Типовой расчет по высшей математике

Линейная алгебра

2 модуль

Учебно-методическое пособие

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Санкт-Петербург
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Гортинская Л.В., Лапин И.А., Рыжков А.Е.,
Смирнов В.П., Трифанов А.И.

Типовой расчет по высшей математике

Линейная алгебра

2 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2013

Гортинская Л.В., Лапин И.А., Рыжков А.Е., Смирнов В.П., Трифанов А.И. Типовой расчет „Линейная алгебра“. 2 модуль. Учебно-методическое пособие. -СПб: НИУ ИТМО, 2012. -40 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов первого курса специальности 010400.62 „Прикладная математика и информатика“.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 22.10.2013, протокол №7.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория „Национальный исследовательский университет“. Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования „Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики“ на 2009-2018 годы.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый модуль включает в себя задачи по темам: „Системы линейных алгебраических уравнений“, „Комплексные множества“, „Функции комплексного переменного“, „Нахождение корней многочлена“, „Теорема Лапласа о вычислении определителя“, „Сумма и пересечение подпространств“ и „Линейные формы“.

Каждый студент обязан выполнить семь заданий, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Перед выполнением каждого задания написать полное условие, чертежи и рисунки необходимо исполнить аккуратно, снабдив их необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет. К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая во внимание которые и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

Задание 1. Системы линейных уравнений

Пример выполнения задания 1

Задача. Решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 14. \end{cases}$$

Решение. Это система $n = 4$ линейных неоднородных уравнений с $m = 5$ неизвестными x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Обозначим через A и A^r основную и расширенную матрицы системы соответственно.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^r = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 & 14 \end{array}\right).$$

Сначала надо определить, имеет ли эта система решения и сколько. Для этого приведем расширенную матрицу A^r элементарными преобразованиями строк (только!) к трапецевидной форме:

$$A^r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{A}^r.$$

При этом матрица A перейдет в $\tilde{A}$.

Размерность линейной оболочки столбцов матрицы A равна $r = 3$ и вектор, стоящий в правой части принадлежит данной линейной оболочке. При этом $m > r$. Согласно теореме Кронекера-Капелли такая система является совместной и имеет бесконечное множество решений.

Решение неоднородной системы в этом случае может быть получено как сумма общего решения соответствующей однородной и какого-либо решения неоднородной. Общее решение однородной системы представляет из себя линейную комбинацию фундаментальной системы решений, которая состоит из $m - r$ векторов, что в рассматриваемом примере равно двум.

Чтобы найти решения однородной системы, запишем сначала эквивалентную ей систему с матрицей $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_4 = 0, \\ -4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных векторов линейной оболочки системы выберем векторы, состоящие из коэффициентов при базисных неизвестных x_1, x_2 и x_3. Далее, придавая оставшимся переменным x_4 и x_5 любые значения, неизвестные x_1, x_2 и x_3 можно получить единственным образом. Чтобы найти два фундаментальных решения однородной системы, достаточно придать свободным переменным x_4 и x_5 значения $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ и $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. При этом значения базисных переменных x_1, x_2, x_3 находятся единственным образом, так как определитель системы уравнений для них отличен от нуля:

Взяв $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ из системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = -2, \\ -4x_3 = 3, \end{cases}$$

получим $x_3 = -3/4$, $x_2 = -2$, $x_1 = -1/4$ и вектор решений $X_1 = (-1/4,\ \ -2, -3/4,\ \ 1,\ \ 0)^{\mathrm{T}}$. Затем, аналогично, взяв $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, получим $X_2 = (-1/4,\ 0,\ \ -3/4,\ \ 0,\ \ 1)^{\mathrm{T}}$. Общее решение однородной системы имеет вид $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2$, где c_1 и c_2 - произвольные числа.

Теперь найдем какое-либо решение неоднородной системы. Система, соответствующая матрице $\tilde{A}^r$, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_4 = 14, \\ -4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -68, \end{cases}$$

и эквивалентна исхдной. В качестве ее решения выберем то, для которого $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Тогда получим $x_3 = 17$, $x_2 = 14$, $x_1 = 2 \cdot 14 - 17 = 11$, то есть вектор решения неоднородной системы $Z = (11, 14, 17, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, общее решение исходной системы будет иметь вид

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2 \\ -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя новые константы $\tilde{c_1} = c_1/4$ и $\tilde{c_2} = c_2/4$ общее решение исходной неоднородной системы можно записать в виде:

$$X = \tilde{c_1} \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{c_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Варианты задания 1

Решить неоднородную систему линейных уравнений.

1. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -9, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 4; \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 11; \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = -2; \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 + 3x_5 = 3; \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = -6; \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 7; \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -7; \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_4 = -6, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -6; \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 9; \end{cases}$$

11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 7; \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -9, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = -6; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 13; \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_5 = 9; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -7; \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -8, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -15; \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 24, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 13; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = -7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 4x_4 - x_5 = 29; \end{cases}$

23. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 = -1; \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = -1; \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 4; \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = -3, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5; \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -4, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 12. \end{cases}$$

Задание 2. Комплексные множества

Пример выполнения задания 2

Задача. а) Изобразить на комплексной плоскости множество D, заданное неравенствами:

$$D = \{z : |z - i| \le 2, |\pi/2 - \arg z| > \pi/3\}.$$

Решение. Неравенство $|z - i| \le 2$ задает на комплексной плоскости замкнутый круг D_1 радиуса 2 с центром в точке $z = i$; неравенство $|\pi/2 - \arg z| > \pi/3$ задает множество точек D_2, аргументы которых по модулю больше $\pi/2$ на $\pi/3$, то есть $\arg z < \pi/6$ и $\arg z > 5\pi/6$. Множество D является пересечением множеств D_1 и D_2. Множества D_1, D_2 и D изображены на рисунке 1.

б) Изобразить на комплексной плоскости множество D, заданное неравенствами:

$$D = \{z : |z| > 2 - \mathrm{Re} z, \quad 0 \le \arg z \le \pi/4\}.$$

Решение. Обозначим $z = x + iy$, тогда неравенство $|z| > 2 - \mathrm{Re} z$ в координатах (x, y) примет вид $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 - x$. Если $x > 2$, то неравенство $|z| > 2 - \mathrm{Re} z$ справедливо при любом вещественном значении y; если же $x \le 2$, то из неравенства $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 - x$ следует $x^2 + y^2 > (2 - x)^2$. Отсюда имеем, что при $x \le 2$ выполнено неравенство $y^2 > 4(1 - x)$. Точки, удовлетворяющие этому неравенству, лежат правее параболы $y^2 = 4(1 - x)$. Таким образом, мы получили, что D_1 - множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z| > 2 - \mathrm{Re} z$, лежит правее параболы $y^2 = 4(1 - x)$. Неравенство $0 \le \arg z \le \pi/4$ задает множество D_2, представляющее собой замыкание внутренности угла, сторонами которого являются лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$. Множество D является пересечением множеств D_1 и D_2 (см. рисунок 2).

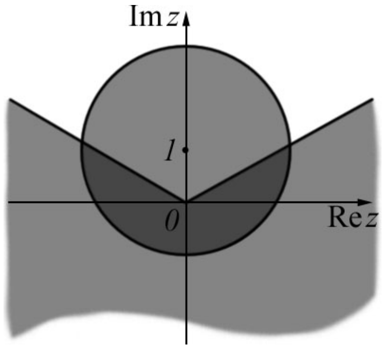

Рис. 1: к решению задания 2а.

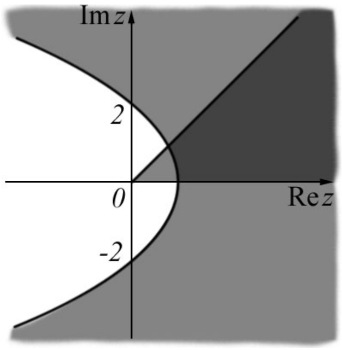

Рис. 2: к решению задания 2б.

Варианты задания 2

Изобразить на комплексной плоскости множество D.

1. $D = \{z : 2 \leq |z+2| < 3, -\pi/2 < \arg z \leq \pi/2\}$;
2. $D = \{z : 1 \leq |z+1-2i| \leq 3, \pi \leq \arg z < 2\pi\}$;
3. $D = \{z : 1 \leq |z+3-2i| < 4, |\arg z| \leq 3\pi/4\}$;
4. $D = \{z : 2 < |z+2-2i| \leq 5, |\arg z| > \pi/2\}$;
5. $D = \{z : |z| > 3 + \mathrm{Re} z, \pi/2 \leq \arg z < 2\pi/3\}$;
6. $D = \{z : |z+2+3i| < 3 + z, \pi \leq \arg z \leq 3\pi/2\}$;
7. $D = \{z : |z| \leq 5, |3\pi/2 - \arg z| < \pi/3\}$;
8. $D = \{z : |z| < 6 - \mathrm{Im} z, |z| \leq 4\}$;
9. $D = \{z : |z| \geq 3 - \mathrm{Re} z, |z| > 4\}$;
10. $D = \{z : |z| > 3, |z-4| \leq 2, -\pi/2 \leq \arg z < 0\}$;
11. $D = \{z : |z-1| < 1, z + \bar{z} \leq 1\}$;
12. $D = \{z : |z+i| \leq 1, |3\pi/2 - \arg z| < \pi/3\}$;
13. $D = \{z : |z-3+2i| \leq 2, 0 < \mathrm{Re}(iz) \leq 1\}$;

