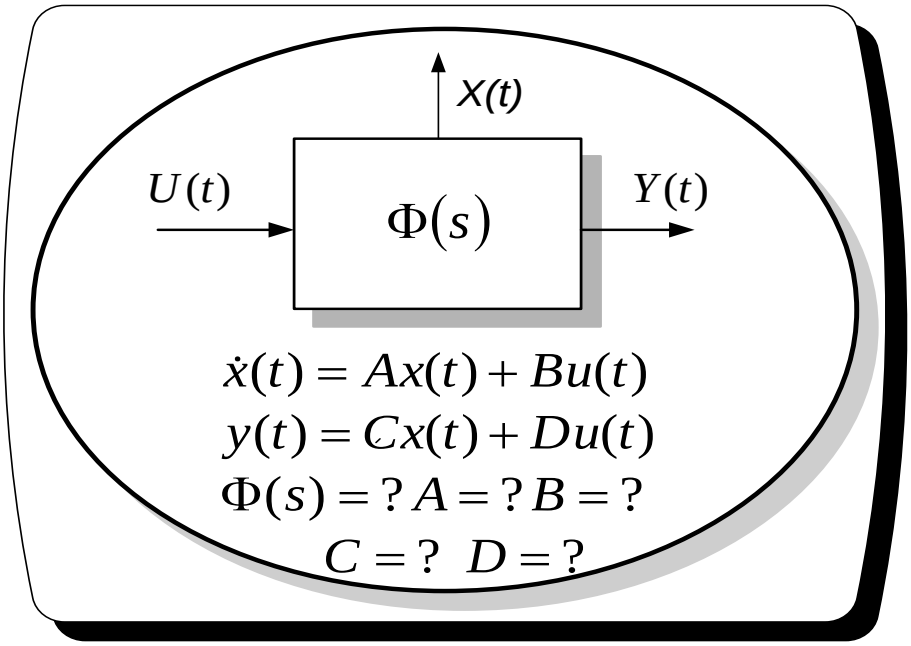
Н.А. ДУДАРЕНКО, О.С. НУЙЯ, М.В. СЕРЖАНТОВА,
О.В. СЛИТА, А.В. УШАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС И ПРАКТИКУМ



Санкт- Петербург

2014

УДК 517/519:62.50:681.3

Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, расширенное и дополненное.– СПб.: НИУ ИТМО , 2014. 292 с., 15 ил.

Рецензенты: д.т.н., профессор В.Н. Дроздов;
д.т.н., профессор В.Т. Шароватов

В учебном пособии излагаются теоретические положения, подкрепленные практикумом, основных разделов учебной дисциплины «Математические основы теории систем» (МОТС) естественно-научного цикла образовательного стандарта направлений 220100 – «Системный анализ и управление», 220400 – «Управление в технических системах», 221000 – «Мехатроника и робототехника» подготовки бакалавров направления 220201 – «Управление и информатика в технических системах» подготовки специалистов.

Учебное пособие построено по замкнутому принципу так, что все необходимые для решения примеров и задач сведения приведены в каждом разделе, а также в приложениях. В каждом разделе дается решение с разбором наиболее характерных примеров и задач.

Учебное пособие содержит разделы и параграфы, отмеченные звездочкой, материал которых не входит в рабочую программу дисциплины МОТС. Они введены в пособие для самостоятельной работы студентов, желающих расширить свой образовательный кругозор.

Учебное пособие может быть рекомендовано аспирантам и молодым специалистам, которым по роду своей деятельности приходится иметь дело с информационными и динамическими системами и математическими проблемами, связанными с построением модельных представлений таких систем, ориентированных на возможности матричного формализма метода пространства состояния.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

Утверждено к печати Советом факультета компьютерных технологий и управления, протокол № 3 от 12.11.2013.

©Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики , 2014.

© Дударенко Н.А.,Нуйя О.С.,Сержантова М.В.,Слита О.В.,Ушаков А.В., 2014.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Contents			7
Предисловие			11
Используемые термины, обозначения и сокращения			14
Введение. Основные проблемы управления			16
1.	Алгебраические структуры		23
	Примеры и задачи		30
2.	Пространства		33
	2.1	Метрические пространства. Способы задания метрик	33
	Примеры и задачи		35
	2.2	Линейные пространства, операторы и матрицы. Структура пространства линейных операторов. Собственные значения, собственные векторы. Нормы и скалярные произведения векторов	38
	Примеры и задачи		49
3.	Матричные инварианты и неинварианты подобных матриц. Сингулярное разложение матриц		52
	Примеры и задачи		60
4.	Канонические формы матриц. Матрицы приведения подобия		65
	Примеры и задачи		74
5.	Функции от вектора. Линейные и квадратичные формы. Правила дифференцирование по аргументам функции		77
	Примеры и задачи		81
6.	Функции от матриц. Матричная экспонента		86
	6.1	Матричные ряды и матричные функции от матриц	86
	6.2	Матричная экспонента, способы ее вычисления. Алгоритм Д. Фаддеева разложения резолвенты в задаче вычисления матричной экспоненты	92
	6.3	Обращение матриц с помощью теоремы Гамильтона–Кэли	95
	Примеры и задачи		96
7.	Матрицы особой конструкции		99

CONTENTS

Preface			11
Notations and abbreviations			14
Introduction. Main control problems			16
1.	Algebraic structures		23
	Examples and exercises		30
2.	Spaces		33
	2.1	Metric spaces. Types of metrics.	33
	Examples and exercises		35
	2.2	Linear spaces, operators and matrices. Structure of linear operators space. Eigenvalues, eigenvectors. Norms and scalar products of vectors	38
	Examples and exercises		49
3.	Matrix invariants and non-invariants of similar matrices. Singular value decomposition		52
	Examples and exercises		60
4.	Canonical matrix forms. Similarity matrices		65
	Examples and exercises		74
5.	Vector functions. Linear and quadratic forms. Differentiation rules with respect to function arguments		77
	Examples and exercises		81
6.	Matrix functions. Matrix exponential		86
	6.1	Matrix series and matrix functions of matrices	86
	6.2	Matrix exponential, methods of its calculation. Faddeev's algorithm of resolventa decomposition for calculating of matrix exponential	92
	6.3	Matrix inversion by means of Cayley-Hamilton theorem	95
	Examples and exercises		96
7.	Special structure matrices		99
	7.1	Croneker matrix structures, application and properties	99
	7.2	Pseudo inversion and pseudoinverce matrices	102
	Examples and exercises		110
8.	Input-output models of dynamic plants		113

	8.1	Input-output models of continuous-time plants. Impulse response and transfer function	113
	8.2	Input-output models of discrete-time plants. Transfer functions of discrete-time plants	121
	Examples and exercises		127
9.	State-space models (MIMO) of dynamic plants		130
	9.1	Continuous-time state-space models. State and its properties. Free and forced motion of continuous-time plants. Fundamental and state transition matrix. Construction of state-space models using transfer functions	131
	9.2	Discrete-time state-space models. Free and forced motion of discrete-time plants. Relation between models of discrete and continuous time models	138
	9.3	Stability as required property of dynamic plants efficiency. Stability conditions of continuous and discrete-time plants	145
	9.4	Structural properties of plants: controllability and observability, controllability and observability of state matrix eigenvalues over infinite fields. Canonical structural Calman representation. Completeness of SISO and MIMO dynamic plants	151
	9.5	Faddeev's algorithm of resolventa decomposition for construction of SISO models	157
	Examples and exercises		158
10.	Mathematical models of exogenous signals		165
	10.1	Models of finite-dimensional continuous-time standard exogenous signals	167
	10.2	Models of finite-dimensional discrete-time standard exogenous signals	171
	10.3	Finite-dimensional representation of complex continuous time signals. Basis functions. Shannon-Kotelnikov theorem	174
	10.4*	Infinite-dimensional model of Dirac δ–function type	179
	10.5*	Models of stochastic in wide sense continuous-time exogenous signals	181
	10.6*	Models of stochastic in wide sense discrete-time exogenous signals	185
	Examples and exercises		187
11.	Influence of exogenous signals on dynamic systems (plants) under		189

	11.1	Dynamic continuous–time systems (plants) under finite-dimensional exogenous signals. Sylvester equation	191
	11.2	Dynamic discrete–time systems (plants) under finite-dimensional exogenous signals. Sylvester equation	197
	11.3*	Dynamic continuous–time systems (plants) under stochastic exogenous signals. Lyapunov equation	202
	11.4*	Dynamic discrete–time systems (plants) under stochastic exogenous signals. Lyapunov equation	207
	11.5*	Relation of parameters of stochastic stationary in the wide sense continuous-time and discrete-time signals of «white noise” type	212
	Examples and exercises		215
12*.	Linear matrix equations. Methods of solving		218
	12.1	Sylvester, Lyapunov, Riccati matrix equations	218
	12.2	Methods of direct solution of linear matrix equations	221
	12.3	Inverse solution of linear matrix equations	227
	Examples and exercises		228
13*.	Models of trajectory parametric sensitivity of dynamic plants and systems		233
	13.1	Models of trajectory parametric sensitivity of dynamic continuous-time plants and systems	233
	13.2	Models of trajectory parametric sensitivity of dynamic discrete-time plants and systems	246
	Examples and exercises		248
14*.	Interval models of dynamic plants		251
	14.1	Elements of interval calculations and linear algebra	251
	14.2	Interval mathematical models of dynamic plants	259
	Examples and exercises		261
	Conclusion		263
	References		264
	Appendix 1: The Laplace transform and its properties. The Laplace transforms of the simplest functions.		267
	Appendix 2: Z – transform and its properties. Z – transforms of simple functions		272
	Appendix 3: M–script: Calculation of matrix exponential for investigation of a plant (system) $\dot{x}(t) = Ax(t); x(0); y(t) = Cx(t)$		276
	Appendix 4. Matrices and operations		277

	From the history of Control systems and informatics department	284
	Information about authors	290

Посвящается семидесятилетию основания ***кафедры автоматики и телемеханики*** (*ныне* ***кафедры систем управления и информатики***)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Математические основы теории систем (МОТС)» к настоящему моменту имеет достаточно богатую предысторию. Первоначально в учебных планах подготовки инженеров–электриков по специальности 0606 – «автоматика и телемеханика» в 70-е годы XX-го века появилась дисциплина «Математические основы кибернетики (МОК)». К концу 70-х годов XX-го века название дисциплины претерпевает первое изменение, в результате чего она стала называться «Теоретическими основами кибернетики (ТОК)». Введенная в учебный план специальности 0606 дисциплина как в версии МОК, так и в версии ТОК в основном решала задачи математического обеспечения модельных представлений процессов управления и информационных процессов в канальных средах. Преподавание дисциплины ТОК на кафедре автоматики и телемеханики осуществлялось на основе учебного пособия: Никифорова Л.Т., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Теоретические основы кибернетики. Учебное пособие. Л.: ЛИТМО, 1984.

В конце 80-х годов XX-го века дисциплина претерпевает очередное изменение названия, в результате чего она начинает называться «Математическими основами исследования процессов управления (МОИПУ)». Из программы дисциплины МОИПУ изымаются положения, связанные с информационными процессами в канальных средах, которые переносятся в программу появившейся в учебном плане специальности 0606 дисциплины «Прикладная теория информации (ПТИ)».

Последняя модификация названия дисциплины, в результате которой она получила действующую в настоящий момент версию «Математические основы теории систем (МОТС)», произошла в начале 90-х годов XX-го века с одновременным изменением номера и названия специальности инженерной подготовки так, что выпускники вузов по данной специальности стали получать квалификацию инженера по специальности 2101 (ныне 220201) – «управление и информатика в технических системах». С середины 90-х годов XX-го века дисциплина МОТС вошла также в структуру учебного плана по разделу естественнонаучных дисциплин образовательного стандарта направления 651900 – «Автоматизация и управление» подготовки бакалавров и магистров.

В результате на основе опыта преподавания дисциплин МОК, ТОК, МОИПУ и «Математические основы теории систем», накопленного на кафедре систем управления и информатики (до 2001-го года кафедре автоматики и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики в 2007-м году было подготовлено и издано учебное пособие: Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А. Математические основы теории систем: элементы теории и практикум./ Под ред. Ушакова А.В. – СПб: СПбГУИТМО, 2007.

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие: Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд.2–е, дополненное.– СПб.: НИУ ИТМО , 2013. 292 с. отражает две тенденции в деятельности кафедры систем управления и информатики НИУ ИТМО.

Первая тенденция состоит в интенсификации издательской деятельности сотрудников кафедры, в результате чего увидели свет учебные пособия и монографии: Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории управления: элементы метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В.– СПб.: Балт. гос. техн. ун-т «Военмех» им. Н.Ф.Устинова. 2008; Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: СПбГУИТМО. 2008.; Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.; Ушаков А.В., Быстров П.С., Нуйя (Осипцева) О.С. Цифровое дистанционное управление: сетевые технологии и алгоритмы. - Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.; Сержантова М., Ушаков. А. Антропокомпоненты в составе сложных динамических систем: // LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.

Вторая тенденция связана с организаций в стенах университета параллельного обучения по направлениям 220100 – «Системный анализ и управление», 220400 – «Управление в технических системах», подготовки бакалавров и магистров и направлению 220201 – «Управление и информатика в технических системах» подготовки специалистов. Организация двухуровнего образования бакалавриат–магистратура, которая допускает поступления в магистратуру бакалавров, подготовленных в рамках других направлений, обнаруживает в образовании таких магистрантов заметные образовательные «дыры». С целью «латания» таких «дыр» предлагаемое вниманию читателей учебное пособие содержит разделы и параграфы со звездочкой, которых не входят в рабочую программу

дисциплины МОТС, но заметно ее дополняют. Они введены в пособие также для самостоятельной работы студентов канонического бакалаврского цикла обучения, желающих расширить свой познавательный кругозор.

Замысел учебного пособия в его втором и дополненном издании формировался авторами совместно, а также с учетом их личного опыта погружения в предметную и алгоритмическую среду преподавания дисциплины МОТС.

Авторы хотели бы выразить особую благодарность рецензентам учебного пособия доктору технических наук, профессору Дроздову Валентину Ниловичу и доктору технических наук, профессору Шароватову Валерию Тимофеевичу, чьи указания и советы заметно улучшили качество учебного пособия.

Конструктивную критику по существу содержания учебного пособия следует направлять авторам по: почтовому адресу 197101, Кронверкский пр.49 НИУ ИТМО, телефону кафедры СУИ 5954128 и электронным адресам dudarenko@yandex.ru, olga_nuyya@gmail.com, 12noch@mail.ru, o-slita@yandex.ru, ushakov-AVG@yandex.ru.

Издание настоящего пособия поддержано грантом РФФИ 06–08–01427а.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Основные проблемы управления рассмотрим на примере современной системы, структурное представление которой приведено на рисунке В.1.

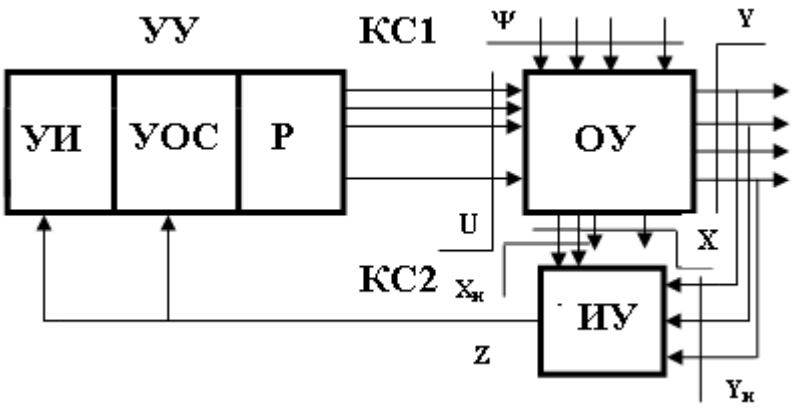


Рисунок В.1. Структурная схема современной системы управления

На рисунке В.1: ОУ – *объект управления*, представляющий собой некоторый физический объект (технологический процесс), на котором размещены *регулирующие органы* (РО), управляемые сформированными по некоторому закону *сигналами управления*; ИУ – измерительное устройство, преобразующее *доступные непосредственному измерению* компоненты вектора состояния и вектора выхода в электрический сигнал, согласованный с предоставленным каналом связи (КС); УИ – устройство *идентификации* объекта управления; УОС – устройство *оценивания состояния* объекта управления; Р – регулятор, представляющий собой техническую среду, средствами которой создается сигнал управления U, сформированный в соответствии с требуемым *закон управления* (ЗУ) регулирующими органами ОУ; УУ – *устройство управления*, представляющее собой функциональное объединение устройства идентификации объекта, устройства оценивания его состояния и регулятора; КС1, КС2 – соответственно *прямой* (управляющий) и *обратный* (информационный, известительный) *каналы связи*.

Таким образом, современная система представляет собой функциональное объединение *объекта управления, устройства управления и канальной среды*, образованной прямым и обратным каналами связи.

В современной теории управления объект управления задается с помощью макровектора

$$\text{ОУ}=\{U,\Psi,X,Y,T,\Omega_U,\Omega_X,\lambda,\delta,\lambda_\Psi,\delta_\Psi,F\} \qquad (В.1)$$

В макровекторе (В.1): $U=[U_1,U_2,\ldots,U_r]^T=col\{U_j,\ j=\overline{1,r}\}$ – r-мерный *вектор управления* объектом;

$\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_v]^T = col\{\Psi_l, l = \overline{1,v}\}$ – v-мерный *вектор внешних возмущающих воздействий*, осуществляющих *нежелательное* управление объектом; $X = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T = col\{X_i, i = \overline{1,n}\}$ – n-мерный *вектор состояния*, содержательно выполняющего функцию памяти объекта; $Y = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_m]^T = col\{Y_k, k = \overline{1,m}\}$ – m-мерный *вектор выхода*, содержательно представляющий собой выходную пользовательскую продукцию объекта управления как некоторого технологического процесса; T – временной *интервал управления* объектом, представляющий собой сплошное множество (континуум) моментов управления в случае, если ОУ имеет непрерывную природу, и счетное множество моментов управления в случае, если объект имеет дискретную природу; Ω_U – множество (область в r-мерном пространстве) *допустимых управлений*; Ω_X – множество (область в n-мерном пространстве состояния) *допустимых траекторий*; λ: $X \times U \Rightarrow X$ – n-мерная векторная *функция перехода*, описывающая процесс перехода из некоторого *исходного* состояния в состояние *перехода* под действием сформированного управления; δ: $X \times U \Rightarrow Y$ – m-мерная векторная *функция выхода*, описывающая процесс *формирования выхода* объекта при переходе из некоторого *исходного* состояния в состояние *перехода* под действием сформированного управления; λ_Ψ: $X \times U \times \Psi \Rightarrow \Delta X$ – n-мерная векторная функция, описывающая процесс формирования *дополнительного движения* ΔX *по состоянию* под действием внешнего возмущающего воздействия Ψ при переходе из некоторого исходного состояния в состояние перехода под действием сформированного управления; δ_Ψ: $X \times U \times \Psi \Rightarrow \Delta Y$ – m-мерная векторная функция, описывающая процесс формирования *дополнительного движения* ΔY *по выходу* под действием внешнего возмущающего воздействия Ψ при переходе из некоторого исходного состояния в состояние перехода под действием сформированного управления; F – *числовое поле*, которому принадлежат элементы векторов U, Ψ, X, Y, а также системные параметры векторных функций λ, δ, λ_Ψ, δ_Ψ.

В учебной и научной литературе по теории систем управления в основном используется редуцированная версия системного макровектора (В.1), которая имеет представление

$$\text{ОУ} = \{U, X, Y, T, \lambda, \delta\}. \qquad (В.2)$$

Компоненты редуцированной версии макровектора (В.2) имеют тот же, что и в (В.1) смысл. Форма (В.2) представления математических моделей объектов управления непрерывной и дискретной природы в учебном пособии будет основной.

Прежде, чем формулировать проблемы управления, необходимо отметить следующее. Любая техническая антропогенная система, то есть система, созданная умом и руками человека, имеет три фазы

своего существования. Первой фазой является *фаза разработки*, включающая в себя построение математической модели объекта управления и среды его функционирования, аналитический синтез закона управления, построение алгоритмического обеспечения процедур оценки параметров модели объекта и его состояния, моделирование системы с использованием возможностей современных программных оболочек, разработка технической реализации (программной – SOFT и схемотехнической – HARD) всех компонентов процесса управления, разработка конструкции устройства управления и технологического сопровождения его изготовления и испытания макетного образца устройства управления с использованием стендовых испытательных средств. Второй фазой существования технической системы является *фаза изготовления*, третьей – *фаза эксплуатации*, а четвертой – *фаза утилизации* технической антропогенной системы по причинам выработки эксплуатационного ресурса или функциональной бесполезности.

Проблемы управления в своей алгоритмической основе решаются в фазе разработки, а реализуются в фазе эксплуатации. Это значит, что математическая постановка задачи (цели) управления должна быть корректно сформулирована, математические модели объекта управления и среды его функционирования должны быть адекватны реальным физическим процессам в них, параметры математических моделей объекта и окружающей среды должны быть оценены с допустимой погрешностью, оценка вектора состояния должна сходиться к вектору состояния, сформированный закон управления должен доставлять процессу управления объектом требуемые динамические качества с одновременным обеспечением стабильности потребительских свойств в условиях возможной параметрической неопределенности, при этом канальная среда в прямом канале должна передавать достоверно сигналы управления к регулирующим органам объекта, а в обратном канале – достоверно передавать информацию о доступных непосредственному измерению компонентах вектора состояния и выхода в устройство управления. Все алгоритмы, задействованные в процессе управления должны быть вычислительно устойчивыми, матричные компоненты используемых математических модельных представлений должны быть хорошо обусловлены.

Приведенная на рисунке В.1 структурная схема сложной системы, представляющей собой функциональное объединение объекта управления, устройства управления и канальной среды, а также сделанный к ней комментарий позволяют сформулировать основные *проблемы управления*.

Первой проблемой является проблема составления математической модели ОУ в форме (В.1) или (В.2), причем ключевыми моментами здесь оказываются назначение *разумной* размерности вектора состояния, а также аналитические представления

правил λ и δ. Первая проблема в основном решается *экспертным* образом, который опирается на библиографические источники, опыт специалистов и собственный опыт разработчика.

Второй проблемой является решение задачи идентификации объекта управления, которая сводится при сконструированных аналитических представлениях правил λ и δ к разработке и реализации алгоритма ς формирования оценок $\hat{p}_\lambda$ и $\hat{p}_\delta$ параметров p_λ и p_δ этих правил на основе результатов измерения доступных непосредственному измерению компонентов x_u и y_u векторов x состояния и y выхода ОУ, причем алгоритм должен гарантировать сходимость оценок параметров в форме

$$\varsigma : \{x_u, y_u\} \Rightarrow (\hat{p}_\lambda, \hat{p}_\delta) : \lim_{t\to\infty}(\hat{p}_\lambda, \hat{p}_\delta) = (p_\lambda, p_\delta) \qquad \text{(B.3)}$$

Третьей проблемой является решение задачи оценки состояния объекта, которая сводится к разработке и реализации алгоритма ξ формирования оценки $\hat{x}$ вектора состояния x на основе результатов измерения доступных непосредственному измерению компонентов x_u и y_u векторов x состояния и y выхода ОУ, причем алгоритм должен гарантировать сходимость оценки вектора состояния в форме

$$\xi : \{x_u, y_u\} \Rightarrow \hat{x} : \lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t) \qquad \text{(B.4)}$$

Четвертой проблемой является решение задачи формирования закона управления, которое является многофазным.

Первая фаза решения состоит в формализации *задачи (цели) управления.* При всем многообразии содержательных постановок задач (целей) управления в формализованном представлении они могут быть сведены к двум версиям. Первая версия, именуемая *задачей перевода (регулирования)*, формулируется следующим образом: *перевести объект управления, находящийся в начальный момент времени* $t=t_0$ *в состоянии* $x(t_0)$*, к моменту времени* $t = t_k$ *в требуемое состояние* $x(t_k)$ *за минимально возможный на множестве доступных управлений* Ω_U *промежуток времени* $\Delta T = t_k - t_0$, формализованное представление *задачи перевода (регулирования)* имеет вид

$$x(t = t_0) \Rightarrow x(t = t_k) : \Delta T = (t_k - t_0) = \min_{U\in\Omega} \qquad \text{(B.5)}$$

Вторая версия задачи (цели) управления, именуемая *задачей удержания (слежения),* формулируется следующим образом: *удерживать состояние объекта управления* $x(t)$ *на программной траектории* $x_{пр}(t)$ *с минимальной на множестве доступных управлений* Ω_U *нормой вектора ошибки этого удержания,* формализованное представление *задачи удержания (слежения)* принимает вид

$$\left\| x_{пр}(t) - x(t) \right\| = \min_{U\in\Omega_U} \qquad \text{(B.6)}$$

Вторая фаза решения задачи формирования закона управления состоит в формировании *показателя (критерия) качества* протекания управляемого процесса, сформулированного в одной из *постановочной версий.* Показатель качества $J = J(x,u)$ задаётся так, чтобы траекториям управляемого процесса *лучшего качества* соответствовало экстремальное на множествах допустимых управлений Ω_U и допустимых траекторий Ω_X значение $\underset{U\in\Omega_U,\,X\in\Omega_X}{\text{extrem}}\ \{J = J(x,u)\}$ этого показателя.

Последняя (финальная) фаза формирования закона управления состоит в формировании сигнала управления как *функции текущего состояния объекта управления,* а в случае непосредственной неизмеримости вектора состояния *его оценки, а также оценки параметров* правил λ и δ его модели так, что *закон управления* принимает аналитическое представление

$$U = U\{\hat{x}, \hat{p}_\lambda, \hat{p}_\delta\}: \left\{ \begin{array}{c} x(t_0) \Rightarrow x(t_к) : \Delta T = (t_к - t_0) = \min\limits_{U\in\Omega_U}; \vee \\ \left\| x_{пр}(t) - x(t) \right\| = \min\limits_{U\in\Omega_U}; \& \mathrm{J} = \underset{\mathrm{U}\in\Omega_\mathrm{U},X\in\Omega_X}{\text{extrem}} \{J(x,u)\} \end{array} \right\} \qquad (\text{B.7})$$

Пятой проблемой является проблема канализация информации по прямому каналу связи (КС1) от устройства управления к объекту и по обратному каналу связи (КС2) – от объекта управления к устройству управления. Содержательно проблема канализации информации, как в прямом, так и в обратном каналах сводятся к решению двух задач. *Первая задача* связана с требованием эффективного использования предоставленного канала связи. В вербальной форме задача может быть сформулирована следующим образом: *передачу информации по предоставленному каналу связи следует вести так, чтобы объем сигнала* (V_c) *не превышал емкости* ($V_к$) *канала связи, максимально приближаясь к выполнению равенства* $V_c = V_к$, *где*

$$V_c = T_c F_c \log_2(1 + \frac{P_c}{P_n})\,;\ V_к = T_к F_к \log_2(1 + \frac{P_c}{P_n})\,. \qquad (\text{B.8})$$

В формуле (B.8): T_c – временная длительность сигнала, F_c – эффективный спектр сигнала, P_c – мощность сигнала, P_n – мощность помехи, сопровождающей процесс формирования сигнала; $T_к$ – длительность интервала времени, на который предоставлен канал связи, $F_к$ – эффективная полоса пропускания канала связи, $\mathrm{P_c}$ – мощность сигнала, фиксируемая в канальной среде, P_n – мощность помехи в канальной среде.

Вторая задача канализации информации связана с удовлетворением требованиям обеспечения достоверности принимаемой информации *(информационной надежности каналообразующих средств).* В вербальной форме задача может быть сформулирована следующим образом: *передачу информации по*

предоставленному каналу связи в условиях помех следует организовать так, чтобы за счет введения в структуру передаваемых кодов, несущих необходимую получателю информацию, избыточных разрядов, на приемной стороне существовала возможность восстановления искаженного при передаче кода в такой степени, чтобы вероятность $P_{ош}$ исполнения искаженной (ошибочной, ложной) команды не превышала бы вероятности $P_{доп}$, допустимой для данной категории проектируемой системы управления. В формальной постановке задача обеспечения информационной надежности канальными средствами сводится к обеспечению неравенства

$$P_{ош} = \sum_{i=s+1}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \le P_{доп}\,, \qquad (B.9)$$

где n – число разрядов помехозащищенного кода, p – вероятность искажения элементарного сигнала (бита) двоичного кода, s – число исправляемых ошибок средствами помехозащитного декодирования при приеме информации, i – число возможных ошибок, C_n^i – число сочетаний из n по i.

Перечисленные проблемы управления относятся к разряду «*вечных»,* содержательно они инвариантны относительно технологической среды, в которой пребывает конкретное гуманитарное сообщество.

Первая из перечисленных выше проблем является предметной областью дисциплины «Математические основы теории систем». На математическое сопровождение решения перечисленных выше базовых задач управления в их модельном представлении направлено основное содержание учебного пособия. В этой связи в пособии приведены сведения об алгебраических структурах, основных пространствах, матричном формализме, являющемся инструментальной основой метода пространства состояния. Модельные представления динамических объектов (объектов управления) как в классе моделей «вход–состояние–выход (ВСВ)», так и в классе моделей «вход–выход (ВВ)» ограничиваются непрерывными и дискретными по времени объектами. С использованием возможностей ВСВ – модельных представлений решаются задачи анализа структурных свойств динамических объектов – управляемости и наблюдаемости. Проблема конечномерных представлений сигналов, как элементов функционального пространства, решается как в прямой постановке с использованием матрицы Грама, так и в обратной – с использованием теоремы В. Котельникова–К. Шеннона. Освоение основных положений *математических основ теории систем* сопровождено богатым практикумом по базовым проблемам курса.

Вторая, третья и четвертая проблемы являются предметной областью «куста» дисциплин, объединенных названием «Современная теория управления».

Пятая из перечисленных проблем является предметной областью дисциплины «Прикладная теория информации».

Образовательный процесс на кафедре *систем управления и информатики* на настоящий момент построен так, что кафедра готовит своих выпускников как в форме инженерной подготовки, так и в форме бакалаврской и магистерской подготовок исключительно для *фазы разработки устройств управления и прикладной информатики* в технических системах. А эта фаза опирается только на модельные представления. Техническое задание на разработку устройства управления техническим объектом есть словесная (вербальная) модель цели разработки. Справочные данные функциональных компонентов представляют собой параметры их моделей и т.д. Поэтому далее авторы, говоря «объект управления» или «система управления», имеют ввиду их *математические модели*. А как их построить, читатель поймет по прочтении учебного пособия.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТЕРМИНЫ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

S, X – множество элементов произвольной природы;

$G, G_0, F, GF(p), GF(p^n)$ – алгебраические структуры соответственно группа, подгруппа, поле, простое поле Галуа с характеристикой (модулем) p, расширенное поле Галуа;

$\{X, d\}, X_d$ – метрическое пространство с метрикой $d = d(x, y)$;

$\boldsymbol{A}, A$ – соответственно линейный оператор (ЛО) и матрица ЛО;

X^n – n-мерное линейное пространство над полем F;

R^n – линейное вещественное пространство;

I – единичная матрица;

O – нулевой скаляр, вектор, матрица;

A, A^j, A_k – матрица, j-ая строка, k-ый столбец матрицы A;

A^T – матрица, полученная транспонированием матрицы A;

A^* – матрица, сопряженная к матрице A;

A^{-1} – матрица, обратная к матрице A;

A^+ – матрица, псевдообратная к матрице A;

$[A]$ – интервальная матрица, составленная из интервальных скалярных элементов $[A_{ij}]$;

$\Lambda = diag\{\alpha_i, i = \overline{1,n}\}$ – диагональная матрица с элементами α_i на диагонали;

$row\{\alpha_i, i = \overline{1,n}\}$ – строчная матричная структура с элементами α_i в строке;

$col\{\alpha_i, i = \overline{1,n}\}$ – столбцовая матричная структура с элементами α_i в столбце;

$\|(\circ)\|$ – норма элемента $(\circ)$;

$\|(\circ)\|_P$ – норма элемента $(\circ)$ с весом P;

$\|(*)\|_p$ – p-ичная норма элемента *(*)*;

$ang\{x, y\}$ – угол между векторами x и y;

$\overset{\Delta}{=}$ – равенство по определению;

$\forall$ – для всех;

$\exists$ – существует;

$\in$ – принадлежит;

$\notin$ – не принадлежит;

$\max\limits_i$ – максимум на множестве элементов с индексом i;

$\bigcup, \bigcap$ – символы объединения и пересечения множеств;

$\gamma = arg\{\beta(\gamma)\}$ – значение γ, удовлетворяющее *условию* $\beta(\gamma)$;

$det(\circ), tr(\circ), rank(\circ)\{rang(\circ)\}$ – соответственно определитель, след, ранг матрицы $(\circ)$;
$exp(\circ)$ – матричная экспонента с матричным аргументом $(\circ)$;
$cond\{(\circ)\} = C\{(\circ)\}$ – число обусловленности матрицы $(\circ)$;
$\dim(\circ)$ – размерность элемента $(\circ)$;
$deg(\circ)$ – степень полинома $(\circ)$;
$\mathrm{Jm}(\circ)$ – образ $(\circ)$ ЛО;
$Ker(\circ)$ – ядро $(\circ)$ ЛО;
$\sigma\{\circ\}$, $\sigma_a\{\circ\}$, $\sigma_\alpha\{\circ\}$ – соответственно алгебраические спектры собственных значений, коэффициентов характеристического полинома и сингулярных чисел матрицы $\{\circ\}$;
$\otimes$ – символ кронекеровского произведения векторных и матричных компонентов;
$contr\{(A,B)\}$ – предикат наличия свойства управляемости пары матриц (A,B));
$observ\{(A,C)\}$ – предикат наличия свойства наблюдаемости пары матриц (A,C);
$\vee$ – логическое "или";
& – логическое "и";
$(\circ):\eta$; $(\circ)|\eta$ – предикат наличия характеристического свойства η у элемента $(\circ)$;
$rest(rem)\{*/\circ\}$ – остаток от деления $*$ на $\circ$;
SVD – сингулярное разложение матриц;
ВВ – вход–выход;
ВМП – векторно-матричное представление;
ВСВ – вход–состояние–выход;
ИМО (П) – интервальное модельное описание (представление)
КС – канал связи;
МВВ – модель внешнего воздействия;
МПС – метод пространства состояний;
МТЧ–модель траекторной чувствительности;
МУ – модальное управление;
ОС – обратная связь;
ОУ – объект управления;
ФТЧ–функция траекторной чувствительности.

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Для изучения основных разделов математических основ теории систем (МОТС) необходимо знакомство с алгебраическими структурами и пространствами. Схема их формирования, взаимной связи и изучения приведена на рисунке 1.1.

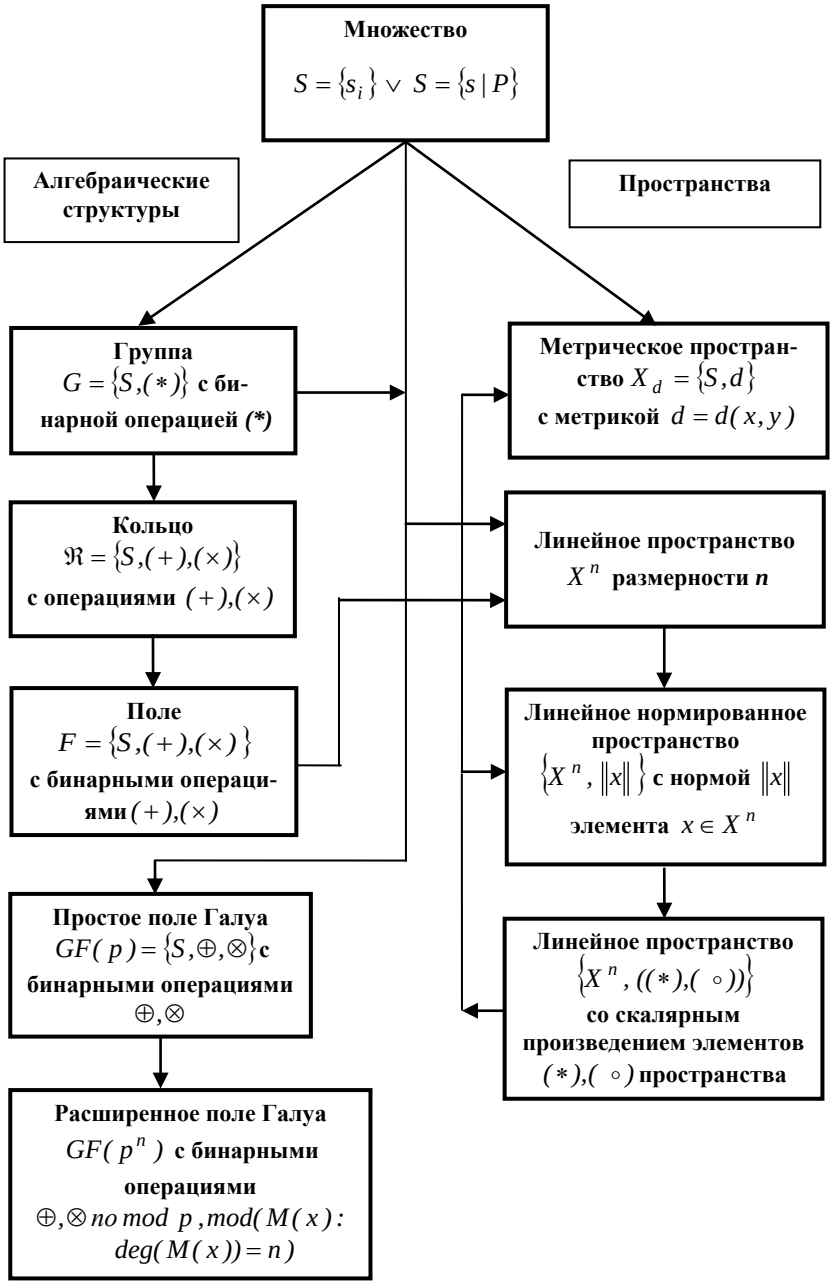


Рисунок 1.1

Определение 1.1 (О1.1). *Множеством* называется совокупность объектов любой природы, задаваемая путем их перечисления или ($\vee$) указанием их характеристического свойства P:

$$S=\{s_1,s_2,s_3\} \quad \vee \quad S=\{s \mid P\}.$$

Последняя запись означает, что множество S есть совокупность элементов s, обладающих характеристическим свойством P.

Мощность множества $S=\{s_1, s_2,..., s_n\}$ характеризует число элементов множества и обозначается $[S]$.

Определение 1.2 (О1.2). Пусть задано множество $S=\{s_1, s_2,..., s_n\}$, будем говорить, что во множестве S определена бинарная алгебраическая операция, если указано правило, по которому любой паре элементов s_i, s_j из этого множества, взятых в определенном порядке ставится в соответствие единственный элемент s_k того же множества.

Определение 1.3 (О1.3). *Алгебраической структурой* называется множество с заданными в нем бинарной алгебраической операцией (или несколькими операциями) и свойствами элементов относительно этой бинарной операции.

В курсе МОТС изучаются следующие алгебраические структуры: группа (подгруппа), кольцо, идеал, поле, простое и расширенное поля Галуа.

Определение 1.4 (О1.4). Множество G называются *группой*, если для любой пары элементов множества G определена бинарная алгебраическая операция $*$ и выполняются условия:

1.Замкнутости: для $\forall\alpha,\beta \in G$, элемент $\gamma = \alpha * \beta \in G$;

2.Ассоциативности: для $\forall\alpha,\beta,\gamma \in G \quad \alpha*(\beta*\gamma)=(\alpha*\beta)*\gamma$

3.Существования нейтрального элемента (единицы группы): G содержит единственный элемент $e: \forall\alpha \in G \quad e*\alpha = \alpha*e = \alpha;$

4.Существования обратного элемента: для $\forall\alpha \in G \quad \exists\alpha^{-1} \in G$ (единственный для $\forall\alpha$), называемый элементом, обратным α, такой, что $\alpha*\alpha^{-1} = \alpha^{-1}*\alpha = e$.

Примечание 1.1 (П1.1): Группа G называется *коммутативной* или абелевой группой, если выполняется условие коммутативности: для $\forall\alpha,\beta \in G \quad \alpha*\beta = \beta*\alpha$.

Определение 1.5 (О1.5). Подмножество G_0 группы G $(G_0 \subset G)$ называется *подгруппой*, если оно удовлетворяет всем свойствам группы относительно бинарной алгебраической операции *.

Определение 1.6 (О1.6). Пусть G коммутативная группа, G_0 подгруппа группы G. Рассмотрим множества:

$$G_0 = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_k\},$$

$$G_1 = \{\alpha_1*\beta_1 \quad \alpha_2*\beta_1 \quad \alpha_3*\beta_1 \quad \dots \quad \alpha_k*\beta_1\}$$

$$\vdots$$

$$G_\nu = \{\alpha_1*\beta_\nu \quad \alpha_1*\beta_\nu \quad \alpha_1*\beta_\nu \quad \dots \quad \alpha_1*\beta_\nu\}$$

где $\beta_i \notin G_0, G_{i-1}, \quad i=\overline{1,\nu}$.

Определенные таким образом множества называются смежными классами группы G по подгруппе G_0 и задают разложение группы G по подгруппе G_0 с образующими элементами β_i, так что $G = \bigcup_{i=0}^{\nu} G_i$, где число ν называется индексом подгруппы G_0 в группе G.

Определение 1.7 (О1.7). Пусть имеются две группы G_1 и G_2 с бинарными операциями «$*$» и «$\circ$» соответственно одной и той же мощности и $\varphi : G_1 \to G_2$ отображение G_1 в G_2 такое, что для всех $x, y \in G_1$ имеет место равенство: $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$.Тогда отображение φ, обладающее таким свойством, называется *изоморфным*. Если между двумя группами G_1 и G_2можно установить *изоморфизм* φ, то группы G_1 и G_2 называются *изоморфными*.

Определение 1.8 (О1.8). Множество R называется *кольцом*, если на нем определены бинарные алгебраические операции сложения и умножения и выполняются следующие условия:

Множество R является коммутативной группой относительно бинарной операции сложения;

1.Замкнутости относительно бинарной операции умножения: для $\forall \alpha, \beta \in R$ элемент $\alpha\beta \in R$;

2.Ассоциативности относительно бинарной операции умножения: для $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;

3.Дистрибутивности относительно бинарных операций сложения и умножения: для

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in R \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \qquad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha .$$

Примечание 1.2 (П1.2). Кольцо R называется *коммутативным*, если выполняется условие: $\forall \alpha, \beta \in R$ $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Определение 1.9 (О1.9). Подгруппа J аддитивной группы R называется *идеалом*, если для $\forall \alpha \in R$ и $\beta \in J$ элемент $\alpha\beta \in J$.

Примечание 1.3 (П1.3). Идеал, состоящий из всех элементов, кратных некоторому элементу α кольца R, называется *главным* идеалом. Кольцо, в котором каждый идеал главный, называется *кольцом главных идеалов*. Элемент α называется *образующим* (или *порождающим*) элементом идеала.

Поскольку для кольца R справедливы все свойства группы, а для идеала J все свойства подгруппы относительно бинарной операции сложения, то кольцо R можно разложить подобно группе на смежные классы по идеалу J.

Определение 1.10 (О1.10). Коммутативное кольцо F называется *полем*, если выполняются следующие условия:

1.Кольцо F содержит нейтральный элемент 1 относительно бинарной операции умножения такой, что для $\forall \alpha \in F$ $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$;

2.Для $\forall \alpha \neq 0$, $\alpha \in F$ существует обратный элемент $\alpha^{-1} \in F : \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$.

3.Если $\alpha, \beta \in F$, то $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\beta = 0$.

Определение 1.11 (О1.11). Если p – простое число, то кольцо чисел по $\bmod p$ называется *простым полем* Галуа и обозначается $GF(p)$. $GF(p)$ состоит из элементов $0,1,\ldots,p-1$, таким образом $GF(p) = \{0,1,2,\cdots,p-1\}$.

Примечание 1.4 (П1.4). Определим на множестве $GF(p)$ две бинарные операции:

сложения по $\bmod p$, обозначив его $\oplus$, и умножения по $\bmod p$, обозначив его $\otimes$:

1. $c = a \oplus b = rest\dfrac{a+b}{p} \Leftrightarrow a + b = pm + c,$ где $c < p, m$ – целое;
2. $d = a \otimes b = rest\dfrac{ab}{p} \Leftrightarrow ab = pk + d$, где $d < p, k$ – целое.

При этом c и d называются *вычетами*.

Определим понятия сравнимости по $\bmod p$. Два целых числа a и b сравнимы по $\bmod p$:

$a \equiv b(\bmod p) \Leftrightarrow a - b = pm,$ где m – целое.

Определение 1.12 (О1.12). Полином $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ называется *полиномом над полем* $GF(p)$ *или модулярным*, если его коэффициенты $a_i, i = \overline{0,n}$ принадлежат простому полю $GF(p)$. *Степенью полинома* $A(x)$ $\deg\{A(x)\}$ называется наибольшее число $n : a_n \neq 0$.

Примечание 1.5 (П1.5). Сравнение модулярных полиномов $A(x)$ и $B(x)$ по модулю модулярного полинома $F(x)$, производится аналогично сравнению целых чисел по $\bmod p$ $A(x) \equiv B(x) \bmod [F(x)] \Leftrightarrow A(x) - B(x) = k(x)F(x)$, где $\deg[k(x)] \leq \deg[F(x)]$.

Аналогично можно ввести операции суммирования (вычитания), умножения по модулю модулярного полинома, при этом приведение подобных членов производится по $\bmod p$. Так

$A(x) + B(x) = C(x) \bmod [F(x)] \Leftrightarrow A(x) + B(x) = L(x)F(x) + C(x)$, где $\deg[C(x)] \leq \deg[F(x)]$, при этом $C(x)$ называется *вычетом по* $\bmod [F(x)]$.

Определение 1.13. Полная система вычетов по двойному модулю $[\bmod p, \bmod[F(x)]]$ образует конечное поле, содержащее p^n элементов, которое обозначается $GF(p^n)$ и называется *расширенным полем Галуа*.

В отличие от простого поля $GF(p)$ элементами расширенного поля $GF(p^n)$ являются уже не числа, а модулярные полиномы степени не выше $(n-1)$ с коэффициентами из простого поля $GF(p)$.

Примеры и задачи

1.1. Определить, относительно какой бинарной операции: умножения или сложения следующее числовое множество образует группу, или не образует ее вовсе.

а) Множество всех вещественных чисел R.

б) Множество вещественных чисел отличных от нуля.

в) Множество положительных вещественных чисел.

г) Множество всех комплексных чисел.

д) Множество комплексных чисел, отличных от нуля.

е) Множество комплексных чисел с модулем равным единице.

ж) Множество комплексных чисел с модулем большим единицы.

з) Множество чисел, представляющих собой целые положительные степени числа 2 $\{2,4,8,\cdots\}$.

и) Полное множество чисел $\{1,-1, j,-j,\cdots\}$, где $j=\sqrt{-1}$.

1.2. Указать какие из обнаруженных групп в примере 1.1 являются коммутативными группами.

1.3. Дано множество чисел $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, задана бинарная операция $\oplus$ – сложение по $\bmod p$. Указать, для каких значений p множество S образует группу.

1.4. Дано множество кодовых комбинаций над простым полем $GF(2)=\{0,1\}$ с бинарной операцией сложения комбинаций по $\bmod 2$ без переносов в старший разряд $S=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$. Определить, является ли множество S группой, указать какой элемент множества S является единицей группы.

1.5. Дано множество квадратных матриц $\{A_i, i=1,2,\cdots\}$ порядка $n\times n$.

а) Доказать, что множество квадратных матриц A_i образует группу относительно бинарной операции сложения.

б) При каком характеристическом свойстве множество матриц A_i образует группу относительно бинарной операции умножения.

1.6. Дано множество n–мерных векторов $X = col\{x_i, i = \overline{1,n}\}, x_i \in R^n$. Выяснить, образует ли множество X группу относительно бинарной операции сложения.

1.7. Дано множество матриц перестановок P_i порядка 3×3:

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right\},$$

используемых при перестановках элементов векторов в соответствии с правилами $\overline{x_i} = P_i x$, где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Указать, относительно какой бинарной операции умножения или сложения множество матриц перестановок образует группу.

1.8. Выяснить, изоморфны ли следующие группы:

а) Вещественных чисел с бинарной операцией сложения и степеней любого положительного целого числа с бинарной операцией умножения.

б) Комплексных чисел с бинарной операции умножения и натуральных логарифмов комплексных чисел с бинарной операцией сложения.

1.9. Дано множество кодовых комбинаций из элементов $GF(2) = \{0,1\}$ с бинарной операцией сложения по $\bmod 2$ без переноса в старший разряд, образующие группу

$$G = \left\{\begin{matrix}0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, \\ 1011, 1100, 1101, 1110, 1111\end{matrix}\right\}.$$

а) Указать все возможные подгруппы G_i группы G.

б) Построить разложение группы G по подгруппе $\tilde{G}$, содержащий минимальное число элементов.

1.10. Дано множество кодовых комбинаций, образующих группу относительно бинарной операции сложения по $\bmod p$ без переноса в старший разряд

$G = \{x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1\}$, где $x_i \in GF(2) = \{0,1\}, i = \overline{1,7}$.

а) Доказать, что подмножество кодовых комбинаций, элементы которых удовлетворяют соотношениям:

$x_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7$, $x_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7$, $x_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$ образует подгруппу G_0.

б) Разложить группу G по подгруппе G_0, взяв в качестве образующих элементов кодовые комбинации

$\{0000001\}, \{0000010\}, \{0000100\}, \{0001000\}, \{0010000\}, \{0100000\}, \{1000000\}$

1.11. Выяснить, образуют ли кольцо следующие множества:

а) Множество четных чисел;

б) Множество нечетных чисел;

в) Множество рациональных чисел;

г) Множество вещественных чисел;

д) Множество комплексных чисел;

е) Множество целых чисел, кратных данному целому числу большему $q > 0$;

ж) Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b целые.

1.12. Выяснить, образуют ли кольцо множество квадратных матриц одной размерности.

1.13. Выяснить, образуют ли кольцо множество:

а) Многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ где a_i – целые числа $i = \overline{0,4}$.

б) Линейных комбинаций экспоненциальных функций $g(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i e^{it}$.

в) Линейных комбинаций гармонических функций $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \cos(it)$, где φ_i – действительные числа.

г) Функций $\xi(t) \in L_T^2$, где $t \in [0, T]$ и $\int_T \xi^2(t)dt < M = const$

1.14. Доказать, что множество парных чисел (a, b) с бинарными операциями, заданными равенствами

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{и} \quad (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

образует кольцо.

1.15. Выяснить, образует ли множество $\{0,1,2,3,4,5\}$ кольцо с бинарными операциями сложения и умножения по $\bmod p$:

а) При $p = 2$;

б) При $p = 3$;

в) При $p = 4$;

г) При $p = 8$.

1.16. Выяснить, образует ли множество многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, где $a_i \in GF(p) = \{0,1,2,\cdots, p-1\}$ с бинарными операциями умножения и сложения по двойному модулю $\bmod p$ и $\bmod(x^m + 1)$ кольцо многочленов.

1.17. Дано кольцо многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ где $a_i \in GF(2) = \{0,1\}$ с бинарными операциями умножения и сложения по $\bmod 2$ и $\bmod(x^7 + 1)$. Построить идеалы:

а) J_1 с образующим элементом $g_1(x) = x + 1$.

б) J_2 с образующим элементом $g_2(x) = x^3 + x + 1$.

в) J_3 с образующим элементом $g_3(x) = x^3 + x^2 + 1$.

1.18. В предыдущей задаче, пользуясь многочленами степени меньшей $\deg\{g_i(x)\}$ как элементами, разложить кольцо многочленов на смежные классы по:

а) Идеалу J_1. Если $\alpha, \beta \in F,$ то $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\beta = 0$. Если $\alpha, \beta \in F,$ то $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\beta = 0$.

б) Идеалу J_2.

в) Идеалу J_3.

1.19.* Выяснить, какие из множеств примера 1.11 образуют поле.

1.20. Выяснить, каким свойством должны обладать квадратные матрицы, чтобы их множество образовало поле.

1.21. Дано множество $\{0,1,2,3,4\}$ с бинарными операциями сложения и умножения по $\mathrm{mod}5$. Образует ли это множество поле? Как в этом поле осуществляется обратный элемент для каждого элемента множества?

Примеры решения вариантов задач

Решение задачи 1.1. В соответствие с определением группы G при заданной бинарной операции необходимо выполнение условий аксиом:

– замкнутости;

– ассоциативности;

– существования нейтрального элемента (единицы группы;

– существования обратного элемента.

Тогда имеем в вариантах задачи:

а) Группу относительно сложения и умножения. Действительно:

$\forall \alpha, \beta \in R, \Rightarrow \alpha + \beta \in R, \alpha\beta \in R$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

– нейтральный элемент $e = 0$ относительно сложения и $e = 1$ относительно умножения;

– обратный элемент α^{-1} $\forall \alpha \in R$ $\alpha^{-1} = -\alpha$ относительно сложения $\alpha^{-1} = 1/\alpha$ относительно умножения, при этом $-\alpha,\ 1/\alpha \in R$

б) Группу относительно умножения

в) Группу относительно умножения

г) Группу относительно сложения и умножения. Действительно: $\forall \alpha, \beta \in C$ где C – множество комплексных чисел воспользуемся декартовой и полярной формами представления чисел, так, что

$$\alpha = |\alpha| e^{j\varphi_\alpha}, \beta = |\beta| e^{j\varphi_\beta}, \alpha = \mathrm{Re}\,\alpha + jJm\alpha, \beta = \mathrm{Re}\,\beta + jJm\beta;$$

$$\alpha + \beta = (\mathrm{Re}\,\alpha + \mathrm{Re}\,\beta) + j(Jm\alpha + Jm\beta) = (\mathrm{Re}\,\gamma + jJm\gamma) \in C;$$

$$\alpha\beta = |\alpha| e^{j\varphi_\alpha} \cdot |\beta| e^{j\varphi_\beta} = |\alpha| \cdot |\beta| e^{j(\varphi_\alpha + \varphi_\beta)} = |\delta| e^{j\varphi_\delta} \in C;$$

$$\forall \alpha, \beta, \chi \in C \Rightarrow \alpha + (\beta + \chi) = (\alpha + \beta) + \chi, \alpha \cdot (\beta \cdot \chi) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \chi.$$

– нейтральный элемент $e = 0 + j0 = 0$ относительно сложения и $e = 1e^{j0} = 1$ относительно умножения:

– обратный элемент $\alpha^{-1} \forall \alpha \in C$ равен: $-\alpha = -\mathrm{Re}\,\alpha - jJm\alpha$ относительно сложения и $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|} \cdot e^{-j\varphi_\alpha}$ относительно умножения;

д) Группу относительно умножения

е) Группу относительно умножения

ж) Не образует группы ни относительно сложения, ни относительно умножения, так как не содержит единиц группы.

з) Не образует группы в обоих случаях, так как относительно сложений не включаются условия замкнутости, относительно умножения не существует α^{-1};

и) Образует группы относительно умножения.

<u>Решение задачи 1.11</u>. В соответствии с определением 1.8 кольца R на элементах кольца должны быть заданы бинарные операции сложения и умножения и выполняться условия (аксиомы):

– коммутативности R как группы относительно сложения

– замкнутости относительно умножения

– ассоциативности относительно умножения

– дистрибутивности.

Тогда имеем в вариантах задачи:

а) Образует кольцо. Действительно, множество четных чисел X образует коммутативную группу относительно сложения

$$\forall \alpha, \beta \in X \Rightarrow \alpha\beta \in X$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in X \Rightarrow \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in X \Rightarrow \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

б) Не образует кольцо, так как не выполняются групповые свойства множества нечетных чисел

в) Образуют кольцо.

г) Образуют кольцо.

д) Образуют кольцо.

е) Если считать, что ноль кратен целому числу q, то это множество образует кольцо.

ж) Не образует кольцо, так как не выполняются условия замкнутости по умножению. Действительно, пусть

$\alpha = a + b\sqrt{2},\ \beta = a - b\sqrt{2}$ где a, b целые, тогда $\gamma = \alpha\beta = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{b^2}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$, где $\frac{b^2}{\sqrt{2}}$ перестает быть целым.

<u>Решение задачи 1.19.</u> Напомним, что для того чтобы кольцо R образовывало поле F необходимо выполнение следующих условий:

– коммутативности кольца,

– существования единиц $1: \forall \alpha \in F$, $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$,

– существования обратного элемента $\alpha^{-1}: \forall \alpha \in F$ $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.

Тогда поля будут образовывать множества в задачах в 1.11 в), д), е).

2. ПРОСТРАНСТВА

Определение 2.1 (О2.1). Пространством называется множество объектов математической природы (точка, кривая, вектор, матрица, геометрическая фигура, многообразие и т.д.), именуемых элементами пространства, на которых заданы *геометрические* характеристики, определяющие расстояние между элементами, их размер, взаимное положение и т.д.

2.1. Метрические пространства. Способы задания метрик

Определение 2.2 (О2.2). Пусть произвольные элементы x и y множества X образуют пару $\{x, y\}$, тогда отображение

$$d : \{x, y\} \Rightarrow R \tag{2.1}$$

во множество действительных чисел R, называется *метрикой* и обозначается $d(x, y)$, если оно удовлетворяет:

1. условию неотрицательности:
   $d(x, y) > 0$ *для* $\forall x, y : x \neq y; d(x, y) = 0$ *для* $\forall x, y : x \equiv y;$
2. условию симметрии: $d(x, y) = d(y, x)$ *для* $\forall x, y;$
3. условию неравенства «треугольника»:
   $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *для* $\forall x, y, z.$

Содержательно метрика представляет собой вещественнозначную положительную величину, определяющую *расстояние* между элементами или *степень различия* элементов множества X.

Определение 2.3 (О2.3). Множество X с введенной в нем метрикой $d = d(x, y)$ образует метрическое пространство (МП), обозначаемое в одной из форм $\{X, d\}$ *или* X_d.

Примечание 2.1 (П2.1). Так как на элементах множества X может быть задано бесконечное число метрик $d = d(x, y)$, то на нем может быть построено бесконечное число метрических пространств $\{X, d\}$.

Рассмотрим примеры метрик и метрических пространств.

1. Если $X = R$ – множество действительных чисел, то R образует метрическое пространство $\{R, d\}$ с метрикой

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x|; x, y \in R. \tag{2.2}$$

Эта метрика именуется обычной (простой) или абсолютной на R.

2. Если $X = R^n$, то есть оно образовано n–элементными числовыми массивами (именуемыми также n-ками, n–кортежами, n–векторами), представляемыми в виде

$x = (x_1, x_2 ... x_n);\ y = (y_1, y_2 ... y_n);\ x_i \in GF(2) = \{0, 1\},\ x_i, y_j \in R;\ i, j = \overline{1, n};$ то на множестве X может быть задана обобщенная гёльдеровская векторная метрика $d_p(x, y)$, определяемая выражением

$$d_p(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)^p)^{1/p} \qquad (2.3)$$

где p – целое положительное число. Наиболее употребительными векторными метриками являются:

2.1. абсолютная векторная метрика $d_p(x,y)$ при $p=1$

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \ ; \qquad (2.4)$$

2.2. квадратичная векторная метрика $d_p(x,y)$ при $p=2$

$$d_2(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)^2)^{1/2}=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{1/2}; \qquad (2.5)$$

2.3. экстремальная метрика $d_p(x,y)$ при $p\Rightarrow\infty$

$$d_\infty(x,y)=\lim_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)^p)^{1/p}=\max_i\left\{|x_i-y_i|;i=\overline{1,n}\right\}; \qquad (2.6)$$

3. Если множество X образовано n-ками вида $x=(x_1,x_2...x_n)$; $y=(y_1,y_2...y_n)$; где элементы x_i,y_j; $i,j=\overline{1,n}$; принадлежат простому полю Галуа $GF(p)=\{0,1,2...p-1\}$, то n-ки x и y именуются кодами или кодовыми векторами или кодовыми комбинациями, при этом на множестве X может быть построена метрика Ли

$$d_L(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\min\{|x_i-y_i|,p-|x_i-y_i|\}; \qquad (2.7)$$

Если $p=2$ так, что $GF(p)=GF(2)=\{0,1\}$, то метрика Ли вырождается в метрику $d_H(x,y)$ Хэмминга

$$d_L(x,y)=d_H(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\{x_i\oplus y_i\}, \qquad (2.8)$$

где $\oplus$– знак операции суммирования по модулю два ($\mathrm{mod}\,2$). Содержательно метрика Хэмминга определяет число разрядов кодовых векторов x и y, в которых эти векторы *отличаются* друг от друга. Метрика $d_H(x,y)$ Хэмминга именуется также *кодовым расстоянием.*

4. Если множество X образовано множеством вещественнозначных функций времени $x(t)$ и $y(t)$, заданных на интервале $T=\{t:t_0\le t\le t_к\}$, то на множестве X может быть задана p-ичная функциональная метрика $d_p(x,y)$, определяемая интегральным выражением

$$d_p(x,y)=\left\{\int_{t_0}^{t_к}(|x(t)-y(t)|)^p\,dt\right\}^{1/p}. \qquad (2.9)$$

Наиболее употребительными функциональными метриками явля-

ются:

4.1. абсолютная функциональная метрика при $p=1$

$$d_p(x,y)|_{p=1} = d_1(x,y) = \int_{t_0}^{t_к} \left(|\, x(t) - y(t)\,|\right)\, dt\,; \qquad (2.10)$$

4.2. квадратичная функциональная метрика при $p=2$

$$d_p(x,y) = d_2(x,y) = \left\{ \int_{t_0}^{t_к} \left(|\, x(t) - y(t)\,|\right)^2 dt \right\}^{1/2}; \qquad (2.11)$$

4.3. экстремальная функциональная метрика при $p \Rightarrow \infty$

$$d_\infty(x,y) = \underbrace{\lim}_{p\to\infty} d_p(x,y) = \underbrace{\sup}_{t\in T}\left\{|\, x(t) - y(t)\,|\right\} \qquad (2.12)$$

Определение 2.4 (О2.4). Метрическое пространство $\{X, d\}$ называется *сепарабельным,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует счетная последовательность $\{x_1, x_2 ...\}$ элементов множества X таких, что $d(x, x_i) < \varepsilon$ для некоторого i и любого $x \in$ X.

Определение 2.5 (О2.5). Метрическое пространство $\{X, d\}$ называется *компактным*, если можно найти конечную последовательность $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n(\varepsilon)}\}$ элементов множества X таких, что выполняется $d(x, x_i) < \varepsilon$ для некоторого $i : 1 \le i \le n(\varepsilon)$ и любого элемента $x \in X$.

Примеры и задачи

2.1.1. Вычислить векторную метрику $d_1(x,y)$ для векторов $x = (-5, 7, -2), y = (5, -7, 2)$, элементы которых принадлежат множеству действительных чисел R.

2.1.2. Вычислить векторную метрику $d_2(x,y)$ для векторов $x = (-5, 7, -2), y = (5, -7, 2)$, элементы которых принадлежат множеству действительных чисел R.

2.1.3. Вычислить векторную метрику $d_\infty(x,y)$ для векторов примера 2.1.1.

2.1.4. Построить кривую зависимости значения векторной метрики $d_p(x,y)$ как функцию от $p \in [1, 2, \infty)$ для векторов примера 2.1.1.

2.1.5. Вычислить векторную метрику $d_p(x,y)$ для векторов $x = (-5, 7, -2),\ y = (0, 0, 0)$ для значений $p = 1, 2, \infty$.

