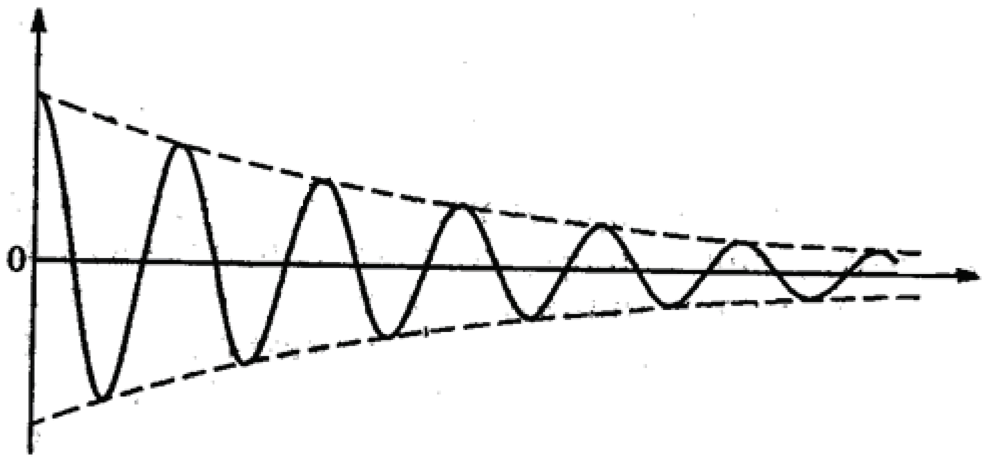
И.А. Лапин

Л.С. Ратафьева

А.В. Рябова

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

И.А. Лапин

Л.С. Ратафьева

А.В. Рябова

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2013

Коллектив авторов:
И.А. Лапин, Л.С. Ратафьева, А.В. Рябова

Обыкновенные дифференциальные уравнения
Под общей редакцией Л.С. Ратафьевой
Учебное пособие. СПб: СПб НИУ ИТМО, 2013 год, 104 с.

Предлагаемое учебное пособие является базовым конспектом лекций по высшей математике «Обыкновенные дифференциальные уравнения», для студентов 1-го курса (второй семестр) дневного и вечернего отделений общеинженерных специальностей. В нём рассмотрены следующие темы: дифференциальные уравнения первого порядка и высших порядков, и методы их интегрирования; линейные дифференциальные уравнения; системы обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложения. Пособие содержит достаточно большое количество разобранных примеров и должно помочь студентам при самостоятельном изучении данных разделов курса в условиях сокращённого количества аудиторных занятий.

В конце пособия приводится список литературы, которая использовалась при написании данного пособия, без дополнительных ссылок.

Имеется положительная рецензия на данное учебное пособие доктора технических наук, профессора Ю.А. Балошина.

Рекомендовано к печати Учёным советом естественнонаучного факультета СПб НИУ ИТМО (протокол № 3 от 2 апреля 2013 года)

Оглавление

Quidquid praecepies, esto brevis
(транскр. Квидквид прэцэпиес, есто брэвис)
Чему бы ты ни учил, будь краток
Заповедь Горация

Глава 1.
Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

§ 1.1. Основные понятия.

При изучении различных физических явлений не всегда удаётся найти закон, непосредственно связывающий искомую функцию и независимую переменную, но часто бывает возможно установить связь между этой функцией, её производной и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется ***дифференциальным уравнением***.

Задача. Тело, имеющее температуру τ_0 в момент $t_0 = 0$, помещено в среду с температурой T. Нужно найти закон, по которому будет изменяться температура этого тела в зависимости от времени.

Решение. Обозначим искомую температуру $\tau(t)$ (ясно, что она является функцией времени t). Из закона физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности его температуры и температуры охлаждающей среды, т.е.

$$\frac{d\tau}{dt} = k(T - \tau), \tag{1}$$

где k - коэффициент пропорциональности.

Соотношение (1) является математической моделью данного физического процесса. Оно называется *дифференциальным уравнением*, потому что в него наряду с неизвестной функцией $\tau(t)$ входит и её производная $\frac{d\tau}{dt}$. Нетрудно убедиться, что функция

$$\tau(t) = c \cdot e^{-kt} + T \qquad (2)$$

удовлетворяет данному дифференциальному уравнению, т.е. является его решением (здесь c - произвольная константа). Заметим, что по условию задачи

$$\tau(t)_{|t=t_0=0} = \tau_0 .$$

Принимая во внимание это условие, которое называется *начальным*, нетрудно найти значение постоянной c. Действительно, полагая в найденном решении (2) $t = 0$, $\tau = \tau_0$, получим

$$\tau_0 = c + T ,$$

откуда следует

$$c = \tau_0 - T .$$

Подставляя найденное значение c в выражение (2), окончательно получим:

$$\tau(t) = (\tau_0 - T) \cdot e^{-kt} + T .$$

Как видим, данному уравнению удовлетворяет не одна функция, а целое семейство функций. Но функция, удовлетворяющая данному начальному условию, только одна.

В общем случае *дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные*. Если искомая функция зависит только от одной переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*, а если искомая функция зависит от нескольких переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*. В данном пособии мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Уравнение $F(x, y, y') = 0$, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Всякая дифференцируемая на некотором промежутке функция $y(x)$, обращающая уравнение в тождество при подстановке её в уравнение, называется *решением дифференциального уравнения* в каждой точке этого промежутка.

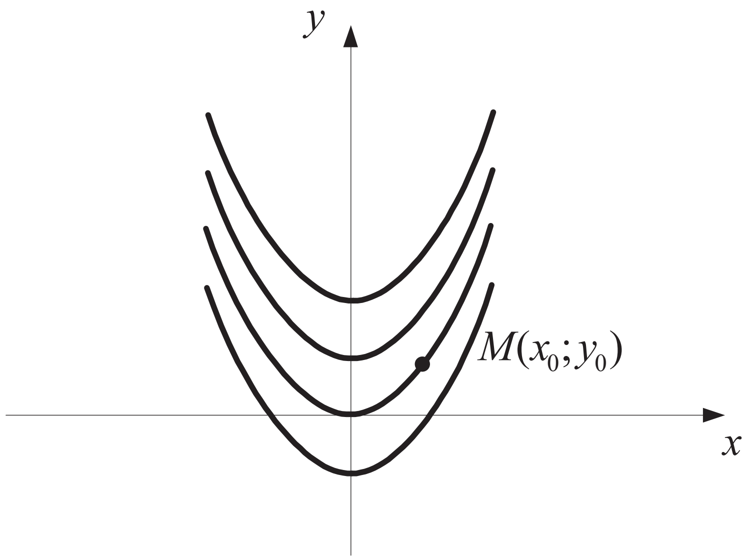


Рис.1.

Процесс отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения обычно связан с нахождением интегралов, поэтому он называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Заметим, что операция взятия неопределенного интеграла называется *квадратурой*; отметим также что в теории дифференциальных уравнений под символом $\int f(x)dx$ понимают обычно какую-нибудь одну первообразную, а постоянную интегрирования приписывают отдельно в качестве слагаемого.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = x$. Нетрудно найти его решение:

$$y = \int x dx + c = \frac{x^2}{2} + c.$$

Таким образом, мы получили целое семейство решений (рис.1).

В рассмотренном выше примере $y_1(x) = \frac{x^2}{2}$, $y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, $y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$ представляют из себя различные *частные решения* этого уравнения; семейство $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ является его *общим решением*. Очевидно также, что соотношение $x^2 - 2y + c = 0$ - его *общий интеграл*, а соотношение $x^2 - 2y = 0$ является его *частным интегралом*.

Если обыкновенное дифференциальное уравнения первого порядка может быть разрешено относительно производной y', т.е. записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

где $f(x, y)$ - известная функция, определенная в некоторой области D на плоскости $x0y$, то говорят, что дифференциальное уравнение записано *в нормальной форме Коши*.

Одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений – так называемая *задача Коши*. Она формулируется следующим образом.

Среди всех решений данного дифференциального уравнения первого порядка найти решения $y = y(x)$, которое при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимает заданное фиксированное значение y_0, т.е. решение, которое удовлетворяет так называемому начальному условию

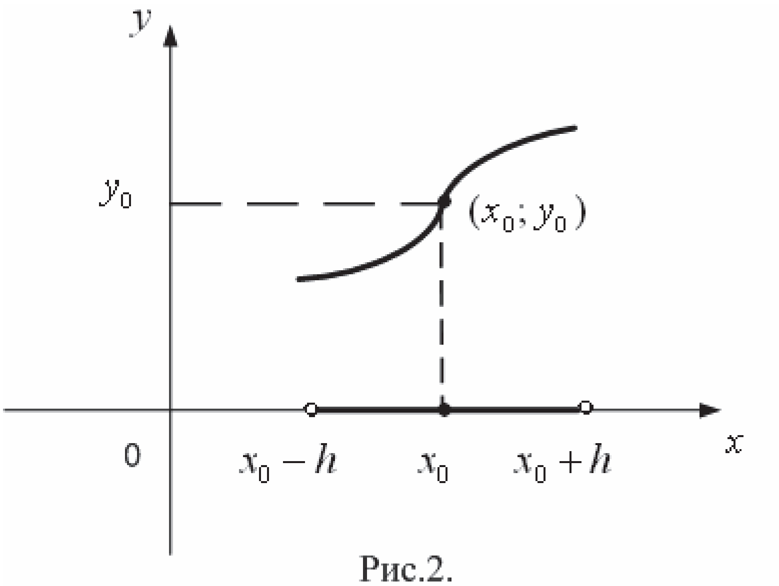


Рис.2.

$$y =|_{x=x_0} = y_0 .$$

С геометрической точки зрения этой задаче соответствует задача отыскания среди всех интегральных кривых той кривой, которая проходит через точку $M(x_0, y_0)$ (см. рис.1).

Будем говорить, что задача Коши с начальным условием $y =|_{x=x_0} = y_0$ имеет единственное решение, если существует такое число $h > 0$, что в интервале $|x - x_0| < h$ определено решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$, и не существует решения, определенного в этом же интервале и не совпадающего с решением $y = y(x)$, хотя бы в одной точке интервала $|x - x_0| < h$, отличной от точки $x = x_0$ (рис.2). В противном случае будем говорить, что в точке (x_0, y_0) нарушается единственность решения задачи Коши. Естественно, что возникает вопрос: всегда ли существует решение задачи Коши и если оно существует, является ли оно единственным.

Ответ на этот вопрос даёт теорема, которую мы приводим без доказательства и в упрощённой формулировке.

Теорема. Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4}$$

функция $f(x,y)$ и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D плоскости $x0y$, то какова бы ни была точка (x_0, y_0) области D, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (4), определённое в некотором интервале, содержащее точку x_0 и удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

В частности, если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (4) совпадают хотя бы для одного значения x, то эти решения тождественно равны для всех тех значений x, для которых они оба определены.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что через каждую точку (x_0, y_0) области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (4) или, другими словами, вся область D, покрыта интегральными кривыми уравнения (4), которые нигде не пересекаются между собой.

Пример. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = 2x,\ y|_{x=1} = 2.$$

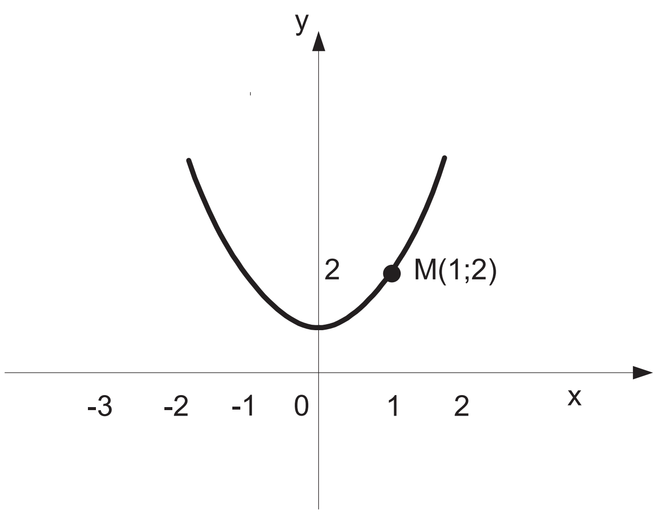


Рис.3.

Решение. Интегрируя данное уравнения, получим его общее решение $y = x^2 + c$.

Положим здесь $y = 2$, $x = 1$. Тогда получим: $2 = 1 + c_0$, откуда получаем $c_0 = 1$. Подставляем найденное значение c_0 в общее решение, получим $y = x^2 + 1$.

Это и есть искомое частное решение исходного уравнения, которое и является решением задачи Коши, сформулированной в условии задачи (см. рис. 3).

Заметим, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

может иметь решение $y = \psi(x)$, которое не содержится в семействе его общего решения. Такое решение называют *особым решением*.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}$$

Так как правая часть данного уравнения и её частная производная

$$\frac{\partial}{\partial y}(3 \cdot \sqrt[3]{y^2}) = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

удовлетворяют условиям сформулированной выше теоремы во всех точках плоскости $x0y$ за исключением точек, лежащих на оси $0x$, то через любую точку (x_0, y_0) при $y_0 \neq 0$ проходит единственная интегральная кривая данного

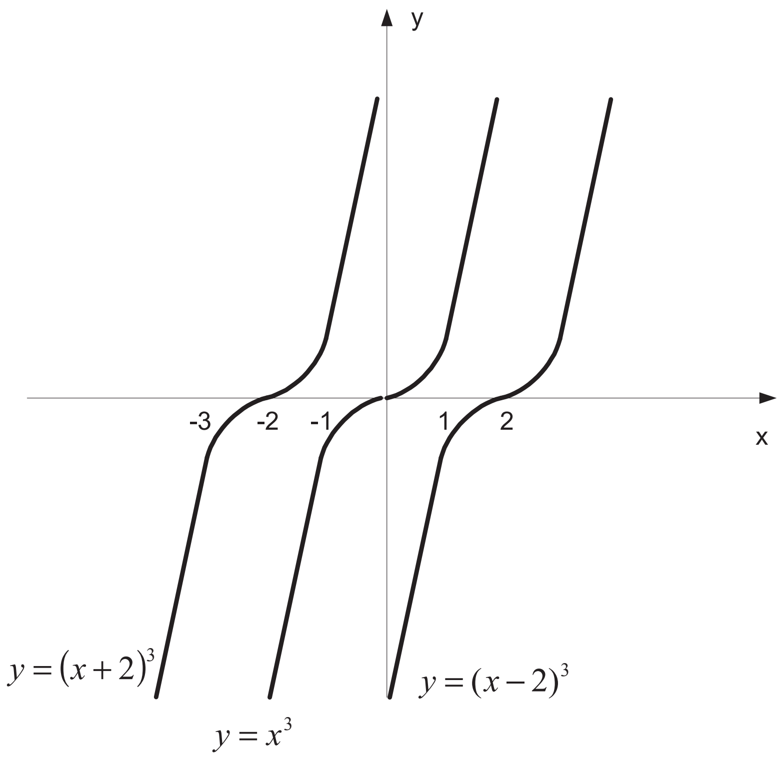


Рис.4.

уравнения. Для отыскания общего решения запишем данное уравнение так: $\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx$. В левой части равенства стоит дифференциал функции $y^{\frac{1}{3}}$, а в правой – дифференциал функции x, т.е. мы имеем:

$$dy^{\frac{1}{3}} = dx$$

откуда следует, что

$$y^{\frac{1}{3}} = x + c,$$

или так

$$y = (x+c)^3.$$

Эта функция является общим решением данного уравнения всюду на плоскости $x0y$, за исключением оси $0x$.

Однако, непосредственно видно, что подставив $y = 0$ в исходное уравнение, мы получим тождество. А это и означает, что $y = 0$ является решением данного уравнения, притом особым решением, т.к. оно не может быть получено из общего решения $y = (x+c)^3$ ни при каком значении постоянной c (рис.4).

§ 1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{1}$$

где функция $f_1(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале $(a;b)$, а функция $f_2(y)$ определена и имеет непрерывную производную на интервале $(c;d)$. Предположим, что функция $f_2(y)$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(c;d)$. Умножим обе части уравнения (1) на dx и разделим его на $f_2(y)$, тогда получим

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \tag{2}$$

Здесь в левой части равенства стоит дифференциал некоторой функции, зависящей только от y, а в правой части равенства – дифференциал функции, зависящей только от x.

После такого преобразования мы пришли к уравнению, которое называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*.