14. $D = \{z : |z| > 1 + \mathrm{Re} z, |z - i| \leq 2\}$;

15. $D = \{z : 1 < |z - 1| \leq 2, \pi/4 \leq \arg z < \pi/3\}$;

16. $D = \{z : |z| \leq 4 + \mathrm{Im} z, |z - 1/2| < 4\}$;

17. $D = \{z : |z - 4 - 3i| \geq 2, z + \bar{z} < 1\}$;

18. $D = \{z : |z + 1 - i| > \sqrt{2}, |\mathrm{Re}(iz)| \leq 1\}$;

19. $D = \{z : |z - i| \leq 2, |3\pi/2 - \arg z| < \pi/6\}$;

20. $D = \{z : |z| > 1 - \mathrm{Re} z, |z + i| \leq 1\}$;

21. $D = \{z : |z| > 1,\ -1 < \mathrm{Im} z \leq 1,\ 0 < \mathrm{Re} z \leq 2\}$;

22. $D = \{z : |z - 1| > 1,\ -1 \leq \mathrm{Im} z < 0,\ 0 \leq \mathrm{Re} z < 3\}$;

23. $D = \{z : |z + i| < 1,\ -3\pi/4 \leq \arg z \leq -\pi/4\}$;

24. $D = \{z : |z - i| \leq 1,\ -\pi/2 < \arg (z - i) < \pi/4\}$;

25. $D = \{z : z\bar{z} < 2,\ \mathrm{Re} z < 1,\ \mathrm{Im} z > -1\}$;

26. $D = \{z : 1 < z\bar{z} < 2,\ \mathrm{Re} z > 0,\ 0 \leq \mathrm{Im} z \leq 1\}$;

27. $D = \{z : |z - 1| < 1,\ \arg z \leq \pi/4,\ \arg (z - 1) > \pi/4\}$;

28. $D = \{z : |z - i| < 1,\ \arg z \geq \pi/4,\ \arg (z + 1 - i) \leq \pi/4\}$;

29. $D = \{z : |z - 2 - i| \geq 1,\ 1 \leq \mathrm{Re} z < 3,\ 0 < \mathrm{Im} z \leq 3\}$;

30. $D = \{z : |\mathrm{Re} z| \leq 1,\ |\mathrm{Im} z| < 2,\ |z - 2| > 2\}$.

Задание 3. Функции комплексного переменного

Пример выполнения задания 3

Задача. а) Найти все значения функции в указанной точке:

$$\operatorname{th}(\ln 3 + \pi i/4).$$

Решение. По определению функции гиперболический тангенс имеем

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Используя данное определение, найдем значение функции $\operatorname{th} z$ в заданной точке (заметим, что функция $\operatorname{th} z$ однозначна и имеет период πi):

$$\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right) = \frac{\exp\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right) - \exp\left(-\ln 3 - \frac{\pi i}{4}\right)}{\exp\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\ln 3 - \frac{\pi i}{4}\right)} =$$

$$= \frac{3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) - 3^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + 3^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4+5i}{5+4i} = \frac{40}{41} + \frac{9}{41}i.$$

б) Найти все значения функции в указанной точке:

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i}.$$

Решение. Данное выражение является значением многозначной функции $w(z) = z^{-i}$ в точке $z = (1+i)/2$. По определению имеем:

$$z^{-i} = \exp(-i \operatorname{Ln} z) = \exp\left[-i\left(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\right)\right],$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для определенности будем считать, что $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Вычислим $-i \operatorname{Ln}\left[(1+i)/2\right]$:

$$-i \operatorname{Ln}\frac{1+i}{2} = -i\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{8k+1}{4}\pi i\right) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k + \frac{\ln 2}{2}i,$$

откуда получим:

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i} = \exp\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k + \frac{\ln 2}{2} i\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\left(\cos\frac{\ln 2}{2} + i\sin\frac{\ln 2}{2}\right), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Варианты задания 3

Вычислить все значения функции в указанной точке.