2.1.6. Построить кривые постоянных значений $d_p(x,y)$=1 для векторов $x = (x_1, x_2),\ y = (0, 0)$ для значений $p = 1, 2, \infty$.

2.1.7. Вычислить векторную метрику Ли $d_L(x,y)$ для векторов $x = (1, 4, 2),\ y = (2, 1, 3)$, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2.1.8. Вычислить векторную метрику Ли $d_L(x, y)$ для векторов примера 2.1.7. при условии, что их элементы принадлежат простому полю Галуа $GF(7) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

2.1.9. Вычислить векторную метрику $d_H(x, y)$ Хэмминга (кодовое расстояние) для кодовых векторов $x = (1011010)$ *и* $y = (0101101)$.

2.1.10. Вычислить функциональную метрику $d_1(x, y)$ для функций $x(t) = 1,\ y(t) = t,\ t \in T = [t : 0 \le t \le 1]$.

2.1.11. Вычислить функциональную метрику $d_2(x, y)$ для функций $x(t) = 1,\ y(t) = t,\ t \in T = [t : 0 \le t \le 1]$.

2.1.12. Вычислить функциональную метрику $d_\infty(x, y)$ для функций $x(t) = 1,\ y(t) = t,\ t \in T = [t : 0 \le t \le 1]$.

2.1.13.Построить кривую зависимости значения функциональной метрики $d_p(x, y)$ как функцию от $p \in [1,2,\infty)$ для функций $x(t) = 1,\ y(t) = t, t \in T = [t : 0 \le t \le 1]$.

2.1.14. Вычислить функциональную метрику $d_p(x, y)$ для функций $x(t) = t,\ y(t) = t^2,\ t \in T = [t : -1 \le t \le 1]$ для значений $p = 1, 2, \infty$.

Решение вариантов задач

2.1.7. Вычислить векторную метрику Ли $d_L(x,y)$ для векторов $x = (1,\ 4,\ 2),\ y = (2,\ 1,\ 3)$, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(5) = \{0,1,2,3,4\}$.

<u>Решение.</u> В силу определения (2.7) метрики Ли можно записать

$$d_L(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \min\ \{|\ x_i - y_i\ |,\ p - |\ x_i - y_i\ |\} = \min\ \{|\ 1 - 2\ |; 5 - |\ 1 - 2\ |\}$$

$$+ \min\ \{|\ 4 - 1\ |; 5 - |\ 4 - 1\ |\} + \min\ \{|\ 2 - 3\ |; 5 - |\ 2 - 3\ |\} = \min\ \{1;4\} +$$

$$+ \min\ \{3;2\} + \min\ \{1;4\} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

<u>Ответ</u>: $d_L(x, y) = 4$.

2.2. Линейные пространство, операторы и матрицы. Структура пространства линейных операторов. Собственные значения, собственные векторы. Нормы и скалярные произведения векторов

Определение 2.6 (О2.6). *Линейным пространством* (ЛП) $\boldsymbol{X}$ над полем F называется аддитивная абелева группа элементов, именуемых векторами (при этом *сумма двух векторов* совпадает с диагональю параллелограмма, стороны которого совпадают с суммируемыми векторами), дополненная бинарной операцией умножения вектора $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ на скаляр $\alpha \in F$, удовлетворяющей условиям:

1. ассоциативности: $\forall \alpha, \beta \in F, \forall\, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}\ \ \alpha(\beta\, \boldsymbol{x}) = \alpha\beta\, \boldsymbol{x}$;

2. дистрибутивности: $\forall \alpha, \beta \in F,\ \forall\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X}\ \ \alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\alpha\ \boldsymbol{x}_1+\alpha\ \boldsymbol{x}_2$; $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}_1 = \alpha\, \boldsymbol{x}_1 + \beta\, \boldsymbol{x}_1$;

3. умножения вектора на (ноль) $0\in F$ и на (единицу) $1\in F$, осуществляемых по правилам $\forall\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$: $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, $0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{0}$ – нуль-вектор.

Примечание 2.2 (П2.2). Если $F = R$ (R – множество действительных чисел), то ЛП $\boldsymbol{X}$ называется действительным линейным векторным пространством (ДЛП). Если $F = C$ (C – множество комплексных чисел), то ЛП $\boldsymbol{X}$ называется комплексным линейным пространством (КЛП).

Определение 2.7 (О2.7). Пусть $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \ldots\ \boldsymbol{x}_k$ – векторы ЛП $\boldsymbol{X}$ ($\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}$; $i=\overline{1,k}$) над полем F и $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ – скаляры из F ($\alpha_i \in F; i=\overline{1,k}$), тогда сумма

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,\boldsymbol{x}_i \tag{2.13}$$

именуется *линейной комбинацией* из k векторов $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}$ ($i=\overline{1,k}$) с коэффициентами $\alpha_i \in F$ ($i=\overline{1,k}$), которая задает некоторый вектор, принадлежащий ЛП $\boldsymbol{X}$.

Определение 2.8 (О2.8). Пусть вектора $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}$ ($i=\overline{1,k}$), тогда *линейной оболочкой* $\boldsymbol{L}\{\ \boldsymbol{x}_i\ ;\ i=\overline{1,k}\}$ над полем F, натянутой на вектора $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}$ ($i=\overline{1,k}$) называется множество линейных комбинаций из векторов $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}$ ($i=\overline{1,k}$) с коэффициентами $\alpha_i \in F$ ($i=\overline{1,k}$) (2.9) так, что

$$\boldsymbol{L}\{\ \boldsymbol{x}_i\ ;\ i=\overline{1,k}\}=\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ \boldsymbol{x}_i\,; \alpha_i\in F; i=\overline{1,k}\}. \tag{2.14}$$

Определение 2.9 (О2.9). Множество векторов ($\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}$; $i=\overline{1,k}$) ЛП $\boldsymbol{X}$ называется *линейно независимым*, если равенство над полем F

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,\boldsymbol{x}_i=0. \tag{2.15}$$

возможно лишь при всех $\alpha_i = 0;\ i = \overline{1,k}$.

Определение 2.10 (О2.10). Множество векторов ($\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$; $i = \overline{1,k}$) ЛП $\boldsymbol{X}$ называется *линейно зависимым* над полем F, если существуют $\alpha_i \in F; i = \overline{1,k}$, одновременно *не равные нулю*, для которых оказывается справедливым равенство $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = 0$.

Определение 2.11 (О2.11). Если ЛП $\boldsymbol{X}$ представимо линейной оболочкой, натянутой на n линейно независимых векторов ($\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$; $i = \overline{1,n}$) так, что любое множество из $(n+1)$-го векторов оказывается линейно зависимым, то число n называется *размерностью* пространства $\boldsymbol{X}$, обозначаемой $\dim \boldsymbol{X}$, при этом становится справедливой запись

$$\boldsymbol{X} = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i; \alpha_i \in F; i = \overline{1,n}; \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X} \}, \quad \dim \boldsymbol{X} = n. \tag{2.16}$$

Примечание 2.3 (П2.3). В случаях, когда необходимо указывать размерность ЛП $\boldsymbol{X}$ $\dim \boldsymbol{X} = n$, может быть использовано обозначение ЛП в форме $\boldsymbol{X}^n$.Причем, если ЛП $\boldsymbol{X}$ – вещественное, то вместо $\boldsymbol{X}^n$ используется запись R^n; если же ЛП $\boldsymbol{X}$ – комплексное, то– C^n.

Примечание 2.4 (П2.4). Линейное пространство $\boldsymbol{X}^n$ называется конечномерным, если $n < \infty$, и бесконечномерным – в противном случае.

Определение 2.12 (О2.12). Пусть $\dim \boldsymbol{X} = n$, тогда любая система (набор) $\{ e_i \in \boldsymbol{X}\ ; i = \overline{1,n} \}$ *линейно независимых* векторов e_i образует базис e.

Утверждение 2.1 (У2,1). Пусть $e = \{ e_1, e_2, ... e_n \}$ базис ЛП $\boldsymbol{X}$ над полем F, тогда любой вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ представим в форме

$$\boldsymbol{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n; x_i \in F; i = \overline{1,n} \tag{2.17}$$

При этом представление (2.17) в базисе e над полем F *единственное.*

Доказательство справедливости сформулированного утверждения опирается на факт линейной независимости элементов базиса e. Действительно, допустим, что существует альтернативное представление вектора X в базисе e, задаваемое в форме

$$\boldsymbol{x} = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + ... + \kappa_n e_n; \kappa_i \in F; i = \overline{1,n}. \tag{2.18}$$

Вычтем равенство (2.18) из (2.17), тогда получим

$$(\kappa_1 - x_1) e_1 + (\kappa_2 - x_2) e_2 + ... + (\kappa_n - x_n) e_n = 0. \tag{2.19}$$

Введем обозначение $\alpha_i = \kappa_i - x_i; i = \overline{1,n}$, тогда (2.19) можно записать в форме (2.14), которое для случая линейной независимых элементов $e_i\ i = \overline{1,n}$ выполняется при всех $\alpha_i = \kappa_i - x_i = 0;\ i = \overline{1,n}$.Таким обра-

зом $\kappa_i = x_i;\ i = \overline{1,n}.$ ■

Примечание 2.5 (П2.5). Вектор $\boldsymbol{x}$ именуется *бескоординатным* вектором ЛП $\boldsymbol{X}$. Вектор x, составленный из чисел x_i $i = \overline{1,n}$, именуемых его *координатами* в базисе e, и сформированный в виде столбца

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}, \qquad (2.20)$$

называется *координатным* вектором, при этом следует помнить о функциональной связи

$x = x(e).$

Пространство X^n,составленное из координатных векторов x (2.20) именуется *арифметическим* линейным пространством.

Определение 2.13 (О2.13). Линейная оболочка

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L}\{\boldsymbol{x}_i; i = \overline{1,m};\ m < n = \dim \boldsymbol{X}\}, \qquad (2.21)$$

натянутая на систему из m векторов $\boldsymbol{x}_i$ называется *подпространством* пространства $\boldsymbol{X}$, если $\boldsymbol{P}$ обладает свойствами линейного пространства, при этом становится справедливой запись $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{X}$.

Определение 2.14 (О2.14). Пусть $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ подпространства пространства $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{X}$, тогда:

1. *суммой* $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}$ подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ называется линейная оболочка $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}\{\boldsymbol{X} = p + r : p \in \boldsymbol{P},\ r \in \boldsymbol{R}\}$, при этом $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{X}$;

2. *пересечением* $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{R}$ подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ называется множество элементов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, которые одновременно принадлежат подпространствам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$, что записывается в форме $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}\ \ \&\ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\}$, при этом $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{X}$.

Определение 2.15 (О2.15). Подпространства $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{X}$ называются *линейно независимыми*, если $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{0}$ - нулевой вектор, являющийся нейтральным элементом аддитивной группы $\boldsymbol{X}$.

Определение 2.16 (О2.16). Пусть $\{\boldsymbol{R}_i \subset \boldsymbol{X}\ ;\ i = \overline{1,k}\}$ – линейно независимые подпространства, тогда сумма этих подпространств $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \dots + \boldsymbol{R}_k$ является *прямой суммой* подпространств, что обозначается знаком $\oplus$ и записывается в форме

$$\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \dots + \boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{R}_1 \oplus \boldsymbol{R}_2 \oplus \dots \oplus \boldsymbol{R}_k = \oplus \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{R}_i.$$

(2.22)

Примечание 2.6 (П2.6). Если подпространства $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{X}$:

1. линейно независимы, то

$$\dim\{\ \boldsymbol{P}+\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{R}\} = \dim \boldsymbol{P} + \dim \boldsymbol{R}, \qquad (2.23)$$

2. произвольны, то

$$\dim\{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}\} = \dim \boldsymbol{P} + \dim \boldsymbol{R} - \dim\{\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{R}\}. \qquad (2.24)$$

Определение 2.17 (О2.17). Оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий элементы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ ЛП $\boldsymbol{X}$ в элементы $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ ЛП $\mathbf{Y}$, где вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ именуется *образом* вектора $\boldsymbol{x}$, а вектор $\boldsymbol{x}$ – *прообразом* вектора $\boldsymbol{y}$, называется *линейным оператором*, если над полем F выполняются линейные соотношения

$$\boldsymbol{A}(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2, \qquad (2.25)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in F$; $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{Y}$; $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_1$; $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_2$.

Рассмотрим *структуру пространства* линейного оператора (ЛО) $\boldsymbol{A}$, для чего введем следующие определения.

Определение 2.18 (О2.18). Множество всех образов $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ называется *областью значений* ЛО $\boldsymbol{A}$ или его *образом*, обозначается $\mathrm{Im}\{\mathbf{A}\}$ и задается в форме

$$\mathrm{Im}\{\boldsymbol{A}\} = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}. \qquad (2.26)$$

Определение 2.19 (О2.19). Множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, для которых выполняется равенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, образует *ядро* $Ker\{\boldsymbol{A}\}$ или *нуль-пространство* $N\{\boldsymbol{A}\}$ линейного оператора $\boldsymbol{A}$, которое задается в форме

$$Ker\{\boldsymbol{A}\} = N\{\boldsymbol{A}\} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}. \qquad (2.27)$$

Определение 2.20 (О2.20). Рангом $rang\{\boldsymbol{A}\}=rank\{\boldsymbol{A}\}=r_A$ линейного оператора $\boldsymbol{A}$ называется размерность $\dim \mathrm{Im}\{\boldsymbol{A}\}$ образа $\mathrm{Im}\{\boldsymbol{A}\}$ этого оператора.

Определение 2.21 (О2.21). Дефектом $def\{\boldsymbol{A}\}=\nu_A$ линейного оператора $\boldsymbol{A}$ называется размерность $\dim\{Ker\{\boldsymbol{A}\}=N\{\boldsymbol{A}\}\}$ ядра (нуль–пространства) этого оператора.

Определение 2.22 (О2.22). Подпространство $\varphi \subset \boldsymbol{X}$ линейного пространства $\boldsymbol{X}$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора $\boldsymbol{A}$, если выполняется условие

$$\boldsymbol{A}\varphi \subset \varphi, \qquad (2.28)$$

в том смысле, что для $\forall\ \boldsymbol{x} \in \varphi\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \in \varphi$.

Определение 2.23 (О2.23). Если $dim\{\varphi\}=1$, то *инвариантное* подпространство φ вырождается в вектор ς, при этом условие (2.28) получает представление

$$\boldsymbol{A}\varsigma = \lambda\varsigma, \qquad (2.29)$$

где «$\boldsymbol{A}\varsigma$» означает «$\boldsymbol{A}$ действует на вектор ς», «$\lambda\varsigma$» означает «λ умножить на ς», λ – скаляр, именуемый *собственным* значением (числом) ЛО $\boldsymbol{A}$, ς – собственный вектор ЛО $\boldsymbol{A}$, линейная оболочка $\boldsymbol{L}\{\varsigma\}$, натянутая на собственный вектор ς, представляет собой *собственное (инвариантное)* подпространство φ.

Примечание 2.7 (П2.7). В силу соотношения (2.29) собственный вектор ς линейного оператора $\boldsymbol{A}$ задается с точностью до мультипли-

кативной константы.

Определение 2.24 (О2.24). Пусть в $n-$мерном ЛП $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^n$ выбран базис $e = \{e_i; i = \overline{1,n}\}$, а в $m-$мерном ЛП $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^m$ выбран базис $f = \{f_j; j = \overline{1,m}\}$, тогда *матрицей* A относительно пары базисов (e, f) *линейного оператора*

$$\boldsymbol{A}: \boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \;\; ; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} ; \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} \tag{2.30}$$

называется *двумерный* $(m \times n)-$*массив чисел*, столбцовое представление которого

$$A = [A_1 \; A_2 \; ... \; A_n] = row\{A_i; i = \overline{1,n}\}, \tag{2.31}$$

таково, что столбцы $A_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ его составлены из числовых коэффициентов A_{ji} $\left(j = \overline{1,m}; i = \overline{1,n}\right)$ представления вектора $\boldsymbol{A}\,e_i$ в базисе f линейной комбинацией

$$\boldsymbol{A}\,e_i = A_{1i} f_1 + A_{2i} f_2 + ... + A_{mi} f_m \; . \tag{2.32}$$

Примечание 2.8 (П2.8). Если вектор $\boldsymbol{x}$ записать в координатной форме в базисе $e = \{e_i; i = \overline{1,n}\}$ с помощью представления $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_{ei} e_i$, а вектор $\boldsymbol{y}$ в координатной форме в базисе $f = \{f_j; j = \overline{1,m}\}$ с помощью представления $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} y_{fj} f_j$, то введение матрицы A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ позволяет от *векторно-операторной* формы (2.30) перейти к *векторно-матричной мультипликативной* форме

$$y_f = Ax_e, \tag{2.33}$$

в которой $y_f = col\{y_{fj}; j = \overline{1,m}\}$, $x_e = col\{x_{ei}; i = \overline{1,n}\}$.

Определение 2.25 (О2.25). Две матрицы A и $\overline{A}$ называются *подобными,* если они задают один и тот же линейный оператор $\boldsymbol{A}$ относительно различных пар базисов (e, f) и $(\overline{e}, \overline{f})$.

Примечание 2.9 (П2.9). В силу определения 2.25 линейному оператору $\boldsymbol{A}$ соответствует множество сколь угодной большой *мощности* подобных матриц, каждая из которых порождается своей парой (e, f) базисов.

Введем в рассмотрение *матричное условие подобия* двух матриц одной размерности $(m \times n)$ с помощью следующего утверждения.

Утверждение 2.2 (У2.2). Пусть линейный оператор $\boldsymbol{A}$ реализует отображение $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$: $\dim \boldsymbol{X} = n$; $\dim \boldsymbol{Y} = m$.Пусть в ЛП $\boldsymbol{X}$ задана пара базисов $(e, \overline{e})$, каждый из которых представляет собой систему линейно независимых векторов соответстенно $e = \{e_i; i = \overline{1,n}\}$ и $\overline{e} = \{\overline{e}_i; i = \overline{1,n}\}$.Базисы связаны *матрицей М преобразования базисов,* задаваемого соотношением

$$e = M\bar{e}, \tag{2.34}$$

где $(n \times n)$ матрица $M = row\{M_i; i = \overline{1,n}\}$ составлена из столбцов M_i, элементы которых M_{ji} представляют собой коэффициенты линейного разложения элементов $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ базиса e по базисным компонентам $\{\bar{e}_i; i = \overline{1,n}\}$ базиса $\bar{e}$, задаваемого в форме

$$e_i = M_{1i}\bar{e}_i + M_{2i}\bar{e}_2 + ... + M_{ni}\bar{e}_n. \tag{2.35}$$

Пусть в ЛП $\boldsymbol{Y}$ задана пара базисов $(f, \bar{f})$, которые составлены из m векторов $f = \{f_l; l = \overline{1,m}\}$ и $\bar{f} = \{\bar{f}_l; l = \overline{1,m}\}$ соответственно и связаны $(m \times m)$ – матрицей T преобразования базисов в форме

$$f = T\bar{f}, \tag{2.36}$$

где матрица T строится по той же схеме, что и матрица M.

Тогда подобные $(m \times n)$ матрицы A и $\bar{A}$, задающие линейный оператор $\boldsymbol{A}$ относительно пар базисов (e, f) и $(\bar{e}, \bar{f})$ соответственно связаны *матричным соотношением (условием) подобия*

$$T\bar{A} = AM. \tag{2.37}$$

Доказательство утверждения строится на представлении *бескоординатного* вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ относительно базисов e и $\bar{e}$ в форме *координатных* векторов x и $\bar{x}$, связанных в силу (2.34) векторно-матричным соотношением

$$x = M\bar{x}, \tag{2.38}$$

а также *бескоординатного* вектора $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ относительно базисов f и $\bar{f}$ в форме *координатных* векторов y и $\bar{y}$, связанных в силу (2.36) векторно-матричным соотношением

$$y = T\bar{y}. \tag{2.39}$$

Если теперь *векторно-операторное* соотношение $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ записать в векторно-матричной форме, то для каждой пары базисов (e, f) и $(\bar{e}, \bar{f})$ соответственно получим векторно-матричные представления

$$y = Ax = AM\bar{x}, \tag{2.40}$$

$$\bar{y} = \bar{A}\bar{x}. \tag{2.41}$$

Подстановка (2.41) в (2.39) приводит к векторно-матричному соотношению

$$y = T\bar{A}\bar{x}. \tag{2.42}$$

Сравнение векторно-матричных соотношений (2.40) и (2.42) приводит к соотношению (2.37). ■

Примечание 2.9 (П2.9). Так как матрицы преобразования базисов M и T таковы, что существуют обратные им матрицы M^{-1} и T^{-1}, то (2.37) имеет следующие эквивалентные представления

$$A = T\bar{A}M^{-1}, \quad \bar{A} = T^{-1}AM. \tag{2.43}$$

Примечание 2.10 (П2.10). Если размерности линейных пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ таковы, что они совпадают $(n = m)$, базисы $(e, \overline{e})$ и $(f, \overline{f})$ связаны идентичными матрицами их преобразования так, что $T = M$, то матричные условия подобия (2.37) и (2.43) принимают вид

$$M\overline{A} = AM, \quad A = M\overline{A}M^{-1}, \quad \overline{A} = M^{-1}AM, \tag{2.44}$$

где A и $\overline{A}$ – подобные $(n \times n)$ – *квадратные* матрицы.

Введенная в рассмотрения матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ позволяют соотношение (2.29) записать в векторно-матричной форме

$$A\xi = \lambda\xi \tag{2.45}$$

или

$$(A - \lambda I)\xi = 0. \tag{2.46}$$

В (2.45), (2.46) ξ есть собственный вектор ς ЛО $\boldsymbol{A}$, записанный относительно базиса $e = \{e_i; i = \overline{1,n}\}$ в координатной форме, именуемый *собственным вектором матрицы* A.

Определение 2.26 (О2.26). Матрица $A - \lambda I$ называется *характеристической матрицей* матрицы A, определитель $\det(A - \lambda I) = \Delta(\lambda)$ не зависит от выбора базиса e и называется *характеристическим многочленом* матрицы A (ЛО $\boldsymbol{A}$), всюду выше и ниже I – единичная матрица, согласованная по размерности с $(n \times n)$-матрицей A.

Система уравнений (2.46) относительно компонентов собственного вектора ξ является однородной и при этом *совместна,* а потому имеет *ненулевое* решение $\xi \neq 0$, если *определитель этой системы равен нулю*, т.е. при выполнении равенства

$$\det(A - \lambda I) = \Delta(\lambda) = 0 \tag{2.47}$$

Уравнение (2.47) называется *характеристическим* уравнением матрицы A (ЛО $\boldsymbol{A}$), а его корни $\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$ являются собственными значениями этой матрицы (ЛО $\boldsymbol{A}$).

Пусть λ_k – некоторое собственное значение матрицы A. Если характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{m_k} Q(\lambda_k)$, где $Q(\lambda_k) \neq 0$, то число m_k называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_k.

Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения (2.43) являются различными, т.е. $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$. Тогда собственный вектор ξ_k матрицы A, соответствующий значению λ_k, является решением уравнения

$$(A - \lambda_k I)\xi_k = 0 \tag{2.48}$$

Это означает, что вектор ξ_k принадлежит ядру матрицы $(A - \lambda_k I)$ т.е. $\xi_k \in N(A - \lambda_k I)$, таким образом, ядро $N(A - \lambda_k I)$ является *собственным* подпространством матрицы A, порожденным собственным

вектором ξ_k. Это подпространство является одномерным, если дефект матрицы $(A-\lambda_k I)$ равен единице.

Собственные векторы $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$, являются линейно независимыми, образуют базис в пространстве X^n, само пространство X^n расщепляется оператором $\boldsymbol{A}$ с матрицей A в прямую сумму одномерных собственных подпространств в форме

$$X^n = \oplus\sum_{k=1}^{n} H_k \; ; \; H_k = N(A-\lambda_k I); k=\overline{1,n}. \qquad (2.49)$$

Матрица A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе из собственных векторов является диагональной с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ на главной диагонали, при этом справедливо равенство

$$\Lambda = diag\{\lambda_k; k=\overline{1,n}\} = H^{-1}AH; H = row\{H_k; k=\overline{1,n}\}, \qquad (2.50)$$

где H – матрица линейно независимых *собственных* векторов ξ_k матрицы A.

Определение 2.27 (О2.2) Оператор $\boldsymbol{A}$ и его матрица A, имеющие ровно n линейно-независимых собственных векторов, называются оператором и матрицей *простой структуры*. Таким образом, любая матрица, имеющая различные собственные значения, подобна диагональной матрице Λ и является матрицей простой структуры.

Рассмотрим случай кратных корней характеристического уравнения. Тогда $\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_1)^{m_2}...(\lambda-\lambda_1)^{m_k}$ и все собственные векторы ξ_k, соответствующие значению λ_k, также являются решениями уравнения (2.46).

Определение 2.28 (О2.28). Число μ_k линейно-независимых собственных векторов равно размерности собственного подпространства $H_k=N(A-\lambda_k I)$ (или дефекту матрицы $A-\lambda_k I$), которое называется *геометрической кратностью* или *степенью вырожденности* собственного значения λ_k.

Ядро матрицы $A-\lambda_k I$ называется *корневым подпространством* K_k соответствующим значению λ_k. Геометрическая кратность корня μ_k больше его алгебраической кратности m_k, а собственное подпространство H_k содержится в корневом подпространстве K_k.

Для любого оператора с матрицей A существует аналогичное (2.49) разложение пространства X^n на прямую сумму его корневых подпространств:

$$X^n = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_r. \qquad (2.51)$$

В том случае и только тогда, когда алгебраические и геометрические кратности всех собственных значений матрицы A совпадают, совпадают и их собственные и корневые подпространства и, следовательно, матрица имеет простую структуру.

В общем случае произвольная матрица A линейного оператора преобразованием подобия может быть приведена к *нормальной жордановой форме:*

$$J = diag\{J_1, J_2, ..., J_r\} = T^{-1}AT\,, \qquad (2.52)$$

где блоки J_i имеют размерность $m_i \times m_i$ и могут быть представлены следующим образом: $J_i = diag\{J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_{\mu i}}\}$, причем каждый подблок имеет вид

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & .... & .... & 0, & \lambda_i \end{bmatrix}; \qquad (2.53)$$

каждый блок T_i матрицы $T = [T_1\, T_2, ..., T_r]$ состоит из столбцов координат одного из линейно-независимых векторов и других корневых векторов, соответствующих собственному значению λ_i. Если матрица имеет простую структуру разложения, то (2.52) совпадает с (2.50).

Введем в рассмотрение численную (скалярную) характеристику элементов (векторов) $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ арифметического пространства X^n, именуемую *нормой* вектора, полагая ниже, что пространство действительное, что позволяет записать $X^n = R^n$.

Определение 2.29 (О2.29). Пусть функция $\varphi(\cdot)$ сопоставляет каждому вектору $x \in R^n$ – линейного вещественного пространства вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* (размером) этого вектора, если выполняются условия:

1) $\varphi(x) = \|x\| > 0$ для $\forall x \neq 0$ и $\varphi(x) = \|x\| = 0$ при $x = 0$;

2) $\varphi(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\varphi(x + y) = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Универсальной векторной нормой является векторная норма Гельдера, задаваемая выражением:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}; \quad p \text{ – целое положительное.}$$

Наиболее употребительными векторными нормами являются нормы при $p = 1,\ 2$ и ∞:

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ – абсолютная норма вектора;

2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ – квадратичная или *евклидова* норма вектора;

3. $\|x\|_\infty = \lim\limits_{P\to\infty}\|x\|_P = \max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i|$ – бесконечная или экстремальная норма вектора.

Приведенные *векторные нормы эквивалентны* в том смысле, что для норм $\|x\|_\mu$ и $\|x\|_\nu$ существуют положительные числа β_1 и β_2 такие, что выполняются неравенства: $\beta_1\|x\|_\mu \le \|x\|_\nu \le \beta_2\|x\|_\mu$.

Так для норм $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ выполняются оценочные неравенства:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty.$$

Линейное арифметическое пространств X^n с введенной векторной нормой $\|x\|_p$ образует линейное *нормированное* пространство, обозначаемое в одной из форм $\left\{X^n, \|x\|_p\right\}$ или X_p^n, в дальнейшем в основном рассматривается случай $p = 2$, при этом индекс нормы опускается.

Примечание 2.11 (П2.11). Следует сказать, что норма позволяет задавать поверхности постоянных значений нормы в форме $\|x\|_p = r = const$, которые представляют собой в зависимости от значения p индекса нормы сферы. Если размерность пространства $n = 2$, то сферы становятся окружностями. На рисунках 2.1–2.3 приведены окружности вида $\|x\|_p = r$ соответственно для $p = 1, 2, \infty$.

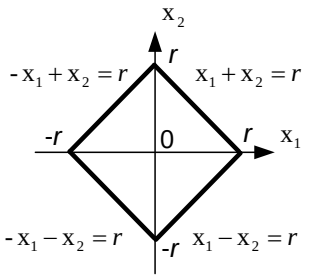


Рисунок 2.1

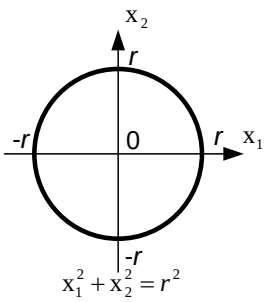


Рисунок 2.2

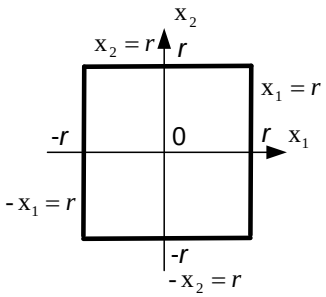


Рисунок 2.3

Примечание 2.12 (П2.12). Линейное нормированное пространство является *метрическим* так, как выполняется цепочка равенств $\|x\| = \|x - 0\| = d(x,0)$, где *0*–нулевой вектор.

Введем в рассмотрение численную характеристики, являющуюся оценкой *взаимного положения* элементов (векторов) линейного пространства. Такой характеристикой является *скалярное произведение* двух координатных векторов.

Определение 2.30 (О2.30). Пусть функция $\varphi\{\cdot\}$ сопоставляет каждой паре $\{\cdot\}=\{x,y\}$ векторов $x,y\in X^n=R^n$ линейного вещественного арифметического пространства вещественное *число*, обозначаемое в одной из форм (x,y) *или* $\langle x,y\rangle$, называемое *скалярным произведением* (СП) векторов x и y, если выполняются условия:

1. коммутативности: $(x,y)=(y,x)$;
2. дистрибутивности: $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;
3. линейности: $(\alpha\cdot x,y)=(x,\alpha\cdot y)=\alpha\cdot(x,y)\ \ \alpha\in R$;
4. $(x,x)=\|x\|^2$,где $\|x\|=\|x\|_E$ – евклидова норма вектора x;
5. неравенства Коши-Буняковского: $|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$;
6. оценки взаимного положения векторов x и y:

$(x,y)=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\{ang\{x,y\}\}$,

где $ang\{x,y\}$ – угол между векторами x и y.

Примечание 2.13 (П2.13). Вычисление скалярного произведения (x,y) векторов $x=col\{x_i;i=\overline{1,n}\}$, $y=col\{y_i;i=\overline{1,n}\}$ производится в силу соотношений

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i=(y,x). \qquad (2.54)$$

Соотношения (2.54) делают справедливыми следующие представления скалярного произведения

$$(x,y)=x^Ty=y^Tx=x^TI\,y=y^TI\,x=(x,y)_I=(y,x)_I. \qquad (2.55)$$

Соотношения (2.55), содержащие представление скалярного произведения в виде мультипликативной структуры «вектор–строка – единичная матрица – вектор–столбец», позволяют ввести в рассмотрение понятие *скалярного произведения с весом* (в (2.55) с *единичным* весом, задаваемым *единичной весовой* матрицей I). По аналогии может быть введено скалярное произведение $(x,y)_P$ с *неединичным весом,* порождаемое *неединичной весовой* матрицей P в форме

$$(x,y)_P=(Px,y)=(x,Py)=x^TP^Ty=x^TPy. \qquad (2.56)$$

Весовая матрица P должна быть: *симметричной* $P=P^T$ и *положительно-определенной* так, что собственные значения этой матрицы $\{\lambda_{Pi}:det(\lambda_PI-P)=0:\lambda_{Pi}>0;i=\overline{1,n}\}$ *положительны*.

Линейное арифметическое пространство со скалярным произведением в силу удовлетворения СП условию 4. определения 2.30 является *нормированным* ЛП и *метрическим.* ЛП со скалярным произведением именуется *гильбертовым* линейным пространством.

Частным случаем *гильбертова* ЛП является *евклидово* линейное пространство.

Определение 2.31 (О2.31). Векторы x и y называются *ортого-*

нальными ($x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, т.е. выполняется равенство $(x, y) = 0$.

Определение 2.32 (О2.32). Система $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ векторов ЛП называется *ортогональной*, если все векторы этой системы попарно ортогональны: $(e_i, e_j) = 0; i, j = \overline{1,n}; i \neq j$.

Определение 2.33 (О2.33). Система $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ векторов ЛП называется *ортонормированной*, если выполняется равенство: $(e_i, e_j) = \delta_{ij}; i, j = \overline{1,n}$; где символ Кронекера δ_{ij} удовлетворяет условиям $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Определение 2.34 (О2.34). *Евклидовым* линейным пространством E^n называется $n-$мерное ЛП**,** в качестве базиса в котором используется система $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ортонормированных векторов таких, что матрица E, имеющая своими столбцами вектора $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$, образует единичную матрицу, т.е. выполняется матричное равенство

$$E = row\{e_i; i = \overline{1,n}\} = I. \tag{2.57}$$

Определение 2.35 (О2.35). Базис, построенный на системе $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ ортонормированных векторов, удовлетворяющих соотношению (2.57) образует *евклидов* или *естественный базис*.

Ортонормированные базисы обладают рядом существенных достоинств перед другими базисными системами в ЛП X^n. Переход от *произвольной исходной* базисной системы $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ к *ортонормированной* базисной системе $\{u_i : (u_i, u_j) = \delta_{ij}; i, j = \overline{1,n};\}$ может быть осуществлен с помощью алгоритма Грама-Шмидта. Алгоритм Грама–Шмидта является двухшаговой *рекуррентной процедурой*, при этом на *первом шаге* осуществляется переход от *произвольной исходной* базисной системы $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ к *ортогональной* промежуточной базисной системе $\{v_i : (v_i, v_j) = 0; i, j = \overline{1,n}; i \neq j\}$, на *втором шаге* осуществляется *нормировка* элементов построенного базиса, приводящая к искомой *ортонормированной* базисной системе.

В результате **алгоритм Грама-Шмидта (АГШ)** принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
&v_1 = e_1;\ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|};\\
&v_2 = e_2 - (e_2, u_1)\, u_1;\ u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|};\\
&\vdots\\
&v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k, u_i) u_i;,\ u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|};\ k = \overline{2,n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.58)$$

В заключение раздела рассмотрим решение следующей задачи. В ЛП R^n задан некоторый базис $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$ относительно этого базиса задан координатный вектор $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$, задан в ЛП и базис $\{f_i; i = \overline{1,n}\}$, компоненты которого f_i заданы в координатной форме относительно того же базиса $\{e_i; i = \overline{1,n}\}$. Ставится задача конструирования представления вектора x относительно базиса $\{f_i; i = \overline{1,n}\}$ в форме

$$x = x_{f1} f_1 + x_{f2} f_2 + \ldots + x_{fn} f_n = \sum_{i=1}^{n} x_{fi} f_i, \qquad (2.59)$$

так что относительно базиса $\{f_i; i = \overline{1,n}\}$ вектор x получает представление

$$x_f = col\{x_{fi}; i = \overline{1,n}\}.$$

(2.60)

Если умножить выражение (2.59) *скалярно* последовательно n раз на элементы $\{f_i; i = \overline{1,n}\}$, то будет получена система уравнений относительно искомых *неизвестных* $\{x_{fi}; i = \overline{1,n}\}$, решение которой в векторно-матричной форме имеет вид

$$x_f = col\{x_{fi}; i = \overline{1,n}\} = \Gamma^{-1}\beta, \qquad (2.61)$$

где $\Gamma = col\{row\{(f_i, f_j); j = \overline{1,n}\}; i = \overline{1,n}\}$ – матрица Грама, построенная на скалярных произведениях всех пар элементов базиса $\{f_i; i = \overline{1,n}\}$ друг на друга; $\beta = col\{(x, f_i); i = \overline{1,n}\}$ – вектор–столбец из скалярных произведений вектора x на элементы базиса представления $\{f_i; i = \overline{1,n}\}$. Следует заметить, что, если базис f состоит из ортонормированных элементов, то матрица Грама становится единичной ($\Gamma = I$), при этом (2.61) принимает вид $x_f = \beta$.

Следует заметить, что невырожденность ($\exists \Gamma^{-1}$) матрицы Грама является критерием *линейной независимости* системы векторов, на скалярных произведениях которой матрица Грама построена. Более того, решение задачи в форме (2.61) *геометрически* представляет собой решение задачи проектирования исходного вектора x на простран-

ство, натянутое на систему векторов $\{f_i; i=\overline{1,m}; m \le n\}$.

Примеры и задачи

2.2.1*. Доказать, что для любого оператора $\boldsymbol{A}$, действующего из $\boldsymbol{X}^n$ в $\boldsymbol{Y}^n$ сумма ранга r_A и дефекта n_A равна размерности n пространства $\boldsymbol{X}^n$.

2.2.2*. Определить ортогональную проекцию вектора $x=[1 \quad 1]^T$ на линейную оболочку $\boldsymbol{L}(y)$ натянутую на вектор $y=[\sqrt{3} \quad 1]^T$.

2.2.3. Выяснить, являются ли системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

а) $x_1=[-3 \quad 1 \quad 5]^T$, $x_2=[6 \quad -2 \quad 15]^T$;

б) $x_1=[1 \quad 2 \quad 3]^T$, $x_2=[2 \quad 5 \quad 7]^T$, $x_3=[3 \quad 7 \quad 10]^T$.

2.2.4. Проверить, что векторы

$e_1=[2 \quad 2 \quad -1]^T$, $e_2=[2 \quad -1 \quad 2]^T$, $e_3=[-1 \quad 2 \quad 2]^T$ образуют базис пространства R^3 и найти координаты вектора $x=[1 \quad 1 \quad 1]^T$ в этом базисе.

2.2.5. Вектор x в естественном базисе пространства R^2 имеет координаты $x=[1 \quad 1]^T$, а оператору $\boldsymbol{A}$ в этом базисе соответствует матрица $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Определить координаты векторов x и Ax в базисе, элементами которого являются столбцы матрицы A.

2.2.6. Определить область значений и ядро оператора с матрицей $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ в естественном базисе R^2.

2.2.7. Применить алгоритм ортогонализации Грамма–Шмидта к следующим системам векторов:

а) $e_1=[1 \quad -2 \quad 2]^T$, $e_2=[-1 \quad 0 \quad -1]^T$, $e_3=[5 \quad -3 \quad -7]^T$;

б) $q_1=[2 \quad 3 \quad -4 \quad -6]^T$, $q_2=[1 \quad 8 \quad -2 \quad -16]^T$,

$q_3=[12 \quad 5 \quad -14 \quad 5]^T$, $q_4=[3 \quad 11 \quad 4 \quad -7]^T$.

2.2.8. Найти матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в R^3, отображающего векторы:

$x_1=[0 \quad 0 \quad 1]^T$ в $y_1=[2 \quad 3 \quad 5]^T$;

$x_2=[0 \quad 1 \quad 1]^T$ в $y_2=[1 \quad 0 \quad 0]^T$;

$x_3=[1 \quad 1 \quad 1]^T$ в $y_3=[0 \quad 1 \quad -1]^T$:

а) в естественном базисе;

б) в базисе векторов $\{x_1, x_2, x_3\}$.

2.2.10. Найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ линейной оболочки L системы векторов пространства R^4:

$e_1 = [1, 3, 0, 2]^T$, $e_2 = [3, 7, -1, 2]^T$, $e_3 = [2, 4, -1, 0]^T$.

2.2.10. Вычислить собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2.2.11*. Показать, что матрица ортогонального проектирования на линейную оболочку линейно независимых векторов $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ равна $P = U(U^T U)^{-1}$, где U – матрица, составленная из столбцов координат векторов $u_1, u_2, ..., u_k$. Как выглядит матрица P, когда векторы $u_1, u_2, ..., u_k$ образуют ортонормированную систему?

Решение вариантов задач

<u>*Решение задачи* 2.2.1.</u> Разложим пространство X^n в прямую сумму пространства $X^n = N(\mathrm{A}) + L_{\mathrm{A}}$, где $N(\mathrm{A})$ ядро (нуль–пространство) матрицы A, L_{A} – любое дополнительное к *N(A)* подпространство. Тогда для любого $x \in X^n$ имеет место единственное представление $x = x_N + x_L$, где $x_N \in N(\mathrm{A})$, $x_L \in L_{\mathrm{A}}$.

Поскольку $y = Ax = A(x_N + x_L) = Ax_L \in Jm(\mathrm{A})$, так как $Ax_N = 0$, то любой вектор $y \in Jm(\mathrm{A})$ имеет прообраз из подпространства L_{A}, причем единственный, откуда следует, что размерности подпространств $Jm(\mathrm{A})$ и L_{A} совпадают. Но $\dim X^n = \dim N(\mathrm{A}) + \dim L_{\mathrm{A}}$ и $\dim L_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{A}}$, откуда $n = n_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{A}}$.

<u>*Решение задачи* 2.2.2.</u> Если $\hat{x}$ – ортогональная проекция вектора x на оболочку $L(y)$, то $\hat{x} = \alpha y$, где $\alpha = const$. Поскольку $(x - \hat{x}) \perp L$, то имеем $(x - \hat{x}, y) = 0$, или $x^T y = \hat{x}^T y$, откуда получим $x = \dfrac{x^T y}{(y, y)} y = \dfrac{x^T y}{\|y\|^2} y = \left[\dfrac{3 + \sqrt{3}}{4}, \dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}\right]^T$.

Эта задача может быть также решена с использованием матрицы Грама. ■

3. МАТРИЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И НЕИНВАРИАНТЫ ПОДОБНЫХ МАТРИЦ

Рассматриваются подобные матрицы A и $\overline{A}$ размерности $(n \times n)$, задающие один и тот же линейный оператор $\boldsymbol{A}$ относительно различных пар базисов. Для этих матриц существует невырожденная $(n \times n)$ – матрица M, связывающая матрицы A и $\overline{A}$ матричным соотношением подобия

$$M\overline{A} = AM\,. \tag{3.1}$$

Матричное соотношение подобия (3.1) имеет два матричных аналога

$$\overline{A} = M^{-1}AM \text{ и } A = M\overline{A}M^{-1}. \tag{3.2}$$

Возникает вопрос: *какие характеристики* подобных матриц A и $\overline{A}$ при преобразованиях подобия вида (3.2) *сохраняются*, а *какие* – нет?

Определение 3.1 (О3.1). Характеристики матриц размерности $(n \times n)$, принадлежащих классу подобных, то есть задающих один и тот же линейный оператор $\boldsymbol{A}$, которые *сохраняются* неизменными на всем классе подобных представлений, называются *матричными инвариантами.*

Определение 3.2 (О3.2). Характеристики матриц размерности $(n \times n)$, принадлежащих классу подобных, то есть задающих один и тот же линейный оператор $\boldsymbol{A}$, которые для каждой реализации подобной матрицы оказываются *своими* называются *матричными неинвариантами.*

Рассмотрим *матричные инварианты* на примере двух подобных матриц A и $\overline{A}$ вида (3.2).

1. Первым матричным *инвариантом* являются характеристические полиномы $\det(\lambda I - A)$ и $\det(\lambda I - \overline{A})$ подобных матриц A и $\overline{A}$. В этой связи сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.1 (У3.1). Характеристические полиномы подобных матриц A и $\overline{A}$ совпадают так, что выполняется соотношение

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = \det(\lambda I - \overline{A}). \quad \square \tag{3.3}$$

Доказательство. Подставим в (3.3) матрицу A с использованием представления (3.2), а также представление единичной матрицы в форме $I = MM^{-1} = MIM^{-1}$, тогда получим скалярно-матричное соотношение

$$\det(\lambda MIM^{-1} - M\overline{A}M^{-1}) = \det\{M(\lambda I - \overline{A})M^{-1}\} \tag{3.4}$$

Воспользуемся положением о том, что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, с учетом которого (3.4) принимает вид

$$\det\left\{M(\lambda I-\overline{A})M^{-1}\right\}=\det(M)\det\left(\lambda I-\overline{A}\right)\det(M^{-1}).$$

Если учесть, что детерминант это скаляр, и воспользоваться свойством детерминанта произведения матриц в обратном порядке так, что произведение детерминантов равняется детерминанту произведения матриц, согласованных по размерности, то получим

$$\det(M)\det(M^{-1})\det\left(\lambda I-\overline{A}\right)=\det(MM^{-1}=I)\det\left(\lambda I-\overline{A}\right)=\det\left(\lambda I-\overline{A}\right).$$

Таким образом, установлено равенство $\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-\overline{A})$. ■

2. Вторым матричным *инвариантом* являются алгебраические спектры $\sigma\{A\}$ и $\sigma\{\overline{A}\}$ собственных значений подобных матриц A и $\overline{A}$, что записывается в форме

$$\sigma\{A\}=\sigma\{\overline{A}\}=\left\{\lambda_i:\lambda_i^{\ n}+a_1\lambda_i^{\ n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda_i+a_n=0;i=\overline{1,n}\right\}. \qquad (3.5)$$

3. Третьим матричным инвариантом являются детерминанты $\det(A)$ и $\det(\overline{A})$ подобных матриц A и $\overline{A}$, определяемые соотношением

$$\det(A)=\det(\overline{A})=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}\lambda_n \qquad (3.6)$$

4. Четвертым матричным *инвариантом* являются следы $tr(A)$ и $tr(\overline{A})$ подобных матриц A и $\overline{A}$, определяемые выражением

$$tr(A)=tr(\overline{A})=\sum_{i=l}^{n}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+\lambda_n, \qquad (3.7)$$

и вычисляемые с помощью соотношений

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=A_{11}+A_{22}+\ldots+A_{n-1,n-1}+A_{nn}, \qquad (3.8)$$

$$tr(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n}\overline{A}_{ii}=\overline{A}_{11}+\overline{A}_{22}+\ldots+\overline{A}_{n-1,n-1}+\overline{A}_{nn}. \qquad (3.9)$$

Примечание 3.1 (П3.1). Матричным *инвариантом* являются также ранги $rang(A)$ и $rang(\overline{A})$ подобных матриц A и $\overline{A}$, как число линейно независимых столбцов, как размерности $\dim(\mathrm{Im}(A))$ и $\dim(\mathrm{Im}(\overline{A}))$ образов этих матриц, определяемые числом *ненулевых* собственных значений подобных матриц A и $\overline{A}$.

Примечание 3.2 (П3.2). Необходимым, но недостаточным условием подобия двух матриц A и $\overline{A}$ являются равенства (3.6) детерминантов матриц и (3.7) следов матриц. Достаточным условием подобия матриц A и $\overline{A}$ являются равенства (3.3) равенства характеристических полиномов матриц и (3.5) совпадения алгебраических спектров собственных значений этих матриц.

Рассмотрим ***матричные неинварианты*** на примере двух подобных матриц A и $\overline{A}$ вида (3.2).

1. Первыми матричными *неинвариантами* являются геометрические спектры $\{\xi_i; i=\overline{1,n}\}$ и $\{\overline{\xi}_i; i=\overline{1,n}\}$ собственных векторов ξ_i и $\overline{\xi}_i$ подобных матриц A и $\overline{A}$, задаваемых в форме

$$\xi_i = \arg\left\{A\xi_i = \lambda_i\xi_i; \lambda_i \in \sigma\{A\}; i=\overline{1,n}\right\}, \tag{3.10}$$

$$\overline{\xi}_i = \arg\left\{A\overline{\xi}_i = \lambda_i\overline{\xi}_i; \lambda_i \in \sigma\{\overline{A}\}; i=\overline{1,n}\right\}. \tag{3.11}$$

При этом (как правило) выполняется отношение неравенства

$$\xi_i \neq \overline{\xi}_i. \tag{3.12}$$

2. Вторым матричным *неинвариантом* являются нормы $\|A\|_{(*)}$ и $\|\overline{A}\|_{(*)}$ подобных матриц A и $\overline{A}$, которые в зависимости от индекса (*) нормы задаются в формах.

2.1. Евклидова (Фробениусова) норма

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left|A_{ij}\right|^2\right\}^{1/2}; \|\overline{A}\|_E = \|\overline{A}\|_F = \left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left|\overline{A}_{ij}\right|^2\right\}^{1/2} \tag{3.13}$$

При этом (как правило) выполняется отношение неравенства

$$\|A\|_E\left(\|A\|_F\right) \neq \|\overline{A}\|_E\left(\|\overline{A}\|_F\right) \tag{3.14}$$

2.2. Операторные (индуцированные) нормы

$$\|A\|_p = \max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}; \ \|\overline{A}\|_p = \max_x \frac{\|\overline{A}x\|_p}{\|x\|_p} \tag{3.15}$$

2.2.1. При $p=1$ $\|A\|_{p=1}; \|\overline{A}\|_{p=1}$ – столбцовые нормы A и $\overline{A}$;

2.2.2. При $p \Rightarrow \infty$ $\|A\|_{p=\infty}; \|\overline{A}\|_{p=\infty}$ – строчные нормы A и $\overline{A}$;

2.2.3.

При $p=2$ $\|A\|_{p=2}; \|\overline{A}\|_{p=2}$ – спектральные нормы A и $\overline{A}$, вычисляемые в силу соотношений

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(A) : \alpha_M(A) = \left|\mu_M^{1/2}\right| : \det(\mu I - A^T A) = 0;$$

$$\|\overline{A}\|_2 = \max_x \frac{\|\overline{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(\overline{A}) : \alpha_M(\overline{A}) = \left|\mu_M^{1/2}\right| : \det(\mu I - \overline{A}^T \overline{A}) = 0,$$

где $\alpha_M(A)$ и $\alpha_M(\overline{A})$ – соответственно максимальные сингулярные числа матриц A и $\overline{A}$. Приведенные матричные нормы удовлетворяют оценочным неравенствам, конструируемые на примере матрицы A:

$$\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{n}\|A\|_2;$$

$$\max_{i,j}|A_{ij}| \le \|A\|_2\sqrt{nm}\max_{i,j}|A_{ij}|;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty;$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty;$$

$$\|A\|_2 \le \left(\|A\|_1\|A\|_\infty\right)^{1/2}.$$

При этом (как правило) выполняется отношение неравенства

$$\|A\|_p \ne \|\overline{A}\|_p \text{ при } p = 1,2,\infty. \qquad (3.16)$$

В заключение остановимся на проблеме согласования векторных и матричных норм. Нормы $\|z\|_q$, $\|x\|_r$ и норма $\|N\|_p$ соответственно векторов z, x и матрицы N(здесь N принимает смысл матриц A и $\overline{A}$), связанных линейным алгебраическим соотношением $z = Nx$ называются согласованными, если выполняется соотношение

$$\|z\|_q \le \|N\|_p\|x\|_r.$$

Наиболее употребительными согласованными нормами являются векторные и матричные нормы, характеризующиеся соотношениями: $q = p = r = 1$ и $q = p = r = 2$, причем второй случай обладает меньшей достаточностью в том смысле, что неравенство может быть максимально приближено к равенству.

3. Третьим матричным *неинвариантом* являются алгебраические спектры $\sigma_\alpha\{A\}$ и $\sigma_\alpha\{\overline{A}\}$ сингулярных чисел подобных матриц A и $\overline{A}$. С понятием сингулярное число связана процедура сингулярного разложения матриц (процедура *SVD–разложения*), которую рассмотрим для общего случая.

Определение 3.3 (О3.3). Сингулярным разложением вещественнозначной матрицы N размерности $(m \times n)$ называется ее ф*акторизация*, задаваемая в виде

$$N = U\Sigma V^T, \qquad (3.17)$$

где U – ортогональная $(m \times m)$ матрица, V – ортогональная $(n \times n)$ матрица, образующие соответственно левый и правый сингулярные базисы и обладающие свойствами:

$$UU^T = U^TU = I, \quad VV^T = V^TV = I. \qquad (3.18)$$

Σ – матрица сингулярных чисел α_i, которая принимает вид

$$\Sigma = diag\left\{\alpha_i; i=\overline{1,m}\right\} \text{ при } m=n, \tag{3.19}$$

$$\Sigma = \left[diag\left\{\alpha_i; i=\overline{1,m}\right\} \;\vdots\; 0_{m,n-m}\right] \text{ при } m<n, \tag{3.20}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} diag\left\{\alpha_i; i=\overline{1,n}\right\} \\ \hdashline 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \text{ при } m>n. \tag{3.21}$$

Положим пока $m=n$ и транспонируем матричное выражение (3.17), тогда получим

$$N^T = V\Sigma^T U^T\Big|_{n=m} = V\Sigma U^T \tag{3.22}$$

Умножим (3.17) на (3.22) тогда с использованием свойства (3.18) получим цепочку равенств

$$NN^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = V\Sigma^2 U^T. \tag{3.23}$$

Теперь умножим (3.22) слева на (3.17), получим:

$$N^T N = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T. \tag{3.24}$$

Умножим матричное уравнение (3.23) на матрицу U справа, тогда с учетом (3.18) получим матричное соотношение:

$$NN^T U = U\Sigma^2. \tag{3.25}$$

Перейдем в (3.25) к столбцовой форме записи правых матричных компонентов:

$$NN^T\left\{col(U_i; i=\overline{1,m}\right\} = U\left\{col(\Sigma^2)_i; i=\overline{1,m})\right\},$$

что эквивалентно матрично-векторному представлению

$$NN^T U_i = U(\Sigma^2)_i; i=\overline{1,m}. \tag{3.26}$$

Если учесть, что столбец $(\Sigma^2)_i$ имеет вид

$$(\Sigma^2)_i = \left[0_{1\times(i-1)} \;\vdots\; \alpha_i^2 \;\vdots\; 0_{1\times(m-i)}\right]^T, \tag{3.27}$$

то с учетом (3.27) соотношение (3.26) записывается

$$NN^T U_i = \alpha_i^2 U_i; i=\overline{1,m}. \tag{3.28}$$

Векторно-матричное соотношение (3.28) представляет собой полное решение проблемы собственных значений α_i^2 и собственных векторов U_i матрицы NN^T. В результате чего получаем, что $\alpha_i^2 (i=\overline{1,m})$ ищутся как решения характеристического уравнения

$$det(\alpha^2 I - NN^T) = 0, \tag{3.29}$$

а матрица U оказывается составленной из собственных векторов U_i матрицы NN^T единичной нормы в форме

$$U = row\left\{U_i : \|U_i\| = 1; i=\overline{1,m}\right\} \tag{3.30}$$

Умножим теперь матричное уравнение (3.24) на матрицу V справа, тогда с учетом (3.18) получим:

$$N^T NV = V\Sigma^2 \tag{3.31}$$

По аналогии с (3.26) ÷ (3.29) соотношение (3.31) запишем в форме m матрично-векторных выражений:

$$N^T N V_i = \alpha_i^2 V_i; i = \overline{1,m}, \qquad (3.32)$$

которое представляет собой задачу на собственные значения α_i^2 и собственные векторы V_i матрицы NN^T. Последнее позволяет составить характеристическое уравнение

$$\det(\alpha^2 I - N^T N) = 0, \qquad (3.33)$$

позволяющее вычислить все $\alpha_i^2 (i = \overline{1,m})$, знание которых в силу (3.32) позволяет найти собственные векторы V_i единичной нормы матрицы $N^T N$. Матрица V правого сингулярного базиса в итоге по аналогии с (3.30) записывается в форме:

$$V = row\{V_i : \|V_i\| = 1; i = \overline{1,m}\}. \qquad (3.34)$$

Следует заметить, что в случае $m = n$ матрицы NN^T и $N^T N$ обладают одним и тем же спектром собственных значений так, что $\sigma\{NN^T\} = \sigma\{N^T N\} = \{\alpha_i^2; i = \overline{1,m}\}$. Если $m \neq n$, то спектр $\sigma\{N^T N\}$ содержит n собственных значений, а спектр $\sigma\{NN^T\}$ содержит m собственных значений, причем количество *ненулевых* элементов этих спектров оказываются равными.

Дадим теперь *геометрическую* интерпретацию сингулярного разложения матрицы N (3.17). Для этой цели умножим (3.17) на матрицу V справа и воспользуемся свойствами (3.18), тогда получим:

$$NV = U\Sigma. \qquad (3.35)$$

Запишем (3.35) по аналогии с (3.28) и (3.32) в столбцовой форме

$$NV_i = \alpha_i U_i; i = \overline{1,m}. \qquad (3.36)$$

Сконструируем теперь на векторно-матричном соотношении (3.36) согласованные тройки $\{V_i, \alpha_i, U_i; i = \overline{1,m}\}$, которые несут информацию о том, что в силу (3.36) эффект действия оператора с матрицей N на i-й элемент V_i правого сингулярного базиса V состоит в умножении на i-ое сингулярное число α_i i-го элемента U_i левого сингулярного базиса U.

Если теперь с помощью матрицы N в силу линейного векторно-матричного соотношения:

$$\eta = N\chi \qquad (3.37)$$

отобразить *сферу* $\|\chi\| = 1$, то она отобразится в *эллипсоид*, *положение* полуосей которого *определяется* элементами U_i левого сингулярного базиса U, а *длины* этих полуосей в силу (3.36) будут равны $\alpha_i \|\chi\|$. Сказанное имеет прозрачную геометрическую интерпретацию, иллюстрируемую рисунком 3.4. При этом геометрическая интерпретация сингулярного разложения в форме

рисунок 3.1 позволяют записать для нормы $\|\eta\| = \|N\chi\|$ систему неравенств

$$\alpha_n \|\chi\| \le \|\eta\| \le \alpha_1 \|\chi\|.$$

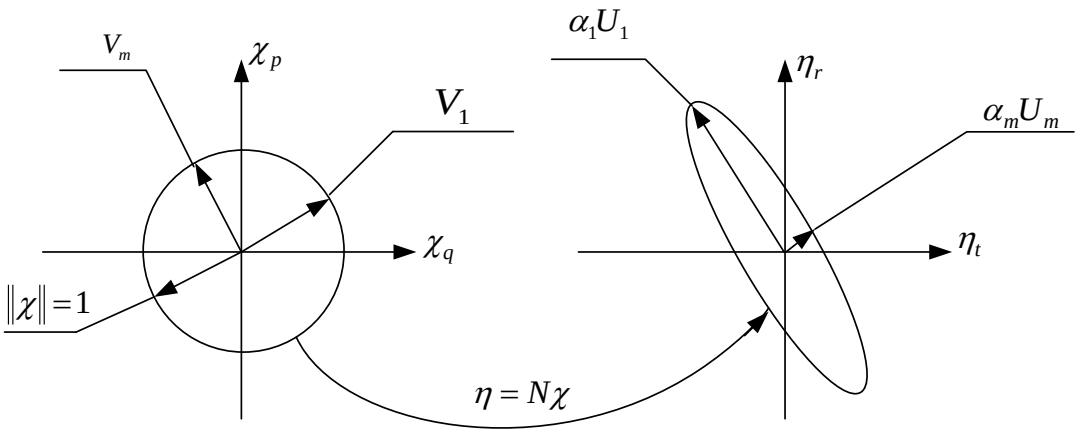


Рисунок 3.1. Геометрическая интерпретация соотношения (3.37)

В заключение заметим, что в англоязычной литературе сингулярное разложение матриц именуется SVD–разложением (SVD–процедурой) (Singular Value Decomposition). Во всех версиях пакета MATLAB существует функция SVD(N), которая выводит матричные компоненты факторизации (3.17).

Возвращаясь к проблеме матричных *неинвариантов*, следует констатировать, что если в качестве $(n \times n)$ – матрицы N взять подобные матрицы A и $\overline{A}$, то, как правило, на спектрах их сингулярных чисел выполняется отношение неравенства $\sigma_\alpha\{A\} \ne \sigma_\alpha\{\overline{A}\}$.

4. Четвертым матричным *неинвариантом* являются числа обусловленности $cond\{A\} = C\{A\}, cond\{\overline{A}\} = C\{\overline{A}\}$ подобных матриц A и $\overline{A}$.

Дадим определение числу обусловленности произвольной $(n \times n)-$матрице N, первое из них будет *геометрическим*, а второе – *алгебраическим*.

Определение 3.4 (О3.4). Числом обусловленности $cond\{A\} = C\{A\}$ произвольной $(n \times n)-$матрицы N называется положительнозначная скалярная характеристика этой матрицы, задаваемая в форме

$$C\{N\} = \|N\|_p \left\|N^{-1}\right\|_p \tag{3.38}$$

Примечание 3.3 (П3.3). Численно значение числа обусловленности матрицы зависит от типа используемой в (3.38) матричной нормы. Если в (3.38) используется спектральная норма матриц ($p = 2$), то выполняется соотношения

$$\|N\|_{p=2} = \alpha_M(N), \left\|N^{-1}\right\|_{p=2} = \alpha_m^{-1}(N). \tag{3.39}$$

Число обусловленности (3.38), построенное на спектральных нормах (3.39), принимает вид

$$C\{N\} = \|N\|_{p=2} \left\|N^{-1}\right\|_{p=2} = \alpha_M(N)\alpha_m^{-1}(N). \tag{3.40}$$

Выражение (3.40) показывает, что число обусловленности матрицы N линейной алгебраической задачи (3.37) *геометрически* характеризует степень *сплющивания* эллипсоида, получаемого при отображении сферы $\|\chi\| = 1$ единичного радиуса.

Алгебраическое определение числа обусловленности $C\{N\}$ матрицы N введем на базе следующего утверждения.

Утверждение 3.2 (У3.2). Число обусловленности матрицы N, заданное в форме (3.38), содержательно представляет собой *коэффициент усиления относительных погрешностей* задания (знания) компонентов правой части ЛАЗ (3.37) в относительную погрешность ее левой части.

□

Доказательство. Введем в рассмотрение помимо номинальной версии ЛАЗ (3.37) ее возмущенную версию

$$\eta + \Delta\eta = (N + \Delta N)(\chi + \Delta\chi). \tag{3.41}$$

Перейдем от задачи (3.41) к задаче в абсолютных приращениях, которая с использованием (3.37) и (3.41) запишется в форме

$$\Delta\eta = \Delta N\chi + N\Delta\chi + \Delta N\Delta\chi \tag{3.42}$$

Переход в (3.42) к согласованным матричным и векторным нормам позволяет записать

$$\|\Delta\eta\| \le \|\Delta N\|\|\chi\| + \|N\|\|\Delta\chi\| + \|\Delta N\|\|\Delta\chi\|. \tag{3.43}$$

Введем в рассмотрение относительные погрешности представления компонентов ЛАЗ и ее решения, определив их следующими соотношениями:

$$\delta_\eta \overset{\Delta}{=} \frac{\|\Delta\eta\|}{\|\eta\|};\ \delta_N \overset{\Delta}{=} \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|};\ \delta_\chi \overset{\Delta}{=} \frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|}. \tag{3.44}$$

Свяжем относительные погрешности (3.44) аналитической зависимостью, опираясь на соотношение (3.43). Для этих целей представим номинальную версию ЛАЗ (3.37) в форме

$$\chi = N^{-1}\eta,$$

которая в согласованных матричных и векторных нормах позволяет записать

$$\|\eta\| \geq \frac{1}{\|N^{-1}\|}\|\chi\|. \qquad (3.45)$$

Деление левой части неравенства (3.43) на левую часть второго неравенства (3.45) и соответственно правой части неравенства (3.43) на правую часть второго неравенства (3.45) усиливает выполнение условий исходного неравенства (3.43) и принимает вид

$$\frac{\|\Delta\eta\|}{\|\eta\|} \leq \|N\|\|N^{-1}\|\left\{\frac{\|\Delta N\|}{\|N\|} + \frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|} + \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|}\frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|}\right\}.$$

(3.46)Если в (3.46) учесть (3.38), а также выражение для относительных погрешностей (3.44), то неравенство (1.8) примет вид

$$\delta_\eta \leq C_N(\delta_N + \delta_\chi + \delta_N\delta_\chi). \qquad \blacksquare(3.47)$$

Таким образом, *алгебраическое* определение числа обусловленности матрицы совпадает с выдвинутым положением утверждения 3.2 и имеет следующую формулировку.