Из соотношения (2) с очевидностью следует равенство

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) + c, \tag{3}$$

которое представляет собою общий интеграл уравнения (1) в области D: $\{a < x < b; c < y < d\}$. Заметим, что положив $f_2(y) = 0$, мы получим в качестве решения функцию $y = y_0$, которая является решением исходного уравнения (1).

Отметим, что уравнение с разделяющимися переменными может быть задано в симметричной относительно x и y форме:

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0, \tag{4}$$

где функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ заданы и непрерывны соответственно в интервалах $(a;b)$ и $(c;d)$, причем функции $\varphi_1(y)$ и $f_2(x)$ не обращаются в нуль. Разделив уравнение (4) на произведение функций $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$, придем к уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0,$$

и, выполняя интегрирование, получим общий интеграл уравнения (4) в прямоугольнике $\{a<x<b; c<y<d\}$ в виде:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{y_2(y)}{y_1(y)}dy=c.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$$

Решение. Очевидно, что мы имеем уравнение с разделёнными переменными. Переходя к интегралам, получим:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Очевидно, что $\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{d\ln y}{\ln y}=\ln|\ln y|+c_1$.

Решим второй интеграл, для чего сделаем замену переменной:

$$tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=dt.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}tg\frac{x}{2}}=$$

$$\int\frac{dt}{t}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\ln c_2=\ln\left|c_2tg\frac{x}{2}\right|.$$

Окончательно получим общее решение данного уравнения:

$$y=e^{c\cdot tg\frac{x}{2}}.$$

Заметим, что разделяя переменные, здесь мы не потеряем и не приобретём лишних решений. Действительно, полагая $y \ln y = 0$, $\sin x = 0$, мы получим частное решение, содержащееся в семействе общего решения при конкретных значениях c.

§ 1.3. Однородные уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (5)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ есть однородные функции одинаковой степени однородности.

Напомним, что функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией степени однородности m, где m - любое вещественное число, если для любого t имеет место равенство

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Например, функция $f(x, y) = x^2 + 2xy$ является однородной функцией второй степени однородности. Действительно:

$$f(xt, yt) = (tx)^2 + 2(tx)(ty) = t^2(x^2 + 2xy) = t^2 f(x, y),$$

т.е. $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$.

Уравнение вида (5) называется *однородным уравнением* первого порядка, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одинаковой степени однородности. Оно интегрируется с помощью подстановки:

$$y = x \cdot u(x),$$

где $u(x)$ - неизвестная функция.

В силу подстановки имеем:

$$dy = u(x)dx + xdu(x).$$

Тогда исходное уравнение приобретает вид:

$$M(x,xu)dx + N(x,xu)[udx + xdu] = 0.$$

Учитывая, что $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции степени m, запишем уравнение в виде:

$$x^m[M(1,u) + uN(1,u)]dx + x^{m+1}N(1,u)du = 0.$$

Получим уравнение с *разделяющимися* переменными. Сокращая на x и разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0.$$

Интегрируя, имеем:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = \ln|c|.$$

Откуда следует:

$$\ln|x| = \ln|c| - \int \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)}.$$

Обозначая:

$$-\int \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + UN(1,u)} = \psi(u),$$

можем выразить x:

$$x = ce^{\psi(x)}.$$

Заменяя здесь в силу исходной подстановки u на $\frac{y}{x}$, окончательно получим общий интеграл данного однородного уравнения:

$$x = ce^{\psi(\frac{y}{x})}$$

Пример: Проинтегрировать уравнение $(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$.

Решение: Очевидно, что это – однородное уравнение, так как коэффициенты при dx и dy есть однородные функции второй степени однородности. Подстановка $y = x \cdot u(x)$ дает нам:

$$dy = xdu + udx.$$

Уравнение приобретает вид:

$$x(1-u)du + udx = 0.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u}du = 0.$$

Откуда после интегрирования и потенцирования следует:

$$x \cdot u \cdot e^{-u} = c.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, окончательно получим общий интеграл:

$$y = c \cdot e^{\frac{y}{x}}.$$

§ 1.4 Линейные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x), \tag{1}$$

называется *линейным неоднородным* уравнением первого порядка. Здесь коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ предполагаются непрерывными в некоторой области (нетрудно заметить, что при таких предположениях выполнены условия теоремы существования и единственности решения для уравнения рассматриваемого типа).

Искомая функция $y(x)$ и её производная $\frac{dy}{dx}$ входят в уравнение в первой степени, т.е. *линейно*, чем и определяется название уравнения.

Рассмотрим два метода решения линейного уравнения первого порядка.

I. Будем искать решение линейного уравнения (1):

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=q(x)$$

в виде произведения двух функций $y=u(x)\cdot v(x)$. Ясно, что $\frac{dx}{dy}=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.

Подставим $y(x)$ и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), тогда получим:

$$u(x)\cdot\left[\frac{dv}{dx}+p(x)\cdot v(x)\right]+v(x)\cdot\frac{dy}{dx}=q(x)$$

Выберем функцию $v(x)$ такой, чтобы обратилась в ноль квадратная скобка, т.е. чтобы было:

$$\frac{dv}{dx}+p(x)\cdot v(x)=0.$$

Очевидно, что мы получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными для отыскания неизвестной функции $v(x)$. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v}=-p(x)\cdot dx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx+\ln|c_1|\Rightarrow$$

$$\ln|v|=\ln|c_1|-\int p(x)dx.$$

Ясно, что $v(x)\neq 0$. Поскольку мы положили равной нулю квадратную скобку, для определения функции $u(x)$ имеем уравнение:

$$v(x)\cdot\frac{du(x)}{dx}=q(x).$$

Откуда следует:

$$du(x) = \frac{q(x)}{v(x)}dx.$$

Подставляя сюда только что найденное значения $v(x)$:

$$du(x)\frac{q(x)}{c_1}\cdot e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$u(x) = \frac{1}{c_1}\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c_2.$$

Остаётся написать общее решение уравнения:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = \left[\frac{1}{c_1}\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c_2\right]\cdot c_1 e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c_2 c_1\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Обозначая $c_2\cdot c_1 = c$, окончательно получим:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Или так:

$$y = \exp(-\int p(x)dx)\cdot\int q(x)\cdot\exp(\int p(x)dx)dx + c\cdot\exp(-\int p(x)dx)$$

Заметим, что мы пришли бы к точно такому же результату, если бы при отыскании функции $v(x)$ положили бы постоянную интегрирования $c_1 = 1$, т.е. $\ln|c_1| = 0$. Мы имеем право это сделать, так как нам нужна какая-нибудь одна функция $v(x)$, а не их семейство.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{2y}{x+1} = x+1$ и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(0,1)$.

Решение. Обратим внимание на то, что нам предложено решить задачу Коши для данного линейного уравнения, т.е. из семейства общего решения мы должны выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y|_{x=0}=1$.

Отметим кроме того, что $x \neq -1$.

Итак, будем искать общее решение данного линейного уравнения в виде:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

Подставляя эту конструкцию в исходное уравнение, получим:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} = x+1 \Rightarrow u'v + u\left[v' - \frac{2v}{x+1}\right] = x+1.$$

Приравняем к нулю квадратную скобку, имеем:

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0.$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, разделяя которые, получим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow$$

$$\ln|v| = \ln|c| + 2\ln|x+1|.$$

Положим $c=1$, тогда $v=(x+1)^2$. Для нахождения $u(x)$ имеем: $u' \cdot (x+1)^2 = (x+1)$. Откуда следует:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int du(x) = \int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow$$

$$u(x) = \ln|x+1| + \ln|c| \Rightarrow u(x) = \ln|c(x+1)|.$$

Окончательно имеем: $y(x) = u(x) \cdot v(x) = (x+1)^2 \cdot \ln|c(x+1)|$, т.е. $y = (x+1)^2 \cdot \ln|c(x+1)|$.

Положим теперь здесь $x = 0, y = 1$, тогда для отыскания c имеем уравнение: $1 = \ln c \Rightarrow c = e$, т.е. частное решение, удовлетворяющее условию $y =|_{x=0} = 1$ имеет вид:

$$y = (x+1)^2 \cdot [1 + \ln(x+1)].$$

График этой функции и будет представлять искомую интегральную кривую.

II. Рассмотрим теперь *второй метод* интегрирования линейного уравнения:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x), \tag{1}$$

который называется *методом вариации произвольной постоянной* (или *методом вариации произвольной постоянной Лагранжа*)

Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$y' + p(x) \cdot y = 0, \tag{2}$$

которое называется линейным однородным уравнением, соответствующим данному линейному уравнению. Очевидно, что оно легко интегрируется, так как представляет собою уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Итак, разделяя переменные в уравнении (2), получим:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Для отыскания общего решения данного линейного неоднородного уравнения (1), воспользуемся найденным общим решением линейного уравнения и будем искать общее решения уравнения (1) в виде:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}, \tag{3}$$

где $c(x)$ - некоторая функция, подлежащая определению. (При этом говорят: «Провариируем произвольную постоянную c»). Итак, дифференцируя (3), получим:

$$y'(x) = c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x). \qquad (4)$$

Подставим правые части соотношений (3) и (4) в исходное уравнение (1):

$$c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) +$$

$$p(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow c'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Откуда следует:

$$c(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c.$$

Подставляя найденное значение $c(x)$ в формулу (3), окончательно получим общее решение линейного уравнения (1):

$$y = \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right] \cdot e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Нетрудно заметить, что в предыдущем случае I мы получили точно такой же результат.

Остаётся только решённый первым способом пример решить методом вариации произвольной постоянной.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{2y}{x+1} = x + 1$.

Решение. Напишем соответствующее линейное однородное уравнение:

$$y' - \frac{2y}{x+1} = 0$$

и проинтегрируем его, разделив переменные:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|c| + 2\ln|x+1| \Rightarrow y = c\cdot(x+1)^2 .$$

Провариируем теперь произвольную постоянную, т.е. будем искать общее решение исходного линейного уравнения в виде: $y = c(x)\cdot(x+1)^2$. Получим: $y' = c'(x)\cdot(x+1)^2 + c(x)\cdot 2(x+1)$.

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$$y' = c'(x)\cdot(x+1)^2 + c(x)\cdot 2(x+1) - \frac{2\cdot c(x)\cdot(x+1)^2}{x+1} = x+1 \Rightarrow$$

$$c'(x)\cdot(x+1)^2 = x+1 \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$c(x) = \int \frac{dx}{x+1} = \ln c + \ln|x+1| = \ln|c\cdot(x+1)|.$$

Итак, $y(x) = (x+1)^2 \cdot \ln|c\cdot(x+1)|$, что совпадает с полученным выше результатом.

§ 1.5 Уравнение Бернулли.

К линейному уравнению легко приводится уравнение Бернулли:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n \tag{1}$$

Здесь $p(x)$ и $q(x)$ - заданные функции от x, а n - некоторое постоянное число. Будем полагать, что $n \neq 0$ и $n \neq 1$, т.к. при $n = 0$ мы получаем рассмотренное линейное уравнение, а при $n = 1$ имеем уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения (1) на y^n, получим:

$$y^{-n}\cdot y' + p(x)\cdot q^{-n+1} = q(x) \tag{2}$$

Введём новую функцию z, положив $z = y^{-n+1}$, тогда будет $z' = (-n+1) \cdot y^{-n} \cdot y'$, откуда $y^{-n} \cdot y' = \dfrac{z'}{-n+1}$.

Подставляя все это в уравнение (2), имеем:

$$\frac{1}{-n+1} z' + p(x) \cdot z = q(x).$$

Умножая данное выражение на $(-n+1)$, получаем линейное уравнение:

$$z' + (-n+1) \cdot p(x) \cdot z = (-n+1) \cdot q(x).$$

Решив это уравнение, найдем z как функцию x и c. Заменив z на y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Пример. Проинтегрировать уравнение $y' - \dfrac{4}{x} y = x\sqrt{y}$.

Решение. Очевидно, что нам дано уравнение Бернулли: $n = \dfrac{1}{2}$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} y' - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

Сделаем замену переменной $z = \sqrt{y}$, тогда будет:

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'; \; \frac{1}{\sqrt{y}} y' = 2z'.$$

Данное уравнение приобретает вид:

$$2z' - \frac{4}{x} z = x$$

или

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}.$$

Делаем подстановку $z = u(x) \cdot v(x)$, $z' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, тогда имеем:

$$u'v + (v' - \frac{2}{x}v)u = \frac{x}{2}$$

Подбираем $v(x)$ таким образом, чтобы было:

$$v' - \frac{2}{x}v = 0.$$

Разделяя здесь переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln v = 2\ln x \Rightarrow v(x) = x^2.$$

Тогда уравнение принимает вид $u'v = \frac{x}{2}$ или $u'x^2 = \frac{x}{2}$, откуда имеем: $u' = \frac{1}{2x} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}\ln x + c$. Таким образом, будет:

$$z = u \cdot v = \left(\frac{1}{2}\ln x + c\right) \cdot x^2.$$

Заменяя здесь z на $\sqrt{y}$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения Бернулли:

$$\sqrt{y} = \left(\frac{1}{2}\ln x + c\right) \cdot x^2$$

Замечание. Заметим, что дифференциальное уравнение Бернулли можно, не приводя к линейному уравнению, интегрировать подстановкой $y = u(x) \cdot v(x)$

§ 1.6 Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

и такое, что левая часть этого уравнения является полным дифференциалом некоторой функции двух аргументов $\Phi(x,y)$, т.е. если:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = d\Phi(x,y) \tag{2}$$

Это, как известно, при непрерывных функциях $P(x,y)$ и $Q(x,y)$; $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \tag{3}$$

Напомним, что условие (3) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла:

$$\int\limits_{AM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{4}$$

от пути интегрирования, а функция $\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

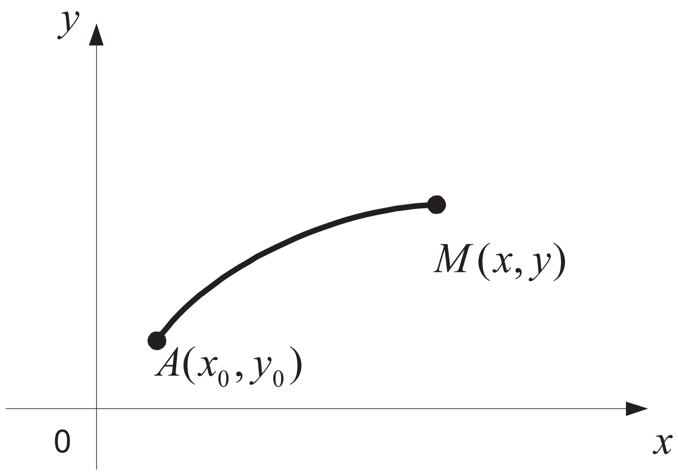


Рис.5.

как раз и является той самой функцией $\Phi(x,y)$, для которой выполняется условие (3). Таким образом, для нахождения функции $\Phi(x,y)$ достаточно взять криволинейный интеграл $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по любой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x,y), лишь бы только на этой кривой не нарушались правила теоремы существования интеграла (4).

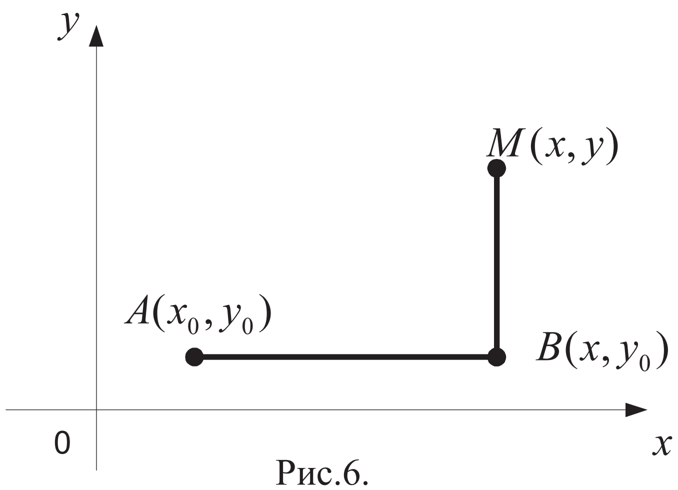


Рис.6.

Удобно в качестве кривой AM брать ломаную линию, состоящую из отрезков, параллельных координатным осям $0x$ и $0y$ (рис.6).

