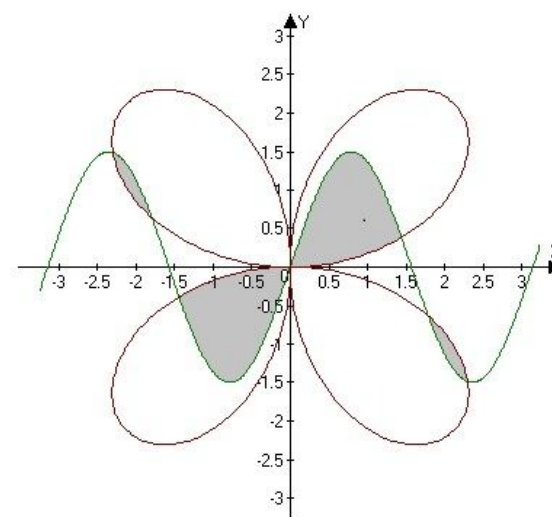


**Типовой расчет по математике**  
**Интегрирование функции одной переменной**  
**3 модуль**

Учебно-методическое пособие



**Санкт-Петербург**

2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Брылевская Л.И., Бодрова Н.А., Далевская О.П.,

Сейферт И.В., Сытенко Н.В.

**Типовой расчет по математике**  
**Интегрирование функции одной переменной**  
**3 модуль**

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2014

Брылевская Л.И., Бодрова Н.А., Далевская О.П., Сейферт И.В., Сытенко Н.В.  
Типовой расчет **“Интегрирование функции одной переменной”**. **3 модуль**. Учебно-методическое пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2014. –75 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов технических специальностей первого курса.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 22.06.2013, протокол №5.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития **государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.**

©Санкт-Петербургский национальный исследовательский  
Университет информационных технологий,  
механики и оптики, 2013

© Брылевская Л.И., Бодрова Н.А., Далевская О.П.,  
Сейферт И.В., Сытенко Н.В. 2013

## Оглавление

Часть I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ .....	3
Раздел 1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	3
Задание 1. Интегрирование методом внесения под знак дифференциала. ....	4
Задание 2. Нахождение интегралов вида $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ , .....	4
Задание 3. Нахождение интегралов вида $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ , $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ .....	7
Задание 4. Интегрирование дробно-рациональных функций .....	9
Задание 5. Интегрирование иррациональных функций вида $R(x, k1ax + bcx + dm1, \dots, ksax + bcx + dms)$ .....	14
Задание 6. Интегрирование иррациональных функций вида $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ , $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ , $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ .....	16
Задание 7. Интегрирование тригонометрических функций $R(\sin x, \cos x)$ методом подстановки.....	17
Раздел 2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ .....	19
1. Методы интегрирования.....	19
Задание 8. Метод интегрирования по частям в определённом интеграле.....	19
Задание 9. Метод замены переменной в определённом интеграле. ....	21
2. Приложения определённого интеграла .....	22
Задания 10, 11, 12. Нахождение площади области, ограниченной кривыми, и отыскание длины кривой.....	22
Раздел 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ .....	39
Задание 13. Нахождение несобственных интегралов: .....	39
а) по бесконечному промежутку интегрирования, .....	39
б) от неограниченной на отрезке функции.....	39
Часть 2. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ.....	43

## Часть I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Типовой расчёт содержит 30 вариантов заданий по трём разделам интегрального исчисления: «Неопределённые интегралы», «Определённые интегралы и их приложения» и «Несобственные интегралы». В каждом варианте 15 задач.

Разберём решения типовых заданий по каждому из указанных разделов.

### Раздел 1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Для выполнения первых трёх заданий помимо знания таблицы интегралов нам понадобится:

1) свойство линейности неопределённого интеграла

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx, \text{ где } a, b \in \mathbf{R};$$

2) знание тригонометрических формул и основных свойств элементарных функций;

3) метод интегрирования внесением под знак дифференциала.

По определению дифференциала функции  $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$ .

Переход в этом равенстве слева направо называют «*подведением множителя  $\varphi'(x)$  под знак дифференциала*».

Пусть требуется найти интеграл вида  $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ . В этом интеграле подведём функцию  $\varphi'(x)$  под знак дифференциала, а затем выполним подстановку  $\varphi(x) = u$  (замену переменной интегрирования), тогда мы получим *формулу подстановки* в неопределённом интеграле

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = \int f(u) du \quad (1)$$

С появлением некоторого навыка интегрирования подстановка  $\varphi(x) = u$  обычно производится в уме.

Простой частный случай формулы (1) можно получить для линейной функции  $\varphi(x) = ax + b$ , тогда  $d(ax + b) = a dx$ . Следовательно,

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + c \quad (2)$$

**Задание 1.** Интегрирование методом внесения под знак дифференциала.

**Пример 1.** Найдите  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}}$

**Решение:** Воспользуемся формулой (2), поскольку внутренняя функция композиции  $\varphi(x)=4x-1$  линейна:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{4} \int (4x-1)^{-0.5} d(4x-1) = \frac{1}{4} \cdot 2(4x-1)^{0.5} + C = \frac{\sqrt{4x-1}}{2} + C.$$

**Пример 2.** Найдите  $\int \frac{(3\arctg^4 x + 1)dx}{1+x^2}$

**Решение:**

Воспользуемся свойством линейности, разобьём исходный интеграл на сумму двух интегралов и вынесём константу за знак первого интеграла

$$\int \frac{3\arctg^4 x}{1+x^2} = 3 \int \arctg^4 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

Второй интеграл табличный, а в первом вынесём производную под знак дифференциала  $\frac{1}{1+x^2} dx = d(\arctg x)$ , выполним подстановку  $\arctg x = t$  и воспользуемся табличной формулой для интеграла от степенной функции

$$= 3 \int t^4 dt + \arctg x = 3 \frac{t^5}{5} + \arctg x + C = 3 \frac{\arctg^5 x}{5} + \arctg x + C.$$

**Задание 2.** Нахождение интегралов вида  $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ ,

$$\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx, \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx \quad (3)$$

Для нахождения интегралов вида  $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx, \int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx,$

$\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$ , следует преобразовать подынтегральную функцию, воспользовавшись формулами тригонометрии

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x)$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x) \quad (4)$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x)$$

**Пример 1.** Найдите  $\int \sin 2x \cos 10x dx$ .

**Решение.** Так как по формуле (4)  $\sin 2x \cos 10x = \frac{1}{2} (\sin 12x - \sin 8x)$ , то

$$\int \sin 2x \cos 10x dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos 12x}{12} - \frac{\cos 8x}{8} \right) + C = \frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 12x}{24} + C.$$

Для нахождения интегралов вида  $\int \sin^n x \cos^m x dx$  используют метод замены переменной (или метод внесения под знак дифференциала) и формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда хотя бы один показатель степени является нечётным числом. Пусть  $n = 2k + 1$ . Тогда

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^m x dx = \int (\sin^2 x)^k \cos^m x \cdot \sin x dx.$$

Так как  $\sin x dx = -d \cos x$ , а  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , то, обозначив  $\cos x = t$ , получим интеграл от рациональной функции:

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = - \int (1 - t^2)^k t^m dt.$$

Отметим, что этот метод интегрирования применим и в случае, когда один из показателей степеней  $m$  или  $n$  нечётное число, а второй – рациональное число.

Если оба показателя степени чётные, то степени необходимо понизить, используя формулы понижения степени (5), известные из курса тригонометрии.

Пусть  $n = 2k, m = 2l$ . Тогда

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l dx = \frac{1}{4^{k+l}} \int (1 - \cos 2x)^k (1 + \cos 2x)^l dx.$$

В полученном интеграле следует раскрыть скобки, воспользоваться свойством линейности (т. е. представить как сумму интегралов) и применять описанные методы до тех пор, пока интеграл не сведётся к сумме табличных первообразных.

Рассмотрим оба случая на примерах.

**Пример 2.** Найдите  $\int \sin^4 x dx$ .

**Решение.** Так как показатель степени – чётное число ( $n = 4$ ), используем формулу (5) и раскроем скобки:

$$\int \sin^4 x dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx.$$

Полученный интеграл равен сумме трёх интегралов:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx.$$

Первые два интеграла будут равны  $\frac{1}{4}x$  и  $-\frac{1}{4}\sin 2x$  соответственно. В

последнем интеграле опять применим формулу понижения степени:

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

В результате имеем

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

**Пример 3.** Найдите  $\int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx$ .

**Решение.** Заметим, что степень функции  $\sin x$ ,  $n = \frac{3}{2}$ , является рациональным числом, а показатель степени  $\cos x$  – нечётное число ( $m=1$ ). Значит, можно ввести замену:  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx &= \int t^{3/2} dt = \frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{2}{5}(\sin x)^{5/2} + C \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + C. \end{aligned}$$

**Задание 3.** Нахождение интегралов вида  $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ ,

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

(первый интеграл рассмотрим при условии, что квадратный трёхчлен не имеет корней, то есть его дискриминант  $D < 0$ ).

Метод интегрирования подобных функций заключается в следующем. Пользуясь свойством линейности, представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов от дробей с теми же знаменателями, в числителе первой дроби будет производная  $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$ , а в числителе второй – единица. Такое преобразование позволяет свести исходные интегралы к табличным.

Так как  $Mx + N = \frac{M}{2a}(2ax + b) + N - \frac{Mb}{2a}$ , для первого и второго

интегралов получим следующие разложения

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (6)$$

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (7)$$

В первых интегралах полученных сумм достаточно воспользоваться методом внесения под знак дифференциала или методом подстановки. Поскольку  $(2ax + b)dx = d(ax^2 + bx + c)$ , обозначим  $s = ax^2 + bx + c$ , тогда легко получим табличные интегралы

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{ds}{s} = \ln|s| + C = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{c} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C$$

Выделение полного квадрата в квадратном трёхчлене  $ax^2 + bx + c$  в интегралах  $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$  и  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ , также позволяет их свести к табличным интегралам, посредством замены

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Найдите  $\int \frac{(x+8)dx}{x^2+4x+20}$

**Решение.** Представим интеграл в виде суммы двух интегралов (6), в числителе у первого из них производная знаменателя, а у второго – константа.

$$\int \frac{(x+8)dx}{x^2+4x+20} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)+12}{x^2+4x+20} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+20} + 6 \int \frac{dx}{x^2+4x+20} =$$

Выделим полный квадрат в знаменателе дроби под знаком второго интеграла:  $x^2+4x+20=(x+2)^2+4^2$ . В результате:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+20)}{x^2+4x+20} + 6 \int \frac{dx}{(x+2)^2+4^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+20) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{4} + c$$

**Пример 2.** Найдите  $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-x+1}} dx$ .

**Решение.** Найдём дифференциал подкоренного выражения:

$$d(2x^2-x+1) = (4x-1)dx.$$

Получим  $4x-1$  в числителе:

$$3x-1 = \frac{3}{4}(4x-1) - \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-x+1}} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+1}} dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+1}} = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{2x^2-x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \sqrt{2x^2-x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}} \end{aligned}$$

Заменим в последнем интеграле  $x - \frac{1}{4} = t$ ,  $k^2 = \frac{7}{16}$ ,  $dx = dt$ :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k^2}} = \ln|t + \sqrt{t^2 + k^2}| + c = \ln\left|x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}\right| + c$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-x+1}} dx &= \frac{3}{2} \sqrt{2x^2-x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}\right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найдите  $\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-4x+7}} dx$ .