Определение 3.5 (О3.5). Число обусловленности заданное, в форме (3.38), произвольной квадратной матрицы N, порождающей линейную алгебраическую задачу вида (3.37), содержательно представляет собой *коэффициент усиления относительных погрешностей* задания (знания) компонентов правой части ЛАЗ (3.37) в относительную погрешность ее левой части. □

В заключение заметим, что числа обусловленности $C\{A\}$ *и* $C\{\overline{A}\}$ подобных матриц A и $\overline{A}$, являясь матричными *неинвариантами*, как правило, связаны отношением неравенства $C\{A\} \neq C\{\overline{A}\}$.

Примеры и задачи

3.1 Выбрать из приводимых ниже матриц пару подобных путем вычисление матричных *инвариантов*, в случае положительного исхода выбора вычислить все матричные *инварианты* и *неинварианты* этих матриц.

3.1.1. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ 3.1.2. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ 3.1.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

3.1.4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ 3.1.5. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ 3.1.6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$

3.1.7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ 3.1.8 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$ 3.1.9. $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

3.1.10. $\begin{bmatrix} 0 & 21 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 3.1.11 $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ 3.1.12. $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

3.1.13 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$ 3.1.14. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ 3.1.15. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

3.1.16. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ 3.1.17. $\begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ 3.1.18. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

3.1.19. $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 3.1.20. $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3.1.21. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$

3.1.22. $\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 3.1.23. $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ 3.1.24. $\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$

3.1.25. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$ 3.1.26. $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 3.1.27. $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$

3.1.28. $\begin{bmatrix} 12 & 3.5 \\ 24 & -8 \end{bmatrix}$ 3.1.29. $\begin{bmatrix} -15 & 4 \\ -30 & 7 \end{bmatrix}$ 3.1.30 $\begin{bmatrix} 21 & -16 \\ 21 & -17 \end{bmatrix}$

3.1.31. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}$ 3.1.32. $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ 3.1.33. $\begin{bmatrix} -15 & 8 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$

3.1.34. $\begin{bmatrix} 21 & 16 \\ -21 & -17 \end{bmatrix}$ 3.1.35. $\begin{bmatrix} -3 & 2.67 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ 3.1.36. $\begin{bmatrix} -3.33 & -5.33 \\ 2.33 & 7.33 \end{bmatrix}$

3.1.37. $\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -22.5 & -7.5 \end{bmatrix}$ 3.1.38. $\begin{bmatrix} 21 & -8 \\ 42 & -17 \end{bmatrix}$ 3.1.39. $\begin{bmatrix} 2.5 & -4.5 \\ 2.5 & -6.5 \end{bmatrix}$

3.1.40. $\begin{bmatrix} 7.33 & -4.67 \\ -2.67 & -3.33 \end{bmatrix}$

Решение вариантов задач

<u>*Решение задачи*</u> 3.1 на примере пары матриц 3.1.15 и 3.1.7. Выдвинем *гипотезу*, что матрицы

$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ и $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ подобны.

Вычислим матричные *инварианты* этих матриц:

1. Характеристические полиномы, которые принимают вид

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -4 \\ -2 & \lambda+3 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) = \lambda^2 + 4\lambda - 5;$$

$$\det(\lambda I-\overline{A})=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -5 & \lambda+4\end{bmatrix}=\lambda(\lambda+4)-5=\lambda^2+4\lambda-5.$$

Гипотеза верна, так как $\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-\overline{A})$, поэтому выбранные матрицы A и $\overline{A}$ подобны.

2. Алгебраические спектры собственных значений матриц

$$\sigma\{A\}=\sigma\{\overline{A}\}=\{\lambda_1=1;\lambda_2=-5:\lambda^2+4\lambda-5=0;\};$$

3. Определители (детерминанты) матриц

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}=(-1)(-3)-(2)(4)=4-8=-5,$$

$$\det(\overline{A})=\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix}=(0)(-4)-(1)(5)=-5,$$

$$\det(A)=\det(\overline{A})=\lambda_1\lambda_2=(1)(-5)=-5,$$

$$\det(A)=\det(\overline{A}).$$

4. Следы матриц

$$tr(A)=tr\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=A_{11}+A_{22}=(-1)+(-3)=-4,$$

$$tr(\overline{A})=tr\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A}_{ii}=\overline{A}_{11}+\overline{A}_{22}=(-1)+(-3)=-4,$$

$$tr(A)=tr(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2=(1)+(-5)=-4.$$

Вычислим матричные *неинварианты* этих матриц:

1. Спектры собственных векторов $\{\xi_i;i=\overline{1,n}\}$ и $\{\overline{\xi}_i;i=\overline{1,n}\}$

$$A\xi_i=\lambda_i\xi_i\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}\xi_i=\lambda_i\xi\,|_{\lambda_1=1,\lambda_2=-5}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix};$$

$$\overline{A}\,\overline{\xi}_i=\lambda_i\overline{\xi}_i\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix}\overline{\xi}_i=\lambda_i\overline{\xi}\,|_{\lambda_1=1,\lambda_2=-5}\Rightarrow\overline{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\overline{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\ -5\end{bmatrix}.$$

$$\{\xi_i;i=\overline{1,n}\}\neq\{\overline{\xi}_i;i=\overline{1,n}\}.$$

2. Нормы $\|A\|_{(*)}$ и $\|\overline{A}\|_{(*)}$.

2.1. Евклидовы (Фробениусовы) матричные нормы

$$\|A\|_E=\|A\|_F=\left\{\sum_{i,j=1}^{n}|A_{ij}|^2\right\}^{1/2}=\left\{1^2+2^2+4^2+3^2\right\}^{1/2}=30^{1/2}$$

$$\|\overline{A}\|_E=\|\overline{A}\|_F=\left\{\sum_{i,j=1}^{n}|\overline{A}_{ij}|^2\right\}^{1/2}=\left\{0^2+5^2+1^2+4^2\right\}^{1/2}=42^{1/2}$$

2.2. Операторные (индуцированные) нормы

$$\|A\|_p = \max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}; \ \|\overline{A}\|_p = \max_x \frac{\|\overline{A}x\|_p}{\|x\|_p}$$

2.2.1. При $p=1$ $\|A\|_{p=1}; \|\overline{A}\|_{p=1}$ – столбцовые нормы.

$$\|A\|_{p=1} = \max_i \{\|A_i\|_1\} = \max\{(|1-1|+|2|),(|4|+|-3|)\} = 7,$$

$$\|\overline{A}\|_{p=1} = \max_i \{\|\overline{A}_i\|_1\} = \max\{(|0|+|5|),(|1|+|-4|)\} = 5.$$

2.2.2. При $p=\infty$ $\|A\|_{p=\infty}; \|\overline{A}\|_{p=\infty}$ – строчные нормы.

$$\|A\|_{p=\infty} = \max_j \{\|A^j\|_1\} = \max\{(|-1|+|4|),(|2|+|-3|)\} = 5,$$

$$\|\overline{A}\|_{p=\infty} = \max_j \left\{\|\overline{A}^j\|_1\right\} = \max\{(|0|+|1|),(|5|+|-4|)\} = 9.$$

2.2.3. При $p=2$ $\|A\|_{p=2}; \|\overline{A}\|_{p=2}$ – спектральные нормы A и $\overline{A}$, вычисляемые в силу соотношений

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(A) : \alpha_M(A) = \left|\mu_M^{1/2}\right| : \det(\mu I - A^T A) = 0;$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\det(\mu I - A^T A) = \mu^2 - 30\mu + 25 = 0;$$

$$\mu_1 = 29.42; \ \mu_2 = 0.858; \ \alpha_M(A) = \alpha_1 = 5.424, \ \alpha_m(A) = \alpha_2 = 0.9263,$$

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(A) = 5.424.$$

$$\|\overline{A}\|_2 = \max_x \frac{\|\overline{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(\overline{A}) : \alpha_M(\overline{A}) = \left|\overline{\mu}_M^{1/2}\right| : \det(\overline{\mu} I - \overline{A}^T \overline{A}) = 0.$$

$$\overline{A}^T \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\det(\overline{\mu} I - \overline{A}^T \overline{A}) = \overline{\mu}^2 - 42\overline{\mu} + 25 = 0;$$

$$\overline{\mu}_1 = 41.396; \ \overline{\mu}_2 = 0.604; \ \alpha_M(\overline{A}) = \overline{\alpha}_1 = 6.434, \ \alpha_m(\overline{A}) = \overline{\alpha}_2 = 0.7772,$$

$$\|\overline{A}\|_2 = \max_x \frac{\|\overline{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(\overline{A}) = 6.434.$$

3. Алгебраические спектры $\sigma_\alpha\{A\}$ и $\sigma_\alpha\{\overline{A}\}$ сингулярных чисел подобных матриц A и $\overline{A}$ вычислены в предыдущем пункте и имеют представления

$$\sigma_\alpha\{A\} = \{\alpha_1 = 5.424; \alpha_2 = 0.9263\},$$
$$\sigma_\alpha\{\overline{A}\} = \{\overline{\alpha}_1 = 6.434; \overline{\alpha}_2 = 0.7772\}.$$

4. Спектральные числа обусловленности подобных матриц A и $\overline{A}$, вычисляемых в силу соотношений

$$C_\lambda\{A\} = C_2\{A\} = \alpha_M(A)\alpha_m^{-1}(A) = 5.424(0.9263)^{-1} = 5.8557,$$
$$C_\lambda\{\overline{A}\} = C_2\{\overline{A}\} = \alpha_M(\overline{A})\alpha_m^{-1}(\overline{A}) = 6.434(0.7772)^{-1} = 8.2787.$$

■

4. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ МАТРИЦ. МАТРИЦЫ ПРИВЕДЕНИЯ ПОДОБИЯ

Рассматриваются подобные матрицы A и $\overline{A}$, связанные матричным условием подобия (3.1) с матрицей M приведения подобия. Будем полагать, что $(n \times n)-$матрица A задана в *произвольном базисе* (имеет произвольную форму), а $(n \times n)-$матрица $\overline{A}$ задана в *каноническом базисе* (имеет каноническую форму). В связи со сказанным встают два вопроса. *Первый вопрос*: как формируются матрицы в *канонической* форме? *Второй вопрос*: как формируется матрица M приведения подобия, позволяющая с помощью матричного соотношения

$$\overline{A} = M^{-1} A M \tag{4.1}$$

осуществить переход от матрицы A, заданной в произвольном базисе к матрице $\overline{A}$, задаваемой в некотором каноническом базисе?

Дадим *ответ* на *первый* из поставленных вопросов, то есть построим матрицы ЛО $\boldsymbol{A}$ в *канонических* формах.

Определение 4.1 (О4.1). Канонической формой $(n \times n)$ матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ будем называть форму $(n \times n)$ матрицы линейного оператора (ЛО), которая построена в соответствии с некоторым правилом (законом, *каноном*) с тем, чтобы решить одну из возможных задач: сокращение объема матричных вычислений путем минимизации числа *ненулевых* элементов матрицы; облегчение анализа *структуры пространства* ЛО $\boldsymbol{A}$, обеспечение вычислительной устойчивости всех матричных процедур путем уменьшения числа обусловленности матрицы ЛО и т.д.

К настоящему моменту сконструировано большое число канонических форм задания $(n \times n)$ матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, ниже рассматриваются только базовые канонические формы.

Базовые канонические формы $(n \times n)$ матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ строятся на двух алгебраических спектрах исходной матрицы A, заданной в *произвольном базисе*.

Первый алгебраический спектр $\sigma\{A\} = \left\{\lambda_i : A\xi_i = \lambda_i \xi_i : \det(\lambda_i I - A)) = 0 : i = \overline{1,n}\right\}$ представляет собой спектр собственных значений $\left\{\lambda_i : i = \overline{1,n}\right\}$ матрицы A.

Второй алгебраический спектр

$$\sigma_a\{A\} = \{a_i : \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n ; i = \overline{1,n}\}$$

представляет спектр коэффициентов $\left\{a_i : i = \overline{1,n}\right\}$ характеристического полинома $D(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right)$ матрицы A.

Рассмотрим канонические представления $\overline{A}$ исходной матрицы A, которые конструируются на алгебраическом спектре собственных значений матриц, для различных случаев его реализации.

1. *Диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \mathrm{Jm}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i,l = \overline{1,n}\}. \tag{4.2}$$

Алгебраический спектр вида (4.2) порождает множество подобных матриц линейного оператора $\boldsymbol{A}$, именуемых матрицами *простой структуры.*

В случае реализации алгебраического спектра $\sigma\{A\}$ в форме (4.2), когда все собственные значения *вещественные и простые (различные, не кратные)*, может быть построена диагональная матрица Λ с элементами λ_i на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы так, что она принимает вид

$$\overline{A} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_n \end{bmatrix} = diag\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\} \tag{4.3}$$

2. *Блочно-диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \{\mathrm{Jm}\ (\lambda_{2i-1,2i}) \neq 0 : \lambda_{2i-1} = \alpha_i + j\beta_i; \lambda_{2i} = \alpha_i - j\beta_i : \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i,l = \overline{1,n/2}\}. \tag{4.4}$$

В случае реализации алгебраического спектра $\sigma\{A\}$ в форме (4.4), когда все собственные значения *комплексно-сопряженные и простые (не кратные)*, может быть построена блочно-диагональная матрица $\tilde{\Lambda}$ с вещественнозначными матричными блоками $\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы так, что она принимает вид

$$\overline{A} = \tilde{\Lambda} = diag\left\{\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1,n/2;}\right\}. \tag{4.5}$$

3. *Комбинированная блочно-диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений содержит только *простые* собственные значения, часть которых числом n_R являются *вещественными,* а другая часть числом $n_c = 2m_c$ – *комплексно-сопряженными,* при этом выполняется соотношение $n = n_c + n_R$.

Комбинированная блочно-диагональная матрица имеет на своей главной диагонали диагональную матрицу вида (4.3) размерности $(n_R \times n_R)$ и блочно-диагональную матрицу вида (4.5) размерности $(n_c \times n_c)$ так, что она примет вид

$$\overline{A} = \tilde{\tilde{\Lambda}} = diag\ \left\{\Lambda_{(n_R \times n_R)}; \tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)}\right\}. \tag{4.6}$$

Матричные блоки на диагонали комбинированной блочно-диагональной матрицы можно менять местами, так что наряду с формой (4.6) матрица $\overline{A}$ может иметь представление

$$\overline{A} = \tilde{\Lambda} = diag\{\tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)}; \Lambda_{(n_R \times n_R)}\}. \tag{4.7}$$

Так, например, если алгебраический спектр собственных значений матриц ЛО ***A*** имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \left\{\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \lambda_i : Jm(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i,l = \overline{3,n}\right\}, \tag{4.8}$$

то комбинированное блочно-диагональное представление канонической матрицы $\overline{A}$ принимает вид

$$\overline{A} = \tilde{\tilde{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} & \left[0_{2\times(n-2)}\right] \\ \left[0_{(n-2)\times 2}\right] & \left[\Lambda_{(n-2)\times(n-2)}\right] \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

где $0_{2\times(n-2)}, 0_{(n-2)\times 2}, \Lambda_{(n-2)\times(n-2)}$ – соответственно нулевые матрицы размерности $2\times(n-2)$ и $(n-2)\times 2$ и диагональная матрица размерности $(n-2)\times(n-2)$.

4. *Жорданова каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \left\{\lambda_k - кратности \quad \mu_k, k = \overline{1,p}; \sum_{k=1}^{p} \mu_k = n; \mathrm{Jm}\ (\lambda_k) = 0;\right\}. \tag{4.10}$$

Тогда *жорданова каноническая форма* матрицы $\overline{A}$ по своей структуре максимально близкая к диагональной форме для случая вещественных кратных собственных значений матриц ЛО ***A*** в соответствии со структурой алгебраического спектра (4.10) примет вид

$$\overline{A} = J = diag\left\{ \begin{matrix} J_{kk} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ & \lambda_k & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}_{(\mu_k \times \mu_k)} \\ ; k = \overline{1,p} \end{matrix} \right\}. \tag{4.11}$$

Жорданова каноническая форма (4.11) представляет собой блочно-диагональную матрицу, составленную из *жордановых*

блоков J_{kk} размерности $(\mu_k \times \mu_k)$, имеющих на своей главной диагонали собственное значение λ_k кратности μ_k, единицы на первой *наддиагонали* и нули на остальных позициях блока. *Жорданова каноническая форма* (4.11) является верхней жордановой формой, наряду с которой может быть построена *нижняя жорданова каноническая форма*, которая характеризуется тем, что единицы жордановых блоках размещаются на первой *поддиагонали.* Следует заметить, что *жорданова каноническая форма* может быть построена и для случая матриц ЛО, алгебраический спектр собственных значений которых содержит кратные комплексно-сопряженные элементы, причем возможны как комплекснозначная так и вещественнозначная формы.

Так вещественнозначная версия жордановой канонической формы для случая кратных комплексно–сопряженных собственных значений исходной матрицы принимает вид

$$\overline{A} = \tilde{J} = diag\left\{ \tilde{J}_{kk} = \begin{bmatrix} \alpha_k & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -\beta_k^2 & \alpha_k & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \alpha_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & -\beta_k^2 & \alpha_k \end{bmatrix}_{(\mu_k \times \mu_k)} ; k = \overline{1, p} \right\},$$

где $\sigma\{A\} = \left\{ \left(\lambda_k = \alpha_k \pm j\beta_k\right) - кратности \quad \mu_k, k = \overline{1, p}; \sum_{k=1}^{p} \mu_k = n/2; \right\}.$

Нетрудно видеть, что каноническая форма $\tilde{J}$ при $\beta_k \to 0$ вырождается в каноническую жорданову форму вида (4.11).

5. Рассмотрим теперь *канонические представления* $\overline{A}$ исходной матрицы A, которые конструируются на алгебраическом спектре $\sigma_a\{A\}$ коэффициентов характеристического полинома

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i} \tag{4.12}$$

матриц линейного оператора ***A***. Этих представлений два, они совпадают с точностью до транспонирования. Канонические представления имеют вид

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & . & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times 1} & I_{(n-1)\times(n-1)} \\ & \\ & \\ & \\ -a & \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

и $$\overline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & ..0 & -a_n \\ 1 & 0 & . & ..0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & . & ..0 & -a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & ..0 & -a_2 \\ 0 & 0 & . & ..1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1\times(n-1)} & \\ & -a^T \\ I_{(n-1)\times(n-1)} & \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

В *канонических формах* (4.13) и (4.14) $a-$ n-мерный вектор–строка коэффициентов, записанных в обратном по отношению их размещения в характеристическом полиноме порядке так, что он принимает вид

$$a = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...a_2, a_1] = row\{a_{n+1-i} : i = \overline{1,n}\}, \quad (4.15)$$

$0_{(n-1)\times 1}; 0_{1\times(n-1)}; I_{(n-1)\times(n-1)}$ – соответственно $(n-1)$-мерные матрица-столбец и матрица–строка, а также $(n-1)\times(n-1)-$ единичная матрица.

Обе *канонические формы* (4.13) и (4.14) именуются *нормальной, сопровождающей* (свой характеристический полином) и *фробениусовой канонической* формой. С тем, чтобы их различать текстуально форма (4.13) названа *строчной* нормальной, сопровождающей или фробениусовой, а (4.14) – *столбцовой*. Для канонической формы (4.13) используется обозначение $\overline{A} = A_F$.

Строчная сопровождающая каноническая форма матрицы ЛО ***A*** имеет в последней строке коэффициенты характеристического полинома, записанные с обратными знаками и в обратном порядке, первую *наддиагональ*, заполненную единицами, остальные позиции матрицы, заполненные нулями. При использовании этой формы матрицы для модельных представлений динамических объектов она именуется *канонической управляемой фробениусовой (сопровождающей) формой.*

Столбцовая сопровождающая каноническая форма матрицы ЛО ***A*** имеет в последнем столбце коэффициенты характеристического полинома, записанные с обратными знаками и в обратном порядке, первую *поддиагональ*, заполненную единицами, остальные позиции матрицы, заполненные нулями. При использовании этой формы матрицы для модельных представлений динамических объектов она именуется *канонической наблюдаемой фробениусовой (сопровождающей) формой.*

Теперь дадим ответ на *второй* вопрос, поставленный в начале раздела, то есть построим матрицы приведения подобия произвольной матрицы ЛО À к каноническим формам.

Приведение матрицы A простой структуры ЛО ***A*** к диагональной форме (4.3) строится на положениях следующих утверждений.

Утверждение 4.1 (У4.1). Матрица M, приводящая произвольную $(n \times n)$ квадратную матрицу A простой структуры ЛО A к диагональной форме Λ в силу соотношения (4.1), принимающего для $\overline{A} = \Lambda$ представление

$$\Lambda = M^{-1} A M \tag{4.16}$$

имеет своими столбцами собственные векторы матрицы A.

Доказательство. Запишем базовое уравнение матричного подобия для рассматриваемого случая (4.16) в столбцовой форме

$$M[\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \ldots \quad \Lambda_i \quad \ldots \quad \Lambda_n] = A[M_1 \quad M_2 \quad \ldots \quad M_i \quad \ldots \quad M_n] \tag{4.17}$$

где Λ_i, M_i – $i-$*ые* столбцы соответственно матриц Λ и $M, \left(i = \overline{1,n}\right)$. Перейдем теперь от матричного уравнения (4.17) к $n-$векторно-матричным уравнениям вида

$$M\Lambda_i = AM_i; \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{4.18}$$

где $i-$*ый* столбец Λ_i диагональной матрицы Λ имеет вид

$$\Lambda_i = [0 \quad \ldots \quad 0 \quad \lambda_i \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^T. \tag{4.19}$$

Нетрудно видеть, что с учетом (4.19) векторно-матричное уравнение (4.18) принимает вид

$$\lambda_i M_i = AM_i \; ; i = \overline{1,n} \; . \tag{4.20}$$

Векторно-матричное соотношение (4.20) является определением собственного вектора матрицы A, откуда следует, что $M_i -$собственный вектор матрицы A. ■

Утверждение 4.2 (У4.2). Пусть матрица A ЛО ***A*** является матрицей простой структуры, тогда ее каноническая строчная фробениусова форма A_F, имеющая представление (4.13), обладает собственными векторами

$$\xi_i = \arg\left\{A_F \xi_i = \lambda_i \xi_i \; ; i = \overline{1,n}\right\}, \tag{4.21}$$

которые строятся по *схеме* Вандермонда так, что они принимают вид

$$\xi_i = \left[1 \quad \lambda_i \quad \lambda_i^2 \quad \ldots \quad \lambda_i^{n-1}\right]^T; \; i = \overline{1,n}. \tag{4.22}$$

Доказательство сформулированного утверждения строится на непосредственной подстановке в (4.21) представлений (4.13) и (4.22), в результате получается следующая цепочка векторно-матричных равенств

$$A_F\xi_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \lambda_i^2\\ ..\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i\\ \lambda_i^2\\ \lambda_i^3\\ ..\\ -\sum\limits_{l=1}^{n}a_l\lambda_i^{n-l}\end{bmatrix}.(4.23)$$

Но в силу характеристического уравнения матриц ЛО ***A*** оказывается справедлива запись

$$\lambda_i{}^n+\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i{}^{n-i}=0, \qquad (4.24)$$

из которой следует справедливость представления

$$-\sum_{l=1}^{n}a_l\lambda_i^{n-l}=\lambda_i{}^n \qquad (4.25)$$

подстановка которого в (4.23) приводит последнее к виду

$$A_F\xi_i=\lambda_i\begin{bmatrix}1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}^T. \qquad (4.26)$$

Соотношение (4.26) делает справедливым утверждение 4.2. ■

Доказательство утверждения 4.2. и положения утверждения 4.1 содержат доказательство утверждения 4.3.

Утверждение 4.3 (У4.3). Пусть матрица A_F является канонической строчной фробениусовой формой матриц ЛО ***A*** простой структуры, тогда матрица A_F может быть приведена к канонической диагональной форме (4.3) с помощью матрицы Вандермонда M_B, столбцы которой $M_{Bi}\left(i=\overline{1,n}\right)$ суть собственные вектора вида (4.22) так, что она принимает вид

$$M_B=row\left\{M_{Bi}=\xi_i=\begin{bmatrix}1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}^T;\ i=\overline{1,n.}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}. \qquad ■(4.27)$$

Рассмотрим теперь задачу конструирования матрицы $\tilde{M}$ приведения исходной матрицы A, обладающей комплекснозначным спектром собственных значений (4.4), к канонической блочно-диагональной форме (4.5) в силу матричного соотношения $\tilde{\Lambda}=\tilde{M}^{-1}A\tilde{M}$.

Утверждение 4.4 (У4.4). Пусть $(n\times n)-$матрица A такова, что алгебраический спектр ее собственных значений составлен из комплексно-сопряженных чисел так, что он имеет вид (4.4).

Геометрический спектр собственных векторов этой матрицы составлен из комплексно-сопряженных векторов так, что он имеет вид

$$\{\xi_{2i-1};\xi_{2i};i=\overline{1,n/2}\}=\left\{\begin{matrix}\xi_{2i-1}=\xi_{R,2i-1}+j\xi_{J,2i-1};\ \xi_{2i}=\xi_{R,2i}-j\xi_{J,2i};\\ A\xi_{2i-1}=\lambda_{2i-1}\xi_{2i-1};\ A\xi_{2i}=\lambda_{2i}\xi_{2i};i=\overline{1,n/2.}\end{matrix}\right\}. \quad (4.28)$$

Тогда матрица

$$\tilde{M}=\arg\left\{\tilde{\Lambda}=\tilde{M}^{-1}A\tilde{M}=diag\left\{\tilde{\Lambda}_{ii}=\begin{bmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ -\beta_i & \alpha_i\end{bmatrix};i=\overline{1,n/2;}\right\}\right\}=$$

$$=row\left\{\left[\tilde{M}_{2i-1}\vdots\tilde{M}_{2i}\right];i=\overline{1,n/2;}\right\}$$

имеет своими столбцами $\tilde{M}_{2i-1},\tilde{M}_{2i}$ соответственно вещественный и мнимый компоненты собственных векторов, что записывается в форме

$$\tilde{M}_{2i-1}=\xi_{R,2i-1},\ \tilde{M}_{2i}=\xi_{J,2i-1}. \qquad \square$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в векторно-матричные соотношения для собственных векторов

$$A\xi_{2i-1}=\lambda_{2i-1}\xi_{2i-1};A\xi_{2i}=\lambda_{2i}\xi_{2i};i=\overline{1,n/2}$$

представлений собственных значений и векторов в форме

$$\left\{\lambda_{2i-1}=\alpha_i+j\beta_i;\lambda_{2i}=\alpha_i-j\beta_i:i=\overline{1,n/2}\right\}$$

$$\xi_{2i-1}=\xi_{R,2i-1}+j\xi_{J,2i-1};\xi_{2i}=\xi_{R,2i}-j\xi_{J,2i};i=\overline{1,n/2.}$$

и последующем разделении полученных выражений на вещественный и мнимый компоненты, что в итоге приводит к двум векторно-матричным равенствам

$$(A-\alpha_iI)\xi_{Ri}=-\beta_i\xi_{Ji}\ ;\ (A-\alpha_iI)\xi_{Ji}=\beta_i\xi_{Ri}. \quad (4.29)$$

В свою очередь, если записать уравнение подобия $\tilde{M}\tilde{\Lambda}=A\tilde{M}$, в котором выделить блоки соответствующие собственным значениям λ_{2i-1} и λ_{2i} то получим

$$\left[\tilde{M}_{2i-1}\vdots\tilde{M}_{2i}\right]\begin{bmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ -\beta_i & \alpha_i\end{bmatrix}=A\left[\tilde{M}_{2i-1}\vdots\tilde{M}_{2i}\right].$$

Решение последнего матричного уравнения относительно матриц-столбцов $\tilde{M}_{2i-1},\tilde{M}_{2i}$ приводит к соотношениям

$$(A-\alpha_iI)\tilde{M}_{2i-1}=-\beta_i\tilde{M}_{2i}\ ;\ (A-\alpha_iI)\tilde{M}_{2i}=\beta_i\tilde{M}_{2i-1}.$$

Сравнение последних соотношений с соотношениями (4.29) делает справедливыми положения утверждения. ■

Примечание 4.1 (ПР4.1). Если спектр собственных значений матриц ЛО ***A*** является комбинированным так, что он содержит как вещественные некратные собственные значения, так и комплексно-сопряженные некратные собственные значения, при этом примера ради имеет реализацию вида (4.8) $\sigma\{A\}=\left\{\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta;\lambda_i:Jm(\lambda_i)=0;\lambda_i\neq\lambda_l;i\neq l;i,l=\overline{3,n}\right\}$, то исходная матрица A приводима к блочно диагональной канонической форме

вида (4.9) с помощью обобщенной матрицы $\tilde{\tilde{M}}$, имеющей своими столбцами собственные вектора, а также их вещественные и мнимые компоненты, согласованные с вещественными и комплекснозначными собственными значениями. Так в случае, когда исходная матрица A ЛО $\boldsymbol{A}$ имеет каноническую строчную фробениусову форму A_F, то $\tilde{\tilde{M}}$ является обобщенной матрицей Вандермонда $\tilde{M}_B$, имеющей представление

$$\tilde{M}_B = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(\lambda_1^0\right) & \mathrm{Jm}\left(\lambda_1^0\right) & \lambda_3^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \mathrm{Re}\left(\lambda_1^1\right) & \mathrm{Jm}\left(\lambda_1^1\right) & \lambda_3^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \mathrm{Re}\left(\lambda_1^2\right) & \mathrm{Jm}\left(\lambda_1^2\right) & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Re}\left(\lambda_1^{n-1}\right) & \mathrm{Jm}\left(\lambda_1^{n-1}\right) & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.30)$$

В заключение покажем, что матрица Вандермонда M_B и матрица M собственных векторов произвольной матрицы A простой структуры ЛО $\boldsymbol{A}$ позволяют приводить матрицу A к канонической строчной фробениусовой форме A_F. Действительно обе матрицы M и M_B решают задачу диагонализации матриц A и A_F в формах

$$\Lambda = M^{-1}AM\,;\ \Lambda = M_B{}^{-1}A_F M_B\,. \qquad (4.31)$$

Приведенные матричные соотношения позволяют составить матричное равенство

$$M_B{}^{-1}A_F M_B = M^{-1}AM\,,$$

которое в разрешенном относительно матрицы A_F виде записывается

$$A_F = M_B M^{-1}AMM_B^{-1} = M_F^{-1}AM_F\,, \qquad (4.32)$$

$M_F = MM_B^{-1}$ – матрица приведения произвольной матрицы A простой структуры к матрице A_F, являющейся канонической строчной фробениусовой формой матриц ЛО $\boldsymbol{A}$.

Теперь остановимся на формировании матрицы T приведения произвольной матрицы A с вещественным спектром кратных собственных значений, определяемой в силу соотношения

$$TJ = AT\,. \qquad (4.33)$$

Простоты ради выкладок будем для начала полагать, что кратность собственного значения удовлетворяет условию $\mu = n.$Формирование матрицы T осуществим на основе следующего утверждения.

Утверждение 4.5 (У4.5). Матрица T приведения подобия матрицы A с вещественным спектром кратных собственных значений кратности равной степени характеристического полинома к жордановой форме, представленная в столбцовой форме

$$T = col\left\{T_i; i = \overline{1,n}\right\}, \tag{4.34}$$

столбцы которой определяются из условий:

$$\lambda T_1 = AT_1; T_i = (A - \lambda I)T_{i+1}; i = \overline{1, n-1}. \tag{4.35}$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановки в векторно-матричные соотношения подобия (4.33) матрицы T, представленной в форме (4.34). В результате этой подстановки получим

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_n \end{bmatrix},$$

$\lambda T_1 = AT_1, T_1 + \lambda T_2 = AT_2, \dots T_{n-1} + \lambda T_n = AT_n$, обобщением чего является запись (4.35). ■

Примеры и задачи

4.1. Приводимые ниже матрицы *простой структуры* привести к канонической *диагональной и строчной сопровождающей (фробениусовой)* формам, построить матрицы приведения подобия к указанным каноническим базисам.

4.1.1. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ 4.1.2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$ 4.1.3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ 4.1.4. $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

4.1.5. $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ 4.1.6. $\begin{bmatrix} 0 & 21 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 4.1.7. $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ 4.1.8. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

4.1.9. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ 4.1.10. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ 4.1.11. $\begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 1` & -8 \end{bmatrix}$ 4.1.12. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

4.1.13. $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 4.1.14. $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 4.1.15. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$ 4.1.16. $\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

4.1.17. 4.1.18. 4.1.19. 4.1.20.

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2.Привести к нормальной жордановой форме и определить матрицы преобразования T матриц A вида:

4.2.1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; 4.2.2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$;

4.2.3. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; .4.2. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 9 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Решение вариантов задач

<u>*Решение задачи*</u> 4.1.В качестве примера произвольной матрицы A ЛО $\boldsymbol{A}$ возьмем матрицу 4.1.10, воспользовавшись при этом результатами изучения ее в предыдущем разделе в виде спектров собственных значений и векторов так, что можно записать

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} : \sigma\{A\} = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5\}; \xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

<u>Задача 1</u>: Привести матрицу A к диагональной форме $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ с помощью матричного соотношения $\Lambda = M^{-1}AM$, где

$$M = [M_1 = \xi_1 \quad M_2 = \xi_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

<u>Задача 2</u>: Привести матрицу A к строчной сопровождающей (фробениусовой) форме, для построения которой составим характеристический полином матрицы A

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 2)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Сопровождающая форма A_F исходной матрицы A принимает вид $A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, решим задачу ее диагонализации с помощью матрицы ВандТеперь приведем исходную матрицу A к сопровождающей (фробениусовой) форме A_F с помощью матричных соотношений

$$A_F = M_B M^{-1} A M M_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Поставленная задача решена.

<u>*Решение задачи*</u> 4.2.на примере матрицы 4.2.1. Характеристическое уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ исходной матрицы A дает для нее три одинаковые собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, следовательно, алгебраическая кратность корня равна трем. Дефект матрицы

$$A - \lambda I = A\text{-}(\text{-}1)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \text{-}1 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 1 & \text{-}2 \end{bmatrix}$$

равен единице, следовательно, собственное подпространство $N\{A - (-1)I\}$ является одномерным.

Поскольку собственное пространство, соответствующее собственному значению $\lambda = -1$, является одномерным, форма Жордана J состоит из единственного блока, отвечающего этому значению $\lambda = -1$ и принимает вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $TJ = AT$, записанное в столбцовой форме $\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix}$ порождает систему соотношений

$$\lambda T_1 = AT_1;\ T_1 + \lambda T_2 = AT_2;\ T_2 + \lambda T_3 = AT_3.$$

Последовательное решение этих уравнений *без использования процедуры обращения* позволяет сконструировать матрицу T в форме

$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, в результате чего уравнение подобия $TJ = AT$ приводит к искомому результату

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

5. ФУНКЦИИ ОТ ВЕКТОРА. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО АРГУМЕНТАМ ФУНКЦИИ

Определение 5.1 (О5.1). Пусть каждому вектору x линейного действительного пространства R^n ставится в соответствие вполне определенное число из R. Тогда говорят, что в линейном пространстве R^n определена *скалярная* функция от *вектора* $F(x): R^n \to R$.

Определение 5.2 (О5.2). Функция $F_1(x)$, областью определения которой является линейное пространство R^n, а областью значений – совокупность действительных чисел R, называется действительной *линейной формой* (линейным функционалом), если выполняется соотношение

$$F_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(x_1) + \alpha_2 F_2(x_2) \tag{5.1}$$

для любых векторов x_1 и x_2 и любых действительных чисел α_1 и α_2.

Пусть $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ – естественный базис в пространстве R^n, $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ – вектор–столбец координат вектора x в этом базисе, тогда любая линейная форма $F_1(x)$ может быть представлена в следующем виде:

$$F_1(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \tag{5.2}$$

где $\alpha_k = F_1(e_k), k = \overline{1,n}$. Наоборот, при любых действительных числах $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ выражение (5.2) определяет некоторую линейную форму в R^n.

Определение 5.3 (О5.3). Множество всех векторов $x \in R^n$, для которых $F_1(x) = 0$, называется *ядром* линейной формы (функционала) и обозначается $N(F_1)$:

$$N(F_1) = \{x \in R^n : F_1(x) = 0\} \tag{5.3}$$

Линейную форму (5.2) можно записать в E^n как скалярное произведение

$$F_1(x) = (x, \alpha) = (\alpha, x), \tag{5.4}$$

где $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]^T$.

Определение 5.4 (О5.4). Пусть L – некоторое подпространство пространства R^n. Выберем в R^n произвольный вектор u, тогда множество векторов $z=u+v$, где $v \in L$ называют *плоскостью* в пространстве R^n. Вектор u называется вектором сдвига, а подпространство L – *направляющим подпространством* этой плоскости.

Определение 5.5 (О.5). *Гиперплоскостью H* в пространстве R^n называется плоскость размерностью *n–1*. Если $L^{\perp}$ – ортогональное дополнение направляющего подпространства *L* гиперплоскости *H* и *N* – любой его базисный вектор, то уравнение гиперплоскости можно записать в следующем виде:

$$(x, N) = (N, x) = b, \tag{5.5}$$

где вектор $N \in L^{\perp}$ есть нормаль к гиперплоскости *H*, *b* – действительное число.

Определение 5.6 (О5.6). *Квадратичной формой* от *n* действительных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется функция вида

$$F_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{5.6}$$

где a_{ij} – действительные числа.

Если составить симметричную матрицу А из коэффициентов a_{ij}, называемую матрицей квадратичной формы, и рассматривать величины $x_1, x_2, ..., x_n$ как координаты вектора $x \in E^n$ в некотором ортонормированном базисе (например, естественном), то квадратичная форма может быть записана как *скалярное произведение* или квадрат *евклидовой векторной нормы* с весом A:

$$F_2(x) = (Ax, x) = x^T Ax = (\|x\|)_A^2. \tag{5.7}$$

Рангом квадратичной формы $F_2(x)$ называется ранг ее матрицы A. При замене переменных $x = Ty$ форма $F_2(x)$ становиться квадратичной формой $F_2(y)$ новых переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, причем матрица B этой форме связана с матрицей A соотношением

$$B = T^T \mathrm{A} T, \tag{5.8}$$

при этом если матрица T неособенная, то ранг квадратичной формы не меняется.

Любую квадратичную форму $F_2(x)$ ранга r можно неособенным линейным преобразованием привести к *каноническому* виду.

$$F_2(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + ... + \alpha_r y_r^2, \tag{5.9}$$

где $\alpha_k, k = \overline{1, r}$ – все отличные от нуля числа. Канонический вид называется *нормальным* видом, если все коэффициенты α_k в (5.9) равны 1 или –1. Число положительных коэффициентов в выражении (5.9) называется положительным *индексом* инерции, число отрицательных коэффициентов – отрицательным *индексом* инерции, а разность между ними – сигнатурой квадратичной формы.

Симметричная матрица *A* квадратичной формы имеет ортонормированную систему собственных векторов в евклидовом пространстве E^n, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A, которые все являются действительными

числами. Поэтому матрица A квадратичной формы ортогонально подобна матрице с действительными собственными значениями матрицы A:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} = T^T AT, (T^{-1} = T^T), \tag{5.10}$$

где $T = [T_1, T_2, ..., T_n]$ – ортогональная матрица, составленная из столбцов координат ортонормированных собственных векторов матрицы A в том же базисе, в котором задана A.

Определение 5.7 (О5.7). Квадратичная форма $F_2(x) = (Ax, x)$ называется *положительно определенной*, если $(Ax, x) > 0$ при $x \neq 0$, и *неотрицательно определенной* если $(Ax, x) \geq 0$ при любых $x \in E^n$. Аналогично определяются *отрицательно определенная* и *неположительно определенная* квадратичные формы. Если форма $F_2(x)$ принимает разные знаки при некоторых $x \in E^n$, то она называется *неопределенной*. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны (критерий Сильвестра).

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ – собственные значения положительно определенной матрицы А, тогда для всех векторов $x \in E^n$ справедливы неравенства

$$\lambda_n \leq \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_1. \tag{5.11}$$

Определение 5.8 (О5.8). Если все собственные значения матрицы квадратичной формы имеют одинаковый знак, то форма называется *эллиптической*, а уравнение $x^T Ax = c$, где $c - const$, определяет в пространстве E^n гиперэллипсоид постоянного значения (уровня) c.

Рассмотрим основные правила дифференцирования функций от векторов и матриц по *скалярным, векторным и матричным переменным.*

1. Пусть $A = A(q)$ – матрица, элементы которой суть функции $A_{ij} = A_{ij}(q)$ скалярной переменной q.Тогда производной $A_q = \dfrac{\partial A(q)}{\partial q}$ от матрицы $A(q)$ по q является матрица, составленная из производных $A_{ij_q} = \dfrac{\partial A_{ij}(q)}{\partial q}$ ее элементов по переменной q, что может быть записано в форме

$$A_q = row\{col(A_{ij}; i = \overline{1,m}); j = \overline{1,n}\}.$$

Для производной от суммы и произведения матриц, зависящих от скалярной переменной q по этой переменной справедливы представления

$$C_q = \frac{\partial}{\partial q}\{C(q) = A(q) + B(q)\} = A_q + B_q;$$

$$D_q = \frac{\partial}{\partial q}\{D(q) = A(q) \cdot B(q)\} = A_q \cdot B(q) + A(q) \cdot B_q.$$

Для степенной матричной функции $f(A(q)) = (A(q))^p$ от квадратной $(n \times n)$ – матрицы $A(q)$, где p – целое положительное число, производная по скалярной переменной q вычисляется в силу соотношения

$$\frac{\partial}{\partial q}\left\{(A(q))^p\right\} = A_q(A(q))^{p-1} + (A(q))A_q(A(q))^{p-2} + \ldots + (A(q))^{p-1}A_q.$$

Для вычисления производной от обратной матрицы $(A(q))^{-1}$ сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 5.1 (У5.1). Производная $\frac{\partial}{\partial q}(A(q))^{-1}$ от обратной матрицы $(A(q))^{-1}$ по скалярной переменной q вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial q}(A(q))^{-1} = -(A(q))^{-1} A_q (A(q))^{-1}. \qquad \square$$

(5.12)

Доказательство утверждения строится на дифференцировании по скалярному параметру q матричного уравнения $(A(q))^{-1} \cdot (A(q)) = I$, где I – единичная матрица, в результате которого получим

$$\frac{\partial}{\partial q}\left\{(A(q))^{-1} \cdot (A(q)) = I\right\} = \frac{\partial}{\partial q}(A(q))^{-1} \cdot A(q) + (A(q))^{-1} \cdot A_q = 0.$$

Разрешение полученного матричного уравнения относительно производной $\frac{\partial}{\partial q}(A(q))^{-1}$ приводит к (5.12). ■

2. Пусть $J = J(x)$ – *скалярная функция* векторного аргумента $x = [x_1, ..., x_n]^T$. Тогда, обозначив символом ∇ оператор градиента, для *производной* $\frac{\partial J}{\partial x}$ *от этой функции по векторному аргументу* и градиента можно записать следующие представления:

$$\nabla_x J = \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial J}{\partial x_n}\right]^T \text{ – вектор–столбец;}$$

$$(\nabla_x J)^T = \frac{\partial J}{\partial x} = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial J}{\partial x_n}\right] \text{ – вектор–строка;}$$

$$\nabla_{xx} J = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial J}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n \partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} - (n \times n) - \text{матрица.}$$

3. Пусть $y = [y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)]^T$ – m – мерный вектор–столбец скалярных функций от n – мерного *вектора* x (*векторная функция от векторного аргумента*), тогда

$$\nabla_x y = [\nabla_x y_1, \nabla_x y_2, ..., \nabla_x y_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad (5.13)$$

– матрица размерами $(n \times m)$. Аналогично определяется производная

$$(\nabla_x y)^T = [\nabla_x y_1, \nabla_x y_2, ..., \nabla_x y_m]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad (5.14)$$

4. Пусть $z = z(x)$ и $y = y(x)$ – векторы–столбцы размерности m, и x – вектор–столбец размерности n. Тогда производная по x от скалярного произведения векторов z и y (градиент скалярного произведения) определяется следующим образом:

$$\nabla_x (y, z) = (\nabla_x y)^T z + (\nabla_x z)^T y. \qquad (5.15)$$

Примеры и задачи

5.1.* Записать квадратичную форму $F_2(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1 x_2$ с симметричной матрицей этой формы.

5.2.* Привести матрицу $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$ квадратичной формы ортогональным преобразованием к каноническому виду.

$$TT^T = I. \qquad (5.16)$$

5.3.* Найти значение x, при котором положительно определенная форма $F_2(x) = (R_x, x) + 2(x, Sb) + C$, где $R > 0, C = const$ принимает минимальное значение. Вычислить это значение.

5.4.* Вычислить производные от следующих скалярных функций от вектора x:

а) $J = \lambda^T Ax$; б) $J = x^T x$; в) $J = x^T Ax$.

5.5.* Пусть X – квадратная матрица размером $(n \times n)$ и $J(X) = trX$ – след этой матрицы, равный сумме ее диагональных элементов. Показать, что

а) $\nabla_x trX = \dfrac{\partial trX}{\partial X} = I$; б) $\dfrac{\partial tr(\mathrm{A}X)}{\partial X} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$. (5.17)

5.6. Определить дефект линейной формы $F_1(x)$ на пространстве R^n.

5.7. Показать, что любой вектор z пространства R^n может быть представлен единственным образом в виде $z = \alpha x + y$, где $y \in N(F_1)$, x – фиксированный вектор R^n, α – действительное число.

5.8. Определить расстояние $\mu(x, H)$ от произвольного вектора $z \in E^n$ до гиперплоскости $(n, x) = b$.

5.9. Для каждой из квадратичных форм найти ортогональное преобразование T неизвестных, приводящее эту форму к каноническому виду, и записать полученный канонический вид:

а) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

б) $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;

в) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

5.10. Выяснить, являются ли положительно определенными следующие квадратичные формы:

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;

б) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

в) $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

5.11. Доказать, что положительно определенная матрица является неособенной.

5.12. Доказать, что если A – положительно определенная симметричная матрица, то A^{-1} – также положительно определенная матрица.

5.13. Доказать, что если $det(A) \neq 0$, то $A^T A$ и AA^T – положительно определенные матрицы; если $det(A) = 0$, $A^T A$ и AA^T – неотрицательно определенные матрицы.

5.14. Привести матрицу $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ квадратичной формы к каноническому виду и записать полученный канонический вид.

5.15. Доказать справедливость для любой симметричной матрицы A спектрального разложения:

$A=\lambda_1\xi_1\xi_1^T+\lambda_2\xi_2\xi_2^T+...+\lambda_n\xi_n\xi_n^T$, где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n-$ собственные значения матрицы $A:\xi_1,\xi_2,...,\xi_n-$ ортонормированная система собственных векторов этой матрицы.

5.16. Доказать, что $x^T\mathrm{A}x=tr(\mathrm{A}xx^T)$, где tr обозначает след матрицы.

5.17. Вычислить производные от следующих функций:

а) $J(x)=(y-Ax)^TQ(y-Ax)$, где $Q^T=Q>0$;

б) $J(X)=tr(AX^T)$;

в) $J(X)=tr(X^TAX)$;

г) $J(X)=tr(X^{-1})$;

д) $J(X)=det(X)$

5.18. Определить минимальное значение квадратичной формы

$F_2(x)=(Rx,x)+2(x,Su)+(u,Tu)$, где $R>0$; S,T – матрицы, $u-$ не зависящий от x вектор.

Решение вариантов задач

<u>Решение задачи 5.1.</u> Матрица A исходной формы: $A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 5\end{bmatrix}$. Любая действительная матрица может быть представлена в виде: $A=A^c+A^k$, где $A^c=\frac{1}{2}(A+A^T)$ – симметричная матрица, $A^k=\frac{1}{2}(A-A^T)$ – кососимметричная матрица. Поскольку для любого вектора x $A^kx\perp x$, то $x^TA^kx=0$, поэтому имеем $F_2(x)=x^TA^cx$, где A^c в данном случае равна $A^c=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$.

<u>Решение задачи 5.2.</u> Вычисление корней характеристического уравнения $\det[A-\lambda I]=0$ дает следующие собственные значения матрицы A квадратичной формы: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. Решив систему уравнений $(\mathrm{A}-I)\xi=0$, получим два ортонормированных собственных вектора, соответствующих собственному значению $\lambda=1$:

$\xi_1 = \left[\sqrt{2/2} \vdots 0 \vdots \sqrt{2/2}\right]^T$, $\xi_2 = [0 \vdots 1 \vdots 0]^T$. Решив систему уравнений $(A - 2I)\xi = 0$, получим третий вектор ортонормированной системы, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$: $\xi_3 = \left[\sqrt{2/2} \vdots 0 \vdots -\sqrt{2/2}\right]^T$. В итоге матрица ортогонального преобразования равна $T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} \sqrt{2/2} \vdots & 0 \vdots & \sqrt{2/2} \\ 0 \vdots & 1 \vdots & 0 \\ \sqrt{2/2} \vdots & 0 \vdots & -\sqrt{2/2} \end{bmatrix}$.

Матрица канонического вида формы равна $\Lambda = diag\{1,1,2\}$ так что $\Lambda = T^T AT$, при этом $T^T T = I$.

<u>Решение задачи 5.3.</u> Рассмотрим решение данной задачи методом, не связанным с вычислением производных. Дополним форму $F_2(x)$ до полного квадрата:

$$x^T Rx + 2x^T Sb + c = x^T Rx + 2x^T RR^{-1}Sb + b^T S^T R^{-1}Sb + c - \\ - b^T S^T R^{-1}Sb = (x + R^{-1}Sb)^T R(x + R^{-1}Sb) + c - b^T S^T R^{-1}Sb \quad (5.18)$$

Из выражения (5.18) и положительной определенности матрицы R следует, что данная квадратичная форма принимает минимальное значение при $x + R^{-1}Sb = 0$, откуда получим $x_{\min} = -R^{-1}Sb$ и $F_{2\min} = c - b^T S^T R^{-1}Sb$.

<u>Решение задачи 5.4.</u>

а) Положим $A^T \lambda = C$, тогда исходную функцию можно записать в виде $J = C^T x$. Согласно выражению (5.13) имеем

$$\nabla_x J = \nabla_x (C^T x) = \nabla_x (C_1 x_1 + ... + C_n x_n) = C,$$

откуда получаем

$$\nabla_x J = A^T \lambda \quad (5.19)$$

б) Поскольку $x^T x = (x, x)$ то

$\nabla_x (x, x) = (\nabla_x x^T)x + (\nabla_x x^T)x = 2(\nabla_x x^T)x$. Но $\nabla_x x^T = I$, поэтому окончательно получим

$$\nabla_x J = 2x \quad (5.20)$$

в)Положим $y = Ax$, тогда можем записать $J = x^T Ax = (Ax, x) = (y, x)$. Согласно выражению (5.15)

$$\nabla_x J = \nabla_x (y^T x) = (\nabla_x y^T)x + (\nabla_x x^T)y.$$

Но $\nabla_x y^T = \nabla_x (Ax)^T = [\nabla_x y_1, ..., \nabla_x y_n] = A^{\mathrm{T}}$ по формуле (5.13), а $\nabla_x x^T = I$, поэтому в итоге получим $\nabla_x J = A^T x + Ax$. Если матрица A симметричная, то будем иметь

$$\nabla_x J = 2Ax. \qquad (5.21)$$

<u>Решение задачи 5.5.</u>

а) Поскольку, $trX = x_{11} + ... + x_{nn}$, то из формулы (5.13) имеем

$$\nabla_x trX = \nabla_x x_{11} + ... + \nabla_x x_{nn} = I .$$

б) Поскольку $tr(AX) = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + ... + a_{nn}x_{nn}$, то

$$\nabla_x tr(AX) = a_{11}\nabla_x x_{11} + ... + a_{nn}\nabla_x x_{nn} . \qquad (5.22)$$

Но $\nabla_x x_{ij}$ есть матрица размером $(n \times n)$, имеющая единственный отличный от нуля и равный единице элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце. Сложив все слагаемые правой части выражения (5.22), получим требуемый результат.

6. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ. МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Рассматривается $(n \times n)$ – квадратная матрица A, на которой конструируются функции от матрицы $f(A)$ трех типов: *скалярная* функция от матрицы, *векторная* функция от матрицы и *матричная* функция от матрицы.

Определение 6.1 (О6.1). *Скалярной функцией* (СФМ) от квадратной матрицы A называется функция $f(A)$, которая реализует отображение $f(A): R^{n\times n} \Rightarrow R$, где R – множество действительных чисел.

Примерами скалярных функций от матрицы являются: $f(A) = \det(A)$, $f(A) = tr(A)$, $f(A) = C\{A\}$, $f(A) = \|A\|$ – детерминант, след, норма и число обусловленности матрицы соответственно, СФМ является квадратичная форма $f(A) = x^T Ax$.

Определение 6.2 (О6.2). *Векторной функцией* от квадратной матрицы A называется функция $f(A)$, которая реализует отображение $f(A): R^{n\times n} \Rightarrow R^n$, где R^n – n–мерное действительное пространство.

Примерами векторных функций от матрицы (ВФМ) являются такие, как $f(A) = col\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$, $f(A) = col\{\alpha_i; i = \overline{1,n}\}$ – векторы, построенные на элементах алгебраических спектров соответственно собственных значений $\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$ и сингулярных чисел $\{\alpha_i; i = \overline{1,n}\}$ матрицы A.

6.1. Матричные ряды и матричные функции от матриц

Матричная функция от матрицы (МФМ) реализует отображение $f(A)$: $R^{n\times n} \Rightarrow R^{n\times n}$. *Исходное определение* матричной функции от матрицы задается следующим образом.

Определение 6.3 (О6.3). Пусть $f(\alpha)$ – скалярный степенной ряд (многочлен) относительно скалярной переменной α.

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_p\alpha^p. \tag{6.1}$$

Тогда скалярный ряд $f(\alpha)$ порождает матричную функцию $f(A)$ от матрицы A в виде матричного ряда, если в представлении (6.1) для $f(\alpha)$ скалярную переменную α заменить на матрицу A так, что $f(A)$ запишется в форме

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_p A^p \tag{6.2}$$

Поставим задачу построения перехода от исходного представления МФМ $f(A)$ в форме (6.2) к ее *минимальному представлению*, то есть к представлению матричным многочленом минимальной степени. Начнем решение этой задачи с *теоремы Гамильтона–Кэли(ТГК)*.

Утверждение 6.1 (У6.1) (Теорема Гамильтона–Кэли).

Квадратная $(n \times n)$- матрица A с характеристическим полиномом

$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$, обнуляет свой характеристический полином так, что выполняется матричное соотношение

$$D(A) = A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + ... + a_{n-1}A + a_nI = 0, \qquad (6.3)$$

где 0 – $(n \times n)$ нулевая матрица. □

Доказательство справедливости сформулированного утверждения осуществим для случая матрицы A простой структуры, характеризующейся алгебраическим спектром $\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; \mathrm{Jm}\,\lambda_i = 0; i = \overline{1,n}\}$ вещественных и некратных собственных значений так, что на нем может быть сконструирована диагональная матрица $\Lambda = diag\{\lambda_i\,; i = \overline{1,n}\}$. Если теперь воспользоваться матричным соотношением подобия (2.30), то матрицу A можно представить в форме $A = M\Lambda M^{-1}$, что в свою очередь для (6.3) позволяет записать

$$D(A) = M\left\{\Lambda^n + a_1\Lambda^{n-1} + a_2\Lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\Lambda + a_nI\right\}M^{-1} =$$

$$= M\,diag\left\{\lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + a_2\lambda_i^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda_i + a_nI; i = \overline{1,n}\right\}M^{-1} = 0. \qquad ■$$

Теорема Гамильтона-Кэли позволяет ввести следующие определения.

Определение 6.4 (О6.4). Многочлен (степенной ряд) $\varphi(\alpha)$ относительно скалярной переменной α называется *аннулирующим многочленом* квадратной матрицы A, если выполняется условие

$$\varphi(A) = 0 \qquad (6.4)$$

Очевидно, *аннулирующим многочленом* матрицы A в силу теоремы Гамильтона-Кэли является в первую очередь ее *характеристический полином.* Ясно, что существует множество аннулирующих многочленов матрицы A степени большей, чем n. Но могут существовать аннулирующие многочлены степени $m < n$.

Определение 6.5 (О6.5). Аннулирующий многочлен $\psi(\alpha)$ наименьшей степени m со старшим коэффициентом при α^m, равным единице, называется *минимальным многочленом* матрицы A.

Построим разложение многочлена $f(\alpha)$ (6.1), задающего матричную функцию $f(A)$ от матрицы в форме (6.2), по модулю минимального многочлена $\psi(\alpha)$ матрицы A, представив его выражением

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha)\psi(\alpha) + r(\alpha), \qquad (6.5)$$

где многочлен $r(\alpha)$ имеет степень $\deg(r(\alpha))$ меньше степени $\deg(\psi(\alpha)) = m$ минимального многочлена $\psi(\alpha)$ матрицы A.

Выражение (6.5) позволяет дать следующее определение матричной функции от матрицы.

Определение 6.6 (О6.6). Пусть многочлен $f(\alpha)$ относительно скалярной переменной α допускает представление в форме (6.5), тогда матричная функция $f(A)$ может быть задана в *минимальной* форме

$$f(A) = r(A). \tag{6.6}$$

Заметим, что основной проблемой при задании матричной функции от матрицы в форме (6.6) является вычисление многочлена $r(\alpha)$.

Основной способ вычисления многочлена $r(\alpha)$ в силу (6.5) опирается на то, что $r(\alpha)$ является остатком от деления $f(\alpha)$ на минимальный многочлен

$$r(\alpha) = rest\frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)}. \tag{6.7}$$

Если $f(\alpha)$ *не является рядом или многочленом вида* (6.1), а является произвольной аналитической функцией со значениями на алгебраическом спектре собственных значений матрицы A, то формирование матричной функции $f(A)$ от матрицы A, опирается на представление $f(\alpha)$ в соответствии с интерполяционной схемой Лагранжа в виде мультипликативной структуры из двучленов $(\alpha - \lambda_i)$ или в соответствии с интерполяционной схемой Ньютона в виде ряда по степеням двучленов $(\alpha - \lambda_i)$, число членов которых определяется минимальным многочленом $\psi(\lambda)$. Для реализации интерполяционной схемы Лагранжа, которая в случае размещения интерполяционных узлов на собственных значениях λ_i матрицы A, приобретает название интерполяционной схемы Лагранжа–Сильвестра, требуется знание значений $f(\lambda_i)$. Для реализации интерполяционной схемы Ньютона требуется знание значений $f(\lambda_i), f'(\lambda_i) ... f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$.

Если минимальный многочлен $\psi(\alpha)$ степени m в силу его определения записать в форме

$$\Psi(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)^{m_1}(\alpha - \lambda_2)^{m_2} ... (\alpha - \lambda_r)^{m_r}, \tag{6.8}$$

где $m_1 + m_2 + ... + m_r = m$, $\{\lambda_i; i = \overline{1,r}\} \in \sigma\{A\}$,

то можно построить представление для функции $f(\alpha)$ в форме

$$f(\alpha) = r(\alpha), \tag{6.9}$$

где $r(\alpha)$ – *интерполяционный многочлен* Лагранжа–Сильвестра или Ньютона, сформированный на алгебраическом спектре $\sigma\{A\}$ собственных значений $\{\lambda_i; i = \overline{1,r}\}$ матрицы A, характеризующийся степенью меньшей степени m минимального многочлен $\psi(\alpha)$, а потому удовлетворяющий условиям (6.5), (6.7).

Рассмотрим случай, когда нули минимального многочлена (6.8) являются простыми, т.е. при $m_1 = m_2 = ... = m_r = 1$, минимальный многочлен и характеристический совпадают так, что выполняются равенства $\psi(\alpha) = D(\alpha)$ и $r = n$, тогда представление $f(\alpha) = r(\alpha)$ в форме *интерполяционного многочлена* Лагранжа–Сильвестра принимает вид

$$r(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha - \lambda_1)...(\alpha - \lambda_{i-1})(\alpha - \lambda_{i+1})...(\alpha - \lambda_n)}{(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_n)} f(\lambda_i). \qquad (6.10)$$

Матричная функция от матрицы для случая некратных собственных значений матрицы A принимает с использованием (6.10) вид

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I)...(A - \lambda_n I)}{(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_n)} f(\lambda_i). \qquad (6.11)$$

Теперь допустим, что характеристический многочлен $D(\alpha)$ имеет кратные корни, но *минимальный* многочлен $\psi(\alpha)$, являясь делителем $D(\alpha)$, имеет только простые корни

$$\psi(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)(\alpha - \lambda_2)...(\alpha - \lambda_m).$$

В этом случае интерполяционный многочлен $r(\alpha)$ совпадает с точностью до замены числа членов n на m с представлением (6.10). Как следствие матричная функция $f(A)$ от матрицы A принимает вид

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I)...(A - \lambda_m I)}{(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_m)} f(\lambda_i). \qquad (6.12)$$

В заключение рассмотрим общий случай, когда минимальный многочлен матрицы A имеет вид (6.8). Для случая кратных нулей минимального многочлена, то есть когда он имеет вид (6.8), представление $r(\alpha)$ в форме *интерполяционного многочлена* Лагранжа–Сильвестра, содержащего элементы интерполяционной схемы Ньютона, принимает вид

$$r(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{\partial^{(j-1)}}{\partial \alpha^{(j-1)}} \frac{f(\alpha)}{\psi_i(\alpha)} \right] \Big|_{\alpha=\lambda_i} \frac{\psi(\alpha)}{(\alpha - \lambda_i)^{m_i}}, \qquad (6.13)$$

где для компактности записи использовано обозначение

$$\psi_i(\lambda_i) = \frac{\psi(\alpha)}{(\alpha - \lambda_i)^{m_i}} \Big|_{\alpha=\lambda_i}.$$

Если ввести обозначение

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{\partial^{(j-1)}}{\partial \alpha^{j-1}} \frac{f(\alpha)}{\psi_k(\alpha)} \right]_{\alpha=\lambda_i}, \qquad (6.14)$$

то выражение (6.13) для $f(\alpha) = r(\alpha)$ принимает вид

$$r(\alpha)=\sum_{i=1}^{r}\left\{\alpha_{i,1}+\alpha_{i,2}(\alpha-\lambda_i)+...+\alpha_{i,m_i}(\alpha-\lambda_i)^{m_i-1}\right\}\psi_i(\alpha). \qquad (6.15)$$

Если воспользоваться представлением (6.15), то для МФМ можно записать

$$f(A)=r(A)=\sum_{i=1}^{r}\left\{\alpha_{i,1}I+\alpha_{i,2}(A-\lambda_i I)+...+\alpha_{i,m_i}(A-\lambda_i I)^{m_i-1}\right\}\psi_i(A). \qquad (6.16)$$

Если матрица A представляет собой $(n\times n)-$жорданову клетку, порождаемую собственным значением λ_0 кратности n, так что матрица A принимает вид

$$A=J=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & ... & 0\\ . & . & . & ... & .\\ . & . & . & ... & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_0\end{bmatrix}, \qquad (6.17)$$

то интерполяционный многочлен $r(\alpha)$, так как минимальный многочлен матрицы A (6.17) имеет вид $\psi(\alpha)=(\alpha-\lambda_0)^n$, для функции $f(\alpha)$ полностью строится по интерполяционной схеме Ньютона и определяется выражением

$$r(\alpha)=f(\lambda_0)+\frac{f'(\lambda_0)}{1!}(\alpha-\lambda_0)+...+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}(\alpha-\lambda_0)^{n-1}. \qquad (6.18)$$

В силу (6.18), (6.5), (6.7) матричная функция $f(A)$ от матрицы $A=J$ принимает вид

$$r(J)=f(\lambda_0)I+\frac{f'(\lambda_0)}{1!}(J-\lambda_0 I)+...+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}(J-\lambda_0 I)^{n-1}=$$

$$=\begin{bmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \frac{f''(\lambda_0)}{2!} & ... & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}\\ 0 & f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & ... & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!}\\ . & . & . & ... & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{f'(\lambda_0)}{1!}\\ 0 & 0 & 0 & ... & f(\lambda_0)\end{bmatrix} \qquad (6.19)$$

Рассмотрим теперь случай, когда матрица A имеет вид $A=diag\left\{J_i;\sum_{i=1}^{r}m_i=n\right\}$, где $J_i-(m_i\times m_i)$ – жорданова клетка, порождаемая собственным значением λ_i кратности m_i, так что матрица A принимает вид

$$A = diag\left\{ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\}, \qquad (6.20)$$

тогда в силу (6.18) и (6.19) матричная функция $f(A)$ от матрицы A (6.20) принимает вид

$$f(A) = diag\left\{ f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_i)}{(n-2)!} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\}. \qquad (6.21)$$

Из определения матричной функции от матрицы во всех формах следуют ее основные свойства:

Свойство 6.1 (СВ6.1). Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет геометрический спектр $\{\xi_i; i = \overline{1,n}\}$ собственных векторов ξ_i матрицы A: $A\xi_i = \lambda_i \xi_i$, так что выполняется соотношение

$$f(A)\xi_i = f(\lambda_i)\xi_i, \qquad (6.22)$$

где $f(\lambda_i) = \lambda_{fi}$ – собственные значения матрицы $f(A)$, удовлетворяющие ее характеристическому уравнению $\det\{\lambda_f I - f(A)\} = 0$ и вычисляемые как функция $f(\lambda)$ на спектре $\sigma\{A\} = \{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$ собственных значений матрицы $f(A)$.