Найдя таким образом функцию $\Phi(x, y)$, остается написать общий интеграл уравнения (1), приравняв найденную функцию $\Phi(x, y)$ к постоянной c: $\Phi(x, y) = c$.

Пример. Доказать, что дифференциальное уравнение $2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах. Найти его общий интеграл и найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(1,1)$.

Решение. Обозначим $P(x, y) = 2xy^3$, $Q(x, y) = 3x^2y^2$. Найдем $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2$. Видим, что $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = d\Phi(x, y)$$

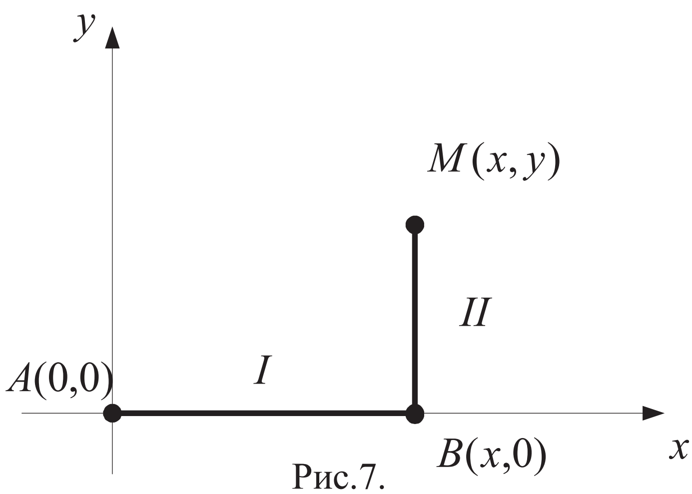


Рис.7.

А функцию $\Phi(x, y)$ можно найти, вычислив криволинейный интеграл по контуру $AIBIIM$ (нетрудно убедиться, что на этой кривой не нарушаются условие существования криволинейного интеграла) Действительно: $\Phi(x,y)=\int\limits_{AIBIIM}2xy^3dx+3x^2y^2dy=$

$$=\int\limits_{AIB}2xy^3dx+3x^2y^2dy+\int\limits_{BIIM}2xy^3dx+3x^2y^2dy=$$

на $AIB:\ \begin{matrix} y=0, dy=0 \\ x\in[0,x], dx=dx \end{matrix}$ на $BIIM:\ \begin{matrix} x=const, dx=0 \\ y\in[0,y], dy=dy \end{matrix}$

$=\int\limits_o^y 3x^2y^2dy=x^2y^3$. Таким образом $\Phi(x,y)=x^2y^3$, т.е. $x^2y^3=c$ - общий интеграл данного уравнения.

Учтём далее, что $y|_{x=1}=1$, получим $1^2\cdot1^3=c_0\Rightarrow c_0=1$. Имеем $x^2y^3=1$, откуда следует, что интегральная кривая проходит через точку $M_0(1,1)$: $y=x^{-\frac{2}{3}}$.

§ 1.7 О составлении дифференциальных уравнений первого порядка.

Мы рассмотрели способы интегрирования основных типов дифференциальных уравнений первого порядка. Посвятим теперь своё внимание некоторым приложениям дифференциальных уравнений, где по условиям задачи сначала нужно составить уравнение, а потом уже его проинтегрировать. Для инженера особенно интересны и важны приложения дифференциальных уравнений к различным техническим задачам. В приложениях дифференциальные уравнения встречаются очень часто, потому что во многих случаях проще и естественнее установить соотношение между бесконечно малыми элементами интересующих нас величин (что приводит к дифференциальному уравнению), а потом уже, на основании этих соотношений, искать зависимость между самими величинами. Однако установить эту зависимость между переменными непосредственно часто оказывается невозможно, так как эта зависимость может быть и очень сложной. В таких случаях мы рассматриваем явление, как говорят «в бесконечно малом». А именно: даем аргументу (времени, температуре, давлению и т.п.) бесконечно-малое приращение, получаем бесконечно-малое приращение функции и устанавливаем соотношение между этими приращениями.

При установлении такого соотношения (зависимости) между бесконечно-малыми приращениями, следует пользоваться всевозможными упрощающими допущениями и приближёнными заменами, сводящимися к тому, что мы пренебрегаем бесконечно-малыми высших порядков (неравномерное движение в течение бесконечно-малого промежутка времени принимаем за равномерное, элементарную дугу заменяем стягивающей её хордой и т.п.). В частности все бесконечно-малые приращения рассматриваемых величин всегда заменяем на дифференциалы, что, как мы знаем, сводится к отбрасыванию бесконечно-малых высших порядков.

Важно отметить, что получающееся в результате этих упрощений уравнение вида:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

будет не приближенным, а точным. В самом деле, если бы мы не отбрасывали бесконечно-малые и не заменяли бы приращений переменных их дифференциалами, то получили бы уравнение вида:

$$P(x,y)\Delta x + Q(x,y)\Delta y = \alpha,$$

еде α - означает сумму всех бесконечно-малых высшего порядка, чем Δx.

Разделим последнее равенство на Δx:

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\Delta x}$$

и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$; т.к. $\frac{\alpha}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, то в пределе получаем равенство $P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$, т.е. оказывается, это уравнение – точное.

Итак, для составления дифференциального уравнения изучаемого явления (процесса) приходится рассматривать бесконечно-малые элементы интересующих нас в явлении величин и устанавливать зависимость между этими элементами.

Иногда этого удаётся избежать. Это бывает в тех случаях, когда мы пользуемся уже готовыми понятиями о скорости изменения величины или выведенным ранее физическим закономерностям.

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, таким образом, удаётся промоделировать, т.е. представить в виде некоторой математической модели, многие динамические процессы, происходящие в окружающем нас мире. Сам смысл производной, дифференциала, даёт нам повод утверждать, что получающаяся при этом модель описывает изменение (прохождение) реального процесса во времени. Отсюда можно сделать вывод, что аппарат дифференциальных уравнений – одно из самых сильных и эффективных средств описания физических (а также механических, химических, биологических и т.п.) явлений в их естественном развитии. Без таких моделей немыслимо исследование природных закономерностей, с учётом разного рода присущих им характеристик и параметров.

Без теории дифференциальных уравнений человек никогда бы не проник в тайны ядерной физики, генной инженерии, не вывел бы в космос летательные аппараты.

Важно заметить, что дифференциальное уравнение – это некая абстрактная модель реального процесса. От того, насколько точно исследователь учёл все самые важные особенности процесса, который он смоделировал, составляя уравнение, зависит, насколько адекватно (тождественно полно) данное уравнение и его решение описывает физический процесс.

Заметим, что далеко не всегда удаётся найти решение получившегося дифференциального уравнения в квадратурах, что привело к необходимости разрабатывать *приближённые методы* интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выше сказанное даёт основание считать, что дифференциальные уравнения и их приложения – один из самых важных и современных разделов математики.

Рассмотрим несколько примеров составления и интегрирования дифференциальных уравнений реальных физических явлений.

Задача 1. В тёплый ясный день, при обходе заповедника, два егеря в 13ч. 30 мин. обнаружили на куче сухого хвороста тушу убитого дикого кабана. Осмотр туши показал, что выстрел браконьера был точным и кабан был убит наповал. Температура туши кабана была равна $31^0 C$ (нормальная температура кабана $37^0 C$). Температура воздуха в момент обнаружения была равна $21^0 C$. Понимая, что браконьер вернётся за добычей, они укрылись недалеко от туши кабана. В 14 часов к убитому животному подошли два человека. Они отрицали свою причастность к браконьерству. Для доказательства их виновности нужно было уточнить время, когда был убит кабан, учитывая, что в 14 час. 30 мин. температура туши кабана была равна $29^0 C$.

Решение. Ньютон установил закон: скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды (воздуха), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - T),$$

где x - температура тела в момент времени t; T - температура воздуха; k - положительный коэффициент. В 14 часов и в 14 час. 30 мин. температура воздуха T по-прежнему равнялась $21^0 C$. Записав данное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными в виде:

$$\frac{dx}{x-T} = -kdt,$$

и выполнив интегрирование, получим $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-T} = -k\int\limits_{t_0}^{t} dt$, откуда следует:

$$\ln\frac{x-T}{x_0 - T} = -k(t - t_0),$$

где t_0 - начальный момент времени, а $x_0 = x(t_0)$. Отсюда вытекает:

$$k = \frac{1}{t - t_0}\ln\frac{x_0 - T}{x - T}. \qquad (*)$$

Используя имеющиеся данные на промежутке от 13,5 час до 14,5 час, найдём сначала значение k:

$$k = \frac{1}{14{,}5 - 13{,}5}\ln\frac{31-21}{29-21} = \ln 1{,}25 = 0{,}22314$$

Разрешив уравнение (*) относительно $t - t_0$ и рассматривая его на промежутке от момента выстрела t до $13{,}5$ часов, будем иметь:

$$t - 13{,}5 = \frac{1}{0{,}22314}\ln\frac{37-21}{31-21} = -\frac{1}{0{,}22314}\ln 1{,}6 = -2{,}1063.$$

Значит, между моментом выстрела и моментом обнаружения егерями кабана прошло 2ч 6мин., а сам выстрел был произведён в 11 часов 24 мин.

Задача 2. Распад радия.

Закон распада радия заключается в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Дать зависимость количества радия от времени, зная, что через 1600 лет останется половина начального количества радия.

Решение. Пусть в момент времени t количество радия равно R. Скорость распада равна $\frac{dR}{dt}$ и закон распада радия запишется в виде:

$$\frac{dR}{dt} = -kR,$$

где k - коэффициент пропорциональности. Заметим, что знак минус в правой части мы взяли потому, что количество радия R будет убывать со временем и, значит, его производная по времени будет отрицательной. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dR}{R} = -kdt \Rightarrow \ln R = -kt + \ln c \Rightarrow R = c \cdot e^{-kt}.$$

Если в начальный момент $t = 0$ наличное количество радия R_0, то по этому условию мы определим постоянную c:

$$R_0 = c_0 e^0 \Rightarrow c_0 = R_0,$$

а тогда имеем:

$$R = R_0 e^{-kt} \qquad (*)$$

По условию задачи известно, что через 1600 лет остаётся только половина начального количества радия. Это позволяет определить коэффициент пропорциональности k. Полагая в последнем соотношении $t = 1600$ и $R = \frac{R_0}{2}$, получаем $\frac{R_0}{2} = R_0 \cdot e^{-1600k} \Rightarrow e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$.

Подставляя это значение в (*), мы получаем окончательно зависимость количества радия от времени:

$$R = R_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}.$$

Задача 3. Основное уравнение вентиляции.

Допустим, что в рабочем помещении объёма V куб.м. происходят вредные выделения (газовые, тепловые, пылевые и т.п.) в количестве A единиц в час. И пусть для борьбы с этими вредными выделениями устроена вентиляция, дающая обмен воздуха в количестве M куб.м. в час. При этом приточный воздух также может содержать вредную примесь в концентрации a.

Возникает вопрос: какой будет величина концентрации x (на 1 куб.м.) рассматриваемой вредности в рабочем помещении через t часов после начала работы если в начале работы (при $t = 0$) её значение было x_0.

Решение. Пусть в момент времени t концентрация вредной примеси равна x. Установим приращение вредных примесей за малый промежуток времени Δt. Концентрация увеличивается на Δx, общее же количество вредности на $V \cdot \Delta x$. Это приращение складывается следующим образом. Технологические процессы создали $A \cdot \Delta t$ единиц вредности. Приточный воздух принёс с собой $a \cdot M \cdot \Delta t$ единиц. Отсюда нужно отнять то количество вредных выделений, которое ушло из помещения вместе с извлечённым из него воздухом. Пренебрегая изменением концентрации x за бесконечно малый промежуток времени Δt, можно это количество считать равным $x \cdot M \cdot \Delta t$.

Итак, имеем:

$$V \cdot \Delta x = A \cdot \Delta t + a \cdot M \cdot \Delta t - x \cdot M \cdot \Delta t .$$

Это и есть основное уравнение вентиляции. Принимая во внимание, что приращение независимой переменной совпадает с её дифференциалом, получим, отделяя переменные:

$$\frac{-Mdx}{A + aM - xM} = -\frac{M}{V} dt .$$

Интегрируя, имеем:

$$\ln(aM + A - xM) = -\frac{M}{V}t + \ln c,$$

или, потенцируя:

$$aM + A - xM = c \cdot e^{\frac{-M}{V}t}.$$

Полагая $x = x_0$ при $t = 0$, получим:

$$C = aM + A - x_0 M,$$

и, значит

$$\frac{aM + A - xM}{aM + A - x_0 M} = e^{-\frac{M}{V}t}.$$

Отсюда

$$x = \left(a + \frac{A}{M}\right)\left(1 - e^{-\frac{M}{V}t}\right) + x_0 e^{-\frac{M}{V}t}.$$

Глава 2.
Дифференциальные уравнения высших порядков.

§ 2.1. Основные понятия.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка $F(x, y(x), y'(x),...., y^{(n)}(x)) = 0$.

Напомним, что порядок уравнения определяется порядком входящей в него старшей производной искомой функции.

Всякая функция $y = \varphi(x)$, определённая и дифференцируемая n раз в интервале $(a;b)$, называется *решением* данного уравнения в этом интервале, если она обращает данное уравнение в тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x),...., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

справедливое $\forall x \in (a;b)$.

Остановимся на понятии *задачи Коши* для рассматриваемого уравнения. Под задачей Коши понимают задачу отыскания среди всех решений данного уравнения такого решения $y = y(x)$, которое вместе со всеми производными до $(n-1)$-го порядка включительно принимает заданные значения в точке x_0, т.е. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0,\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0{}^{(n-1)}$, где x_0, $y'_0,\ldots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа.

Допустим, что уравнение $F(x, y(x), y'(x),...., y^{(n)}(x)) = 0$ можно разрешить относительно старшей производной, т.е. записать в виде:

$$y^{(n)} = f[x, y(x), y'(x),... y^{(n-1)}(x)].$$

В этом случае говорят, что дифференциальное уравнение записано в *нормальной форме Коши*.

Приведём без доказательства в упрощённой формулировке теорему *(теорему Пикара) существования и единственности решения задачи Коши* для дифференциального уравнения n-го порядка, разрешённого относительно старшей производной.

Теорема (теорема Пикара).

Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ функция $f = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ и её частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в области D: $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$, $|y' - y'_0| \le b, \ldots,$ $\left|y^n - y_0^{(n-1)}\right| \le b$, где a и b - заданные положительные числа, и поставлены начальные условия: $y = y_0$, $y' = y'_0, y'' = y''_0, \ldots,$ $y^{(n-1)} = {y_0}^{(n-1)}$ при $x = x_0$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., {y_0}^{(n-1)}) \in D$ существует такой интервал $(x_0 - h; x_0 + h)$, $h > 0$, на котором существует, и притом единственное, решение этого уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

(Без доказательства)

Замечание. Заметим, что если правая часть уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ... y^{(n-1)})$, есть некоторый многочлен от своих аргументов, то какие бы начальные условия мы не взяли, существует единственное решение этого уравнения с такими начальными условиями.

Введём теперь понятие *общего решения* уравнения n-го порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} = f[x, y(x), y'(x), ... y^{(n-1)}(x)]$ называется функция $y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, где $c_1, c_2, ..., c_n$ - произвольные постоянные, такая что:

1) она удовлетворяет уравнению при любых значения постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$;

2) при заданных начальных условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$ определяются таким образом, что функция $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

При этом предполагается, что $(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)}) \in D$, т.е. принадлежат области, где выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Соотношение $\Phi(x, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$, определяющее общее решение неявно, называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.

Всякое решение, получающееся из общего решения при конкретных значения произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$, называется *частным решением*.

График частного решения называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

Решение данного уравнения, не содержащееся в семействе его общего решения, называется *особым решением*.

Остановимся теперь на понятии *граничной (краевой) задачи*.

Сформулированная выше задача Коши – лишь одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений, в которой ищется решение, подчинённое некоторым условиям. Другой не менее важный тип таких задач представляет собою так называемые *граничные* или *краевые* задачи, в которых условия, налагаемые на искомые решения, задаются не в одной точке, как это имеет место в задаче Коши, а на концах некоторого промежутка $[a;b]$, и ищется решение, определённое внутри этого промежутка. Граничные задачи могут ставиться лишь для уравнений порядка выше первого. В самом деле, в случае уравнения первого порядка задание начального условия в точке уже определяет интегральную кривую единственным образом. Заметим, что граничная задача не всегда имеет решение, а если имеет, то весьма часто не единственное.

