	—	—	—
23	0	—	0	2	9,81	—	—	—	T	20	—
24	0	—	0,2	τ	10	12	—	30	—	h	—
25	0	V_C	0,2	τ	6	—	—	30	—	4,5	—
26	7	V_C	0,1	—	8	d	—	—	—	20	—
27	4	V_B	0,3	2	—	2	—	—	—	h	—
28	V_A	$V_B = 3$	—	—	3	—	—	—	—	5	—

Пример решения задачи 2

Тело движется из точки A по участку AB наклонной плоскости длиной l , составляющей угол α с горизонтом, в течение τ секунд. Коэффициент трения скольжения f . В точке B тело срывается и падает на величину h , попадая в точку C . На участке BC тело движется в течение T секунд. Сопротивлением воздуха следует пренебречь.

Дано:

$$V_A = 0, \alpha = 60^\circ, l = 4 \text{ м}, \tau = 1 \text{ с}, f \neq 0, h = 5 \text{ м}, \beta = 75^\circ.$$

Определить:

b, V_C .

Решение

Рассмотрим движение тела на участке AB . Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$ (рис. 2).

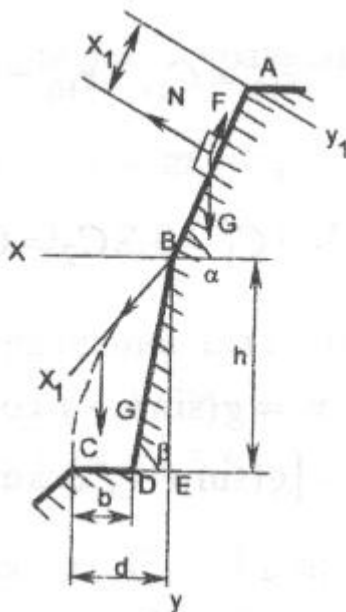


Рис. 2

Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке AB :

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= G \sin \alpha - fG \cos \alpha; \\ \ddot{x}_1 &= g \sin \alpha - fg \cos \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1; \\ x_1 &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2 + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t; \\ x_1 &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2. \end{aligned}$$

Для момента τ , когда тело покидает участок,

$$\dot{x}_1 = V_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$V_B = g(\sin\alpha - f \cos\alpha) \tau;$$
$$l = [g(\sin\alpha - f \cos\alpha) / 2] \tau^2,$$

откуда

$$V_B = 2l / \tau,$$

т. е.

$$V_B = 2 \cdot 4 / 1 = 8 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение тела от точки B до точки C .

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на тело, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи для $t = 0$:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$
$$\dot{x}_0 = V_B \cos\alpha; \quad \dot{y}_0 = V_B \sin\alpha.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = gt + C_4,$$
$$x = C_3t + C_5, \quad y = gt^2 / 2 + C_4t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3; \quad \dot{y}_0 = C_4,$$
$$x_0 = C_5, \quad y_0 = C_6.$$

Отсюда найдем

$$C_3 = V_B \cos\alpha; \quad C_4 = V_B \sin\alpha;$$
$$C_5 = 0; \quad C_6 = 0.$$

Получим следующие уравнения проекций скоростей тела:

$$\dot{x} = V_B \cos \alpha; \quad \dot{y} = gt + V_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = V_B \cos \alpha \cdot t; \quad y = gt^2 / 2 + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории тела найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2 / (2V_B^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м}.$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2,11 \text{ м}$.

Минимальная ширина отрезка b

$$b = d - ED = d - h / \operatorname{tg} 75^\circ, \text{ или } b = 0,77 \text{ м}.$$

Используя уравнение движения $x = V_B \cos \alpha \cdot t$, найдем время T движения тела от точки B до точки C :

$$T = 0,53 \text{ с}.$$

Скорость тела при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = V_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + V_B \sin \alpha$$

по формуле

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0,53 \text{ с}$.

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (gT + V_B \sin \alpha)^2},$$

или

$$V_C = 12,8 \text{ м/с.}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Задача 1

Для решения этой задачи на применение теоремы о движении центра масс к исследованию движения системы материальных точек студент *по второй букве фамилии* определяет схему и номер варианта по табл. 1, а исходные данные – по табл. 2.

В этой задаче во всех вариантах определяется перемещение тела (рис. 1–3).

Равенство, выражающее теорему о движении центра масс механической системы, в векторной форме имеет вид:

$$M \vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E, \quad (1)$$

где $M = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса механической системы; $\vec{a}_C = \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}$ – ускоре-

ние центра масс системы; $\sum_{i=1}^n \vec{P}_i^E$ – геометрическая сумма всех внешних сил, приложенных к системе.

Для решения задач удобно применять скалярные уравнения, полученные проектированием векторного уравнения (1) на оси декартовой системы координат:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{i=1}^n P_{ix}^E; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{i=1}^n P_{iy}^E; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{i=1}^n P_{iz}^E, \quad (2)$$

где $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{z}_C$ – проекции ускорения $\vec{a}_C$ на координатные оси;

$\sum_{i=1}^n P_{ix}^E, \sum_{i=1}^n P_{iy}^E, \sum_{i=1}^n P_{iz}^E$ – сумма проекций внешних сил на координатные оси.

При движении механической системы может иметь место *закон сохранения движения центра масс*: если при проектировании равенства (1) на какую-либо ось сумма проекций внешних сил, приложенных к системе, равна нулю во все время движения системы и в начальный момент система относительно этой оси была неподвижна, то тогда координата центра масс системы относительно этой оси есть величина постоянная.

Таким образом, если $\sum_{i=1}^n P_{ix}^E = 0$ и $\dot{x}_{CO} = 0$, то $M \ddot{x}_C = 0$. Так как

масса системы не может быть равна нулю, то $\ddot{x}_C = 0$ или $\frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0$, т. е.

изменения скорости центра масс системы с течением времени не происходит. Следовательно: $\dot{x}_C = \text{const}$. Так как в начальный момент времени система была неподвижна: $\dot{x}_{CO} = 0$, следовательно,

$\dot{x}_C = 0$ или $\frac{dx_C}{dt} = 0$, т. е. изменения координаты центра масс с течением времени не происходит. Следовательно, $x_C = \text{const}$, т. е. координата центра масс системы относительно оси x есть величина постоянная. Такие же выводы можно сделать относительно любой оси.

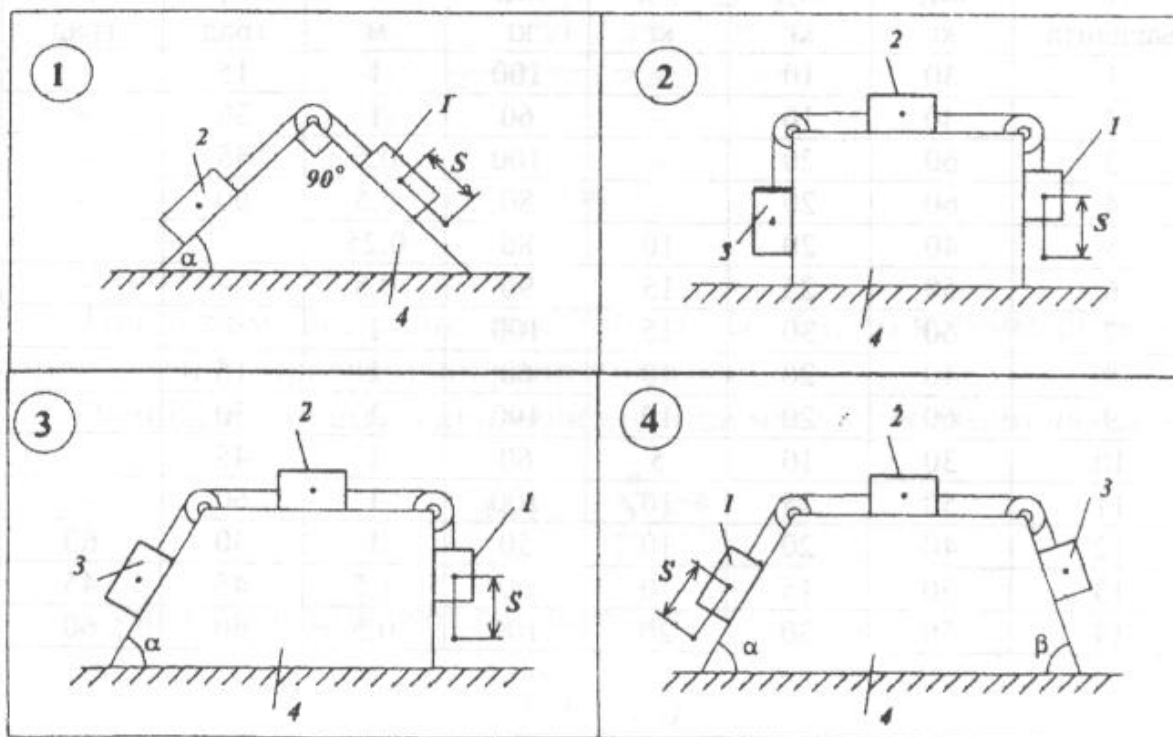
Таблица 1

Буква	А, Б	В, Г	Д, Е	Ж, З	И, К	Л, М	Н, О
Схема	1				2		
Вариант	1	2	3	4	5	6	7

Продолжение табл. 1

Буква	П, Р	С, Т	У, Ф	Х, Ц	Ч, Ш	Щ, Э	Ю, Я
Схема	3				4		
Вариант	8	9	10	11	12	13	14