Свойство 6.2 (СВ6.2). Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет матричное отношение подобие в том смысле, что если матрицы A и B подобны, т.е. $B = T^{-1}AT$, то

$$f(B) = T^{-1} f(\mathrm{A}) T. \qquad (6.23)$$

Свойство 6.3 (СВ6.3). Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет блочно-диагональную форму матрицы A в том смысле, что, если $A = diag\{A_1\ A_2 \dots A_\mu\}$, то

$$f(A) = diag\{f(A_1)\ f(A_2) \dots f(A_\mu)\}. \qquad (6.24)$$

6.2. Матричная экспонента, способы ее вычисления. Алгоритм Д. Фаддеева разложения резолвенты в задаче вычисления матричной экспоненты

Теперь распространим полученные выше результаты на задачи формирования способов аналитического представления и вычисления *матричной экспоненты* e^{At}, параметризованной непрерывным временем t, исходное задание которой в форме (6.1) порождено скалярной экспонентой $e^{\alpha t}$ или $\exp(\alpha t)$, записанной в форме бесконечного скалярного ряда

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \ldots + \frac{(\alpha t)^p}{p!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \quad ,$$

и принимает вид

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots + \frac{(At)^p}{p!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \tag{6.25}$$

Следует заметить, что аналогичным образом может быть задана любая матричная функция от матрицы, для скалярного прототипа которой известен ряд ее представляющий.

В связи со сказанным и проведенными выше исследованиями, а также упомянутыми свойствами матричных функций от матриц, перечислим основные способы вычисления и построения аналитических представлений матричной экспоненты.

1. *Численный способ*, основанный на переходе от непрерывного времени t к дискретному k, выраженному в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что $t = (\Delta t)k$, в результате чего матричная экспонента e^{At} получает представление

$$e^{At} = e^{A\Delta tk} = (e^{A\Delta t})^k = \left(\overline{A}\right)^k, \tag{6.26}$$

где матрица $\overline{A} = e^{A\Delta t}$ при правильном выборе интервала дискретности Δt задается конечным числом $(p+1)$ членов степенного матричного представления

$$\overline{A} = e^{A\Delta t} = I + A\Delta t + \frac{1}{2!}(A\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(A\Delta t)^3 + \ldots + \frac{1}{p!}(A\Delta t)^p. \tag{6.27}$$

При чем, если $p \geq n$, то с помощью (6.7) ряд (6.27) может быть приведен к *минимальной форме* т.е. матричному ряду степени $m-1$, а в случае $\psi(\alpha) = D(\alpha)$ к матричному ряду степени $n-1$. Для вычисления интервала дискретности Δt можно воспользоваться соотношением

$$\Delta t = 0.05n\left(\left|tr(A)\right|\right)^{-1}. \tag{6.28}$$

2. *Способ диагонализации* матрицы A, именуемый иначе способом собственных значений. Способ применим к матрицам A

простой структуры так, что ее спектр собственных значений имеет вид $\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; Jm\lambda_i = 0; i = \overline{1,n}\}$, а потому оказывается справедливым матричное соотношение приведения подобия $M\Lambda = AM$, где $\Lambda = diag\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$.

Тогда матричная экспонента принимает вид

$$e^{At} = M\, e^{\Lambda t} M^{-1} = M\, diag\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1,n}\} M^{-1}, \tag{6.29}$$

где

$$M = row\{M_i = \xi_i = arg(A\xi_i = \lambda_i \xi_i); i = \overline{1,n}\}, \tag{6.30}$$

то есть M – матрица собственных векторов матрицы A.

3. *Способ, основанный на приведении к нормальной форме Жордана* матрицы A. Способ применим к матрицам A, спектр собственных значений которых $\sigma\{A\} = \left\{\lambda_i; i = \overline{1,r}; \sum_{i=1}^{r} m_i = n\right\}$ содержит r кратных собственных значений λ_i кратности m_i каждый. Для этого случая оказывается справедливым матричное соотношение приведения подобия $TJ = AT$, где

$$T = row\{T_i = \left[T_{i1} = \xi_i; T_{i2} = (A - \lambda_i I)^{+} T_{i1} ... T_{im_i} = (A - \lambda_i I)^{+} T_{im_i - 1}\right]; i = \overline{1,r}\},$$

здесь ξ_i – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i: $\xi_i = arg\{A\xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1,r}\}$; $(*)^{+}$ – операция псевдообращения матрицы (*).

$$J = diag\left\{ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\}.$$

В результате для матричной экспоненты e^{At} можно записать $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$, где матричная экспонента e^{Jt} имеет вид

$$e^{Jt} = diag\left\{ e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_i t}}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1} e^{\lambda_i t}}{(m_i - 1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \dots & \frac{t^{n-2} e^{\lambda_i t}}{(m_i - 2)!} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\}. \tag{6.31}$$

4. *Способ преобразования Лапласа* заключается в вычислении

обратного преобразования Лапласа от резольвенты $(sI-A)^{-1}$ в форме

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} \qquad (6.32)$$

Способ поддерживается алгоритмом Д.Фаддеева разложения резольвенты без ее обращения на основе представления

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\det(sI-A)}\left[\Delta(sI-A)\right]^T=\frac{s^{n-1}H_0+s^{n-2}H_1+...+H_{n-1}}{s^n+a_1s^{n-1}+...+a_{n-1}s+a_n},$$

где $(n\times n)$ – матрицы $H_i\,(i=\overline{0,n-1})$ и коэффициенты характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Д.Фаддеева:

$$\begin{array}{ll} H_0=I, & a_1=-tr(AH_0) \\ H_1=AH_0+a_1I, & a_2=-tr(AH_1)/2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ H_k=AH_{k-1}+a_kI, & a_{k+1}=-tr(AH_k)/k \end{array}. \qquad (6.33)$$

С использованием матриц $H_k\,(k=\overline{0,n-1})$ для резольвенты $(sI-A)^{-1}$можно записать в форме

$$(sI-A)^{-1}=\frac{s^{n-1}}{D(s)}H_0+\frac{s^{n-2}}{D(s)}H_1+...+\frac{s}{D(s)}H_{n-2}+\frac{1}{D(s)}H_{n-1}. \qquad (6.34)$$

Матричная экспонента (6.32) с использованием (6.34) получает представление

$$e^{At}=L^{-1}\left\{\frac{s^{n-1}}{D(s)}\right\}H_0+L^{-1}\left\{\frac{s^{n-2}}{D(s)}\right\}H_1+...+L^{-1}\left\{\frac{1}{D(s)}\right\}H_{n-1}. \qquad (6.35)$$

Запишем характеристический многочлен $D(s)$ в форме

$$D(s)=(s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_1)^{m_2}...(s-\lambda_1)^{m_r},$$

тогда становится справедливым представление

$$\frac{s^k}{D(s)}=\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{\beta_{k1}}{s-\lambda_i}+\frac{\beta_{k2}}{(s-\lambda_i)^2}+...+\frac{\beta_{km_i}}{(s-\lambda_i)^{m_i}}\right\};k=\overline{0,n-1}. \qquad (6.36)$$

Тогда

$$L^{-1}\left\{\frac{s^k}{D(s)}\right\}=\sum_{i=1}^{r}\left\{\beta_{k1}+\beta_{k2}t+\frac{\beta_{k3}}{2!}t^2+...+\frac{\beta_{km_i}}{(m_i-1)!}t^{m_i-1}\right\}e^{\lambda_i t};k=\overline{0,n-1}. \qquad (6.37)$$

Подставляя (6.37) в (6.35) окончательно получим

$$e^{At}=\sum_{k=n-1}^{0}H_{n-1-k}\left\{\sum_{i=1}^{r}\left\{\beta_{k1}+\beta_{k2}t+...+\frac{\beta_{km_i}}{(m_i-1)!}t^{m_i-1}\right\}e^{\lambda_i t};k=\overline{0,n-1.}\right\}$$

5. *Способ Лагранжа–Сильвестра.* Интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра в зависимости от свойств минимального многочлена $\psi(\alpha)$ определяется выражениями (6.11),(6.12),(6.16) которые после замены функции $f(\lambda_i)$ на $e^{\lambda_i t}$, A на At, λ_i на $\lambda_i t$ дают представлдение матричной экспоненты e^{At}.

Примечание 6.1 (П6.1. Если $(n \times n)$–матрица A является *нильпотентной* индекса ν так, что выполняется условие $A^{\nu} = 0$, то матричная экспонента e^{At}, задаваемая в силу определения бесконечным рядом (6.25), имеет конечное число членов, равное индексу нильпотентности ν. При этом все остальные члены ряда (6.25), содержащие матрицу A в степени ν и выше оказываются равными нулю.

6.3. Обращение матриц с помощью теоремы Гамильтона–Кэли

Теорема Гамильтона–Кэли обнаруживает привлекательные алгоритмические возможности для решения практических задач, связанных с необходимостью обращения матриц. Действительно, запишем матричное соотношение (6.3), представляющее собой аналитическое содержание теоремы Гамильтона – Кэли, в форме

$$a_n I + a_{n-1} A + a_{n-2} A^2 + \ldots + a_1 A^{n-1} + A^n = 0. \qquad (6.38)$$

Умножим выражение (6.38) на матрицу A^{-1} слева, тогда получим

$$a_n A^{-1} + a_{n-1} I + a_{n-2} A + \ldots + a_1 A^{n-2} + A^{n-1} = 0. \qquad (6.39)$$

Разрешим полученное соотношение относительно обратной матрицы A^{-1} в форме

$$A^{-1} = -(a_n)^{-1}\left(a_{n-1} I + a_{n-2} A + \ldots + a_1 A^{n-2} + A^{n-1}\right) = -(a_n)^{-1}\left(A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{n-1-i}\right). \qquad (6.40)$$

В результате чего получим алгоритмическую базу обращения матриц. Обращение матриц с помощью приведенного матричного соотношения обладает тем положительным свойством, что (6.40) нечувствительно к обусловленности обращаемой матрицы. Слабым моментом обращения матриц с помощью выражения (6.40) является необходимость знания коэффициентов характеристического полинома. Поэтому предлагаемая процедура обращения не вызовет заметных сложностей для случая разреженных матриц, и особенно удобно пользоваться ею при обращении матриц заданных в сопровождающей (фробениусовой) форме, потому что коэффициенты характеристического полинома в явном виде присутствуют в ней.

Примеры и задачи

6.1. Дана матрица $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & 7 & -4 \end{bmatrix}$, пользуясь свойствами матричной функции от матрицы найти алгебраические спектры собственных значений и геометрические спектры собственных векторов МФМ $f(A)$, порождаемые следующими скалярными функциями:

а) $f(\alpha)=1+\alpha$; б) $f(\alpha)=-2+\alpha$; в) $f(\alpha)=5+\alpha$; г) $f(\alpha)=\alpha^2$;

д) $f(\alpha)=-10-7\alpha+4\alpha^2+\alpha^3$; е) $f(\alpha)=125+\alpha^3$.

6.2.Найти матричную экспоненту e^{At} способом, основанным на приведении к нормальной форме Жордана для матрицы $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$;

6.3. Найти e^{At} методами собственных значений (диагонализации матрицы A)и с помощью преобразования Лапласа для матриц:

а) $A=\begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

6.4. Найти e^{At} методом собственных значений (диагонализации матрицы A) и с помощью преобразования Лапласа для матриц:

а) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$;

6.5. Вычислить e^{At} любым методом для матриц примера 6.3

6.6. Вычислить e^{At} численным методом для матриц:

а) $A=\begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

в) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

д) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Подготовив схему вычислений в соответствии с соотношениями (6.26), (6.27) и (6.28), положив в разложении матричной экспоненты $e^{A\Delta t}$ (6.28) $p=4$ и построив его минимальное представление с использованием (6.7), полагая $\psi(\alpha)=D(\alpha)$.

6.7.При каких свойствах матриц A и B справедливо $e^{A}\cdot e^{B}=e^{B}\cdot e^{A}$?

6.8. Доказать справедливость следующих равенств:

а) $e^{A(t+\tau)}=e^{At}\cdot e^{A\tau}$

б) $e^{-At}=(e^{At})^{-1}$

в) $\dfrac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$.

г) $e^{(A+B)t}=e^{At}\cdot e^{Bt}$, если $AB=BA$.

д) $\int\limits_0^t e^{At}dt=A^{-1}(e^{At}-I)=(e^{At}-I)A^{-1}$ при $\det(A)\neq 0$.

6.9. Пользуясь соотношением (6.40) обратить матрицу

$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ для следующих вариантов значений ее незаданных элементов:

а) $a_3=10; a_2=7; a_1=-4$; б) $a_3=6; a_2=11; a_1=12$; в) $a_3=-15; a_2=23; a_1=-9$

Решение вариантов задач

<u>Решение задачи 6.2</u>. Характеристический многочлен $D(\alpha)$ матрицы A имеет вид $D(\alpha)=(\alpha+2)^3$ так, что собственное значение $\lambda=-2$ характеризуется кратностью $m=n=3$. В свою очередь характеристическая матрица $A-\lambda I=A+2I$ обладает нуль–пространством $N\{A+2I\}$ размерности $r_N=1$, которому принадлежит один собственный вектор $\xi=(1,-2,\ 4)^T$. В связи со сказанным нормальная форма Жордана матрицы A принимает канонический вид (6.17) и записывается в форме $J=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Матрица T отношения подобия $TJ=AT$, так что $A=TJT^{-1}$, имеет представление

$$T=\left[T_1=\xi;T_2=\left(A+2I\right)^{+}T_1;T_3=\left(A+2I\right)^{+}T_2\right]=\begin{bmatrix}1 & 0.8573 & 0.5442\\ -2 & -0.7142 & -0.2314\\ 4 & -0.5713 & -0.2517\end{bmatrix}.$$

Тогда в силу свойства 6.2, а также представления (6.31) e^{Jt} искомая матричная экспонента e^{At} принимает вид

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}=T\begin{bmatrix}e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{1}{2}t^2e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}T^{-1}=$$

$$=T\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}te^{-2t}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{-2t}\right\}T^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.857 & 0.544\\ -2 & -0.714 & -0.231\\ 4 & -0.571 & -0.252\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}te^{-2t}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{-2t}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}0.048 & -0.095 & 0.190\\ -1.430 & -2.431 & -0.838\\ 4.004 & 4.005 & 1.001\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\-8&-12&-4\end{bmatrix}te^{-2t}+\begin{bmatrix}4&4&1\\-8&-8&-2\\16&16&4\end{bmatrix}\frac{1}{2}t^2e^{-2t}\right\}.$$

Поставленная задача решена. ■

7. МАТРИЦЫ ОСОБОЙ КОНСТРУКЦИИ

7.1.Кронекеровские матричные структуры, область применения и свойства

Приступим к изучению *кронекеровских* (прямых) матричных структур, которые используются при решении матричных уравнений и описании процессов с перемножением переменных. Если компоненты кронекеровских матричных структур квадратные, то квадратной является и сама кронекеровская матричная структура, вычисление собственных значений которой осуществляется на основе свойств матричной функции от матрицы, но уже по более сложной схеме.

Определение 7.1(О7.1). *Кронекеровским произведением* двух векторов x и y, $x \in R^n$, $y \in R^m$, называется вектор $x \otimes y$, составленный из сепаратных произведений $\{x_i y_j; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\}$ их элементов так, что становится справедливым представление

$$x \otimes y = col\{x_i y_j; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\},\ x \otimes y \in R^{nm}. \qquad (7.1)$$

Примечание 7.1(П7.1). Очевидно, кроме кронекеровского произведения $x \otimes y$ двух векторов может быть построено также произведение $y \otimes x$ этих же векторов, причем, в общем случае эти произведения оказываются не коммутативными так, что $x \otimes y \neq y \otimes x$, хотя наборы компонентов у них одинаковые.

Определение 7.2(О7.2). Если размерности векторов x и y одинаковы, то на их кронекеровском произведении $x \otimes y$ может быть построено согласованное *сужение* этого произведения $(x \otimes y)_S$, задаваемого представлением:

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})_S = col\{x_i y_i; i = \overline{1,n}\}. \qquad (7.2)$$

Примечание 7.2(П7.2). Согласованное сужение кронекеровского векторного произведения $x \otimes y$ может быть осуществлено с помощью оператора сужения с матрицей S вида

$$S = diag\{[0_{1\times(i-1)} \vdots\ 1\ \vdots\ 0_{1\times(n-i)}]; i = \overline{1,n}\} \qquad (7.3)$$

так, что становится справедливой запись:

$$(x \otimes y)_S = S \cdot (x \otimes y). \qquad (7.4)$$

В качестве свойств кронекеровского произведения векторов рассмотрим правила дифференцирования кронекеровских векторных произведений по скалярному параметру, которым является время.

Свойство 7.1(СВ7.1). Дифференцирование векторной кронекеровской структуры в виде ~~их~~ кронекеровского произведения векторов осуществляется по правилам дифференцирования сложной функции, представленной в мультикативной форме так, что:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Отформатировано

$$\frac{d}{dt}(x(t)\otimes y(t))\overset{\Delta}{=}(x(t)\overset{\bullet}{\otimes} y(t))=\dot{x}(t)\otimes y(t)+x(t)\otimes \dot{y}(t). \qquad (7.5)$$

Определение 7.3 (О7.3). *Кронекеровским произведением* прямоугольных матриц $A\in R^{n\times m}, B\in R^{p\times q}$ называется матрица $(A\otimes B)$ размерности $(np\times mq)$, составленная в силу соотношения

$$A\otimes B=col\{row(A_{i,j}B;\ j=\overline{1,m});i=\overline{1,n}\}. \qquad (7.6)$$

Примечание 7.3 (П7.3). Кронекеровское произведение произвольных прямоугольных матриц не обладает свойством коммутативности так, что

$$A\otimes B\neq B\otimes A \qquad (7.7)$$

Определение 7.4 (О7.4). *Кронекеровской суммой* квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ называется матрица $(A\oplus B)$, размерности $(nm\times nm)$, составленная в силу соотношения

$$A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B, \qquad (7.8)$$

где I_A, I_B - единичные матрицы, согласованные по размерности соответственно с матрицами *A* и *B*.

Примечание 7.4 (П7.4). Для кронекеровской суммы квадратных матриц *A* и *B*, а в общем случае произвольного числа матриц, существует альтернативное название – *преобразование Сильвестра матриц*, что записывается в форме

$$A\oplus B\overset{\Delta}{=}A\otimes I_B+I_A\otimes B\overset{\Delta}{=}Si\{A,B\}. \qquad (7.9)$$

Для случая трех квадратных матриц *A, B, C* кронекеровская сумма или их преобразование Сильвестра будет записано в форме:

$$Si\{A,B,C\}=A\oplus B\oplus C=A\otimes I_B\otimes I_C+I_A\otimes B\otimes I_C+I_A\otimes I_B\otimes C. \qquad (7.10)$$

Отметим, что как и кронекеровское произведение матриц, кронекеровская сумма не коммутативна.

Кронекеровские матричные структуры, введенные выше, обладают следующими свойствами.

Свойство 7.2 (СВ7.2). Алгебраический спектр собственных значений *кронекеровского произведения* $A\otimes B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ как *матричной функции от матриц* обладает тем свойством, что его элементы образованы *попарными произведениями* собственных значений *кронекеровски* перемножаемых матриц:

$$\sigma\{A\otimes B\}=\{\mu_k:\det(\mu I-A\otimes B)=0;\mu_k=\lambda_{Ai}\lambda_{Bj};i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};k=\overline{1,mn}\}. \qquad (7.11)$$

Свойство 7.3 (СВ7.3). Алгебраический спектр собственных значений *кронекеровской суммы* $A\oplus B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ как *матричной функции от матрицы* обладает тем свойством, что его элементы образованы *попарными суммами* собственных значений *кронекеровски* суммируемых матриц:

$$\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_l:\det(\nu I-A\oplus B)=0;\nu_l=\lambda_{Ai}+\lambda_{Bj};i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};l=\overline{1,mn}\}. \qquad (7.12)$$

В (7.11) и (7.12) λ_{Ai} и λ_{Bj} - собственные значения соответственно матриц A и B.

Сделаем следующее примечание к свойствам (СВ7.2) и (СВ7.3).

Примечание 7.5 (П7.5). Алгебраические спектры собственных значений кронекеровских произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$ в силу (7.11) совпадают, аналогичным свойством в силу (7.12) обладают и спектры кронекеровских сумм $A \oplus B$ и $B \oplus A$.

Свойство 7.4 (СВ7.4). Определитель кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n, \tag{7.13}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Свойство 7.5 (СВ7.5). След кронекеровской суммы квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$tr(A \oplus B) = m \cdot trA + n \cdot trB, \tag{7.14}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Свойство 7.6 (СВ7.6). Ранг кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет условию:

$$rang(A \otimes B) = rangA \cdot rangB, \tag{7.15}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Приведем без доказательств полезные свойства кронекеровских произведений —произвольных матриц, в справедливости которых читатель может убедиться самостоятельно.

Свойство 7.7 (СВ7.7).

$$(P \otimes Q)(W \otimes V) = PW \otimes QV. \tag{7.16}$$

Свойство 7.8 (СВ7.8).

$$(P + Q) \otimes R = P \otimes R + Q \otimes R, \tag{7.17}$$

$$P \otimes (Q + R) = P \otimes Q + P \otimes R, \tag{7.18}$$

$$P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q) \otimes R. \tag{7.19}$$

В (7.16) – (7.19) матрицы P, Q, R, W, V не должны противоречить правилам перемножения и сложения матриц.

Свойство 7.9 (СВ7.9).

$$P \otimes Q = (P \otimes I_Q)(I_P \otimes Q), \tag{7.20}$$

$$(P_1 \otimes Q_1)(P_2 \otimes Q_2)\ldots(P_R \otimes Q_K) = (P_1 P_2 \ldots P_K) \otimes (Q_1 Q_2 \ldots Q_K) \tag{7.21}$$

$$(P \otimes Q)^{-1} = P^{-1} \otimes Q^{-1} \tag{7.22}$$

$$I \otimes (P_1 P_2 \ldots P_K) = (I_{P1} \otimes P_1)(I_{P2} \otimes P_2)\ldots(I_{PK} \otimes P_K). \tag{7.23}$$

В выражениях (7.20) – (7.23) $I_{(*)}$ – единичная матрица по размерности согласованная с матрицей (*).

Свойство 7.10 (СВ7.10). Оператор сужения кронекеровского произведения векторов с матрицей сужения S удовлетворяет соотношению

$$S(PX \otimes QZ) = S(P \otimes Q)(X \otimes Z). \tag{7.24}$$

Отформатировано: Уровень 1

Отформатировано: Уровень 1

Отформатировано: Уровень 1

7.2. Псевдообращение и псевдообратные матрицы

Псевдообращение матрицы ~~–~~ это процедура обращения необратимой, то есть *особенной* матрицы в силу того, что она либо является прямоугольной, либо~~или~~ , будучи квадратной, имеет неполный ранг~~, или в силу того, что она прямоугольная~~. Псевдообращение матриц ~~–~~ ~~достаточно~~ относительно недавно разработанная~~молодая~~ процедура аппарата линейной алгебры. Разработка ее связана с такими именами зарубежных математиков как Фредгольм Э.И., Мур Э.Х., Пенроуз Р., Альберт А. и советских математиков как Гантмахер Ф.Р., Беклемишев Д.В. и других.

Отформатировано: Шрифт: курсив

В данном параграфе рассматривается процедура псевдообращения прямоугольных матриц. Для ~~погружение~~ погружения в проблему, вынесенную в заголовок параграфа, рассмотрим линейную алгебраическую систему (ЛАС), описывающую процесс отображения элемента x арифметического линейного пространства X^n в элемент y арифметического линейного пространства Y^m, записываемую в виде векторно–матричного соотношения

$$y = Ax. \tag{7.25}$$

В (7.25) A–$(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$– матрица, при этом $m \neq n$ так, что матрица A - прямоугольная. Ставится задача при известной паре (y, A) найти вектор x при условии, что матрица A – *необратима*, то есть не существует A^{-1}.

Для решения поставленной задачи представим ЛАС (7.25) в развернутой форме

$$y = Ax = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \,.\cancel{,} \tag{7.26}$$

Таким образом, вектор y есть линейная комбинация из векторов–столбцов $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ матрицы A, имеющая в качестве коэффициентов элементы $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ искомого вектора x, при этом задача обращения и состоит в поиске этих компонентов. Нетрудно видеть что, если вектор y принадлежит образу матрицы A $\{y \in \mathrm{Im}(A)\}$, то поставленная задача имеет точное решение, но это частный случай. Рассмотрим общий случай, когда выполняется условие $y \notin \mathrm{Im}(A)$. Для этого модифицируем первичную постановку задачи и сформулируем ее как задачу отыскания такого вектора $\hat{x}$:$\dim(\hat{x}) = \dim(x) = n$, который решает задачу минимизации нормы вектора невязки $\tilde{y}$ представления заданного вектора $y \notin \mathrm{Im}(A)$ в форме (7.26), коэффициентами которого

являются элементы вектора $\hat{x}$, и заданного вектора y, что записывается в виде

$$\hat{x} = \arg\min_{x}\{\|\tilde{y}\| = \|(y - Ax)\|\}. \qquad (7.27)$$

Соотношение (7.27) позволяет сформулировать *содержательное* определение *псевдообратной матрицы*.

Определение 7.5(О7.5). *Псевдообратной* матрицей A^{+} для $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A называется $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$ матрица, связывающая векторы $\hat{x}$ и y векторно–матричным соотношением

$$\hat{x} = A^{+}y. \qquad (7.28)$$

Примечание 7.6(П7.6). Если $m = n$ и $\dim\{\mathrm{Im}(A)\} = n$, то $\|\tilde{y}\| = \|(y - Ax)\| = 0,\ \hat{x} = x,\ A^{+} = A^{-1}$.

Формальное определение псевдообратной матрицы A^{+} таково.

Определение 7.6 (О7.6). *Псевдообратной* матрицей для $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A называется $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрица A^{+}, удовлетворяющая следующей системе условий:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ AA^{+}A = A;\\ &2.\ A^{+}AA^{+} = A^{+};\\ &3.\ \left(AA^{+}\right)^{T} = AA^{+};\\ &4.\ \left(A^{+}A\right)^{T} = A^{+}A; \end{aligned}\right\} \qquad (7.29)$$

Примечание 7.7(П7.7). Нетрудно видеть, что если матрица A обратима и существует A^{-1}, то соотношения (7.29) выполняются, если в них A^{+} заменить на A^{-1}.

Свойства псевдообращения:

1. Псевдообращение псевдообратимо: $\left(A^{+}\right)^{+} = A$;

2.Псевдообращение и транспонирование коммутативно: $\left(A^{T}\right)^{+} = \left(A^{+}\right)^{T}$;

3.Псевдообращение произведения скаляра на матрицу производится по правилу: $(\alpha A)^{+} = \alpha^{-1}A^{+}$;

4. $\left(AA^{+}\right)^{2} = AA^{+},\ \left(A^{+}A\right)^{2} = A^{+}A$;

5. Псевдообращение произведения матриц производится по правилу: $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$,

если у матрицы A являются линейно независимыми столбцы, а у матрицы B являются линейно независимыми строки.

Рассмотрим способы псевдообращения прямоугольной $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A.

Первый способ применим для особого случая, когда $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ и *столбцы* матрицы A являются *линейно независимыми*, т.е. когда столбцовый

Отформатировано: Уровень 1

Отформатировано: Уровень 1

ранг матрицы удовлетворяет условию $\operatorname{rang}(A) = n$. Суть первого способа представим в виде утверждения.

Утверждение 7.1(У7.1). Если прямоугольная $(\mathrm{m} \times \mathrm{n})$ матрица A такова, что $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ и столбцы матрицы A являются линейно независимыми, то псевдообратная матрица A^+ для матрицы A задается формулой

$$A^+ = \left(A^T A\right)^{-1} A^T. \tag{7.30}$$

Доказательство утверждения строится на использовании ЛАС (7.25), которую необходимо умножить слева на матрицу A^T, в результате чего получим соотношение

$$A^T y = A^T A x. \tag{7.31}$$

В силу линейной независимости столбцов матрицы A $(\mathrm{n} \times \mathrm{n})$– квадратная матрица $A^T A$ оказывается обратимой, что позволяет разрешить ЛАС (7.31) относительно искомого вектора x в форме

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y, \tag{7.32}$$

откуда следует справедливость утверждения. ■

Примечание 7.8 (П7.8). Применительная область первого способа псевдообращения в основном касается задач оценки параметров линейных моделей по экспериментальным данным, когда объем экспериментальных данных заметно превосходит число оцениваемых параметров. Проиллюстрируем эту ситуацию примером. В таблице 7.1 приведены экспериментальные данные некоторой зависимости двух переменных η и ρ, априори была высказана гипотеза об их линейной связи в форме

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1 \rho. \tag{7.33}$$

Ставится задача сформировать оценки $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_1$ параметров α_0 и α_1 линейной модели (7.33) по экспериментальным данным.

Таблица 7.1

Отформатировано: Уровень 1

i	1	2	3	4	5	6
η_i	0.8	1.2	2.2	2.4	3.1	3.6
ρ_i	0	1	2	3	4	5

Для ~~построение~~ построения аналитической базы формирования оценок запишем (7.33) в форме

$$1 \cdot \alpha_0 + \rho \cdot \alpha_1 = \eta,$$

допускающей представления

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \eta \Rightarrow H_i \alpha = \eta_i; \left(i = \overline{1,6}\right), \tag{7.34}$$

где $H_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho_i \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$.

Если теперь элементам строк H_i и элементу η_i придать значения из

таблицы 7.1 , то получим ЛАС вида (7.25), записанную в форме

$$\eta = H\alpha. \qquad (7.35)$$

В модели (7.35) $H-$ (6×2)–информационная необратимая матрица, $\eta-(6\times 1)$–вектор измерений. Вектор $\hat{\alpha}$ оценок параметров модели (7.33) ищется по схеме (7.28) с помощью псевдообратной матрицы H^{+}, вычисляемой с помощью (7.30), что можно записать в форме цепочки соотношений

$$\hat{\alpha} = H^{+}\eta = \left(H^{T}H\right)^{-1}H^{T}\eta. \qquad (7.35)$$

В (7.35) $H^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \eta^{T} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 & 2.2 & 2.4 & 3.1 & 3.6 \end{bmatrix}$,

что позволяет вычислить псевдообратную матрицу

$$H^{+} = \begin{bmatrix} 0.5238 & 0.3810 & 0.2381 & 0.0952 & -0.0476 & -0.1905 \\ -0.1429 & -0.0857 & -0.0286 & 0.0286 & 0.0857 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

и вектор оценок в форме

$$(\hat{\alpha})^{T} = \begin{bmatrix} 0.7952 & 0.5686 \end{bmatrix}.$$

В итоге модель (7.33) по результатам обработки экспериментальных данных с помощью процедуры псевдообращения получает представление

$$\eta = 0.7952 + 0.5686\rho. \qquad \blacksquare$$

Второй способ применим также для особого случая, когда $m < n$ и на этот раз *строки* матрицы A являются *линейно независимыми*, т.е. когда строчный ранг матрицы удовлетворяет условию $\mathrm{rang}(A) = m$. Тогда по аналогии с (7.30) для этого случая псевдообратная матрица A^{+} может быть вычислена с помощью формулы

$$A^{+} = A^{T}\left(AA^{T}\right)^{-1}. \qquad \blacksquare (7.36)$$

Третий способ сформирован для любой реализации отношения размерностей $m \neq n$–, т.е. он инвариантен относительно отношения порядка ~~($<$ или $>$)~~. Метод основан на представлении псевдообращаемой $(m\times n)$ матрицы A в виде произведения матриц

$$A = BC, \qquad (7.37)$$

где $B-(m\times k)$–матрица с k–линейно независимыми столбцами, а $C-(k\times n)$–матрица с k–линейно независимыми строками. Тогда псевдообратная матрица A^{+} строится в соответствии с формулой

$$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}. \qquad (7.38)$$

Примечание 7.9(П7.9). Если $(m\times n)$ ~~- матрицы~~ матрица A имеет полный столбцовый ранг так, что $k = m$, то в (7.37) в качестве матрицы B может быть взята $(m\times m)$–единичная матрица. В свою очередь, если $(m\times n)$ ~~- матрицы~~ матрица A имеет полный строчный ранг так, что $k = n$, то в (7.37) в качестве матрицы C может быть взята $(n\times n)$–

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Уровень 1

единичная матрица.

Проиллюстрируем использование формулы (7.38) на примере Ф.Р. Гантмахера для пседообращения прямоугольной матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (7.39)$$

Нетрудно видеть, что матрица (7.39) имеет линейно зависимые строки и столбцы, причем число линейно независимых строк и столбцов $k=2$. Матрица A представима в форме

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=BC.$$

Тогда для матричных компонентов формулы (7.39) получим

$$B^TB=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix};\left(B^TB\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix};CC^T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix};\left(CC^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}.$$

Тогда, следуя формуле (7.36) получим

$$A^+=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 1/3\\ 1/9 & 1/9 & 2/9\\ 2/9 & -1/9 & 1/9\\ 4/9 & 1/9 & 5/9\end{bmatrix}. \qquad \blacksquare(7.40)$$

Четвертый способ, являющийся обобщением третьего способа, основан на разбиении $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A на матричные блоки так, что она получает представление

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & F\end{bmatrix}, \qquad (7.41)$$

в котором матрица B - неособая квадратная, и такая, что $\mathrm{rang}(B)=\mathrm{rang}(A)$ –. Тогда псевдообратная $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрица A^+ может быть вычислена с помощью матричного выражения

$$A^+=\begin{bmatrix}B^T\\ C^T\end{bmatrix}\left(BB^T+CC^T\right)^{-1}B\left(B^TB+D^TD\right)^{-1}\left(B^TD^T\right). \qquad (7.42)$$

—Проиллюстрируем использование формулы (7.42) на примере Ф.Р. Гантмахера для пседообращения прямоугольной матрицы (7.39), которую в соответствии с (7.41) ~~разобъем~~ разобьём на матричные блоки

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix},$$

подстановка которых в ~~подставляя которые в~~ матричную формулу (7.42) даст~~получим~~ псевдообратную матрицу (7.40). ■

Отформатировано: Уровень 1

Отформатировано: Уровень 1

Пятый способ псевдообращения $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A основан на использовании сингулярного разложения этой матрицы с помощью *SVD*–процедуры, позволяющего представить ее в виде

$$A = U\Sigma V^T, \tag{7.43}$$

где U,V – матрицы соответственно левого и правого сингулярных базисов, Σ–матрица сингулярных чисел, которая принимает вид:

при $\mathrm{m} < \mathrm{n}$

$$\Sigma = \left\lfloor \mathrm{diag}\left(\alpha_{\mathrm{i}}; i = \overline{1,m}\right) \middle| 0_{m\times(n-m)} \right\rfloor, \tag{7.44}$$

при $\mathrm{m} > \mathrm{n}$

$$\Sigma = \left[\frac{\mathrm{diag}\left(\alpha_{\mathrm{i}}; i = \overline{1,n}\right)}{0_{(m-n)\times m}} \right]. \tag{7.45}$$

Представление (7.43) $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A позволяет для псевдообратной $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрицы A^+ записать

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T, \tag{7.46}$$

где ~~где~~ псевдообратная матрица сингулярных чисел Σ^+ принимает вид:

при $\mathrm{m} < \mathrm{n}$

$$\Sigma^+ = \left[\begin{matrix} \mathrm{diag}\left((\alpha_{\mathrm{i}})^{-1}; i = \overline{1,\mathrm{m}}\right) \\ 0_{(n-m)\times m} \end{matrix} \right], \tag{7.47}$$

при $\mathrm{m} > \mathrm{n}$

$$\Sigma^+ = \left\lfloor \mathrm{diag}\left((\alpha_{\mathrm{i}})^{-1}; i = \overline{1,\mathrm{n}}\right) \vdots 0_{n\times(m-n)} \right\rfloor. \tag{7.48}$$

Следует сказать, что псевдообращение в пакете Matlab всех версий осуществляется с помощью оператора *pinv(*)*, который построен на базе сингулярного разложения псевдообращаемой $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A.

Проиллюстрируем использование формулы (7.46) на примере для пседообращения прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \tag{7.49}$$

которая характеризуется свойством $\mathrm{m} > \mathrm{n}$. Сингуляроное разложение ~~дает~~ для матрицы A (7.49) дает

$$A = U\Sigma V^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.207 & 0.889 & 0.408 \\ -0.518 & 0.254 & -0.817 \\ -0.830 & -0.380 & 0.408 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25.437 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

$$\times\begin{bmatrix} -0.404 & -0.465 & -0.526 & -0.587 \\ -0.733 & -0.290 & 0.153 & 0.596 \\ 0.412 & -0.818 & 0.401 & 0.006 \\ 0.361 & -0.174 & -0.735 & 0.548 \end{bmatrix}.$$

Тогда псевдообратная матрица (7.46) получит представление

Отформатировано: Уровень 1

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T} = \begin{bmatrix} -0.404 & -0.733 & 0.412 & 0.361 \\ -0.465 & -0.290 & -0.818 & -0.174 \\ -0.526 & 0.153 & 0.401 & -0.735 \\ -0.587 & 0.596 & 0.006 & 0.548 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (25.437)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1.723)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} -0.207 & -0.518 & -0.830 \\ 0.889 & 0.254 & -0.380 \\ 0.408 & -0.817 & 0.408 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.375 & -0.100 & 0.175 \\ -0.146 & -0.033 & -0.017 \\ 0.083 & 0.083 & -0.017 \\ 0.312 & 0.100 & -0.112 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Шестой способ псевдообращения $(m \times n)$-матрицы A основан на использовании возможностей метода регуляризации А.Н. Тихонова. Суть шестого способа состоит в сведении процедуры псевдообращения $(m \times n)$-матрицы A к процедуре обращения квадратной матрицы, параметризованной регуляризирующей константной δ, с последующим предельным переходом обратной регуляризованной матрицы, элементы которой зависят от константы δ, к псевдообратной при $\delta \Rightarrow 0$. Аналитически это записывается в форме

$$A^{+} = \lim_{\delta \to 0}\left(A^{T}A + \delta I\right)^{-1} A^{T} = \lim_{\delta \to 0} A^{T}\left(AA^{T} + \delta I\right)^{-1}. \qquad (7.50)$$

Основным недостатком данного способа псевдообращения является необходимость аналитического обращения регуляризованной матрицы с помощи алгоритма Лапласа, что ограничивает область его использования матрицами невысокого порядка.

Тем не менее, проиллюстрируем способ на простом примере. Псевдообратим $(m \times n)$-матрицу A в виде матрицы–строки

$$A = [1 \quad 2 \quad 3]. \qquad (7.51)$$

Тогда следуя формуле (7.50), получим

Отформатировано: Уровень 1

$$A^+ = \lim_{\delta\to 0}\left(A^T A + \delta I\right)^{-1} A^T = \lim_{\delta\to 0}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} + \delta I\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta(14+\delta)}\begin{bmatrix}\delta+13 & -2 & -3\\ -2 & \delta+10 & -6\\ -3 & -6 & \delta+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta(14+\delta)}\begin{bmatrix}\delta\\2\delta\\3\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.714\\0.1429\\0.2143\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Седьмой способ псевдообращения $(m\times n)$-матрицы A основан на рекуррентной процедуре Гревиля. Суть метода состоит в следующем.

Запишем $(m\times n)$-матрицу A в столбцовой форме $A = [A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n]$. Сформируем матрицу Ak из первых k *столбцов* матрицы A так, что $A1 = A_1$, $A2 = [A_1 \quad A_2], \ldots An = A$. Тогда оказывается справедливой рекуррентная процедура:

1. при $k = 1$ $(A1)^+ = A_1^+ = \dfrac{A_1^T}{A_1^T A_1}$; (7.52)

Примечание 7.10(П7.10). Если в (7.52) $A1 = A_1 = 0$, то и $(A1)^+ = A_1^+ = 0$. (7.53)

2. ~~2.~~ при $k > 1$ $(Ak)^+ = \begin{bmatrix}B_k\\b_k\end{bmatrix}$, $B_k = (A(k-1))^+ - d_k b_k$, $d_k = (A(k-1))^+ A_k$, b_k - последняя строка матрицы $(Ak)^+$. (7.54)

3. **Примечание 7.11(П7.11).** В рекуррентной процедуре (7.54),

если $A_k - (A(k-1))d_k = 0$, то $b_k = \left(1 + d_k^T d_k\right)^{-1} d_k^T (A(k-1))^+$, (7.55)

если $A_k - (A(k-1))d_k \neq 0$, то $b_k = (A_k - A(k-1)d_k)^+$. (7.56)

Проиллюстрируем алгоритм Гревиля на примере пседообращения прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Тогда, используя (7.52), (7.54) получим

1. $k = 1$ $(A1)^+ = A_1^+ = \dfrac{A_1^T}{A_1^T A_1} = \dfrac{1}{6}[1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] = [1/6 \quad -1/6 \quad 1/3 \quad 0]$;

2. $k = 2$; $d_2 = A_1^+ A_2 = -3/2$;

Проверка условий (7.55)–(7.56), выполняется условие (7.56), тогда

Отформатировано: русский

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Цвет шрифта: Черный, ниже на 6 пт

Отформатировано: русский

Код поля изменен

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Цвет шрифта: Черный, английский (США), ниже на 6 пт

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: русский

Отформатировано: Уровень 1

$$b_2 = (A_2 - A_1 d_2)^+ = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^+ = [1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2/3];$$

$$B_2 = (A_1)^+ - d_2 b_2 = [2/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1];$$

$$(A2)^+ = \begin{bmatrix} B_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix};$$

$$k = 3; \; d_3 = (A2)^+ A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверка условий (7.55)–(7.56), выполняется условие (7.55), тогда

$$b_3 = \left(1 + d_3^T d_3\right)^{-1} d_3^T (A2)^+ = [1/3 \quad 2/9 \quad 1/9 \quad 5/9];$$

$$B_3 = (A2)^+ - d_3 b_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix};$$

$$A^+ = (A3)^+ = \begin{bmatrix} B_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \\ 1/3 & 2/9 & 1/9 & 5/9 \end{bmatrix}.$$

■

Отформатировано: Уровень 1

Примеры и задачи

Отформатировано: Уровень 1

7.1.Даны вектора–столбцы:

а) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

и вектора–строки:

з) $[15 \quad 14 \quad 13]$; и) $[12 \quad 11 \quad 10]$; к) $[9 \quad 8 \quad 7]$; л) $[6 \quad 5 \quad 4]$.

Построить кронекеровские произведения векторов на парах векторов по выбору.

7.2. Даны матрицы:

а) $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Отформатировано: английский (США)

д) $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Построить кронекеровские произведения пар матриц по выбору и вычислить элементы алгебраического спектра собственных значений этих произведений.

7.3. На матрицах примера 7.2 построить кронекеровские суммы пар матриц по выбору и вычислить элементы алгебраического спектра собственных значений построенных кронекеровских сумм.

7.4. Вычислить алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B$ матриц

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix}.$$

7.5. Вычислить псевдообратные матрицы для матриц–столбцов:

а) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}10\\11\\12\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}13\\14\\15\end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}$

и для матриц–строк:

з) $\begin{bmatrix}15 & 14 & 13\end{bmatrix}$; и) $\begin{bmatrix}12 & 11 & 10\end{bmatrix}$; к) $\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\end{bmatrix}$; л) $\begin{bmatrix}6 & 5 & 4\end{bmatrix}$

одним из приведенным в тексте раздела способов.

7.6. Даны прямоугольные матрицы:

а) $\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4 & 7\\5 & 8\\6 & 9\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}7 & 10\\8 & 11\\9 & 12\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}10 & 13\\11 & 14\\12 & 15\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}3 & -6\\2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}$;

е) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\10 & 11 & 12\end{bmatrix}$; и) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\6 & -4 & 2\end{bmatrix}$.

Вычислить псевдообратные матрицы одним из приведенных в тексте раздела способов ~~псевдообратные матрицы для приведенных выше~~.

Решение вариантов задач

Задача 7.4. Вычислить алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B$ матриц

$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\-10 & -7\end{bmatrix}$, имеющих спектры собственных значений:

$\sigma\{A\}=\{\lambda_{A1}=2,\lambda_{A2}=3\}$; $\sigma\{B\}=\{\lambda_{B1}=-2,\lambda_{B2}=-5\}$.

Тогда в соответствии с (7.12) для спектра $\sigma\{A\oplus B\}$ кронекеровской суммы матриц будем иметь $\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_1=2-2=0;\nu_2=2-5=-3;\nu_3=3-2=1;\nu_4=3-5=-2\}$.

Проверим полученный результат прямым вычислением спектра

Отформатировано: русский

Отформатировано: Уровень 1

собственных значений кронекеровской суммы матриц $\sigma\{A \oplus B\} = \{\nu_l : det(\nu I - A \oplus B) = 0; l = \overline{1, mn}\}$, для чего составим кронекеровскую сумму

$$A \oplus B = A \otimes I_B + I_A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Теперь составим характеристическое уравнение

$$det(\nu I - A \oplus B) = det \begin{bmatrix} \nu - 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & \nu + 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \nu - 3 & -1 \\ 0 & -1 & 10 & \nu + 4 \end{bmatrix} = \nu(\nu + 3)(\nu^2 + \nu - 2) = 0;$$

Полученное уравнение имеет решение $\{\nu_1 = 0; \nu_2 = -3; \nu_3 = 1; \nu_4 = -2\}$. ■

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Уровень 1

7. МАТРИЦЫ ОСОБОЙ КОНСТРУКЦИИ

7.1.Кронекеровские матричные структуры, область применения и свойства

Приступим к изучению *кронекеровских* (прямых) матричных структур, которые используются при решении матричных уравнений и описании процессов с перемножением переменных. Если компоненты кронекеровских матричных структур квадратные, то квадратной является и сама кронекеровская матричная структура, вычисление собственных значений которой осуществляется на основе свойств матричной функции от матрицы, но уже по более сложной схеме.

Определение 7.1(О7.1). *Кронекеровским произведением* двух векторов x и y, $x \in R^n$, $y \in R^m$, называется вектор $x \otimes y$, составленный из сепаратных произведений $\{x_i y_j; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\}$ их элементов так, что становится справедливым представление

$$x \otimes y = col\{x_i y_j; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\},\ x \otimes y \in R^{nm}. \qquad (7.1)$$

Примечание 7.1(П7.1). Очевидно, кроме кронекеровского произведения $x \otimes y$ двух векторов может быть построено также произведение $y \otimes x$ этих же векторов, причем, в общем случае эти произведения оказываются не коммутативными так, что $x \otimes y \neq y \otimes x$, хотя наборы компонентов у них одинаковые.

Определение 7.2(О7.2). Если размерности векторов x и y одинаковы, то на их кронекеровском произведении $x \otimes y$ может быть построено согласованное *сужение* этого произведения $(x \otimes y)_S$, задаваемого представлением:

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})_S = col\{x_i y_i; i = \overline{1,n}\}. \qquad (7.2)$$

Примечание 7.2(П7.2). Согласованное сужение кронекеровского векторного произведения $x \otimes y$ может быть осуществлено с помощью оператора сужения с матрицей S вида

$$S = diag\{[0_{1\times(i-1)} \vdots\ 1 \vdots\ 0_{1\times(n-i)}]; i = \overline{1,n}\} \qquad (7.3)$$

так, что становится справедливой запись:

$$(x \otimes y)_S = S \cdot (x \otimes y). \qquad (7.4)$$

В качестве свойств кронекеровского произведения векторов рассмотрим правила дифференцирования кронекеровских векторных произведений по скалярному параметру, которым является время.

Свойство 7.1(СВ7.1). Дифференцирование векторной кронекеровской структуры в виде ~~их~~ кронекеровского произведения векторов осуществляется по правилам дифференцирования сложной функции, представленной в мультикативной форме так, что:

$$\frac{d}{dt}(x(t)\otimes y(t))\overset{\Delta}{=}(x(t)\overset{\bullet}{\otimes} y(t))=\dot{x}(t)\otimes y(t)+x(t)\otimes \dot{y}(t). \qquad (7.5)$$

Определение 7.3 (О7.3). *Кронекеровским произведением* прямоугольных матриц $A\in R^{n\times m}, B\in R^{p\times q}$ называется матрица $(A\otimes B)$ размерности $(np\times mq)$, составленная в силу соотношения

$$A\otimes B=col\{row(A_{i,j}B;\ j=\overline{1,m});i=\overline{1,n}\}. \qquad (7.6)$$

Примечание 7.3(П7.3). Кронекеровское произведение произвольных прямоугольных матриц не обладает свойством коммутативности так, что

$$A\otimes B\neq B\otimes A \qquad (7.7)$$

Определение 7.4 (О7.4). *Кронекеровской суммой* квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ называется матрица $(A\oplus B)$, размерности $(nm\times nm)$, составленная в силу соотношения

$$A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B, \qquad (7.8)$$

где I_A, I_B - единичные матрицы, согласованные по размерности соответственно с матрицами *A* и *B*.

Примечание 7.4(П7.4). Для кронекеровской суммы квадратных матриц *A* и *B*, а в общем случае произвольного числа матриц, существует альтернативное название – *преобразование Сильвестра матриц*, что записывается в форме

$$A\oplus B\overset{\Delta}{=}A\otimes I_B+I_A\otimes B\overset{\Delta}{=}Si\{A,B\}. \qquad (7.9)$$

Для случая трех квадратных матриц *A, B, C* кронекеровская сумма или их преобразование Сильвестра будет записано в форме:

$$Si\{A,B,C\}=A\oplus B\oplus C=A\otimes I_B\otimes I_C+I_A\otimes B\otimes I_C+I_A\otimes I_B\otimes C. \qquad (7.10)$$

Отметим, что как и кронекеровское произведение матриц, кронекеровская сумма не коммутативна.

Кронекеровские матричные структуры, введенные выше, обладают следующими свойствами.

Свойство 7.2(СВ7.2). Алгебраический спектр собственных значений *кронекеровского произведения* $A\otimes B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ как *матричной функции от матриц* обладает тем свойством, что его элементы образованы *попарными произведениями* собственных значений *кронекеровски* перемножаемых матриц:

$$\sigma\{A\otimes B\}=\{\mu_k:\det(\mu I-A\otimes B)=0;\mu_k=\lambda_{Ai}\lambda_{Bj};i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};k=\overline{1,mn}\}. \qquad (7.11)$$

Свойство 7.3 (СВ7.3). Алгебраический спектр собственных значений *кронекеровской суммы* $A\oplus B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ как *матричной функции от матрицы* обладает тем свойством, что его элементы образованы *попарными суммами* собственных значений *кронекеровски* суммируемых матриц:

$$\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_l:\det(\nu I-A\oplus B)=0;\nu_l=\lambda_{Ai}+\lambda_{Bj};i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};l=\overline{1,mn}\}. \qquad (7.12)$$

В (7.11) и (7.12) λ_{Ai} и λ_{Bj} - собственные значения соответственно матриц A и B.

Сделаем следующее примечание к свойствам (СВ7.2) и (СВ7.3).

Примечание 7.5(П7.5). Алгебраические спектры собственных значений кронекеровских произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$ в силу (7.11) совпадают, аналогичным свойством в силу (7.12) обладают и спектры кронекеровских сумм $A \oplus B$ и $B \oplus A$.

Свойство 7.4(СВ7.4). Определитель кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n, \tag{7.13}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Свойство 7.5(СВ7.5). След кронекеровской суммы квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$tr(A \oplus B) = m \cdot trA + n \cdot trB, \tag{7.14}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Свойство 7.6 (СВ7.6). Ранг кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет условию:

$$rang(A \otimes B) = rangA \cdot rangB, \tag{7.15}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Приведем без доказательств полезные свойства кронекеровских произведений —произвольных матриц, в справедливости которых читатель может убедиться самостоятельно.

Свойство 7.7 (СВ7.7).

$$(P \otimes Q)(W \otimes V) = PW \otimes QV. \tag{7.16}$$

Свойство 7.8 (СВ7.8).

$$(P + Q) \otimes R = P \otimes R + Q \otimes R, \tag{7.17}$$

$$P \otimes (Q + R) = P \otimes Q + P \otimes R, \tag{7.18}$$

$$P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q) \otimes R. \tag{7.19}$$

В (7.16) – (7.19) матрицы P, Q, R, W, V не должны противоречить правилам перемножения и сложения матриц.

Свойство 7.9(СВ7.9).

$$P \otimes Q = (P \otimes I_Q)(I_P \otimes Q), \tag{7.20}$$

$$(P_1 \otimes Q_1)(P_2 \otimes Q_2)\ldots(P_R \otimes Q_K) = (P_1 P_2 \ldots P_K) \otimes (Q_1 Q_2 \ldots Q_K) \tag{7.21}$$

$$(P \otimes Q)^{-1} = P^{-1} \otimes Q^{-1} \tag{7.22}$$

$$I \otimes (P_1 P_2 \ldots P_K) = (I_{P1} \otimes P_1)(I_{P2} \otimes P_2)\ldots(I_{PK} \otimes P_K). \tag{7.23}$$

В выражениях (7.20) – (7.23) $I_{(*)}$ – единичная матрица по размерности согласованная с матрицей (*).

Свойство 7.10 (СВ7.10). Оператор сужения кронекеровского произведения векторов с матрицей сужения S удовлетворяет соотношению

$$S(PX \otimes QZ) = S(P \otimes Q)(X \otimes Z). \tag{7.24}$$

7.2. Псевдообращение и псевдообратные матрицы

Псевдообращение матрицы - это процедура обращения необратимой, то есть *особенной* матрицы в силу того, что она либо является прямоугольной, либо~~или~~, будучи квадратной, имеет неполный ранг~~, или в силу того, что она прямоугольная~~. Псевдообращение матриц - ~~достаточно~~ относительно недавно разработанная~~молодая~~ процедура аппарата линейной алгебры. Разработка ее связана с такими именами зарубежных математиков как Фредгольм Э.И., Мур Э.Х., Пенроуз Р., Альберт А. и советских математиков как Гантмахер Ф.Р., Беклемишев Д.В. и других.

Отформатировано: Шрифт: курсив

В данном параграфе рассматривается процедура псевдообращения прямоугольных матриц. Для ~~погружение~~ погружения в проблему, вынесенную в заголовок параграфа, рассмотрим линейную алгебраическую систему (ЛАС), описывающую процесс отображения элемента x арифметического линейного пространства X^n в элемент y арифметического линейного пространства Y^m, записываемую в виде векторно–матричного соотношения

$$y = Ax. \tag{7.25}$$

В (7.25) A–$(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$– матрица, при этом $m \neq n$ так, что матрица A - прямоугольная. Ставится задача при известной паре (y, A) найти вектор x при условии, что матрица A – *необратима*, то есть не существует A^{-1}.

Для решения поставленной задачи представим ЛАС (7.25) в развернутой форме

$$y = Ax = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \,.\cancel{,} \tag{7.26}$$

Таким образом, вектор y есть линейная комбинация из векторов–столбцов $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ матрицы A, имеющая в качестве коэффициентов элементы $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ искомого вектора x, при этом задача обращения и состоит в поиске этих компонентов. Нетрудно видеть что, если вектор y принадлежит образу матрицы A $\{y \in \mathrm{Im}(A)\}$, то поставленная задача имеет точное решение, но это частный случай. Рассмотрим общий случай, когда выполняется условие $y \notin \mathrm{Im}(A)$. Для этого модифицируем первичную постановку задачи и сформулируем ее как задачу отыскания такого вектора $\hat{x}$:$\dim(\hat{x}) = \dim(x) = n$, который решает задачу минимизации нормы вектора невязки $\tilde{y}$ представления заданного вектора $y \notin \mathrm{Im}(A)$ в форме (7.26), коэффициентами которого

являются элементы вектора $\hat{x}$, и заданного вектора y, что записывается в виде

$$\hat{x} = \arg\min_{x}\{\|\tilde{y}\| = \|(y - Ax)\|\}. \qquad (7.27)$$

Соотношение (7.27) позволяет сформулировать *содержательное* определение *псевдообратной матрицы*.

Определение 7.5(О7.5). *Псевдообратной* матрицей A^{+} для $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A называется матрица, связывающая векторы $\hat{x}$ и y векторно–матричным соотношением

$$\hat{x} = A^{+}y. \qquad (7.28)$$

Примечание 7.6(П7.6). Если $m = n$ и $\dim\{\mathrm{Im}(A)\} = n$, то $\|\tilde{y}\| = \|(y - Ax)\| = 0,\ \hat{x} = x,\ A^{+} = A^{-1}$.

Формальное определение псевдообратной матрицы A^{+} таково.

Определение 7.6 (О7.6). *Псевдообратной* матрицей для $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A называется $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрица A^{+}, удовлетворяющая следующей системе условий:

$$\left.\begin{array}{l} 1. AA^{+}A = A; \\ 2. A^{+}AA^{+} = A^{+}; \\ 3. \left(AA^{+}\right)^{T} = AA^{+}; \\ 4. \left(A^{+}A\right)^{T} = A^{+}A; \end{array}\right\} \qquad (7.29)$$

Примечание 7.7(П7.7). Нетрудно видеть, что если матрица A обратима и существует A^{-1}, то соотношения (7.29) выполняются, если в них A^{+} заменить на A^{-1}.

Свойства псевдообращения:

1. Псевдообращение псевдообратимо: $\left(A^{+}\right)^{+} = A$;

2.Псевдообращение и транспонирование коммутативно: $\left(A^{T}\right)^{+} = \left(A^{+}\right)^{T}$;

3.Псевдообращение произведения скаляра на матрицу производится по правилу: $(\alpha A)^{+} = \alpha^{-1}A^{+}$;

4. $\left(AA^{+}\right)^{2} = AA^{+}$, $\left(A^{+}A\right)^{2} = A^{+}A$;

5. Псевдообращение произведения матриц производится по правилу:

$(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$,

если у матрицы A являются линейно независимыми столбцы, а у матрицы B являются линейно независимыми строки.

Рассмотрим способы псевдообращения прямоугольной $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A.

Первый способ применим для особого случая, когда $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ и *столбцы* матрицы A являются *линейно независимыми*, т.е. когда столбцовый

ранг матрицы удовлетворяет условию $\mathrm{rang}(A) = n$. Суть первого способа представим в виде утверждения.

Утверждение 7.1(У7.1). Если прямоугольная $(\mathrm{m} \times \mathrm{n})$ матрица A такова, что $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ и столбцы матрицы A являются линейно независимыми, то псевдообратная матрица A^+ для матрицы A задается формулой

$$A^+ = \left(A^T A\right)^{-1} A^T. \tag{7.30}$$

Доказательство утверждения строится на использовании ЛАС (7.25), которую необходимо умножить слева на матрицу A^T, в результате чего получим соотношение

$$A^T y = A^T A x. \tag{7.31}$$

В силу линейной независимости столбцов матрицы A $(\mathrm{n} \times \mathrm{n})$– квадратная матрица $A^T A$ оказывается обратимой, что позволяет разрешить ЛАС (7.31) относительно искомого вектора x в форме

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y, \tag{7.32}$$

откуда следует справедливость утверждения. ■

Примечание 7.8(П7.8). Применительная область первого способа псевдообращения в основном касается задач оценки параметров линейных моделей по экспериментальным данным, когда объем экспериментальных данных заметно превосходит число оцениваемых параметров. Проиллюстрируем эту ситуацию примером. В таблице 7.1 приведены экспериментальные данные некоторой зависимости двух переменных η и ρ, априори была высказана гипотеза об их линейной связи в форме

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1 \rho. \tag{7.33}$$

Ставится задача сформировать оценки $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_1$ параметров α_0 и α_1 линейной модели (7.33) по экспериментальным данным.

Таблица 7.1

i	1	2	3	4	5	6
η_i	0.8	1.2	2.2	2.4	3.1	3.6
ρ_i	0	1	2	3	4	5

Для ~~построение~~ построения аналитической базы формирования оценок запишем (7.33) в форме

$$1 \cdot \alpha_0 + \rho \cdot \alpha_1 = \eta,$$

допускающей представления

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \eta \Rightarrow H_i \alpha = \eta_i; \left(i = \overline{1,6}\right), \tag{7.34}$$

где $H_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho_i \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$.