Пример. Найти решение уравнения $y'' = 6x$, удовлетворяющее граничным условиям: $y(1) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Интегрируя последовательно данное уравнение, получим $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Подставим теперь сюда граничные условия, получим:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 1 &= 1 + c_1 + c_2 \end{aligned}\right\},$$

откуда следует $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Следовательно, искомое решение: $y = x^3$.

Заметим, что дифференциальные уравнения порядка выше первого, моделирующие те или иные физические процессы, как правило, не интегрируются в квадратурах. Однако, можно указать широкий класс дифференциальных уравнений, проинтегрировать которые не представляет больших затруднений – это линейные однородные и линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Кроме того, выделим класс дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, а тем самым весьма часто интегрируемых в квадратурах.

§ 2.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим несколько типов уравнений, допускающих понижение порядка.

2.2.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Очевидно, что положив $y^{(n-1)}(x) = y_1(x)$, мы получим уравнение первого порядка, которое легко интегрируется:

$$y_1'(x) = f(x) \Rightarrow y_1(x) = \int f(x)dx + c_1 \text{, т.е.}$$

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)dx + c_1 .$$

Аналогично:

$$y^{(n-2)}(x) = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1 x + c_2 \text{ и т.д.}$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \sin x$.

Решение. Обозначим $y''(x) = y_1(x)$, тогда $y_1'(x) = \sin x \Rightarrow$ $y_1(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c_1$; т.е. $y''(x) = -\cos x + c_1$.

Аналогично обозначим $y'(x) = y_2(x)$, будет $y_2'(x) = -\cos x + c_1 \Rightarrow y_2(x) = \int(-\cos x + c_1)dx = -\sin x + c_1 x + c_2$.

И наконец, имеем $y'(x) = -\sin x + c_1 x + c_2$, откуда следует:

$$y(x) = \int(-\sin x + c_1 x + c_2)dx =$$

$$= \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

***Ответ*:** общее решение данного дифференциального уравнения

$$y = \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

2.2.2. Уравнения вида $F\left(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$.

Данное уравнение не содержит явно искомой функции $y(x)$ и её первых $k-1$ производных. Порядок уравнения можно понизить, введя новую неизвестную функцию $z(x)$, положив $y^{(k)}(x) = z(x)$. Тогда исходное уравнение приобретает вид:

$$F(x,z,z',z'',...,z^{(n-k)})=0$$

Пример. Найти общее решение уравнения $4y'+y''=1-4xy''$.

Решение. Положим $y'=z(x)$, тогда $y''=z'$. Данное уравнение будет выглядеть так: $4z+z'=1-4xz' \Rightarrow z'+\frac{4}{1+4x}z=\frac{1}{1+4x}$.

Очевидно, что это линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решим его.

1. Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее данному линейному:

$$z'+\frac{4}{1+4x}z=0$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{z}+\frac{4dx}{1+4x}=0.$$

Имеем:

$$\int\frac{dz}{z}+\int\frac{4dx}{1+4x}=\ln c \Rightarrow \ln|z|+\ln|1+4x|=\ln c \Rightarrow$$

$$\ln|z(1+4x)|=\ln c \Rightarrow z=\frac{c}{1+4x}$$

Получим общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному линейному. Провариируем теперь произвольную постоянную.

2. Будем искать общее решение исходного уравнения

$$z'+\frac{4}{1+4x}z=\frac{1}{1+4x} \qquad (*)$$

в виде:

$$z=\frac{c(x)}{1+4x}. \qquad (**)$$

Отсюда:

$$z' = \frac{c'(x)\cdot(1+4x) - c(x)\cdot 4}{(1+4x)^2}.$$

Подставляя $z(x)$, $z'(x)$ в исходное уравнение (*):

$$\frac{c'(x)}{1+4x} - \frac{4c(x)}{(1+4x)^2} + \frac{4}{(1+4x)}\cdot\frac{c(x)}{(1+4x)} = \frac{1}{1+4x} \Rightarrow$$

$$c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x + c_1.$$

Остается подставить найденное значение $c(x)$ в соотношение (**)

$$z = \frac{x+c_1}{1+4x},$$

и вернуться к исходной переменной:

$$y' = \frac{x+c}{1+4x} \Rightarrow y(x) = \int \frac{x+c_1}{1+4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+4c_1+1-1}{1+4x}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{4x+1}{4x+1}dx + (4c_1-1)\int \frac{dx}{4x+1}\right] \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{4}x + \frac{\ln(1+4x)}{16}(4c_1-1) + c_2$$

2.2.3. Уравнения вида $F\left(y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Это уравнение не содержит явно независимой переменой x. Введём новую переменную, зависящую от y: $z(y) = y'$. Тогда будет:

$$y'' = \frac{d}{dx}z(y) = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'\cdot z; \qquad y''' = z\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2\cdot\frac{d^2z}{dy^2} \quad \text{и т.д.}$$

Очевидно, что такая замена позволяет понизить порядок исходного дифференциального уравнения на единицу.

Пример. Найти общее решение уравнения $(1+y^2)\cdot y\cdot y'' = (3y^2-1)y'^2$.

Решение. Полагаем $y' = z \cdot \dfrac{dz}{dy}$. Уравнение принимает вид: $\left(1+y^2\right) \cdot y \cdot z\dfrac{dz}{dy} = \left(3y^2-1\right)z^2$. Сократив на z (при этом следует учесть, что мы теряем решение $z=0$ или $y=e$), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\left(1+y^2\right) \cdot y \cdot \frac{dz}{dy} = \left(3y^2-1\right) \cdot z.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2-1}{\left(1+y^2\right) \cdot y} dy.$$

Интегрируя, найдем:

$$\ln|z| = 2\ln\left(1+y^2\right) - \ln|y| + \ln|c_1|$$

или

$$\frac{y \cdot z}{\left(1+y^2\right)^2} = c_1.$$

Возвращаясь к функции y, получим:

$$\frac{y \cdot y'}{\left(1+y^2\right)^2} = c_1$$

Интегрируя еще раз, найдем ***общий интеграл*** исходного уравнения:

$$\frac{1}{1+y^2} = -2c_1x + c_2$$

2.2.4. Уравнения вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ - однородное относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Рассмотрим уравнение $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ и допустим, что $F\left(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}\right) = t^m\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$, $t \neq 0$, т.е. предположим, что данное уравнение – однородное относительно искомой функции $y(x)$ и её производных.

Введём новую неизвестную функцию:

$$z(x) = \frac{y'}{y}$$

Тогда будет:

$$y' = yz;\ y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z');$$
$$y''' = y(z^3 + 3zz' + z''),\ldots \text{ и т.д.}$$

Таким образом, понижаем порядок исходного уравнения на единицу.

Пример. Найти общее решение уравнения $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

Решение. Полагая $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$, получим:

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^3z = 0.$$

Сокращая на y^2 (следует учесть решение $y = 0$!), получаем:

$$xz' - z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Откуда имеем:

$$z = c_1 x.$$

Переходя к функции y, получим $y' = c_1 xy \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = c_1 xdx$, откуда следует:

$$\ln|y| = \frac{c_1 x^2}{2} + \ln|c_2|.$$

Или после преобразований получим такое общее решение:

$$y = c_2 e^{C_1 \frac{x^2}{2}}.$$

Заметим, что решение $y=0$ является частным и получается из общего при $c_2=0$.

Замечание. Допустим, что левая часть уравнения $F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$ представляет собою производную от некоторой функции $\Phi\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right)$, т.е.

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=\frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right).$$

Тогда очевидно, что будет иметь место соотношение $\Phi\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right)=c$, которое называется первым интегралом данного дифференциального уравнения. Заметим, что в теории устойчивости движения встречаются задачи, когда бывает необходимо найти первый интеграл данного дифференциального уравнение. Кроме того, отметим, что $\Phi\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right)=c_1$ есть ни что иное, как уравнение, порядок которого не единицу меньше порядка исходного дифференциального уравнения, т.е. если удаётся найти первый интеграл данного дифференциального уравнения, то фактически мы тем самым получаем возможность понизить его порядок.

Пример. Найти частное решение уравнения (решить задачу Коши)

$$y''=xy'+y+1,\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=0.$$

Решение. Заметим, что $(xy)'=y+xy'$, а тогда данное уравнение мы можем записать так:

$$(y')'=(xy)'+x' \Leftrightarrow (y'-xy-x)'=0,$$

и мы получаем ни что иное, как первый интеграл данного уравнения $y'-xy-x=c$, понизив тем самым порядок исходного дифференциального уравнения.

Принимая во внимание начальные условия, без труда выясняем, что здесь $c=0$. Итак, осталось проинтегрировать линейное уравнение первого порядка:

$$y' - xy = x \tag{*}$$

1. Линейное однородное уравнение, соответствующее данному линейному уравнению: $y' - xy = 0$. Разделяя переменные и интегрируя получим $y = c_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

2. Вариируя произвольную постоянную будем искать общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подставляя это выражения в уравнение (*), получим:

$$c_1'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x - x \cdot c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x,$$

откуда следует $c'(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow c_1(x) = \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + \bar{c}$.

Итак, получим $y = \bar{c} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

Заметим, что существуют и другие случаи, когда удаётся выделить некую комбинацию (подстановку), в результате чего удаётся понизить порядок дифференциального уравнения.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.

Решение. Запишем данное уравнение так:

$$x[yy'' + (y')^2] = 3yy'.$$

Очевидно, что в квадратной скобке стоит производная произведения yy'.

Действительно $(y \cdot y')'_x = y'^2 + yy''$.

Можно сделать замену $y \cdot y' = t(x)$, тогда будет: $t'(x) = y'^2 + yy''$. И наше уравнение допускает понижение порядка:

$$x \cdot \frac{dt}{dx} = 3t(x) \Rightarrow \frac{dt}{t} = 3\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|c_1 t(x)| = \ln|x^3| \Rightarrow c_1 t(x) = x^3 \Rightarrow$$

$$c_1 yy' = x^3 \Rightarrow c_1 y\frac{dy}{dx} = x^3 \Rightarrow$$

$$c_1 ydy = x^3 dx \Rightarrow c_1 \frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + c_2.$$

Преобразовывая произвольные постоянные, получим ***общий интеграл*** данного дифференциального уравнения:

$$x^4 + c_1 y^2 + c_2 = 0.$$

Глава 3.
Линейные уравнения n-го порядка.

§ 3.1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n*-го порядка с переменными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида:*

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}(x)+...+p_n(x)y(x)=f(x), \quad (1)$$

где $p_1(x), p_2(x),...., p_n(x)$ - коэффициенты дифференциального уравнения – в общем случае представляют собою некоторые функции. Если $p_1(x)=a_1, p_2(x)=a_2,..., p_n(x)=a_n$, где $a_1, a_2,...., a_n$ - числа, то говорят, что уравнение (1) – *есть линейное уравнение* n*-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Заметим, что уравнение (1) называется *линейным*, т.к. искомая функция $y(x)$ и её производные $y'(x), y''(x),...., y^n(x)$ входят в уравнение в первой степени в качестве слагаемых (т.е. линейно). Так как порядок старшей производной равен n, то ясно, что и порядок уравнения равен n. Функция $f(x)$ называется правой частью уравнения (1).

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (1) называется *линейным однородным* уравнением n-го порядка, в противном случае оно называется *линейным неоднородным*.

Заметим, что класс уравнений вида (1) довольно широко распространён, однако, если коэффициенты $p_i(x)$ есть некоторые функции, то уравнение (1) интегрируется в квадратурах лишь для случая, когда $n=1$ т.е. мы имеем рассмотренное выше линейное уравнение первого порядка $y'+p(x)\cdot y=q(x)$.

При $n\geq 2$ уравнение (1), вообще говоря, не интегрируется в квадратурах.

Если коэффициенты уравнения постоянны, то уравнение вида (1) может быть проинтегрировано довольно просто; далее мы рассмотрим вопрос об интегрировании таких уравнений подробно.

Отметим, наконец, что теорема *существования и единственности* решения для линейных уравнений n-го порядка сводится к требованию непрерывности коэффициентов $p_i(x)$, $(i=1,2,...,n)$ и его правой части $f(x)$, так условия приведённой выше теоремы *существования и единственности* решения дифференциального уравнения n-го порядка будут выполнены.

§ 3.2. Линейный дифференциальный оператор.

Для удобства записи (лаконичности) при работе с линейными уравнениями вводят в рассмотрение так называемый *линейный дифференциальный оператор*, который мы сейчас и рассмотрим. Вернемся к линейному уравнению вида:

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}(x)+...+p_n(x)y(x)=f(x), \quad (1)$$

Левая часть этого уравнения представляет собою результат $n-$кратного дифференцирования функции $y(x)$, умножение этих производных на коэффициенты $p_i(x)$, $(i=1,2,...,n)$ и сложение этих выражений, т.е. конечное число операций дифференцирования и алгебраических действий над функцией $y(x)$ и коэффициентами $p_1(x), p_2(x),...., p_n(x)$. Результат выполнения указанных операций называют *линейным дифференциальным оператором* и обозначают так:

$$L[\ ]=\frac{d^n}{dx^n}(\ )+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\ )+\ldots+p_n(x)(\ ).$$

Результат применения линейного дифференциального оператора к функции $y(x)$ даёт нам левую часть уравнения (1), т.е. будет:

$$L[y]=y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}(x)+\ldots+p_n(x)y\,.$$

Тогда очевидно, что *линейное неоднородное дифференциальное уравнение* с помощью линейного дифференциального оператора можно записать так:

$$L[y]=f(x),$$

а *линейное однородное дифференциальное уравнение* так:

$$L[y]=0$$

Очевидны следующие свойства линейного дифференциального оператора:

1. $L[c\cdot y(x)]=cL[y(x)]$.
2. $L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$.
3. $L[c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)+\ldots+c_n\cdot y_n(x)]=c_1L[y_1(x)]+$

$+c_2L[y_2(x)]+\ldots+c_nL[y_n(x)]$, где $c, c_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ - некие константы.

§ 3.3. Определитель Вронского и его свойства.

Рассмотрим функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, определённые на некотором интервале $(a;b)$, и пусть $c_1, c_2,\ldots, c_n$ - некоторые постоянные. Выражение $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ - называется линейной комбинацией функций $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ на интервале $(a;b)$.

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* на $(a;b)$, если линейная комбинация

$c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+....+c_n y_n(x)=0$ лишь при условии, что $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. В противном случае они называются *линейно зависимыми* на интервале $(a;b)$.

Очевидно, что если одна из функций, пусть, например, $y_1(x)\equiv 0$ в интервале $(a;b)$, то функции $y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)$ линейно зависимы в интервале $(a;b)$. Действительно, при любом $c_1 \neq 0$ и при $c_2 = ... = c_n = 0$ будет иметь место соотношение:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n = 0$$

Пример. Функции $y_1(x)=e^x$ и $y_2(x)=e^{-x}$ линейно независимы на любом интервале $(a;b)$. Действительно, соотношение $c_1 e^x + c_2 e^{-x} \equiv 0$, где c_1 и c_2 отличны от нуля, невыполнимо для всех $x \in (a;b)$. Оно может быть выполнено не более, чем в одной точке.

Очевидно, что если функции $y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)$ линейно независимы на интервале $(a;b)$, то ни одну из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Предположим, что функции $y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно на некотором интервале $(a;b)$ и рассмотрим определитель:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & .. \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Этот определитель называют *определителем Вронского* для функций $y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)$ или *вронскианом* этих функций.

Теорема 1. Если функции $y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)$ линейно зависимы в интервале $(a;b)$, то их вронскиан $W(x) \equiv 0$ в этом интервале.

Доказательство *(для* $n = 3$***).*** Согласно условию теоремы имеем равенство $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) \equiv 0$, где не все c_i $(i = 1,2,3)$ равны нулю. Пусть, например, $c_3 \neq 0$, тогда:

$$y_3(x) \equiv -\frac{c_1}{c_3} y_1(x) - \frac{c_2}{c_3} y_2(x).$$

Дифференцируя это тождество два раза и подставляя найденные значения $y_2'(x)$, $y_3'(x)$ в последний столбец определителя Вронского, получим:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & -\frac{c_1}{c_3} y_1(x) - \frac{c_2}{c_3} y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & -\frac{c_1}{c_3} y_1'(x) - \frac{c_2}{c_3} y_2'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & -\frac{c_1}{c_3} y_1''(x) - \frac{c_2}{c_3} y_2''(x) \end{vmatrix}$$

В этом определителе последний столбец является линейной комбинацией первых двух столбцов, следовательно, он равен нулю в силу известного свойства определителей, т.е. $W(x) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что доказанная теорема представляет собою лишь необходимое условие линейной зависимости и функций на интервале $(a;b)$.