Схемы к задаче 1



Грузы, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки, скользят по гладким сторонам тела 4, опирающегося основанием на гладкую горизонтальную плоскость. Груз 1 опускается вниз на величину S . Найти перемещение тела 4. Массами нити и блоков, а также трением тела 4 о поверхность пренебречь.

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	S , м	α , град	β , град
1	30	10	—	100	1	15	—
2	40	10	—	60	1	30	—
3	60	20	—	100	0,5	45	—
4	60	20	—	80	0,5	60	—
5	40	20	10	80	0,25	—	—
6	50	25	15	90	0,5	—	—
7	60	30	15	100	1	—	—
8	40	20	10	60	1	15	—
9	60	20	10	100	1	30	—
10	30	10	5	60	1	45	—
11	50	25	10	100	1	60	—
12	40	20	10	50	1	30	60
13	30	15	10	60	1,5	45	45
14	50	30	20	100	0,5	60	60

Пример решения задачи 1

Три груза массы $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 15$ кг и $m_3 = 10$ кг соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки (рис. 1–3).

При опускании груза 1 вниз, груз 2 перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ вправо. Масса пирамиды $m_4 = 100$ кг. Груз 3 поднимается по боковой грани вверх. Пренебрегая трением между усеченной пирамидой $ABCD$ и полом, определить перемещение пирамиды относительно пола, если груз 1 опускается вниз на 1 м. Массой нити пренебречь.

Дано:

$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 15$ кг; $m_3 = 10$ кг; $m_4 = 100$ кг; $S_1 = 1$ м; $\alpha = 60^\circ$.

Определить: l – перемещение пирамиды.

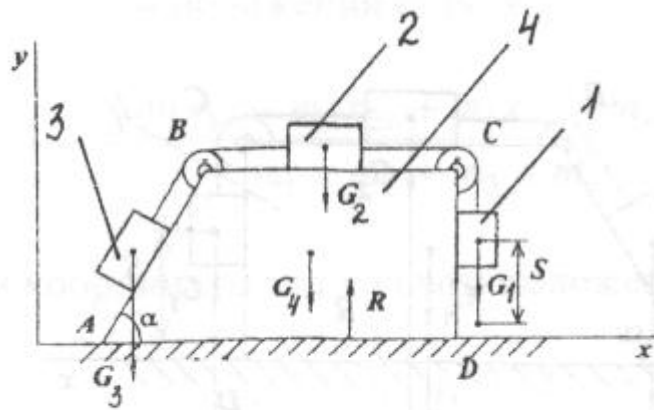


Рис. 1

Рис. 1

Решение

Приложим все силы тяжестей: G_1 , G_2 , G_3 , G_4 и суммарную реакцию связи R . Покажем координатные оси.

Запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось x :

$$M \ddot{x}_C = \sum_{i=1}^n F_{ix}^E.$$

Сумма проекций всех сил на ось x :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix}^E = 0.$$

Так как все силы перпендикулярны оси x ,

$$M \ddot{x}_C = 0.$$

Поскольку масса системы не равна нулю, $\ddot{x}_C = 0$, или $\frac{d \dot{x}_C}{dt} = 0$;

$$d \dot{x}_C = 0; \int d \dot{x}_C = \int 0; \dot{x}_C = \text{const}, \text{ или } \dot{x}_{CO} = \dot{x}_{C1}.$$

Так как в начальный момент времени пирамида была в покое, то $\dot{x}_{CO} = 0$ и, следовательно, $\dot{x}_C = 0$. Тогда $\frac{dx_C}{dt} = 0$, $dx_C = 0$;

$$\int dx_C = \int 0; x_C = \text{const}, \text{ или иначе } x_{CO} = x_{C1}.$$

По определению положения центра масс запишем:

Рис. 2

$$x_{CO} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m_3 x_{30} + m_4 x_{40}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \quad (3)$$

Рис. 3

Центр масс в новом положении определим по формуле

$$x_{C1} = \frac{m_1 x_{11} + m_2 x_{21} + m_3 x_{31} + m_4 x_{41}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \quad (4)$$

Определяем координаты тел в новом положении:

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{10} - l, \\ x_{21} &= x_{20} - l + S, \\ x_{31} &= x_{30} - l + x, \\ x_{41} &= x_{40} - l, \end{aligned}$$

где x – перемещение тела 3 по наклонной поверхности, спроектированной на ось x :

$$x = S \cdot \cos \alpha.$$

Подставим эти значения в формулу (4) и приравняем значения x_{C0} и x_{C1} :

$$\begin{aligned} \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m_3 x_{30} + m_4 x_{40}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} &= \frac{m_1 (x_{10} - l) + m_2 (x_{20} - l + S)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} + \\ &+ \frac{m_3 (x_{30} + x - l) + m_4 (x_{40} - l)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m_3 x_{30} + m_4 x_{40} &= m_1 x_{10} - m_1 l + m_2 x_{20} - m_2 l + m_2 S + m_3 x_{30} + \\ &+ m_3 x - m_3 l + m_4 x_{40} - m_4 l; \end{aligned}$$

$$0 = -m_1 l - m_2 l + m_2 S + m_3 x - m_3 l - m_4 l;$$

$$l(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = m_3 x + m_2 S;$$

$$l = \frac{m_3 S \cos \alpha + m_2 S}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 15 \cdot 1}{20 + 15 + 10 + 100} = \frac{20}{145} = 0,14 \text{ м.}$$

Задача 2

Условия решения этой задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы определяются по второй букве отчества по табл. 1 из первой задачи контрольной работы № 3. Схемы задач приведены ниже, варианты задач – в табл. 3. В этой задаче во всех вариантах определяется скорость и ускорение тела 1, т. е. V_1 и a_1 .

Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2

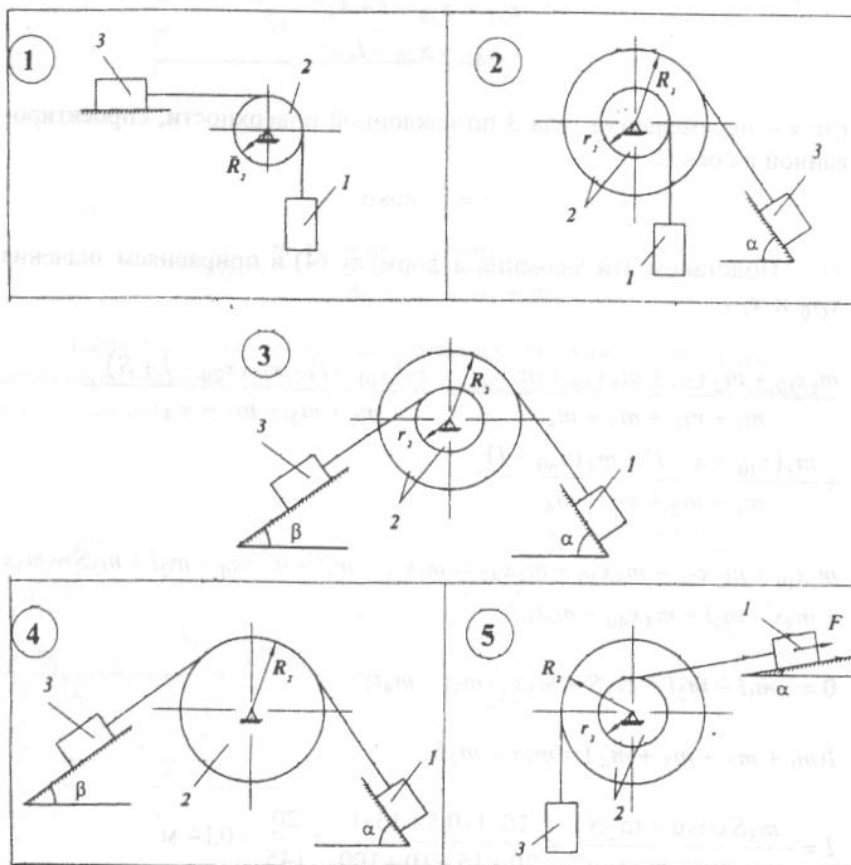


Таблица 3

Заданные и определяемые параметры

№ вари- анта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	i_{2x} , м	α , град	β , град	f , безр	F , кН	S_1 , м
1	$8m$	$2m$	m	0,5	—	—	—	—	0,2	—	2
2	$6m$	$2m$	$0,5m$	0,4	—	—	—	—	0,1	—	2
3	$8m$	$4m$	$2m$	0,6	—	—	—	—	0,3	—	3
4	$6m$	$4m$	$2m$	0,4	—	—	—	—	0,2	—	3
5	$4m$	m	$0,5m$	0,2	—	—	—	—	0,1	—	4
6	$2m$	m	$0,5m$	0,1	—	—	—	—	0,1	—	4
7	m	m	$0,5m$	0,4	0,2	0,1	15	—	0,1	—	4
8	$2m$	m	$0,25m$	0,6	0,4	0,1	15	—	0,2	—	4
9	$4m$	m	$0,5m$	0,6	0,2	0,2	30	—	0,3	—	3
10	$3m$	m	$0,2m$	0,6	0,3	0,2	30	—	0,2	—	3
11	$4m$	$2m$	m	0,6	0,2	0,1	45	—	0,1	—	2
12	$4m$	$3m$	m	0,4	0,2	0,1	45	—	0,2	—	2
13	$6m$	$4m$	$2m$	0,8	0,4	0,15	60	15	0,2	—	1
14	$6m$	$2m$	m	0,8	0,6	0,15	45	15	0,2	—	1
15	$4m$	$3m$	$2m$	0,8	0,2	0,2	45	30	0,1	—	2
16	$3m$	$2m$	m	0,4	0,2	0,2	30	30	0,1	—	2
17	$2m$	m	m	0,4	0,1	0,1	30	45	0,15	—	3
18	$2m$	$0,5m$	$0,5m$	0,2	0,1	0,1	60	45	0,15	—	3
19	$8m$	$6m$	$4m$	0,8	—	—	30	15	0,1	—	2
20	$8m$	$4m$	$2m$	0,6	—	—	30	15	0,1	—	2
21	$6m$	$4m$	$2m$	0,4	—	—	45	30	0,2	—	4
22	$6m$	$2m$	m	0,2	—	—	45	30	0,2	—	4
23	$4m$	$3m$	$2m$	0,1	—	—	60	15	0,1	—	2
24	$4m$	$2m$	m	0,1	—	—	60	15	0,1	—	2
25	$5m$	$2m$	m	0,8	0,4	0,1	45	—	0,1	$40m$	4
26	$5m$	$3m$	m	0,6	0,3	0,1	30	—	0,1	$40m$	4
27	$3m$	$2m$	m	0,4	0,2	0,1	15	—	0,1	$20m$	2
28	$3m$	m	$0,5m$	0,2	0,1	0,1	45	—	0,1	$20 m$	2

Пример решения задачи 2

Дано: $m_1 = 6\text{ т}$; $m_2 = 4\text{ т}$; $m_3 = 0,5\text{ т}$; $f = 0,1$; $F = 40\text{ т}$;
 $R_2 = 40\text{ см} = 0,4\text{ м}$; $r_2 = 20\text{ см} = 0,2\text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $i_{2x} = 10\text{ см} = 0,1\text{ м}$; $S_1 = 2\text{ м}$.
 Определить: V_1 ; a_1 (рис. 4).

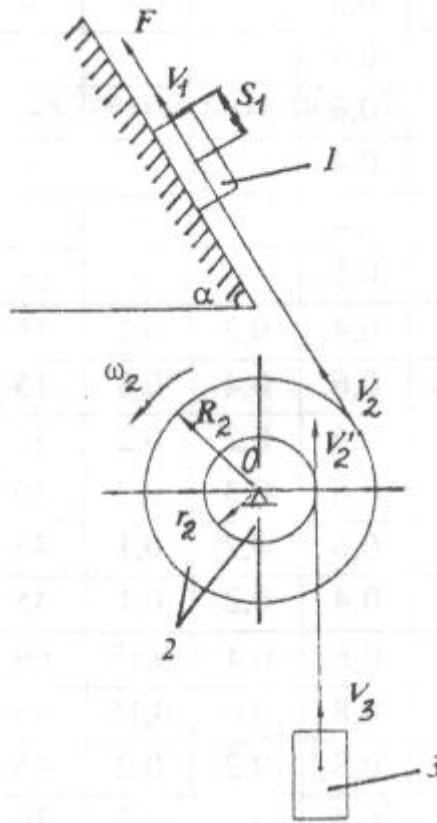


Рис. 4

Решение

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы записывается в виде:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (3)$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия механической системы в начальном и конечном положении; $\sum A_i^E, \sum A_i^J$ – сумма работ внешних и внутренних сил системы при ее перемещении из начального положения в конечное.

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, т. е. Скорость тел была равна нулю, а кинетическая энергия является функцией скорости, то $T_1 = 0$.

Сумма работ внутренних сил равна нулю, так как внутренние силы парные и работа одной силы равна работе другой силы с противоположным знаком, т. е. $\sum A_i^J = 0$. Таким образом, формула (3) примет вид: $T_2 = \sum A_i^E$.

Механическая система состоит из трех тел. Тело 1 совершает поступательное движение, тело 2 – вращательное, тело 3 – поступательное.

$$T_2 = T_2^1 + T_2^2 + T_2^3,$$

где T_2^1 , T_2^2 , T_2^3 – кинетическая энергия тел 1, 2, 3 соответственно в конечном положении;

$$T_2^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}; \quad T_2^2 = \frac{I_{0x} \omega_2^2}{2}; \quad T_2^3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Скорости всех тел должны быть выражены через скорость тела 1. Запишем кинематические связи.

Таблица 4

Перемещение	Скорости	Ускорения
$S_1 = S_2$	$V_1 = V_2 = \omega_2 R_2$	$a_1 = a_2$
$\varphi_2 = \frac{S_1}{R_2}$	$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$	$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{a_2}$
$S_2' = S_3 = \frac{S_1 r_2}{R_2}$	$V_2' = \omega_2 r_2 = \frac{V_1 r_2}{R_2} = V_3$	$a_2' = a_3 = \frac{a_1 r_2}{R_2}$

Момент инерции тела 2 (неоднородное тело) относительно оси x :

$$I_{Ox} = m_2 i_{2x}^2,$$

где i_{2x} – радиус инерции тела 2.