Если теперь элементам строк H_i и элементу η_i придать значения из

таблицы 7.1 , то получим ЛАС вида (7.25), записанную в форме

$$\eta = H\alpha. \qquad (7.35)$$

В модели (7.35) $H-$ (6×2)–информационная необратимая матрица, $\eta-(6\times 1)$–вектор измерений. Вектор $\hat{\alpha}$ оценок параметров модели (7.33) ищется по схеме (7.28) с помощью псевдообратной матрицы H^{+}, вычисляемой с помощью (7.30), что можно записать в форме цепочки соотношений

$$\hat{\alpha} = H^{+}\eta = \left(H^{T}H\right)^{-1}H^{T}\eta. \qquad (7.35)$$

В (7.35) $H^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \eta^{T} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 & 2.2 & 2.4 & 3.1 & 3.6 \end{bmatrix}$,

что позволяет вычислить псевдообратную матрицу

$$H^{+} = \begin{bmatrix} 0.5238 & 0.3810 & 0.2381 & 0.0952 & -0.0476 & -0.1905 \\ -0.1429 & -0.0857 & -0.0286 & 0.0286 & 0.0857 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

и вектор оценок в форме

$$(\hat{\alpha})^{T} = \begin{bmatrix} 0.7952 & 0.5686 \end{bmatrix}.$$

В итоге модель (7.33) по результатам обработки экспериментальных данных с помощью процедуры псевдообращения получает представление

$$\eta = 0.7952 + 0.5686\rho. \qquad \blacksquare$$

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Второй способ применим также для особого случая, когда $m < n$ и на этот раз *строки* матрицы A являются *линейно независимыми*, т.е. когда строчный ранг матрицы удовлетворяет условию $\mathrm{rang}(A) = m$. Тогда по аналогии с (7.30) для этого случая псевдообратная матрица A^{+} может быть вычислена с помощью формулы

$$A^{+} = A^{T}\left(AA^{T}\right)^{-1}. \qquad \blacksquare (7.36)$$

Третий способ сформирован для любой реализации отношения размерностей $m \neq n$–, т.е. он инвариантен относительно отношения порядка ~~$(<$ или $>)$~~. Метод основан на представлении псевдообращаемой $(m\times n)$ матрицы A в виде произведения матриц

$$A = BC, \qquad (7.37)$$

где $B-(m\times k)$–матрица с k–линейно независимыми столбцами, а $C-(k\times n)$–матрица с k–линейно независимыми строками. Тогда псевдообратная матрица A^{+} строится в соответствии с формулой

$$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}. \qquad (7.38)$$

Примечание 7.9(П7.9). Если $(m\times n)$ ~~- матрицы~~ матрица A имеет полный столбцовый ранг так, что $k = m$, то в (7.37) в качестве матрицы B может быть взята $(m\times m)$–единичная матрица. В свою очередь, если $(m\times n)$ ~~- матрицы~~ матрица A имеет полный строчный ранг так, что $k = n$, то в (7.37) в качестве матрицы C может быть взята $(n\times n)$–

единичная матрица.

Проиллюстрируем использование формулы (7.38) на примере Ф.Р. Гантмахера для пседообращения прямоугольной матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (7.39)$$

Нетрудно видеть, что матрица (7.39) имеет линейно зависимые строки и столбцы, причем число линейно независимых строк и столбцов $k=2$. Матрица A представима в форме

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=BC.$$

Тогда для матричных компонентов формулы (7.39) получим

$$B^TB=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix};\left(B^TB\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix};CC^T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix};\left(CC^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}.$$

Тогда, следуя формуле (7.36) получим

$$A^+=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 1/3\\ 1/9 & 1/9 & 2/9\\ 2/9 & -1/9 & 1/9\\ 4/9 & 1/9 & 5/9\end{bmatrix}. \qquad \blacksquare(7.40)$$

Четвертый способ, являющийся обобщением третьего способа, основан на разбиении $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A на матричные блоки так, что она получает представление

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & F\end{bmatrix}, \qquad (7.41)$$

в котором матрица B - неособая квадратная, и такая, что $\mathrm{rang}(B)=\mathrm{rang}(A)$ –. Тогда псевдообратная $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрица A^+ может быть вычислена с помощью матричного выражения

$$A^+=\begin{bmatrix}B^T\\ C^T\end{bmatrix}\left(BB^T+CC^T\right)^{-1}B\left(B^TB+D^TD\right)^{-1}\left(B^TD^T\right). \qquad (7.42)$$

—Проиллюстрируем использование формулы (7.42) на примере Ф.Р. Гантмахера для пседообращения прямоугольной матрицы (7.39), которую в соответствии с (7.41) ~~разобъем~~ разобъём на матричные блоки

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix},$$

подстановка которых в ~~подставляя которые в~~ матричную формулу (7.42) даст~~получим~~ псевдообратную матрицу (7.40). ■

Пятый способ псевдообращения $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A основан на использовании сингулярного разложения этой матрицы с помощью *SVD*–процедуры, позволяющего представить ее в виде

$$A = U\Sigma V^T, \tag{7.43}$$

где U,V – матрицы соответственно левого и правого сингулярных базисов, Σ –матрица сингулярных чисел, которая принимает вид:

при $\mathrm{m} < \mathrm{n}$

$$\Sigma = \left\lfloor \mathrm{diag}\left(\alpha_{\mathrm{i}}; i = \overline{1,m}\right) \middle| 0_{m\times(n-m)} \right\rfloor, \tag{7.44}$$

при $\mathrm{m} > \mathrm{n}$

$$\Sigma = \left[\frac{\mathrm{diag}\left(\alpha_{\mathrm{i}}; i = \overline{1,n}\right)}{0_{(m-n)\times m}} \right]. \tag{7.45}$$

Представление (7.43) $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A позволяет для псевдообратной $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрицы A^+ записать

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T, \tag{7.46}$$

где ~~где~~ псевдообратная матрица сингулярных чисел Σ^+ принимает вид:

при $\mathrm{m} < \mathrm{n}$

$$\Sigma^+ = \left[\begin{matrix} \mathrm{diag}\left((\alpha_{\mathrm{i}})^{-1}; i = \overline{1,\mathrm{m}}\right) \\ 0_{(n-m)\times m} \end{matrix} \right], \tag{7.47}$$

при $\mathrm{m} > \mathrm{n}$

$$\Sigma^+ = \left\lfloor \mathrm{diag}\left((\alpha_{\mathrm{i}})^{-1}; i = \overline{1,\mathrm{n}}\right) \vdots 0_{n\times(m-n)} \right\rfloor. \tag{7.48}$$

Следует сказать, что псевдообращение в пакете Matlab всех версий осуществляется с помощью оператора *pinv(*)*, который построен на базе сингулярного разложения псевдообращаемой $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A.

Проиллюстрируем использование формулы (7.46) на примере для пседообращения прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \tag{7.49}$$

которая характеризуется свойством $\mathrm{m} > \mathrm{n}$. Сингуляроное разложение ~~дает~~ для матрицы A (7.49) дает

$$A = U\Sigma V^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.207 & 0.889 & 0.408 \\ -0.518 & 0.254 & -0.817 \\ -0.830 & -0.380 & 0.408 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25.437 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

$$\times\begin{bmatrix} -0.404 & -0.465 & -0.526 & -0.587 \\ -0.733 & -0.290 & 0.153 & 0.596 \\ 0.412 & -0.818 & 0.401 & 0.006 \\ 0.361 & -0.174 & -0.735 & 0.548 \end{bmatrix}.$$

Тогда псевдообратная матрица (7.46) получит представление

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T} = \begin{bmatrix} -0.404 & -0.733 & 0.412 & 0.361 \\ -0.465 & -0.290 & -0.818 & -0.174 \\ -0.526 & 0.153 & 0.401 & -0.735 \\ -0.587 & 0.596 & 0.006 & 0.548 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (25.437)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1.723)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} -0.207 & -0.518 & -0.830 \\ 0.889 & 0.254 & -0.380 \\ 0.408 & -0.817 & 0.408 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.375 & -0.100 & 0.175 \\ -0.146 & -0.033 & -0.017 \\ 0.083 & 0.083 & -0.017 \\ 0.312 & 0.100 & -0.112 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Шестой способ псевдообращения $(m \times n)$-матрицы A основан на использовании возможностей метода регуляризации А.Н. Тихонова. Суть шестого способа состоит в сведении процедуры псевдообращения $(m \times n)$-матрицы A к процедуре обращения квадратной матрицы, параметризованной регуляризирующей константной δ, с последующим предельным переходом обратной регуляризованной матрицы, элементы которой зависят от константы δ, к псевдообратной при $\delta \Rightarrow 0$. Аналитически это записывается в форме

$$A^{+} = \lim_{\delta \to 0}\left(A^{T}A + \delta I\right)^{-1} A^{T} = \lim_{\delta \to 0} A^{T}\left(AA^{T} + \delta I\right)^{-1}. \qquad (7.50)$$

Основным недостатком данного способа псевдообращения является необходимость аналитического обращения регуляризованной матрицы с помощи алгоритма Лапласа, что ограничивает область его использования матрицами невысокого порядка.

Тем не менее, проиллюстрируем способ на простом примере. Псевдообратим $(m \times n)$-матрицу A в виде матрицы–строки

$$A = [1 \quad 2 \quad 3]. \qquad (7.51)$$

Тогда следуя формуле (7.50), получим

$$A^+ = \lim_{\delta\to 0}\left(A^T A + \delta I\right)^{-1} A^T = \lim_{\delta\to 0}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} + \delta I\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta(14+\delta)}\begin{bmatrix}\delta+13 & -2 & -3\\ -2 & \delta+10 & -6\\ -3 & -6 & \delta+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta(14+\delta)}\begin{bmatrix}\delta\\2\delta\\3\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.714\\0.1429\\0.2143\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Седьмой способ псевдообращения $(m\times n)$-матрицы A основан на рекуррентной процедуре Гревиля. Суть метода состоит в следующем.

Запишем $(m\times n)$-матрицу A в столбцовой форме $A = [A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n]$. Сформируем матрицу Ak из первых k *столбцов* матрицы A так, что $A1 = A_1$, $A2 = [A_1 \quad A_2], \ldots An = A$. Тогда оказывается справедливой рекуррентная процедура:

1. при $k = 1$ $(A1)^+ = A_1^+ = \dfrac{A_1^T}{A_1^T A_1}$; (7.52)

Примечание 7.10(П7.10). Если в (7.52) $A1 = A_1 = 0$, то и $(A1)^+ = A_1^+ = 0.$ (7.53)

2. ~~2.~~ при $k > 1$ $(Ak)^+ = \begin{bmatrix}B_k\\b_k\end{bmatrix}$, $B_k = (A(k-1))^+ - d_k b_k$, $d_k = (A(k-1))^+ A_k$, b_k - последняя строка матрицы $(Ak)^+$. (7.54)

3. **Примечание 7.11(П7.11).** В рекуррентной процедуре (7.54),

если $A_k - (A(k-1))d_k = 0$, то $b_k = \left(1 + d_k^T d_k\right)^{-1} d_k^T (A(k-1))^+$, (7.55)

если $A_k - (A(k-1))d_k \neq 0$, то $b_k = (A_k - A(k-1)d_k)^+$. (7.56)

Проиллюстрируем алгоритм Гревиля на примере пседообращения прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Тогда, используя (7.52), (7.54) получим

1. $k = 1$ $(A1)^+ = A_1^+ = \dfrac{A_1^T}{A_1^T A_1} = \dfrac{1}{6}[1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] = [1/6 \quad -1/6 \quad 1/3 \quad 0]$;

2. $k = 2$; $d_2 = A_1^+ A_2 = -3/2$;

Проверка условий (7.55)–(7.56), выполняется условие (7.56), тогда

Отформатировано: русский

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Цвет шрифта: Черный, ниже на 6 пт

Отформатировано: русский

Код поля изменен

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Цвет шрифта: Черный, английский (США), ниже на 6 пт

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: русский

$$b_2 = (A_2 - A_1 d_2)^+ = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^+ = [1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2/3];$$

$$B_2 = (A_1)^+ - d_2 b_2 = [2/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1];$$

$$(A2)^+ = \begin{bmatrix} B_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix};$$

$$k = 3; \; d_3 = (A2)^+ A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверка условий (7.55)–(7.56), выполняется условие (7.55), тогда

$$b_3 = \left(1 + d_3^T d_3\right)^{-1} d_3^T (A2)^+ = [1/3 \quad 2/9 \quad 1/9 \quad 5/9];$$

$$B_3 = (A2)^+ - d_3 b_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix};$$

$$A^+ = (A3)^+ = \begin{bmatrix} B_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \\ 1/3 & 2/9 & 1/9 & 5/9 \end{bmatrix}.$$

■

Примеры и задачи

7.1.Даны вектора–столбцы:

а) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

и вектора–строки:

з) $[15 \quad 14 \quad 13]$; и) $[12 \quad 11 \quad 10]$; к) $[9 \quad 8 \quad 7]$; л) $[6 \quad 5 \quad 4]$.

Построить кронекеровские произведения векторов на парах векторов по выбору.

7.2. Даны матрицы:

а) $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Отформатировано: английский (США)

д) $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Построить кронекеровские произведения пар матриц по выбору и вычислить элементы алгебраического спектра собственных значений этих произведений.

7.3. На матрицах примера 7.2 построить кронекеровские суммы пар матриц по выбору и вычислить элементы алгебраического спектра собственных значений построенных кронекеровских сумм.

Отформатировано: русский

7.4. Вычислить алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B$ матриц

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix}.$$

7.5. Вычислить псевдообратные матрицы для матриц–столбцов:

а) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}10\\11\\12\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}13\\14\\15\end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}$

и для матриц–строк:

з) $\begin{bmatrix}15 & 14 & 13\end{bmatrix}$; и) $\begin{bmatrix}12 & 11 & 10\end{bmatrix}$; к) $\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\end{bmatrix}$; л) $\begin{bmatrix}6 & 5 & 4\end{bmatrix}$

одним из приведенным в тексте раздела способов.

7.6. Даны прямоугольные матрицы:

а) $\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4 & 7\\5 & 8\\6 & 9\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}7 & 10\\8 & 11\\9 & 12\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}10 & 13\\11 & 14\\12 & 15\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}3 & -6\\2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}$;

е) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\10 & 11 & 12\end{bmatrix}$; и) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\6 & -4 & 2\end{bmatrix}$.

Вычислить псевдообратные матрицы одним из приведенных в тексте раздела способов ~~псевдообратные матрицы для приведенных выше~~.

Решение вариантов задач

Задача 7.4. Вычислить алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B$ матриц

$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\-10 & -7\end{bmatrix}$, имеющих спектры собственных значений:

$\sigma\{A\}=\{\lambda_{A1}=2,\lambda_{A2}=3\}$; $\sigma\{B\}=\{\lambda_{B1}=-2,\lambda_{B2}=-5\}$.

Тогда в соответствии с (7.12) для спектра $\sigma\{A\oplus B\}$ кронекеровской суммы матриц будем иметь $\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_1=2-2=0;\nu_2=2-5=-3;\nu_3=3-2=1;\nu_4=3-5=-2\}$.

Проверим полученный результат прямым вычислением спектра

собственных значений кронекеровской суммы матриц $\sigma\{A \oplus B\} = \{\nu_l : det(\nu I - A \oplus B) = 0; l = \overline{1, mn}\}$, для чего составим кронекеровскую сумму

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

$$A \oplus B = A \otimes I_B + I_A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Теперь составим характеристическое уравнение

$$det(\nu I - A \oplus B) = det \begin{bmatrix} \nu - 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & \nu + 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \nu - 3 & -1 \\ 0 & -1 & 10 & \nu + 4 \end{bmatrix} = \nu(\nu + 3)(\nu^2 + \nu - 2) = 0;$$

Полученное уравнение имеет решение $\{\nu_1 = 0; \nu_2 = -3; \nu_3 = 1; \nu_4 = -2\}$.

■

7. МАТРИЦЫ ОСОБОЙ КОНСТРУКЦИИ

7.1.Кронекеровские матричные структуры, область применения и свойства

Приступим к изучению *кронекеровских* (прямых) матричных структур, которые используются при решении матричных уравнений и описании процессов с перемножением переменных. Если компоненты кронекеровских матричных структур квадратные, то квадратной является и сама кронекеровская матричная структура, вычисление собственных значений которой осуществляется на основе свойств матричной функции от матрицы, но уже по более сложной схеме.

Определение 7.1(О7.1). *Кронекеровским произведением* двух векторов x и y, $x \in R^n$, $y \in R^m$, называется вектор $x \otimes y$, составленный из сепаратных произведений $\{x_i y_j; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\}$ их элементов так, что становится справедливым представление

$$x \otimes y = col\{x_i y_j; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\},\ x \otimes y \in R^{nm}. \qquad (7.1)$$

Примечание 7.1(П7.1). Очевидно, кроме кронекеровского произведения $x \otimes y$ двух векторов может быть построено также произведение $y \otimes x$ этих же векторов, причем, в общем случае эти произведения оказываются не коммутативными так, что $x \otimes y \neq y \otimes x$, хотя наборы компонентов у них одинаковые.

Определение 7.2(О7.2). Если размерности векторов x и y одинаковы, то на их кронекеровском произведении $x \otimes y$ может быть построено согласованное *сужение* этого произведения $(x \otimes y)_S$, задаваемого представлением:

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})_S = col\{x_i y_i; i = \overline{1,n}\}. \qquad (7.2)$$

Примечание 7.2(П7.2). Согласованное сужение кронекеровского векторного произведения $x \otimes y$ может быть осуществлено с помощью оператора сужения с матрицей S вида

$$S = diag\{[0_{1\times(i-1)} \vdots\ 1 \vdots\ 0_{1\times(n-i)}]; i = \overline{1,n}\} \qquad (7.3)$$

так, что становится справедливой запись:

$$(x \otimes y)_S = S \cdot (x \otimes y). \qquad (7.4)$$

В качестве свойств кронекеровского произведения векторов рассмотрим правила дифференцирования кронекеровских векторных произведений по скалярному параметру, которым является время.

Свойство 7.1(СВ7.1). Дифференцирование векторной кронекеровской структуры в виде ~~их~~ кронекеровского произведения векторов осуществляется по правилам дифференцирования сложной функции, представленной в мультикативной форме так, что:

$$\frac{d}{dt}(x(t)\otimes y(t))\overset{\Delta}{=}(x(t)\overset{\bullet}{\otimes} y(t))=\dot{x}(t)\otimes y(t)+x(t)\otimes \dot{y}(t). \qquad (7.5)$$

Определение 7.3 (О7.3). *Кронекеровским произведением* прямоугольных матриц $A\in R^{n\times m}, B\in R^{p\times q}$ называется матрица $(A\otimes B)$ размерности $(np\times mq)$, составленная в силу соотношения

$$A\otimes B=col\{row(A_{i,j}B;\ j=\overline{1,m});i=\overline{1,n}\}. \qquad (7.6)$$

Примечание 7.3(П7.3). Кронекеровское произведение произвольных прямоугольных матриц не обладает свойством коммутативности так, что

$$A\otimes B\neq B\otimes A \qquad (7.7)$$

Определение 7.4 (О7.4). *Кронекеровской суммой* квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ называется матрица $(A\oplus B)$, размерности $(nm\times nm)$, составленная в силу соотношения

$$A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B, \qquad (7.8)$$

где I_A, I_B - единичные матрицы, согласованные по размерности соответственно с матрицами *A* и *B*.

Примечание 7.4(П7.4). Для кронекеровской суммы квадратных матриц *A* и *B*, а в общем случае произвольного числа матриц, существует альтернативное название – *преобразование Сильвестра матриц*, что записывается в форме

$$A\oplus B\overset{\Delta}{=}A\otimes I_B+I_A\otimes B\overset{\Delta}{=}Si\{A,B\}. \qquad (7.9)$$

Для случая трех квадратных матриц *A, B, C* кронекеровская сумма или их преобразование Сильвестра будет записано в форме:

$$Si\{A,B,C\}=A\oplus B\oplus C=A\otimes I_B\otimes I_C+I_A\otimes B\otimes I_C+I_A\otimes I_B\otimes C. \qquad (7.10)$$

Отметим, что как и кронекеровское произведение матриц, кронекеровская сумма не коммутативна.

Кронекеровские матричные структуры, введенные выше, обладают следующими свойствами.

Свойство 7.2(СВ7.2). Алгебраический спектр собственных значений *кронекеровского произведения* $A\otimes B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ как *матричной функции от матриц* обладает тем свойством, что его элементы образованы *попарными произведениями* собственных значений *кронекеровски* перемножаемых матриц:

$$\sigma\{A\otimes B\}=\{\mu_k:\det(\mu I-A\otimes B)=0;\mu_k=\lambda_{Ai}\lambda_{Bj};i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};k=\overline{1,mn}\}. \qquad (7.11)$$

Свойство 7.3 (СВ7.3). Алгебраический спектр собственных значений *кронекеровской суммы* $A\oplus B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ как *матричной функции от матрицы* обладает тем свойством, что его элементы образованы *попарными суммами* собственных значений *кронекеровски* суммируемых матриц:

$$\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_l:\det(\nu I-A\oplus B)=0;\nu_l=\lambda_{Ai}+\lambda_{Bj};i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};l=\overline{1,mn}\}. \qquad (7.12)$$

В (7.11) и (7.12) λ_{Ai} и λ_{Bj} - собственные значения соответственно матриц A и B.

Сделаем следующее примечание к свойствам (СВ7.2) и (СВ7.3).

Примечание 7.5(П7.5). Алгебраические спектры собственных значений кронекеровских произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$ в силу (7.11) совпадают, аналогичным свойством в силу (7.12) обладают и спектры кронекеровских сумм $A \oplus B$ и $B \oplus A$.

Свойство 7.4(СВ7.4). Определитель кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n, \tag{7.13}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Свойство 7.5(СВ7.5). След кронекеровской суммы квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$tr(A \oplus B) = m \cdot trA + n \cdot trB, \tag{7.14}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Свойство 7.6 (СВ7.6). Ранг кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет условию:

$$rang(A \otimes B) = rangA \cdot rangB, \tag{7.15}$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Приведем без доказательств полезные свойства кронекеровских произведений —произвольных матриц, в справедливости которых читатель может убедиться самостоятельно.

Свойство 7.7 (СВ7.7).

Отформатировано: Уровень 1

$$(P \otimes Q)(W \otimes V) = PW \otimes QV. \tag{7.16}$$

Свойство 7.8 (СВ7.8).

Отформатировано: Уровень 1

$$(P + Q) \otimes R = P \otimes R + Q \otimes R, \tag{7.17}$$

$$P \otimes (Q + R) = P \otimes Q + P \otimes R, \tag{7.18}$$

$$P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q) \otimes R. \tag{7.19}$$

В (7.16) – (7.19) матрицы P, Q, R, W, V не должны противоречить правилам перемножения и сложения матриц.

Свойство 7.9(СВ7.9).

Отформатировано: Уровень 1

$$P \otimes Q = (P \otimes I_Q)(I_P \otimes Q), \tag{7.20}$$

$$(P_1 \otimes Q_1)(P_2 \otimes Q_2)\ldots(P_R \otimes Q_K) = (P_1 P_2 \ldots P_K) \otimes (Q_1 Q_2 \ldots Q_K) \tag{7.21}$$

$$(P \otimes Q)^{-1} = P^{-1} \otimes Q^{-1} \tag{7.22}$$

$$I \otimes (P_1 P_2 \ldots P_K) = (I_{P1} \otimes P_1)(I_{P2} \otimes P_2)\ldots(I_{PK} \otimes P_K). \tag{7.23}$$

В выражениях (7.20) – (7.23) $I_{(*)}$ – единичная матрица по размерности согласованная с матрицей (*).

Свойство 7.10 (СВ7.10). Оператор сужения кронекеровского произведения векторов с матрицей сужения S удовлетворяет соотношению

$$S(PX \otimes QZ) = S(P \otimes Q)(X \otimes Z). \tag{7.24}$$

7.2. Псевдообращение и псевдообратные матрицы

Псевдообращение матрицы - это процедура обращения необратимой, то есть *особенной* матрицы в силу того, что она либо является прямоугольной, либо~~или~~, будучи квадратной, имеет неполный ранг~~, или в силу того, что она прямоугольная~~. Псевдообращение матриц - ~~достаточно~~ относительно недавно разработанная~~молодая~~ процедура аппарата линейной алгебры. Разработка ее связана с такими именами зарубежных математиков как Фредгольм Э.И., Мур Э.Х., Пенроуз Р., Альберт А. и советских математиков как Гантмахер Ф.Р., Беклемишев Д.В. и других.

Отформатировано: Шрифт: курсив

В данном параграфе рассматривается процедура псевдообращения прямоугольных матриц. Для ~~погружение~~ погружения в проблему, вынесенную в заголовок параграфа, рассмотрим линейную алгебраическую систему (ЛАС), описывающую процесс отображения элемента x арифметического линейного пространства X^n в элемент y арифметического линейного пространства Y^m, записываемую в виде векторно–матричного соотношения

$$y = Ax. \tag{7.25}$$

В (7.25) A–$(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$– матрица, при этом $m \neq n$ так, что матрица A - прямоугольная. Ставится задача при известной паре (y, A) найти вектор x при условии, что матрица A – *необратима*, то есть не существует A^{-1}.

Для решения поставленной задачи представим ЛАС (7.25) в развернутой форме

$$y = Ax = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \,.\cancel{,} \tag{7.26}$$

Таким образом, вектор y есть линейная комбинация из векторов–столбцов $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ матрицы A, имеющая в качестве коэффициентов элементы $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ искомого вектора x, при этом задача обращения и состоит в поиске этих компонентов. Нетрудно видеть что, если вектор y принадлежит образу матрицы A $\{y \in \mathrm{Im}(A)\}$, то поставленная задача имеет точное решение, но это частный случай. Рассмотрим общий случай, когда выполняется условие $y \notin \mathrm{Im}(A)$. Для этого модифицируем первичную постановку задачи и сформулируем ее как задачу отыскания такого вектора $\hat{x}$:$\dim(\hat{x}) = \dim(x) = n$, который решает задачу минимизации нормы вектора невязки $\tilde{y}$ представления заданного вектора $y \notin \mathrm{Im}(A)$ в форме (7.26), коэффициентами которого

являются элементы вектора $\hat{x}$, и заданного вектора y, что записывается в виде

$$\hat{x} = \arg\min_{x}\{\|\tilde{y}\| = \|(y - Ax)\|\}. \qquad (7.27)$$

Соотношение (7.27) позволяет сформулировать *содержательное* определение *псевдообратной матрицы*.

Определение 7.5(О7.5). *Псевдообратной* матрицей A^{+} для $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A называется $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$ матрица, связывающая векторы $\hat{x}$ и y векторно–матричным соотношением

$$\hat{x} = A^{+}y. \qquad (7.28)$$

Примечание 7.6(П7.6). Если $m = n$ и $\dim\{\mathrm{Im}(A)\} = n$, то $\|\tilde{y}\| = \|(y - Ax)\| = 0,\ \hat{x} = x,\ A^{+} = A^{-1}$.

Формальное определение псевдообратной матрицы A^{+} таково.

Определение 7.6 (О7.6). *Псевдообратной* матрицей для $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A называется $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрица A^{+}, удовлетворяющая следующей системе условий:

$$\left.\begin{array}{l} 1. AA^{+}A = A; \\ 2. A^{+}AA^{+} = A^{+}; \\ 3. \left(AA^{+}\right)^{T} = AA^{+}; \\ 4. \left(A^{+}A\right)^{T} = A^{+}A; \end{array}\right\} \qquad (7.29)$$

Примечание 7.7(П7.7). Нетрудно видеть, что если матрица A обратима и существует A^{-1}, то соотношения (7.29) выполняются, если в них A^{+} заменить на A^{-1}.

Свойства псевдообращения:

1. Псевдообращение псевдообратимо: $\left(A^{+}\right)^{+} = A$;

2.Псевдообращение и транспонирование коммутативно: $\left(A^{T}\right)^{+} = \left(A^{+}\right)^{T}$;

3.Псевдообращение произведения скаляра на матрицу производится по правилу: $(\alpha A)^{+} = \alpha^{-1}A^{+}$;

4. $\left(AA^{+}\right)^{2} = AA^{+}$, $\left(A^{+}A\right)^{2} = A^{+}A$;

5. Псевдообращение произведения матриц производится по правилу: $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$,

если у матрицы A являются линейно независимыми столбцы, а у матрицы B являются линейно независимыми строки.

Рассмотрим способы псевдообращения прямоугольной $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$ матрицы A.

Первый способ применим для особого случая, когда $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ и *столбцы* матрицы A являются *линейно независимыми*, т.е. когда столбцовый

Отформатировано: Уровень 1

Отформатировано: Уровень 1

ранг матрицы удовлетворяет условию $\operatorname{rang}(A) = n$. Суть первого способа представим в виде утверждения.

Утверждение 7.1(У7.1). Если прямоугольная $(\mathrm{m} \times \mathrm{n})$ матрица A такова, что $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ и столбцы матрицы A являются линейно независимыми, то псевдообратная матрица A^+ для матрицы A задается формулой

$$A^+ = \left(A^T A\right)^{-1} A^T. \tag{7.30}$$

Доказательство утверждения строится на использовании ЛАС (7.25), которую необходимо умножить слева на матрицу A^T, в результате чего получим соотношение

$$A^T y = A^T A x. \tag{7.31}$$

В силу линейной независимости столбцов матрицы A $(\mathrm{n} \times \mathrm{n})$– квадратная матрица $A^T A$ оказывается обратимой, что позволяет разрешить ЛАС (7.31) относительно искомого вектора x в форме

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y, \tag{7.32}$$

откуда следует справедливость утверждения. ■

Примечание 7.8(П7.8). Применительная область первого способа псевдообращения в основном касается задач оценки параметров линейных моделей по экспериментальным данным, когда объем экспериментальных данных заметно превосходит число оцениваемых параметров. Проиллюстрируем эту ситуацию примером. В таблице 7.1 приведены экспериментальные данные некоторой зависимости двух переменных η и ρ, априори была высказана гипотеза об их линейной связи в форме

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1 \rho. \tag{7.33}$$

Ставится задача сформировать оценки $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_1$ параметров α_0 и α_1 линейной модели (7.33) по экспериментальным данным.

Таблица 7.1

Отформатировано: Уровень 1

i	1	2	3	4	5	6
η_i	0.8	1.2	2.2	2.4	3.1	3.6
ρ_i	0	1	2	3	4	5

Для ~~построение~~ построения аналитической базы формирования оценок запишем (7.33) в форме

$$1 \cdot \alpha_0 + \rho \cdot \alpha_1 = \eta,$$

допускающей представления

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \eta \Rightarrow H_i \alpha = \eta_i; \left(i = \overline{1,6}\right), \tag{7.34}$$

где $H_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho_i \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$.

Если теперь элементам строк H_i и элементу η_i придать значения из

таблицы 7.1 , то получим ЛАС вида (7.25), записанную в форме

$$\eta = H\alpha. \qquad (7.35)$$

В модели (7.35) $H-$ (6×2)–информационная необратимая матрица, $\eta-(6\times 1)$–вектор измерений. Вектор $\hat{\alpha}$ оценок параметров модели (7.33) ищется по схеме (7.28) с помощью псевдообратной матрицы H^{+}, вычисляемой с помощью (7.30), что можно записать в форме цепочки соотношений

$$\hat{\alpha} = H^{+}\eta = \left(H^{T}H\right)^{-1}H^{T}\eta. \qquad (7.35)$$

В (7.35) $H^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \eta^{T} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 & 2.2 & 2.4 & 3.1 & 3.6 \end{bmatrix}$,

что позволяет вычислить псевдообратную матрицу

$$H^{+} = \begin{bmatrix} 0.5238 & 0.3810 & 0.2381 & 0.0952 & -0.0476 & -0.1905 \\ -0.1429 & -0.0857 & -0.0286 & 0.0286 & 0.0857 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

и вектор оценок в форме

$$(\hat{\alpha})^{T} = \begin{bmatrix} 0.7952 & 0.5686 \end{bmatrix}.$$

В итоге модель (7.33) по результатам обработки экспериментальных данных с помощью процедуры псевдообращения получает представление

$$\eta = 0.7952 + 0.5686\rho. \qquad \blacksquare$$

Второй способ применим также для особого случая, когда $m < n$ и на этот раз *строки* матрицы A являются *линейно независимыми*, т.е. когда строчный ранг матрицы удовлетворяет условию $\mathrm{rang}(A) = m$. Тогда по аналогии с (7.30) для этого случая псевдообратная матрица A^{+} может быть вычислена с помощью формулы

$$A^{+} = A^{T}\left(AA^{T}\right)^{-1}. \qquad \blacksquare (7.36)$$

Третий способ сформирован для любой реализации отношения размерностей $m \neq n$–, т.е. он инвариантен относительно отношения порядка ~~$(<$ или $>)$~~. Метод основан на представлении псевдообращаемой $(m\times n)$ матрицы A в виде произведения матриц

$$A = BC, \qquad (7.37)$$

где $B-(m\times k)$–матрица с k–линейно независимыми столбцами, а $C-(k\times n)$–матрица с k–линейно независимыми строками. Тогда псевдообратная матрица A^{+} строится в соответствии с формулой

$$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}. \qquad (7.38)$$

Примечание 7.9(П7.9). Если $(m\times n)$ ~~- матрицы~~ матрица A имеет полный столбцовый ранг так, что $k = m$, то в (7.37) в качестве матрицы B может быть взята $(m\times m)$–единичная матрица. В свою очередь, если $(m\times n)$ ~~- матрицы~~ матрица A имеет полный строчный ранг так, что $k = n$, то в (7.37) в качестве матрицы C может быть взята $(n\times n)$–

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Уровень 1

единичная матрица.

Проиллюстрируем использование формулы (7.38) на примере Ф.Р. Гантмахера для пседообращения прямоугольной матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (7.39)$$

Нетрудно видеть, что матрица (7.39) имеет линейно зависимые строки и столбцы, причем число линейно независимых строк и столбцов $k=2$. Матрица A представима в форме

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=BC.$$

Тогда для матричных компонентов формулы (7.39) получим

$$B^TB=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix};\left(B^TB\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix};CC^T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix};\left(CC^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}.$$

Тогда, следуя формуле (7.36) получим

$$A^+=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 1/3\\ 1/9 & 1/9 & 2/9\\ 2/9 & -1/9 & 1/9\\ 4/9 & 1/9 & 5/9\end{bmatrix}. \qquad \blacksquare(7.40)$$

Четвертый способ, являющийся обобщением третьего способа, основан на разбиении $(m\times n)$ матрицы A на матричные блоки так, что она получает представление

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & F\end{bmatrix}, \qquad (7.41)$$

в котором матрица B - неособая квадратная, и такая, что $\operatorname{rang}(B)=\operatorname{rang}(A)$. Тогда псевдообратная $(n\times m)$–матрица A^+ может быть вычислена с помощью матричного выражения

$$A^+=\begin{bmatrix}B^T\\ C^T\end{bmatrix}\left(BB^T+CC^T\right)^{-1}B\left(B^TB+D^TD\right)^{-1}\left(B^TD^T\right). \qquad (7.42)$$

Проиллюстрируем использование формулы (7.42) на примере Ф.Р. Гантмахера для пседообращения прямоугольной матрицы (7.39), которую в соответствии с (7.41) ~~разобъем~~ разобьём на матричные блоки

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix},$$

подстановка которых в ~~подставляя которые в~~ матричную формулу (7.42) даст~~получим~~ псевдообратную матрицу (7.40). ■

Отформатировано: Уровень 1

Отформатировано: Уровень 1

Пятый способ псевдообращения $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A основан на использовании сингулярного разложения этой матрицы с помощью *SVD*–процедуры, позволяющего представить ее в виде

$$A = U\Sigma V^T, \tag{7.43}$$

где U,V – матрицы соответственно левого и правого сингулярных базисов, Σ –матрица сингулярных чисел, которая принимает вид:

при $\mathrm{m} < \mathrm{n}$

$$\Sigma = \left\lfloor \mathrm{diag}\left(\alpha_{\mathrm{i}}; i = \overline{1,m}\right) \middle| 0_{m\times(n-m)} \right\rfloor, \tag{7.44}$$

при $\mathrm{m} > \mathrm{n}$

$$\Sigma = \left[\frac{\mathrm{diag}\left(\alpha_{\mathrm{i}}; i = \overline{1,n}\right)}{0_{(m-n)\times m}} \right]. \tag{7.45}$$

Представление (7.43) $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A позволяет для псевдообратной $(\mathrm{n}\times\mathrm{m})$–матрицы A^+ записать

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T, \tag{7.46}$$

где ~~где~~ псевдообратная матрица сингулярных чисел Σ^+ принимает вид:

при $\mathrm{m} < \mathrm{n}$

$$\Sigma^+ = \left[\begin{matrix} \mathrm{diag}\left((\alpha_{\mathrm{i}})^{-1}; i = \overline{1,\mathrm{m}}\right) \\ 0_{(n-m)\times m} \end{matrix} \right], \tag{7.47}$$

при $\mathrm{m} > \mathrm{n}$

$$\Sigma^+ = \left\lfloor \mathrm{diag}\left((\alpha_{\mathrm{i}})^{-1}; i = \overline{1,\mathrm{n}}\right) \vdots 0_{n\times(m-n)} \right\rfloor. \tag{7.48}$$

Следует сказать, что псевдообращение в пакете Matlab всех версий осуществляется с помощью оператора *pinv(*)*, который построен на базе сингулярного разложения псевдообращаемой $(\mathrm{m}\times\mathrm{n})$-матрицы A.

Проиллюстрируем использование формулы (7.46) на примере для пседообращения прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \tag{7.49}$$

которая характеризуется свойством $\mathrm{m} > \mathrm{n}$. Сингуляроное разложение ~~дает~~ для матрицы A (7.49) дает

$$A = U\Sigma V^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.207 & 0.889 & 0.408 \\ -0.518 & 0.254 & -0.817 \\ -0.830 & -0.380 & 0.408 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25.437 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

Отформатировано: русский

$$\times\begin{bmatrix} -0.404 & -0.465 & -0.526 & -0.587 \\ -0.733 & -0.290 & 0.153 & 0.596 \\ 0.412 & -0.818 & 0.401 & 0.006 \\ 0.361 & -0.174 & -0.735 & 0.548 \end{bmatrix}.$$

Тогда псевдообратная матрица (7.46) получит представление

Отформатировано: Уровень 1

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T} = \begin{bmatrix} -0.404 & -0.733 & 0.412 & 0.361 \\ -0.465 & -0.290 & -0.818 & -0.174 \\ -0.526 & 0.153 & 0.401 & -0.735 \\ -0.587 & 0.596 & 0.006 & 0.548 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (25.437)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1.723)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} -0.207 & -0.518 & -0.830 \\ 0.889 & 0.254 & -0.380 \\ 0.408 & -0.817 & 0.408 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.375 & -0.100 & 0.175 \\ -0.146 & -0.033 & -0.017 \\ 0.083 & 0.083 & -0.017 \\ 0.312 & 0.100 & -0.112 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Шестой способ псевдообращения $(m \times n)$-матрицы A основан на использовании возможностей метода регуляризации А.Н. Тихонова. Суть шестого способа состоит в сведении процедуры псевдообращения $(m \times n)$-матрицы A к процедуре обращения квадратной матрицы, параметризованной регуляризирующей константной δ, с последующим предельным переходом обратной регуляризованной матрицы, элементы которой зависят от константы δ, к псевдообратной при $\delta \Rightarrow 0$. Аналитически это записывается в форме

$$A^{+} = \lim_{\delta \to 0}\left(A^{T}A + \delta I\right)^{-1} A^{T} = \lim_{\delta \to 0} A^{T}\left(AA^{T} + \delta I\right)^{-1}. \qquad (7.50)$$

Основным недостатком данного способа псевдообращения является необходимость аналитического обращения регуляризованной матрицы с помощи алгоритма Лапласа, что ограничивает область его использования матрицами невысокого порядка.

Тем не менее, проиллюстрируем способ на простом примере. Псевдообратим $(m \times n)$-матрицу A в виде матрицы–строки

$$A = [1 \quad 2 \quad 3]. \qquad (7.51)$$

Тогда следуя формуле (7.50), получим

Отформатировано: Уровень 1

$$A^+ = \lim_{\delta\to 0}\left(A^T A + \delta I\right)^{-1} A^T = \lim_{\delta\to 0}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} + \delta I\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta(14+\delta)}\begin{bmatrix}\delta+13 & -2 & -3\\ -2 & \delta+10 & -6\\ -3 & -6 & \delta+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta(14+\delta)}\begin{bmatrix}\delta\\2\delta\\3\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.714\\0.1429\\0.2143\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Седьмой способ псевдообращения $(m\times n)$-матрицы A основан на рекуррентной процедуре Гревиля. Суть метода состоит в следующем.

Запишем $(m\times n)$-матрицу A в столбцовой форме $A = [A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n]$. Сформируем матрицу Ak из первых k *столбцов* матрицы A так, что $A1 = A_1$, $A2 = [A_1 \quad A_2], \ldots An = A$. Тогда оказывается справедливой рекуррентная процедура:

1. при $k = 1$ $(A1)^+ = A_1^+ = \dfrac{A_1^T}{A_1^T A_1}$; (7.52)

Примечание 7.10(П7.10). Если в (7.52) $A1 = A_1 = 0$, то и $(A1)^+ = A_1^+ = 0.$ (7.53)

2. ~~2.~~ при $k > 1$ $(Ak)^+ = \begin{bmatrix}B_k\\b_k\end{bmatrix}$, $B_k = (A(k-1))^+ - d_k b_k$, $d_k = (A(k-1))^+ A_k$, b_k - последняя строка матрицы $(Ak)^+$. (7.54)

3. **Примечание 7.11(П7.11).** В рекуррентной процедуре (7.54),

если $A_k - (A(k-1))d_k = 0$, то $b_k = \left(1 + d_k^T d_k\right)^{-1} d_k^T (A(k-1))^+$, (7.55)

если $A_k - (A(k-1))d_k \neq 0$, то $b_k = (A_k - A(k-1)d_k)^+$. (7.56)

Проиллюстрируем алгоритм Гревиля на примере пседообращения прямоугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Тогда, используя (7.52), (7.54) получим

1. $k = 1$ $(A1)^+ = A_1^+ = \dfrac{A_1^T}{A_1^T A_1} = \dfrac{1}{6}[1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] = [1/6 \quad -1/6 \quad 1/3 \quad 0]$;

2. $k = 2$; $d_2 = A_1^+ A_2 = -3/2$;

Проверка условий (7.55)–(7.56), выполняется условие (7.56), тогда

Отформатировано: русский

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Цвет шрифта: Черный, ниже на 6 пт

Отформатировано: русский

Код поля изменен

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Цвет шрифта: Черный, английский (США), ниже на 6 пт

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: Шрифт: не полужирный

Отформатировано: русский

Отформатировано: Уровень 1

$$b_2 = (A_2 - A_1 d_2)^+ = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^+ = [1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2/3];$$

$$B_2 = (A_1)^+ - d_2 b_2 = [2/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1];$$

$$(A2)^+ = \begin{bmatrix} B_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix};$$

$$k = 3; \; d_3 = (A2)^+ A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверка условий (7.55)–(7.56), выполняется условие (7.55), тогда

$$b_3 = \left(1 + d_3^T d_3\right)^{-1} d_3^T (A2)^+ = [1/3 \quad 2/9 \quad 1/9 \quad 5/9];$$

$$B_3 = (A2)^+ - d_3 b_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix};$$

$$A^+ = (A3)^+ = \begin{bmatrix} B_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/9 & -1/9 & 1/9 \\ 1/3 & 2/9 & 1/9 & 5/9 \end{bmatrix}.$$

■

Отформатировано: Уровень 1

Примеры и задачи

Отформатировано: Уровень 1

7.1.Даны вектора–столбцы:

а) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

и вектора–строки:

з) $[15 \quad 14 \quad 13]$; и) $[12 \quad 11 \quad 10]$; к) $[9 \quad 8 \quad 7]$; л) $[6 \quad 5 \quad 4]$.

Построить кронекеровские произведения векторов на парах векторов по выбору.

7.2. Даны матрицы:

а) $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Отформатировано: английский (США)

д) $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Построить кронекеровские произведения пар матриц по выбору и вычислить элементы алгебраического спектра собственных значений этих произведений.

7.3. На матрицах примера 7.2 построить кронекеровские суммы пар матриц по выбору и вычислить элементы алгебраического спектра собственных значений построенных кронекеровских сумм.

7.4. Вычислить алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B$ матриц

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix}.$$

7.5. Вычислить псевдообратные матрицы для матриц–столбцов:

а) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}10\\11\\12\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}13\\14\\15\end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}$

и для матриц–строк:

з) $\begin{bmatrix}15 & 14 & 13\end{bmatrix}$; и) $\begin{bmatrix}12 & 11 & 10\end{bmatrix}$; к) $\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\end{bmatrix}$; л) $\begin{bmatrix}6 & 5 & 4\end{bmatrix}$

одним из приведенным в тексте раздела способов.

7.6. Даны прямоугольные матрицы:

а) $\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}4 & 7\\5 & 8\\6 & 9\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}7 & 10\\8 & 11\\9 & 12\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}10 & 13\\11 & 14\\12 & 15\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}3 & -6\\2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}$;

е) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$; з) $\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\10 & 11 & 12\end{bmatrix}$; и) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\6 & -4 & 2\end{bmatrix}$.

Вычислить псевдообратные матрицы одним из приведенных в тексте раздела способов ~~псевдообратные матрицы для приведенных выше~~.

Решение вариантов задач

Задача 7.4. Вычислить алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B$ матриц

$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\-10 & -7\end{bmatrix}$, имеющих спектры собственных значений:

$\sigma\{A\}=\{\lambda_{A1}=2,\lambda_{A2}=3\}$; $\sigma\{B\}=\{\lambda_{B1}=-2,\lambda_{B2}=-5\}$.

Тогда в соответствии с (7.12) для спектра $\sigma\{A\oplus B\}$ кронекеровской суммы матриц будем иметь $\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_1=2-2=0;\nu_2=2-5=-3;\nu_3=3-2=1;\nu_4=3-5=-2\}$.

Проверим полученный результат прямым вычислением спектра

Отформатировано: русский

Отформатировано: Уровень 1

собственных значений кронекеровской суммы матриц $\sigma\{A \oplus B\} = \{\nu_l : det(\nu I - A \oplus B) = 0; l = \overline{1, mn}\}$, для чего составим кронекеровскую сумму

$$A \oplus B = A \otimes I_B + I_A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Теперь составим характеристическое уравнение

$$det(\nu I - A \oplus B) = det \begin{bmatrix} \nu - 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & \nu + 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \nu - 3 & -1 \\ 0 & -1 & 10 & \nu + 4 \end{bmatrix} = \nu(\nu + 3)(\nu^2 + \nu - 2) = 0;$$

Полученное уравнение имеет решение $\{\nu_1 = 0; \nu_2 = -3; \nu_3 = 1; \nu_4 = -2\}$. ■

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Уровень 1

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ «ВХОД-ВЫХОД» (ВВ) ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Математическими моделями динамических объектов будем называть математический инструментарий, создаваемый вне аппаратной среды объекта, позволяющий изучать его поведение под воздействием физических сигналов (независимых переменных: задающих, командных, управляющих и возмущающих воздействий) с целью контроля степени близости изменения выходного сигнала объекта к желаемому его характеру. Этот математический инструментарий зависит от виды преобразуемых сигналов. Если преобразование сигналов происходит непрерывно по времени, то динамические объекты именуются *непрерывными*, а математический инструментарий преобразования сигналов строится на базе аппарата дифференциальных уравнений. Если преобразование сигналов происходит дискретно по времени с интервалом дискретности Δt в моменты времени $t = k(\Delta t)$, где k–дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности, то динамические объекты именуются *дискретными,* а математический инструментарий преобразования сигналов строится на базе аппарата *рекуррентных* (разностных) уравнений.

Так как аппарат дифференциальных и разностных уравнений связывает входной сигнал, размещаемый в правой части уравнений, а выходной – в их левой, то математические модели, основанные на указанных уравнениях, принято называть моделями «вход–выход» (ВВ).

К классу моделей ВВ относятся и передаточные функции, которые строятся на отношениях изображений Лапласа правой и левой частей линейных дифференциальных уравнений непрерывных объектов при их нулевом начальном состоянии и z–изображений правой и левой частей линейных рекуррентных (разностных) уравнений дискретных объектов также при нулевом начальном состоянии.

8.1. Математические модели ВВ непрерывных объектов управления. Весовая и передаточная функции

Рассмотрение проблем, вынесенных в заголовок параграфа, начнем с общего случая нелинейного непрерывного одномерного динамического объекта (ДО), то есть объекта, имеющего один вход и один выход, динамика которого в терминах «вход–выход» описываются нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y; g^{(m)}, g^{(m-1)}, ..., g; t) = 0, \qquad (8.1)$$

где $g(t)$ – входной (независимая переменная) сигнал объекта, $y(t)$ – выходная зависимая переменная объекта. Если осуществить линеаризацию уравнения (8.1) относительно некоторой траектории $y_0(t) = y\{g_0(t), t\}$, принятой за номинальную и зависимые переменные оставить в левой части, а независимые переменные в правой, то получим каноническое представление линейного (линеаризованного) дифференциального уравнения

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)y(t) = b_0(t)g^{(m)}(t) + ... + b_m(t)g(t). \tag{8.2}$$

Выражение (8.2) называют уравнением в отклонениях или в вариациях. Динамические объекты, математические модели которых могут быть представлены в виде уравнения (8.2), называются *непрерывными линейными (*точнее *линеаризованными) объектами*.

Если объект является стационарным по времени, то все коэффициенты уравнения (8.2) являются постоянными величинами, т.е. выполняются равенства $a_i(t) = a_i$, $i = \overline{0,n}$ и $b_j(t) = b_j$, $j = \overline{0,m}$ $\forall t$, так, что уравнение (8.2) может быть записано в виде

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_n y(t) = b_0 g^{(m)}(t) + ... + b_m g(t). \tag{8.3}$$

Итак, **первой математической моделью линейного непрерывного динамического объекта** с постоянными параметрами **является линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами типа «вход–выход»** вида (8.3).

Уравнение (8.3) допускает алгебраизацию. Действительно, если ввести обозначения

$\frac{d}{dt} = p, \frac{d^2}{dt^2} = p^2 \ldots \frac{d^i}{dt^i} = p^i, i = 1, n$, то оказываются справедливыми операторные алгебраические представления левой

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_n y(t) = \left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) y(t) = D(p) y(t)$$

и правой частей

$$b_0 g^{(m)}(t) + b_1 g^{(m-1)}(t) ... + b_m g(t) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots b_{m-1} p + b_0\right) g(t) = B(p) g(t)$$

Тогда дифференциальное уравнение (8.3) получает алгебраическое операторное представление

$$D(p)y(t) = B(p)g(t), \tag{8.4}$$

где p – символ *оператора дифференцирования* по времени. Заметим, что символ обратный p задает операции интегрирования в форме

$p^{-1}(*(t)) = \int (*(t))dt; \ldots; p^{-i}(*(t)) = \underbrace{\int \ldots \int}_{i} (*(t))\underbrace{dt \ldots dt}_{i}$. Принято полином

$$D(p)\big|_{p=\lambda} = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = D(\lambda)$$

именовать *характеристическим* полиномом линейного дифференциального уравнения (8.3).

Поставим задачу поиска явного представления зависимой переменной $y(t)$ путем решения дифференциального уравнения (8.3). Прежде, чем начать решение поставленной задачи, выскажем некоторое физическое суждение. Выходная зависимая переменная, очевидно, описывает движение объекта в некоторой системе координат. Физически причиной всякого движения являются два фактора: запасенная *энергия* и вынуждающая *сила*. Запасенная энергия определяется начальными условиями, в которых пребывал объект на момент $t_0 = 0$ начала его движения

$$y(0) = y_0^{(0)}, \dot{y}(0) = y_0^{(1)}, ..., y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \quad . \tag{8.5}$$

Вынуждающая сила представлена входной независимой переменной $g(t)$.

Тогда общее решение уравнения (8.3) справедливо на основе принципа *суперпозиции* причинно–следственных факторов, состоящем в том, что следствие от суммы причинных факторов представимо в виде суммы следствий от каждого из этих факторов, можно записать в форме

$$y(t) = y\left\{\left(y^{(i)}(0); i = \overline{0, n-1}\right), g(t), t\right\} = y\left\{\left(y^{(i)}(0); i = \overline{0, n-1}\right), t\right\} + y\{g(t), t\}. \tag{8.6}$$

Первое слагаемое $y\left\{\left(y^{(i)}(0); i = \overline{0, n-1}\right), t\right\}$ в выражении для переменной $y(t)$ носит название *свободная* составляющая движения и обозначается как $y_c(t)$, а второе слагаемое $y\{g(t), t\}$ носит названия *вынужденная* составляющая движения и обозначается как $y_в(t)$.Очевидно, общее решение дифференциального уравнения (8.3), записанное в форме $y(t) = y_c(t) + y_в(t)$ может быть сформировано *покомпонентно.* Компонент $y_c(t)$ ищется при условиях $y^{(i)}(0) \neq 0; i = \overline{0, n-1}$ и $g(t) = 0$, то есть при нулевой правой части (8.3). Компонент $y_в(t)$ ищется при условиях $y^{(i)}(0) = 0; i = \overline{0, n-1}$ и $g(t) \neq 0$ и всякий раз для каждого вида $g(t) \neq 0$ он свой.

Сформулируем утверждение.

Утверждение 8.1 (У8.1). Экспоненциальная функция

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} \tag{8.7}$$

является решением *однородного* дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n\text{-}1} y^{(n-1)}(t) + a_n y(t) = 0, \qquad (8.8)$$

полученного из *неоднородного* дифференциального уравнения (8.3) подстановкой в его правую часть $g(t) = 0$, если величина λ_k обнуляет характеристический полином $D(\lambda)$ так, что $D(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_k} = 0.$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке экспоненциальной функции (8.7) в левую часть однородного дифференциального уравнения (8.8). Тогда с учетом правила дифференцирования экспоненциальной функции (8.7) получим

$$\left(a_0\lambda_k^n + a_1\lambda_k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda_k + a_n\right)e^{\lambda_k t} = D(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_k} e^{\lambda_k t}. \qquad (8.9)$$

Если λ_k обнуляет характеристический полином $D(\lambda)$ так, что $D(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_k} = 0,$ то функция (8.7) обнуляет левую часть уравнения (8.8), становясь тем самым его решением. ■

Примечание 8.1 (П8.1). Экспоненциальная функция (8.7) является частным решением однородного уравнения (8.8). Общим решением уравнения (8.8), очевидно, является линейная комбинация решений вида (8.7) так, что для $y_c(t)$ можно записать

$$y_c(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t}, \qquad (8.10)$$

где все $\lambda_k\left(k = \overline{1,n}\right)$ являются корнями характеристического уравнения $D(\lambda) = 0.$ В (8.10) коэффициенты $C_k(k = \overline{1,n})$ определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + \ldots + C_n = y(0) \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_n C_n = y^{(1)}(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 + \lambda_2^{n-1} C_2 + \ldots + \lambda_n^{n-1} C_n = y^{(n-1)}(0) \end{array}\right\}. \qquad (8.11)$$

Очевидно, (8.11) можно записать в векторно–матричной форме $M_в(\lambda_i)C = Y(0)$, где $M_в(\lambda_i)$ – матрица Вандермонда, $C = col\left\{C_i; i = \overline{1,n}\right\}, Y(0) = col\left\{y^{(j)}(0); j = \overline{0,n-1}\right\}.$ Сказанное позволяет для C записать $C = M_в^{-1}(\lambda_i)Y(0).$

Примечание 8.2 (П8.2). Общее решение однородного дифференциального уравнения (8.8), представляющее собой

свободную составляющую движения, определяемого неоднородным дифференциальным уравнением (8.3), в форме (8.10) справедливо для случая, когда корни $\lambda_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ характеристического уравнения $D(\lambda)=0$, вещественны и не кратны. Если среди решений уравнения есть хотя бы одна пара комплексно–сопряженных корней, скажем, определенности ради $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$, то этой паре будет соответствовать два частных вещественных решения однородного дифференциального уравнения (8.8) вида

$$y_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ y_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t) \text{ при этом } y_k(t)=e^{\lambda_k t}, k=\overline{3,n}.$$

Если спектр корней уравнения $D(\lambda)=0$ вещественный, но один из них , скажем λ_1 имеет кратность, равную μ, то этому корню соответствуют μ частных вещественных решений однородного дифференциального уравнения вида

$$y_1(t)=e^{\lambda_1 t}, y_2(t)=te^{\lambda_1 t}, y_3(t)=\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t},\ldots y_\mu(t)=\frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\lambda_1 t}, \text{ при этом}$$

$$y_k(t)=e^{\lambda_k t}, k=\overline{(\mu+1),n}.$$

И наконец, если среди решений уравнения есть хотя бы одна пара комплексно–сопряженных корней, скажем, определенности ради $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$ и эта пара характеризуется кратностью равной μ, то этой паре будет соответствовать 2μ линейно независимых вещественных решений однородного дифференциального уравнения

$$y_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_3(t)=te^{\alpha t}\cos(\beta t), y_4(t)=te^{\alpha t}\sin(\beta t) y_4(t)=\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t},$$

$$\ldots, y_{2\mu-1}(t)=\frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_{2\mu}(t)=\frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\alpha t}\sin(\beta t), \text{ при этом}$$

$$y_k(t)=e^{\lambda_k t}, k=\overline{(2\mu+1),n}.$$

Перейдем к формированию вынужденной составляющей $y_в(t)=y\{g(t),t\}$ решения неоднородного дифференциального уравнения (8.3), для чего сформулируем утверждение.

Утверждение 8.2 (У8.2). Частная составляющая $y_{вk}(t)$ общего вынужденного решения $y_в(t)=y\{g(t),t\}$ неоднородного дифференциального уравнения (8.3) может быть сформирована в силу соотношения

$$y_{вk}(t)=e^{\lambda_k t}\eta_k(t), \tag{8.12}$$

в котором неизвестная функция $\eta_k(t)$ задается формулой

$$\eta_k(t)=\int_0^t \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{-\lambda_k\tau}g(\tau)d\tau, \text{ где} \qquad D'(\lambda_k)=\left.\frac{\partial D(p)}{\partial p}\right|_{p=\lambda_k}.$$

Тогда становится справедливым представление

$$y_{вk}(t)=e^{\lambda_k t}\eta_k(t)=\int_0^t \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau. \tag{8.13}$$

Доказательство утверждения предоставляется читателю. ■

Очевидно, вынужденная составляющая $y_в(t)=y\{g(t),t\}$ решения неоднородного дифференциального уравнения (8.3) на основании справедливости принципа суперпозиции и соотношения (8.13) может быть представлена в форме

$$y_в(t)=y\{g(t),t\}=\int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau. \tag{8.14}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (8.3) как аддитивная композиция свободной и вынужденной составляющей решения принимает вид

$$y(t)=y_c(t)+y_в(t)=\sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t}+\int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau. \tag{8.15}$$

Под *установившимся движением* $y_y(t)$ объекта понимается значение $y(t)$ при $t\to\infty$, это эквивалентно тому при условии, что объект *устойчив*, что установившееся движение описывается соотношением:

$$y_y(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t}+\int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau\right\}=\int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau \tag{8.16}$$

Остановимся еще на одной важной динамической характеристике отношения «вход – выход» непрерывного объекта (системы), именуемой *весовой функцией* объекта (системы). Содержательно весовой функцией $w(t)$ объекта называется реакция (отклик) объекта на внешнее воздействие вида дельта–функция $\delta(t)$ Дирака, задаваемое следующим образом

$$\delta(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\neq 0\\ \infty \text{ при } t=0\end{cases} \;\&\; \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1. \tag{8.17}$$

В силу интегрального свойства дельта–функция $\delta(t)$ Дирака «сворачивать интеграл в подинтегральную функцию», записываемого в форме

$$\int f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = f(t), \tag{8.18}$$

если в (8.14) положить $g(\tau)=\delta(\tau)$, получим реакцию (отклик) объекта на внешнее воздействие вида дельта–функция $\delta(t)$ Дирака в виде весовой функцией $w(t)$, определяемой выражением

$$w(t)=y\{g(t)=\delta(t),t\}=\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^{n}\frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k t}. \tag{8.19}$$

Второй и наиболее употребительной моделью «вход–выход» объекта (системы) является *передаточная функция*. Для конструирования передаточной функции «вход–выход» непрерывного объекта применим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (8.3) прямое преобразование Лапласа (см. приложение 1). В результате получим выражение

$$D(s)Y(s)-\sum_{i=0}^{n-1}D_i(s)y^{(n-1-i)}(0)=B(s)G(s). \tag{8.20}$$

В выражении (8.20)

$Y(s),G(s)$– лапласовы образы соответственно переменных $y(t)$и$g(t)$, вычисляемые в силу определения прямого преобразования Лапласа

$$Y(s)=L\{y(t)\}=\int_0^\infty y(t)\exp(-st)dt,\ G(s)=L\{g(t)\}=\int_0^\infty g(t)\exp(-st)dt,$$

$D_i(s)-$полиномы от s степени $i=\overline{n-1,0}$ вида $D_i(s)=a_0s^i+a_1s^{i-1}+\ldots+a_{i-1}s+a_i$, $y^{(n-1-i)}(0)$ – начальное значение $(n-1-i)-$й производной от выходной переменной $y(t)$, полиномы $D(\mathrm{s})=D(p)|_{p=s}, B(s)=B(p)|_{p=s}$. Разрешим соотношение (8.20) относительно $Y(s)$, тогда получим

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}D_i(s)y^{(n-1-i)}(0)}{D(s)}+\frac{B(s)}{D(s)}G(s). \tag{8.21}$$

Если к (8.21) применить обратное преобразование Лапласа, то получим представление выходной переменной $y(t)$ в форме (8.6)

$$y(t)=y\left\{y^{(i)}(0),t\right\}+y\{g(t),t\}=L^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{n-1}D_i(s)y^{(n-1-i)}(0)}{D(s)}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{B(s)}{D(s)}G(s)\right\}.(8.22)$$

Таким образом для свободной и вынужденной составляющей выходной переменной $y(t)$, а следовательно и решения дифференциального уравнения (8.3) становятся справедливыми представления

$$y_c(t)=y\left\{y^{(i)}(0),t\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{n-1}D_i(s)y^{(n-1-i)}(0)}{D(s)}\right\};\ y_в(t)=y\{g(t),t\}=L^{-1}\left\{\frac{B(s)}{D(s)}G(s)\right\},\ (8.23)$$

где $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)\exp(st)ds$, но практически вычисляется не с помощью взятия приведенного интеграла, а с помощью таблиц лапласовых образов наиболее употребительных функций (см.Приложение 1).

Рассмотрим теперь (8.21) при нулевых начальных значениях выходной переменной $y(t)$ и ее производных $y^{(n-1-i)}(0)=0$, тогда (8.21) позволяет сформировать представление передаточной функции

$$\Phi(\mathrm{s})=\frac{Y(s)}{G(s)}=\frac{B(s)}{D(s)}. \qquad (8.24)$$

Определение 8.1 (О8.1). Передаточной функцией «вход–выход» $\Phi(\mathrm{s})$ линейного стационарного непрерывного объекта называется отношение лапласова образа $Y(s)$ выходной переменной $y(t)$, вычисленного при нулевых начальных значениях самой переменной и всех ее производных $y^{(n-1-i)}(0)=0,\left(i=\overline{0,n-1}\right)$, к лапласову образу $G(s)$ входной независимой переменной $g(t)$.