Теорема 2. Если функции $y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $L[y] = 0$, то вронскиан этих решений $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке интервале $(a;b)$.

***Доказательство** (для $n=3$).* Допустим противное. Пусть $W(x_0)=0$, $a<x_0<b$. Составим систему n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+c_3y_3(x_0)=0\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+c_3y_3'(x_0)=0\\ c_1y_1''(x_0)+c_2y_2''(x_0)+c_3''y_3(x_0)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Нетрудно заметить, что определитель этой системы как раз и есть вронскиан $W(x_0)$. По предположению $W(x_0)=0$. Значит, система имеет ненулевое решение $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$, $c_3=c_3^0$, где не все $c_i^0\,(i=1,2,3)$ равны нулю. Составим теперь такую линейную комбинацию решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$:

$$y=c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x)+c_3^0y_3(x)$$

Очевидно, что $L[y]=0$, так как $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ есть решения. Система (*) показывает, что в точке x_0 это решение обращается в ноль вместе со своими производными до $(n-1)-го$ порядка включительно. Но тогда в силу теоремы существования и единственности решения, решение $y=c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x)+c_3^0y_3(x)$ является нулевым: $y\equiv 0$, т.е. имеет место тождество $c_1^0y_1(x)+c_2^0y_2(x)+c_3^0y_3(x)\equiv 0$, в котором не все c_i^0 равны нулю, а это означает, что решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ линейно зависимы в интервале $(a;b)$ вопреки противоположению.

Теорема доказана.

Следствие. Из теорем 1 и 2 следует, что для того, чтобы n решений уравнения $L[y]=0$ были линейно независимыми на интервале $(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан не обращался бы в ноль ни в одной точке этого интервала.

§ 3.4. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка.

Рассмотрим линейное однородное уравнение $n-го$ порядка

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+p_2(x)\cdot y^{(n-2)}(x)+\ldots+p_n(x)\cdot y(x)=0 \quad (1)$$

Его можно записать с помощью линейного дифференциального оператора так:

$$L[y]=0$$

Определение. Совокупность n решений линейного однородного уравнения $n-го$ порядка (1), определённых и линейно независимых в интервале $(a;b)$, называется *фундаментальной* системой решений уравнения (1) в этом интервале.

Из выше сказанного следует, что для того, чтобы система n решений была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы вронскиан этих решений был отличен от нуля хоть в одной точке интервала непрерывности коэффициентов уравнения. Очевидно, что все решения, входящие в фундаментальную систему, ненулевые.

Знание n линейно независимых решений, т.е. фундаментальной системы решений, даёт возможность построить решение линейного однородного уравнения, содержащее n произвольных постоянных, причём это решение будет общим решение.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного уравнения $n-го$ порядка).

Если $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ - фундаментальная система решений уравнения:

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+p_2(x)\cdot y^{(n-2)}(x)+\ldots+p_n(x)\cdot y(x)=0 \quad (1)$$

то выражение

$$\bar{y}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots.+c_ny_n(x), \qquad (*)$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - произвольные постоянные числа, даёт нам общее решение уравнения (1).

Доказательство.

Продифференцируем соотношение (*) $(n-1)$ раз. Тогда получим систему n линейных алгебраических уравнений, относительно произвольных $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n = \bar{y} \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + ... + c_n y_n' = \bar{y}' \\ ... \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + ... + c_n y_n^{(n-1)} = \bar{y}^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

Определитель этой системы является определителем Вронского совокупности линейно независимых решений $y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)$. Следовательно, он отличен от нуля. Значит, система имеет единственное решение, причём, в силу определения, очевидно, что это решение – *общее*.

§ 3.5. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

На практике часто встречаются линейные однородные уравнения $n-го$ порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим такое уравнение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0 \qquad (1)$$

где все коэффициенты $a_i (i = 1,2,...,n)$ некоторые вещественные константы. Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$y = e^{\lambda x} \qquad (2)$$

Эта подстановка (здесь $\lambda \in C$, т.е. λ принадлежит множеству комплексных чисел) называется подстановкой Эйлера.

Дифференцируя выражение (2), получим: $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots,$ $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Подставим выражение (2) и найденные значения производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ в уравнение (1), получим:

$$\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n\right) \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Ясно, что $e^{\lambda x} \neq 0$. Тогда будет:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \qquad (3)$$

Это уравнение называется *характеристическим*, корни его называются *характеристическими числами* данного уравнения.

В силу *основной теоремы высшей алгебры* характеристическое уравнение (3) имеет n корней (вещественных или комплексных). В зависимости от вида корней характеристического уравнения с учётом их кратности мы получим различную структуру общего решения исходного уравнения (1). Рассмотрим эти случаи.

3.5.1. Корни характеристического уравнения вещественны и различны.

Итак, допустим, что корни характеристического уравнения (3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ вещественны и различны.

В силу подстановки Эйлера им соответствует n частных решений характеристического уравнения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots,$ $y_n = e^{\lambda_n x}$.

Нетрудно доказать, что эти частные решений линейно независимы. Следовательно, в силу теоремы о *структуре общего решения линейного однородного уравнения* $L[y] = 0$ нетрудно найти обще решение исходного уравнения (1):

$$\bar{y}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - произвольные постоянные.

Пример 1. Найти обще решение уравнения $y''' - 9y' = 0$.

Решение. Очевидно, что нам дано линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Подстановка Эйлера $y = e^{\lambda x}$ даёт нам: $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$. Подставим выражения для y, y', y'' и y''' в исходное уравнение. Получим:

$$\lambda^3 e^{\lambda x} - 9\lambda e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \left(\lambda^3 - 9\lambda\right) \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Отсюда имеем такое характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$. Составим фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{3x}, y_3 = e^{-3x}.$$

Применяя теорему о структуре общего решения линейного однородного уравнения, получим общее решение исходного уравнения в виде:

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}.$$

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $y|_{x=0} = 6,\ y'|_{x=0} = 10$ (т.е. решим задачу Коши для данного уравнения).

Решение. Подстановка Эйлера даёт нам характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Фундаментальная система решений: $y_1 = e^x, y_2 = e^{3x}$.

Общее решение данного уравнения: $\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$.

Учтем начальные условия. Первое условие $y|_{x=0} = 6,$ даёт нам

$$c_1 + c_2 = 6$$

Дифференцируя найденную функцию $\overline{y}$, получим $\overline{y'} = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}$. Учитывая второе начальное условие $y'|_{x=0} = 10$, будем иметь:

$$c_1 + 3c_2 = 10.$$

Таким образом, у нас получилась система:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 6 \\ c_1 + 3c_2 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Её решение $c_2 = 2, c_1 = 4$.

Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в найденное общее решение, получим окончательно частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

3.5.2. Комплексные корни характеристического уравнения.

Прежде всего, заметим, что исходное линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (2)$$

рассматривается в предположении, что $a_i\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$ есть вещественные числа. Поэтому, предположив, что характеристическое уравнение

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

имеет комплексные корни $\lambda = a + bi$, мы должны принять во внимание, что сопряжённое комплексное число $a - bi$ также является корнем данного характеристического уравнения, причём той же кратности, что и корень $\lambda_1 = a + bi$ (мы рассматривали это обстоятельство при изучении комплексных чисел).

Итак, допустим, что характеристическое уравнение имеет пару простых комплексных сопряжённых корней $\lambda_1 = a + bi$ и $\lambda_2 = a - bi$.

В силу подстановки Эйлера им будут соответствовать частные решения $y_1 = e^{(a+bi)x}$ и $y_2 = e^{(a-bi)x}$, а в выражении для общего решения $\overline{y}$ будет присутствовать группа из двух слагаемых: (обозначим её условно $\overline{y^*}$), т.е.

$$\overline{y^*} = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} =$$

$$= c_1 e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + c_2 e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) =$$

$$= (c_1 + c_2)e^{ax} \cos bx + i(c_1 - c_2)e^{ax} \sin bx =$$

$$= \overline{c_1} e^{ax} \cos bx + \overline{c_2} e^{ax} \sin bx .$$

В силу сделанных преобразований нетрудно заметить, что если функции $y_1 = e^{(a+bi)x}$ и $y_2 = e^{(a-bi)x}$ являются частными решениями исходного однородного уравнения $L[y] = 0$, то и функции $y_1^* = e^{ax} \cos bx$ и $y_2^* = e^{ax} \sin bx$ линейно независимы и также являются частными решениями исходного уравнения $L[y] = 0$. Принимая это во внимание, получив комплексные корни характеристического уравнения $\lambda_1 = a + bi$ и $\lambda_2 = a - bi$, мы можем сразу же поставить им в соответствие частные решения $y_1^* = e^{ax} \cos bx$ и $y_2^* = e^{ax} \sin bx$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 0$.

Решение. Подстановка Эйлера даёт нам характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9 = 0$, его корни $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Частные решения $y_1 = e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$, $y_2 = e^{-3ix} = \cos 3x - i \sin 3x$. Принимая во внимание сказанное выше, в качестве частных решений можем принять функции $y_1^* = \cos 3x$, $y_2^* = \sin 3x$.

Искомое общее решение имеет вид:

$$\overline{y} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x .$$

3.5.3. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения.

Пусть λ_1 есть корень характеристического уравнения (3) кратности k, т.е. характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$(\lambda - \lambda_1)^k \left[b_0 \lambda^{n-k} + b_1 \lambda^{n-k-1} + \ldots + b_{n-k} \right] = 0,$$

причем $b_0 \lambda^{n-k} + b_1 \lambda^{n-k-1} + \ldots + b_{n-k} \neq 0$. Можно доказать, что $L\left[x^m e^{\lambda_1 x}\right] = 0$, где $m = 0,1,2,\ldots,k-1$, т.е. линейно независимые функции $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$ тоже являются решениями уравнения $L[y] = 0$.

Совершенно аналогично, если характеристическое уравнение имеет корни $a \pm bi$ кратности k, то уравнение $L[y] = 0$ имеет $2k$ линейно независимых частных решений вида:

$$e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \ldots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, \ldots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx .$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$y^{VI} - 4y^{V} + 8y^{IV} - 8y''' + 4y''$.

Решение. Характеристическое уравнение

$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2$ имеет такие корни:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1 + i, \lambda_5 = \lambda_6 = 1 - i,$$

им соответствует фундаментальная система решений $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = e^x \cos x$, $y_4(x) = xe^x \cos x$, $y_5(x) = e^x \sin x$, $y_6(x) = xe^x \sin x$.

Общее решение:

$$\overline{y}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \cos x + c_4 xe^x \cos x + c_5 e^x \sin x + c_6 xe^x \sin x$$

§ 3.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение $n-го$ порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)\cdot y^{(n-1)} + p_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)\cdot y = f(x), \qquad (1)$$

где $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_n(x)$ и правая часть $f(x)$ есть непрерывные функции в некотором интервале $(a;b)$. С помощью линейного дифференциального оператора это уравнение можно записать так:

$$L[y] = f(x) \qquad (1^*)$$

Ясно, что линейное однородное уравнение соответствующее данному неоднородному, таково:

$$L[y] = 0$$

3.6.1. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Теорема. Если $\overline{y}(x)$ - общее решение уравнения $L[y]=0$, соответствующего данному неоднородному уравнению $L[y]=f(x)$, а $y^*(x)$ - частное решение неоднородного уравнения $L[y]=f(x)$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$Y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x).$$

Доказательство. Выше было показано, что линейное однородное уравнение $L[y]=0$ имеет общее решение:

$$\overline{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

где $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ - фундаментальная система решений уравнения $L[y]=0$, а $c_1, c_2,\ldots, c_n$ - произвольные постоянные, т.е. $L[\overline{y}]=0$; т.к. $y^*(x)$ - частное решение уравнения $L[y]=f(x)$, то:

$$L[y^*(x)] = f(x)$$

А тогда в силу рассмотренных выше свойств линейного дифференциального оператора $L[Y(x)] = L[\overline{y}(x) + y^*(x)] = L[\overline{y}(x)] + L[y^*(x)] = 0 + f(x) = f(x)$, т.е. $L[Y(x)] = f(x)$, а это и означает, что $Y(x)$ является решением уравнения $L[y] = f(x)$.

Докажем теперь, что при любых начальных условиях $Y(x)|_{x=x_0} = Y_0$, $Y'(x)|_{x=x_0} = Y_0'$, …, $Y^{(n-1)}(x)|_{x=x_0} = Y_0^{(n-1)}$ из выражения $Y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x)$ постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$ определяются однозначно.

Действительно, при данных начальных условиях имеем такую линейную неоднородную алгебраическую систему для определения $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + ... + c_n y_{n0} + f(x_0) = Y_0 \\ c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' + ... + c_n y_{n0}' + f'(x_0) = Y' \\ .... \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + ... + c_n y_{n0}^{(n-1)} + f^{(n-1)}(x_0) = Y_0^{(n-1)} \end{cases},$$

где $y_{10} = y_1(x)|_{x=x_0}$, $y_{20} = y_2(x)|_{x=x_0}, \ldots$, $y_{n0} = y_n(x)|_{x=x_0}$, $f(x_0)$, $f'(x_0), ..., f^{(n-1)}(x_0)$ - значения функции $f(x)$ и её производной в точке $x_0 \in (a;b)$. Определитель этой системы есть определитель Вронского $W(x_0)$ фундаментальной системы решений, который, как известно, ни в одной точке интервала $(a;b)$ в ноль не обращается, следовательно, постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$ из этой системы определяются однозначно при указанных начальных условиях.

Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно доказать, что уравнение $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ имеет общее решение:

$$Y(x) = \overline{y}(x) + y_1^*(x) + y_2^*(x),$$

где $\overline{y}(x)$ - по-прежнему есть общее решение уравнения $L[y] = 0$, а $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ - частные решения уравнений $L[y] = f_1(x)$ и $L[y] = f_2(x)$ - соответственно.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = x - \sin x$.

Решение. Сначала найдём решение линейного однородного уравнения $y'' + 4y = 0$.

Подстановка Эйлера $y = e^{\lambda x}$ даёт характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$.

Фундаментальная система решений: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

Общее решение:

$$\overline{y}(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Нетрудно убедиться, что функция $y_1^*(x) = \dfrac{x}{4}$ является частным решением уравнения $y'' + 4y = x$, а функция $y_2^*(x) = -\dfrac{1}{3}\sin x$ является частным решением уравнения $y'' + 4y = -\sin x$.

Остаётся написать общее решение исходного уравнения $y(x) = \overline{y}(x) + y_1^*(x) + y_2^*(x)$, т.е.

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4} - \frac{1}{3}\sin x.$$

Заметим, что нахождение частных решений для данного уравнения представляет непростую самостоятельную проблему.

3.6.2. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) позволяет найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно общее решение соответствующего линейного однородного уравнения.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ на некотором интервале $(a;b)$ может быть найдено в квадратурах, если известно общее решение соответствующего линейного уравнения на том же интервале.

Доказательство. Докажем теорему для случая $n = 2$, т.е. для уравнения:

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = f(x), \tag{1}$$

или, соответственно,

$$L[y] = f(x). \tag{1*}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - фундаментальная система решений уравнения $L[y] = 0$ на интервале $(a;b)$.

Его общее решение, как известно:

$$\overline{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2}$$

Будем искать общее решение уравнения (1*) в виде:

$$\overline{y}(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x), \tag{3}$$

т.е. провариируем произвольные постоянные в соотношении (2). Заметим, что мы всё это рассматривали в гл.I, интегрируя линейное неоднородное уравнение 1-го порядка, т.е. в данной главе выполним обобщение метода вариации Лагранжа для линейного неоднородного уравнения с переменными коэффициентами любого порядка.