Ось x проходит через ($\cdot$) O перпендикулярно плоскости вращения. Подставим все значения в формулы кинетических энергий тел

$$T_2^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}; \quad T_2^2 = \frac{m_2 i_{2x}^2 V_1^2}{2R_2^2}; \quad T_2^3 = \frac{m_3 V_1^2 r_2^2}{2R_2^2}.$$

Найдем суммарное значение кинетической энергии системы

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{6mV_1^2}{2} + \frac{4m \cdot 0,01V_1^2}{2 \cdot 0,16} + \frac{0,5mV_1^2 \cdot 0,04}{2 \cdot 0,16} = \\ &= mV_1^2(3 + 0,125 + 0,0625) = 3,1875mV_1^2. \end{aligned}$$

Теперь определим работу всех внешних сил. На тело 1 действуют следующие силы: G_1 – тяжести тела 1, N_1 – нормальная реакция опоры, F_1 – сила трения, F – заданная сила (рис. 5).

$$A_{G_1} = -G_1 h_1 = -m_1 g h_1 = -6m \cdot 10 S_1 \sin \alpha = -60m S_1 \cdot 0,5 = -30m S_1,$$

$$A_{N_1} = N_1 S_1 \cos(\vec{N}_1, \vec{S}_1) = N_1 S_1 \cos 90^\circ = 0,$$

$$\begin{aligned} A_{F_1} &= F_1 S_1 \cos(\vec{F}_1, \vec{S}_1) = -F_1 S_1 = -f_1 N_1 S_1 = -f_1 G_1 \cos \alpha S_1 = \\ &= -0,1 \cdot 10m \cdot 10 \cdot 0,86 S_1 = -5,16m S_1, \end{aligned}$$

$$A_F = F S_1 \cos(\vec{F}, \vec{S}) = 40m S_1 \cos 0^\circ = 40m S_1.$$

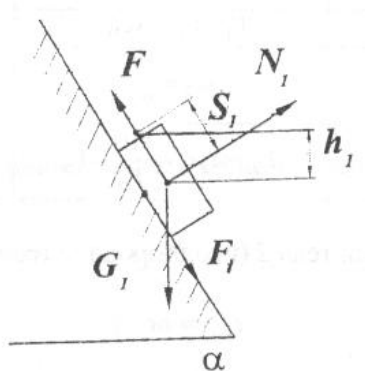


Рис. 5

Рис. 5

На тело 2 действуют силы: G_2 – сила тяжести тела 2, R_y и R_z – реакции связей, $A_{G_2} = 0$; $A_{R_z} = A_{R_y} = 0$ (рис. 6).

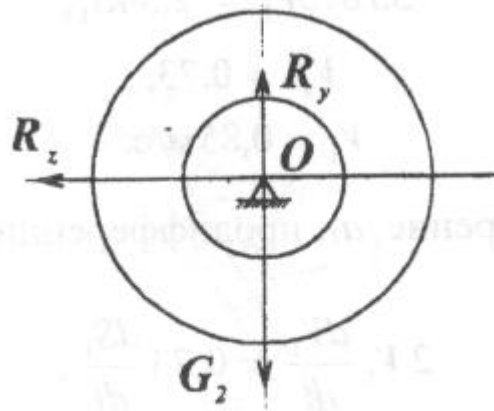


Рис. 6

Рис. 6

На тело 3 действует сила G_3 – сила тяжести тела 3 (рис. 7).

$$A_{G_3} = -G_3 h_3 = -m_3 g h_3 = -m_3 g S_3 =$$

$$= -0,5 m \cdot 10 \frac{S_1 r_2}{R_2} = -0,5 m \cdot 10 \frac{S_1 \cdot 0,2}{0,4} = -2,5 m S_1.$$

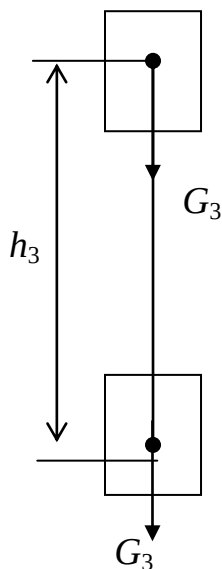


Рис. 7

Окончательно запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$3,1875mV_1^2 = -30mS_1 - 5,16mS_1 + 40mS_1 - 2,5mS_1, \quad (4)$$

$$3,1875V_1^2 = 2,34S_1,$$

$$V_1^2 = 0,73,$$

$$V_1 = 0,85 \text{ м/с}.$$

Определим ускорение a_1 , продифференцировав уравнение для скорости (4):

$$2 V_1 \frac{dV_1}{dt} = 0,73 \frac{dS_1}{dt},$$

$$2a_1 = 0,73,$$

$$a_1 = 0,37 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3

Эта задача на составление общего уравнения динамики решается для той же схемы и варианта, что и задача 2 (рис. 8).

Требуется определить ускорение тела 1, т. е. A_1 . Оно должно совпадать по величине с ускорением a_1 , найденным в задаче 2.

Общее уравнение динамики представляет собой уравнение работ всех внешних сил и сил инерции на возможном перемещении

$$\sum P_i^E \cdot \delta S_i \cdot \cos(\vec{P}_i^E; \delta \vec{S}_i) + \sum \Phi_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\vec{\Phi}_i; \delta \vec{S}_i) = 0,$$

где P_i^E – внешние силы, Н; Φ – силы инерции, Н; δS_i – возможное перемещение, м

Предполагается, что все связи в рассматриваемой механической системе двусторонние и идеальные (силы трения, если они имеются, отнесены к числу задаваемых сил).

Если механическая система состоит из отдельных твердых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному век-

тору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения.

Чтобы воспользоваться общим уравнением динамики, нужно
– к каждому телу, входящему в механическую систему, приложить действующие на него силы;

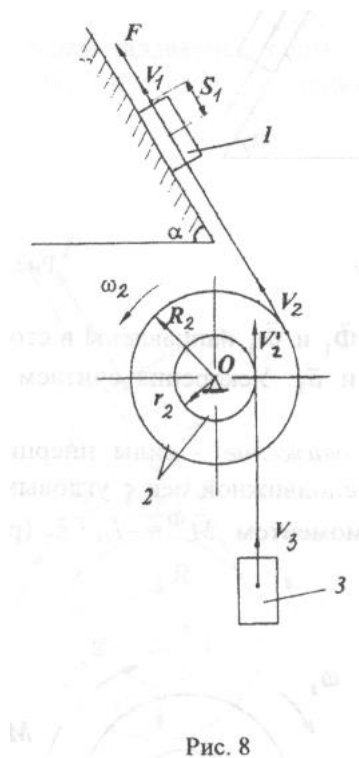


Рис. 8

– условно приложить силы инерции в зависимости от вида движения тела;

– сообщить системе возможное перемещение и для всей совокупности задаваемых сил и приведенных сил инерции составить общее уравнение динамики.

Силы инерции для различных видов движений тел представлены следующим образом:

Поступательное движение – силы инерции для тел 1 и 3 выражаются векторами $\vec{\Phi}_1 = -m\vec{a}_1$ и $\vec{\Phi}_3 = -m\vec{a}_3$ (рис. 9, 10)

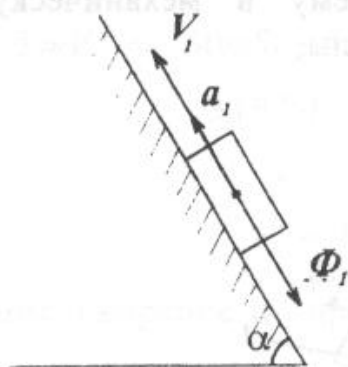


Рис. 9

Рис. 9

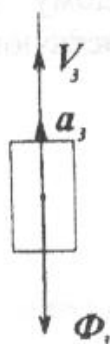


Рис. 10

Рис. 10

Силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_3$ направлены в стороны, противоположные ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$. Ускорения считаем сонаправленными со скоростями.

Вращательное движение – силы инерции для блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ϵ_2 , приводятся к паре сил с моментом $\vec{M}^\Phi = -I_{2x} \cdot \vec{\epsilon}_2$ (рис. 11).

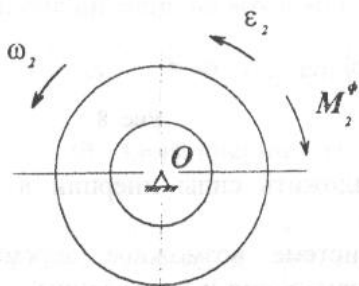


Рис. 11

Рис. 11

Пример решения задачи 3

Дано: $m_1 = 6\text{ т}$; $m_2 = 4\text{ т}$; $m_3 = 0,5\text{ т}$; $f = 0,1$; $F = 40\text{ т}$;
 $R_2 = 40\text{ см} = 0,4\text{ м}$; $r_2 = 20\text{ см} = 0,2\text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $i_{2x} = 10\text{ см} = 0,1\text{ м}$; $S_1 = 2\text{ м}$.

Определить: a_1 .

Решение

Прикладываем к телам задаваемые силы и силы инерции: Φ_1 , M_2^ϕ , Φ_3 , G_1 , F_1 , F , G_2 , G_3 . Показываем реакции связей: N_1 , R_y , R_z (рис.12).