Установим связь между весовой $w(t)$ и передаточной $\Phi(\mathrm{s})$ функциями, для этого рассмотрим вынужденную составляющую выхода в форме (8.21) при входной независимой переменной в виде дельта–функция $\delta(t)$ Дирака так, что $g(t)=\delta(t)$, или в лапласовых образах $G(s)=\Delta(\mathrm{s})$, где $\Delta(\mathrm{s})$ в силу интегрального свойства (8.18) «сворачивать интеграл в подинтегральную функцию» удовлетворяет цепочке соотношений

$$\Delta(\mathrm{s}) = L\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)\exp(-st)dt = \exp(-s\tau)\big|_{\tau=0} = 1. \qquad (8.25)$$

Нетрудно видеть, что становится справедливой запись

$$Y(s) = \frac{B(s)}{D(s)}G(s)\Big|_{G(s)=\Delta(s)=1} = \frac{B(s)}{D(s)} = \Phi(s)\ . \qquad (8.26)$$

Таким образом

$$w(t) = y(g(t) = \delta(t), t) = L^{-1}\left\{Y(s)\big|_{G(s)=\Delta(s)=1}\right\} = L^{-1}\{\Phi(s)\}, \qquad (8.27)$$

в свою очередь, если к (8.27) применить прямое преобразование Лапласа, получим

$$\Phi(\mathrm{s}) = L\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)\exp(-\mathrm{s}t)dt. \qquad (8.28)$$

В результате установлено, что весовая $w(t)$ и передаточная $\Phi(\mathrm{s})$ функции линейного непрерывного объекта являются взаимными лапласовыми трансформантами.

8.2. Математические модели ВВ дискретных объектов управления. Передаточная функция дискретных объектов

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, порождена тем, что в последнее время в практике управления непрерывными объектами появились технические средства цифрового (дискретного) управления. Такие технические средства реализуются в форме микро–ЭВМ, микроконтроллеров (МК) и микропроцессоров (МП), сопрягаемых с цифро–аналоговыми преобразователями (ЦАП) так, что на непрерывный объект (НО) подается «почти» непрерывный управляющий сигнал. Встает проблема построения единого математического описания процессов в функциональной цепи «МК–ЦАП–НО». Так как цифровая (дискретная) часть этой цепи работает с некоторым тактом длительности Δt по времени, то становится естественным переход от непрерывного времени к дискретному, состоящему в необходимости фиксировать все переменные в дискретные моменты $t = k(\Delta t)$ вуремени, где k–целое число, принимающее значения $k = 0,1,2,\ldots$ и смысл дискретного времени, выраженного в числе интервалов дискретности длительности Δt. Такой переход лишает исследователя возможности использовать аппарат дифференциальных уравнений так, как фиксированные в дискретные моменты времени значения переменных становятся разрывными, а потому недифференцируемыми.

Тем не менее, линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (8.3) исходного непрерывного объекта

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0 g^{(m)}(t) + \ldots + b_m g(t) \qquad (8.3)$$

может быть положены в основу построения дискретной модели функциональной цепи «МК–ЦАП–НО». Для этого в (8.3) от производных надо перейти к «отношению конечных малых» по следующей схеме

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \cong \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{y(k\Delta t + \Delta t) - y(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\{y(k+1) - y(k)\};$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \cong \frac{\Delta(\Delta y(t))}{(\Delta t)^2} = \frac{\Delta y(t+\Delta t) - \Delta y(t)}{(\Delta t)^2} = \frac{y(t+2\Delta t) - y(t+\Delta t) - y(t+\Delta t) + y(t)}{(\Delta t)^2} =$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^2}\{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)\};$$

$$\dddot{y}(t) = \frac{d^3 y(t)}{dt^3} \cong \frac{\Delta(\Delta(\Delta y(t)))}{(\Delta t)^3} = \frac{\Delta(\Delta y(t+\Delta t)) - \Delta(\Delta y(t))}{(\Delta t)^3} = \frac{\Delta y(t+2\Delta t) - 2\Delta y(t+\Delta t) + \Delta y(t)}{(\Delta t)^3} =$$

$$= \frac{y(t+3\Delta t) - y(t+2\Delta t) - 2y(t+2\Delta t) + 2y(t+\Delta t) + y(t+\Delta t) - y(t)}{(\Delta t)^3} =$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^3}\{y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k)\};$$

$$\vdots$$

$$y^{(m)}(t) \cong \frac{1}{(\Delta t)^m}\left\{\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i y(k+m-i)\right\}; \qquad (8.29)$$

В (8.29) C_m^i – число сочетаний из m по i, причем $C_m^0 = 1$.

Если представления (8.29) подставить в дифференциальное уравнение (8.3), то получим *рекуррентное уравнение* вида

$$\bar{a}_0 y(k+n) + \bar{a}_1 y(k+n-1) + \ldots + \bar{a}_n y(k) = \bar{b}_0 g(k+m) + \ldots + \bar{b}_m g(k). \qquad (8.30)$$

Рекуррентное уравнение (8.30) является **первой математической моделью отношения «вход-выход» дискретного объекта** (ДО) или дискретной математической моделью «вход-выход» непрерывного объекта.

Для алгебраизации процедур решения рекуррентного уравнения вида (8.30) введем в рассмотрение символ ς оператора сдвига переменных ДО по дискретному времени вправо.

Определение 8.2 (О8.1). Оператор сдвига переменной дискретного объекта на единицу дискретного времени «*вправо*» представляется в форме

$$\varsigma f(k) = f(k+1), \tag{8.31}$$

при этом операция сдвига переменной дискретного объекта на m единиц дискретного времени вправо представима в в форме

$$\varsigma^m f(k) = f(k+m). \tag{8.32}$$

Примечание 8.3 (П8.3). Очевидно, оператор сдвига переменных ДО «*влево*» по времени представим в форме ς^{-1} так, что оказываются справедливыми представления

$$\varsigma^{-1} f(k) = f(k-1), \varsigma^{-m} f(k) = f(k-m).$$

Если (8.32) применить к левой и правой частям рекуррентного уравнения (8.30), то получим алгебраическое соотношение

$$\overline{D}(\varsigma) y(k) = \overline{B}(\varsigma) g(k), \tag{8.33}$$

где
$$\left.\begin{aligned} \overline{D}(\varsigma) &= \overline{a}_0 \varsigma^n + \overline{a}_1 \varsigma^{n-1} + \ldots + \overline{a}_{n-1}\varsigma + \overline{a}_n, \\ \overline{B}(\varsigma) &= \overline{b}_0 \varsigma^m + \overline{b}_1 \varsigma^{m-1} + \ldots + \overline{b}_{m-1}\varsigma + \overline{b}_m \end{aligned}\right\}. \tag{8.34}$$

Принято полином

$$\overline{D}(\varsigma)\big|_{\varsigma=\overline{\lambda}} = \overline{a}_0 \overline{\lambda}^n + \overline{a}_1 \overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + \overline{a}_{n-1}\overline{\lambda} + \overline{a}_n = \overline{D}(\overline{\lambda})$$

именовать *характеристическим* полиномом линейного рекуррентного уравнения (8.30).

Поставим задачу поиска явного представления зависимой переменной $y(k)$ путем решения рекуррентного уравнения (8.30), как и в случае непрерывных объектов, опираясь на суперпозицию свободного и вынужденного движений дискретного объекта. Тогда общее решение уравнения (8.30) можно записать в форме

$$y(k) = y\left\{\left(y(i); i = \overline{0, n-1}\right), g(k), k\right\} = y\left\{\left(y(i); i = \overline{0, n-1}\right), k\right\} + y\{g(k), k\}. \tag{8.35}$$

Первое слагаемое $y\left\{\left(y(i); i = \overline{0, n-1}\right), k\right\}$ в выражении для переменной $y(k)$ носит название *свободная* составляющая движения и обозначается как $y_c(k)$, а второе слагаемое $y\{g(k), k\}$ носит названия *вынужденная* составляющая движения и обозначается как $y_в(k)$.Очевидно, общее решение рекуррентного уравнения (8.30), записанное в форме $y(k) = y_c(k) + y_в(k)$ может быть сформировано *покомпонентно.* Компонент $y_c(k)$ ищется при условиях $y(i) \neq 0; i = \overline{0, n-1}$ и $g(k) = 0$, то есть при нулевой правой части (8.30).

Компонент $y_в(k)$ ищется при условиях $y(i)=0; i=\overline{0,n-1}$ и $g(t)\neq 0$ и всякий раз для каждого вида $g(k)\neq 0$ он свой.

Сформулируем утверждение.

Утверждение 8.3 (У8.3). Показательная (степенная) функция

$$y_p(k)=\overline{\lambda}_p^k \tag{8.36}$$

является решением *однородного* рекуррентного уравнения

$$\overline{a}_0 y(k+n)+\overline{a}_1 y(k+n-1)+...+\overline{a}_{n\text{-}1} y(k+1)+\overline{a}_n y(k)=0, \tag{8.37}$$

полученного из *неоднородного* рекуррентного уравнения (8.30) подстановкой в его правую часть $g(k)=0$, если величина $\overline{\lambda}_p$ обнуляет характеристический полином $\overline{D}(\overline{\lambda})$ так, что $\overline{D}(\overline{\lambda})\big|_{\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_p}=0.$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке показательной функции (8.36) в левую часть однородного рекуррентного уравнения (8.37). В результате этой подстановки получим

$$\left(\overline{a}_0\overline{\lambda}_k^n+\overline{a}_1\overline{\lambda}_k^{n-1}+\ldots+\overline{a}_{n-1}\overline{\lambda}_k+\overline{a}_n\right)\overline{\lambda}_p^k=\overline{D}(\overline{\lambda})\big|_{\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_p}\overline{\lambda}_p^k. \tag{8.38}$$

Если $\overline{\lambda}_p$ обнуляет характеристический полином $\overline{D}(\overline{\lambda})$ так, что $\overline{D}(\overline{\lambda})\big|_{\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_p}=0,$ то функция (8.36) обнуляет левую часть уравнения (8.37), становясь тем самым его решением. ■

Примечание 8.4 (П8.4). Показательная функция (8.36) является частным решением однородного уравнения (8.37). Общим решением уравнения (8.37), очевидно, является линейная комбинация решений вида (8.36) так, что для $y_c(k)$ можно записать

$$y_c(k)=\sum_{p=1}^{n}\overline{C}_p\overline{\lambda}_p^k, \tag{8.39}$$

где все $\overline{\lambda}_p\left(p=\overline{1,n}\right)$ являются корнями характеристического уравнения $\overline{D}(\overline{\lambda})=0.$ В (8.39) коэффициенты $\overline{C}_p(p=\overline{1,n})$ определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\overline{C}_1+\overline{C}_2+\ldots+\overline{C}_n=y(0)\\ \overline{\lambda}_1\overline{C}_1+\overline{\lambda}_2\overline{C}_2+\ldots+\overline{\lambda}_n\overline{C}_n=y(1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{\lambda}_1^{n-1}\overline{C}_1+\overline{\lambda}_2^{n-1}\overline{C}_2+\ldots+\overline{\lambda}_n^{n-1}\overline{C}_n=y(n-1)\end{array}\right\}. \tag{8.40}$$

Очевидно, (8.40) также можно записать в векторно–матричной форме $M_в(\overline{\lambda}_i)\overline{C} = col\{y(i); i = \overline{0, n-1}\}$, где $M_в(\overline{\lambda}_i)$–матрица Вандермонда, $\overline{C} = col\{\overline{C}_i; i = \overline{1, n}\}$. Сказанное позволяет для $\overline{C}$ записать $\overline{C} = M_в^{-1}(\overline{\lambda}_i) col\{y(i); i = \overline{0, n-1}\}$.

Перейдем к формированию вынужденной составляющей $y_в(k) = y\{g(k), k\}$ решения неоднородного рекуррентного уравнения (8.30), для чего сформулируем предположение.

Предположение 8.1 (ПР8.1). Частная составляющая $y_{вр}(t)$ общего вынужденного решения $y_в(k) = y\{g(k), r\}$ неоднородного рекуррентного уравнения (8.30) может быть сформирована в силу соотношения

$$y_{вр}(k) = \overline{\lambda}_p^k \eta_p(k), \tag{8.41}$$

в котором неизвестная функция $\eta_p(k)$ ищется путем подстановки гипотетического решения в исходное рекуррентное уравнение (8.30) с целью получения соотношения относительно искомой функции $\eta_p(k)$, допускающего его явного разрешения относительно последней.

Разъяснения по поводу сформулированного предположения. Доказательство справедливости сделанного предположения и вид функции $\eta_p(k)$ будут приведены ниже при рассмотрении возможностей аппарата Z–преобразования дискретных последовательностей и их рекуррентных преобразований. ■

Очевидно, если сделанное предположение справедливо, то вынужденная составляющая $y_в(k) = y\{g(k), k\}$ решения неоднородного рекуррентного уравнения (8.30) на основании справедливости принципа суперпозиции может быть представлена в форме

$$y_в(k) = y\{g(k), k\} = \sum_{p=1}^{n} \eta_p(k) \overline{\lambda}_p^k. \tag{8.42}$$

Общее решение неоднородного рекуррентного уравнения (8.30) как аддитивная композиция свободной и вынужденной составляющей решения принимает вид

$$y(k) = y_c(k) + y_в(k) = \sum_{p=1}^{n} \overline{C}_p \overline{\lambda}_p^k + \sum_{p=1}^{n} \eta_p(k) \overline{\lambda}_p^k. \tag{8.43}$$

Второй и **наиболее употребительной моделью дискретного объекта (системы) «вход–выход»**, как и в случае непрерывных объектов, является ***передаточная функция***. Для конструирования передаточной функции «вход–выход» дискретного объекта применим к

линейному рекуррентному уравнению с постоянными коэффициентами (8.30) прямое Z–преобразование (см. приложение 2). В результате получим выражение

$$\overline{D}(z)Y(z)-\sum_{i=1}^{n}\overline{D}_i(z)y(n-i)=\overline{B}(z)G(z). \qquad (8.44)$$

В выражении (8.44)

$Y(z), G(z)$ – Z–образы соответственно переменных $y(k)$ и $g(k)$, вычисляемые в силу определения прямого Z–преобразования

$$Y(z)=Z\{y(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}y(k)z^{-k},\ G(z)=Z\{g(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)z^{-k},$$

$\overline{D}_i(z)$ – полиномы от z степени $i=\overline{n,1}$ вида $\overline{D}_i(z)=\overline{a}_0z^i+\overline{a}_1s^{i-1}+\ldots+\overline{a}_{i-1}z$, $y(n-i)$–значение выходной переменной $y(k)$ для $i=\overline{n,1}$, полиномы $\overline{D}(z)=\overline{D}(\varsigma)\big|_{\varsigma=z}, \overline{B}(z)=B(\varsigma)\big|_{\varsigma=z}$.

Разрешим соотношение (8.44) относительно $Y(z)$, тогда получим

$$Y(z)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{D}_i(z)y(n-i)}{\overline{D}(z)}+\frac{\overline{B}(z)}{\overline{D}(z)}G(z). \qquad (8.45)$$

Если к (8.45) применить обратное Z–преобразование, то получим представление выходной переменной $y(k)$ в форме (8.43)

$$y(k)=y_c\{k\}+y_в\{k\}=Z^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{D}_i(z)y(n-i)}{\overline{D}(z)}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{\overline{B}(z)}{\overline{D}(z)}G(z)\right\}. \qquad (8.46)$$

Таким образом, для свободной и вынужденной составляющей выходной переменной $y(k)$, а следовательно и решения рекуррентного уравнения (8.30) становятся справедливыми представления

$$y_c(k)=Z^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{D}_i(z)y(n-i)}{\overline{D}(z)}\right\};\ y_в(k)=Z^{-1}\left\{\frac{\overline{B}(z)}{\overline{D}(z)}G(z)\right\}, \qquad (8.47)$$

где $Z^{-1}\{F(z)\}=f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}F(z)z^{k-1}dz$, но практически вычисления проводятся не с помощью взятия приведенного интеграла по контуру

Γ, содержащему особые точки функции $F(z)$, а с помощью таблиц Z–образов наиболее употребительных функций (см.Приложение 2).

Примечание 8.5 (П8.5). Из представления (8.47) вынужденной составляющей выхода дискретного объекта и ее представления в форме (8.43) становится справедливой запись

$$\sum_{p=1}^{n} \eta_p(k)\bar{\lambda}_p^k = Z^{-1}\left\{\frac{\bar{B}(z)}{\bar{D}(z)}G(z)\right\},$$

из которой для конкретного исполнения элементов правой части могут быть определены функции $\eta_p(k), p=\overline{1,n}.$ ■

Рассмотрим теперь (8.45) при нулевых значениях выходной переменной $y(n-i)\left(i=\overline{n,1}\right)$, тогда (8.45) позволяет сформировать представление передаточной функции дискретного объекта

$$\bar{\Phi}(z)=\frac{Y(z)}{G(z)}=\frac{\bar{B}(z)}{\bar{D}(z)}. \qquad (8.48)$$

Определение 8.3 (О8.3). Передаточной функцией «вход–выход» $\Phi(z)$ линейного стационарного дискретного объекта называется отношение Z–образа $Y(z)$ выходной переменной $y(k)$, вычисленного при нулевых значениях $y(n-i)\left(i=\overline{n,1}\right)$ выходной переменной к Z–образу $G(z)$ входной независимой переменной $g(k)$. ■

В заключение сделаем полезное замечание. Передаточная функция, заданная в виде отношения двух полиномов, записанных по отрицательным степеням s^{-1} или z^{-1} соответственно для непрерывных и дискретных объектов (систем) с единичным свободным членом знаменателя, представляет собой решение графа, к которому может быть применено правило Мейсона не касающихся контуров в инверсной постановке. Суть инверсного использования правила Мейсона состоит в воссоздании класса графов с вложенными (касающимися) контурами минимальной размерности, эквивалентных в смысле решений этих графов в форме передаточной функции отношения «вход–выход». Построенный класс графов образует множество возможных структурных представлений динамических систем, исследуемых с использованием моделей «вход–выход».

Примеры и задачи

8.1. Найти полное движение объекта $\ddot{y}+9y=g(t)$, где $g(t)$=2cos3t, начальные условия $y(0)=2,\ \dot{y}(0)=1$; определить весовую и передаточную функцию объекта.

8.2. Найти полное движение дискретного объекта описываемого уравнением

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2g(k+1)+g(k),$$

где

$$g(k)=\begin{cases} k & \text{при } k \geq 0 \\ 0 & \text{при } k<0 \end{cases}, \quad y(0)=y(1)=1.$$

8.3. Определить полное движение следующих объектов, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=1, \quad y(0)=\dot{y}(0)=0$.

б) $\ddot{y}+4y=2$, где:

1. $g(t)=\cos 2t, \quad y(0)=\dot{y}(0)=0;$

2. $g(t)=\cos 2t, \quad y(0)=1;\ \dot{y}(0)=0;$

в) $\ddot{y}-2\dot{y}+5y=g(t)$, где $g(t)=e^{t}\cos 2t,\ y(0)=\dot{y}(0)=0$.

г) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=g(t)$, где $g(t)=te^{t}, y(0)=1;\ \dot{y}(0)=-2$.

д) $\ddot{y}+2\dot{y}+2y=2\dot{g}+2g$, где $g(t)=t,\ y(0)=0, \dot{y}(0)=1$.

е) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=g(t)$, где $g(t)=e^{2t}, y(0)=\dot{y}(0)=0$.

ж) $\ddot{y}+6\dot{y}+9y=9g$, где $g(t)=e^{3t},\ y(0)=\dot{y}(0)=0$.

8.4. Определить весовые функции следующих непрерывных объектов, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y}-4\dot{y}+5y=g; \quad б)\ddot{y}-4\dot{y}+3y=\dot{g}+2g;$

в) $\ddot{y}+5\dot{y}+6y=\dot{g}+g;$

8.5. Определить полное движение следующих дискретных объектов описываемых уравнениями:

а) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=k(-1)^{k}$, где $y(0)=1, y(1)=0.$

б) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=g(k+1)+2g(k)$, где

$$g(k)=\begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & k<0, y(0)=0, y(1)=1. \end{cases}$$

Решение вариантов задач

Решение задачи 8.1

1. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 9 = 0$ равны: $\lambda_1 = j3, \quad \lambda_2 = -j3$, поэтому общее решение однородного уравнения $\ddot{y} + 9y = 0$ равно

$y_c(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$.

2. По известным начальным условиям задачи составляем систему уравнений (8.11) относительно постоянных интегрирования c_1 и c_2, которая принимает вид

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = -2 \\ -3c_1 \sin 0 + 3c_2 \cos 0 = 1 \end{cases}.$$

Отсюда получаем $c_1 = -2$, $c_2 = 1/3$.

3. Определяем свободное движение объекта, которое на основании общего решения однородного уравнения равно

$y_c(t) = -2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$.

4. Поскольку для данной задачи $D(p) = p^2 + 9, B(p) = 1, \; D'_p = 2p$, то $D'(\lambda_1) = j6; D'(\lambda_2) = -j6$

5. Вынужденная компонента движения в соответствии (8.14) определяется соотношением

$$y_в(t) = \int_0^t \left(\frac{e^{j3(t-\tau)}}{j6} - \frac{e^{-j3(t-\tau)}}{j6} \right) 2\cos 3\tau d\tau = \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3(t-\tau) 2\cos 3\tau d\tau = \frac{1}{3} t \sin 3t$$

.

6. Полное движение объекта, удовлетворяющее заданным условиям, равно

$$y(t) = \frac{1}{3}(t+1)\sin 3t - 2\cos 3t. \qquad \blacksquare$$

9. МОДЕЛИ «ВХОД–СОСТОЯНИЕ–ВЫХОД» ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Переходя к рассмотрению проблем, вынесенных в заголовок раздела, зададим два вопроса. Первый вопрос: «В чем слабости моделей «вход–выход» (ВВ)? Второй вопрос: «Почему возник запрос на модели «вход–состояние – выход» (ВСВ)? Краткий ответ на оба вопроса приводится непосредственно ниже. Полный ответ читатель получит по прочтении настоящего раздела.

Оценивая класс моделей «вход – выход» динамических объектов (ДО), который исторически вырос из теории электрических цепей, следует отметить, что до определенного момента они модельно полностью удовлетворяли нуждам разработчиков динамических систем. По мере усложнения задач управления модель «вход – выход», которую в общем виде можно записать в явной форме

$$y(v) = \delta(u(v)),$$

где переменная $u(*)$ – входное воздействие, выполняющее функцию управляющего (для объекта) или задающего (для системы управления) воздействия, v принимает смысл непрерывного времени t в случае непрерывных ДО и смысл дискретного времени k – в случае дискретных, стала обнаруживать *системный изъян*, проявляющийся в *неоднозначности соответствия выхода одному и тому же значению входа*. Возникшую модельную проблему удалось разрешить с помощью процедуры *параметризации* соотношения $y(v) = \delta(u(v))$ так, что последнее получило представление

$$y(v) = \delta(x(v), u(v)),$$

где вектор параметров x именуется вектором состояния (или просто состоянием) динамического объекта. Таким образом, становится справедливым следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.0 (О9.0). Минимальный набор параметров, полностью снимающий неопределенность отношения « вход – выход» динамического объекта $y(v) = \delta(u(v))$, называется *вектором состояния* (или просто состоянием).

Функционально вектор состояния является *памятью* динамического объекта (системы). Системно состояние обладает:

- свойством *неразрывности*;
- *разделительным* свойством, которое делает поведение динамического объекта не зависящим от *предыстории* так, что если известно состояние ДО $x(v_s)$ в некоторый момент $v = v_s$, то движение объекта при $v \geq v_s$ будет однозначно определяться только состоянием $x(v_s)$ и сигналом управления $u(v)$ при $v \geq v_s$.

Переход от представления $y(v) = \delta(u(v))$ динамического объекта к параметризованной версии $y(v) = \delta(x(v), u(v))$ означает переход от

моделей ВВ к моделям типа ВСВ, свойства и возможности которых являются предметом настоящего раздела.

Погружение в аппарат ВСВ представлений начнем с общесистемных положений.

Определение 9.1. (О9.1) Динамическим объектом (объектом управления) называется восьмикомпонентный макровектор

$$\sum = \{U, X, Y, \Omega, \Gamma, \mathrm{T}, \lambda, \delta\}, \tag{9.1}$$

где U – множество мгновенных значений r-мерных входных (управляющих) воздействий $U \subset R^r$; X – множество n-мерных состояний $X \subset R^n$; Y – множество мгновенных значений m-мерных выходов $Y \subset R^m$; T – множество моментов времени, образующих интервал управления и наблюдения; $\Omega = \{U \times T\}$ – множество допустимых входных воздействий; $\Gamma = \{Y \times T\}$ – множество выходных величин; $\lambda : X \times T \times U \times T \Rightarrow X$ – функция перехода объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in \mathrm{T}$ в последующее состояние x в момент t при помощи входного воздействия $U \times (\tau, t), (\tau, t) \in T$; $\delta : X \times T \times U \times T \Rightarrow Y$ – функция выхода объекта, которая определяет правило получения мгновенного значения выхода Y в момент $t \in T$ при переходе объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ под воздействием входного воздействия $U \times (\tau, t), \quad (\tau, t) \in T$. □

В дальнейшем будем пользоваться редуцированным определением динамического объекта, опуская описание множеств Ω и Γ, т.е. определять динамический объект как шестикомпонентный макровектор

$$\sum = \{U, X, Y, T, \lambda, \delta\}. \tag{9.2}$$

В зависимости от структуры множеств и функций λ и δ все динамические объекты делятся на непрерывные динамические объекты (НДО); дискретные динамические объекты (ДДО); дискретные динамические объекты над конечными полями Галуа.

9.1 Модели ВСВ непрерывных объектов управления. Состояние и его свойства. Свободное и вынужденное движения непрерывных объектов. Фундаментальная и переходная матрицы. Построение моделей ВСВ непрерывных динамических объектов по передаточным функциям

Определение 9.2 (О9.2). *Непрерывными динамическими объектами (НДО)* называются динамические объекты, которые характеризуются бесконечностью множеств U, X и Y и континуальностью множеств моментов времени управления и наблюдения, $T = \{ t : t_0 \le t \le t_k \}$.

Функции перехода (λ) и выхода (δ) в непрерывных динамических объектах задаются в следующей форме:

$$\lambda : \dot{x}(t) = \lambda\{x(t), u(t)\}, \tag{9.3}$$

$$\delta : y(t) = \delta\{x(t), u(t)\}, \tag{9.4}$$

где $x \in X \subset R^n, u \in U \subset R^r, y \in Y \subset R^m$, $\dot{x}(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$. □

Если правила λ и δ в описании непрерывных объектов представимы в виде композиции линейных операций сложения и умножения матриц на вектор, то такие НДО являются *линейными*.

Тогда для линейных непрерывных динамических объектов описание функций λ и δ принимает вид:

$$\lambda : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \tag{9.5}$$

$$\delta : y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{9.6}$$

где $A - (n \times n) -$ матрица состояния объекта $\left(A \in R^{n \times n}\right)$, $B - (n \times r) -$ матрица управления (входа) $\left(B \in R^{n \times r}\right)$, $C - (m \times n) -$ матрица выхода $\left(C \in R^{m \times n}\right)$ и $D - (m \times r) -$ матрица вход–выход объекта $\left(D \in R^{m \times r}\right)$.

Следует заметить, что в большинстве физических объектов управление u является энергетически самой слабой переменной, в то время как выход объекта y требует заметных энергетических затрат, поэтому прямые связи со входа на выход, представленные матрицей D, чаще всего отсутствуют. В связи со сказанным в большинстве практических случаев матрица $D = 0$ и в дальнейшем при рассмотрении моделей объектов будет опускаться.

Очевидно, если в соответствии с (9.3)–(9.6) построить графы, используя: *интеграторы*, решающие задачу преобразования $\dot{x}(t) \Rightarrow x(t)$; нелинейные блоки $\lambda[x, u]$ и $\delta[x, u]$, а для линейного случая линейные блоки в виде матричных усилителей с матричными коэффициентами передачи A, B, C, D и сумматоров, то получим графические представления непрерывных динамических объектов в виде структурных схем рисунок 9.1 и рисунок 9.2.

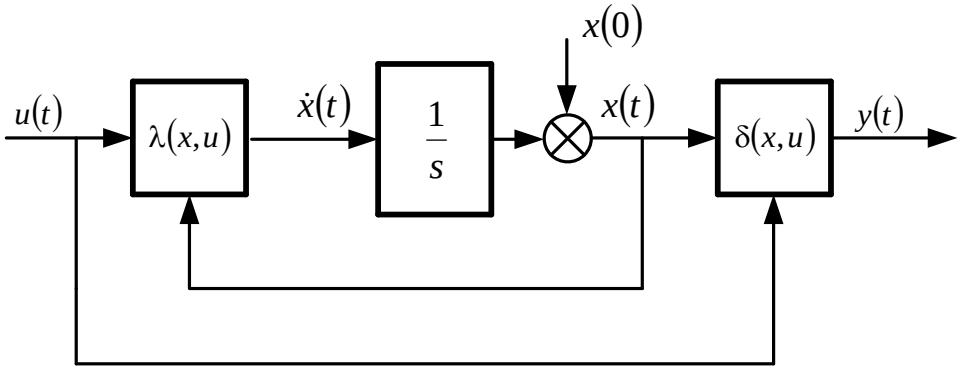


Рисунок 9.1

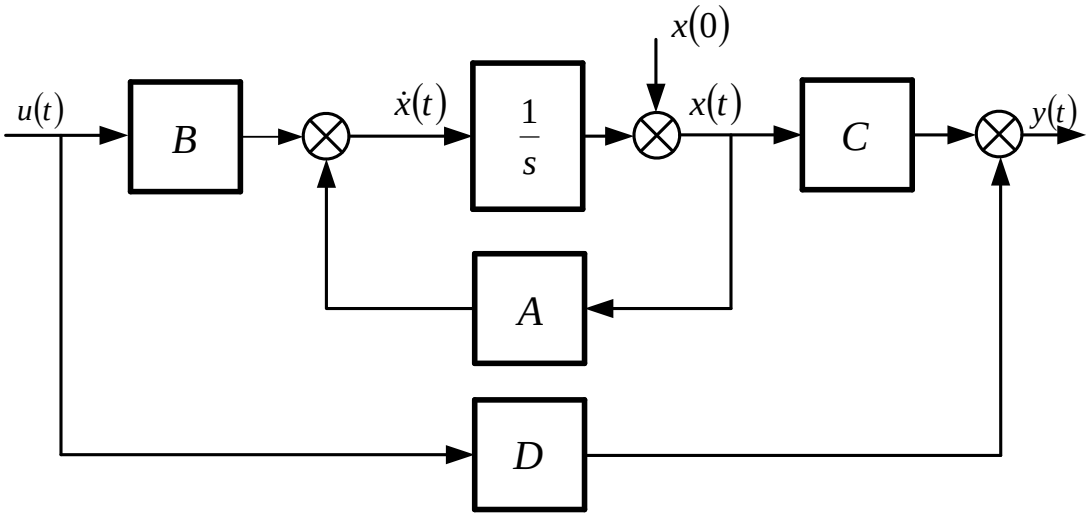


Рисунок 9.2

Модели вида (9.3) – (9.4) или в линейном случае (9.5) – (9.6) носят название канонических моделей ВСВ динамических объектов. Для непрерывных объектов эта модель является *дифференциальной*. Линейные модели состояния (9.5)–(9.6) непрерывных динамических объектов характеризуют динамическое отношение «вход–состояние–выход», которое позволяют построить модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы, (i, j)-ый элемент которой представляет собой передаточную функцию сепаратного канала, связывающего $i-$ый выход $y_i(t)$ с $j-$ым входом $u_j(t)$.

Действительно, если к (9.5)–(9.6) применить прямое преобразование Лапласа, то в соответствие с его свойствами получим

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s); Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

где $x(0) = x(t)|_{t=0}; U(s), X(s), Y(s) -$ векторные лапласовы образы соответственно векторных переменных $u(t), x(t), y(t)$.

Если полученные выражения разрешить относительно лапласовых образов выхода $Y(s)$ и входа $U(s)$, то получим

$$Y(s) = \left\{C(sI - A)^{-1}B + D\right\}U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0). \qquad (9.7)$$

В случае когда начальное состояние НДО (9.5)–(9.6) нулевое так, что $x(0) = 0$, то (9.7) принимает вид

$$Y(s) = \left\{C(sI - A)^{-1}B + D\right\}U(s) = \Phi(s)U(s),$$

где передаточная $(m \times r)-$ матрица $\Phi(s)$ имеет вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \qquad (9.8)$$

Заметим, что передаточная *матрица* в силу определения имеет *мультипликативное* представление так, как операции деления векторов друг на друга не существует, передаточная функция $\Phi_{ij}(s)$ (i, j)–го сепаратного канала НДО имеет *дивидендное* представление и в силу (9.8) принимает вид

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = C^i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \qquad (9.9)$$

где $C^i - i$–ая строка матрицы C, $B_j - j$–ый столбец матрицы B, D_{ij} – (i,j) – элемент матрицы D.

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект (ЛНДО), описываемый уравнениями (9.5)–(9.6), задающими модель ВСВ в *дифференциальной форме* с нулевой матрицей D:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t). \qquad (9.10)$$

Поставим задачу – отыскать *интегральную форму* модели ВСВ ЛНДО

$$x(t) = x\{x(0), u(t), t\}; \qquad y(t) = Cx(t).$$

Если воспользоваться *принципом суперпозиции*, который справедлив для линейных объектов, то можно записать

$$x(t) = x_{\text{с}}(t) + x_{\text{в}}(t),$$

где $x_{\text{с}}(t)$ – свободная составляющая движения, порожденная $x(0) \neq 0$, так что $x_{\text{с}}(t) = x[x(0), u(t) \equiv 0, t]$, $y_{\text{с}}(t) = Cx_{\text{с}}(t)$; $x_{\text{в}}(t)$ – вынужденная составляющая движения, порожденная $u(t) \neq 0$ так, что

$$x_{\text{в}}(t) = x\{u(t), x(0) \equiv 0, t\}, \quad y_{\text{в}}(t) = Cx_{\text{в}}(t)..$$

Для вычисления $x_{\text{с}}(t)$ положим в исходной модели $u(t) \equiv 0$ и получим однородное дифференциальное уравнение состояния $\dot{x}(t) = Ax(t), x(0)$. Будем искать $x(t)$ в форме $x(t) = \Phi(t)x(0)$, где $\Phi(t) - (n \times n)$ – матрица, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = I$.

Подстановка $x(t)$ в исходное однородное дифференциальное уравнение дает матричное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \qquad \Phi(0) = I.$$

Решение для $\Phi(t)$ будем искать в виде $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0) = e^{At}$. Прямая подстановка последнего выражения в матричное дифференциальное уравнение относительно $\Phi(t)$ приводит к тождеству $Ae^{At} = Ae^{At}$.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{с}}(t) &= \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0), \\ y_{\text{с}}(t) &= Cx_{\text{с}}(t) = C\Phi(t)x(0) = Ce^{At}x(0) \end{aligned}\right\}. \qquad (9.11)$$

Для вычисления вынужденной составляющей движения в исходном дифференциальном уравнении (9.10) положим $x(0) \equiv 0$, при этом будем искать составляющую в виде $x(t) = \Phi(t)z(t)$, где $z(t)$ – неизвестная *вектор–функция* со значениями из R^n. Если последнее выражение подставить в исходную модель ВСВ (9.10) , то получим

$$\dot{\Phi}(t)z(t)+\Phi(t)\dot{z}(t)=A\Phi(t)z(t)+Bu(t).$$

Если теперь учесть, что $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$, то нетрудно для $z(t)$ получить векторно–матричное уравнение в дифференциальной форме

$$\dot{z}(t)=\Phi^{-1}(t)Bu(t)$$

и соответственно в интегральной форме

$$z(t)=\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Последнее выражение позволяет для вынужденной составляющей движения непрерывного линейного объекта управления записать

$$x_{\text{в}}(t)=\Phi(t)z(t)=\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau=\int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau, \qquad (9.12)$$

где $\Phi(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$..

Для вынужденной составляющей $y_{в}(t)$ переменной выхода линейного непрерывного динамического объекта оказывается справедливым представление

$$y_{\text{в}}(t)=Cx_{\text{в}}(t)=\int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Общий вид интегральной модели «вход–состояние–выход» линейного непрерывного динамического объекта принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\\ y(t)&=C\Phi(t)x(0)+\int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d=Ce^{At}x(0)+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned}\right\}, \qquad (9.13)$$

где $\Phi(t)=e^{At}$, $\Phi(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)=e^{A(t-\tau)}$.

Интегральная запись (9/13) модели ВСВ ЛНДО позволяет ввести в рассмотрение три основные динамические матрицы линейного непрерывного объекта:

1. $\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица* объекта
2. $\Phi(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ – *переходная матрица* объекта
3. $w(t)=C\Phi(t,0)B=C\Phi(t)B$ – *весовая матрица* объекта, которая определяет реакцию ЛНДО на $u(t)=\delta(t)$–векторную $\delta-$функцию Дирака, которая в силу своих свойств сворачивает интеграл в подынтегральное выражение.

Следует также добавить, что $\delta-$функция является физически нереализуемой, тем не менее, реакция на нее может быть вычислена как свободная составляющая движения ЛНДО по выходу при $x(0)=B$.

Отметим основные свойства переходной матрицы линейного динамического объекта $\Phi(t,\tau)$:

1. $\Phi(\tau,\tau)=\Phi(t,t)=\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t)=I$;
2. $\Phi(t,\tau)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,\tau),\ \forall t,t_1,\tau$;
3. $\det\Phi(t,\tau)\neq 0,\ \forall t,\tau$;
4. $\Phi(t,\tau):\ \dot{\Phi}(t,\tau)=A\Phi(t,\tau),\quad \Phi(\tau,\tau)=I$;
5. $\Phi^{-1}(t,\tau)=\Phi(\tau,t),\ \forall t,\tau$;

матрица $\Phi^T(\tau,t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{\Phi}^T(\tau,t)=-A^T(t)\Phi^T(\tau,t),\ \Phi^T(\tau,\tau)=I.$$

Очевидно, что ключевыми моментами при изучении свойств интегральной модели «вход–состояние–выход» (9.13) линейных непрерывных объектов являются базис представления матрицы A состояния ЛНДО, свойства и способы вычисления матричной экспоненты e^{At}.

Приведем теперь *алгоритм построения* (*A*,*B*,*C*,*D*) – модельного «вход–состояние–выход» – представления линейных непрерывных динамических объектов (ЛНДО) (9.9),(9.10) по их передаточным функциям (матрицам) $\Phi(s)=Y(s)/U(s)$ отношения «вход-выход».

АЛГОРИТМ 9.1 (А9.1)

построения векторно-матричного ВСВ–представления ЛНДО с использованием моделей ВВ в виде передаточной функции

1. Выбрать базис ВСВ–представления ЛНДО вида (9.5),(9.6):

– канонический фробениусов строчный (управляемый);
– канонический фробениусов столбцовый (наблюдаемый);
– физический.

2. В случае:

2.1. Канонического фробениусова управляемого и канонического фробениусова наблюдаемого базисов записать передаточную функцию ВВ $\Phi(s)=Y(s)/U(s)$ в форме (8.24) отношения двух полиномов $B(s)/D(s)$, построенных по положительным степеням переменной s

$$\Phi(s)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\tilde{\alpha}_i s^{m-i}}{\sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j s^{n-j}}\quad \text{где } n>m; \tag{9.14}$$

2.2. Физического базиса записать передаточную функцию ВВ в виде произведения передаточных функций $\Phi_l(s)$ $l-$х последовательно соединенных функциональных компонентов таких как *исполнительный двигатель, усилительно–преобразовательное устройство, фильтр, корректирующее звено* и т.д., $\Phi(s)=\prod_l \Phi_l(s)$,

после чего каждую передаточную функцию $\Phi_l(s)$ записать в форме (9.14).

3. Записать передаточную функцию (9.14) по отрицательным степеням s^{-1} переменной s, для чего числитель и знаменатель передаточной функции (9.14) разделить на член знаменателя $\tilde{\beta}_0 s^n$, так что в знаменателе передаточной функции образуется свободный член равный единице, а передаточная функция (9.14) принимает вид

$$\Phi(s) \overset{\Delta}{=} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i s^{m-i-n}}{\sum_{j=0}^{n} \beta_j s^{-j}}, \qquad (9.15)$$

где $\beta_0 = 1$; $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_0^{-1}$; $\beta_j = \tilde{\beta}_j \tilde{\beta}_0^{-1}$.

4. Построить структурное модельное представление ЛНДО, описываемое передаточной функцией (ПФ) вида (9.15) с единичным свободным членом знаменателя, на основе использования правила Мейсона не касающихся контуров, в соответствие с которым передаточная функция имеет реализацию в форме n касающихся (вложенных в друг друга) *замкнутых контуров*, передаточные функции которых заданы мультипликативными структурами из постоянного коэффициента $(-\beta_j)$ и сомножителя (s^{-j}) *знаменателя*, а число *прямых ветвей* от входа к выходу структурной реализации ПФ (9.15) определяется числом ненулевых членов *числителя* с передаточными функциями $\alpha_i s^{m-i-n}$, количество которых не превосходит $m+1$.

5. Произвести разметку полученной в п.4 структурной реализации ПФ (9.15) с учетом того, что s^{-1} есть передаточная функция *интегрирующего звена (интегратора)*; при разметке *выходам* интеграторов в определенном порядке приписать переменные состояния $x_j\ (j = \overline{1,n})$, а *непосредственным входам* интеграторов приписать переменную $\dot{x}_j$ – производную по времени от переменной x_j.

6. Списать с размеченной в п.5 структурной реализации ПФ (9.15) матрицы A, B, C, D векторно-матричного ВСВ представления ЛНДО (9.5) и (9.6). ■

Примечание 9.1 (П9.1). Перед списанием со структурной схемы ЛНДО, построенной на интеграторах, сумматорах и усилителях необходимо воспользоваться линейностью модели динамического объекта с тем, чтобы не допустить разброса значений элементов матрицы состояния в столбцах и строках, превышающего десятичный порядок. Это может сделать высоким число обусловленности матрицы,

что повлечет за собой вычислительную неустойчивость всех расчетных матричных процедур.

9.2 Модели ВСВ дискретных объектов управления. Свободное и вынужденное движения дискретных объектов управления Связь матричных компонентов модельных представлений дискретных и непрерывных объектов

Определение 9.3 (О9.3). *Дискретными динамическими объектами (ДДО)* называются объекты, которые характеризуются той же, что и в непрерывном случае, структурой множеств U, X и Y, но множество моментов времени управления и наблюдения T становится дискретным (счетным) так, что $T = \{t : t = t_0 + k\Delta t, k = \overline{1, N}\}$, где Δt есть интервал дискретности, $N = (t_k - t_0)/\Delta t$ – максимальное число дискретных моментов времени управления и наблюдения на T. Если время на интервале управления и наблюдения измерять в числе k интервалов дискретности Δt, то T может быть задано в форме

$T = \{k : k = k_0 + i, i = \overline{0, N}\}$.

Функции перехода λ и выхода δ в дискретных динамических объектах управления задаются в следующей форме:

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \tag{9.16}$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \quad \square \tag{9.17}$$

В выражениях (9.16) и (9.17) время t выражено в числе k интервалов дискретности длительности Δt или, что то же самое, в числе тактов управления (наблюдения).

Для линейных дискретных динамических объектов векторно-матричное описание функций λ и δ записывается в форме:

$$\lambda : x(k+1) = \overline{A}x(k) + \overline{B}u(k), \tag{9.18}$$

$$\delta : y(k) = \overline{C}x(k) + \overline{D}u(k), \tag{9.19}$$

где $\overline{A}$ – $(n \times n)$ – матрица состояния; $\overline{B}$ – $(n \times r)$ – матрица входа; $\overline{C}$ – $(m \times n)$ – матрица выхода; $\overline{D}$ – $(m \times r)$ – матрица передачи со входа на выход (матрица «вход–выход»).

Очевидно, если в соответствии с (9.16)–(9.19) построить графы, используя: *элементы задержки* (ЭЗ), решающие задачу преобразования $x(k+1) \Rightarrow x(k)$; нелинейные блоки $\lambda[x, u]$ и $\delta[x, u]$, а для линейного случая линейные блоки в виде матричных усилителей с матричными коэффициентами передачи $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ и сумматоров, то получим графические представления дискретных динамических объектов в виде структурных схем рисунок 9.3 и рисунок 9.4.

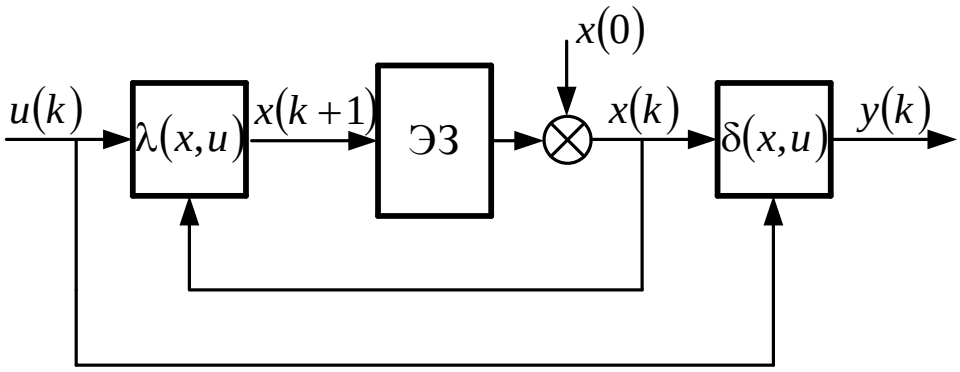


Рисунок 9.3

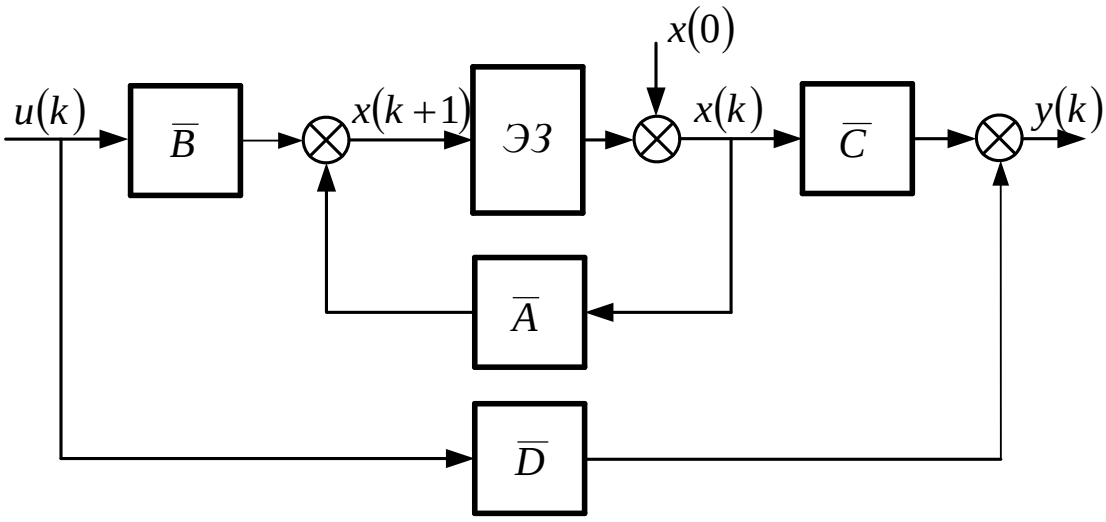


Рисунок 9.4

Модельное представление нелинейных дискретных динамических объектов (НДДО) в форме (9.16)–(9.17) и линейных дискретных динамических (ЛДДО) объектов в форме (9.18)–(9.19), а также в виде структурных схем рисунки 9.3 и 9.4 именуется *рекуррентным*.

Остановимся на способах построения матриц дискретного объекта на основе известных матричных компонентов исходного непрерывного и интервала дискретности. Основных способов два.

Первый способ основан на использовании интегральной модели исходного непрерывного объекта. *Интегральная форма* записи модели ВСВ (9.13) *непрерывного объекта* позволяет получить выражения для *матриц состояния и входа рекуррентной модели* «вход–состояние–выход» линейного *дискретного объекта*. Напомним содержательное отличие непрерывных и дискретных динамических объектов. Дискретный динамический объект реализует дискретную по времени с интервалом длительности Δt выборку из управляемых переменных по состоянию и выходу непрерывного динамического процесса. При этом переменные состояния между моментами выборки изменяются в соответствии с интегральной моделью состояния непрерывного

объекта, переменные выхода изменяются по такому же закону, а *переменные входа (управления)* между моментами выборки *фиксируются на уровне* значений в предыдущий момент выборки.

Учитывая сказанное, решим задачу вычисления состояния и выхода в момент $t = \Delta t$ на основании информации об их значении в момент $t = 0$. Тогда в соответствие с интегральной моделью ЛНДО (9.13) и учетом специфики сигнала управления, который фиксируется на весь интервал дискретности на уровне значения на момент начала текущего интервала, оказывается справедливой запись

$$\left.\begin{aligned} x(t)\big|_{t=\Delta t} &= x(\Delta t) = \left\{ e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right\}\Bigg|_{t=\Delta t} = e^{A\Delta t}x(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)}Bu(0)d\tau = \\ &= e^{A\Delta t}x(0) + e^{A\Delta t}\left(\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau}d\tau\right)Bu(0) = e^{A\Delta t}x(0) + e^{A\Delta t}\left(1 - e^{-A\Delta t}\right)A^{-1}Bu(0) = \\ &= e^{A\Delta t}x(0) + \left(e^{A\Delta t} - 1\right)A^{-1}Bu(0). \end{aligned}\right\} \quad (9.20)$$

В свою очередь на основании дискретного описания (9.18) оказывается справедливой система представлений

$$x(k+1) = \overline{A}x(k) + \overline{B}u(k),$$

или с учетом, что $(k+1),(k)-$экономное в смысле записи представление моментов времени $t + \Delta t = (k+1)\Delta t$ и $t = k\Delta t$ так, что (9.18) запишется в форме

$$x[(k+1)\Delta t] = \overline{A}x[(k)\Delta t] + \overline{B}u[(k)\Delta t]. \quad (9.21)$$

Если теперь положить в (9.21) $k = 0$ то, получим

$$x(\Delta t) = \overline{A}x(0) + \overline{B}u(0). \quad (9.22)$$

Сравнение левых и правых частей соотношений (9.20) и (9.22) обнаруживает справедливость записей

$$\overline{A} = e^{A\Delta t},\ \overline{B} = \left(e^{A\Delta t} - 1\right)A^{-1}B, \overline{C} = C \Leftrightarrow y(t) = Cx(t)\big|_{t=k\Delta t} \Rightarrow y(k) = \overline{C}x(k). \quad (9.23)$$

Второй способ основан на представлении производной отношением конечных малых приращений

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x((k+1)\Delta t) - x(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t}.$$

Если полученное приближенное представление производной $\dot{x}(t)$ подставить в модель (9.10) ЛНДО и разрешить относительно переменной $x(k+1)$, то получим рекуррентную запись

$$x(k+1) = (I + A\Delta t)x(k) + (B\Delta t)u(k), y(k) = Cx(k). \quad (9.24)$$

Сравнение рекуррентных представлений (9.18)–(9.19) с (9.24) позволяет записать

$$\overline{A} = I + A\Delta t, \overline{B} = B\Delta t, \overline{C} = C. \quad (9.25)$$

Сравнивая представления (9.23) и (9.25) матриц рекуррентного

представления дискретного объекта следует сказать, что представление (9.23) справедливо при любом значении интервала дискретности, не противоречащего условию теоремы Котельникова–Шеннона, а представление (9.25) справедливо только при $\Delta t = \arg\left\{ \frac{\|I + A\Delta t - \exp(A\Delta t\|}{\|\exp(A\Delta t)\|} \le \delta = 0.01 - 0.05 \right\}$.

Сформируем теперь *суммарную* модель линейного дискретного динамического объекта, являющуюся аналогом *интегральной* модели ЛНДО. Для формирования суммарной модели ЛДДО построим базу индукции на основе рекуррентного представления (9.18) по переменной k – дискретному времени:

1. k=0: $x(1) = \overline{A}x(0) + \overline{B}u(0)$,
2. k=1: $x(2) = \overline{A}x(1) + \overline{B}u(1) = \overline{A}^2 x(0) + A\overline{B}u(0) + \overline{B}u(1)$,
3. k=2: $x(3) = \overline{A}x(2) + \overline{B}u(2) = \overline{A}^3 x(0) + \overline{A}^2\overline{B}u(0) + \overline{A}\overline{B}u(1) + \overline{B}u(2)$.

База индукции построена, поэтому можно формировать представление $x(k)$, $\forall$k

$$x(k) = \overline{A}^k x(0) + \overline{A}^{k-1}\overline{B}u(0) + \overline{A}^{k-2}\overline{B}u(1) + \ldots + \overline{A}\overline{B}u(k-2) + \overline{B}u(k-1) = \\ = \overline{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i). \qquad (9.26)$$

При этом в силу (9.19) и (9.26) для выхода ЛДДО можно записать

$$y(k) = \overline{CA}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{CA}^{k-1-i}\overline{B}u(i) + \overline{D}(k). \qquad (9.27)$$

Нетрудно видеть, что выражения (9.26) и (9.27) позволяют дать представления для свободной и вынужденной составляющей движения ЛДДО по состоянию и выходу. Действительно, если переменные $x(k)$и $y(k)$ представить в виде аддитивной композиции свободной и вынужденной составляющих движения

$$x(k) = x\{x(0), u(k), k\} = x\{x(0),\ k\} + x\{u(k), k\} = x_c(k) + x_в(k), \qquad (9.28)$$

то из сравнения (9.28) и (9.27) получим представления для свободной и вынужденной составляющих движения по вектору состояния

$$x_c(k) = \overline{A}^k x(0); \quad x_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i), \qquad (9.29)$$

и по вектору выхода

$$y_c(k) = \overline{CA}^k x(0); \quad y_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{CA}^{k-1-i}\overline{B}u(i) + \overline{D}u(k). \qquad (9.30)$$

Линейные модели состояния (9.18)–(9.19) дискретных динамических объектов характеризуют динамическое отношение «вход–состояние–выход», которое позволяют построить модели

«вход–выход» в виде передаточной матрицы, (i, j)-ый элемент которой представляет собой передаточную функцию сепаратного канала, связывающего $i-$ый выход $y_i(k)$ с $j-$ым входом $u_j(k)$.

Действительно, если к (9.18)–(9.19) применить прямое Z–преобразование (см.Приложение 2), то в соответствие с его свойствами получим

$$z\{X(z)-x(0)\}=\overline{A}X(z)+\overline{B}U(z); Y(z)=\overline{C}X(z)+\overline{D}U(z),$$

где $x(0)=x(k)|_{k=0}; U(z), X(z), Y(z)-$векторные Z–образы соответственно векторных переменных $u(k), x(k), y(k)$. Если полученные выражения разрешить относительно Z–образов выхода $Y(z)$и входа $U(z)$, то получим

$$Y(z)=\left\{\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}\right\}U(z)+\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}zx(0). \qquad (9.31)$$

В случае когда начальное состояние ДДО (9.18)–(9.19) нулевое так, что $x(0)=0$, то (9.31) принимает вид

$$Y(z)=\left\{\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}\right\}U(z)=\overline{\Phi}(z)U(z),$$

где передаточная $(m\times r)-$ матрица $\overline{\Phi}(z)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}. \qquad (9.32)$$

Заметим, что передаточная *матрица* в силу определения имеет *мультипликативное* представление так, как операции деления векторов друг на друга не существует, передаточная функция $\overline{\Phi}_{ij}(z)$ (i, j)–го сепаратного канала НДО имеет *дивидендное* представление и в силу (9.32) принимает вид

$$\overline{\Phi}_{ij}(z)=\frac{y_i(z)}{u_j(z)}=\overline{C}^i(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}_j+\overline{D}_{ij}, \qquad (9.33)$$

где $\overline{C}^i-i-$ая строка матрицы $\overline{C}$, $\overline{B}_j-j-$ый столбец матрицы $\overline{B}$, $\overline{D}_{ij}-$ $(i,j)-$элемент матрицы $\overline{D}$.

Приведем теперь *алгоритм построения* $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})-$ модельного «вход–состояние–выход» – представления линейных дискретных динамических объектов (ЛДДО) (9.18),(9.19) по их передаточным функциям (матрицам) $\overline{\Phi}(z)=Y(z)/U(z)$ отношения «вход-выход».

АЛГОРИТМ 9.2 (А9.2)

построения векторно-матричного ВСВ–представления ЛДДО с использованием моделей ВВ в виде передаточной функции

1. Выбрать базис ВСВ–представления ЛДДО вида (9.18),(9.19):

– канонический фробениусов строчный (управляемый);
– канонический фробениусов столбцовый (наблюдаемый);
– физический.

2. В случае:

2.1. Канонического фробениусова управляемого и канонического фробениусова наблюдаемого базисов записать передаточную функцию ВВ $\overline{\Phi}(z)=Y(z)/U(z)$ в форме (8.48) отношения двух полиномов $\overline{B}(z)/\overline{D}(z)$, построенных по положительным степеням переменной z

$$\overline{\Phi}(z)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\overline{B}(z)}{\overline{D}(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\tilde{\alpha}_i z^{m-i}}{\sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j z^{n-j}} \quad \text{где } n>m; \tag{9.34}$$

2.2. Физического базиса записать передаточную функцию ВВ в виде произведения передаточных функций $\overline{\Phi}_l(z)$ $l-$х последовательно соединенных функциональных компонентов таких как *исполнительный двигатель, усилительно–преобразовательное устройство, фильтр, корректирующее звено* и т.д., $\overline{\Phi}(z)=\prod_l \overline{\Phi}_l(z)$, после чего каждую передаточную функцию $\overline{\Phi}_l(z)$ записать в форме (9.34).

3. Записать передаточную функцию (9.34) по отрицательным степеням z^{-1} переменной z, для чего числитель и знаменатель передаточной функции (9.34) разделить на член знаменателя $\tilde{\beta}_0 z^n$, так что в знаменателе передаточной функции образуется свободный член равный единице, а передаточная функция (9.34) принимает вид

$$\Phi(z)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\overline{\alpha}_i z^{m-i-n}}{\sum_{j=0}^{n}\overline{\beta}_j z^{-j}}, \tag{9.35}$$

где $\overline{\beta}_0=1$; $\overline{\alpha}_i=\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_0^{-1}$; $\overline{\beta}_j=\tilde{\beta}_j\tilde{\beta}_0^{-1}$.

4. Построить структурное модельное представление ЛНДО, описываемое передаточной функцией (ПФ) вида (9.15) с единичным свободным членом знаменателя, на основе использования правила Мейсона не касающихся контуров, в соответствие с которым передаточная функция имеет реализацию в форме n касающихся (вложенных в друг друга) *замкнутых контуров*, передаточные функции которых заданы мультипликативными структурами из постоянного коэффициента $(-\overline{\beta}_j)$ и сомножителя (z^{-j}) *знаменателя*, а число *прямых ветвей* от входа к выходу структурной реализации ПФ (9.15) определяется числом ненулевых членов *числителя* с передаточными функциями $\overline{\alpha}_i z^{m-i-n}$, количество которых не превосходит $m+1$.

5. Произвести разметку полученной в п.4 структурной реализации ПФ (9.15) с учетом того, что z^{-1} есть передаточная функция *элемента*

задержки на интервал дискретности (ЭЗ), при разметке *выходам* элементов задержки в определенном порядке приписать переменные состояния $x_j(k)(j=\overline{1,n})$, а *непосредственным входам* ЭЗ приписать переменную $x_j(k+1)$.

6. Списать с размеченной в п.5 структурной реализации ПФ (9.35) матрицы $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}$ векторно-матричного ВСВ представления ЛДДО (9.18) и (9.19). ■

Примечание 9.2 (П9.2). Перед списанием со структурной схемы ЛДДО, построенной на элементах задержки, сумматорах и усилителях необходимо воспользоваться линейностью модели динамического объекта с тем, чтобы не допустить разброса значений элементов матрицы состояния в столбцах и строках, превышающего десятичный порядок. Это может сделать высоким число обусловленности матрицы, что повлечет за собой вычислительную неустойчивость всех матричных процедур.

Завершим параграф кратким рассмотрением особого класса дискретных объектов над конечными полями Галуа, наиболее распространенными из которых являются двоичные динамические системы.

Определение 9.4 (О9.4). Если мощности множеств U входов, X состояний и Y выходов конечны, а множество моментов времени управления и наблюдения дискретно (счетно) так, что выраженное в числе интервалов дискретности (тактов) оно записывается в виде $T=\{k:k=k_0+i,i=\overline{0,N}\}$, то такой дискретный динамический объект называется *p–ичным дискретным динамическим объектом*. □

При этом векторные компоненты модельного представления *p*–ичных дискретных динамических объектов

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_r)^T\in U;$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in X;$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T\in Y,$$

характеризуются принадлежностью их элементов простому полю Галуа *GF*(*p*):

$$u_i,x_j,y_l\in GF(p)=\{\overline{0,p-1}\},\ i=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}.$$

В силу конечности простого поля Галуа мощности множеств U, X и Y также конечны и характеризуются значениями $[U]=p^r,[X]=p^n,[Y]=p^m$. В большинстве практических случаев характеристика *p* простого поля Галуа принимает значение *p*=2 так, что *GF*(*p*) =*GF*(2)={0,1}, при этом *p*–ичные дискретные динамические объекты становятся *двоичными динамическими системами* (ДДС), имеющими две реализационные версии: *нелинейные* ДДС (НДДС)–*конечные автоматы* и *линейные* ДДС (ЛДДС).

В теории конечных автоматов векторы входа u, состояния x и выхода y принято называть кодовыми последовательностями, кодовыми словами или просто кодами: код входа u, код состояния x, код выхода y.

Функции перехода и выхода λ и δ ДДС формально задаются в виде (9.16)–(9.17):

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \tag{9.36}$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \tag{9.37}$$

Аналитическое представление функций λ и δ в форме (9.36) и (9.37) при p=2 для НДДС – версии задается с использованием аппарата *булевых функций*, который опирается на исходное задание функций λ и δ в форме графов переходов и выходов автомата, а также их табличных аналогов. Аналитическое представление функций λ и δ в форме (9.36) и (9.37) при p=2 для ЛДДС – версии конструируются с использованием аппарата D - преобразования последовательностей над простым полем Галуа, позволяющего построить модельные представления в форме передаточных функций и векторно-матричных описаний «вход-состояние–выход» (ВСВ) в форме (9.18)–(9.19).

Подробное изучение ДДС в задачах преобразования двоичных кодов реализуется в рамках дисциплины «Прикладная теория информации».

9.3. Устойчивость как обязательное условие работоспособности динамических объектов. Условия устойчивости непрерывных и дискретных динамических объектов

Изучение проблемы, вынесенной в заголовок параграфа, начнем с содержательного определения устойчивости.

Определение 9.5 (О9.5). Устойчивостью называется такое системное свойство, при наличии которого начальное отклонение динамического процесса от желаемого его хода с течением времени убывает. □

Определение 9.6 (О9.6). Асимптотической устойчивостью называется такое системное свойство, при наличии которого начальное отклонение динамического процесса от желаемого его хода с течением времени стремится к нулю. □

Если вернуться к представлениям процессов по вектору состояния и выхода в линейных непрерывных и линейных дискретных динамических объектах, рассмотренных в двух предыдущих параграфах настоящего раздела, то нетрудно вспомнить, что источником движения являются два фактора: запасенная энергия, определяемая ненулевым начальным состоянием, и вынуждающая сила, которой является управляющее воздействие. Каждому из перечисленных причинных факторов соответствует своя составляющая

движения: первому причинному фактору соответствует свободная составляющая движения, а второму – вынужденная составляющая движения. Вынужденная составляющая движения определяет желаемый ход динамического процесса, а свободное движение определяет отклонение динамического процесса от желаемого хода.