1. 3^{2+i};
2. i^{1+i};
3. $\mathrm{Ln}\,(1+i)$;
4. $(-2)^{\sqrt{2}}$;
5. 4^i;
6. $(3+4i)^{1+i}$;
7. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;
8. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$;
9. $\mathrm{Ln}\,(2-3i)$;
10. $\mathrm{Ln}\,(-2-3i)$;
11. $\cos\,(5-i)$;
12. $\sin\,(1-5i)$;
13. $\mathrm{tg}\,(2-i)$;
14. $\mathrm{sh}\,(-3+i)$;
15. $\exp(\exp i)$;
16. $\exp\left(\exp\left(1+\frac{\pi i}{2}\right)\right)$;
17. $\cos\,(2+i)$;
18. $\sin\,(2i)$;
19. $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$;
20. $\mathrm{cth}\,(2+i)$;
21. $\mathrm{tg}\,(2-\mathrm{i})$;
22. $\exp\,(1+2\mathrm{i})$;
23. $\left(\sqrt{2}-i\right)^{\sqrt{2}}$;
24. $\sqrt[4]{1-i}$;
25. i^{2+i};
26. $(2i)^{\sqrt{i}}$;

27. $i^{\sin(\mathrm{i})}$;

28. $1 + i + \operatorname{sh}(1 + i)$;

29. $\cos(i)\exp(2 - i)$;

30. $\operatorname{ch}(3 - 2i)$.

Задание 4. Нахождение корней многочлена

Пример выполнения задания 4

Задача. Найти корни многочлена и изобразить их на комплексной плоскости.

$$z^6 - 2z^3 + 2.$$

Решение. Полагая $z^3 = t$, получаем квадратный трехчлен

$$t^2 - 2t + 2,$$

корнями которого являются числа $t_1 = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$ и $t_2 = 1 - i = \sqrt{2}\,(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$. Чтобы найти корни исходного многочлена требуется вычислить значения $\sqrt[3]{1+i}$ и $\sqrt[3]{1-i}$. Отсюда имеем:

$$z_{1,2} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} \pm i\sin\frac{\pi}{12}\right), z_{3,4} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$z_{5,6} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} \pm i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Данные числа расположены на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$ как изображено на рисунке 3.

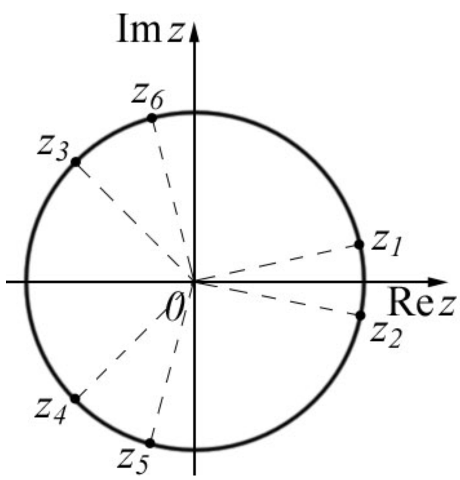

Рис. 3: к решению задания 4.

Варианты задания 4

Найти корни полинома и изобразить их на комплексной плоскости.

1. $iz^5 + 2z^4 - iz - 2$;
2. $z^4 + z^3 + z + 1$;
3. $z^5 - z^4 + z^3 + iz^2 - iz + i$;
4. $z^5 - 2z^4 + z - 2$;
5. $z^4 - 5z^3 - 2z + 10$;
6. $z^4 + 3z^3 - 3iz - 9i$;
7. $z^5 + z^4 - iz - i$;
8. $z^4 - 5z^2 - 36$;
9. $z^5 - iz$;
10. $z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 8$;
11. $z^4 - z^3 + 8z - 8$;
12. $z^4 + z^2 - 2$;
13. $z^4 + iz$;
14. $z^4 - z^3 + 5z^2 - 4z + 4$;
15. $z^4 - z^3 - z^2 - z - 2$;
16. $z^5 + 3z^4 + z + 3$;
17. $z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2$;
18. $z^5 - z^4 + 4z - 4$;
19. $z^4 - z^3 + z - 1$;
20. $z^5 + 2z^3 - z^2 - 2$;
21. $z^5 - z^4 + z - 1$;
22. $z^4 + 2z^3 - 2iz - 4i$;
23. $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$;
24. $z^5 - z^4 + 2z - 2$;
25. $z^5 + iz$;
26. $z^4 + 3z^2 + 2$;
27. $z^4 - z^3 + 5z^2 - z - 4$;
28. $z^4 - 2iz$;
29. $z^4 - z^3 + 3z - 3$;
30. $z^4 - 2z^3 + 2z - 1$