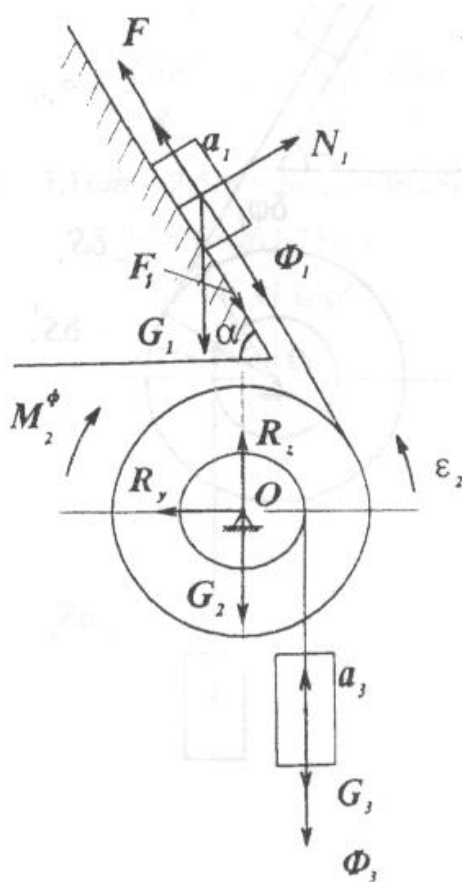


Рис. 12

Рис. 12

Задаем возможное перемещение δS_1 и выражаем через него перемещения других тел (рис. 13).

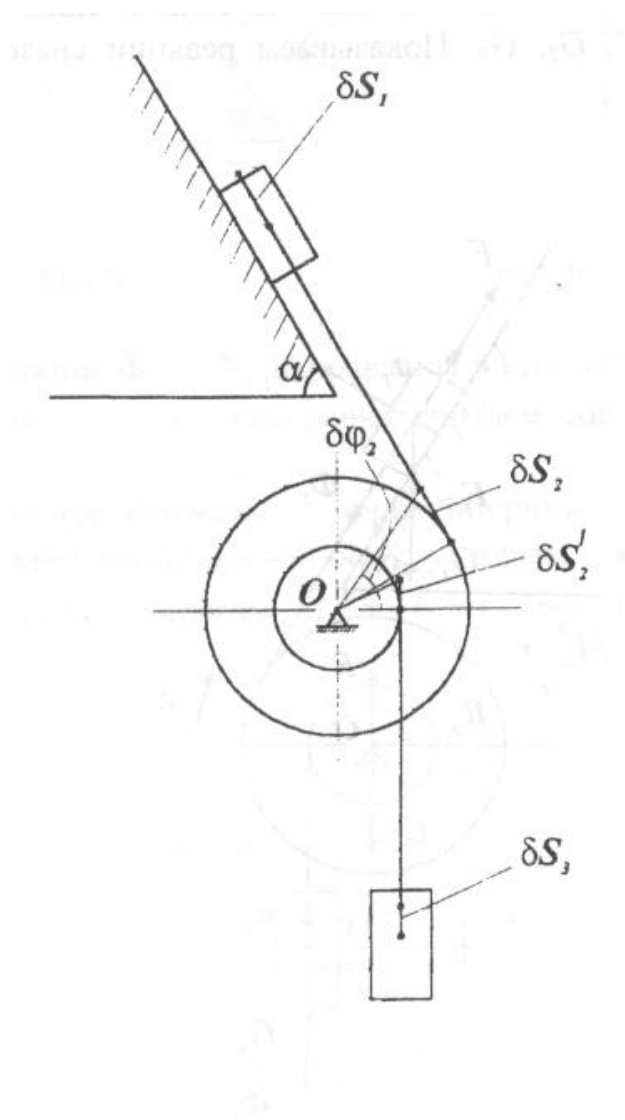


Рис. 13

Рис. 13

$$\delta S_1 = \delta S_2, \quad \delta S_2 = \delta \varphi_2 R_2, \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta S_2}{R_2} = \frac{\delta S_1}{R_2},$$

$$\delta S_2' = \delta \varphi_2 r_2 = \frac{\delta S_1 r_2}{R_2} = \delta S_3.$$

Составляем общее уравнение динамики (уравнение всех внешних сил и сил инерции) и решаем его:

$$F\delta S_1 - G_1 \sin \alpha \delta S_1 - F_1 \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - M_2^\Phi \delta \varphi_2 - G_3 \delta S_3 - \Phi_3 \delta S_3 = 0,$$

$$40m\delta S_1 - 6mg \frac{1}{2} \delta S_1 - 6mg \frac{\sqrt{3}}{2} 0,1 \delta S_1 - 6ma_1 \delta S_1 - 4m0,01 \frac{a_1}{R_2} \frac{\delta S_1}{R_2} -$$

$$- 0,5mg \frac{\delta S_1 r_2}{R_2} - 0,5m \frac{a_1 r_2}{R_2} \frac{\delta S_1 r_2}{R_2} = 0,$$

$$40m - 30m - 5,16m - 2,5m = 6ma_1 + 0,25ma_1 + 0,125ma_1,$$

$$2,34m = 6,375ma_1,$$

$$a_1 = 0,37 \text{ м/с}^2.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Задача 1

Контрольная работа № 5 включает в себя две задачи. Первая задача на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. Номер схемы и варианта определяется *по второй букве имени* студента по табл. 1. Схемы представлены ниже, а варианты задач находятся в табл. 2. В этой задаче во всех вариантах определяется скорость и ускорение тела 1, т. е. V_1 и a_1 , а также скорость точки C, т. е. V_C и угловое ускорение тела 3, т. е. ε_3 .

Таблица 1

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
Схема	1						2						3		
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Продолжение табл. 1

Буква	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я
Схема	3			4						5			
Вариант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Схемы к задаче 1