Таким образом, может быть сформулировано содержательное условие устойчивости.

Определение 9.7 (О9.7). Динамический объект независимо от его непрерывной или дискретной природы будет устойчив при условии, что свободная составляющая движения в нем по зависимым переменным: вектору состоянию и вектору выхода будет с течением временем убывать, а в случае асимптотической устойчивости стремиться к нулю.

Таким образом, исследование устойчивости непрерывных и дискретных динамических объектов сводится к исследованию условий, при которых свободная составляющая движения по их зависимым переменным с течением времени убывает и даже стремится к нулю.

Очевидно, если свободная составляющая с течением времени не убывает, а напротив расходится, то движение динамического объекта удаляется от желаемого его хода, объект становится неработоспособным, т.е. перестает выполнять предписанные ему функции

Поэтому *устойчивость* динамического объекта является первым обязательным *условием его работоспособности*.

Условия устойчивости непрерывных динамических объектов

Как отмечено в преамбуле данного параграфа, системное свойство устойчивости линейного непрерывного динамического объекта можно идентифицировать по убыванию (а в случае асимптотической устойчивости стремлению к нулю) свободного движения зависимых переменных к нулю. Для установления условий устойчивости по свободной составляющей движения ЛНДО (9.5)–(9.6) ограничимся автономной версией его представления

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0)\,; y(t) = Cx(t). \qquad (9.38)$$

В (9.38) компоненты записи имеют тот же смысл и размерности, что и в (9.5)–(9.6). Решение системы (9.38), как показано в параграфе 9.1., имеет вид

$$x(t) = e^{At}x(0),\ y(t) = Ce^{At}x(0). \qquad (9.39)$$

Рассмотрим три возможные структуры $\sigma(A)$ алгебраического спектра собственных значений матрицы A.

1.Простая вещественная структура собственных значений матрицы: $\sigma(A) = \left\{ \lambda_i : \det(\lambda I - A) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; Jm(\lambda_{i,j}) = 0; i, j = \overrightarrow{1,n} \right\}$. В этом случае матрица A приводима к диагональному представлению

$\Lambda = \mathrm{diag}\left\{ \lambda_i ; i = \overline{1,n} \right\}$ с помощью матрицы M преобразования подобия в форме $A = M\Lambda M^{-1} = M\mathrm{diag}\left\{ \lambda_i ; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}$. Известно, что матричное условие подобия сохраняется для матричных функций от матриц в форме $f(A) = Mf(\Lambda)M^{-1}$.Тогда становится справедливым представление решения (9.39) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = Me^{\Lambda t}M^{-1}x(0) = M\mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t} ; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}x(0), \\ y(t) &= Cx(t) = CM\mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t} ; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}x(0). \end{aligned}\right\}$$

Переход к векторным и матричным нормам для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ с учетом свойств норм позволяет записать

$$\|x(t)\| = \left\| M\mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t} ; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}x(0) \right\| \le \|M\| \left\| \mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t} ; i = \overline{1,n} \right\} \right\| \left\| M^{-1} \right\| \left\| x(0) \right\|_{\|x(0)\|=1} =$$

$$= C\{M\} e^{\lambda_M t} \tag{9.40}$$

В (9.40) и ниже $C\{(*)\}$ – число обусловленности матрицы $(*)$.

2. Простая комплексно–сопряженная структура собственных значений матрицы: $\sigma(A) = \left\{ \lambda_l : \det(\lambda I - A) = 0; \lambda_l = \alpha_l \pm j\beta_l ; l = \overline{1, n/2} \right\}$. В этом случае матрица A приводима к блочно–диагональному представлению $\tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}\left\{ \tilde{\Lambda}_l = \begin{bmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{bmatrix} ; l = \overline{1, n/2} \right\}$ с помощью матрицы $\tilde{M}$ преобразования подобия в форме $A = \tilde{M}\tilde{\Lambda}\tilde{M}^{-1} = \tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ \tilde{\Lambda}_l = \begin{bmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{bmatrix} ; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.39) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = \tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ e^{\tilde{\Lambda}_l t} = e^{\alpha_l t} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix} ; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1}x(0), \\ y(t) &= Cx(t) = C\tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ e^{\tilde{\Lambda}_l t} = e^{\alpha_l t} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix} ; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1}x(0). \end{aligned}\right\}$$

Если теперь перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ с учетом свойств норм в том числе и того, что $\left\| \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix} \right\| = 1$ при $\|x(0)\| = 1$ получим

$$\|x(t)\| = \left\| \tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ e^{\tilde{\Lambda}_l t} = e^{\alpha_l t} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix} ; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1} \right\| \le C\{\tilde{M}\} e^{\alpha_M t}. \tag{9.41}$$

3.Кратная вещественная структура собственных значений (простоты

ради будем полагать кратность $\mu = n$) матрицы: $\sigma(A) = \{ \lambda_i = \alpha : \det(\lambda I - A) = 0; Jm(\alpha) = 0; i = \overrightarrow{1,n} \}$. В этом случае матрица A приводима к жордановой форме $J(\alpha) = \mathrm{col}\{ \alpha \;\; 1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0, 0 \;\; \alpha \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 0, \ldots, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; \alpha \;\; 1, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; \alpha \}$, представляемой в виде матричной аддитивной композиции $J(\alpha) = \Lambda(\alpha) + J(0)$, с помощью матрицы T преобразования подобия в форме $A = TJ(\alpha)T^{-1} = T\{\Lambda(\alpha) + J(0)\}T^{-1}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.39) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Te^{\alpha t}e^{J(0)t}T^{-1}x(0) = T\left\{ e^{\alpha t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \ldots & t^{(n-2)}/(n-2)! & t^{(n-1)}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \ldots & t^{(n-3)}/(n-3)! & t^{(n-2)}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & t^{(n-4)}/(n-4)! & t^{(n-3)}/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} T^{-1}x(0), \\ y(t) &= Cx(t) = CTe^{J(\alpha)t}T^{-1}x(0) \end{aligned}\right\}$$

Если теперь в полученном выражении перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ с учетом свойств норм и того, что $\left\|e^{J(0t)}\right\| = \sum_{i=0}^{n-1} t^i/(i!)$ при $\|x(0)\| = 1$ получим

$$\|x(t)\| = \left\|Te^{J(\alpha)t}T^{-1}x(0)\right\| = \left\|Te^{\alpha t}e^{J(0)t}T^{-1}x(0)\right\| \le C\{T\}e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{n-1} t^i/(i!). \qquad (9.42)$$

Анализ решений автономной системы (9.38) для трех возможных структур алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния позволяет сделать вывод о том, что *необходимым и достаточным условием* выполнения предельных переходов для зависимых переменных в виде векторов состояния и выхода $\lim_{t\to\infty}\{x(x(0),t)\} = 0$ и $\lim_{t\to\infty}\{y(x(0),t)\} = 0$ является отрицательность вещественных частей всех собственных значений $\{Re(\lambda_i) < 0; i = \overline{1,n}\}$. Это же является условием устойчивости исходной модели ЛНДО (9.5)–(9.6).

Условия устойчивости дискретных динамических объектов

Как и для случая непрерывных ДО для установления условий устойчивости по свободной составляющей движения ЛДДО (9.18)–(9.19) ограничимся автономной версией его представления

$$x(k+1) = \bar{A}x(k), x(0)\,; y(k) = \bar{C}x(k). \qquad (9.43)$$

В (9.43) компоненты записи имеют тот же смысл и размерности, что и в (9.18)–(9.19). Решение системы (9.43), как показано в параграфе 9.2.,

имеет вид

$$x(k)=\overline{A}^k x(0),\ y(k)=\overline{CA}^k x(0). \qquad (9.44)$$

Как и в непрерывном случае рассмотрим три возможные структуры $\sigma(\overline{A})$ алгебраического спектра собственных значений матрицы $\overline{A}$.

1.Простая вещественная структура собственных значений матрицы: $\sigma(\overline{A})=\left\{\overline{\lambda}_i : \det(\overline{\lambda}I-\overline{A})=0; \overline{\lambda}_i \neq \overline{\lambda}_j; i\neq j; Jm(\overline{\lambda}_{i,j})=0; i,j=\overline{1,n}\right\}$. В этом случае матрица $\overline{A}$ приводима к диагональному представлению $\overline{\Lambda}=\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i; i=\overline{1,n}\right\}$ с помощью матрицы $\overline{M}$ преобразования подобия в форме $\overline{A}=\overline{M}\overline{\Lambda}\overline{M}^{-1}=\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}$. Воспользуемся свойством сохранения матричного условия подобия для матричных функций от матриц в форме $f(\overline{A})=\overline{M}f(\overline{\Lambda})\overline{M}^{-1}$.Тогда становится справедливым представление решения (9.44) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(k)&=\overline{A}^k x(0)=\overline{M}\overline{\Lambda}^k\overline{M}^{-1}x(0)=\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}x(0),\\ y(k)&=\overline{C}x(k)=\overline{C}\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}x(0).\end{aligned}\right\}$$

Переход к векторным и матричным нормам для нормы $\|x(k)\|$ вектора состояния $x(k)$ с учетом свойств норм позволяет записать

$$\|x(k)\|=\left\|\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}x(0)\right\|\le\|\overline{M}\|\left\|\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\right\|\left\|\overline{M}^{-1}\right\|\|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}=$$
$$=C\{\overline{M}\}\overline{\lambda}_M^k \qquad (9.45)$$

2. Простая комплексно–сопряженная структура собственных значений матрицы:

$\sigma(\overline{A})=\left\{\overline{\lambda}_l : \det(\overline{\lambda}I-\overline{A})=0; \overline{\lambda}_l=\overline{\alpha}_l\pm j\overline{\beta}_l=|\overline{\lambda}_l|(\cos(\phi_l)\pm j\sin(\phi_l)); l=\overline{1,n/2}\right\}$. В этом случае матрица $\overline{A}$ приводима к блочно–диагональному представлению

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}=\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l=\begin{bmatrix}\overline{\alpha}_l & \overline{\beta}_l\\ -\overline{\beta}_l & \overline{\alpha}_l\end{bmatrix}=\left(|\overline{\lambda}_l|\right)\begin{bmatrix}\cos(\phi_l) & \sin(\phi_l)\\ -\sin(\phi_l) & \cos(\phi_l)\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}$$ с

помощью матрицы $\tilde{\overline{M}}$ преобразования подобия в форме $\overline{A}=\tilde{\overline{M}}\tilde{\tilde{\Lambda}}\tilde{\overline{M}}^{-1}=\tilde{\overline{M}}\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l=\begin{bmatrix}\overline{\alpha}_l & \overline{\beta}_l\\ -\overline{\beta}_l & \overline{\alpha}_l\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}\tilde{\overline{M}}^{-1}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.44) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(k)&=\overline{A}^k x(0)=\tilde{\overline{M}}\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l^k=\left(|\overline{\lambda}_l|\right)^k\begin{bmatrix}\cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l)\\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l)\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}\tilde{\overline{M}}^{-1}x(0),\\ y(k)&=\overline{C}x(k)=C\tilde{\overline{M}}\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l^k=\left(|\overline{\lambda}_l|\right)^k\begin{bmatrix}\cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l)\\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l)\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}\tilde{\overline{M}}^{-1}x(0).\end{aligned}\right\}$$

Если теперь перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(k)\|$ вектора состояния $x(k)$ с учетом свойств норм в том

числе и того, что $\left\| \begin{bmatrix} \cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l) \\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l) \end{bmatrix} \right\| = 1$ при $\|x(0)\| = 1$ получим

$$\|x(k)\| = \left\| \tilde{\overline{M}} \operatorname{diag} \left\{ \tilde{\tilde{\Lambda}}_l^k = (|\lambda_l|)^k \begin{bmatrix} \cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l) \\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l) \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{\overline{M}}^{-1} \right\| \le C\{\tilde{\overline{M}}\} \overline{\lambda}_M^k . \tag{9.46}$$

3. Кратная вещественная структура собственных значений (простоты ради будем как и в непрерывном случае полагать кратность $\mu = n$) матрицы: $\sigma(\overline{A}) = \{ \overline{\lambda}_i = \overline{\alpha} : \det(\overline{\lambda} I - \overline{A}) = 0; Jm(\overline{\alpha}) = 0; i = \overrightarrow{1, n} \}$. В этом случае матрица $\overline{A}$ приводима к жордановой форме $J(\overline{\alpha}) = \operatorname{col} \{ \overline{\alpha} \;\; 1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0, \; 0 \;\; \overline{\alpha} \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 0, \ldots, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; \overline{\alpha} \;\; 1, \; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; \overline{\alpha} \}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.44) в виде

$$\left. \begin{aligned} x(k) &= \overline{T} J^k(\overline{\alpha}) \overline{T}^{-1} x(0) = \overline{T} \left\{ \overline{\alpha}^k \begin{bmatrix} 1 & k/\overline{\alpha} & k(k-1)/2!\overline{\alpha}^2 & \ldots & k(k-1)\ldots(k-(n-2))/(n-1)!\overline{\alpha}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & k/\overline{\alpha} & \ldots & k(k-1)\ldots(k-(n-3))/(n-2)!\overline{\alpha}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & k(k-1)\ldots(k-(n-4))/(n-3)!\overline{\alpha}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k/\overline{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \right\} \overline{T}^{-1} x(0). \\ y(k) &= \overline{C} x(k) = \overline{C} \overline{T} J^k(\overline{\alpha}) \overline{T}^{-1} x(0) \end{aligned} \right\}$$

Если теперь в полученном выражении перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(k)\|$ вектора состояния $x(k)$ с учетом свойств норм при $\|x(0)\| = 1$ по аналогии с непрерывным случаем при кратных вещественных собственных числах получим

$$\|x(k)\| = \left\| \overline{T} J^k(\overline{\alpha}) \overline{T}^{-1} x(0) \right\| \le C\{\overline{T}\} \overline{\alpha}^k \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k!}{(k+1-i)!} \right) \Big/ (i!) \overline{\alpha}^i . \tag{9.47}$$

Анализ решений автономной системы (9.43) для трех возможных структур алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния позволяет сделать вывод о том, что *необходимым и достаточным условием* выполнения предельных переходов для зависимых переменных в виде векторов состояния и выхода дискретного объекта $\lim\limits_{k \to \infty} \{x(x(0), k)\} = 0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \{y(x(0), k)\} = 0$ является удовлетворение значений модулей всех собственных чисел неравенству $(|\overline{\lambda}_i| < 1; i = \overline{1, n})$. Это же неравенство является условием устойчивости исходной модели ЛДДО (9.18)–(9.19).

9.4. Структурные свойства объектов управления: управляемость и наблюдаемость, управляемость и наблюдаемость собственных значений матрицы состояния над бесконечными полями. Каноническое структурное представление Р.Калмана. Полнота моделей ВСВ и ВВ динамических объектов

Остановимся *на важных структурных свойствах* динамических объектов как непрерывных, так и дискретных, которые удалось установить специалистам по теории систем лишь при изучении моделей ВСВ этих объектов. Ниже ограничимся рассмотрением двух *базовых* структурных свойств объектов управления (ОУ): *управляемости и наблюдаемости.*

Определение 9.7 (О9.7). Непрерывный/дискретный динамический объект с парой матриц $(A,B)/\left((\overline{A},\overline{B})\right)$ называется *полностью управляемым,* если его можно из произвольного начального состояния $x_0 = x(t)|_{t=t_0} \,/\, x_0 = x(k)|_{k=k_0}$ перевести за конечное время в произвольное конечное состояние $x_k = x(t)|_{t=t_k} \,/\, x_k = x(k)|_{k=k_k}$ применив *подходящим образом выбранное управляющее воздействие* (возможно, даже неограниченное). □

Определение 9.8 (О.9.8). Непрерывный/дискретный динамический объект с матрицами $(A,C)/\left(\overline{A},\overline{C}\right)$ называется *полностью наблюдаемым* на интервале наблюдения $T = \{t : t_0 \le t \le t_k\} / T = \{k : k_0 \le k \le k_k\}$, если его состояние $x(t)/x(k)$ может быть определено на основе наблюдений за выходом $y(t)/y(k)$ (а возможно, и входом $u(t)/u(k)$) в течение интервала наблюдения. □

Сформулируем *критерии управляемости и наблюдаемости*, которые инвариантны относительно специфики динамических объектов.

Утверждение 9.1 (У9.1). (*Критерий управляемости 1* **(КУ1))** Объект с парой матриц $(A,B)/(\overline{A},\overline{B})$ является полностью управляемым тогда и только тогда, когда *матрица управляемости объекта,* построенная в силу матричного соотношения

$$\overline{W}_y \overset{\Delta}{=} \left[\overline{B} \vdots \overline{A}\overline{B} \vdots \ldots \vdots \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right] \tag{9.48}$$

имеет ранг, равный $n = \dim x$, т.е.

$$rang\, W_y = \dim x = n. \qquad \square \tag{9.49}$$

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере дискретного объекта управления с использованием его *рекуррентного* модельного представления (9.19).

Поставим задачу перевода дискретного ОУ (9.19) из произвольного ненулевого начального состояния $x(0)$ за $n = \dim x$ – интервалов дискретности (тактов управления) в желаемое конечное

$x(n)$. *Вычислим последовательность* управляющих воздействий, образующих «*стратегию* управления», осуществляющих этот перевод. Для этой цели воспользуемся *суммарной* моделью дискретного объекта (9.26)

$$x(k)=\overline{A}^k x(0)+\overline{A}^{k-1}\overline{B}u(0)+\overline{A}^{k-2}\overline{B}u(1)+\ldots+\overline{A}\overline{B}u(k-2)+\overline{B}u(k-1)=$$

$$=\overline{A}^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i).$$

Запишем последнее выражение для момента $k=n$ в форме, поменяв при этом порядок суммирования компонентов,

$$x(n)-\overline{A}^n x(0)=\left[\overline{B}\quad \overline{A}\overline{B}\quad \ldots\quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right]\left[u^T(n-1)u^T(n-2)\ldots u^T(0)\right]^T. \quad (9.50)$$

Разрешим полученное выражение относительно вектора «стратегии управления», осуществляющего перевод за n тактов ОУ из начального состояния $x(0)$ в желаемое конечное $x(n)$, в результате получим

$$\left[u^T(n-1)u^T(n-2)\ldots u^T(0)\right]^T=\left[\overline{B}\quad \overline{A}\overline{B}\quad \ldots\quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right]^{-1}\left[x(n)-\overline{A}^n x(0)\right].$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим существование искомого управления является *обратимость матрицы*, которая имеет место только при выполнении условия (9.48). ■

Критерий управляемости 2 **(КУ2)**. Пара матриц (A,B) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда матрица

$$Q=W_y W_y^{\ T} \quad (9.51)$$

является положительно определенной, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения $\mu_{yi}>0,\ \mu_{yi}\in\sigma\{Q\},:\det\left(\mu_y I-Q\right)=0;\quad i=\overline{1,n}$.

Для оценки положительной определенности матрицы Q полезно воспользоваться критерием *Сильвестра положительной определенности* матриц. Суть критерия Сильвестра состоит в следующем.

Пусть произвольная квадратная матрица E имеет вид

$$E=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{21} & \cdots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & E_{nn} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим определители подматриц (главные диагональные миноры) матрицы E

$$\Delta_1=E_{11};\quad \Delta_2=\det\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_k = \det\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E_{k1} & E_{k2} & \dots & E_{kn} \end{bmatrix}; k = \overline{1,n}.$$

Тогда критерий положительной определенности матрицы E состоит в выполнении условий

$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \cdots \Delta_k > 0, \quad k = \overline{1,n}$.

Примечание 9.3 (П9.3). Критерий управляемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений μ_{yi} матрицы Q (9.51) дополнить вычислением ее собственных векторов $\varsigma_{yi}\left(i = \overline{1,n}\right)$, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора $\varsigma_{yi}\left(i = \overline{1,n}\right)$. При этом подпространство *неуправляемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы Q, которые соответствуют нулевым (минимальным по величине) собственным значениям, а подпространство *наилучшей* управляемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение.

Утверждение 9.2 (У9.2). (*Критерий наблюдаемости 1*(**КН1**)). Объект с парой матриц $(A, C)/(\overline{A}, \overline{C})$ являются полностью наблюдаемым тогда и только тогда, когда *матрица наблюдаемости объекта*, построенная в силу матричного соотношения

$$W_н \overset{\Delta}{=} \left[C^T \vdots A^T C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1} C^T\right]^T \tag{9.52}$$

имеет ранг, равный n, т.е. $rang W_н = n = \dim x$. □

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере непрерывного объекта с использованием его дифференциального модельного описания (9.5)–(9.6) при $D = 0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Для получения n условий для вычисления n – компонентного вектора состояния x по *результатам измерения* векторов выхода $y(t)$ и управления $u(t)$, а возможно и производных продифференцируем $(n-1)$ раз по времени вектор выхода $y(t)$, что породит следующий состав измерения

$$y(t) = Cx(t);$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t);$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2 x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t);$$

$$\ddot{y}(t) = CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) =$$
$$= CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t);$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(t) = CA^{(n-1)}x(t) + CA^{(n-2)}Bu(t) + ... + CABu^{(n-1)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

Сформируем на основе полученных соотношений вектор измерений $z(t)$ в форме

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CBu(t) \\ \ddot{y}(t) - CABu(t) - CB\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - CA^{(n-2)}Bu(t) - ... - CABu^{(n-1)}(t) - CBu^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор измерений $z(t)$ позволяет систему уравнений, построенных на производных вектора выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ привести к виду

$$z(t) = [C^T \vdots A^TC^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1}C^T]^T x(t) = W_н x(t). \qquad (9.53)$$

Уравнение (9.53) позволяет для *искомого* вектора $x(t)$ состояния объекта записать

$$x(t) = W_н^{-1} z(t). \qquad (9.54)$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим *восстановление* искомого вектора $x(t)$ состояния объекта является обратимость матрицы наблюдаемости $W_н$, которая имеет место только при выполнении условия $rangW_н = n = \dim x.$ ■

Критерий наблюдаемости 2 **(КН2)**. Пара матриц (A, C) являются полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица

$$P = W_н^T W_н \qquad (9.55)$$

является положительно определенной $(P > 0)$, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения.

Примечание 9.4 (П9.4). Критерий наблюдаемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений матрицы P (9.55) дополнить вычислением ее собственных векторов, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора. При этом подпространство *ненаблюдаемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы P, которые соответствуют нулевым собственным значениям, а подпространство *наилучшей* наблюдаемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение. Движение в подпространствах *ненаблюдаемости* не проектируются на выход объекта, а движение в

подпространстве *наилучшей* наблюдаемости характеризуются максимальной нормой его проекции на выход.

Введение понятий *управляемости* и *наблюдаемости* позволяет представить исходный объект управления ОУ в виде объединения его структурных компонентов

$$ОУ = \{ОУ_{н}^{у} \bigcup ОУ_{н}^{ну} \bigcup ОУ_{нн}^{у} \bigcup ОУ_{нн}^{ну}\}. \qquad (9.56)$$

Аналитическая конструкция (9.56) иллюстрируется структурным представлением, изображенным на рисунке 9.5.

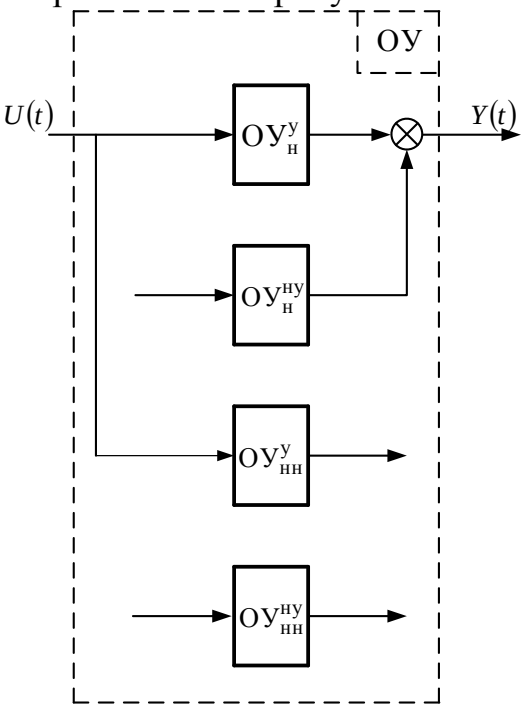


Рисунок 9.5

В представлениях (9.56) и рисунок 9.5 , которые носят название *каноническое представление ОУ* Р.Калмана: $ОУ_{н}^{у}$ – полностью *управляемая* и *наблюдаемая* часть ОУ; $ОУ_{н}^{ну}$ – *неуправляемая*, но *наблюдаемая* часть ОУ; $ОУ_{ну}^{у}$ –*управляемая,* но *ненаблюдаемая* часть ОУ; $ОУ_{нн}^{ну}$ – *неуправляемая* и *ненаблюдаемая* часть ОУ. Следует заметить, что все модели «*вход–выход»* (ВВ) описывают поведение только полностью *управляемой* и *наблюдаемой* $ОУ_{н}^{у}$ части ОУ при *нулевом начальном состоянии* объекта в целом. Таким образом, модели ВВ оказываются *модельно менее полными*, чем модели «вход–состояние–выход» (ВСВ). Очевидно, размерность вектора состояния модельного компонента $ОУ_{н}^{у}$ объекта меньше размерности объекта управления в целом, как следствие модель ВВ ОУ имеет меньшую размерность, чем модель ВСВ объекта. Аналитически *редуцирование размерности* модели ВВ происходит путем *сокращения* общих

сомножителей полиномов числителя и знаменателя сепаратных передаточных функций ВВ

Завершая рассмотрение свойств и системных характеристик модельных представлений «вход – состояние – выход» объектов управления**,** опирающихся на возможности векторно – матричного формализма линейной алгебры сделаем следующее примечание.

Примечание 9.5 (П9.5). Непрерывный объект (9.5)–(9.6) с парами матриц (A,B)и (A,C) и дискретный объект (9.18)–(9.19) с парами матриц $(\overline{A},\overline{B})$и $(\overline{A},\overline{C})$ называются *нормальными относительно управления*, если являются *управляемыми* все пары матриц $\left(A,B_j;\, j=\overline{1,r}\right)$, где $B_j - j-$ й столбец матрицы B управления объекта и называются *нормальными относительно наблюдения*, если являются *наблюдаемыми* все пары матриц $\left(A,C^l;l=\overline{1,m}\right)$, где $C^l - l-$я строка матрицы C выхода объекта.

Свойство нормальности объектов управления пока не нашло конструктивного использования в современной теории управления. Проблемы управления объектами с нормальной парой матриц (A,B) и наблюдения с нормальной парой матриц (A,C)гарантирующей богатство вариантов решений, ждут разработки.

Оформим в форме примечания и определений еще одно положение, обогащающее структурные свойства объекта управляемость и наблюдаемость на примере ЛНДО, которое вводит понятия управляемости и наблюдаемости собственных чисел матрицы состояния динамического объекта по сепаратным входам и выходам$\varsigma_i^T\left(C^l\right)^T = C^l\varsigma_i = 0$.

Примечание 9.6 (П9.). ЛНДО задан тройкой матриц (A,B,C), при этом A и A^T обладают алгебраическими спектрами собственных чисел$\sigma\{A\}=\sigma\{A^T\}=\{\lambda_i : det(\lambda I - A)=det(\lambda I - A^T)=0; i=\overline{1,n}\}$ и геометрическими спектрами собственных векторов $\{\xi_i : A\xi_i = \lambda_i\xi_i; i=\overline{1,n}\}$ и $\{\varsigma_i : A^T\varsigma_i = \lambda_i\varsigma_i; i=\overline{1,n}\}$.Пусть B_j - $j-$й столбец матрицы B $\left(j=\overline{1,r}\right)$, $C^l - l-$ая строка матрицы C $\left(l=\overline{1,m}\right)$.

Определение 9.9 (О9.9). Собственное значение $\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$ является *управляемым* по $j-$му входу $\left(j=\overline{1,r}\right)$ динамического объекта, если выполняется условие $\xi_i^T B_j = B_j^T\xi_i \neq 0$, в случае выполнения условия $\xi_i^T B_j = B_j^T\xi_i = 0$ собственное значение $\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$ является *неуправляемым* по $j-$му входу $\left(j=\overline{1,r}\right)$ динамического объекта. □

Определение 9.10 (О9.10). Собственное значение $\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$ является *наблюдаемым* по $l-$му выходу $(l=\overline{1,m})$ динамического объекта, если выполняется условие $\xi_i^T\left(C^l\right)^T = C^l\xi_i \neq 0$, в случае выполнения условия $\varsigma_i^T\left(C^l\right)^T = C^l\varsigma_i = 0$ собственное значение $\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$ является *ненаблюдаемым* по $l-$му выходу $(l=\overline{1,m})$ динамического объекта. □

9.5. Алгоритм Д. Фаддеева разложения резолвенты в задаче формирования модели ВВ, векторно-матричное дифференциальное уравнение «вход-выход» непрерывных объектов управления

Модели ВСВ предоставляют исследователю объектов управления и динамических систем, построенных на их основе, *непрерывного* и *дискретного* описаний хорошие технологические возможности конструирования моделей ВВ в виде *дифференциальных (рекуррентных) уравнений отношения «вход–выход»* (ДУВВ). Технологию конструирования моделей ДУВВ, опирающуюся на алгоритм Д.Фаддеева разложения резолвенты, проиллюстрируем на примере непрерывного линейного ОУ, задаваемого векторно-матричной моделью ВСВ в виде соотношений (9.5)–(9.6)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{9.57}$$

Передаточная матрица (функция) $\Phi(s): Y(s) = \Phi(s)U(s)$ ОУ (9.58) имеет вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{9.59}$$

Воспользуемся представлением резолвенты $(sI - A)^{-1}$ в форме

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\left[\Delta(sI - A)\right]^T = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n},$$

где $(n \times n)$ – матрицы $H_i\ (i = \overline{0, n-1})$ и коэффициенты характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Д.Фаддеева (6.33). Приведенные соотношения позволяют уравнение «вход-выход» $Y(s) = \Phi(s)U(s)$ записать в форме

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right)Y(s) = \left\{\begin{matrix} C\left(s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}\right)B + \\ + \left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right)D \end{matrix}\right\}U(s), \tag{9.60}$$

что на основе применения обратного преобразования Лапласа с учетом его свойств приводит к дифференциальному уравнению «вход-выход»

с матричными коэффициентами относительно производных по времени векторных переменных $y(t)$ и $u(t)$:

$$y^{n}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_n y(t)=D\,u^{n}(t)+ \\ +\left(CH_0B+a_1D\right)u^{(n-1)}(t)+\ldots+\left(CH_{n-2}B+a_{n-1}D\right)\dot{u}(t)+\left(CH_{n-1}B+a_nD\right)u(t) \quad .(9.61)$$

Если возникает необходимость составления дифференциального уравнения, связывающего $i-$й выход $y_i(t)$ с $j-$м входом $u_j(t)$, то для этого в левой части векторно–матричного дифференциального уравнения «вход-выход» в векторе выхода $y(t)$ следует выделить $i-$й элемент, в правой части в векторе входа $u(t)$ $j-$й элемент, а в матричных коэффициентах выделить $(i,j)-$ые компоненты, находящиеся на пересечении $i-$х строк и $j-$х столбцов.

Соотношения (9.60) и (9.61) позволяют констатировать, что физически реализуемая передаточная система, описываемая моделью «вход–выход» в виде дифференциального уравнения не может иметь порядок производной правой части выше порядка производной ее правой части. Более того равенство порядков имеет место только тогда, когда в модели «вход–состояние–выход» (9.58) матрица прямых связей «вход–выход» $D\neq 0$.

Применительно к модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы (функции) следует констатировать, что порядок полинома числителя передаточной функции любого сепаратного канала, связывающего $i-$й выход $y_i(t)$ с $j-$м входом $u_j(t)$, физически реализуемой системы не может быть выше порядка порядка полинома знаменателя передаточной функции. Более того, равенство порядков имеете место только в случае ненулевой матрицы прямых связей «вход–выход» D.

Это обстоятельство надо иметь в виду для целей контроля корректности составления модели «вход-выход» динамического объекта.

Аналогичным образом алгоритм Д.Фаддеева может быть использован для построения рекуррентного уравнения «вход–выход» с матричными коэффициентами, а также построены скалярные рекуррентные уравнения для любых сепаратных каналов дискретного линейного динамического объекта.

Примеры и задачи

9.1. Построить структурное представление непрерывного объекта управления, описываемого функцией перехода λ и выхода δ вида:

$\lambda : \dot{x}=Ax+Bu$, $\delta : y=Cx$, где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\upsilon_3\\ 1 & 0 & -\upsilon_2\\ 0 & 1 & -\upsilon_1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}\upsilon_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

С помощью критериев управляемости и наблюдаемости исследовать объект на управляемость и наблюдаемость, составить передаточную функцию (матрицу) объекта.

9.2. Построить структурные схемы непрерывных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода вида:

а) $\lambda:\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1^2+3x_1u;\\ \dot{x}_2=x_1x_2+u^3;\end{cases}\quad \delta: y=x_1^2+2x_2+u;$

б) $\lambda:\begin{cases}\dot{x}_1=x_3;\\ \dot{x}_2=x_2;\\ \dot{x}_3=-100x_1-10x_2^2-5x_1x_2;\end{cases}\qquad \delta: y=x_1+2x_2+15x_3^2;$

в) $\lambda:\begin{cases}\dot{x}_1=-\alpha_1x_1-(\sin\varphi_2)x_2+(\sin\varphi_2)u_2+(\cos\varphi_1)u_1;\\ \dot{x}_2=(\sin\varphi_1)x_1-\alpha_2x_2+(\cos\varphi_2)u_2-(\sin\varphi_1)u_1;\end{cases}$

$\delta:\begin{cases}y_1=(\cos\varphi_1)x_1+(\sin\varphi_2)x_2;\\ y_2=(-\sin\varphi_1)x_1+(\cos\varphi_2)x_2;\end{cases}$

г) $\lambda:\begin{cases}\dot{x}_1=\eta_1x_2;\\ \dot{x}_2=\alpha_2u-\beta_2|u|x_2-\alpha_1x_1;\end{cases}\qquad \delta: y=10x_1$

д) $\lambda:\begin{cases}\dot{x}_1=\eta_1x_2;\\ \dot{x}_2=\beta_3x_3+\beta_2|x_3|x_3-\beta_1x_2+\alpha_1u;\\ \dot{x}_3=\alpha_2u-\beta_4x_1;\end{cases}\quad \delta: y=0.1x_3;$

е) $\lambda: \dot{x}=Ax+Bu;\quad \delta: y=Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\vartheta_3 & -\vartheta_2 & -\vartheta_1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}\vartheta_3 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

ж) $\lambda: \dot{x}=Ax+Bu;\quad \delta: y=Cx;$

где A,B из пункта е), а $C=\begin{bmatrix}\vartheta_3 & \vartheta_2 & \vartheta_1\end{bmatrix};$

з) $\lambda: \dot{x}=Ax+Bu;\quad \delta: y=Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\vartheta_3\\ 1 & 0 & -\vartheta_2\\ 0 & 1 & -\vartheta_1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}\vartheta_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

и) $\lambda: \dot{x}=Ax+Bu;\quad \delta: y=Cx,$

где A,C из пункта 3), а $B=\begin{bmatrix}\vartheta_3 & \vartheta_2 & \vartheta_1\end{bmatrix}^T;$

к) $\lambda: \dot{x}=Ax+Bu;\quad \delta: y=Cx+Du,$

где A, B и C те же, что в пункте з), а $D = [\vartheta_0]$.

л) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

м) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

н) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

о) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.3. Определить передаточные матрицы и функции сепаратных каналов линейных непрерывных объектов, описываемых функциями перехода и выхода из 9.2: п.п. е)$\div$о)

9.4. Определить, управляемы и наблюдаемы ли объекты управления, а также управляемы и наблюдаемы ли они по каждому из входов и выходов (в случае $r > 1, m > 1$), если объекты описываются функциями перехода и выхода из п.п. е)$\div$о)

9.5.С использованием алгоритма А9.1 построить модели ВСВ линейных непрерывных объектов в форме функций перехода λ и выхода δ по заданным передаточным матрицам (функциям) «вход–выход»:

а) $\Phi(s) = \dfrac{10}{s^3}$, б) $\Phi(s) = \dfrac{s + \beta}{s + \alpha}$,

в) $\Phi(s) = \dfrac{\beta}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$, г) $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s + \beta_2}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$,

д) $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$, е) $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$,

ж) $\Phi(s)=\dfrac{\beta(s+\gamma)}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$, з) $\Phi(s)=\dfrac{\beta}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)}$,

и) $\Phi(s)=\dfrac{\beta s+\gamma}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$, к) $\Phi(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{11}}{s+\alpha_{11}} & -\beta_{12} \\ \beta_{21} & \dfrac{\beta_{22}}{s+\alpha_{22}} \end{bmatrix}$,

л) $\Phi(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{11}}{s+\alpha_{11}} & \dfrac{\beta_{12}}{s} & \dfrac{\beta_{13}s+\beta_{13}^2}{s(s+\alpha_{13})} \\ -\beta_{21} & \dfrac{\beta^1{}_{22}s+\beta_{22}^2}{s} & \dfrac{\beta_{23}}{s+\alpha_{23}} \end{bmatrix}$.

9.6. Построить структурные схемы дискретных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода:

а) $\lambda:\begin{cases} x_1(k+1)=x_1(k)+Tx_2(k)-\dfrac{1}{2}T^2u(k) \\ x_2(k+1)=x_2(k)+Tu(k) \end{cases}$ $\delta: y(k)=x_1(k)$,

б) $\lambda:\begin{cases} x_1(k+1)=x_1(k)+Tx_2(k)+\dfrac{T^2}{2}x_3(k)+\dfrac{1}{6}T^3u(k) \\ x_2(k+1)=x_2(k)+Tx_3(k)+\dfrac{T^2}{2}u(k) \\ x_3(k+1)=x_3(k)+Tu(k) \end{cases}$ $\delta: y(k)=x_1(k)$,

в) $\lambda: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k); \delta: y(k)=Cx(k)$,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

г) $\lambda: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k); \delta: y(k)=Cx(k)$,

$$A=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.9 & 0.6 \\ 0.02 & -0.004 & -1.5 & 0.1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.9. Определить передаточные матрицы и функции дискретных объектов примеров 9.6

9.8. С использованием алгоритма А9.2 построить модель ВСВ дискретных объектов, заданных передаточными функциями (матрицами):

а) $\Phi(z)=\dfrac{\beta z+1}{\alpha z+1}$; б) $\Phi(z)=\dfrac{\beta_1 z^2+\beta_2 z+\beta_3}{z^3+\alpha_1 z^2+\alpha_2 z+\alpha_3}$;

в) $\Phi(z)=\dfrac{\beta_1 z^{-2}+\beta_2 z^{-1}+\beta_3}{z^{-3}+\alpha_1 z^{-2}+\alpha_2 z^{-1}+\alpha_3}$; г) $\Phi(z)=\begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{11}}{z+\alpha_{11}} & \beta_{12} \\ 0 & \dfrac{\beta_{22}}{z+\alpha_{22}} \end{bmatrix}$

9.9. Для значений интервалов дискретности 0.01 сек. и 0.1 сек. построить матрицы $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ дискретного описания непрерывных объектов из задачи 9.2.

Решение вариантов задач

Решение задачи 9.1. Запишем функции λ и δ в координатной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + 0x_2 - \upsilon_3 x_3 + \upsilon_3 u \\ \dot{x}_2 &= 1x_1 + 0x_2 - \upsilon_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= 0x_1 + 1x_2 - \upsilon_1 x_3 \\ y &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \end{aligned}.$$

Для построения структурного представления объекта необходимы 3 интегратора, у которых входом j-го интегратора является переменная $\dot{x}_j$, представленная в виде линейной комбинации выходов интеграторов $x_i\left(j, i=\overline{1,n}\right)$ и входного воздействия u, описываемой j-ой строкой функции перехода λ, при этом линейная комбинация формируется сумматором. Выход y объекта управления является линейной комбинацией составляющих вектора состояния, который формируется с помощью усилительных элементов с коэффициентами усиления, равными коэффициентам при соответствующих составляющих x_i вектора состояния x в функции выхода δ, и устройством суммирования. Для оценки управляемости и наблюдаемости объекта составим матрицы управляемости W_y и наблюдаемости $W_н$ в силу выражений (9.17) и (9.20):

$$W_y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3 \end{bmatrix},$$

$$W_н = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \left(A^T\right)^2 C^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\upsilon_1 \\ 1 & -\upsilon_1 & -\upsilon_1^2 - -\upsilon_2 \end{bmatrix}.$$

В соответствие с критериями управляемости и наблюдаемости в первых формулировках объект управления является полностью управляемым и наблюдаемым, так как

$rang\left(W_y\right) = 3 = \dim x$, $rang\left(W_н\right) = 3 = \dim x$.

Для того, чтобы воспользоваться критериями управляемости и

наблюдаемости во вторых формулировках (КУ2 и КН2) построим матрицы $Q = W_y W_y{}^T$ и $P = W^T{}_н W_н$, которые для рассматриваемого объекта управления принимают вид

$$Q = \begin{bmatrix} \upsilon_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3^2 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon_1 & \upsilon_1^2 - \upsilon_2 \\ -\upsilon_1 & 1+\upsilon_1^2 & -\upsilon_1 + \upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^3 \\ \upsilon_1^2 - \upsilon_2 & -\upsilon_1 + \upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^3 & 1+\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_1^4 - 2\upsilon_1^2\upsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Положительная определенность матрицы Q очевидна.

Для матрицы $P = W^T{}_н W_н$ имеем

$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 1.$

Таким образом, P – положительно определенная матрица.

Определим передаточную функцию (матрицу) «вход–выход» объекта. По определению передаточной функции (матрицы)

$$\Phi(s) \overset{\Delta}{=} Y(s) \big/ U(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{det(sI - A)} C\left[adj(sI - A)\right]^T B =$$

$$= \frac{1}{s^3 + \upsilon_1 s^2 + \upsilon_2 s + \upsilon_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + \upsilon_1 s + \upsilon_2 & -\upsilon_3 & 1 - \upsilon_3 s \\ s + \upsilon_1 & s^2 + \upsilon_1 s & -\upsilon_2 s - \upsilon_3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^3 + \upsilon_1 s^2 + \upsilon_2 s + \upsilon_3} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\upsilon_3}{s^3 + \upsilon_1 s^2 + \upsilon_2 s + \upsilon_3}.$$

Поставленные задачи решены.

<u>Решение задачи 9.5г.</u>

По передаточной функции «вход–выход» ЛНДО $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s + \beta_2}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$, построить *A*, *B*, *C*–«вход–состояние–выход» представление на основе алгоритма А9.1. В соответствие с этим алгоритмом:

1.Выбираем канонический управляемый (фробениусов строчный) базис представления;

2.Пункт 2 алгоритма А9.1 выполнен исходным задание передаточной функции, которая представляет собой отношение двух полиномов относительно переменной «*s*»;

3.Записываем передаточную функцию по отрицательным степеням переменной Лапласа «s» , так чтобы в знаменателе образовался единичный свободный член, для чего числитель и знаменатель делим на член «s^3», в результате чего получаем представление передаточной функции

$$\Phi(s)=\frac{\beta_1\dfrac{1}{s^2}+\beta_2\dfrac{1}{s^3}}{1+\alpha_1\dfrac{1}{s}+\alpha_2\dfrac{1}{s^2}+\alpha_3\dfrac{1}{s^3}};$$

3.,4. Выполняем п.п.3 и 4: строим структурное представление в каноническом управляемом базисе и размечаем его, результат выполнение этих пунктов алгоритма А9.1 представлен на рисунке 9.6

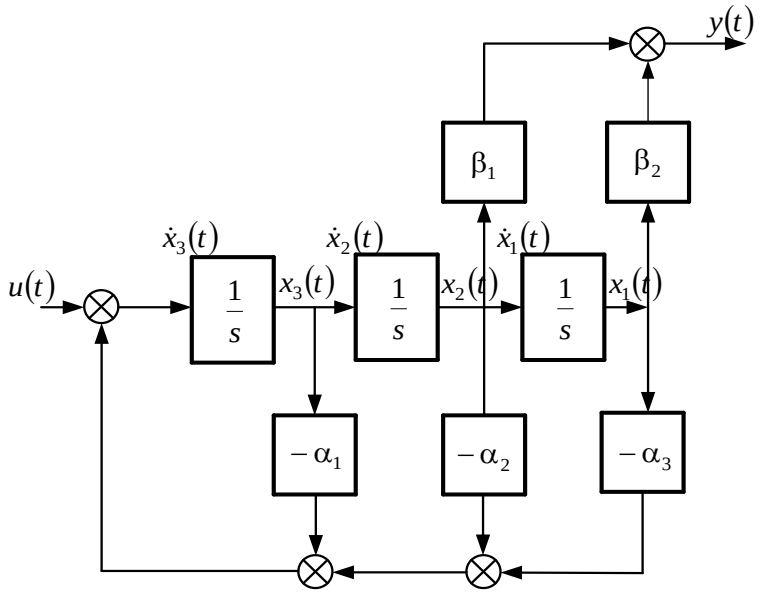


Рисунок 9.6

5.Списываем матрицы A,B,C описания $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad y(t)=Cx(t)$ с отмеченного структурного представления рисунок 9.6 и получаем

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}\beta_2 & \beta_1 & 0\end{bmatrix}.$$ ■

9. МОДЕЛИ «ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД» ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Переходя к рассмотрению проблем, вынесенных в заголовок раздела, зададим два вопроса. Первый вопрос: «В чем слабости моделей «вход–выход» (ВВ)? Второй вопрос: «Почему возник запрос на модели «вход–состояние – выход» (ВСВ)? Краткий ответ на оба вопроса приводится непосредственно ниже. Полный ответ читатель получит по прочтении настоящего раздела.

Оценивая класс моделей «вход – выход» динамических объектов (ДО), который исторически вырос из теории электрических цепей, следует отметить, что до определенного момента они модельно полностью удовлетворяли нуждам разработчиков динамических систем. По мере усложнения задач управления модель «вход – выход», которую в общем виде можно записать в явной форме

$$y(v) = \delta(u(v)),$$

где переменная $u(*)$ – входное воздействие, выполняющее функцию управляющего (для объекта) или задающего (для системы управления) воздействия, v принимает смысл непрерывного времени t в случае непрерывных ДО и смысл дискретного времени k – в случае дискретных, стала обнаруживать *системный изъян*, проявляющийся в *неоднозначности соответствия выхода одному и тому же значению входа*. Возникшую модельную проблему удалось разрешить с помощью процедуры *параметризации* соотношения $y(v) = \delta(u(v))$ так, что последнее получило представление

$$y(v) = \delta(x(v), u(v)),$$

где вектор параметров x именуется вектором состояния (или просто состоянием) динамического объекта. Таким образом, становится справедливым следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.0 (О9.0). Минимальный набор параметров, полностью снимающий неопределенность отношения « вход – выход» динамического объекта $y(v) = \delta(u(v))$, называется *вектором состояния* (или просто состоянием).

Функционально вектор состояния является *памятью* динамического объекта (системы). Системно состояние обладает:

- свойством *неразрывности*;
- *разделительным* свойством, которое делает поведение динамического объекта не зависящим от *предыстории* так, что если известно состояние ДО $x(v_s)$ в некоторый момент $v = v_s$, то движение объекта при $v \geq v_s$ будет однозначно определяться только состоянием $x(v_s)$ и сигналом управления $u(v)$ при $v \geq v_s$.

Переход от представления $y(v) = \delta(u(v))$ динамического объекта к параметризованной версии $y(v) = \delta(x(v), u(v))$ означает переход от

моделей ВВ к моделям типа ВСВ, свойства и возможности которых являются предметом настоящего раздела.

Погружение в аппарат ВСВ представлений начнем с общесистемных положений.

Определение 9.1. (О9.1) Динамическим объектом (объектом управления) называется восьмикомпонентный макровектор

$$\sum = \{U, X, Y, \Omega, \Gamma, \mathrm{T}, \lambda, \delta\}, \tag{9.1}$$

где U – множество мгновенных значений r-мерных входных (управляющих) воздействий $U \subset R^r$; X – множество n-мерных состояний $X \subset R^n$; Y – множество мгновенных значений m-мерных выходов $Y \subset R^m$; T – множество моментов времени, образующих интервал управления и наблюдения; $\Omega = \{U \times T\}$ – множество допустимых входных воздействий; $\Gamma = \{Y \times T\}$ – множество выходных величин; $\lambda : X \times T \times U \times T \Rightarrow X$ – функция перехода объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in \mathrm{T}$ в последующее состояние x в момент t при помощи входного воздействия $U \times (\tau, t), (\tau, t) \in T$; $\delta : X \times T \times U \times T \Rightarrow Y$ – функция выхода объекта, которая определяет правило получения мгновенного значения выхода Y в момент $t \in T$ при переходе объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ под воздействием входного воздействия $U \times (\tau, t), \quad (\tau, t) \in T$. □

В дальнейшем будем пользоваться редуцированным определением динамического объекта, опуская описание множеств Ω и Γ, т.е. определять динамический объект как шестикомпонентный макровектор

$$\sum = \{U, X, Y, T, \lambda, \delta\}. \tag{9.2}$$

В зависимости от структуры множеств и функций λ и δ все динамические объекты делятся на непрерывные динамические объекты (НДО); дискретные динамические объекты (ДДО); дискретные динамические объекты над конечными полями Галуа.

9.1 Модели ВСВ непрерывных объектов управления. Состояние и его свойства. Свободное и вынужденное движения непрерывных объектов. Фундаментальная и переходная матрицы. Построение моделей ВСВ непрерывных динамических объектов по передаточным функциям

Определение 9.2 (О9.2). *Непрерывными динамическими объектами (НДО)* называются динамические объекты, которые характеризуются бесконечностью множеств U, X и Y и континуальностью множеств моментов времени управления и наблюдения, $T = \{ t : t_0 \le t \le t_k \}$.

Функции перехода (λ) и выхода (δ) в непрерывных динамических объектах задаются в следующей форме:

$$\lambda : \dot{x}(t) = \lambda\{x(t), u(t)\}, \tag{9.3}$$

$$\delta : y(t) = \delta\{x(t), u(t)\}, \tag{9.4}$$

где $x \in X \subset R^n, u \in U \subset R^r, y \in Y \subset R^m$, $\dot{x}(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$. □

Если правила λ и δ в описании непрерывных объектов представимы в виде композиции линейных операций сложения и умножения матриц на вектор, то такие НДО являются *линейными*.

Тогда для линейных непрерывных динамических объектов описание функций λ и δ принимает вид:

$$\lambda : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \tag{9.5}$$

$$\delta : y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{9.6}$$

где $A - (n \times n) -$ матрица состояния объекта $\left(A \in R^{n \times n}\right)$, $B - (n \times r) -$ матрица управления (входа) $\left(B \in R^{n \times r}\right)$, $C - (m \times n) -$ матрица выхода $\left(C \in R^{m \times n}\right)$ и $D - (m \times r) -$ матрица вход–выход объекта $\left(D \in R^{m \times r}\right)$.

Следует заметить, что в большинстве физических объектов управление u является энергетически самой слабой переменной, в то время как выход объекта y требует заметных энергетических затрат, поэтому прямые связи со входа на выход, представленные матрицей D, чаще всего отсутствуют. В связи со сказанным в большинстве практических случаев матрица $D = 0$ и в дальнейшем при рассмотрении моделей объектов будет опускаться.

Очевидно, если в соответствии с (9.3)–(9.6) построить графы, используя: *интеграторы*, решающие задачу преобразования $\dot{x}(t) \Rightarrow x(t)$; нелинейные блоки $\lambda[x, u]$ и $\delta[x, u]$, а для линейного случая линейные блоки в виде матричных усилителей с матричными коэффициентами передачи A, B, C, D и сумматоров, то получим графические представления непрерывных динамических объектов в виде структурных схем рисунок 9.1 и рисунок 9.2.

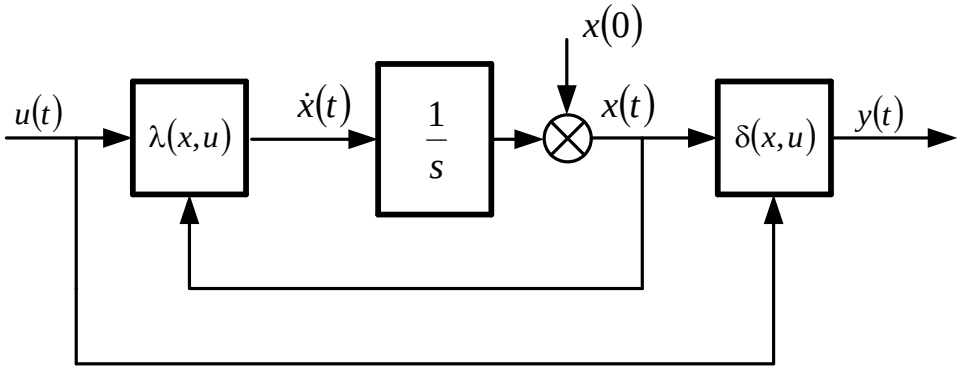


Рисунок 9.1

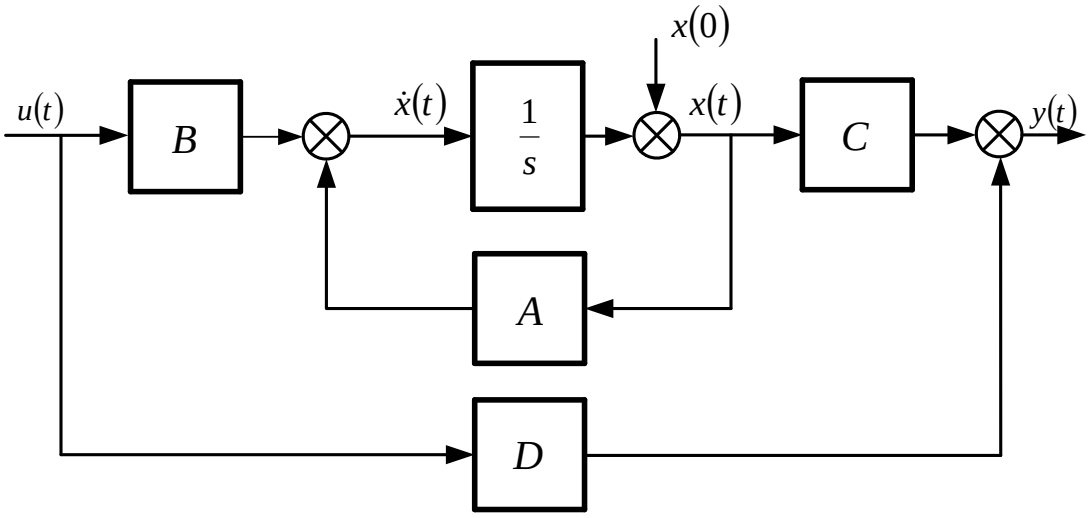


Рисунок 9.2

Модели вида (9.3) – (9.4) или в линейном случае (9.5) – (9.6) носят название канонических моделей ВСВ динамических объектов. Для непрерывных объектов эта модель является *дифференциальной*. Линейные модели состояния (9.5)–(9.6) непрерывных динамических объектов характеризуют динамическое отношение «вход–состояние–выход», которое позволяют построить модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы, (i, j)-ый элемент которой представляет собой передаточную функцию сепаратного канала, связывающего $i-$ый выход $y_i(t)$ с $j-$ым входом $u_j(t)$.

Действительно, если к (9.5)–(9.6) применить прямое преобразование Лапласа, то в соответствие с его свойствами получим

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s); Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

где $x(0) = x(t)|_{t=0}; U(s), X(s), Y(s) -$ векторные лапласовы образы соответственно векторных переменных $u(t), x(t), y(t)$.

Если полученные выражения разрешить относительно лапласовых образов выхода $Y(s)$ и входа $U(s)$, то получим

$$Y(s) = \left\{C(sI - A)^{-1}B + D\right\}U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0). \qquad (9.7)$$

В случае когда начальное состояние НДО (9.5)–(9.6) нулевое так, что $x(0) = 0$, то (9.7) принимает вид

$$Y(s) = \left\{C(sI - A)^{-1}B + D\right\}U(s) = \Phi(s)U(s),$$

где передаточная $(m \times r)-$ матрица $\Phi(s)$ имеет вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \qquad (9.8)$$

Заметим, что передаточная *матрица* в силу определения имеет *мультипликативное* представление так, как операции деления векторов друг на друга не существует, передаточная функция $\Phi_{ij}(s)$ (i, j)–го сепаратного канала НДО имеет *дивидендное* представление и в силу (9.8) принимает вид

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = C^i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \qquad (9.9)$$

где $C^i - i$–ая строка матрицы C, $B_j - j$–ый столбец матрицы B, D_{ij} – (i,j) – элемент матрицы D.

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект (ЛНДО), описываемый уравнениями (9.5)–(9.6), задающими модель ВСВ в *дифференциальной форме* с нулевой матрицей D:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t). \qquad (9.10)$$

Поставим задачу – отыскать *интегральную форму* модели ВСВ ЛНДО

$$x(t) = x\{x(0), u(t), t\}; \qquad y(t) = Cx(t).$$

Если воспользоваться *принципом суперпозиции*, который справедлив для линейных объектов, то можно записать

$$x(t) = x_{\text{с}}(t) + x_{\text{в}}(t),$$

где $x_{\text{с}}(t)$ – свободная составляющая движения, порожденная $x(0) \neq 0$, так что $x_{\text{с}}(t) = x[x(0), u(t) \equiv 0, t]$, $y_{\text{с}}(t) = Cx_{\text{с}}(t)$; $x_{\text{в}}(t)$ – вынужденная составляющая движения, порожденная $u(t) \neq 0$ так, что

$$x_{\text{в}}(t) = x\{u(t), x(0) \equiv 0, t\}, \quad y_{\text{в}}(t) = Cx_{\text{в}}(t)..$$

Для вычисления $x_{\text{с}}(t)$ положим в исходной модели $u(t) \equiv 0$ и получим однородное дифференциальное уравнение состояния $\dot{x}(t) = Ax(t), x(0)$. Будем искать $x(t)$ в форме $x(t) = \Phi(t)x(0)$, где $\Phi(t) - (n \times n)$ – матрица, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = I$.

Подстановка $x(t)$ в исходное однородное дифференциальное уравнение дает матричное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \qquad \Phi(0) = I.$$

Решение для $\Phi(t)$ будем искать в виде $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0) = e^{At}$. Прямая подстановка последнего выражения в матричное дифференциальное уравнение относительно $\Phi(t)$ приводит к тождеству $Ae^{At} = Ae^{At}$.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{с}}(t) &= \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0), \\ y_{\text{с}}(t) &= Cx_{\text{с}}(t) = C\Phi(t)x(0) = Ce^{At}x(0) \end{aligned}\right\}. \qquad (9.11)$$

Для вычисления вынужденной составляющей движения в исходном дифференциальном уравнении (9.10) положим $x(0) \equiv 0$, при этом будем искать составляющую в виде $x(t) = \Phi(t)z(t)$, где $z(t)$ – неизвестная *вектор–функция* со значениями из R^n. Если последнее выражение подставить в исходную модель ВСВ (9.10) , то получим

$$\dot{\Phi}(t)z(t)+\Phi(t)\dot{z}(t)=A\Phi(t)z(t)+Bu(t).$$

Если теперь учесть, что $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$, то нетрудно для $z(t)$ получить векторно–матричное уравнение в дифференциальной форме

$$\dot{z}(t)=\Phi^{-1}(t)Bu(t)$$

и соответственно в интегральной форме

$$z(t)=\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Последнее выражение позволяет для вынужденной составляющей движения непрерывного линейного объекта управления записать

$$x_{\text{в}}(t)=\Phi(t)z(t)=\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau=\int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau, \qquad (9.12)$$

где $\Phi(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$..

Для вынужденной составляющей $y_{в}(t)$ переменной выхода линейного непрерывного динамического объекта оказывается справедливым представление

$$y_{\text{в}}(t)=Cx_{\text{в}}(t)=\int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Общий вид интегральной модели «вход–состояние–выход» линейного непрерывного динамического объекта принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\\ y(t)&=C\Phi(t)x(0)+\int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d=Ce^{At}x(0)+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned}\right\}, \qquad (9.13)$$

где $\Phi(t)=e^{At}$, $\Phi(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)=e^{A(t-\tau)}$.

Интегральная запись (9/13) модели ВСВ ЛНДО позволяет ввести в рассмотрение три основные динамические матрицы линейного непрерывного объекта:

1. $\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица* объекта
2. $\Phi(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ – *переходная матрица* объекта
3. $w(t)=C\Phi(t,0)B=C\Phi(t)B$ – *весовая матрица* объекта, которая определяет реакцию ЛНДО на $u(t)=\delta(t)$–векторную $\delta-$функцию Дирака, которая в силу своих свойств сворачивает интеграл в подынтегральное выражение.

Следует также добавить, что $\delta-$функция является физически нереализуемой, тем не менее реакция на нее может быть вычислена как свободная составляющая движения ЛНДО по выходу при $x(0)=B$.

Отметим основные свойства переходной матрицы линейного динамического объекта $\Phi(t,\tau)$:

1. $\Phi(\tau,\tau)=\Phi(t,t)=\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t)=I$;
2. $\Phi(t,\tau)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,\tau),\ \forall t,t_1,\tau$;
3. $\det\Phi(t,\tau)\neq 0,\ \forall t,\tau$;
4. $\Phi(t,\tau):\ \dot{\Phi}(t,\tau)=A\Phi(t,\tau),\quad \Phi(\tau,\tau)=I$;
5. $\Phi^{-1}(t,\tau)=\Phi(\tau,t),\ \forall t,\tau$;

матрица $\Phi^T(\tau,t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{\Phi}^T(\tau,t)=-A^T(t)\Phi^T(\tau,t),\ \Phi^T(\tau,\tau)=I.$$

Очевидно, что ключевыми моментами при изучении свойств интегральной модели «вход–состояние–выход» (9.13) линейных непрерывных объектов являются базис представления матрицы A состояния ЛНДО, свойства и способы вычисления матричной экспоненты e^{At}.

Приведем теперь *алгоритм построения* (A,B,C,D) – модельного «вход–состояние–выход» – представления линейных непрерывных динамических объектов (ЛНДО) (9.9),(9.10) по их передаточным функциям (матрицам) $\Phi(s)=Y(s)/U(s)$ отношения «вход-выход».

АЛГОРИТМ 9.1 (А9.1)

построения векторно-матричного ВСВ–представления ЛНДО с использованием моделей ВВ в виде передаточной функции

1. Выбрать базис ВСВ–представления ЛНДО вида (9.5),(9.6):

– канонический фробениусов строчный (управляемый);
– канонический фробениусов столбцовый (наблюдаемый);
– физический.

2. В случае:

2.1. Канонического фробениусова управляемого и канонического фробениусова наблюдаемого базисов записать передаточную функцию ВВ $\Phi(s)=Y(s)/U(s)$ в форме (8.24) отношения двух полиномов $B(s)/D(s)$, построенных по положительным степеням переменной s

$$\Phi(s)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\tilde{\alpha}_i s^{m-i}}{\sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j s^{n-j}}\quad \text{где } n>m; \tag{9.14}$$

2.2. Физического базиса записать передаточную функцию ВВ в виде произведения передаточных функций $\Phi_l(s)$ $l-$х последовательно соединенных функциональных компонентов таких как *исполнительный двигатель, усилительно–преобразовательное устройство, фильтр, корректирующее звено* и т.д., $\Phi(s)=\prod_l \Phi_l(s)$,

после чего каждую передаточную функцию $\Phi_l(s)$ записать в форме (9.14).