**Решение.** Так как

$d(-x^2-4x+7) = (-2x-4)dx$ , а  $x+1$  можно представить в следующем виде

$$x+1 = -\frac{1}{2}(-2x-4) - 1,$$

то

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-4x+7}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{(-2(x+2))}{\sqrt{-x^2-4x+7}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+7}} = \\ &= -\sqrt{-x^2-4x+7} - \int \frac{dx}{\sqrt{11-(x+2)^2}} = -\sqrt{-x^2-4x+7} - \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}, \end{aligned}$$

где  $t = x+2$ ,  $k = \sqrt{11}$ .

Последний интеграл является табличным:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{t}{k} + C = \operatorname{arcsin} \frac{x+2}{\sqrt{11}} + C.$$

Тогда

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-x^2-4x+7}} = -\sqrt{-x^2-4x+7} - \operatorname{arcsin} \frac{x+2}{\sqrt{11}} + C.$$

**Задание 4.** Интегрирование дробно-рациональных функций

Как известно, дробно-рациональной функцией (рациональной

дробью) называют функцию вида  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$

( $m, n, i, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ,  $a_i, b_j \in \mathbf{R}$ ,  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ ).

При интегрировании рациональной дроби прежде всего нужно выяснить, является ли она правильной или нет. Если рациональная дробь неправильная, т.е.  $n > m$ , то необходимо выделить её целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = G_{n-m}(x) + \frac{F_k(x)}{Q_m(x)}.$$

В результате мы получим многочлен  $G_{n-m}(x)$  степени  $n-m$ , называемый неполным частным, и остаток от деления – правильную дробь  $\frac{F_k(x)}{Q_m(x)}$ , в которой степень числителя  $0 \leq k < m$ .

Найти интеграл от многочлена  $G_{n-m}(x)$  труда не составляет. Если остаток от деления  $\frac{F_k(x)}{Q_m(x)}$  не удаётся проинтегрировать непосредственно с помощью элементарных методов интегрирования, то эту рациональную дробь следует разложить на простейшие дроби, то есть дроби четырёх типов:  $\frac{A}{x-a}$ ,  $\frac{A}{(x-a)^s}$ ,  $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ ,  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$ , где  $A, M, N, a, p, q \in \mathbf{R}$ ,  $s, r \in \mathbf{N}$ ,  $s, r \geq 2$ , а квадратный трёхчлен  $x^2+px+q$  не имеет действительных корней.

Воспользуемся теоремой о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Пусть знаменатель исходной дроби представим в виде произведения  $Q_m(x) = (x-a_1)^{s_1} \cdot (x-a_2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (x-a_k)^{s_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_lx+q_l)^{r_l}$ , (8) где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – действительные корни этого многочлена кратности  $s_1, s_2, \dots, s_k$  соответственно, а каждый квадратный трёхчлен  $x^2+p_ix+q_i$  имеет пару сопряжённых комплексных корней кратности  $r_i$ . Тогда рациональная дробь представима в виде суммы простейших дробей, причём их количество и вид этих дробей зависит от разложения  $Q_m(x)$ , а именно:

1) каждый множитель вида  $(x-a_j)^{s_j}$ , определяющий действительный корень  $a_j$  кратности  $s_j$ , порождает сумму  $s_j$  простейших дробей вида

$$\frac{A_{j1}}{x-a_j} + \frac{A_{j2}}{(x-a_j)^2} + \dots + \frac{A_{js_j}}{(x-a_j)^{s_j}},$$

2) каждый множитель вида  $(x^2+p_ix+q_i)^{r_i}$ , определяющий пару сопряжённых комплексных корней кратности  $r_i$ , порождает сумму  $r_i$  простейших дробей вида

$$\frac{M_{i1}x+N_{i1}}{x^2+p_ix+q_i} + \frac{M_{i2}x+N_{i2}}{(x^2+p_ix+q_i)^2} + \dots + \frac{M_{ir_i}x+N_{ir_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{r_i}}.$$

Складываем все промежуточные суммы и получаем следующее разложение:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1s_1}}{(x-a_1)^{s_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \dots + \frac{A_{ks_k}}{(x-a_k)^{s_k}} + \\ & + \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1r_1}x+N_{1r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \dots + \\ & + \frac{M_{l1}x+N_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \frac{M_{l2}x+N_{l2}}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + \dots + \frac{M_{lr_l}x+N_{lr_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{r_l}}. \end{aligned}$$

Простейшие дроби легко интегрируются. Для разложения рациональной дроби на простейшие остаётся отыскать значения постоянных  $A_i, M_i, N_i$ , стоящих в числителях простейших дробей. Для простоты напомним методы их нахождения на конкретных примерах.

**Пример 1.** Найдите  $\int \frac{x^2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

Решение.

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь (степень числителя 2 меньше степени знаменателя 3). Знаменатель имеет три действительных корня  $x=1, x=2, x=3$  первой кратности, значит, каждый из них порождает одну простейшую дробь первого типа, и в итоге мы имеем следующее разложение:

$$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}. \quad (9)$$

Домножим обе части равенства (8) на знаменатель исходной дроби

$$x^2-x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2). \quad (10)$$

Для нахождения неизвестных постоянных  $A, B, C$  используют два метода.

**Первый** их них основывается на том, что равенства (9) и (10) являются тождествами, то есть должны обращаться в верное равенство при любых значениях  $x$ . Для того чтобы найти значения трёх неизвестных

постоянных  $A, B, C$ , достаточно подставить в равенство (10) три различные значения  $x$ , получить систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными и решить её относительно  $A, B$  и  $C$ . Чтобы существенно упростить задачу, выберем в качестве значений  $x$  корни знаменателя  $x=1, x=2, x=3$ . Это позволяет обнулить несколько слагаемых правой части равенства (10). Тогда

$$x=1 \Rightarrow 1^2 - 1 + 2 = A(1-2)(1-3) + B(1-1)(1-3) + C(1-1)(1-2) \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$x=2 \Rightarrow 4 = -B \Rightarrow B = -4$$

$$x=3 \Rightarrow 8 = 2C \Rightarrow C = 4$$

Все константы найдены.

**Второй** метод основан на том, что в левой и правой частях равенства (10) находятся равные многочлены. В нашем случае, раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$x^2 - x + 2 = (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Как известно, два многочлена равны, если они одной степени и имеют равные коэффициенты при  $x$  в одинаковых степенях. Значит, в нашем случае

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 5A + 4B + 3C = 1 \\ 6A + 3B + 2C = 2 \end{cases}.$$

Решая эту систему, мы получим те же значения постоянных.

Теперь можно перейти к нахождению интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - 4 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \int \frac{d(x-1)}{x-1} - 4 \int \frac{d(x-2)}{x-2} + 4 \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \\ &= \ln|x-1| - 4 \ln|x-2| + 4 \ln|x-3| + C \\ &= \ln \frac{|x-1|(x-3)^4}{(x-2)^4} + C. \end{aligned}$$

Очевидно, что в данном примере решение с использованием первого метода оказывается более простым. Этот метод быстро приводит к результату, когда знаменатель дроби имеет только действительные корни первой кратности. Если же знаменатель имеет корни более высокой кратности или комплексные корни, то, как правило, в решении удобно

комбинировать использование первого и второго методов. Рассмотрим такой пример.

**Пример 2.** Найдите  $\int \frac{x^4 + x^3 + 17x^2 - 9}{x^2(x^3 - x^2 + 9x - 9)} dx$

Решение.

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Мы видим, что многочлен в скобках в знаменателе допускает дальнейшее разложение на множители. Приведём знаменатель к виду (8):

$$x^2(x^3 - x^2 + 9x - 9) = x^2(x-1)(x^2 + 9)$$

Приступим к разложению дроби  $\frac{x^4 + x^3 + 17x^2 - 9}{x^2(x-1)(x^2 + 9)}$  на простейшие.

Знаменатель дроби имеет следующие корни:

1)  $x=0$  – действительный корень 2-й кратности, значит, в разложении

имеем сумму двух простейших дробей вида  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$ ,

2)  $x=1$  – действительный корень первой кратности, значит, в разложении

добавится дробь  $\frac{C}{x-1}$ ,

3) многочлен  $x^2 + 9$  имеет пару комплексных корней первой кратности, он

порождает одну дробь вида  $\frac{Dx + E}{x^2 + 9}$ .

В итоге имеем разложение:  $\frac{x^4 + x^3 + 17x^2 - 9}{x^2(x-1)(x^2 + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 9}$ .

Умножив левую и правую части данного равенства на знаменатель исходной дроби, получим:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 17x^2 - 9 &= \\ &= Ax(x-1)(x^2 + 9) + B(x-1)(x^2 + 9) + Cx^2(x^2 + 9) + (Dx + E)x^2(x-1) \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользуемся первым методом отыскания постоянных. Зададим следующие значения переменной

$$x=0 \Rightarrow -9 = -9B \Rightarrow B=1$$

$$x=1 \Rightarrow 10 = 10C \Rightarrow C=1$$

Остальные константы найдём с помощью второго метода.

$$x^4 + x^3 + 17x^2 - 9 = (A + C + D)x^4 + (-A + B - D + E)x^3 +$$



$$+(9A - B + 9C - E)x^2 + (-9A + 9B)x - 9B.$$

$$\text{Таким образом, } \begin{cases} A + C + D = 1 \\ -A + B - D + E = 1 \\ 9A - B + 9C - E = 17, \text{ тогда с учётом уже найденных} \\ -9A + 9B = 0 \\ -9B = 9 \end{cases}$$

коэффициентов получим из первого уравнения:

$$A + D = 0, \quad (12)$$

из второго:  $E = 0$ ; из четвёртого:  $A = 1$ ; из уравнения (12):  $D = -1$ .

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + x^3 + 17x^2 - 9}{x^2(x-1)(x^2+9)} dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{xdx}{x^2+9} = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+9| + C. \end{aligned}$$

**Задание 5.** Интегрирование иррациональных функций вида

$$R(x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}^{m_1}, \dots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}^{m_s}).$$

$$\text{Интеграл вида } \int R(x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}^{m_1}, \dots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}^{m_s}) dx, \quad (13)$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_s$  целые, а  $k_1, k_2, \dots, k_s$  – натуральные, преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$ , где

$p$  – наименьшее общее кратное чисел  $k_1, k_2, \dots, k_s$ . Тогда  $x = \frac{d \cdot t^p - b}{a - c \cdot t^p}$  и

$$dx = \frac{(ad - bc)p \cdot t^{p-1}}{(a - c \cdot t^p)^2}.$$

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[k_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[k_2]{(ax+b)^{m_2}}, \dots, \sqrt[k_s]{(ax+b)^{m_s}}) dx$  и  $\int R(x, \sqrt[k_1]{x^{m_1}}, \sqrt[k_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[k_s]{x^{m_s}}) dx$  являются частными случаями интеграла (13)

и приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью аналогичных подстановок:  $ax+b = t^p$  и  $x = t^p$  соответственно.