Схемы к задаче 1

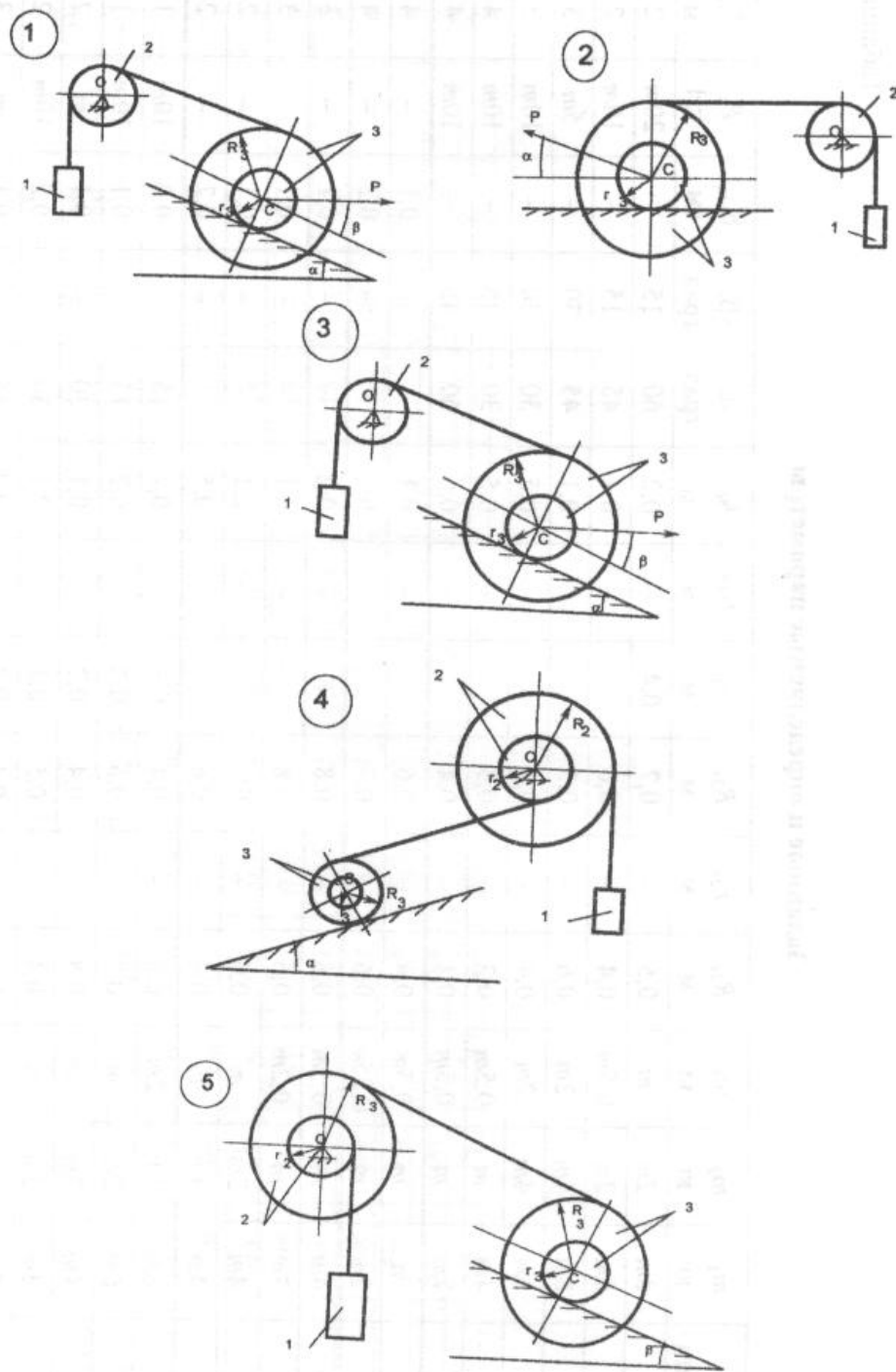


Таблица 2

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{2x} , м	i_{3z} , м	α , град	β , град	$\delta_{с.к.}$, см	P , кН	S_1 , м
1	8m	2m	m	0,5	—	0,7	0,4	—	0,2	60	15	—	20m	2
2	6m	2m	0,5m	0,4	—	0,6		—	0,1	45	15	—	10m	2
3	8m	4m	2m	0,6	—	0,5		—	0,1	45	30	—	5m	3
4	6m	4m	2m	0,4	—	0,4		—	0,5	30	30	—	10m	3
5	4m	m	0,5m	0,2	—	0,3		—	0,5	30	45	—	10m	4
6	2m	m	0,5m	0,1	—	0,4		—	0,5	60	45	—	10m	4
7	m	m	0,5m	0,4	—	0,6		—	0,1	—	—	0,1	—	4
8	2m	m	0,25m	0,6	—	0,7		—	0,1	—	—	0,2	—	4
9	4m	m	0,5m	0,6	—	0,8		—	0,2	—	—	0,1	—	3
10	3m	m	0,2m	0,6	—	0,8		—	0,1	—	—	0,1	—	3
11	4m	2m	m	0,6	—	0,6		—	0,1	—	—	0,1	—	2
12	4m	3m	m	0,4	—	0,6		—	0,5	—	—	0,2	—	2
13	6m	4m	2m	0,8	—	0,4	0,3	—	0,2	15	—	0,2	10m	1
14	6m	2m	m	0,8	—	0,6	0,2	—	0,2	15	—	0,1	10m	1
15	4m	3m	2m	0,8	—	0,4	0,2	—	0,1	30	—	0,1	m	2
16	3m	2m	m	0,4	—	0,5	0,3	—	0,1	30	—	0,2	10m	2
17	2m	m	m	0,4	—	0,4	0,2	—	0,2	45	—	0,1	m	3
18	2m	0,5m	0,5m	0,2	—	0,3	0,1	—	0,3	45	—	0,1	10m	3

Окончание табл. 2

№ варианта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	i_{2x} , м	i_{3z} , м	α , град	β , град	$\delta_{с.к.}$, см	P , кН	S_1 , м
19	$8m$	$6m$	$4m$	0,8	0,6	0,6	0,4	0,2	0,1	30	–	–	–	2
20	$8m$	$4m$	$2m$	0,6	0,4	0,4	0,2	0,2	0,1	30	–	–	–	2
21	$6m$	$4m$	$2m$	0,4	0,2	0,6	0,3	0,2	0,2	45	–	–	–	4
22	$6m$	$2m$	m	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2	45	–	–	–	4
23	$4m$	$3m$	$2m$	0,1	0,05	0,4	0,2	0,1	0,1	15	–	–	–	2
24	$4m$	$2m$	m	0,1	0,05	0,3	0,1	0,1	0,1	15	–	0,2	–	2
25	$5m$	$2m$	m	0,8	0,4	0,4	0,2		0,2	–	45	0,2	–	4
26	$5m$	$3m$	m	0,6	0,3	0,3	0,1		0,1	–	30	0,2	–	4
27	$3m$	$2m$	m	0,4	0,2	0,3	0,1		0,1	–	15	0,1	–	2
28	$3m$	m	$0,5m$	0,2	0,1	0,2	0,1		0,2	–	45	0,1	–	2

Пример решения задачи 1

Дано: $m_1 = 10m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $\delta_{c.k} = 0,2$ м; $R_2 = 2r_2$; $r_2 = 20$ см = $= 0,2$ м; $R_3 = 50$ см = $0,5$ м; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $S = 1$ м; $f = 0,1$; $i_{2x} = 10$ см = $0,1$ м.

Определить: V_1 , V_C , a_1 , ε_3 .

Решение

Механическая система состоит из трех тел (рис. 1). Тело 1 совершает поступательное движение, тело 2 – вращательное, тело 3 – плоское.

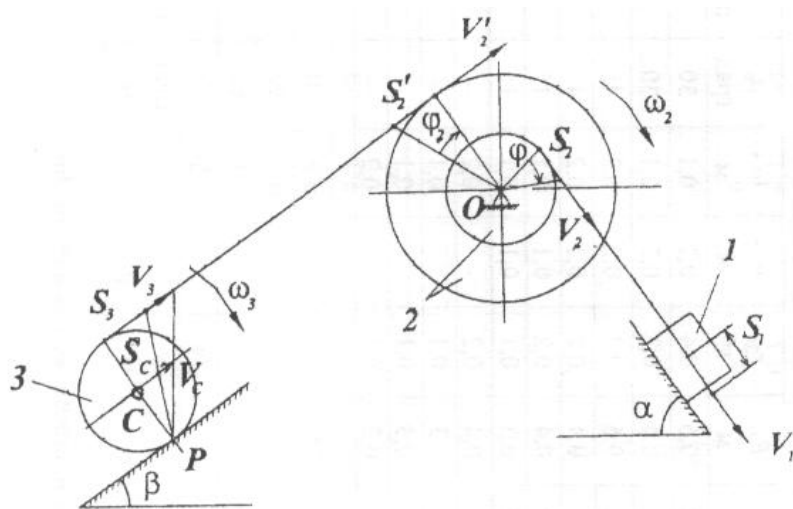


Рис. 1

Рис. 1

$$T_2 = \sum A_i^E ;$$

$$T_2 = T_2^1 + T_2^2 + T_2^3 ,$$

где T_2^1 , T_2^2 , T_2^3 – кинетическая энергия тел 1, 2, 3 соответственно в конечном положении.

$$T_2^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} ; \quad T_2^2 = \frac{I_{ox} \cdot \omega_2^2}{2} ; \quad T_2^3 = \frac{m_3 \cdot V_C^2}{2} + \frac{I_{C\xi} \cdot \omega_3^2}{2} .$$

Запишем кинематические связи в табл. 3:

Таблица 3

Перемещения	Скорости	Ускорения
$S_1 = S_2$ $\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}$ $S'_2 = S_3$ $\varphi_3 = \frac{S_1 R_2}{r_2 2R_3}$ $S_C = \frac{S_1 R_2}{2r_2}$	$V_1 = V_2 = \omega_2 \cdot r_2$ $W_2 = \frac{V_1}{r_2}$ $V'_2 = \omega_2 R_2 = \frac{V_1 R_2}{r_2} = V_3$ $\vec{V}_3 = \vec{V}_P + \vec{V}_{3P}; V_P = 0$ $V_3 = V_{3P} = \omega_3 2R_3$ $\omega_3 = \frac{V_3}{2R_3} = \frac{V_1 R_2}{r_2 2R_3}$ $\vec{V}_C = \vec{V}_P + \vec{V}_{CP}; V_P = 0$ $V_C = V_{CP} = \omega_3 R_3 = \frac{V_1 R_2}{2r_2}$	$a_1 = a_2$ $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}$ $a'_2 = a_3$ $\varepsilon_3 = \frac{a_1 R_2}{r_2 2R_3}$ $a_C = \frac{a_1 R_2}{2r_2}$

Скорости всех тел должны быть выражены через скорость тела 1. Момент инерции тела 2 (неоднородное тело) относительно оси x :

$$I_{Ox} = m_2 i_{2x}^2,$$

где i_{2x} – радиус инерции тела.