Задание 5. Теорема Лапласа о вычислении определителя

Пример выполнения задания 5

Задача. Используя теорему Лапласа, вычислить опеределитель двумя способами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя теорему Лапласа, сначала разложим данный определитель по третьему и пятому столбцам. Будем иметь:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+3+5} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+5+3+5} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+5+3+5} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 271.$$

С другой стороны, разлагая определитель по третьей и четвертой строкам, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4+1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4+2+4} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 271.$$

Варианты задания 5

Вычислить определитель двумя способами, используя теорему Лапласа.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & 3 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -5 & 13 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 7 \\ 11 & 7 & 0 & 0 & -15 \\ -7 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & -9 & 13 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 12 & 8 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 7 & -8 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 12 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ -5 & 1 & 12 & 2 & 4 \\ -6 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$;

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$;

15. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & -4 & 1 \\ -1 & -8 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 10 & 7 & 2 & 11 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$;

18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$;

20. $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ -6 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

21. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$;

22. $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

23. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

24. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -5 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 & 6 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ -5 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & -6 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

26. $\begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 & 7 & 5 \\ 8 & -1 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & -1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

27. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 & 8 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$;

28. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 8 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;

29. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

30. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -6 & -5 \\ -4 & -1 & 1 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Задание 6. Сумма и пересечение подпространств

Пример выполнения задания 6

Задача. Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов A_1 и A_2. Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов B_1, B_2 и B_3. Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

$$L_1: A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \qquad L_2: B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}^T,$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 & 4 & -4 \end{pmatrix}^T, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & -10 & 7 \end{pmatrix}^T,$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Решение. Для нахождения базиса суммы подпространств L_1 и L_2 запишем векторы данных двух линейных оболочек по столюцам в матрицу, которую затем элементарными преобразованиями приведем к трапецевидной форме $\tilde{A}$:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & 7 & -2 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -10 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \tilde{A}$$

Таким образом, число базисных векторов суммы подпространств равно четырем. Их можно выбрать, например так: A_1, A_2, B_1, B_2.

Далее, найдем базис пересечения данных подпространств. Для этого необходимо сначала найти условия, при которых произвольный вектор x с координатами $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5\right)$ принадлежит линейной оболочкам L_1

и L_2, а затем объединить эти условия. Положим $x \in L_1$, тогда

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & -4 & \xi^2 \\ 3 & 7 & \xi^3 \\ 2 & 4 & \xi^4 \\ -1 & -4 & \xi^5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & -4 & \xi^2 \\ 0 & 0 & -12\xi^1 + 7\xi^2 + 4\xi^3 \\ 0 & 0 & -2\xi^1 + \xi^2 + \xi^4 \\ 0 & 0 & \xi^1 - \xi^2 + \xi^5 \end{array}\right).$$

Значит $\dim L_1 = 2$, а координаты x должны удовлетворять линейной однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} -12\xi^1 + 7\xi^2 + 4\xi^3 = 0, \\ -2\xi^1 + \xi^2 + \xi^4 = 0, \\ \xi^1 - \xi^2 + \xi^5 = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $x \in L_2$, тогда имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \xi^1 \\ 1 & 6 & -3 & \xi^2 \\ -2 & -7 & 1 & \xi^3 \\ -3 & -10 & 1 & \xi^4 \\ 3 & 7 & 2 & \xi^5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \xi^1 \\ 0 & 1 & -1 & 2\xi^1 + \xi^2 - \xi^5 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 17\xi^1 + 7\xi^2 + \xi^4 - \xi^5 \\ 0 & 0 & 0 & -11\xi^1 - 4\xi^2 + 5\xi^5 \end{array}\right),$$

откуда получаем $\dim L_2 = 2$ и

$$\begin{cases} \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 = 0, \\ 17\xi^1 + 7\xi^2 + \xi^4 - \xi^5 = 0, \\ -11\xi^1 - 4\xi^2 + 5\xi^5 = 0. \end{cases}$$

Векторы фундаментальной системы решений линейной системы уравнений, являющейся объединением двух полученных систем, образуют базис пересечения двух линейных подпространств L_1 и L_2. В рассматриваемом случае получим только тривиальное решение, что согласуется с теоремой о размерностях:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Действительно, $2+2 = 4+0$ и размерность подпространства-пересечения равна нулю.

Варианты задания 6

Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов A_1 и A_2. Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов B_1, B_2 и B_3. Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

1. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -2 & -2\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$,
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^T$.

2. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 2 & 7\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 2\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$,
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & -1 & -2\end{pmatrix}^T$.

3. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1 & 4\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}^T$,
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}^T$.

4. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & -4 & -2\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$,
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 4 & 0\end{pmatrix}^T$.

5. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}-3 & -1 & -1 & -3 & -1\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$,
$B_3 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$.

6. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 3 & 5\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -4 & -5\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}^T$,
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -3 & -4\end{pmatrix}^T$.

7. $A_1 = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$,
$A_2 = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}^T$,
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}^T$,
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}^T$,

$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}^T.$

8. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 1 & 3\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T.$

9. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}3 & -3 & -3 & 0 & -6\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T.$

10. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}-1 & -4 & 1 & -5 & 7\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 2 & -4\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^T.$

11. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T.$

12. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 4 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & -5 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}^T.$

13. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & -2 & -3\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}^T.$

14. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 2 & -6 & -4\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T.$

15. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}-1 & 10 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 2 & -2\end{pmatrix}^T.$

16. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & -1 & -4\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}^T.$

17. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2 & -4 & -5\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & -1 & -2\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T.$

18. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}-1 & -5 & 2 & -4 & -7\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}^T.$

19. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3 & 3\end{pmatrix}^T.$

20. $A_1 = \begin{pmatrix}3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -3\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^T.$

21. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -2 & -2\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^T.$

22. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1 & 4\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}^T.$

23. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}4 & -3 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T.$

24. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}^T,$

$B_2 = \begin{pmatrix}3 & 3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$

$B_3 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T.$

25. $A_1 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,$

$A_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}^T,$

$$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}^T,$$
$$B_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$$
$$B_3 = \begin{pmatrix}3 & -3 & -3 & 0 & -6\end{pmatrix}^T.$$

26. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}7 & 4 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}4 & 2 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T.$

27. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}5 & 0 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 1 & 4\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}^T.$

28. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 5 & -5 & 7 & -4\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & 5 & -3\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}3 & 5 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}^T.$

29. $A_1 = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T.$

30. $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T,$
$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_1 = \begin{pmatrix}2 & 4 & 7 & -4 & -1\end{pmatrix}^T,$
$B_2 = \begin{pmatrix}2 & -2 & -5 & 2 & 1\end{pmatrix}^T,$
$B_3 = \begin{pmatrix}4 & -1 & -4 & 1 & 1\end{pmatrix}^T.$

Задание 7. Линейные формы

Пример выполнения задания 7

Задача. Заданы три линейные формы, определенные на векторах $x\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\left(f^1, x\right) &= \xi^1 + 2\xi^2 + 3\xi^3,\\ \left(f^2, x\right) &= 4\xi^1 + 5\xi^2 + 6\xi^3,\\ \left(f^3, x\right) &= 7\xi^1 + 8\xi^2 + \xi^3.\end{aligned}$$

1. Доказать, что они образуют базис в пространстве $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ линейных форм;
2. Найти базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$, сопряженный к базису $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$.
3. С помощью теории линейных форм найти координаты вектора $x = (4, -2, 13)^T$ в этом базисе и проверить вычисления прямым разложением вектора x по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4. Найти коэффициенты формы $(f, x) = 5\xi^1 - 4\xi^2 + 2\xi^3$ относительно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Вычисления проверить прямым разложением формы f по базису $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$ пространства $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Решение.

1. Проверим, образует ли совокупность форм $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$ базис в пространстве $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. Для этого проверим являются ли они линейно-независимыми. Вычислим определитель, составленный из их коэффициентов:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 1\end{pmatrix} = 24 \neq 0.$$

Отсюда следует, что формы $\{f^1, f^2, f^3\}$ являются линейно-независимыми, а так как их три, то они образуют базис в $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

2. Для нахождения базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$, сопряженного базису $\{f^1, f^2, f^3\}$, исходя из опеределения $\left(f^i, e_k\right) = \delta^i_k$, достаточно обратить матрицу коэффициентов базисных форм:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -43/24 & 11/12 & -1/8 \\ 19/12 & -5/6 & 1/4 \\ -1/8 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу получаем:

$$e_1 = (-43/24, 19/12, -1/8)^T,$$
$$e_2 = (11/12, -5/6, 1/4)^T,$$
$$e_3 = (-1/8, 1/4, -1/8)^T.$$