**Пример 1.** Найдите интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}.$

**Решение.**

Здесь  $k_1 = 3, k_2 = 2$ , поэтому  $p = 6$ . Применим подстановку  $2x+1 = t^6$ . Тогда  $x = \frac{t^6 - 1}{2}$ ,  $dx = 3t^5 dt$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = 3 \int \left( t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} t^2 + 3t + 3 \ln|t-1| + C. \end{aligned}$$

Вернемся к старой переменной. Так как  $t = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$ , то

$$I = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2x+1} + 3 \sqrt[6]{2x+1} + 3 \ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| + C.$$

**Пример 2.** Найдите интеграл  $I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$

**Решение.**

Сделаем замену  $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ . Выражая отсюда  $x$ , получим

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \left( -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \right) dt.$$

$$\text{Тогда } \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -4 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Полученный интеграл вычислим с помощью метода интегрирования по частям

$$\begin{aligned} &\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = t \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right. \quad v = \int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} = \frac{du}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} \left. \right] = \\ &= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t) + C. \end{aligned}$$

Применив обратную подстановку, получим, что

$$I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

**Задание 6.** Интегрирование иррациональных функций вида  $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ ,  $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ ,  $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ .

Если интегралы от таких функций не удаётся найти более простыми методами, то во всех трёх случаях с помощью тригонометрических подстановок можно легко перейти от интеграла, который зависит от квадратичной иррациональности, к интегралу, рационально зависящему от тригонометрических функций. Рассмотрим эти подстановки.

1. Если подынтегральная функция имеет вид  $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ , то следует воспользоваться подстановкой  $x = a \sin t$  (или  $x = a \cos t$ ).

2. Если подынтегральная функция имеет вид  $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ , то применим подстановку  $x = a \operatorname{tg} t$  (или  $x = a \operatorname{ctg} t$ ).

3. Если подынтегральная функция имеет вид  $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ , то используем подстановку  $x = \frac{a}{\cos x}$  (или  $x = \frac{a}{\sin x}$ ).

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Найдите интеграл  $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}}$

**Решение.** В данном случае применима подстановка  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ .

Найдём новые пределы интегрирования. Так как  $t = \operatorname{arctg} x$ ;  $x=0 \Rightarrow t=0$ ,

$$x=1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} t dt}{\cos t \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 2)} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t dt}{\cos^2 t \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 2)} = - \int_0^{\pi/4} \frac{d \cos t}{1 + \cos^2 t} =$$

$$= - \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^{\pi/4} = - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

**Пример 2.** Найдите интеграл  $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx$

**Решение.** Поскольку подынтегральная функция имеет вид  $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ , воспользуемся подстановкой  $x = \frac{3}{\cos x}$ , тогда  $dx = \frac{3 \sin t dt}{\cos^2 x}$ .

Найдём новые пределы интегрирования. Поскольку  $t = \operatorname{arccos} \frac{3}{x}$ , имеем:

$$x=3 \Rightarrow t=0, \quad x=6 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} t \sin t \cos t dt = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t dt = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{6} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{6} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

**Задание 7.** Интегрирование тригонометрических функций  $R(\sin x, \cos x)$  методом подстановки.

Рассмотрим подстановки, с помощью которых интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  приводится к интегралу от рациональной функции.

1. Универсальная подстановка  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ .

В результате этой подстановки имеем  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ .

$$\sin x = 2 \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

**Пример 1.** Найдите интеграл  $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$ .

**Решение.** Подынтегральная функция рационально зависит от  $\sin x$  и  $\cos x$ , применим универсальную подстановку.

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = -\frac{1}{tg \frac{x}{2} + 2} + C.$$

Универсальная подстановка  $tg \frac{x}{2} = t$  во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при её применении  $\sin x$  и  $\cos x$  выражаются через  $t$  в виде рациональных дробей, содержащих  $t^2$ .

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  может быть упрощено.

2. Если  $R(\sin x, \cos x)$  – нечётная функция относительно  $\sin x$ , т.е.  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то подынтегральная функция становится рациональной при осуществлении подстановки  $\cos x = t$ .

3. Если  $R(\sin x, \cos x)$  – нечётная функция относительно  $\cos x$ , т.е.  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то, применяя подстановку  $\sin x = t$ , перейдём к интегралу от рациональной функции.

4. Если  $R(\sin x, \cos x)$  – чётная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ , т.е.  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , то цели приводит подстановку  $tg x = t$ .

**Пример 2.** Найти интеграл  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3}$ .

Решение.

Подынтегральная функция является нечётной по синусу, поэтому здесь можно сделать замену  $t = \cos x$ . Тогда  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$ ;

$$x = \arccos t, \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3} &= -\int \frac{1-t^2}{t-3} dt = \int \frac{t^2-9+8}{t-3} dt = \int (t+3) dt + 8 \int \frac{dt}{t-3} \\ &= \frac{t^2}{2} + 3t + \ln|t-3| + C \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} + 3 \cos x + \ln|\cos x - 3| + C. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найдите интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ .

Решение.

Подынтегральная функция чётна относительно синуса и косинуса.

Полагаем  $tg x = t$ , тогда

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{tg x}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \\ x &= \arctg t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C.$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tg x + 1 - \sqrt{2}}{tg x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Заметим, что вычисление интеграла можно упростить, если в исходном интеграле разделить числитель и знаменатель на  $\cos^2 x$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 2tg x - 1} \\ &= \int \frac{d(tg x)}{tg^2 x + 2tg x - 1}. \end{aligned}$$

## Раздел 2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 1. Методы интегрирования

**Задание 8.** Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Напомним формулу интегрирования по частям для определённого интеграла:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

где  $u(x)v(x)|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ .

**Пример 1.** Найдите значение интеграла  $\int_0^2 x \cos x dx$ .

**Решение.** Здесь в качестве  $u(x)$  выберем ту функцию, которая упростится при дифференцировании, то есть  $u(x) = x$ ,  $adu = dx$ . Тогда  $\cos x dx = v'(x)dx$ .

Найдём  $v(x): \int \cos x dx = \sin x + C$ . Достаточно взять одну из первообразных

$$v(x) = \sin x.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cos(x) dx &= \int_0^2 x d(\sin x) = x \sin(x)|_0^2 - \int_0^2 \sin(x) dx \\ &= 2 \sin 2 + \cos x|_0^2 = 2 \sin 2 + \cos 2 - 1 \end{aligned}$$

**Пример 2.** Найдите значение интеграла  $\int_1^e \sin(\ln x) dx$ .

**Решение.** Под интегралом стоит одна функция  $\sin(\ln x)$ , которая не является производной какой-либо элементарной функции. Выберем её в качестве  $u(x)$ . Тогда  $v(x) = x$ ,  $dv = dx$ .

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x)|_1^e - \int_1^e x d \sin(\ln x).$$

$$\text{Так как } du(x) = d \sin(\ln x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx,$$

$$\text{то } \int_1^e x d \sin(\ln x) = \int_1^e \cos(\ln x) dx.$$

Чтобы найти последний интеграл, воспользуемся формулой ещё раз.

$$\text{Пусть } u(x) = \cos(\ln x), du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx, dv = dx, v = x.$$

$$\int_1^e \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x)|_1^e + \int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

Тогда исходный интеграл будет равен

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx = e(\sin 1 - \cos 1) - \int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

Заметим, что интеграл в правой части равен интегралу в левой части равенства. Перенеся его в левую часть и разделив на 2 обе части равенства, получим:

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1).$$

**Задание 9.** Метод замены переменной в определённом интеграле.

Напомним правило замены переменной в определённом интеграле. Если функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[t_1, t_2]$ , причём  $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

**Пример 1.** Найдите значение интеграла  $\int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$ .

**Решение.** Применим подстановку  $x = 3 \sin t$ . Тогда

$$dx = 3 \cos t dt, t = \arcsin \frac{x}{3}, t_1 = \arcsin 0 = 0, t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin^2 t \cdot \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = \\ &= 81 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{81}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{81}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{81}{8} \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{16}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Найдите значение интеграла  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ .

**Решение.** Выполним замену  $\sqrt{e^x + 1} = t$ .

Тогда

$$e^x + 1 = t^2, x = \ln(t^2 - 1), dx = \frac{2tdt}{t^2 - 1}, t_1 = e^{\ln 3} + 1 = 4, t_2 = e^{\ln 8} + 1 = 9.$$

Замена переменной приведёт к подынтегральной функции, рационально зависящей от  $t$ .

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int_4^9 \frac{2tdt}{t(t^2 - 1)} = 2 \int_4^9 \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \Big|_4^9 = \ln 0,8 - \ln 0,6 = \ln \frac{4}{3}.$$

**Пример 3.** Найдите значение интеграла  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$ .

**Решение.** Применим подстановку  $x = \frac{1}{t}$ . Тогда  $dx = -\frac{1}{t^2} dt, t_1 = 4, t_2 = 1$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}} &= - \int_4^1 \frac{dt}{t^2 \frac{1}{t} \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}} = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 4} \right| \Big|_1^4 \\ &= \ln(4 + 2\sqrt{5}) - \ln(1 + \sqrt{5}) = \ln \frac{4 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

## 2. Приложения определённого интеграла

**Задания 10, 11, 12.** Нахождение площади области, ограниченной кривыми, и отыскание длины кривой.

Напомним основные формулы, используемые при нахождении площади области, ограниченной кривыми, и отыскании длины кривой, необходимые для решения типовых заданий этого раздела.

### Площадь в прямоугольных координатах

Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной кривой, уравнений которой в прямоугольных координатах имеет вид  $y = f(x)$ , осью  $Ox$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , ( $a < b$ ) находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Отрезок  $[a, b]$  следует разделить на части, в каждой из которых функция  $f(x)$  сохраняет один и тот же знак. При этом необходимо соблюдать такое правило знаков: площади, находящиеся над осью  $Ox$ , берутся со знаком плюс, а площади, расположенные под осью  $Ox$ , со знаком минус.

Если площадь ограничена двумя непрерывными кривыми, уравнения которых в прямоугольных координатах  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , причем всюду на отрезке  $[a, b] f_2(x) \geq f_1(x)$ , и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , ( $a < b$ ), то площадь определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

И в этом случае требуется соблюдать указанное выше правило знаков.

### Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной полярным уравнением и двумя радиусами-векторами

Если кривая, ограничивающая площадь, определяется уравнением

$$r = f(\varphi),$$

то площадь, ограниченная ею, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ( $\varphi_1 < \varphi_2$ ) – пределы изменения полярного угла.

### Вычисление длины дуги плоской кривой

1. Длина дуги плоской кривой, заданной в прямоугольных координатах уравнением  $y = f(x)$ , находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где  $a$  и  $b$  – соответственно абсциссы начала и конца дуги.