В соотношении (3) $c_1(x)$, $c_2(x)$ подлежат определению. Подберём их таким образом, чтобы $y^*(x)$ было частным решением уравнения $L[y]=f(x)$, т.е. чтобы было:

$$L[c_1(x)\cdot y_1(x)+c_2(x)\cdot y_2(x)]=f(x).$$

Наложим на функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ ограничения, причём, чтобы получить для определения функций $c_1(x)$, $c_2(x)$ непротиворечивую систему уравнений и чтобы эта система, к тому же, имела наиболее простой вид. Найдём:

$$y^{*\prime}(x)=c_1(x)\cdot y_1'(x)+c_2(x)\cdot y_2'(x)+c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x).$$

В качестве первого ограничителя на функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ потребуем чтобы было:

$$c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \tag{4}$$

Тогда получим:

$$y^{*\prime}(x)=c_1(x)\cdot y_1'(x)+c_2(x)\cdot y_2'(x)$$

Продифференцируем это соотношение, получим:

$$y^{*\prime\prime}(x)=c_1(x)\cdot y_1''(x)+c_2(x)\cdot y_2''(x)+c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)$$

Подставим теперь $y^*(x), y^{*\prime}(x)$ и $y^{*\prime\prime}(x)$ в уравнение $L[y]=f(x)$. Тогда, учитывая, что $L[y_1(x)]=0$ и $L[y_2(x)]=0$, получим второе уравнение для определения функций $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \tag{5}$$

Итак, принимая во внимание соотношения (4) и (5), окончательно для определения функций $c_1(x)$, $c_2(x)$ получим такую систему:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)&=0\\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)&=f(x)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, а он, как известно, ни в одной точке интервала $(a;b)$ не обращается в ноль. Следовательно, система (6) имеет единственное решение.

Найденные окончательно выражения для $c_1(x)$, $c_2(x)$ остаётся подставить в исходное выражение $y^*(x)$, определённое соотношением (3).

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, применяя метод вариации произвольных постоянных.

Решение. Найдём общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному уравнению:

$$y'' + y = 0 \tag{7}$$

Подстановка Эйлера $y = e^{\lambda x}$ даёт нам характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$, корни которого $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, а соответствующии им частные решения:

$$y_1(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$y_2(x) = e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

позволяют, как было указано ранее, взять в качестве фундаментальной системы решений уравнение (7), функции:

$$y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x.$$

Общее решение уравнения (7), таким образом, имеет вид:

$$\overline{y}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Варьируя произвольные постоянные, будем искать общее решение исходного уравнения в виде:

$$y^*(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

Откуда следует:

$$y^{*'}(x) = -c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x + c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x .$$

Положим здесь $c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$. Тогда будет:

$$y^{*'}(x) = -c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x .$$

Найдём далее:

$$y^{*''}(x) = -c_1(x)\cos x - c_2(x)\sin x - c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x .$$

Подставим $y^*(x), y^{*'}(x)$ и $y^{*''}(x)$ в исходное уравнение, тогда получим такую систему:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\},$$

откуда следует:

$$c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow c_1(x) = \ln|\cos x| + \overline{c_1},$$

$$c_2'(x) = 1 \Rightarrow c_2(x) = x + \overline{c_2}.$$

Общее решение исходного уравнения, следовательно, имеет вид:

$$y(x) = \overline{c_1}\cos x + \overline{c_2}\sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x .$$

§ 3.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ есть некоторые постоянные, а функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, или, короче, так:

$$L[y] = f(x) \qquad (1^*)$$

В некоторых случаях по виду функции $f(x)$ удаётся довольно просто найти частное решений данного уравнения (1). Рассмотрим такие случаи. Заметим, что такие уравнения называют *уравнениями с правой частью специального вида*.

3.7.1. Правая часть уравнения $L[y]=f(x)$ имеет вид $f(x)=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$.

Рассмотрим уравнение:

$$L[y]=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}, \tag{1}$$

где $P_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$, $(m\geq 0)$, т.е. $P_m(x)$ - многочлен с вещественными или комплексными коэффициентами, α - некоторая константа. Может оказаться, что α не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение следует искать в виде:

$$y^*(x)=Q_m(x)\cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\ldots+q_{m-1}x+q_m$ - многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами, для отыскания которых следует подставить $y^*(x)$ в исходное уравнение и приравнять затем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части равенства $L[y^*(x)]=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$.

После сокращения на $e^{\alpha x}$ ($e^{\alpha x}\neq 0!$) коэффициенты $q_1,q_2,\ldots,q_m$ определяются однозначно.

Может оказаться, что α является корнем характеристического уравнения кратности k. Тогда частное решение следует искать в виде:

$$y^*(x)=x^kQ_m(x)\cdot e^{\alpha x}.$$

Коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ определяются в этом случае так же, как и в первом случае.

Пример 1. Определить вид частного решения уравнения $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5)$.

Решение. Характеристическое уравнение однородного уравнения $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0$. Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Правая часть исходного уравнения:

$$f(x) = e^{-1\cdot x}(x-5),$$

число $\alpha = -1$ совпадает с корнем третьей кратности характеристического уравнения $\lambda = -1$. Следовательно, частное решение следует искать в виде:

$$y^*(x) = x^3 \cdot e^{-x}(B_0 x + B_1),$$

где коэффициенты B_0 и B_1 подлежат определению.

3.7.2. Правая часть уравнения $L[y] = f(x)$ имеет вид : $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$.

Итак, допустим, что уравнение (1) имеет вид:

$$L[y] = e^{\alpha x}\left[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right],$$

где $P_m^{(1)}(x)$ и $P_m^{(2)}(x)$ - заданные многочлены от x степени равной или меньшей m, причём хоть один из них имеет степень m. Заметим, что один из многочленов может иметь степень, равную нулю, т.е. быть просто постоянным числом или быть равным тождественно нулю. Преобразуем $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ по формулам Эйлера

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}.$$

Преобразуя правую часть исходного уравнения к виду $f(x)=\widetilde{P}_m^{(1)}(x)\cdot e^{(\alpha+i\beta)x}+\widetilde{P}_m^{(2)}(x)\cdot e^{(\alpha-i\beta)x}$, где $\widetilde{P}_m^{(1)}(x)$ и $\widetilde{P}_m^{(2)}(x)$ - многочлены от x степени m.

Здесь также могут представиться два случая.

1. $\alpha+i\beta$ - корень характеристического уравнения кратности k, тогда частное решение следует искать в виде:

$$y^*(x)=x^k e^{\alpha x}\left[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right],$$

где $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ - многочлены степени m, коэффициенты которых подлежат определению.

2. $\alpha-i\beta$ - корень характеристического уравнения кратности k, тогда частное решение следует искать в виде:

$$y^*(x)=x^k e^{\alpha x}\left[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right],$$

где $Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ - по-прежнему есть многочлены степени m с неопределёнными коэффициентами.

Пример 1. Найти вид частного решения уравнения $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot x\cdot\cos x$.

Решение. Однородное уравнение $y''+2y'+2y=0$; его характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=-1-i$, $\lambda_2=-1+i$. Определим вид частного решения. Число $\alpha+i\beta=-1+i$ совпадает с простым корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение следует искать в виде:

$$y^*(x)=xe^{-x}\left[(A_1x+B_2)\cos x+(A_2x+B_2)\sin x\right].$$

Пример 2. Решить задачу Коши: $y'''+2y''+2y'+2e^{-2x}=0$, $y|_{x=0}=2$; $y'|_{x=0}=1$; $y|''_{x=0}=1$.

Решение. Запишем исходное уравнение так: $y''' + 2y'' + 2y' = -2e^{-2x}$.

Найдём общее решение линейного однородного уравнения $y''' + 2y'' + 2y' = 0$. Подстановка Эйлера $y = e^{\lambda x}$ даёт нам характеристическое уравнение $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{0x} = 1$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = xe^{-x}$.

Итак, общее решение линейного однородного уравнения:

$$\overline{y}(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}.$$

Вид частного решения:

$$y^*(x) = Ae^{-2x},$$

тогда:

$$y^{*\prime}(x) = -2Ae^{-2x},\ y^{*\prime\prime}(x) = 4Ae^{-2x},\ y^{*\prime\prime\prime}(x) = -8Ae^{-2x}.$$

Подставляя найденные значения $y^*(x), y^{*\prime}(x), y^{*\prime\prime}(x)$ и $y^{*\prime\prime\prime}(x)$ в исходное уравнение, получим:

$$-8Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} = -2Ae^{-2x}.$$

Откуда следует: $A = 1$.

Итак, искомое частное решение $y^* = e^{-2x}$.

Общее решение данного уравнения:

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + e^{-2x}.$$

Найдём теперь решение задачи Коши, т.е. найдём частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$y\,|_{x=0} = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 + 1 = 2$$

$$y'(x) = -c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} - c_3 x e^{-x} - 2e^{-2x} = (c_3 - c_2)e^{-x} - c_3 x e^{-x} - 2e^{-2x}$$

$$y'|_{x=0} = 1 \Rightarrow c_3 - c_2 - 2 = 1$$

$$y''(x) = (c_2 - c_3)e^{-x} - c_3 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + 4e^{-2x} =$$

$$= (c_2 - 2c_3)e^{-x} + c_3 x e^{-x} + 4e^{-2x}$$

$$y|''_{x=0} = 1 \Rightarrow c_2 - 2c_3 + 4 = 1$$

Имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_3 - c_2 &= 3 \\ c_2 - 2c_3 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_3 = 0, c_2 = -3, c_1 = 4$$

Окончательно имеем:

Частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям таково:

$$y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$$

§ 3.8. Приложение теории линейных дифференциальных уравнений к исследованию механических колебаний.

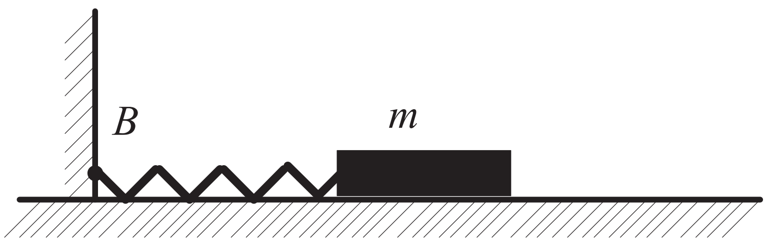


Рис.8.

Пусть груз массы m лежит на плоскости, причём он может перемещаться вдоль по прямой практически не испытывая силы трения (т.е. силой трения мы пренебрегаем). В начальный момент времени (в покое) груз занимает фиксированное положение, т.к. пружина, прикреплённая к грузу и закреплённая в некоторой точке B, удерживает груз в этом положении в состоянии покоя (рис.8.) Свяжем с грузом ось $0x$, взяв её начало (точку 0) в центре масс груза, когда тело находится в состоянии покоя, и направив её вдоль по линии перемещения груза так, как указано на рисунке 9.

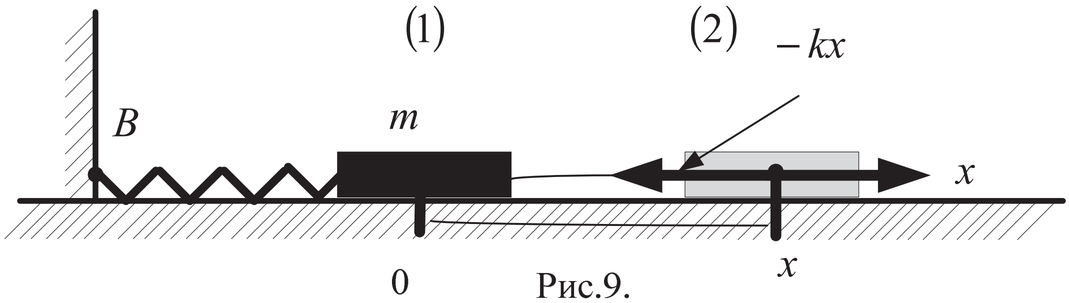


Рис.9.

I. Выведем груз из положения равновесия и предположим, что на груз будет действовать так называемая *восстанавливающая* сила, пропорциональная отклонению от исходного положения равновесия. Обозначим восстанавливающую силу $-kx$, где k - некоторая положительная постоянная (на рисунке цифрой (1) обозначено исходное положение груза, а цифрой (2) - положение груза после смещения, причём $(-kx)$ обозначена восстанавливающая сила, имеющая направление, противоположное смещению x).

На основании второго закона Ньютона мы можем написать:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

откуда следует:

$$\ddot{x} + w^2 x = 0, \tag{1}$$

где обозначено $\dfrac{k}{m} = w^2$.

Нетрудно видеть, что уравнение (1) - линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Подстановка Эйлера $x(t) = e^{\lambda t}$, $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x'''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ даёт нам характеристическое уравнение $\lambda^2 + w^2 = 0$, корни которого $\lambda_1 = iw$,

$\lambda_2 = -iw$, что приводит нас к такой фундаментальной системе решение $x_1(t) = \sin wt, x_2(t) = \cos wt$.

Таким образом, мы можем написать общее решение уравнения (1):

$$x(t) = A_1 \sin wt + A_2 \cos wt \tag{2}$$

Преобразуем правую часть уравнения (2):

$$x(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\sin wt + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\cos wt\right),$$

можно обозначить $\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \cos\varphi_0$, $\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \sin\varphi_0$, т.к. $\left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 = 1$, что очевидно, а тогда общее решение уравнения (2) можно записать так:

$$x(t) = A\sin(wt + \varphi_0) \tag{3}$$

Закон движения материальной точки, определённый соотношением (3), представляет из себя периодическое колебательное движение; оно называется *гармоническими колебаниями*. Промежуток времени T, удовлетворяющий условию $wT = 2\pi$, называется *периодом колебаний*; т.е. для гармонических колебаний, заданных соотношением (3) период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{w}.$$

Частотой колебаний называется число колебаний материальной точки за промежуток времени равный 2π. В данном случае частота колебаний равна w. Постоянная A дает нам величину наибольшего отклонения материальной точки от положения равновесия и называется *амплитудой* колебаний; постоянная φ_0 - называется *начальной фазой*.

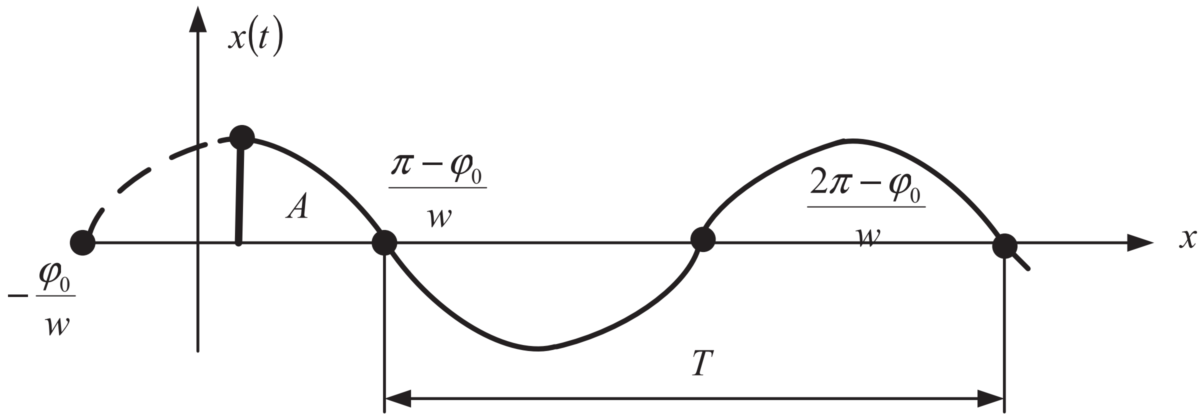


Рис.10.

Заметим, что частота колебаний w и период колебаний не зависят от начальных условий движения; они определяются только параметрами колеблющейся системы и называются *собственной частотой* и *периодом колебаний* системы. Амплитуда же колебаний A и начальная фаза φ_0, наоборот, зависят от начальных условий движения.

II. Допустим теперь, что рассматриваемый груз массы m перемещается в вязкой среде и при движении испытывает не только сопротивление восстанавливающей силы пружины, но и силу сопротивления, пропорциональную скорости движения $\dot{x}$, т.е. $F_{сопр} = 2k_1 x$, где $k_1 > 0$.

В силу того же 2-го закона Ньютона мы можем написать:

$$m\ddot{x} = -kx - 2k_1\dot{x},$$

или, учитывая ранее сделанные обозначения, получим такое уравнение движения нашего груза массы m:

$$\ddot{x} + 2k_1\lambda + w^2 = 0 \qquad (4)$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 2k_1\lambda + w^2 = 0$.

Его корни: $\lambda_1 = -k_1 + \sqrt{k_1^2 - w^2}$, $\lambda_2 = -k_1 - \sqrt{k_1^2 - w^2}$.