Момент инерции тела 3 (однородный диск) относительно оси ξ :

$$I_{C\xi} = \frac{m_3 R_3^2}{2}.$$

Ось x проходит через точку O перпендикулярно плоскости вращения. Ось ξ проходит через точку C , перпендикулярно плоскости вращения и перемещается вместе с его телом.

Подставим все значения в формулы кинетических энергий тел:

$$T_1^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}; \quad T_2^2 = \frac{m_2 i_{2x}^2 V_1^2}{2r_2^2}; \quad T_3^3 = \frac{m_3 V_1^2 R_2^2}{2 \cdot 4r_2^2} + \frac{m_3 R_3^2 V_1^2 R_2^2}{2 \cdot 2r_2^2 \cdot 4R_3^2}.$$

Найдем суммарное значение кинетической энергии системы:

$$T_2 = mV_1^2 (5 + 0,25 + 0,5 + 0,25) = 6 mV_1^2$$

Теперь определим работу всех внешних сил. На тело 1 действуют следующие силы: G_1 – сила тяжести тела; N_1 – нормальная реакция опоры, F_1 – сила трения (рис. 2).

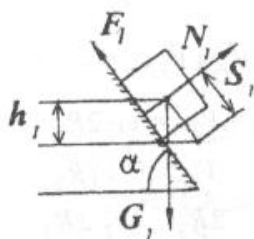


Рис. 2

Рис. 2

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g h_1 = 10m \cdot 10S_1 \sin \alpha = 10m \cdot 10S_1 \cdot 0,86 = 86mS_1$$

$$A_{N_1} = N_1 S_1 \cos (\vec{N}_1, \vec{S}_1) = N_1 S_1 \cos 90^\circ = 0;$$

$$\begin{aligned} A_{F_1} &= F_1 \cdot S_1 \cdot \cos (\vec{F}_1, \vec{S}_1) = -F_1 S_1 = -f_1 N_1 S_1 = -f_1 G_1 \cos \alpha S_1 = \\ &= -0,1 \cdot 10m \cdot 0,5S_1 = -5mS_1. \end{aligned}$$

На тело 2 действуют силы: G_2 – сила тяжести тела 2; R_y, R_z – реакции связей $A_{G_2} = 0$; $A_{R_y} = A_{R_z} = 0$ (рис. 3).

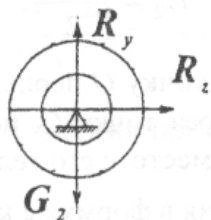


Рис. 3

Рис. 3

На тело 3 действуют следующие силы: G_3 – сила тяжести тела 3, $M_{с.к}$ – момент сопротивления качению (рис. 4).

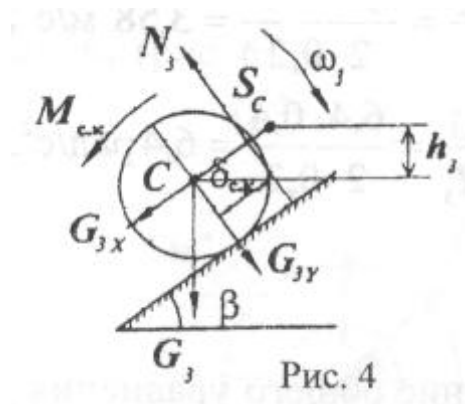


Рис. 4

$$A_{G_3} = -G_3 h_3 = -m_3 g h_3 = -m_3 g S_c \sin \beta = -m_3 g \frac{S_1 R_2}{2 r_2} \sin \beta =$$

$$= -m \cdot 10 \frac{S_1 \cdot 0,04}{2 \cdot 0,2} \cdot 0,5 = -\frac{10 m S_1}{2} = -5 m S_1;$$

$$A_{M_{с.к}} = -M_{с.к} \varphi_3 = -\delta_{с.к} N_3 \frac{S_1 R_2}{r_2 \cdot 2 R_3} = -0,2 G_3 \cos \beta \frac{S_1 \cdot 0,4}{0,2 \cdot 2 \cdot 0,5} =$$

$$= -0,2 m \cdot 10 \cdot 0,86 \frac{S_1 \cdot 0,4}{0,4 \cdot 0,5} = -3,44 m.$$

Окончательно запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$6mV_1^2 = 86mS_1 - 5mS_1 - 5mS_1 - 3,44mS_1;$$

$$6mV_1^2 = mS_1 \cdot 72,56;$$

$$V_1^2 = 12,1S_1;$$

$$V_1 = \sqrt{12,8 \cdot S_1} = \pm \sqrt{12,8 \cdot 1} = 3,58 \text{ м/с}.$$

Определим ускорение a_1 , продифференцировав уравнение для скорости

$$2V_1 \frac{dV_1}{dt} = 12,1 \frac{dS_1}{dt};$$

$$2a_1 = 12,1;$$

$$a_1 = 6,05 \text{ м/с}^2.$$

Скорости V_C и ε_3 вычисляем, используя кинематические связи

$$V_C = \frac{V_1 R_2}{2r_2} = \frac{3,58 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,2} = 3,58 \text{ м/с}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1 R_2}{r_2 \cdot 2R_3} = \frac{6,4 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,2} = 6,4 \text{ рад/с}^2.$$

Задача 2

Эта задача на составление общего уравнения динамики решается для той же схемы и варианта, что и задача 1.

Требуется определить ускорение тела 1, т. е. a_1 . Оно должно совпадать по величине с ускорением a_1 , найденным в задаче 1.

В этой задаче к телам следует приложить активные силы и силы инерции. Задать возможные перемещения тел и вычислить суммы работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях. Записать общее уравнение динамики и из него вычислить ускорение a_1 .

Силы инерции для различных видов движений тел представлены в следующем виде:

Поступательное движение – силы инерции для тела 1 выражаются вектором $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_1$ (рис. 5).

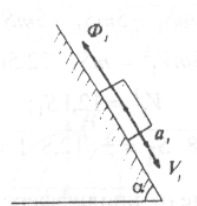


Рис. 5

Рис. 5

Сила инерции $\vec{\Phi}_1$ направлена в сторону, противоположную ускорению a_1 . Ускорения считаем сонаправленными со скоростями.

Вращательное движение – силы инерции для блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ε_2 , приводятся к паре сил с моментом $\vec{M}_2^\Phi$, который направлен в противоположную сторону от $\vec{\varepsilon}_2$ (рис. 6).

$$\vec{M}_2^\Phi = -I_{2x} \cdot \vec{\varepsilon}_2$$



Рис. 6

Рис. 6

Плоское движение – силы инерции блока 3 приводятся к вектору $\vec{\Phi}_c = -m_3 \vec{a}_c$ и паре сил с моментом $\vec{M}_3^\Phi = -I_{c\xi} \cdot \vec{\varepsilon}_3$, которые направлены соответственно в противоположные стороны от $\vec{a}_c$ и $\vec{\varepsilon}_3$ (рис. 7).

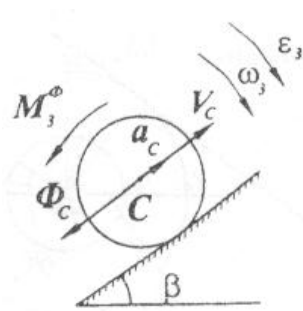


Рис. 7

Рис. 7

Схема для данной задачи после приложения активных сил и реакций связей G_1 , $F_{\text{тр1}}$, N_1 , G_2 , R_Y , R_Z , G_3 , N_3 , $M_{\text{с.к}}$ и сил инерции Φ_1 , M_2^Φ , Φ_C , M_3^Φ показана на рис. 8.