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}'$$

Причем  $t_1 \leq t \leq t_2$ , а функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные производные, то длина дуги

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

3. Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

а полярный угол  $\varphi$  на дуге изменяется от  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Рассмотрим примеры различных типовых заданий на нахождение площади области и длины кривой.

### Задача 1.

Найдите площадь, ограниченную осью  $Ox$  и кривой

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Решение. Найдём точки пересечения кривой с осью  $Ox$ . Для этого решим уравнение  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ . Полученные корни:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Построив эскиз графика (рис.1), мы видим, что на отрезке  $[2, 3]$  функция отрицательна. Поэтому на этом отрезке для вычисления площади берём значение интеграла с противоположным знаком.

$$S = S_1 - S_2 = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx - \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx = \frac{1}{2}.$$

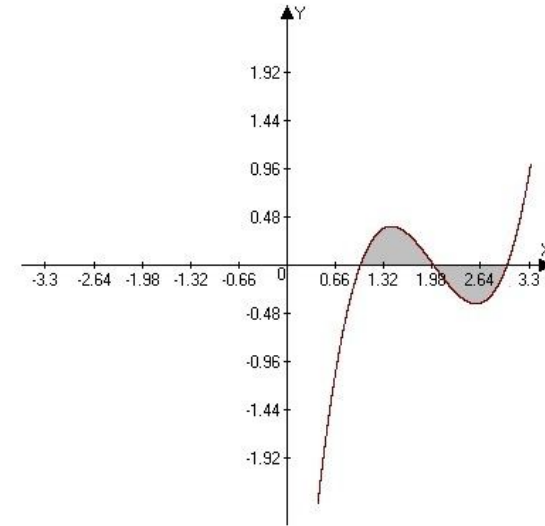


Рис.1

### Задача 2.

Найдите площадь фигуры, ограниченную линиями

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x = a \quad (a > 0) \text{ и осью абсцисс.}$$

Решение. Построим эскизы графиков данных функций (рис.2). Подграфик функции не ограничен. В этом случае, если несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом сходится, то его значение считают площадью фигуры. Таким образом, получаем

$$S = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

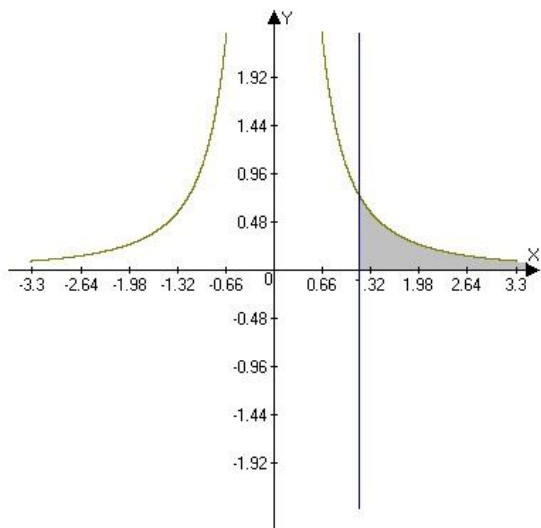


Рис.2

**Задача 3.**

Найдите площадь фигуры, лежащей в первой четверти внутри круга  $x^2 + y^2 = 3a^2$  и ограниченной параболой  $x^2 = 2ay$  и  $y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) (рис.3).

Решение. Построим графики и найдём координаты точек пересечения окружности с параболой. Для этого решим системы уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2, \\ y^2 = 2ax \end{cases}$  и  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2, \\ x^2 = 2ay. \end{cases}$  Единственный положительный корень первой системы  $(a, \sqrt{2}a)$  и второй системы  $(\sqrt{2}a, a)$ . Тогда интересующая нас площадь равна

$$S = \int_0^a \left( \sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a} \right) dx + \int_a^{\sqrt{2}a} \left( \sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2a} \right) dx =$$

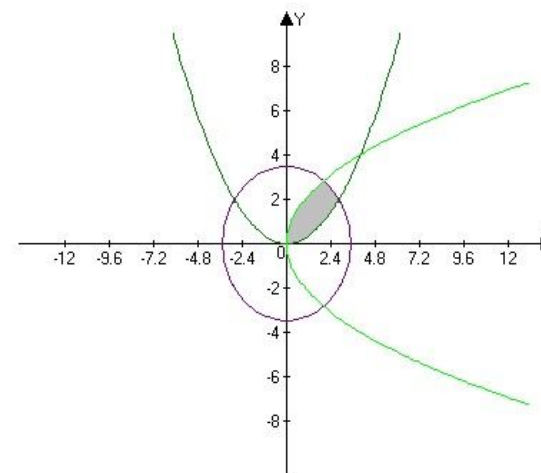


Рис.3

$$\begin{aligned} &= \left[ \sqrt{2a} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6a} \right]_0^a + \left[ \frac{x}{2} \sqrt{3a^2 - x^2} + \frac{3a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a\sqrt{3}} - \frac{x^3}{6a} \right]_a^{\sqrt{2}a} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^2 - \frac{a^2}{6} + \frac{3a^2}{2} \left( \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{3} a^2 + \frac{1}{6} a^2 = \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) a^2. \end{aligned}$$

Для преобразования разности арксинусов мы использовали формулу

$$\arcsin \alpha - \arcsin \beta = \arcsin \left( \alpha \sqrt{1 - \beta^2} - \beta \sqrt{1 - \alpha^2} \right) (\alpha\beta > 0).$$

**Задача 4.**

Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой

$$x = -2y^2, \quad x = 1 - 3y^2 \quad (\text{рис.4}).$$

Решение. Найдём точки пересечения парабол. Для этого найдём решения системы

$$\begin{cases} x = -2y^2, \\ x = 1 - 3y^2. \end{cases}$$

Решениями системы являются точки  $(-2, -1)$  и  $(-2, 1)$ . В данном случае удобнее интегрировать вдоль оси  $Oy$ . На отрезке  $-1 \leq y \leq 1$  выполняется неравенство  $1 - 3y^2 \geq -2y^2$ , поэтому

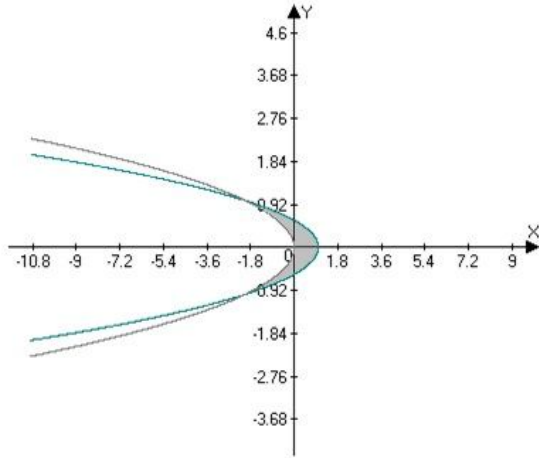


Рис.4

$$S = \int_{-1}^1 [(1 - 3y^2) - (-2y^2)] dy = 2 \left( y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

### Задача 5.

Найдите площадь петли кривой  $\begin{cases} x = 2t - \frac{t^2}{3}; \\ y = \frac{t^2}{8}(6 - t). \end{cases}$

Решение. Определим для начала общий вид кривой и точки её самопересечения. Обе функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены на всей числовой оси  $-\infty < t < +\infty$ .

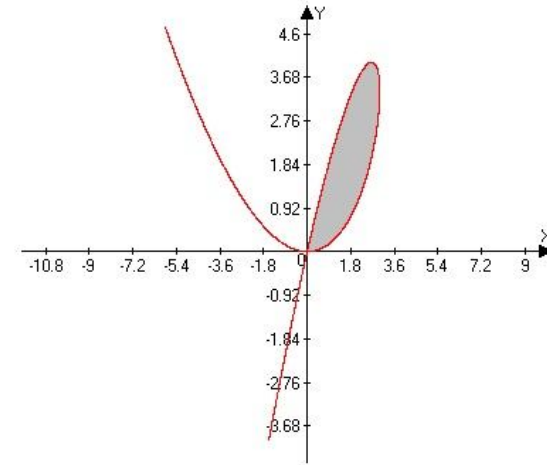


Рис.5

Точка самопересечения характерна тем, что в ней совпадают значения абсциссы (и ординаты) при разных значениях параметра. Так как  $x = 3 - \frac{1}{3}(t - 3)^2$ , то значения  $x(t)$  совпадают при значениях параметра  $t = 3 \pm \alpha$ . Чтобы функция  $y(t)$  принимала при тех же значениях параметра  $t$  одно и то же значение, должно выполняться равенство

$$\frac{(3 + \alpha)^2}{8}(3 - \alpha) = \frac{(3 - \alpha)^2}{8}(3 + \alpha), \quad \alpha \neq 0.$$

Откуда  $\alpha = \pm 3$ .

Таким образом, при  $t_1 = 0$  и при  $t_2 = 6$  имеем  $x(t_1) = x(t_2) = 0$ ,  $y(t_1) = y(t_2) = 0$ , т.е. точка  $(0, 0)$  является единственной точкой самопересечения. Когда  $t$  меняется от 0 до 6, точки кривой лежат в первой четверти. При изменении  $t$  от 0 до 3 обе функции  $x(t)$  и  $y(t)$  возрастают, и точки  $(x, y)$  образуют нижнюю часть петли. Далее  $x(t)$  при  $3 \leq t \leq 6$  убывает, а  $y(t)$  сначала продолжает возрастать, а затем убывает. Так и получается петля, при этом фигура находится слева. Такой обход соответствует возрастанию параметра.

Площадь искомой петли находим по формуле



$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - x'y) dt = \frac{1}{2} \int_0^6 \frac{t^2(6-t)^2}{24} dt = \frac{27}{5}.$$

**Задача 6.**

Найдите площадь, заключённую между осью  $Ox$  и вершиной, определяемой уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{a^3}{a^2 + t^2}. \end{cases}$$

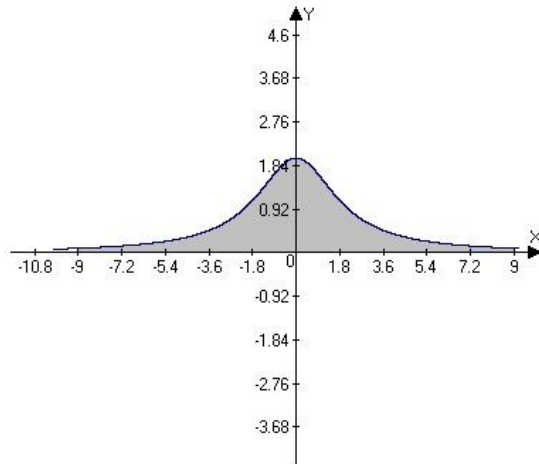


Рис.6

**Решение.** Значение аргумента  $x$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Кривая симметрична относительно оси  $Oy$ . Так как параметр  $t$  также меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то для вычисления площади используем несобственный интеграл с бесконечными пределами:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + t^2} dt = a^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = a^3 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= a^2 [\operatorname{arctg} (+\infty) - \operatorname{arctg} (-\infty)] = a^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi a^2. \end{aligned}$$

**Задача 7.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \sin 2t. \end{cases}$$

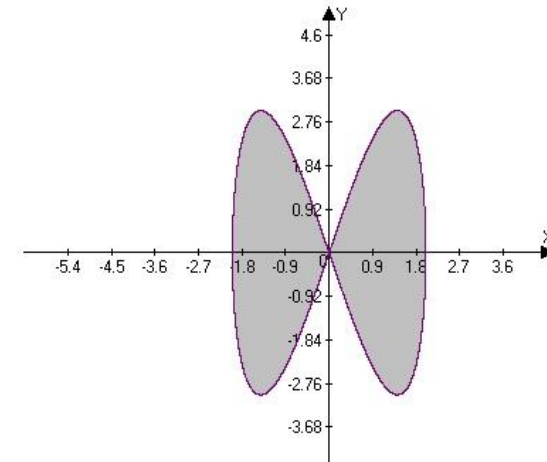


Рис.7

**Решение.** Для построения кривой учтем, что она симметрична относительно осей координат. Действительно, если заменить  $t$  на  $(\pi - t)$ , то переменная  $x$  не меняется, а  $y$  изменяет только свой знак; следовательно, кривая симметрична относительно оси  $Ox$ . При замене же  $t$  на  $(\pi + t)$  переменная  $y$  не меняется, а  $x$  меняет только свой знак. Это значит, что кривая симметрична относительно оси  $Oy$ .