Если подкоренное выражение отрицательно (что имеет место, если сопротивление среды достаточно велико), то будем иметь такие корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -k_1 \pm i\sqrt{w^2 - k_1^2}\,.$$

Фундаментальная система решений имеет вид:

$$x_1(t) = e^{-k_1 t}\sin\sqrt{w^2 - k_1^2}\,,\; x_2(t) = e^{-k_1 t}\cos\sqrt{w^2 - k_1^2}\,.$$

Общее решение уравнения (4) будет выглядеть так:

$$x(t) = e^{-k_1 t}\left[A_1 \sin\sqrt{w^2 - k_1^2}\,t + A_2 \cos\sqrt{w^2 - k_1^2}\,t\right], \qquad (5)$$

где A_1 и A_2 - произвольные постоянные. Обозначая $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = A$, запишем решение (3) в виде:

$$x(t) = A \cdot e^{-k_1 t}\sin(w_1 t + \alpha) \qquad (6)$$

Здесь произвольные постоянные A и α определяются с помощью начальных условий. В этом случае свободные колебания будут представлять собою затухающие колебания с амплитудой $A \cdot e^{-k_1 t}$, зависящей от t (т.к. $k_1 > 0$, то ясно, что $e^{-k_1 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$). Отметим, что в данном случае частота колебаний $w_1 = \sqrt{w^2 - k_1^2}$ меньше частоты колебаний, соответствующей случаю $k_1 = 0$, но по-прежнему определяется самой колеблющейся системой и не зависит от начальных условий движения (собственная частота). Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{w_1}$ также не зависит от начальных условий движения.

Нетрудно рассмотреть и случай, когда $k_1^2 - w^2 > 0$; корни характеристического уравнения действительны; движение при этом носит непериодический характер, причем $x(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Точно так же $x(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, если $k^2-w^2=0$.

Нетрудно нарисовать график затухающих колебаний, соответствующих уравнению (6):

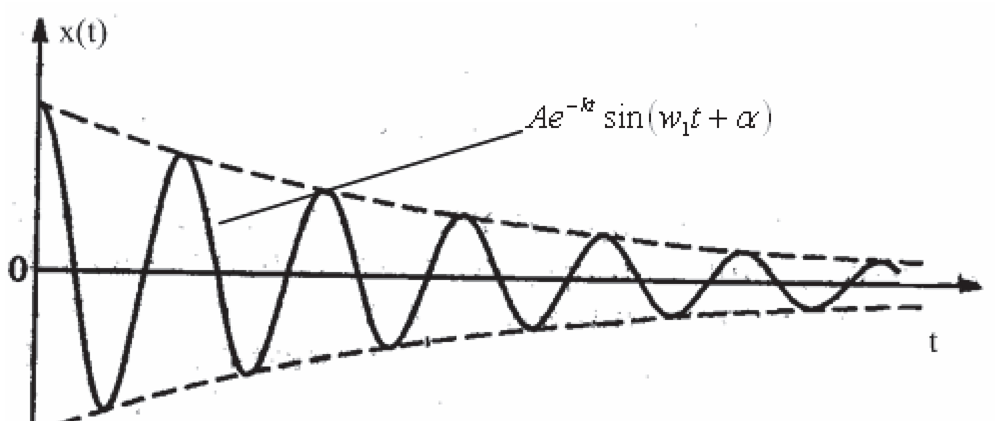


Рис.11

III. Рассмотрим теперь случай, когда сопротивление среды отсутствует, но на наш груз действует внешняя периодическая возмущающая сила $f(t)=a\sin\mu t$. В этом случае уравнение движения принимает вид:

$$\ddot{x}+w^2x(t)=a\sin\mu t \tag{7}$$

Это есть линейное неоднородное уравнение второго порядка .

Общее решение уравнения (1) было найдено в I и определено соотношением (3):

$$x(t)=A\sin(wt+\alpha).$$

Найдем теперь частное решение $\overline{x}(t)$ уравнения (7).

1. Вначале предположим, что частота μ внешней периодической возмущающей силы отлична от собственной частоты колебаний w. Так как в этом случае μi не является корнем характеристического уравнения:

$$\lambda^2+w^2=0,$$

то, частное решение уравнения (6) следует искать в виде:

$$\bar{x}(t) = c_1 \sin \mu t + c_2 \cos \mu t .$$

Дифференцируя $\bar{x}(t)$ дважды и подставляя в уравнение (7), найдём выражение для коэффициентов c_1 и c_2. В итоге частное решение $\bar{x}(t)$ уравнения (5) примет вид:

$$\bar{x}(t) = \frac{\alpha}{w^2 - \mu^2} \sin \mu t ,$$

а общее решение уравнения (7) можно записать так:

$$x(t) = X(t) + \bar{x}(t) = A \sin(wt + \varphi_0) + \frac{a}{w^2 - \mu^2} \sin \mu t \qquad (8)$$

Из соотношения (8) следует, что если частота μ внешней возмущающей силы близка к собственной частоте колебаний пружины, то разность $w^2 - \mu^2$ близка к нулю и амплитуда колебаний резко возрастёт. Если же $\mu = w$, т.е. частота внешней возмущающей силы совпадает с собственной частотой колебаний пружины w, то соотношение (8) теряет смысл, т.е. формула (8) неприменима.

2. В последнем случае, если $\mu i = wi$ является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + w^2 = 0$, то частное решение уравнения (7) следует искать в виде:

$$\bar{x}(t) = t(c_1 \sin \mu t + c_2 \cos \mu t).$$

Подставляя $\bar{x}(t)$ и $\dfrac{d^2 \bar{x}(t)}{dt^2}$ в уравнение (7) и учитывая, что $\mu = w$, после несложных преобразований, получим частное решение $\bar{x}(t)$ в таком виде:

$$\bar{x}(t) = -\frac{at}{2w} \cos wt .$$

Следовательно, общее решение уравнения (5) будет иметь вид:

$$x(t) = X(t) + \bar{x}(t) = A\sin(wt + \varphi_0) + \frac{at}{2w}\cos wt \qquad (9)$$

Наличие множителя t во втором слагаемом правой части указывает на то, что амплитуда колебаний с течением времени неограниченного возрастает. Приведём график функции $x_1(t) = \dfrac{at}{2w}\cos wt$ для случая $a = 2, w = 1$ (т.е. зафиксируем произвольным образом константы a и w, что не искажает суть дела).

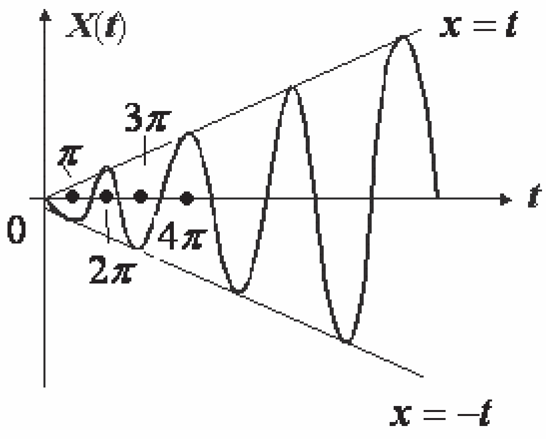


Рис.12.

В этом случае говорят, что имеет место *резонанс*.

Вывод: *резонанс при колебательном движении наступает в том случае, если собственная частота колебаний* w *совпадает с частотой* μ *внешней силы*.

Глава 4.
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

§4.1. Система дифференциальных уравнений n-го порядка. Основные понятия.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь x - независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ - искомые функции. Это система называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений* n*-го порядка, записанной в нормальной форме Коши*. Решением этой системы называется *всякая совокупность функций* $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$, *обращающие все уравнения системы (1) в тождества*.

Обобщая рассмотренные выше понятия, будем говорить, что решение системы дифференциальных уравнений $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ...$ $..., y_n = \varphi_n(x)$ представляет собою *интегральную кривую* в $(n+1)$ мерном пространстве переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$.

Задача Коши для системы вида (1) формулируется так:

Найти решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x)|_{x=x_0} = y_{10}, y_2(x)|_{x=x_0} = y_{20}, ..., y_n(x)|_{x=x_0} = y_{n0}.$$

С геометрической точки зрения решение задачи Коши заключается в отыскании кривой, проходящей через точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ $(n+1)$ - мерного пространства.

Сформулируем теперь без доказательства теорему, дающую достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для системы вида (1).

Теорема. Если в некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, …, $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{dy_1}, \frac{\partial f_i}{dy_2}, ...$ $..., \frac{\partial f_i}{dy_n}, (i = 1,2,...,n)$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ области D существует и притом единственное решение $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ...$ $..., y_n = \varphi_n(x)$ системы (1), определённое в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x)|_{x=x_0} = y_{10}$, $y_2(x)|_{x=x_0} = y_{20}, ..., y_n(x)|_{x=x_0} = y_{n0}$.

Совокупность n функций, зависящих от n произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_n : y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, …, $y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ будем называть *общим решением* системы (1) в некоторой $(n+1)$-мерной области, если при любых фиксированных значениях $c_1, c_2, ..., c_n$ эти функции являются решением системы и при любых допустимых начальных условиях, значения $c_1, c_2, ..., c_n$: определяются однозначно.

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$, называется *частным решением системы* (1).

§4.2. Механическая интерпретация нормальной системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t,x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t,x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(t,x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Допустим, что независимая переменная t имеет простой физический смысл – время, а искомые функции $x(t), y(t), z(t)$ дают нам координаты некоторой движущейся точки. Очевидно, что система (1) в любой момент времени даёт нам значение проекций скорости движущейся точки $M(x,y,z)$ на координатной оси, а решение системы (1):

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\},$$

можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, по которой перемещается точка M в силу системы (1).

Решить задачу Коши для системы (1) с начальными условиями: $x(t)|_{t=t_0} = x_0$, $y(t)|_{t=t_0} = y_0, z(t)|_{t=t_0} = z_0$, очевидно, с механической точки зрения, означает найти параметрические уравнения траектории, по которой перемещается точка M, если в момент времени $t = t_0$ она будет находиться в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если система (1) осмысливается таким образом, то она называется *динамической системой*, её решение – движением, а пространство переменных x, y, z называется *фазовым пространством*, а в случае двух переменных – *фазовой плоскостью*.

Если правые части системы (1) не зависят от времени, т.е. $f_1 = f_1(x,y,z)$, $f_2 = f_2(x,y,z)$, $f_3 = f_3(x,y,z)$, то соответствующее движение называется *установившимся* или *стационарным*, а сама система (1) – стационарной. В области, где выполнены условия *теоремы существования и единственности решения*, через каждую точку M_0 из этой области будет проходить только одна траектория. Примером стационарного движения может служить движение частиц жидкости в русле реки на небольшом промежутке времени при спокойной погоде. Если движение нестационарное, то поле скоростей изменяется во времени и различные траектории могут пересекаться.

§4.3 Сведение системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Одним из методов интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений является сведение её к интегрированию одного дифференциального уравнения высшего порядка. Покажем, что при выполнении некоторых условий, всякая нормальная система дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентна некоторому дифференциальному уравнению n-го порядка. Проведём рассуждение для системы трёх уравнений.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ \frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Продифференцируем по x левую и правую часть первого уравнения:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}\cdot\frac{dy_3}{dx} =$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1(x, y_1, y_2, y_3)+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2(x, y_1, y_2, y_3)+$$
$$+\frac{\partial f_1}{\partial y_3}\cdot f_3(x, y_1, y_2, y_3)$$

Нетрудно заметить, что в правой часть вместо $\frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial y_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial y_3}{\partial x}$ мы подставили функции $f_1(x, y_1, y_2, y_3)$, $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ и $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$ в силу данной системы дифференциальных уравнений (2).

В правой части получившегося соотношения стоит некоторая функция переменных x, y_1, y_2, y_3. Обозначим её через $\tilde{f}(x, y_1, y_2, y_3)$, т.е. имеем:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2}=\tilde{f}_2(x, y_1, y_2, y_3).$$

Продифференцируем последнее соотношение ещё раз почленно по x и выполним аналогичные преобразования, тогда получим:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3}=\tilde{f}_3(x, y_1, y_2, y_3).$$

Таким образом можно составить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x, y_1, y_2, y_3)\\ \frac{d^2 y_1}{dx}&=\tilde{f}_2(x, y_1, y_2, y_3)\\ \frac{d^3 y_1}{dx}&=\tilde{f}_3(x, y_1, y_2, y_3)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из первых двух уравнений, вообще говоря, можно выразить y_2 и y_3 через $x, y, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}$. Подставляя найденные значения y_2 и y_3 в третье уравнение системы (3), мы и получим дифференциальное уравнение относительно функции $y_1(x)$, которое остаётся проинтегрировать и найти затем функции $y_2(x)$ и $y_3(x)$.

Замечание. Заметим, что если искомая функция зависит от времени, т.е. $x = x(t)$, то её производную по времени принято обозначать точкой, что позволяет делать более компактные записи.

Пример. Решить систему методом исключения.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y + 3z \\ \dot{y} &= 2x - 3y - 2z \\ \dot{z} &= -x + 3y + 3z \end{aligned}\right\}$$

Решение. Возьмём первое уравнение системы $\dot{x} = -x + 2y + 3z$ и продифференцируем его почленно $\ddot{x} = -\dot{x} + 2\dot{y} + 3\dot{z}$. Подставим в правую часть этого уравнения значения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ из системы (правые части). Получим:

$$\ddot{x} = -(-x + 2y + 3z) + 2(2x - 3y - 2z) + 3(-x + 3y + 3z) = 2x + y + 2z$$

Имеем такую систему для нахождения y и z:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y + 3z \\ \ddot{x} &= 2x + y + 2z \end{aligned}\right\}$$

Перепишем эту систему ещё раз, поставив искомые функции $y(t)$ и $z(t)$ в левую часть системы. Получим:

$$\left.\begin{aligned} 2y + 3z &= \dot{x} + x \\ y + 2z &= \ddot{x} - 2x \end{aligned}\right\}$$

Решим эту алгебраическую систему, тогда будет:

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= -3\ddot{x} + 2\dot{x} + 8x \\ z(t) &= 2\ddot{x} - \dot{x} - 5x \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $z = 2\dddot{x} - \ddot{x} - 5\dot{x}$.

Подставим найденные $y(t), z(t)$ и $\dot{z}(t)$ в последнее уравнение системы; тогда получим одно дифференциальное уравнение, которому эквивалентна данная система:

$$\dddot{x} + \ddot{x} - 4\dot{x} - 4x = 0$$

Интегрируя его, будем иметь:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

Находя $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$, и подставляя их в найденные выше выражения для $y(t)$ и $z(t)$ получим:

$$y(t) = 3c_1 e^{-t} + 8c_3 e^{-2t},\ z(t) = -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 5c_2 e^{-2t}$$

Ответ: общее решение данной системы:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} \\ y(t) &= 3c_1 e^{-t} + 8c_3 e^{-2t} \\ z(t) &= -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 5c_2 e^{-2t} \end{aligned}\right\}$$

Пример. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= 4x + 3y \end{aligned}\right\}$$

методом исключения, и решить для этой системы задачу Коши, а именно: найти частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(t)|_{t=0} = 3$, $y(t)|_{t=0} = 2$.

Решение. Выразим y их первого уравнения:

$$y = \frac{1}{2}\dot{x} - \frac{1}{2}x \qquad (*)$$

Продифференцируем найденный y:

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}$$

Подставим y и $\dot{y}$ во второе уравнение данной системы $\frac{1}{2}\ddot{x}-\frac{1}{2}\dot{x}=4x+\frac{3}{2}\dot{x}-\frac{3}{2}x$, имеем: $\ddot{x}-4\dot{x}-5x=0$.

Получим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Подстановка Эйлера $x=e^{\lambda t}$ даёт нам характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda-5=0$.

Его корни: $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$.

Имеем такую фундаментальную систему решений:

$$x_1(t)=e^{5t},x_2(t)=e^{-t}$$

Общее решение:

$$x(t)=c_1e^{5t}+c_2e^{-t}$$

Для нахождения $y(t)$ достаточно подставить найденные значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)=5c_1e^{5t}-c_2e^{-t}$ в выражение для y зафиксированное соотношением (*). Тогда получим:

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(5c_1e^{5t}-c_2e^{-t}\right)-\frac{1}{2}\left(c_1e^{5t}+c_2e^{-t}\right)=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t}$$

Итак, общее решение данной системы двух дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=c_1e^{5t}+c_2e^{-t}\\ y(t)&=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t}\end{aligned}\right\}$$

Выделим теперь из найденного общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(t)|_{t=0}=3$, $y(t)|_{t=0}=2$. Имеем такую систему:

$$\left.\begin{aligned}c_1^0+c_2^0&=3\\ 2c_1^0-c_2^0&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow c_1^0=\frac{5}{3},c_2^0=\frac{4}{3}$$

Итак, искомое частное решение имеет такой вид:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{5}{3}e^{5t} + \frac{4}{3}e^{-t} \\ y(t) &= \frac{10}{3}e^{5t} - \frac{4}{3}e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

§4.4 Системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$\forall a_{ij} = const(i, j = 1,2,\ldots,n)$.