3. Чтобы найти координаты вектора $x = (4, -2, 13)^T$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$,
воспользуемся свойством сопряженных базисов: значения базисных форм на векторе x совпадают с коэффициентами разложения этого вектора по базису векторного пространства $\left(\xi^i = \left(f^i, x\right)\right)$. Получаем:

$$\xi^1 = \left(f^1, x\right) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 13 = 39,$$
$$\xi^2 = \left(f^2, x\right) = 4 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 13 = 84,$$
$$\xi^3 = \left(f^3, x\right) = 7 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) + 1 \cdot 13 = 25.$$

4. По определению, коэффициенты формы f относительно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$ считаются посредством вычисления значения указанной формы на базисных векторах по формуле

$\varphi_k = (f, e_k)$. Таким образом,

$$\varphi_1 = (f, e_1) = 5 \cdot (-43/24) - 4 \cdot (19/12) + 2 \cdot (-1/8) = -373/24,$$
$$\varphi_2 = (f, e_2) = 5 \cdot (11/12) - 4 \cdot (-5/6) + 2 \cdot (1/4) = 101/12,$$
$$\varphi_3 = (f, e_3) = 5 \cdot (-1/8) - 4 \cdot (1/4) + 2 \cdot (-1/8) = -23/8.$$

Варианты задания 7

Заданы три линейные формы, определенные на векторах $x\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

1. Доказать, что они образуют базис в пространстве $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ линейных форм;
2. Найти базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$, сопряженный к базису $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$.
3. С помощью теории линейных форм найти координаты вектора $x = (4, -2, 13)^T$ в этом базисе и проверить вычисления прямым разложением вектора x по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4. Найти коэффициенты формы $(f, x) = 5\xi^1 - 4\xi^2 + 2\xi^3$ относительно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Вычисления проверить прямым разложением формы f по базису $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$ пространства $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

1. $\left(f^1, x\right) = 5\xi^1 - 4\xi^2 + 4\xi^3,$
   $\left(f^2, x\right) = 5\xi^1 - 7\xi^2 + 7\xi^3,$
   $\left(f^3, x\right) = -6\xi^1 + 7\xi^2 - 6\xi^3.$

2. $\left(f^1, x\right) = \xi^1 - \xi^2 + 9\xi^3,$
   $\left(f^2, x\right) = \xi^1 + 7\xi^3,$
   $\left(f^3, x\right) = 7\xi^1 + 4\xi^2 - 7\xi^3.$

3. $\left(f^1, x\right) = -5\xi^1 + 2\xi^2 - 7\xi^3,$
   $\left(f^2, x\right) = 6\xi^1 + \xi^2 - \xi^3,$
   $\left(f^3, x\right) = 4\xi^1 - \xi^2 + 2\xi^3.$

4. $\left(f^1, x\right) = 3\xi^1 + 2\xi^3,$
   $\left(f^2, x\right) = 8\xi^1 + 3\xi^2 + 2\xi^3,$
   $\left(f^3, x\right) = -8\xi^1 - 8\xi^2 + 9\xi^3.$

5. $\bigl(f^1,x\bigr)=-6\xi^1+2\xi^2-5\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=2\xi^1+9\xi^2+5\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=5\xi^1+3\xi^2+7\xi^3.$

6. $\bigl(f^1,x\bigr)=4\xi^1-3\xi^2-3\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-\xi^1-6\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-8\xi^1+3\xi^2+\xi^3.$

7. $\bigl(f^1,x\bigr)=10\xi^1-6\xi^2-7\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=10\xi^1-9\xi^2-8\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-7\xi^1+8\xi^2+5\xi^3.$

8. $\bigl(f^1,x\bigr)=-9\xi^1+5\xi^2-5\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-7\xi^1-\xi^2-7\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=7\xi^1+\xi^2+6\xi^3.$

9. $\bigl(f^1,x\bigr)=-8\xi^1+2\xi^2+\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-5\xi^1-5\xi^2+\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=8\xi^1+5\xi^2-2\xi^3.$

10. $\bigl(f^1,x\bigr)=-8\xi^1+\xi^2-8\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=9\xi^1+\xi^2+4\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-9\xi^1-3\xi^2-2\xi^3.$

11. $\bigl(f^1,x\bigr)=6\xi^1-8\xi^2+2\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-6\xi^1+3\xi^2+3\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-\xi^1-2\xi^2+2\xi^3.$

12. $\bigl(f^1,x\bigr)=-2\xi^1+5\xi^2+5\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-2\xi^1+9\xi^2-2\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-4\xi^1+8\xi^2+5\xi^3.$