Обе функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют общий период  $2\pi$ . Поэтому достаточно рассмотреть отрезок изменения параметра  $t \in [0, 2\pi]$ . Общий вид кривой изображён на рисунке 7. При изменении параметра от 0 до  $\frac{\pi}{2}$

обе функции сохраняют принимают неотрицательные значения. При этом  $x(t)$  возрастает на всем промежутке, а  $y(t)$  возрастает при  $0 \leq t < \frac{\pi}{4}$  и убывает при  $\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2}$ . Далее на отрезке изменения параметра  $t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$  обе функции убывают, имея при этом различные знаки. И, наконец, при  $t \in [\frac{3\pi}{4}; \pi]$  функция  $x(t)$  продолжает убывать, в то время как функция  $y(t)$  уже возрастает. В силу симметричности фигуры относительно осей координат нам достаточно найти площадь четверти фигуры. Тогда искомая площадь будет равна полученному результату, умноженному на 4:

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} x' y dt = 4 \int_0^{\pi/2} a \cdot \sin 2t \cdot b \cdot \cos t dt = 8ab \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt$$

$$= -8ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t d(\cos t) = -8ab \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3} ab.$$

### Задача 8.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной окружностями

$$r = 3\sqrt{2}a \cos \varphi \text{ и } r = 3a \sin \varphi \text{ (рис.8).}$$

Решение. Окружность  $r = 3\sqrt{2}a \cos \varphi$  лежит в правой полуплоскости, проходит через полюс  $r = 0$ , касаясь вертикальной прямой. Вторая окружность  $r = 3a \sin \varphi$  лежит в верхней полуплоскости, также проходит через полюс  $r = 0$ , касаясь горизонтальной прямой. Очевидно, что полюс является точкой пересечения окружностей. Вторую точку пересечения  $B$  находим из уравнения

$$3\sqrt{2}a \cos \varphi = 3a \sin \varphi.$$

Откуда  $B(\arctg \sqrt{2}, \sqrt{6})$ . Из рисунка 8 видно, что искомая площадь представляет собой сумму двух сегментов  $OABO$  и  $OBCO$ . Отрезок  $[OB]$  лежит на луче  $\varphi = \arctg \sqrt{2}$ . Таким образом, сегмент  $OABO$  ограничен дугой первой окружности при  $\arctg \sqrt{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  и отрезком  $[OB]$ , а сегмент  $OBCO$  – отрезком  $[OB]$  и дугой второй окружности при  $0 \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}$ . Поэтому имеем

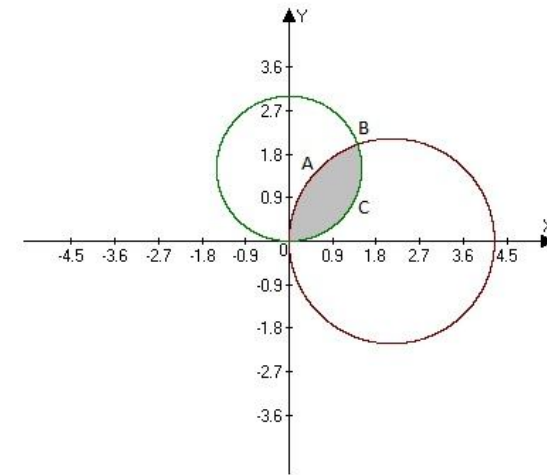


Рис.8

$$S_{OABO} = 9a^2 \int_{\arctg \sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 9a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right),$$

$$S_{OBCO} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\arctg \sqrt{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{9}{4} a^2 \left( \arctg \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right),$$

$$S = S_{OABO} + S_{OBCO} = \frac{9}{4} a^2 (\pi - \arctg \sqrt{2} - \sqrt{2}).$$

### Задача 9.

Вычислите длину дуги  $y$  кривой  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ , заключённой между точками с ординатами  $y = 1$  и  $y = 2$ .

Решение. Здесь удобнее рассматривать в качестве независимой переменную  $y$ .

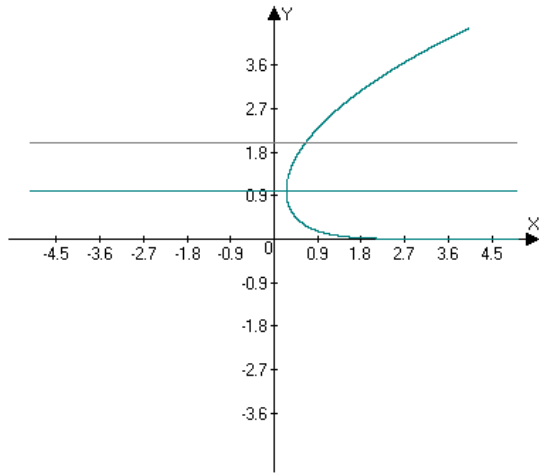


Рис.9

Тогда найдём производную функции  $x(y)$  по переменной  $y$ :

$$x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y},$$

$$\sqrt{1+x'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}.$$

Длину дуги вычислим по формуле:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+x'^2} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

### Задача 10.

Вычислите длину дуги кривой  $y = \ln \cos x$ , заключённой между точками с абсциссами  $x = 0$  и  $x = \frac{\pi}{4}$ .

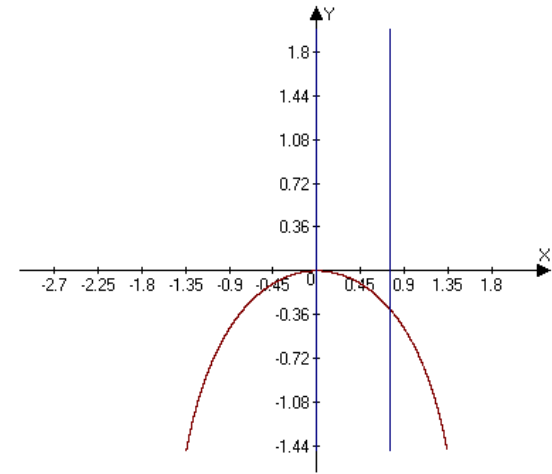


Рис.10

Решение. Поскольку  $y' = -tg x$ , то  $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+tg^2 x} = \frac{1}{\cos x}$ . Тогда длина дуги равна

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\pi/4} = \ln tg \frac{3\pi}{8}.$$

### Задача 11.

Найдите длину замкнутой кривой  $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ .

Решение. Кривая задана в полярных координатах. Найдём границы изменения угла  $\varphi$ . Так как  $r$  – расстояние, то должно выполняться неравенство  $r \geq 0$ . И значит  $\sin \frac{\varphi}{3} \geq 0$ . Отсюда  $0 \leq \varphi \leq 3\pi$ .

При изменении  $\varphi$  от 0 до  $\frac{3\pi}{2}$  длина радиус-вектора  $r$  возрастает от 0 до  $a$ , а конец радиус-вектора описывает дугу  $OAMB$  (рис.11). Когда  $\varphi$  меняется от  $\frac{3\pi}{2}$  до  $3\pi$  величина  $r$  убывает от  $a$  до 0 (дуга  $BCAO$ ). Таким образом получаем замкнутую кривую, симметричную относительно прямой

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Значит для вычисления длины кривой мы можем найти половину ее длины ( $0 < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ ) и результат умножить на 2.

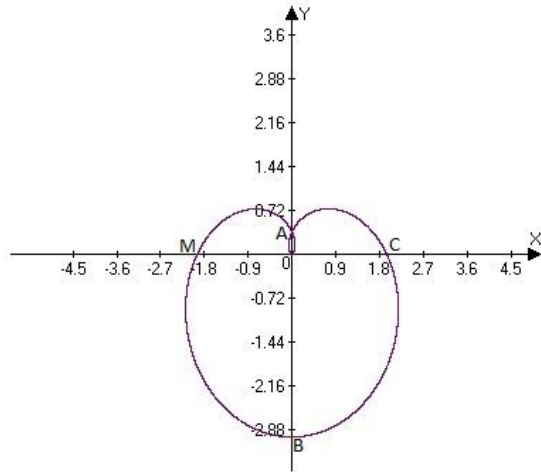


Рис.11

Длину находим по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

$$r' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3},$$

$$l = a \int_0^{3\pi/2} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{3\pi/2} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = a \left( \varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{3\pi/2} = \frac{3a\pi}{2}.$$

### Задача 12.

Вычислите длину логарифмической спирали  $r = a e^{m\varphi}$  от некоторой её точки  $(r_0, \varphi_0)$  до переменной точки  $(r, \varphi)$ .

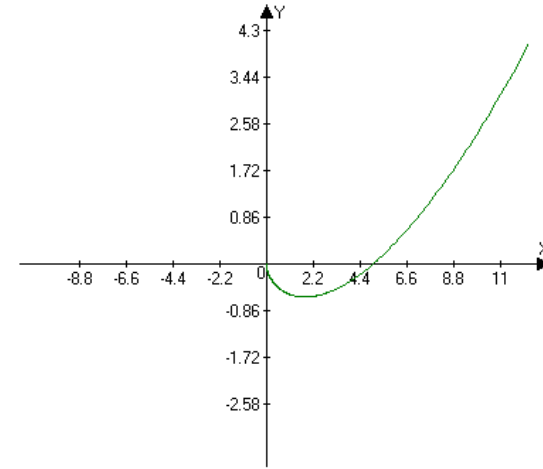


Рис.12

Решение. В этом случае, поскольку мы не знаем, какая из величин  $\varphi_0$  или  $\varphi$  больше, то находим длину дуги как модуль интеграла

$$\begin{aligned} l &= \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \right| = \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} d\varphi \right| \\ &= a \sqrt{1 + m^2} \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{m\varphi} d\varphi \right| = a \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} |e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}| \\ &= \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} |r - r_0|. \end{aligned}$$

Таким образом, длина дуги логарифмической спирали пропорциональна приращению полярного радиуса дуги.