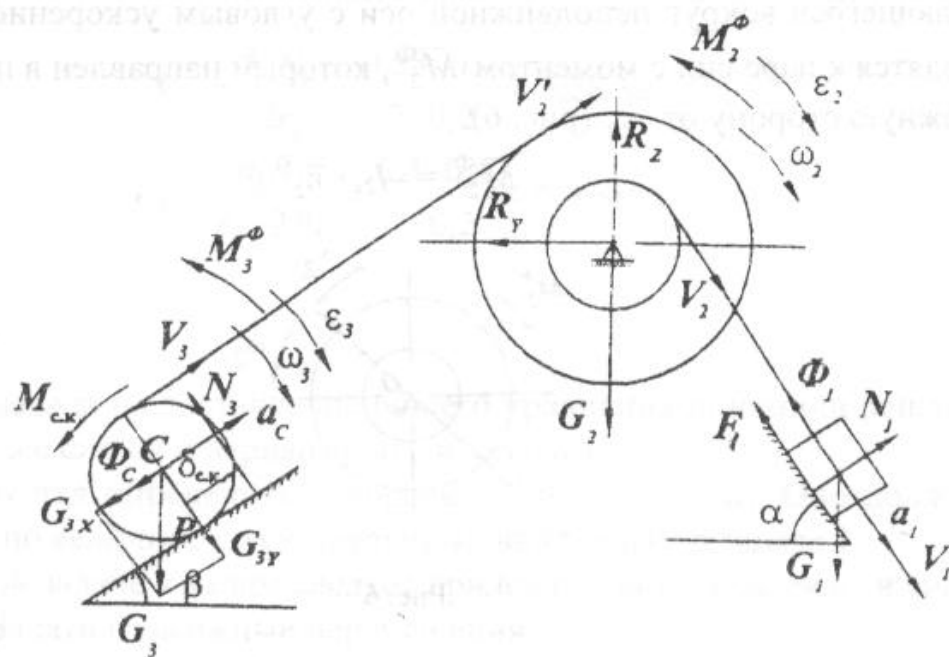


Рис. 8

Задаем возможные перемещения тел и показываем их на рис. 9.

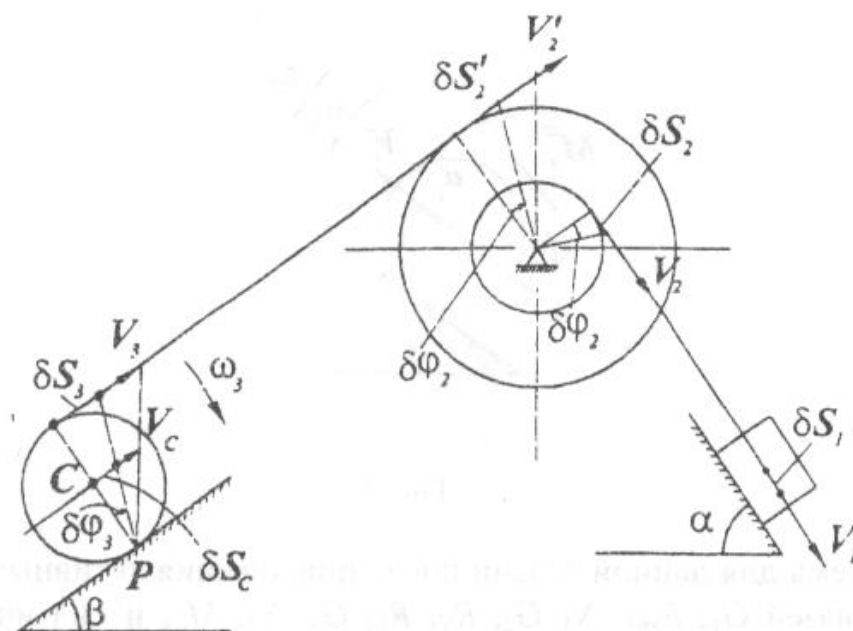


Рис. 9

Рис. 9

Кинематические связи записываем в виде табл. 4

Таблица 4

Перемещения	Скорости	Ускорения
$\delta S_1 = \delta S_2$ $\delta \varphi_2 = \frac{\delta S_1}{r_2}$ $\delta S'_2 = \delta \varphi_2 R_2 = \frac{\delta S_1 R_2}{r_2} = \delta S_3$ $\delta \varphi_3 = \frac{\delta S_1 R_2}{r_2 \cdot 2R_3}$ $\delta S_C = \frac{\delta S_1 R_2}{2r_2}$	$V_1 = V_2 = \omega_2 r_2$ $W_2 = \frac{V_1}{r_2}$ $\vec{V}_3 = \vec{V}_P + \vec{V}_{3P}; V_P = 0$ $V'_2 = \omega_2 R_2 = \frac{V_1 R_2}{r_2} = V_3$ $\vec{V}_3 = \vec{V}_P + \vec{V}_{3P}; V_P = 0$ $V_3 = V_{3P} = \omega_3 \cdot 2R_3$ $\omega_3 = \frac{V_3}{2R_3} = \frac{V_1 R_2}{r_2 \cdot 2R_3}$ $\vec{V}_C = \vec{V}_P + \vec{V}_{CP}; V_P = 0$ $V_C = V_{CP} = \omega_3 R_3 = \frac{V_1 R_2}{2r_2}$	$a_1 = a_2 = \varepsilon_2 r_2$ $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}$ $a'_2 = \varepsilon_2 R_2 = r_2 \frac{a_1 R_2}{r_2}$ $\varepsilon_3 = \frac{a_3}{2R_3} = \frac{a_1 R_2}{r_2 \cdot 2R_3}$ $a_C = \frac{a_1 R_2}{2r_2}$

Составляем общее уравнение динамики:

$$G_1 \delta S_1 \cdot \sin \alpha - F_{\text{тп}_1} \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - M_2^{\Phi} \delta \varphi_2 - G_3 \delta S_C \cdot \sin \beta - \\ - M_{C.K} \delta \varphi_3 - \Phi_C \delta S_C - M_3^{\Phi} \delta \varphi_3 = 0.$$

$$\text{Работа: } A_{N_1} = N_1 \delta S_1 \cdot \cos(\bar{N}_1, \delta \bar{S}_1) = 0;$$

$$A_{G_2} = G_2 h_2 = 0; A_{R_Z} = A_{R_Y} = 0.$$

$$m_1 g \delta S_1 \cdot \sin \alpha - f m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot \delta S_1 - m_1 a_1 \delta S_1 - m_2 i_{2x}^2 \varepsilon^2 \frac{\delta S_1}{r_2} - m_3 g \frac{\delta S_1 \cdot R_2}{2r_2} \sin \beta - \\ - \delta_{C.K} m_3 g \cdot \cos \beta \cdot \frac{\delta S_1 R_2}{r_2 \cdot 2R_3} - m_3 \frac{a_1 R_2}{2r_2} \cdot \frac{\delta S_1 R_2}{2r_2} - \frac{m_3 R_3^2}{2} \cdot \frac{a_1 R_2}{r_2 \cdot 2r_3} \cdot \frac{\delta S_1 R_2}{r_2 \cdot 2R_3} = 0.$$

$$\begin{aligned}
& 10m \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,86 - 0,1 \cdot 10m \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 1 - 10m \cdot a_1 \cdot 1 - 2m \cdot 0,01 \cdot \frac{a_1}{0,2} \cdot \frac{1}{0,2} - \\
& - \frac{m \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,2} \cdot 0,5 - 0,2m \cdot 10 \cdot \frac{0,86 \cdot 1 \cdot 0,4}{0,2 \cdot 2 \cdot 0,5} - \frac{ma_1 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,2} \cdot \frac{1 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,2} - \\
& - \frac{m \cdot 0,5^2 \cdot a_1 \cdot 0,4 \cdot 1 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 0,5} = 0; \\
& 86m - 5m - 10ma_1 - 5m - 3,44m - ma_1 - 0,5ma_1 = 0; \\
& m(86 - 5 - 5 - 3,44) = ma_1(10 + 0,5 + 1 + 0,5); \\
& 72,56 = 12a_1; a_1 = 6,05 \text{ м/с}^2.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 2000.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3	6
Задача 1	6
Задача 2	12
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4	19
Задача 1	19
Задача 2	26
Задача 3	32
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5	38
Задача 1	36
Задача 2	44
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	49

Федорова Людмила Анатольевна
Агапова Лидия Анатольевна
Береснев Владислав Николаевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольных работ № 3; 4; 5
для студентов специальностей 190603, 140504
факультета заочного обучения и экстерната

Редактор
Л.Г. Лебедева

Корректор
Н.И. Михайлова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Подписано в печать 27.12.2006. Формат 60×84 1/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,02. Печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,0
Тираж 500 экз. Заказ № С 21

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИПЦ СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