13. $\bigl(f^1,x\bigr)=-3\xi^1-7\xi^2-8\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=5\xi^1+4\xi^2+4\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=4\xi^1-8\xi^2-9\xi^3.$

14. $\bigl(f^1,x\bigr)=3\xi^1-\xi^2+7\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=3\xi^1-8\xi^2+8\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-3\xi^1-9\xi^2-2\xi^3.$

15. $\bigl(f^1,x\bigr)=-9\xi^1+8\xi^2-\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=3\xi^1+8\xi^2+2\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=6\xi^1+2\xi^2+2\xi^3.$

16. $\bigl(f^1,x\bigr)=3\xi^1+3\xi^2-4\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=6\xi^1+5\xi^2-8\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=8\xi^1+\xi^2+6\xi^3.$

17. $\bigl(f^1,x\bigr)=8\xi^1-4\xi^2+3\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=7\xi^1+8\xi^2+9\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=\xi^1-8\xi^2-4\xi^3.$

18. $\bigl(f^1,x\bigr)=-\xi^1-2\xi^2-\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-9\xi^1+3\xi^2+9\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=4\xi^1-6\xi^2-9\xi^3.$

19. $\bigl(f^1,x\bigr)=-\xi^1-5\xi^2+4\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=3\xi^1+10\xi^2-6\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-\xi^2-3\xi^3.$

20. $\bigl(f^1,x\bigr)=5\xi^1+6\xi^2+3\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=4\xi^1+2\xi^2+\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-5\xi^1+4\xi^3.$

21. $\bigl(f^1,x\bigr)=-2\xi^1+2\xi^2+10\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=7\xi^1+10\xi^2-5\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=2\xi^1+5\xi^2+4\xi^3.$

22. $\bigl(f^1,x\bigr)=6\xi^1-6\xi^2+4\xi^3,$
$\bigl(f^2,x\bigr)=-7\xi^1-3\xi^2+7\xi^3,$
$\bigl(f^3,x\bigr)=-4\xi^1+8\xi^2-7\xi^3.$

23. $(f^1, x) = 4\xi^1 + 10\xi^2 + 6\xi^3,$
$(f^2, x) = 3\xi^1 + 4\xi^2 + \xi^3,$
$(f^3, x) = 5\xi^1 + 9\xi^2 + 6\xi^3.$

24. $(f^1, x) = 10\xi^1 + 7\xi^2 + 7\xi^3,$
$(f^2, x) = 6\xi^1 + 4\xi^2 + 6\xi^3,$
$(f^3, x) = -2\xi^1 - \xi^2 - 4\xi^3.$

25. $(f^1, x) = -6\xi^1 - 5\xi^2 + 6\xi^3,$
$(f^2, x) = -8\xi^1 - 7\xi^2 + 2\xi^3,$
$(f^3, x) = 3\xi^1 - 3\xi^3.$

26. $(f^1, x) = -4\xi^1 + 8\xi^2 + 8\xi^3,$
$(f^2, x) = 6\xi^1 + 3\xi^2 + 2\xi^3,$
$(f^3, x) = -6\xi^1 - 5\xi^2 - 5\xi^3.$

27. $(f^1, x) = -\xi^1 - 4\xi^2 - 2\xi^3,$
$(f^2, x) = -5\xi^1 + 3\xi^2 - 2\xi^3,$
$(f^3, x) = 10\xi^1 + 8\xi^2 + 10\xi^3.$

28. $(f^1, x) = 3\xi^1 - 9\xi^2 - 2\xi^3,$
$(f^2, x) = -3\xi^1 + 8\xi^2 - 6\xi^3,$
$(f^3, x) = -\xi^1 + 3\xi^2 - \xi^3.$

29. $(f^1, x) = 6\xi^1 + 10\xi^2 + 9\xi^3,$
$(f^2, x) = -5\xi^1 - \xi^3,$
$(f^3, x) = 3\xi^1 - 4\xi^2 - \xi^3.$

30. $(f^1, x) = 9\xi^1 + 6\xi^2 - 7\xi^3,$
$(f^2, x) = 4\xi^1 + 7\xi^2 - 4\xi^3,$
$(f^3, x) = 8\xi^1 + 10\xi^2 - 5\xi^3.$

Список литературы

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. – 10-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2005. -304с.

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г., Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. – 6-е изд., - М.: Наука. Физматлит, 2003. -280с.

[3] Ефимов А.В. и др., Сборник задач по математике для втузов. В 4-ч частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд. Физматлит. 2009. -432с.

[4] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2001. -496с.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория "Национальный исследовательский университет". Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики"на 2009-2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г. Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49