### Задача 13.

Вычислите длину петли кривой  $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

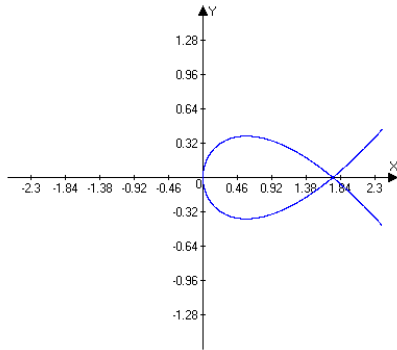


Рис.13

Решение.Найдём пределы интегрирования. Обе функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены при всех значениях параметра  $t$ . Кроме того,  $x(t)$  – чётная и неотрицательная, а  $y(t)$  меняет знак и нечётная. Поэтому кривая расположена в правой полуплоскости, симметрично относительно оси абсцисс. Определим точки самопересечения кривой:

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2), \\ y(t_1) = y(t_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}t_1^2 = \sqrt{3}t_2^2, \\ t_1 - t_1^3 = t_2 - t_2^3. \end{cases}$$

Решение системы даёт единственную точку самопересечения кривой, а именно  $(\sqrt{3}, 0)$  при значениях параметра  $t = \pm 1$ . Таким образом, границами интегрирования являются значения параметра  $t_1 = -1, t_2 = 1$ . Длину дуги вычисляем по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{(2\sqrt{3}t)^2 + (1 - 3t^2)^2} dt = \int_{-1}^1 (1 + 3t^2) dt = 4.$$

### Раздел 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задание 13.Нахождение несобственных интегралов:

- по бесконечному промежутку интегрирования,
- от неограниченной на отрезке функции.

**A.**Напомним, что несобственные интегралы по бесконечному промежутку определяются посредством предельного перехода.Ограничимся рассмотрением непрерывных на промежутке функций.

Если функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a, +\infty)$ , то

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $(-\infty, b]$ , то

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если функция непрерывна на всей числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, c \in \mathbb{R}.$$

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся, если же предел не существует или бесконечен, то интеграл называют расходящимся.

Пример 1. Найдите значение несобственного интеграла или установите его

расходимость:  $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ .

Решение. По определению несобственного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 0) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b \end{aligned}$$

Так как этот предел не существует, несобственный интеграл расходится.

**Пример 2.** Найдите значение несобственного интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$ .

**Решение:** По определению несобственного интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^3} dx = \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x^{-3} dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^b + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln b}{2b^2} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{4x} \right) \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{b \cdot 4b} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \left( -\frac{1}{4b} \right) + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Для нахождения значения исходного интеграла мы применили формулу интегрирования по частям  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ , а также воспользовались правилом Лопиталя для отыскания предела  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln b}{2b^2} \right)$ .

**Пример 3.** Найдите значение несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

**Решение:** Подынтегральная функция чётная, поэтому можно воспользоваться свойством несобственных интегралов по симметричному промежутку от чётных функций

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \\ &= \frac{2}{3} \left( \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 4} \right) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan x \Big|_0^b) - \frac{2}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_0^b \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

**Б.** Значения несобственных интегралов от неограниченных в окрестности некоторой точки функций также определяются посредством предельного перехода.

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $(a, b]$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, (\varepsilon > 0).$$

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \pm\infty$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx, (\delta > 0).$$

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  всюду, за исключением точки  $c \in (a, b)$ , и хотя бы один из односторонних пределов функции  $f(x)$  в этой точке бесконечен, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Несобственный интеграл называют сходящимся, если его значение существует и конечно, и расходящимся в противном случае.

**Пример 1.** Найдите значение несобственного интеграла или установите его расходимость.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$$

**Решение:** Функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна при  $-1 \leq x < 0$  и  $0 < x \leq 2$  и имеет бесконечные односторонние пределы в точке  $x = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{0+\delta}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon}) + \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|x| \Big|_{+\delta}^2) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon + \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln 2 - \ln \delta) \end{aligned}$$

Несобственные интегралы  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$  и  $\int_0^2 \frac{dx}{x}$  расходятся, значит, расходится и исходный интеграл.

**Пример 2.** Найдите значение несобственного интеграла.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

**Решение:** Функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$  непрерывна при  $0 < x < 1$  и имеет бесконечные односторонние пределы  $f(0+0) = f(1-0) = +\infty$ . Тогда, чтобы упростить запись решения, заменим сумму двух пределов одним пределом с двумя условиями  $\delta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\delta > 0, \varepsilon > 0$ ).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \\ &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} (\arcsin(2x-1)) \Big|_{\varepsilon}^{1-\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin(2-2\delta-1) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(2\varepsilon-1) = \pi. \end{aligned}$$

## Часть 2. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

**Задание 1.** Проинтегрируйте методом внесения под знак дифференциала.

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\int \frac{\sin x \, dx}{2 - \cos x}$              | 16. $\int \frac{(1 + \operatorname{ctg}^3 x) \, dx}{\sin^2 x}$                      |
| 2. $\int x^2 \sqrt{3+x^3} \, dx$                       | 17. $\int \frac{(3^x - 3^{-x}) \, dx}{3^x + 3^{-x}}$                                |
| 3. $\int \frac{\arcsin^3 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$       | 18. $\int \frac{(\arccos x - 1) \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$                               |
| 4. $\int \frac{(\ln \ln x)^3 \, dx}{x \ln x}$          | 19. $\int \frac{(5 \cdot 3^{2x} + 3) \, dx}{5^x}$                                   |
| 5. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2(2x^2 + 1)}$             | 20. $\int \frac{2 - \operatorname{arctg}^2 x \, dx}{1+x^2}$                         |
| 6. $\int \frac{x}{2+x^4} \, dx$                        | 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos^2 x}$                                |
| 7. $\int \frac{e^{3x} \, dx}{1+e^{6x}}$                | 22. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + 2}{\cos^2 x} \, dx$                       |
| 8. $\int \frac{(4x-1) \, dx}{\sqrt{x^2+2}}$            | 23. $\int e^{2\sin x} \cos x \, dx$   |
| 9. $\int e^{3\cos x} \sin x \, dx$                     | 24. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}} \, dx}{\sqrt{2x-1}}$                                |
| 10. $\int \frac{(e^{-3\sqrt{x}} + 1) \, dx}{\sqrt{x}}$ | 25. $\int (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x^3+3x^2-3x+4} \, dx$                            |
| 11. $\int \frac{10 + \ln^2 x}{x} \, dx$                | 26. $\int \frac{1}{x^4} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3} + \frac{\pi}{8}\right) \, dx$ |

12.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$

27.  $\int \frac{(\ln(2x+5)-1)}{x+2,5} dx$

13.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

28.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+3\cos x}} dx$

14.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} dx$

29.  $\int \frac{(3x+1) dx}{\sqrt{3-x^2}}$

15.  $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x} - 1}{\sin^2 x} dx$

30.  $\int \frac{x^3 \ln(x^4+1) dx}{x^4+1}$

8.  $\int \cos x \cdot \cos 3x dx$

23.  $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} dx$

9.  $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt[4]{\sin 5x}} dx$

24.  $\int \cos^3 \frac{x}{6} \cdot \sin^2 \frac{x}{6} dx$

10.  $\int \cos^2 \left( \frac{x}{2} + 1 \right) dx$

25.  $\int \sqrt{\cos^5 x} \cdot \sin x dx$

11.  $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$

26.  $\int \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} dx$

12.  $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^2 2x} dx$

27.  $\int \sin \frac{x}{5} \cdot \cos \frac{3x}{5} dx$

13.  $\int \cos^3 \frac{x}{2} dx$

28.  $\int \sin^3 5x \cdot \cos^3 5x dx$

14.  $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx$

29.  $\int \cos^4 2x dx$

15.  $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx$

30.  $\int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx$

**Задание 2.** Найдите интеграл от тригонометрической функции:

1.  $\int \sin^4 \frac{3x}{2} dx$

16.  $\int \sin^2 \left( \frac{x}{4} + 3 \right) dx$

2.  $\int \sin 3x \cdot \cos x dx$

17.  $\int \cos 4x \cdot \cos 5x dx$

3.  $\int \sin^5 2x \cdot \cos 2x dx$

18.  $\int \frac{\sin^3(x-1)}{\cos^2(x-1)} dx$

4.  $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$

19.  $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$

5.  $\int \sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{2x}{3} dx$

20.  $\int \sin x \cdot \sin 6x dx$

6.  $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$

21.  $\int \sqrt[3]{\sin x} \cdot \cos x dx$

7.  $\int \sin^3 \frac{4x}{5} dx$

22.  $\int \sin^2(2x+1) \cdot \cos^2(2x+1) dx$

**Задание 3.** Найдите интеграл:

1.  $\int \frac{(3x+2) dx}{2x^2+4x+16}$

16.  $\int \frac{(4x-1) dx}{\sqrt{9x^2-3x+2}}$

2.  $\int \frac{(x-2) dx}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$

17.  $\int \frac{(2x-5) dx}{\sqrt{4-2x-2x^2}}$

3.  $\int \frac{(7x-5) dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

18.  $\int \frac{(3x-2) dx}{\sqrt{4x^2+2x-3}}$



4. 
$$\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+5x+2}}$$

5. 
$$\int \frac{(2-3x)dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$$

6. 
$$\int \frac{(5x-1)dx}{4x^2-x+3}$$

7. 
$$\int \frac{(7-3x)dx}{\sqrt{x^2-4x-2}}$$

8. 
$$\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{4+6x-4x^2}}$$

9. 
$$\int \frac{(1-6x)dx}{\sqrt{5x^2+x-6}}$$

10. 
$$\int \frac{(2-3x)dx}{6x^2-2x+1}$$

11. 
$$\int \frac{(6x+1)dx}{\sqrt{3x^2-4x+2}}$$

12. 
$$\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{4-x-3x^2}}$$

13. 
$$\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{2x^2-x-6}}$$

14. 
$$\int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{1-4x-5x^2}}$$

15. 
$$\int \frac{(3-x)dx}{3x^2-6x+4}$$

19. 
$$\int \frac{(3-x)dx}{\sqrt{1+6x-7x^2}}$$

20. 
$$\int \frac{(5-x)dx}{2x^2+2x+1}$$

21. 
$$\int \frac{(1-3x)dx}{\sqrt{1+x-2x^2}}$$

22. 
$$\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{3x^2+2x-5}}$$

23. 
$$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{7x-3-2x^2}}$$

24. 
$$\int \frac{(7x+6)dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}$$

25. 
$$\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+x+2}$$

26. 
$$\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2+5x-3x^2}}$$

27. 
$$\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}$$

28. 
$$\int \frac{(5-x)dx}{3x^2+2x+1}$$

29. 
$$\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{1+3x-4x^2}}$$

30. 
$$\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$$

**Задание 4.** Найдите интеграл от дробно-рациональной функции:

1. 
$$\int \frac{(2x^3+3x^2+3)dx}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