Очевидно, что для этой системы выполнены условия теоремы существования и единственности решения. Введём в рассмотрение такие матрицы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots. \\ x_n(t) \end{pmatrix};\ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ldots. \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что систему (1) можно записать в так называемой векторно-матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot X \tag{2}$$

Будем искать решение системы (1) в виде:

$$X = \Gamma \cdot e^{\lambda t}, \tag{3}$$

где $\varGamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ .... \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец, подлежащий определению, причём все $\gamma_i = const(i = 1,2,...,n)$.

$$\dot{X} = \varGamma \cdot \lambda e^{\lambda t}$$

Подставим x и $\dot{x}$ в систему (2), тогда получим:

$$\varGamma \cdot \lambda e^{\lambda t} = A \cdot \varGamma \cdot e^{\lambda t}$$

Последнее равенство может иметь место лишь тогда, когда:

$$A\varGamma = \lambda \varGamma \qquad (4)$$

Напомним, что ненулевой вектор $\varGamma$ удовлетворяющий такому соотношению, называется *собственным вектором* матрица A. Из соотношения (4) имеем:

$$(A - \lambda E) \cdot \varGamma = 0$$

и это соотношение будет выполнено, т.е. найдётся ненулевой собственный вектор, если

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (5)$$

Или, подробнее:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5^*)$$

Напомним, что уравнение (5) называется характеристическим. Решив его, получим корни характеристического уравнения (собственные числа): $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и вслед за ними соответствующие им собственные вектора матрицы A:

$$\Gamma^{(1)}=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(1)}\\ \gamma_2^{(1)}\\ \ldots\\ \gamma_n^{(1)}\end{pmatrix},\Gamma^{(2)}=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(2)}\\ \ldots\\ \gamma_n^{(2)}\end{pmatrix},\ldots,\Gamma^{(n)}=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(n)}\\ \gamma_2^{(n)}\\ \ldots\\ \gamma_n^{(n)}\end{pmatrix}$$

А тогда можно написать и соответствующе частные решения исходной системе (2):

$$X_1=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(1)}\\ \gamma_2^{(1)}\\ \ldots\\ \gamma_n^{(1)}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_1 t},X_2=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(2)}\\ \ldots\\ \gamma_n^{(2)}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_2 t},\ldots,X_n=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(n)}\\ \gamma_2^{(n)}\\ \ldots\\ \gamma_n^{(n)}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_n t}$$

Если собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ различны, то найденные векторы $X_1,X_2,\ldots,X_n$ линейно независимы, а функция $X(t)=c_1\Gamma^{(1)}\cdot e^{\lambda_1 t}+c_2\Gamma^{(2)}\cdot e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\Gamma^{(n)}\cdot e^{\lambda_n t}$, где $c_1,c_2,\ldots,c_n$ - произвольные постоянные, является общим решением рассматриваемой системы, причём в этом семействе содержится любое решение, удовлетворяющее условиям $x_1(t_0)=x_{10},x_2(t_0)=x_{20},\ldots,x_n(t_0)=x_{n0}$. Ясно, что для отыскания этого частного решения достаточно решить следующую систему алгебраических уравнений относительно постоянных $c_1^0,c_2^0,\ldots,c_n^0$:

$$X_0=c_1^0\cdot X_1(t_0)+c_2^0\cdot X_2(t_0)+\ldots+c_n^0\cdot X_n(t_0),$$

где $X_0=X(t)\big|_{t=t_0}=\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\\ \ldots.\\ x_n(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\\ \ldots\\ x_{n0}\end{pmatrix}$.

Пример 1. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= 4x + 3y \end{aligned}\right\},$$

записав её в векторно-матричной форме и решить для этой системы задачу Коши, а именно: найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $x(t)\,|_{t=0} = 3,\, y(t)\,|_{t=0} = 2$.

Решение. Введём в рассмотрение матрицы – столбцы $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$. Обозначим матрицу коэффициентов системы через A, т.е. положим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда данную систему можно записать в матричном виде так:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Будем искать решение системы в виде: $X(t) = \Gamma \cdot e^{\lambda t}$, где вектор-столбец $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ и константа λ подлежат определению.

Находим $\dot{X}(t) = \Gamma \cdot \lambda e^{\lambda t}$ и подставляем $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в исходную систему, получим:

$$\Gamma \cdot \lambda e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Gamma \cdot e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Вектор $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ есть ни что иное, как собственный вектор данной матрицы A, причём его координаты являются решением линейной алгебраической системы (6). Заметим, что система (6) – линейная однородная алгебраическая система, а поскольку мы ищем ненулевой вектор Γ, то мы должны потребовать, чтобы определитель $\det(A - \lambda E) = 0$, т.к. в противном случае мы получили бы единственное нулевое решение в силу теоремы Крамера. Итак, имеем:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Корни этого (характеристического) уравнения таковы: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

Найдём соответствующие им собственные вектора $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$.

1. Если $\lambda_1 = 5$, то получаем:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_1^{(1)} = t, \gamma_2^{(1)} = 2t$$

В частности, полагая $t = 1$, имеем первый собственный вектор:

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.Если $\lambda_2 = -1$, то будет:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix};$$

Полагая $t = 1$, получим аналогично второй собственный вектор

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь можно написать выражения для векторов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (фундаментальная система решений):

$$X_1(t) = \Gamma^{(1)} \cdot e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{5t},$$

$$X_2(t) = \Gamma^{(2)} \cdot e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Очевидно, что общее решение логично записать в координатной форме так:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) &= 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

Выделим теперь из найденного общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиями: $x(t)|_{t=0} = 3, y(t)|_{t=0} = 2$.

Подставляя начальные условия в найденное общее решение исходной системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} c_1^0 + c_2^0 &= 3 \\ 2c_1^0 - c_2^0 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1^0 = \frac{5}{3}, c_2^0 = \frac{4}{3}$$

Итак, искомое частное решение имеет вид:

$$x(t) = \frac{5}{3} e^{5t} + \frac{4}{3} e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{10}{3} e^{5t} - \frac{4}{3} e^{-t}$$

Пример 2. Дана линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + 3y \end{aligned}\right\}.$$

1. Найти общее решение системы, сведя её к одному дифференциальному уравнению третьего порядка.

2. Найти общее решение данной системы, записав её и решив в матричном виде.

3. Найти частное решение системы, удовлетворяющее данным начальным условиям: $x(t)|_{t=0}=5, y(t)|_{t=0}=0, z(t)|_{t=0}=5$.

Решение.

1. Решим систему:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=3y+z\\ \dot{y}=x+z\\ \dot{z}=x+3y\end{array}\right\},$$

сведя её к одному уравнению третьего порядка. Берём первое уравнение системы и продифференцируем его почленно: $\ddot{x}=3\dot{y}+\dot{z}$. Подставим сюда вместо $\dot{y}$ и $\dot{z}$ их значения из данной системы (правые части); тогда получим:

$$\ddot{x}=(x+2)+(x+3y)=4x+3y+3z$$

Первое уравнение исходной системы и полученное уравнение рассматриваем как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных y и z, т.е. записываем так:

$$\left.\begin{array}{l}3y+z=\dot{x}\\ 3y+3z=\ddot{x}-4x\end{array}\right\}$$

Отсюда без труда получим:

$$y=-\frac{1}{6}\ddot{x}+\frac{1}{2}\dot{x}+\frac{2}{3}x \tag{7}$$

$$z=\frac{1}{2}\ddot{x}-\frac{1}{2}\dot{x}-2x \tag{8}$$

Дифференцируя найденное значение z, будем иметь:

$$z = \frac{1}{2}\dddot{x} - \frac{1}{2}\ddot{x} - 2\dot{x}$$

Остаётся теперь найденные выражения для $y(t)$ и $\dot{z}(t)$ подставить в третье уравнение исходное системы, получим:

$$\dddot{x} - 7\ddot{x} - 6\dot{x} = 0 \tag{9}$$

Итак, мы свели данную систему трёх уравнений первого порядка к одному уравнению третьего порядка. Подстановка Эйлера $x(t) = e^{\lambda t}$ даёт нам характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 7\lambda^2 - 6\lambda = 0$.

Решим его:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 - 6\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 - \lambda^2 - 6\lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) - 6(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) - 6(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

Итак, корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Остаётся написать фундаментальную систему решений уравнения третьего порядка (3):

$$x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = e^{-2t}, x_3(t) = e^{3t}$$

Следовательно, общее решение уравнения (3) таково:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{=2t} + c_3 e^{3t}.$$

Находя $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$, и подставляя $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в правую часть соотношений (1) и (2), получим искомые функции $y(t)$, $z(t)$, т.е. окончательно имеем такое общее решение исходной системы:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{=2t} + c_3 e^{3t} \\ y(t) &= -c_2 e^{-2t} + \frac{2}{3} c_3 e^{3t} \\ z(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

Примем теперь во внимание начальные условия: $x(t)|_{t=0} = 5, y(t)|_{t=0} = 0, z(t)|_{t=0} = 5$.

Получим такую алгебраическую систему для нахождения соответствующих постоянных c_1^0, c_2^0 и c_3^0:

$$\left.\begin{array}{rrr} c_1^0 + & c_2^0 + & c_3^0 = 5 \\ & -c_2^0 + & \dfrac{2}{3}c_3^0 = 0 \\ -c_1^0 + & c_2^0 + & c_3^0 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2c_2^0 + 2c_3^0 = 10 \\ -3c_2^0 + 2c_3^0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5c_2^0 = 10 \Rightarrow$$

$$c_2^0 = 2, c_3^0 = 3, c_1^0 = 0.$$

Итак, искомое частное решение имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2e^{=2t} + 3e^{3t} \\ y(t) = -2e^{-2t} + 2e^{3t} \\ z(t) = 2e^{-2t} + 3e^{3t} \end{array}\right\} \qquad (**)$$

2. Решим теперь данную систему:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 3y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + 3y \end{array}\right\},$$

записав её в векторно-матричном виде так:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \cdot x + 3y + 1 \cdot z \\ \dot{y} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \\ \dot{z} = 1 \cdot x + 3y + 0 \cdot z \end{array}\right\}$$

и обозначим:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ тогда } \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная система, таким образом, в матричном виде может быть записана так:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{X} = A \cdot X \tag{10}$$

Будем искать решение системы (10) в виде:

$$X = \Gamma \cdot e^{\lambda t}, \tag{11}$$

где, как было упомянуто раньше $\Gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(i)} \\ \gamma_2^{(i)} \\ \gamma_3^{(i)} \end{pmatrix}$ - собственные векторы матрицы A, подлежащие определению, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - характеристические числа матрицы A.

В силу подстановки (11):

$$\dot{X} = \Gamma \cdot \lambda e^{\lambda e}$$

Подставляя выражения для X и $\dot{X}$ в уравнение (10), получим:

$$\Gamma \cdot \lambda e^{\lambda t} = A \cdot \Gamma \cdot e^{\lambda t},$$

откуда следует:

$$(A - \lambda E) \cdot \Gamma = 0 \tag{12}$$

Полагаем:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Получим такое характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$.

Найдём теперь собственные вектора, соответствующие этим собственным числам.

I.Если $\lambda_1 = -1$, тогда соотношение (12) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Или так:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1^{(1)} + 3\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)} = 0 \\ \gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)} = 0 \\ \gamma_1^{(1)} + 3\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)} = 0 \end{array}\right\}$$

Точнее:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1^{(1)} + 3\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)} = 0 \\ \gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)} = 0 \end{array}\right\}$$

Получили систему двух уравнений с тремя неизвестными. Такое решение имеет бесчисленное множество решений, зависящее от одного параметра. Вычитая из первого уравнения второе, получим $\gamma_2^{(1)} = 0$ Для нахождения $\gamma_3^{(1)}$ и $\gamma_1^{(1)}$ имеем такое уравнение:

$$\gamma_2^{(1)} + \gamma_1^{(1)} = 0$$

Откуда следует, что можно положить $\gamma_1^{(1)} = t$, тогда $\gamma_3^{(1)} = -t$, где t - произвольный параметр, т.е. в качестве первого собственного вектора мы можем взять любой из коллинеарных векторов.

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Положим здесь $t = 1$, т.е. возьмём их этого множества единственный собственный вектор:

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тогда нетрудно записать первое решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = -1$:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

II. Положим теперь $\lambda_2 = -2$ и выполним аналогичные рассуждения. Подставим $\lambda_2 = -2$ в соотношение (12):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \gamma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2\gamma_1^{(2)} + 3\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)} = 0 \\ \gamma_1^{(2)} + 2\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)} = 0 \\ \gamma_1^{(2)} + 3\gamma_2^{(2)} + 2\gamma_3^{(2)} = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)} = 0 \\ \gamma_1^{(2)} + 2\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)} = 0 \\ \gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)} = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)} = 0 \\ \gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)} = 0 \end{matrix}\right\}$$

Откуда нетрудно получить второй собственный вектор:

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

И, соответственно, второе частное решение системы:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t}$$

III. Если $\lambda_3 = 3$, то получим:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(3)} \\ \gamma_2^{(3)} \\ \gamma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1^{(3)} - 3\gamma_2^{(3)} + \gamma_3^{(3)} = 0 \\ &2\gamma_2^{(3)} - 2\gamma_3^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Полагая далее $\gamma_1^{(3)} = \gamma_3^{(3)} = 3$, будем иметь $\gamma_2^{(3)} = 2$.

Третий собственный вектор будет выглядеть так:

$$\Gamma^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Соответствующее ему частное решение:

$$X_3(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{3t}.$$

Теперь можно записать общее решение данной системы:

$$X(t) = \overline{c_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \overline{c_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \overline{c_3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Или в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \overline{c_1}e^{-t} + \overline{c_2}e^{-2t} + 3\overline{c_3}e^{3t} \\ y(t) &= -\overline{c_2}e^{-2t} + 2\overline{c_3}e^{3t} \\ z(t) &= -\overline{c_1}e^{-t} + \overline{c_2}e^{-2t} + 3\overline{c_3}e^{3t} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Решим теперь задачу Коши, сформулированную для данной системы в исходном условии задачи, а именно выделим из найденного общего решения (13) частное решение, удовлетворяющее начальными условиям: $x(t)|_{t=0} = 5, y(t)|_{t=0} = 0, z(t)|_{t=0} = 5$.

Подставляя эти данные в найденное общее решение (13), получим такую алгебраическую систему:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{c}_1^0 + \bar{c}_2^0 + 3\bar{c}_3^0 = 5 \\ -\bar{c}_2^0 + 2\bar{c}_3^0 = 0 \\ -\bar{c}_1^0 + \bar{c}_2^0 + 3\bar{c}_3^0 = 5 \end{array}\right\}$$

Без труда находим значения $\bar{c}_1^0, \bar{c}_2^0, \bar{c}_3^0$:

$$\bar{c}_1^0 = 0, \bar{c}_2^0 = 2, \bar{c}_3^0 = 1$$

Подставляя их в полученное выше общее решение, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ y(t) = -2e^{-2t} + 2e^{3t} \\ z(t) = 2e^{-2t} + 3e^{3t} \end{array}\right\}$$

Нетрудно убедиться, что найденное частное решение совпадает с соответствующим частным решением, полученным при решении данной системы дифференциальных уравнений методом исключения.

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Физматиз, 2005.
2. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. – СПб: Лань, 2008.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Удмуртский государственный университет, 2000.
4. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб.: Лань, 2011.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: Ком Книга, 2007.
6. Пискунов Н.С Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 2008.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г. Аленицын, В.В.Жук и другие.

Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов.

Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Иван Александрович Лапин

Лариса Семёновна Ратафьева

Анна Викторовна Рябова

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерный набор и вёрстка А.В. Клакевич

Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО

Зав. РИО Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати Заказ №

Тираж Отп. на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики

и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49