2. 
$$\int \frac{(x^4-x+1)dx}{(x+1)^3(x^2+2)}$$

3. 
$$\int \frac{(x^4-3x^3+x^2-5x-2)dx}{(x-1)(x^4-1)}$$

4. 
$$\int \frac{(x^2-8x+22)dx}{(x-2)^2(x^2-x+3)}$$

5. 
$$\int \frac{2(x^2-2x+4)dx}{x^3(x^2+4)}$$

6. 
$$\int \frac{x^4+4x^2+2x+1}{(x+1)(x^4-1)}$$

7. 
$$\int \frac{(x^2-2x^3+11)dx}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$$

8. 
$$\int \frac{(x^3+4x^2+x+2)dx}{x^3(x^2+1)}$$

9. 
$$\int \frac{(5x^3+10x^2+8x-15)dx}{x^2(x-3)(x^2+4x+5)}$$

10. 
$$\int \frac{(x^3-7x+2)dx}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$$

11. 
$$\int \frac{(x^3+6x^2+2x+4)dx}{x^3(x^2+2)}$$

12. 
$$\int \frac{(x^4-5x^2+9x-4)dx}{x(x-1)^2(x^2-2x+2)}$$

16. 
$$\int \frac{x(x+1)dx}{(x-2)^2(x^2-3x+5)}$$

17. 
$$\int \frac{(x^3+7x^2+5x+10)dx}{x^3(x^2+5)}$$

18. 
$$\int \frac{(4x^4+5x^2-21x+10)dx}{x^2(x-2)(x^2+2x+5)}$$

19. 
$$\int \frac{(x^2+10x+1)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$$

20. 
$$\int \frac{(x^3+4x^2+6x+2)dx}{x^2(x+1)(x^2+2x+2)}$$

21. 
$$\int \frac{(x^4-23x^2+32x+18)dx}{x(x+3)^2(x^2-2x+2)}$$

22. 
$$\int \frac{x(x+4)dx}{(x-2)^2(x^2-3x+8)}$$

23. 
$$\int \frac{(3x^3+9x^2+8x+1)dx}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}$$

24. 
$$\int \frac{(2x^3-6x^2+10x-9)dx}{(x-1)^2(x^2-3x+5)}$$

25. 
$$\int \frac{(x^2+6x+1)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}$$

26. 
$$\int \frac{(3x^3+7x^2+9x+3)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}$$

27. 
$$\int \frac{(x^4+8x^2+8x+4)dx}{x(x+1)^2(x^2+4)}$$

$$13. \int \frac{(2x^3 + x + 7)dx}{(x-1)^2(x^2 - x + 5)}$$

$$28. \int \frac{(x^2 + 18x + 20)dx}{(x+2)^2(x^2 + 3x + 8)}$$

$$14. \int \frac{(x^3 + 5x^2 + 3x + 6)dx}{x^3(x^2 + 3)}$$

$$29. \int \frac{(2x^3 + 3x^2 + 3)dx}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)}$$

$$15. \int \frac{(8x^2 - 6x^3 + 3x - 40)dx}{x(x+2)^2(x^2 - 4x + 5)}$$

$$30. \int \frac{2x(x^3 + 6x - 12)dx}{(x-2)(x^4 - 16)}$$

**Задание 5.** Найдите интеграл от иррациональной функции:

$$1. \int \frac{\sqrt[4]{x+3}-1}{\sqrt{x+3}(1+\sqrt[3]{x+3})} dx$$

$$16. \int \frac{x}{2+\sqrt{2x+1}} dx$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}} dx$$

$$17. \int \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7} dx$$

$$3. \int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}} dx$$

$$18. \int \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}} dx$$

$$4. \int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx$$

$$19. \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

$$5. \int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3-7x-6}\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$20. \int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1} \frac{dx}{x^3}}$$

$$6. \int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}} dx$$

$$21. \int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}} dx$$

$$7. \int \frac{x+\sqrt{2+x}}{\sqrt[3]{2+x+1}} dx$$

$$22. \int \frac{dx}{2\sqrt{x+5}-\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[4]{x+5}}$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{5x+6}}$$

$$23. \int \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}} dx$$

$$9. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$24. \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$$

$$25. \int \frac{\sqrt[4]{x-3}+1}{2-\sqrt[4]{x-3}} dx$$

$$11. \int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}} dx$$

$$26. \int \frac{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^{15}}{\sqrt[6]{x^5}} dx$$

$$12. \int \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}} dx$$

$$27. \int \frac{3x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} dx$$

$$13. \int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx$$

$$28. \int \frac{dx}{4\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}$$

$$14. \int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}} dx$$

$$29. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$15. \int \frac{\sqrt[3]{x+5}+2}{1+\sqrt[3]{x+5}} dx$$

$$30. \int \frac{4\sqrt{x+7}}{(x+7)^2\sqrt{x-3}} dx$$

**Задание 6.** Найдите интеграл от иррациональной функции, используя тригонометрические подстановки:

$$1. \int x^4 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$16. \int x^3 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$2. \int x^3 (1+x^2)^{3/2} dx$$

$$17. \int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$$

$$3. \int \frac{\sqrt{(x^2-25)^3}}{x^6} dx$$

$$18. \int \frac{x^2}{(2-x^2)^{3/2}} dx$$

4. 
$$\int \frac{x^3}{(\sqrt{9-x^2})^5} dx$$

5. 
$$\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^3} dx$$

6. 
$$\int \frac{x^2}{(16+x^2)^{3/2}} dx$$

7. 
$$\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$$

8. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6)^3}}$$

9. 
$$\int \frac{x+1}{(9+x^2)^{3/2}} dx$$

10. 
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{(x^2-3)^5}}$$

11. 
$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

12. 
$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^5} dx$$

13. 
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{(5+x^2)^3}}$$

14. 
$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

19. 
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(4+x^2)^3}} dx$$

20. 
$$\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^3} dx$$

21. 
$$\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

22. 
$$\int \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^2} dx$$

23. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6)^3}}$$

24. 
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(25-x^2)^3}} dx$$

25. 
$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x^2-1)^3}}$$

26. 
$$\int x^5 \sqrt{x^2+1} dx$$

27. 
$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+16}}$$

28. 
$$\int (1+x)^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

29. 
$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$$

15. 
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(9+x^2)^3}} dx$$

30. 
$$\int x^3 \sqrt{x^2+2} dx$$

**Задание 7.** Проинтегрируйте тригонометрические функции методом подстановки:

1. 
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

2. 
$$\int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$$

3. 
$$\int \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}$$

4. 
$$\int \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}$$

5. 
$$\int \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$$

6. 
$$\int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x)(1 - \sin x)}$$

7. 
$$\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}$$

8. 
$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

9. 
$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + 3 \sin^2 x} dx$$

10. 
$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \sin 2x} dx$$

16. 
$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 5} dx$$

17. 
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}$$

18. 
$$\int \frac{(1 + \sin x) dx}{(1 - \sin x)^2}$$

19. 
$$\int \frac{\cos^2 x dx}{(1 - \sin x + \cos x)^2}$$

20. 
$$\int \frac{(4 - 7 \operatorname{tg} x) dx}{2 + 3 \operatorname{tg} x}$$

21. 
$$\int \frac{6 \sin^2 x dx}{3 \cos 2x - 4}$$

22. 
$$\int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}$$

23. 
$$\int \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}$$

24. 
$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx$$

25. 
$$\int \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$$

$$11. \int \frac{(1 + \cos x)^2 dx}{1 + \sin x}$$

$$26. \int \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx$$

$$5. \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$20. \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \cos \frac{x}{3} dx$$

$$12. \int \frac{1 + \sin x}{\sin 2x + 2 \sin x} dx$$

$$27. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x}$$

$$6. \int_0^2 (5 - x^2) e^{-x} dx$$

$$21. \int_{-1}^1 \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin 2x + 4 \sin x - 4 \sin^2 x}$$

$$28. \int \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx$$

$$7. \int_0^1 x^2 (\sin 3x + 2) dx$$

$$22. \int_{1/3}^{2/3} (x^2 - x + 1) e^{3x} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$29. \int \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}$$

$$8. \int_{\pi/6}^{\pi/3} (2 - x^2) \sin x dx$$

$$23. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) e^{-x} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4}$$

$$30. \int \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$$

$$9. \int_0^{1/5} \arcsin 5x dx$$

$$24. \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx$$

$$10. \int_{3/4}^1 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$25. \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx$$

**Задание 8.** Найдите значение интеграла методом интегрирования по частям:

$$1. \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$$

$$16. \int_0^{1/2} \ln \frac{1-x}{1+x} dx$$

$$2. \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x dx$$

$$17. \int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$$

$$3. \int_{-1}^0 (x^2 + x) e^x dx$$

$$18. \int_0^{1/2} \arccos 2x dx$$

$$4. \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$19. \int_0^2 (x^2 + 1) e^{2x} dx$$

$$11. \int_0^4 \ln(2x + 1) dx$$

$$26. \int_0^{1/4} \operatorname{arctg} 4x dx$$

$$12. \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$27. \int_{-4}^2 x \cos(x + 4) dx$$

$$13. \int_0^e \frac{\ln x dx}{x^2}$$

$$28. \int_{-1}^{1/2} \ln(2x + 3) dx$$

$$14. \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

$$29. \int_0^2 (x + 2) \sin 3x dx$$

$$15. \int_0^1 x \ln(x+1) dx$$

$$30. \int_{1/3}^1 x e^{3x+2} dx$$

$$12. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

$$27. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$$

$$13. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$$

$$28. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{3e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx$$

$$14. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$$

$$29. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$$

$$15. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$30. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

**Задание 9.** Найдите значение интеграла методом замены переменной в определённом интеграле:

$$1. \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$16. \int_{\sqrt{6}/3}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{(x^2-5)^5}} dx$$

$$2. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$17. \int_1^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$$

$$3. \int_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{3x+1}}$$

$$18. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$4. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$19. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{4-x^2}}$$

$$5. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$$

$$20. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2-x+1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$6. \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}+1} dx$$

$$21. \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \sqrt{\cos \varphi} d\varphi$$

$$8. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

$$23. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$$

$$9. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$24. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$$

$$10. \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$$

$$25. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$$

$$11. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$26. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$$

**Задание 10.** Найдите площадь области, ограниченной кривыми, заданными в декартовых координатах

$$1. y = x^2 e^{-x}, y = 0, x = 2.$$

$$2. y = 5 \sin x, y = 5 \cos x.$$

$$3. y = x \ln^2 x, y = x \ln x.$$

$$4. y = \frac{4}{3} \cos x, y = 2 \operatorname{tg} x, x = 0.$$

$$5. y = x^4 - 4x^3 + 4x^2, y = 0.$$

$$6. y = x, y = -x, x^2 - y^2 = 1.$$

$$7. y^2 = 3(3-x), x^2 + y^2 = 9.$$

$$8. y = 0, y = (x-4)^2, y = 16-x^2.$$

$$9. xy = 3, x + y = 4.$$

$$10. y = \frac{3}{2} \left( e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right), x = 3.$$

$$11. y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 9, a > 0.$$

$$12. y = \frac{8}{4+x^2}, y = \frac{x^2}{4}.$$

$$13. y = 0, y = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$14. y = 0, x = 0, x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 4.$$

$$15. y^2 = 2x, y^2 = 4x - x^2.$$

$$16. y = (x+1)^2, y = (x-1)^2, y = 0.$$

$$17. y = 0, x = 0, x = 2, y = (x-1)^3.$$

18.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, x = 5.$
19.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, y = 0, y = 4.$
20.  $y^2 = 8x, x^2 = 8y.$
21.  $x^2 = 2y, y = \frac{1}{x^2+1}, a > 0.$
22.  $x^2 + y^2 = 16x, y^2 = 8x.$
23.  $y = x^2 - x, y^2 = 2x.$
24.  $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}, y = 0, x = 1.$
25.  $x = -1, x = 1, y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$
26.  $y = x^2 \ln x, y = 0.$
27.  $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, y = 0.$
28.  $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3.$
29.  $y = \frac{1}{1+\cos x}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}.$
30.  $y = x^2 \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

**Задание 11.** Найдите длину кривой, заданной в декартовых координатах

1.  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq e.$
2.  $y = \ln x, \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{12}{5}.$
3.  $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$
4.  $y = 1 + \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$
5.  $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$
6.  $y = \arccos e^{-x}, 0 \leq x \leq 1.$
7.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$
8.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$
9.  $y = e^x, 0 \leq x \leq 1.$
10.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4.$
11.  $\frac{y^2}{5} = x^3, 0 \leq x \leq 1.$
12.  $y = \frac{(2x-1)^2}{4}, 0 \leq x \leq 2.$

13.  $y = 6 \cos^2 x, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}.$
14.  $y = \arccos e^x, -1 \leq x \leq 0.$
15.  $y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$
16.  $y^2 = \frac{x^3}{8}, 0 \leq x \leq 2.$
17.  $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
18.  $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
19.  $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}, 1 \leq x \leq 6.$
20.  $y = 1 + \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
21.  $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$
22.  $y^2 - 2y = 4x, -1 \leq x \leq 0.$
23.  $x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq e.$
24.  $y = 4 \sin^2 x, -\pi \leq x \leq \pi.$
25.  $y = x \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0.$
26.  $y = x \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
27.  $y = x \arctg x, -1 \leq x \leq 1.$
28.  $y = x - \arctg x, -1 \leq x \leq 1.$
29.  $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
30.  $y = 1 + \ln \sin x, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$

**Задание 12.** Вычислите

1. а) Площадь внутри астроида

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

- б) Длину дуги первого витка спирали Архимеда  $r = 6\varphi.$

2. а) Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 (r \geq 3).$

$$\text{б) Длину дуги кривой } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

3. а) Площадь, ограниченную осью  $Ox$  и одной аркой циклоиды  
 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$   
 б) Длину кардиоиды  $r = 6(1 - \cos \varphi)$ .

4. а) Площадь, ограниченную кардиоидой  $r = 8(1 - \cos \varphi)$ .  
 б) Длину дуги кривой  $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{2}, \end{cases} 0 \leq t \leq \sqrt{3}$ .

5. а) Площадь, ограниченную кардиоидой  
 $\begin{cases} x = 2(\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(\sin t - \sin 2t). \end{cases}$   
 б) Длину замкнутой кривой  $r = 4(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi)$ .

6. а) Площадь, ограниченную кривыми  
 $r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi$   
 б) Длину эволюты эллипса  $\begin{cases} x = \frac{16}{5} \cos^3 t, \\ y = \frac{16}{3} \sin^3 t. \end{cases}$

7. а) Площадь эллипса  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$   
 б) Длину кардиоиды  
 $\rho = 8(1 - \cos \varphi), -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0$ .

8. а) Длину дуги кривой  
 $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi.$

б) Площадь, ограниченную кривой  $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ .

9. а) Площадь, ограниченную кривой  $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

б) Длину дуги кривой  $r = \frac{10}{(1 + \cos 2\varphi)}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

10. а) Площадь, ограниченную кривыми  
 $r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 (r \geq 3)$ .

б) Длину астроида  $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$

11. а) Площадь, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = \frac{t}{3}(3 - t), \\ y = \frac{t^2}{8}(3 - t). \end{cases}$$

б) Длину замкнутой кривой  $r = 9(\sin \varphi + \cos \varphi)$ .

12. а) Площадь, ограниченную кривыми  
 $r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi$ .

б) Длину кривой  $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq 1$ .

13. а) Площадь, ограниченную осью абсцисс и вершиной

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{8}{4 + t^2}. \end{cases}$$

б) Длину отрезка прямой линии

$$r = 4 \sec \left( \varphi - \frac{\pi}{3} \right), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

14. а) Площадь, ограниченную  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$
- б) Длину дуги кривой  $r = \frac{10}{(1+\cos\varphi)}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
15. а) Площадь, ограниченную кривой Лиссажу  $\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 2 \sin 2t. \end{cases}$
- б) Длину дуги кривой  $\rho = 3e^{3\varphi/4}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ .
16. а) Площадь, ограниченную  $r = 7 \sin 4\varphi$ .
- б) Длину эпициклоиды  $\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t). \end{cases}$
17. а) Площадь, ограниченную кривой Лиссажу  $\begin{cases} x = 2 \sin 4t, \\ y = 2 \sin 2t. \end{cases}$
- б) Длину замкнутой кривой  $r = 8 \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ .
18. а) Площадь, ограниченную спиралью Архимеда  $r = 7\varphi$ ,  
 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ .
- б) Длину эвольвенты окружности  $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ .
19. а) Площадь внутри астроида  $\begin{cases} x = 2 \cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = 2 \sin^3 \frac{t}{4}. \end{cases}$
- б) Длину кардиоиды  $r = 12(1 - \cos\varphi)$ .
20. а) Длину дуги циссоиды  $\begin{cases} x = 6 \sin^2 t, \\ y = 6 \sin^2 t \operatorname{tg} t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ .
- б) Площадь, ограниченную кривыми
- $$r = 2 \cos \varphi, \quad r = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$
21. а) Площадь, ограниченную осью  $Ox$  и одной аркой циклоиды  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t - \sin \frac{t}{2}), \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{t}{2}). \end{cases}$
- б) Длину отрезка прямой линии  $r = 3 \sec(\varphi - \frac{\pi}{3})$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
22. а) Площадь, ограниченную осью абсцисс и вершиной  $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \frac{8}{1+t^2}. \end{cases}$
- б) Длину дуги кривой  $r = 6 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ .
23. а) Площадь, ограниченную кривой  $\begin{cases} x = t(5-t), \\ y = \frac{t^2}{4}(5-t). \end{cases}$
- б) Длину кардиоиды  $r = 5(1 + \cos \varphi)$ .
24. а) Площадь, внутри петли кривой  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$
- б) Длину дуги параболы  $r = \frac{6}{1+\cos\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
25. а) Площадь, ограниченную кривой  $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
- б) Длину гиперболической спирали  $r\varphi = 1$  от точки  $(2; \frac{1}{2})$  до точки  $(\frac{1}{2}; 2)$ .



26. а) Площадь одного лепестка розы  $r = 8 \sin 3\varphi$ .

б) Длину эвольвенты окружности

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

27. а) Площадь внутри астроида

$$\begin{cases} x = \frac{\cos^3(4t)}{2}, \\ y = \frac{\sin^3(4t)}{2}. \end{cases}$$

б) Длину прямой линии  $\frac{4}{r} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

28. а) Площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли

$$r^2 = 8 \cos 2\varphi.$$

б) Длину эписцилоиды  $\begin{cases} x = 3(\cos 2t - \cos 4t), \\ y = 3(\sin 2t - \sin 4t). \end{cases}$

29. а) Площадь, ограниченную осью абсцисс и вершиной

$$\begin{cases} x = t/2, \\ y = \frac{16}{4 + t^2}. \end{cases}$$

б) Длину дуги кривой  $r = 3 \cos^4 \frac{\varphi}{4}$ .

30. а) Площадь, ограниченную спиралью Архимеда  $r = 6\varphi$ ,

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

б) Длину дуги кривой  $\begin{cases} x = \frac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$  между точками пересечения с осями координат.

**Задание 13.** Найдите значение несобственного интеграла или установите его расходимость.

1. а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4}} dx,$

б)  $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

2. а)  $\int_2^{+\infty} \frac{3^x dx}{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3},$

б)  $\int_0^2 \sqrt{\frac{\arcsin(x/2)}{4-x^2}} dx.$

3. а)  $\int_0^{+\infty} e^{-2x}(4x-3) dx,$

б)  $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{8-x^3}}.$

4. а)  $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{3x} dx;$

б)  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx.$

5. а)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \operatorname{arctg} e^x}{1+e^{2x}} dx;$

б)  $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$

6. а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x \sqrt{x}};$

б)  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

7. а)  $\int_{-\infty}^0 (5x-2)e^{3x} dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$

8. а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}};$

б)  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$

9. а)  $\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx;$

б)  $\int_0^3 \sqrt{\frac{\arcsin \frac{x}{3}}{\sqrt[4]{9-x^2}}} dx.$

10. а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)};$

б)  $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{16-x^4}}.$

11. a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1-9x)\sqrt{x}};$

б)  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$

12. a)  $\int_{-\infty}^0 (3x+4)e^{4x} dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

13. a)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)};$

б)  $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

14. a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x^2} dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

15. a)  $\int_0^{+\infty} \sqrt{x+1} \ln(x+1) dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}.$

16. a)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^3} dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$

17. a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$

б)  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$

18. a)  $\int_{-\infty}^0 (1-6x)e^{2x} dx;$

б)  $\int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^3}.$

19. a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{5}{3}}} dx;$

б)  $\int_{2,5}^4 \frac{dx}{x^2-5x+6}.$

20. a)  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}};$

б)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx.$

21. a)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^x-1}.$

22. a)  $\int_0^{+\infty} (4-3x)e^{-3x} dx;$

б)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-16x^4}}.$

23. a)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}(7-x)};$

б)  $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+8x^3}}.$

24. a)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^x+4)^2} dx;$

б)  $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

25. a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)x};$

б)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

26. a)  $\int_0^{+\infty} e^{-4x}(2-9x) dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

27. a)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x-3}};$

б)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{8-8x^3}}.$

28. a)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x-12};$

б)  $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

29. a)  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2} dx;$

б)  $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$

30. a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx;$

б)  $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2-1}.$

**Типовые расчеты по высшей математике.**  
1 курс (модуль 3).  
**Интегрирование функции одной переменной**

Методические указания и задачи для студентов.

Составители: Брылевская Л.И., Бодрова Н.А., Далевская О.П.,  
Сейферт И.В., Сытенко Н.В.

В авторской редакции  
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО  
Зав. РИО  
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99  
Подписано к печати  
Заказ №  
Тираж  
Отпечатано на ризографе

Н.Ф. Гусарова

**Редакционно-издательский отдел**

Санкт-Петербургского национального  
исследовательского университета  
информационных технологий, механики  
и оптики

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