3. Записать передаточную функцию (9.14) по отрицательным степеням s^{-1} переменной s, для чего числитель и знаменатель передаточной функции (9.14) разделить на член знаменателя $\tilde{\beta}_0 s^n$, так что в знаменателе передаточной функции образуется свободный член равный единице, а передаточная функция (9.14) принимает вид

$$\Phi(s) \overset{\Delta}{=} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i s^{m-i-n}}{\sum_{j=0}^{n} \beta_j s^{-j}}, \qquad (9.15)$$

где $\beta_0 = 1$; $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_0^{-1}$; $\beta_j = \tilde{\beta}_j \tilde{\beta}_0^{-1}$.

4. Построить структурное модельное представление ЛНДО, описываемое передаточной функцией (ПФ) вида (9.15) с единичным свободным членом знаменателя, на основе использования правила Мейсона не касающихся контуров, в соответствие с которым передаточная функция имеет реализацию в форме n касающихся (вложенных в друг друга) *замкнутых контуров*, передаточные функции которых заданы мультипликативными структурами из постоянного коэффициента $(-\beta_j)$ и сомножителя (s^{-j}) *знаменателя*, а число *прямых ветвей* от входа к выходу структурной реализации ПФ (9.15) определяется числом ненулевых членов *числителя* с передаточными функциями $\alpha_i s^{m-i-n}$, количество которых не превосходит $m+1$.

5. Произвести разметку полученной в п.4 структурной реализации ПФ (9.15) с учетом того, что s^{-1} есть передаточная функция *интегрирующего звена (интегратора)*; при разметке *выходам* интеграторов в определенном порядке приписать переменные состояния $x_j\ (j = \overline{1,n})$, а *непосредственным входам* интеграторов приписать переменную $\dot{x}_j$ – производную по времени от переменной x_j.

6. Списать с размеченной в п.5 структурной реализации ПФ (9.15) матрицы A, B, C, D векторно-матричного ВСВ представления ЛНДО (9.5) и (9.6). ■

Примечание 9.1 (П9.1). Перед списанием со структурной схемы ЛНДО, построенной на интеграторах, сумматорах и усилителях необходимо воспользоваться линейностью модели динамического объекта с тем, чтобы не допустить разброса значений элементов матрицы состояния в столбцах и строках, превышающего десятичный порядок. Это может сделать высоким число обусловленности матрицы,

что повлечет за собой вычислительную неустойчивость всех расчетных матричных процедур.

9.2 Модели ВСВ дискретных объектов управления. Свободное и вынужденное движения дискретных объектов управления Связь матричных компонентов модельных представлений дискретных и непрерывных объектов

Определение 9.3 (О9.3). *Дискретными динамическими объектами (ДДО)* называются объекты, которые характеризуются той же, что и в непрерывном случае, структурой множеств U, X и Y, но множество моментов времени управления и наблюдения T становится дискретным (счетным) так, что $T = \{t : t = t_0 + k\Delta t, k = \overline{1, N}\}$, где Δt есть интервал дискретности, $N = (t_k - t_0)/\Delta t$ – максимальное число дискретных моментов времени управления и наблюдения на T. Если время на интервале управления и наблюдения измерять в числе k интервалов дискретности Δt, то T может быть задано в форме

$T = \{k : k = k_0 + i, i = \overline{0, N}\}$.

Функции перехода λ и выхода δ в дискретных динамических объектах управления задаются в следующей форме:

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \tag{9.16}$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \quad \square \tag{9.17}$$

В выражениях (9.16) и (9.17) время t выражено в числе k интервалов дискретности длительности Δt или, что то же самое, в числе тактов управления (наблюдения).

Для линейных дискретных динамических объектов векторно-матричное описание функций λ и δ записывается в форме:

$$\lambda : x(k+1) = \overline{A}x(k) + \overline{B}u(k), \tag{9.18}$$

$$\delta : y(k) = \overline{C}x(k) + \overline{D}u(k), \tag{9.19}$$

где $\overline{A}$ – $(n \times n)$ – матрица состояния; $\overline{B}$ – $(n \times r)$ – матрица входа; $\overline{C}$ – $(m \times n)$ – матрица выхода; $\overline{D}$ – $(m \times r)$ – матрица передачи со входа на выход (матрица «вход–выход»).

Очевидно, если в соответствии с (9.16)–(9.19) построить графы, используя: *элементы задержки* (ЭЗ), решающие задачу преобразования $x(k+1) \Rightarrow x(k)$; нелинейные блоки $\lambda[x, u]$ и $\delta[x, u]$, а для линейного случая линейные блоки в виде матричных усилителей с матричными коэффициентами передачи $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ и сумматоров, то получим графические представления дискретных динамических объектов в виде структурных схем рисунок 9.3 и рисунок 9.4.

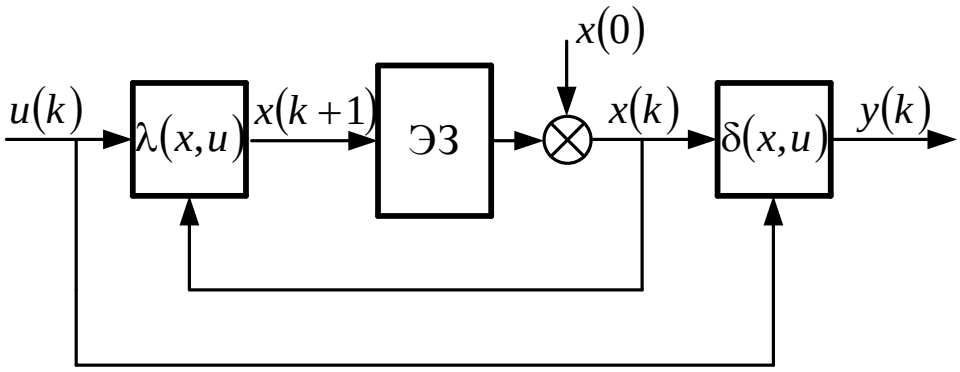


Рисунок 9.3

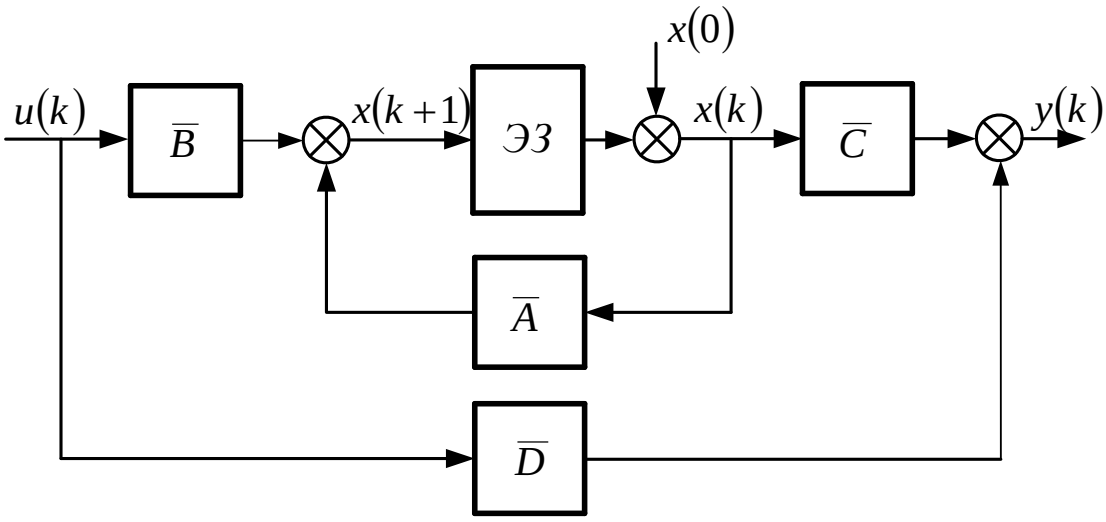


Рисунок 9.4

Модельное представление нелинейных дискретных динамических объектов (НДДО) в форме (9.16)–(9.17) и линейных дискретных динамических (ЛДДО) объектов в форме (9.18)–(9.19), а также в виде структурных схем рисунки 9.3 и 9.4 именуется *рекуррентным*.

Остановимся на способах построения матриц дискретного объекта на основе известных матричных компонентов исходного непрерывного и интервала дискретности. Основных способов два.

Первый способ основан на использовании интегральной модели исходного непрерывного объекта. *Интегральная форма* записи модели ВСВ (9.13) *непрерывного объекта* позволяет получить выражения для *матриц состояния и входа рекуррентной модели* «вход–состояние–выход» линейного *дискретного объекта*. Напомним содержательное отличие непрерывных и дискретных динамических объектов. Дискретный динамический объект реализует дискретную по времени с интервалом длительности Δt выборку из управляемых переменных по состоянию и выходу непрерывного динамического процесса. При этом переменные состояния между моментами выборки изменяются в соответствии с интегральной моделью состояния непрерывного объекта, переменные выхода изменяются по такому же закону, а

переменные входа (управления) между моментами выборки *фиксируются на уровне* значений в предыдущий момент выборки.

Учитывая сказанное, решим задачу вычисления состояния и выхода в момент $t = \Delta t$ на основании информации об их значении в момент $t = 0.$ Тогда в соответствие с интегральной моделью ЛНДО (9.13) и учетом специфики сигнала управления, который фиксируется на весь интервал дискретности на уровне значения на момент начала текущего интервала, оказывается справедливой запись

$$\left.\begin{aligned} x(t)\big|_{t=\Delta t} &= x(\Delta t) = \left\{ e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right\}\Bigg|_{t=\Delta t} = e^{A\Delta t}x(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)}Bu(0)d\tau = \\ &= e^{A\Delta t}x(0) + e^{A\Delta t}\left(\int_0^{\Delta t} e^{-A\tau}d\tau\right)Bu(0) = e^{A\Delta t}x(0) + e^{A\Delta t}\left(1 - e^{-A\Delta t}\right)A^{-1}Bu(0) = \\ &= e^{A\Delta t}x(0) + \left(e^{A\Delta t} - 1\right)A^{-1}Bu(0). \end{aligned}\right\} \quad (9.20)$$

В свою очередь на основании дискретного описания (9.18) оказывается справедливой система представлений

$$x(k+1) = \overline{A}x(k) + \overline{B}u(k),$$

или с учетом, что $(k+1),(k)-$экономное в смысле записи представление моментов времени $t + \Delta t = (k+1)\Delta t$ и $t = k\Delta t$ так, что (9.18) запишется в форме

$$x[(k+1)\Delta t] = \overline{A}x[(k)\Delta t] + \overline{B}u[(k)\Delta t]. \quad (9.21)$$

Если теперь положить в (9.21) $k = 0$ то, получим

$$x(\Delta t) = \overline{A}x(0) + \overline{B}u(0). \quad (9.22)$$

Сравнение левых и правых частей соотношений (9.20) и (9.22) обнаруживает справедливость записей

$$\overline{A} = e^{A\Delta t},\ \overline{B} = \left(e^{A\Delta t} - 1\right)A^{-1}B, \overline{C} = C \Leftrightarrow y(t) = Cx(t)\big|_{t=k\Delta t} \Rightarrow y(k) = \overline{C}x(k). \quad (9.23)$$

Второй способ основан на представлении производной отношением конечных малых приращений

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x((k+1)\Delta t) - x(k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t}.$$

Если полученное приближенное представление производной $\dot{x}(t)$ подставить в модель (9.10) ЛНДО и разрешить относительно переменной $x(k+1)$, то получим рекуррентную запись

$$x(k+1) = (I + A\Delta t)x(k) + (B\Delta t)u(k), y(k) = Cx(k). \quad (9.24)$$

Сравнение рекуррентных представлений (9.18)–(9.19) с (9.24) позволяет записать

$$\overline{A} = I + A\Delta t, \overline{B} = B\Delta t, \overline{C} = C. \quad (9.25)$$

Сравнивая представления (9.23) и (9.25) матриц рекуррентного представления дискретного объекта следует сказать, что представление

(9.23) справедливо при любом значении интервала дискретности, не противоречащего условию теоремы Котельникова–Шеннона, а представление (9.25) справедливо только при $\Delta t = \arg\left\{ \frac{\|I + A\Delta t - \exp(A\Delta t\|}{\|\exp(A\Delta t)\|} \le \delta = 0.01 - 0.05 \right\}$.

Сформируем теперь *суммарную* модель линейного дискретного динамического объекта, являющуюся аналогом *интегральной* модели ЛНДО. Для формирования суммарной модели ЛДДО построим базу индукции на основе рекуррентного представления (9.18) по переменной k – дискретному времени:

1. k=0: $x(1) = \overline{A}x(0) + \overline{B}u(0)$,
2. k=1: $x(2) = \overline{A}x(1) + \overline{B}u(1) = \overline{A}^2 x(0) + A\overline{B}u(0) + \overline{B}u(1)$,
3. k=2: $x(3) = \overline{A}x(2) + \overline{B}u(2) = \overline{A}^3 x(0) + \overline{A}^2\overline{B}u(0) + \overline{A}\overline{B}u(1) + \overline{B}u(2)$.

База индукции построена, поэтому можно формировать представление $x(k)$, $\forall$k

$$x(k) = \overline{A}^k x(0) + \overline{A}^{k-1}\overline{B}u(0) + \overline{A}^{k-2}\overline{B}u(1) + \ldots + \overline{A}\overline{B}u(k-2) + \overline{B}u(k-1) = \\ = \overline{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i). \qquad (9.26)$$

При этом в силу (9.19) и (9.26) для выхода ЛДДО можно записать

$$y(k) = \overline{CA}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{CA}^{k-1-i}\overline{B}u(i) + \overline{D}(k). \qquad (9.27)$$

Нетрудно видеть, что выражения (9.26) и (9.27) позволяют дать представления для свободной и вынужденной составляющей движения ЛДДО по состоянию и выходу. Действительно, если переменные $x(k)$и $y(k)$ представить в виде аддитивной композиции свободной и вынужденной составляющих движения

$$x(k) = x\{x(0), u(k), k\} = x\{x(0),\ k\} + x\{u(k), k\} = x_c(k) + x_в(k), \qquad (9.28)$$

то из сравнения (9.28) и (9.27) получим представления для свободной и вынужденной составляющих движения по вектору состояния

$$x_c(k) = \overline{A}^k x(0); \quad x_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i), \qquad (9.29)$$

и по вектору выхода

$$y_c(k) = \overline{CA}^k x(0); \quad y_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{CA}^{k-1-i}\overline{B}u(i) + \overline{D}u(k). \qquad (9.30)$$

Линейные модели состояния (9.18)–(9.19) дискретных динамических объектов характеризуют динамическое отношение «вход–состояние–выход», которое позволяют построить модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы, (i, j)-ый элемент которой

представляет собой передаточную функцию сепаратного канала, связывающего $i-$ый выход $y_i(k)$ с $j-$ым входом $u_j(k)$.

Действительно, если к (9.18)–(9.19) применить прямое Z–преобразование (см.Приложение 2), то в соответствие с его свойствами получим

$$z\{X(z)-x(0)\}=\overline{A}X(z)+\overline{B}U(z);Y(z)=\overline{C}X(z)+\overline{D}U(z),$$

где $x(0)=x(k)|_{k=0};U(z),X(z),Y(z)-$векторные Z–образы соответственно векторных переменных $u(k),x(k),y(k)$. Если полученные выражения разрешить относительно Z–образов выхода $Y(z)$и входа$U(z)$, то получим

$$Y(z)=\left\{\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}\right\}U(z)+\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}zx(0). \qquad (9.31)$$

В случае когда начальное состояние ДДО (9.18)–(9.19) нулевое так, что $x(0)=0$, то (9.31) принимает вид

$$Y(z)=\left\{\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}\right\}U(z)=\overline{\Phi}(z)U(z),$$

где передаточная $(m\times r)-$ матрица $\overline{\Phi}(z)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{C}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D}\,. \qquad (9.32)$$

Заметим, что передаточная *матрица* в силу определения имеет *мультипликативное* представление так, как операции деления векторов друг на друга не существует, передаточная функция $\overline{\Phi}_{ij}(z)$ (i,j)–го сепаратного канала НДО имеет *дивидендное* представление и в силу (9.32) принимает вид

$$\overline{\Phi}_{ij}(z)=\frac{y_i(z)}{u_j(z)}=\overline{C}^{\,i}(zI-\overline{A})^{-1}\overline{B}_j+\overline{D}_{ij}\,, \qquad (9.33)$$

где $\overline{C}^{\,i}-i-$ая строка матрицы $\overline{C}$, $\overline{B}_j-j-$ый столбец матрицы $\overline{B}$, $\overline{D}_{ij}-$ $(i,j)-$элемент матрицы $\overline{D}$.

Приведем теперь *алгоритм построения* $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})-$ модельного «вход–состояние–выход» – представления линейных дискретных динамических объектов (ЛДДО) (9.18),(9.19) по их передаточным функциям (матрицам) $\overline{\Phi}(z)=Y(z)/U(z)$ отношения «вход-выход».

АЛГОРИТМ 9.2 (А9.2)

построения векторно-матричного ВСВ–представления ЛДДО с использованием моделей ВВ в виде передаточной функции

1. Выбрать базис ВСВ–представления ЛДДО вида (9.18),(9.19):
– канонический фробениусов строчный (управляемый);
– канонический фробениусов столбцовый (наблюдаемый);
– физический.
2. В случае:
   2.1. Канонического фробениусова управляемого и канонического

фробениусова наблюдаемого базисов записать передаточную функцию ВВ $\overline{\Phi}(z)=Y(z)/U(z)$ в форме (8.48) отношения двух полиномов $\overline{B}(z)/\overline{D}(z)$, построенных по положительным степеням переменной z

$$\overline{\Phi}(z)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\overline{B}(z)}{\overline{D}(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\tilde{\alpha}_i z^{m-i}}{\sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j z^{n-j}} \quad \text{где } n>m; \tag{9.34}$$

2.2. Физического базиса записать передаточную функцию ВВ в виде произведения передаточных функций $\overline{\Phi}_l(z)$ $l-$х последовательно соединенных функциональных компонентов таких как *исполнительный двигатель, усилительно–преобразовательное устройство, фильтр, корректирующее звено* и т.д., $\overline{\Phi}(z)=\prod_l \overline{\Phi}_l(z)$, после чего каждую передаточную функцию $\overline{\Phi}_l(z)$ записать в форме (9.34).

3. Записать передаточную функцию (9.34) по отрицательным степеням z^{-1} переменной z, для чего числитель и знаменатель передаточной функции (9.34) разделить на член знаменателя $\tilde{\beta}_0 z^n$, так что в знаменателе передаточной функции образуется свободный член равный единице, а передаточная функция (9.34) принимает вид

$$\Phi(z)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\overline{\alpha}_i z^{m-i-n}}{\sum_{j=0}^{n}\overline{\beta}_j z^{-j}}\ , \tag{9.35}$$

где $\overline{\beta}_0=1$; $\overline{\alpha}_i=\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_0^{-1}$; $\overline{\beta}_j=\tilde{\beta}_j\tilde{\beta}_0^{-1}$.

4. Построить структурное модельное представление ЛНДО, описываемое передаточной функцией (ПФ) вида (9.15) с единичным свободным членом знаменателя, на основе использования правила Мейсона не касающихся контуров, в соответствие с которым передаточная функция имеет реализацию в форме n касающихся (вложенных в друг друга) *замкнутых контуров*, передаточные функции которых заданы мультипликативными структурами из постоянного коэффициента $(-\overline{\beta}_j)$ и сомножителя (z^{-j}) *знаменателя*, а число *прямых ветвей* от входа к выходу структурной реализации ПФ (9.15) определяется числом ненулевых членов *числителя* с передаточными функциями $\overline{\alpha}_i z^{m-i-n}$, количество которых не превосходит $m+1$.

5. Произвести разметку полученной в п.4 структурной реализации ПФ (9.15) с учетом того, что z^{-1} есть передаточная функция *элемента задержки на интервал дискретности (ЭЗ)*, при разметке *выходам*

элементов задержки в определенном порядке приписать переменные состояния $x_j(k)(j=\overline{1,n})$, а *непосредственным входам* ЭЗ приписать переменную $x_j(k+1)$.

6. Списать с размеченной в п.5 структурной реализации ПФ (9.35) матрицы $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}$ векторно-матричного ВСВ представления ЛДДО (9.18) и (9.19). ■

Примечание 9.2 (П9.2). Перед списанием со структурной схемы ЛДДО, построенной на элементах задержки, сумматорах и усилителях необходимо воспользоваться линейностью модели динамического объекта с тем, чтобы не допустить разброса значений элементов матрицы состояния в столбцах и строках, превышающего десятичный порядок. Это может сделать высоким число обусловленности матрицы, что повлечет за собой вычислительную неустойчивость всех матричных процедур.

Завершим параграф кратким рассмотрением особого класса дискретных объектов над конечными полями Галуа, наиболее распространенными из которых являются двоичные динамические системы.

Определение 9.4 (О9.4). Если мощности множеств U входов, X состояний и Y выходов конечны, а множество моментов времени управления и наблюдения дискретно (счетно) так, что выраженное в числе интервалов дискретности (тактов) оно записывается в виде $T=\{k:k=k_0+i,i=\overline{0,N}\}$, то такой дискретный динамический объект называется *p–ичным дискретным динамическим объектом*. □

При этом векторные компоненты модельного представления *p*–ичных дискретных динамических объектов

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_r)^T\in U;$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in X;$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T\in Y,$$

характеризуются принадлежностью их элементов простому полю Галуа *GF*(*p*):

$$u_i,x_j,y_l\in GF(p)=\{\overline{0,p-1}\},\ i=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}.$$

В силу конечности простого поля Галуа мощности множеств U, X и Y также конечны и характеризуются значениями $[U]=p^r,[X]=p^n,[Y]=p^m$. В большинстве практических случаев характеристика *p* простого поля Галуа принимает значение *p*=2 так, что *GF*(*p*) =*GF*(2)={0,1}, при этом *p*–ичные дискретные динамические объекты становятся *двоичными динамическими системами* (ДДС), имеющими две реализационные версии: *нелинейные* ДДС (НДДС)–*конечные автоматы* и *линейные* ДДС (ЛДДС).

В теории конечных автоматов векторы входа u, состояния x и

выхода y принято называть кодовыми последовательностями, кодовыми словами или просто кодами: код входа u, код состояния x, код выхода y.

Функции перехода и выхода λ и δ ДДС формально задаются в виде (9.16)–(9.17):

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \tag{9.36}$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \tag{9.37}$$

Аналитическое представление функций λ и δ в форме (9.36) и (9.37) при p=2 для НДДС – версии задается с использованием аппарата *булевых функций*, который опирается на исходное задание функций λ и δ в форме графов переходов и выходов автомата, а также их табличных аналогов. Аналитическое представление функций λ и δ в форме (9.36) и (9.37) при p=2 для ЛДДС – версии конструируются с использованием аппарата D - преобразования последовательностей над простым полем Галуа, позволяющего построить модельные представления в форме передаточных функций и векторно-матричных описаний «вход-состояние–выход» (ВСВ) в форме (9.18)–(9.19).

Подробное изучение ДДС в задачах преобразования двоичных кодов реализуется в рамках дисциплины «Прикладная теория информации».

9.3. Устойчивость как обязательное условие работоспособности динамических объектов. Условия устойчивости непрерывных и дискретных динамических объектов

Изучение проблемы, вынесенной в заголовок параграфа, начнем с содержательного определения устойчивости.

Определение 9.5 (О9.5). Устойчивостью называется такое системное свойство, при наличии которого начальное отклонение динамического процесса от желаемого его хода с течением времени убывает. □

Определение 9.6 (О9.6). Асимптотической устойчивостью называется такое системное свойство, при наличии которого начальное отклонение динамического процесса от желаемого его хода с течением времени стремится к нулю. □

Если вернуться к представлениям процессов по вектору состояния и выхода в линейных непрерывных и линейных дискретных динамических объектах, рассмотренных в двух предыдущих параграфах настоящего раздела, то нетрудно вспомнить, что источником движения являются два фактора: запасенная энергия, определяемая ненулевым начальным состоянием, и вынуждающая сила, которой является управляющее воздействие. Каждому из перечисленных причинных факторов соответствует своя составляющая движения: первому причинному фактору соответствует свободная

составляющая движения, а второму – вынужденная составляющая движения. Вынужденная составляющая движения определяет желаемый ход динамического процесса, а свободное движение определяет отклонение динамического процесса от желаемого хода.

Таким образом, может быть сформулировано содержательное условие устойчивости.

Определение 9.7 (О9.7). Динамический объект независимо от его непрерывной или дискретной природы будет устойчив при условии, что свободная составляющая движения в нем по зависимым переменным: вектору состоянию и вектору выхода будет с течением временем убывать, а в случае асимптотической устойчивости стремиться к нулю.

Таким образом, исследование устойчивости непрерывных и дискретных динамических объектов сводится к исследованию условий, при которых свободная составляющая движения по их зависимым переменным с течением времени убывает и даже стремится к нулю.

Очевидно, если свободная составляющая с течением времени не убывает, а напротив расходится, то движение динамического объекта удаляется от желаемого его хода, объект становится неработоспособным, т.е. перестает выполнять предписанные ему функции

Поэтому *устойчивость* динамического объекта является первым обязательным *условием его работоспособности*.

Условия устойчивости непрерывных динамических объектов

Как отмечено в преамбуле данного параграфа системное свойство устойчивости линейного непрерывного динамического объекта можно идентифицировать по убыванию (а в случае асимптотической устойчивости стремлению к нулю) свободного движения зависимых переменных к нулю. Для установления условий устойчивости по свободной составляющей движения ЛНДО (9.5)–(9.6) ограничимся автономной версией его представления

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0)\,; y(t) = Cx(t). \qquad (9.38)$$

В (9.38) компоненты записи имеют тот же смысл и размерности, что и в (9.5)–(9.6). Решение системы (9.38), как показано в параграфе 9.1., имеет вид

$$x(t) = e^{At}x(0),\ y(t) = Ce^{At}x(0). \qquad (9.39)$$

Рассмотрим три возможные структуры $\sigma(A)$ алгебраического спектра собственных значений матрицы A.

1.Простая вещественная структура собственных значений матрицы: $\sigma(A) = \left\{ \lambda_i : \det(\lambda I - A) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; Jm(\lambda_{i,j}) = 0; i, j = \overrightarrow{1,n} \right\}$. В этом случае матрица A приводима к диагональному представлению $\Lambda = \mathrm{diag}\left\{ \lambda_i; i = \overline{1,n} \right\}$ с помощью матрицы M преобразования подобия в

форме $A = M\Lambda M^{-1} = M\mathrm{diag}\left\{ \lambda_i; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}$. Известно, что матричное условие подобия сохраняется для матричных функций от матриц в форме $f(A) = Mf(\Lambda)M^{-1}$.Тогда становится справедливым представление решения (9.39) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = Me^{\Lambda t}M^{-1}x(0) = M\mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t}; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}x(0), \\ y(t) &= Cx(t) = CM\mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t}; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}x(0). \end{aligned}\right\}$$

Переход к векторным и матричным нормам для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ с учетом свойств норм позволяет записать

$$\|x(t)\| = \left\| M\mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t}; i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}x(0) \right\| \le \|M\| \left\| \mathrm{diag}\left\{ e^{\lambda_i t}; i = \overline{1,n} \right\} \right\| \left\| M^{-1} \right\| \left\| x(0) \right\|_{\|x(0)\|=1} =$$

$$= C\{M\} e^{\lambda_M t} \tag{9.40}$$

В (9.40) и ниже $C\{(*)\}$ – число обусловленности матрицы $(*)$.

2. Простая комплексно–сопряженная структура собственных значений матрицы: $\sigma(A) = \left\{ \lambda_l : \det(\lambda I - A) = 0; \lambda_l = \alpha_l \pm j\beta_l; l = \overline{1, n/2} \right\}$. В этом случае матрица A приводима к блочно–диагональному представлению $\tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}\left\{ \tilde{\Lambda}_l = \begin{bmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\}$ с помощью матрицы $\tilde{M}$ преобразования подобия в форме $A = \tilde{M}\tilde{\Lambda}\tilde{M}^{-1} = \tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ \tilde{\Lambda}_l = \begin{bmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.39) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = \tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ e^{\tilde{\Lambda}_l t} = e^{\alpha_l t} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1}x(0), \\ y(t) &= Cx(t) = C\tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ e^{\tilde{\Lambda}_l t} = e^{\alpha_l t} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1}x(0). \end{aligned}\right\}$$

Если теперь перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ с учетом свойств норм в том числе и того, что $\left\| \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix} \right\| = 1$ при $\|x(0)\| = 1$ получим

$$\|x(t)\| = \left\| \tilde{M}\mathrm{diag}\left\{ e^{\tilde{\Lambda}_l t} = e^{\alpha_l t} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l t) & \sin(\alpha_l t) \\ -\sin(\alpha_l t) & \cos(\alpha_l t) \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{M}^{-1} \right\| \le C\{\tilde{M}\} e^{\alpha_M t}. \tag{9.41}$$

3.Кратная вещественная структура собственных значений (простоты ради будем полагать кратность $\mu = n$) матрицы:

$\sigma(A)=\{\lambda_i=\alpha:\det(\lambda I-A)=0;\, Jm(\alpha)=0;\, i=\overrightarrow{1,n}\}$. В этом случае матрица A приводима к жордановой форме $J(\alpha)=\mathrm{col}\{\alpha\ \ 1\ \ 0\ \ \dots\ \ 0,\ 0\ \ \alpha\ \ 1\ \ \dots\ \ 0,\dots,0\ \ 0\ \ \dots\ \ \alpha\ \ 1,\ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ \ \alpha\}$, представляемой в виде матричной аддитивной композиции $J(\alpha)=\Lambda(\alpha)+J(0)$, с помощью матрицы T преобразования подобия в форме $A=TJ(\alpha)T^{-1}=T\{\Lambda(\alpha)+J(0)\}T^{-1}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.39) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&x(t)=Te^{\alpha t}e^{J(0)t}T^{-1}x(0)=T\left\{e^{\alpha t}\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2! & \dots & t^{(n-2)}/(n-2)! & t^{(n-1)}/(n-1)!\\ 0 & 1 & t & \dots & t^{(n-3)}/(n-3)! & t^{(n-2)}/(n-2)!\\ 0 & 0 & 1 & \dots & t^{(n-4)}/(n-4)! & t^{(n-3)}/(n-3)!\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}T^{-1}x(0),\\
&y(t)=Cx(t)=CTe^{J(\alpha)t}T^{-1}x(0)
\end{aligned}\right\}$$

Если теперь в полученном выражении перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ с учетом свойств норм и того, что $\left\|e^{J(0t)}\right\|=\sum_{i=0}^{n-1}t^i/(i!)$ при $\|x(0)\|=1$ получим

$$\|x(t)\|=\left\|Te^{J(\alpha)t}T^{-1}x(0)\right\|=\left\|Te^{\alpha t}e^{J(0)t}T^{-1}x(0)\right\|\le C\{T\}e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{n-1}t^i/(i!). \qquad (9.42)$$

Анализ решений автономной системы (9.38) для трех возможных структур алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния позволяет сделать вывод о том, что *необходимым и достаточным условием* выполнения предельных переходов для зависимых переменных в виде векторов состояния и выхода $\lim\limits_{t\to\infty}\{x(x(0),t)\}=0$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\{y(x(0),t)\}=0$ является отрицательность вещественных частей всех собственных значений $\{Re(\lambda_i)<0;\, i=\overline{1,n}\}$. Это же является условием устойчивости исходной модели ЛНДО (9.5)–(9.6).

Условия устойчивости дискретных динамических объектов

Как и для случая непрерывных ДО для установления условий устойчивости по свободной составляющей движения ЛДДО (9.18)–(9.19) ограничимся автономной версией его представления

$$x(k+1)=\overline{A}x(k),\, x(0)\,;\, y(k)=\overline{C}x(k). \qquad (9.43)$$

В (9.43) компоненты записи имеют тот же смысл и размерности, что и в (9.18)–(9.19). Решение системы (9.43), как показано в параграфе 9.2., имеет вид

$$x(k)=\overline{A}^k x(0),\ y(k)=\overline{C}\overline{A}^k x(0). \qquad (9.44)$$

Как и в непрерывном случае рассмотрим три возможные структуры $\sigma(\overline{A})$ алгебраического спектра собственных значений матрицы $\overline{A}$.

1.Простая вещественная структура собственных значений матрицы: $\sigma(\overline{A})=\left\{\overline{\lambda}_i : \det(\overline{\lambda}I-\overline{A})=0; \overline{\lambda}_i \neq \overline{\lambda}_j; i\neq j; Jm(\overline{\lambda}_{i,j})=0; i,j=\overrightarrow{1,n}\right\}$. В этом случае матрица $\overline{A}$ приводима к диагональному представлению $\overline{\Lambda}=\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i; i=\overline{1,n}\right\}$ с помощью матрицы $\overline{M}$ преобразования подобия в форме $\overline{A}=\overline{M}\overline{\Lambda}\overline{M}^{-1}=\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}$. Воспользуемся свойством сохранения матричного условия подобия для матричных функций от матриц в форме $f(\overline{A})=\overline{M}f(\overline{\Lambda})\overline{M}^{-1}$.Тогда становится справедливым представление решения (9.44) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(k)&=\overline{A}^k x(0)=\overline{M}\overline{\Lambda}^k\overline{M}^{-1}x(0)=\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}x(0),\\ y(k)&=\overline{C}x(k)=\overline{C}\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}x(0).\end{aligned}\right\}$$

Переход к векторным и матричным нормам для нормы $\|x(k)\|$ вектора состояния $x(k)$ с учетом свойств норм позволяет записать

$$\|x(k)\|=\left\|\overline{M}\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\overline{M}^{-1}x(0)\right\|\leq\|\overline{M}\|\left\|\mathrm{diag}\left\{\overline{\lambda}_i^k; i=\overline{1,n}\right\}\right\|\|\overline{M}^{-1}\|\|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}=$$
$$=C\{\overline{M}\}\overline{\lambda}_M^k \qquad (9.45)$$

2. Простая комплексно–сопряженная структура собственных значений матрицы:

$\sigma(\overline{A})=\left\{\overline{\lambda}_l : \det(\overline{\lambda}I-\overline{A})=0; \overline{\lambda}_l=\overline{\alpha}_l\pm j\overline{\beta}_l=|\overline{\lambda}_l|(\cos(\phi_l)\pm j\sin(\phi_l)); l=\overrightarrow{1,n/2}\right\}$. В этом случае матрица $\overline{A}$ приводима к блочно–диагональному представлению

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}=\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l=\begin{bmatrix}\overline{\alpha}_l & \overline{\beta}_l\\ -\overline{\beta}_l & \overline{\alpha}_l\end{bmatrix}=(|\overline{\lambda}_l|)\begin{bmatrix}\cos(\phi_l) & \sin(\phi_l)\\ -\sin(\phi_l) & \cos(\phi_l)\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}$$ с

помощью матрицы $\tilde{\overline{M}}$ преобразования подобия в форме $\overline{A}=\tilde{\overline{M}}\tilde{\tilde{\Lambda}}\tilde{\overline{M}}^{-1}=\tilde{\overline{M}}\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l=\begin{bmatrix}\overline{\alpha}_l & \overline{\beta}_l\\ -\overline{\beta}_l & \overline{\alpha}_l\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}\tilde{\overline{M}}^{-1}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.44) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(k)&=\overline{A}^k x(0)=\tilde{\overline{M}}\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l^k=(|\overline{\lambda}_l|)^k\begin{bmatrix}\cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l)\\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l)\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}\tilde{\overline{M}}^{-1}x(0),\\ y(k)&=\overline{C}x(k)=C\tilde{\overline{M}}\mathrm{diag}\left\{\tilde{\tilde{\Lambda}}_l^k=(|\overline{\lambda}_l|)^k\begin{bmatrix}\cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l)\\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l)\end{bmatrix}; l=\overline{1,n/2}\right\}\tilde{\overline{M}}^{-1}x(0).\end{aligned}\right\}$$

Если теперь перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(k)\|$ вектора состояния $x(k)$ с учетом свойств норм в том

числе и того, что $\left\|\begin{bmatrix} \cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l) \\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l) \end{bmatrix}\right\| = 1$ при $\|x(0)\| = 1$ получим

$$\|x(k)\| = \left\|\tilde{\bar{M}}\operatorname{diag}\left\{ \tilde{\tilde{\Lambda}}_l^k = (|\lambda_l|)^k \begin{bmatrix} \cos(k\phi_l) & \sin(k\phi_l) \\ -\sin(k\phi_l) & \cos(k\phi_l) \end{bmatrix}; l = \overline{1, n/2} \right\} \tilde{\bar{M}}^{-1} \right\| \le C\{\tilde{\bar{M}}\}\bar{\lambda}_M^k . \tag{9.46}$$

3. Кратная вещественная структура собственных значений (простоты ради будем как и в непрерывном случае полагать кратность $\mu = n$) матрицы: $\sigma(\bar{A}) = \{ \bar{\lambda}_i = \bar{\alpha} : \det(\bar{\lambda} I - \bar{A}) = 0; Jm(\bar{\alpha}) = 0; i = \overrightarrow{1, n} \}$. В этом случае матрица $\bar{A}$ приводима к жордановой форме $J(\bar{\alpha}) = \operatorname{col}\{ \bar{\alpha} \;\; 1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0, \; 0 \;\; \bar{\alpha} \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 0, \ldots, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; \bar{\alpha} \;\; 1, \; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; \bar{\alpha} \}$. Тогда становится справедливым представление решения (9.44) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(k) &= \bar{T} J^k(\bar{\alpha}) \bar{T}^{-1} x(0) = \bar{T} \left\{ \bar{\alpha}^k \begin{bmatrix} 1 & k/\bar{\alpha} & k(k-1)/2!\bar{\alpha}^2 & \ldots & k(k-1)\ldots(k-(n-2))/(n-1)!\bar{\alpha}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & k/\bar{\alpha} & \ldots & k(k-1)\ldots(k-(n-3))/(n-2)!\bar{\alpha}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & k(k-1)\ldots(k-(n-4))/(n-3)!\bar{\alpha}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k/\bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \right\} \bar{T}^{-1} x(0). \\ y(k) &= \bar{C} x(k) = \bar{C} \bar{T} J^k(\bar{\alpha}) \bar{T}^{-1} x(0) \end{aligned}\right\}$$

Если теперь в полученном выражении перейти к векторным и матричным нормам, то для нормы $\|x(k)\|$ вектора состояния $x(k)$ с учетом свойств норм при $\|x(0)\| = 1$ по аналогии с непрерывным случаем при кратных вещественных собственных числах получим

$$\|x(k)\| = \left\|\bar{T} J^k(\bar{\alpha}) \bar{T}^{-1} x(0)\right\| \le C\{\bar{T}\}\bar{\alpha}^k \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k!}{(k+1-i)!} \right) \Big/ (i!)\bar{\alpha}^i . \tag{9.47}$$

Анализ решений автономной системы (9.43) для трех возможных структур алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния позволяет сделать вывод о том, что *необходимым и достаточным условием* выполнения предельных переходов для зависимых переменных в виде векторов состояния и выхода дискретного объекта $\lim\limits_{k\to\infty}\{x(x(0), k)\} = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\{y(x(0), k)\} = 0$ является удовлетворение значений модулей всех собственных чисел неравенству $(|\bar{\lambda}_i| < 1; i = \overline{1, n})$. Это же неравенство является условием устойчивости исходной модели ЛДДО (9.18)–(9.19).

9.4. Структурные свойства объектов управления: управляемость и наблюдаемость, управляемость и наблюдаемость собственных значений матрицы состояния над бесконечными полями. Каноническое структурное представление Р.Калмана. Полнота моделей ВСВ и ВВ динамических объектов

Остановимся *на важных структурных свойствах* динамических объектов как непрерывных, так и дискретных, которые удалось установить специалистам по теории систем лишь при изучении моделей ВСВ этих объектов. Ниже ограничимся рассмотрением двух *базовых* структурных свойств объектов управления (ОУ): *управляемости и наблюдаемости.*

Определение 9.7 (О9.7). Непрерывный/дискретный динамический объект с парой матриц $(A,B)/\left((\overline{A},\overline{B})\right)$ называется *полностью управляемым,* если его можно из произвольного начального состояния $x_0 = x(t)|_{t=t_0}$ / $x_0 = x(k)|_{k=k_0}$ перевести за конечное время в произвольное конечное состояние $x_k = x(t)|_{t=t_k}$ / $x_k = x(k)|_{k=k_k}$ применив *подходящим образом выбранное управляющее воздействие* (возможно, даже неограниченное). □

Определение 9.8 (О.9.8). Непрерывный/дискретный динамический объект с матрицами $(A,C)/\left(\overline{A},\overline{C}\right)$ называется *полностью наблюдаемым* на интервале наблюдения $T = \{t : t_0 \le t \le t_k\}/T = \{k : k_0 \le k \le k_k\}$, если его состояние $x(t)/x(k)$ может быть определено на основе наблюдений за выходом $y(t)/y(k)$ (а возможно, и входом $u(t)/u(k)$) в течение интервала наблюдения. □

Сформулируем *критерии управляемости и наблюдаемости*, которые инвариантны относительно специфики динамических объектов.

Утверждение 9.1 (У9.1). (*Критерий управляемости 1* **(КУ1))** Объект с парой матриц $(A,B)/(\overline{A},\overline{B})$ является полностью управляемым тогда и только тогда, когда *матрица управляемости объекта,* построенная в силу матричного соотношения

$$\overline{W}_y \overset{\Delta}{=} \left[\overline{B} \vdots \overline{A}\overline{B} \vdots \ldots \vdots \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right] \tag{9.48}$$

имеет ранг, равный $n = \dim x$, т.е.

$$rang\, W_y = \dim x = n. \qquad \square \tag{9.49}$$

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере дискретного объекта управления с использованием его *рекуррентного* модельного представления (9.19).

Поставим задачу перевода дискретного ОУ (9.19) из произвольного ненулевого начального состояния $x(0)$ за $n = \dim x$ – интервалов дискретности (тактов управления) в желаемое конечное $x(n)$. *Вычислим последовательность* управляющих воздействий, образующих «*стратегию* управления», осуществляющих этот перевод. Для этой цели воспользуемся *суммарной* моделью дискретного объекта (9.26)

$$x(k)=\overline{A}^k x(0)+\overline{A}^{k-1}\overline{B}u(0)+\overline{A}^{k-2}\overline{B}u(1)+\ldots+\overline{A}\overline{B}u(k-2)+\overline{B}u(k-1)=$$

$$=\overline{A}^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\overline{A}^{k-1-i}\overline{B}u(i).$$

Запишем последнее выражение для момента $k=n$ в форме, поменяв при этом порядок суммирования компонентов,

$$x(n)-\overline{A}^n x(0)=\left[\overline{B}\quad \overline{A}\overline{B}\quad \ldots\quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right]\left[u^T(n-1)u^T(n-2)\ldots u^T(0)\right]^T. \quad (9.50)$$

Разрешим полученное выражение относительно вектора «стратегии управления», осуществляющего перевод за n тактов ОУ из начального состояния $x(0)$ в желаемое конечное $x(n)$, в результате получим

$$\left[u^T(n-1)u^T(n-2)\ldots u^T(0)\right]^T=\left[\overline{B}\quad \overline{A}\overline{B}\quad \ldots\quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right]^{-1}\left[x(n)-\overline{A}^n x(0)\right].$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим существование искомого управления является *обратимость матрицы*, которая имеет место только при выполнении условия (9.48). ■

Критерий управляемости 2 **(КУ2)**. Пара матриц (A,B) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда матрица

$$Q=W_y W_y^{\ T} \quad (9.51)$$

является положительно определенной, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения $\mu_{yi}>0,\ \mu_{yi}\in\sigma\{Q\},:\det\left(\mu_y I-Q\right)=0;\quad i=\overline{1,n}$.

Для оценки положительной определенности матрицы Q полезно воспользоваться критерием *Сильвестра положительной определенности* матриц. Суть критерия Сильвестра состоит в следующем.

Пусть произвольная квадратная матрица E имеет вид

$$E=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{21} & \cdots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & E_{nn} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим определители подматриц (главные диагональные миноры) матрицы E

$$\Delta_1=E_{11};\quad \Delta_2=\det\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_k=\det\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \ldots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \ldots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ E_{k1} & E_{k2} & \ldots & E_{kn} \end{bmatrix};k=\overline{1,n}.$$

Тогда критерий положительной определенности матрицы E состоит в выполнении условий

$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \cdots \Delta_k > 0, \quad k = \overline{1,n}$.

Примечание 9.3 (П9.3). Критерий управляемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений μ_{yi} матрицы Q (9.51) дополнить вычислением ее собственных векторов $\varsigma_{yi}\left(i = \overline{1,n}\right)$, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора $\varsigma_{yi}\left(i = \overline{1,n}\right)$. При этом подпространство *неуправляемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы Q, которые соответствуют нулевым (минимальным по величине) собственным значениям, а подпространство *наилучшей* управляемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение.

Утверждение 9.2 (У9.2). (*Критерий наблюдаемости 1*(**КН1**)). Объект с парой матриц $(A,C)/(\overline{A},\overline{C})$ являются полностью наблюдаемым тогда и только тогда, когда *матрица наблюдаемости объекта*, построенная в силу матричного соотношения

$$W_н \overset{\Delta}{=} \left[C^T \vdots A^T C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1} C^T\right]^T \tag{9.52}$$

имеет ранг, равный n, т.е. $rang W_н = n = \dim x$. □

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере непрерывного объекта с использованием его дифференциального модельного описания (9.5)–(9.6) при $D = 0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Для получения n условий для вычисления n – компонентного вектора состояния x по *результатам измерения* векторов выхода $y(t)$ и управления $u(t)$, а возможно и производных продифференцируем $(n-1)$ раз по времени вектор выхода $y(t)$, что породит следующий состав измерения

$$y(t) = Cx(t);$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t);$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2 x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t);$$

$$\begin{aligned} \dddot{y}(t) &= CA^2 \dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) = \\ &= CA^3 x(t) + CA^2 Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) \end{aligned};$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{(n-1)} x(t) + CA^{(n-2)} Bu(t) + \ldots + CABu^{(n-1)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

Сформируем на основе полученных соотношений вектор измерений $z(t)$ в форме

$$z(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t)-CBu(t) \\ \ddot{y}(t)-CABu(t)-CB\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}-CA^{(n-2)}Bu(t)-...-CABu^{(n-1)}(t)-CBu^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор измерений $z(t)$ позволяет систему уравнений, построенных на производных вектора выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ привести к виду

$$z(t)=[C^T \vdots A^T C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1}C^T]^T x(t)=W_н x(t). \qquad (9.53)$$

Уравнение (9.53) позволяет для *искомого* вектора $x(t)$ состояния объекта записать

$$x(t)=W_н^{-1}z(t). \qquad (9.54)$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим *восстановление* искомого вектора $x(t)$ состояния объекта является обратимость матрицы наблюдаемости $W_н$, которая имеет место только при выполнении условия $rangW_н = n = \dim x.$ ■

Критерий наблюдаемости 2 **(КН2)**. Пара матриц (A,C) являются полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица

$$P=W_н^T W_н \qquad (9.55)$$

является положительно определенной $(P>0)$, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения.

Примечание 9.4 (П9.4). Критерий наблюдаемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений матрицы P (9.55) дополнить вычислением ее собственных векторов, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора. При этом подпространство *ненаблюдаемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы P, которые соответствуют нулевым собственным значениям, а подпространство *наилучшей* наблюдаемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение. Движение в подпространствах *ненаблюдаемости* не проектируются на выход объекта, а движение в подпространстве *наилучшей* наблюдаемости характеризуются максимальной нормой его проекции на выход.

Введение понятий *управляемости* и *наблюдаемости* позволяет представить исходный объект управления ОУ в виде объединения его структурных компонентов

$$ОУ=\{ОУ_н^у \cup ОУ_н^{ну} \cup ОУ_{нн}^у \cup ОУ_{нн}^{ну}\}. \qquad (9.56)$$

Аналитическая конструкция (9.56) иллюстрируется структурным представлением, изображенным на рисунке 9.5.

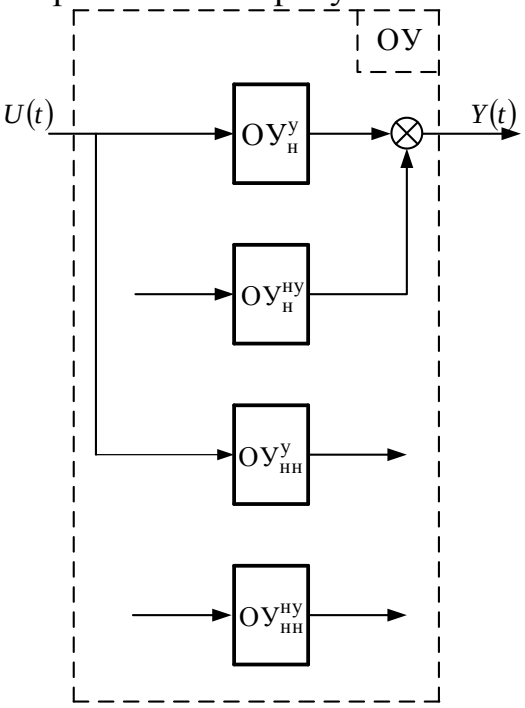


Рисунок 9.5

В представлениях (9.56) и рисунок 9.5 , которые носят название *каноническое представление ОУ* Р.Калмана: $ОУ^{у}_{н}$ – полностью *управляемая* и *наблюдаемая* часть ОУ; $ОУ^{ну}_{н}$ – *неуправляемая*, но *наблюдаемая* часть ОУ; $ОУ^{у}_{ну}$ –*управляемая,* но *ненаблюдаемая* часть ОУ; $ОУ^{ну}_{нн}$ – *неуправляемая* и *ненаблюдаемая* часть ОУ. Следует заметить, что все модели «*вход–выход»* (ВВ) описывают поведение только полностью *управляемой* и *наблюдаемой* $ОУ^{у}_{н}$ части ОУ при *нулевом начальном состоянии* объекта в целом. Таким образом модели ВВ оказываются *модельно менее полными*, чем модели «вход–состояние–выход» (ВСВ). Очевидно, размерность вектора состояния модельного компонента $ОУ^{у}_{н}$ объекта меньше размерности объекта управления в целом, как следствие модель ВВ ОУ имеет меньшую размерность, чем модель ВСВ объекта. Аналитически *редуцирование размерности* модели ВВ происходит путем *сокращения* общих сомножителей полиномов числителя и знаменателя сепаратных передаточных функций ВВ

Завершая рассмотрение свойств и системных характеристик модельных представлений «вход – состояние – выход» объектов управления**,** опирающихся на возможности векторно – матричного формализма линейной алгебры сделаем следующее примечание.

Примечание 9.5 (П9.5). Непрерывный объект (9.5)–(9.6) с парами матриц (A,B)и (A,C) и дискретный объект (9.18)–(9.19) с парами матриц $(\overline{A},\overline{B})$и $(\overline{A},\overline{C})$ называются *нормальными относительно управления*, если являются *управляемыми* все пары матриц $\left(A,B_j;\, j=\overline{1,r}\right)$, где B_j – $j-$ й столбец матрицы B управления объекта и называются *нормальными относительно наблюдения*, если являются *наблюдаемыми* все пары матриц $\left(A,C^l;l=\overline{1,m}\right)$, где C^l-l-я строка матрицы C выхода объекта.

Свойство нормальности объектов управления пока не нашло конструктивного использования в современной теории управления. Проблемы управления объектами с нормальной парой матриц (A,B) и наблюдения с нормальной парой матриц (A,C)гарантирующей богатство вариантов решений, ждут разработки.

Оформим в форме примечания и определений еще одно положение, обогащающее структурные свойства объекта управляемость и наблюдаемость на примере ЛНДО, которое вводит понятия управляемости и наблюдаемости собственных чисел матрицы состояния динамического объекта по сепаратным входам и выходам$\varsigma_i^T\left(C^l\right)^T=C^l\varsigma_i=0$.

Примечание 9.6 (П9.). ЛНДО задан тройкой матриц (A,B,C), при этом A и A^T обладают алгебраическими спектрами собственных чисел$\sigma\{A\}=\sigma\{A^T\}=\{\lambda_i : det(\lambda I-A)=det(\lambda I-A^T)=0; i=\overline{1,n}\}$ и геометрическими спектрами собственных векторов $\{\xi_i : A\xi_i=\lambda_i\xi_i; i=\overline{1,n}\}$ и $\{\varsigma_i : A^T\varsigma_i=\lambda_i\varsigma_i; i=\overline{1,n}\}$.Пусть B_j - $j-$й столбец матрицы B $\left(j=\overline{1,r}\right)$, C^l-l-ая строка матрицы C $\left(l=\overline{1,m}\right)$.

Определение 9.9 (О9.9). Собственное значение $\{\lambda_i;i=\overline{1,n}\}$ является *управляемым* по $j-$му входу $\left(j=\overline{1,r}\right)$ динамического объекта, если выполняется условие $\xi_i^T B_j=B_j^T\xi_i\neq 0$, в случае выполнения условия $\xi_i^T B_j=B_j^T\xi_i=0$ собственное значение $\{\lambda_i;i=\overline{1,n}\}$ является *неуправляемым* по $j-$му входу $\left(j=\overline{1,r}\right)$ динамического объекта. □

Определение 9.10 (О9.10). Собственное значение $\{\lambda_i;i=\overline{1,n}\}$ является *наблюдаемым* по $l-$му выходу $\left(l=\overline{1,m}\right)$ динамического

объекта, если выполняется условие $\xi_i^T\left(C^l\right)^T = C^l\xi_i \neq 0$, в случае выполнения условия $\varsigma_i^T\left(C^l\right)^T = C^l\varsigma_i = 0$ собственное значение $\left\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\right\}$ является *ненаблюдаемым* по $l-$му выходу $\left(l=\overline{1,m}\right)$ динамического объекта. □

9.5. Алгоритм Д. Фаддеева разложения резолвенты в задаче формирования модели ВВ, векторно-матричное дифференциальное уравнение «вход-выход» непрерывных объектов управления

Модели ВСВ предоставляют исследователю объектов управления и динамических систем, построенных на их основе, *непрерывного* и *дискретного* описаний хорошие технологические возможности конструирования моделей ВВ в виде *дифференциальных (рекуррентных) уравнений отношения «вход–выход»* (ДУВВ). Технологию конструирования моделей ДУВВ, опирающуюся на алгоритм Д.Фаддеева разложения резолвенты, проиллюстрируем на примере непрерывного линейного ОУ, задаваемого векторно-матричной моделью ВСВ в виде соотношений (9.5)–(9.6)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{9.57}$$

Передаточная матрица (функция) $\Phi(s): Y(s) = \Phi(s)U(s)$ ОУ (9.58) имеет вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{9.59}$$

Воспользуемся представлением резолвенты $(sI - A)^{-1}$ в форме

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\left[\Delta(sI - A)\right]^T = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n},$$

где $(n \times n)$ – матрицы $H_i\ (i = \overline{0,n-1})$ и коэффициенты характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Д.Фаддеева (6.33). Приведенные соотношения позволяют уравнение «вход-выход» $Y(s) = \Phi(s)U(s)$ записать в форме

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right)Y(s) = \left\{\begin{matrix} C\left(s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}\right)B + \\ + \left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right)D \end{matrix}\right\}U(s), \tag{9.60}$$

что на основе применения обратного преобразования Лапласа с учетом его свойств приводит к дифференциальному уравнению «вход-выход» с матричными коэффициентами относительно производных по времени векторных переменных $y(t)$ и $u(t)$:

$$y^{n}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_n y(t)=D\,u^{n}(t)+$$
$$+\left(CH_0B+a_1D\right)u^{(n-1)}(t)+\ldots+\left(CH_{n-2}B+a_{n-1}D\right)\dot{u}(t)+\left(CH_{n-1}B+a_nD\right)u(t) \quad .(9.61)$$

Если возникает необходимость составления дифференциального уравнения, связывающего $i-$й выход $y_i(t)$ с $j-$м входом $u_j(t)$, то для этого в левой части векторно–матричного дифференциального уравнения «вход-выход» в векторе выхода $y(t)$ следует выделить $i-$й элемент, в правой части в векторе входа $u(t)$ $j-$й элемент, а в матричных коэффициентах выделить $(i,j)-$ые компоненты, находящиеся на пересечении $i-$х строк и $j-$х столбцов.

Соотношения (9.60) и (9.61) позволяют констатировать, что физически реализуемая передаточная система, описываемая моделью «вход–выход» в виде дифференциального уравнения не может иметь порядок производной правой части выше порядка производной ее правой части. Более того равенство порядков имеет место только тогда, когда в модели «вход–состояние–выход» (9.58) матрица прямых связей «вход–выход» $D\neq 0$.

Применительно к модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы (функции) следует констатировать, что порядок полинома числителя передаточной функции любого сепаратного канала, связывающего $i-$й выход $y_i(t)$ с $j-$м входом $u_j(t)$, физически реализуемой системы не может быть выше порядка порядка полинома знаменателя передаточной функции. Более того, равенство порядков имеете место только в случае ненулевой матрицы прямых связей «вход–выход» D.

Это обстоятельство надо иметь в виду для целей контроля корректности составления модели «вход-выход» динамического объекта.

Аналогичным образом алгоритм Д.Фаддеева может быть использован для построения рекуррентного уравнения «вход–выход» с матричными коэффициентами, а также построены скалярные рекуррентные уравнения для любых сепаратных каналов дискретного линейного динамического объекта.

Примеры и задачи

9.1. Построить структурное представление непрерывного объекта управления, описываемого функцией перехода λ и выхода δ вида:

$\lambda : \dot{x}=Ax+Bu$, $\delta : y=Cx$, где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\upsilon_3\\ 1 & 0 & -\upsilon_2\\ 0 & 1 & -\upsilon_1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}\upsilon_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

С помощью критериев управляемости и наблюдаемости исследовать объект на управляемость и наблюдаемость, составить передаточную функцию (матрицу) объекта.

9.2. Построить структурные схемы непрерывных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода вида:

а) $\lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 + 3x_1 u; \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u^3; \end{cases} \quad \delta : y = x_1^2 + 2x_2 + u;$

б) $\lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3; \\ \dot{x}_2 = x_2; \\ \dot{x}_3 = -100x_1 - 10x_2^2 - 5x_1 x_2; \end{cases} \quad \delta : y = x_1 + 2x_2 + 15x_3^2;$

в) $\lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - (\sin\varphi_2)x_2 + (\sin\varphi_2)u_2 + (\cos\varphi_1)u_1; \\ \dot{x}_2 = (\sin\varphi_1)x_1 - \alpha_2 x_2 + (\cos\varphi_2)u_2 - (\sin\varphi_1)u_1; \end{cases}$

$\delta : \begin{cases} y_1 = (\cos\varphi_1)x_1 + (\sin\varphi_2)x_2; \\ y_2 = (-\sin\varphi_1)x_1 + (\cos\varphi_2)x_2; \end{cases}$

г) $\lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1 x_2; \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 u - \beta_2 |u| x_2 - \alpha_1 x_1; \end{cases} \quad \delta : y = 10x_1$

д) $\lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1 x_2; \\ \dot{x}_2 = \beta_3 x_3 + \beta_2 |x_3| x_3 - \beta_1 x_2 + \alpha_1 u; \\ \dot{x}_3 = \alpha_2 u - \beta_4 x_1; \end{cases} \quad \delta : y = 0.1x_3;$

е) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\vartheta_3 & -\vartheta_2 & -\vartheta_1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} \vartheta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

ж) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$

где A, B из пункта е), а $C = \begin{bmatrix} \vartheta_3 & \vartheta_2 & \vartheta_1 \end{bmatrix};$

з) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\vartheta_3 \\ 1 & 0 & -\vartheta_2 \\ 0 & 1 & -\vartheta_1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} \vartheta_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

и) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx,$

где A, C из пункта 3), а $B = \begin{bmatrix} \vartheta_3 & \vartheta_2 & \vartheta_1 \end{bmatrix}^T;$

к) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx + Du,$

где A, B и C те же, что в пункте з), а $D = \begin{bmatrix} \vartheta_0 \end{bmatrix}.$

л) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

м) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu;\quad \delta : y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

н) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu;\quad \delta : y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 0 & 8\end{bmatrix};$$

о) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu;\quad \delta : y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 4 & 5\\ 6 & 3\\ 8 & 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5 & 0\end{bmatrix}.$$

9.3. Определить передаточные матрицы и функции сепаратных каналов линейных непрерывных объектов, описываемых функциями перехода и выхода из 9.2: п.п. е)÷о)

9.4. Определить, управляемы и наблюдаемы ли объекты управления, а также управляемы и наблюдаемы ли они по каждому из входов и выходов (в случае $r>1, m>1$), если объекты описываются функциями перехода и выхода из п.п. е)÷о)

9.5.С использованием алгоритма А9.1 построить модели ВСВ линейных непрерывных объектов в форме функций перехода λ и выхода δ по заданным передаточным матрицам (функциям) «вход–выход»:

а) $\Phi(s)=\dfrac{10}{s^3}$, б) $\Phi(s)=\dfrac{s+\beta}{s+\alpha}$,

в) $\Phi(s)=\dfrac{\beta}{s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3}$, г) $\Phi(s)=\dfrac{\beta_1 s+\beta_2}{s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3}$,

д) $\Phi(s)=\dfrac{\beta_1 s^2+\beta_2 s+\beta_3}{s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3}$, е) $\Phi(s)=\dfrac{\beta_1 s^3+\beta_2 s^2+\beta_3 s+\beta_4}{s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3}$,

ж) $\Phi(s)=\dfrac{\beta(s+\gamma)}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$, з) $\Phi(s)=\dfrac{\beta}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)}$,

и) $\Phi(s)=\dfrac{\beta s+\gamma}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$, к) $\Phi(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta_{11}}{s+\alpha_{11}} & -\beta_{12}\\ \beta_{21} & \dfrac{\beta_{22}}{s+\alpha_{22}}\end{bmatrix}$,

л) $\Phi(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta_{11}}{s+\alpha_{11}} & \dfrac{\beta_{12}}{s} & \dfrac{\beta_{13}s+\beta_{13}^2}{s(s+\alpha_{13})}\\ -\beta_{21} & \dfrac{\beta^1{}_{22}s+\beta_{22}^2}{s} & \dfrac{\beta_{23}}{s+\alpha_{23}}\end{bmatrix}$.

9.6. Построить структурные схемы дискретных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода:

а) $\lambda:\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)+Tx_2(k)-\dfrac{1}{2}T^2u(k)\\ x_2(k+1)=x_2(k)+Tu(k)\end{cases}$ $\delta: y(k)=x_1(k)$,

б) $\lambda:\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)+Tx_2(k)+\dfrac{T^2}{2}x_3(k)+\dfrac{1}{6}T^3u(k)\\ x_2(k+1)=x_2(k)+Tx_3(k)+\dfrac{T^2}{2}u(k)\\ x_3(k+1)=x_3(k)+Tu(k)\end{cases}$ $\delta: y(k)=x_1(k)$,

в) $\lambda: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k);\ \delta: y(k)=Cx(k)$,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\1&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}.$$

г) $\lambda: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k);\ \delta: y(k)=Cx(k)$,

$$A=\begin{bmatrix}0.9&0.06&0&0\\-1.5&0.1&0&0\\0&0.01&0.9&0.6\\0.02&-0.004&-1.5&0.1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

9.9. Определить передаточные матрицы и функции дискретных объектов примеров 9.6

9.8. С использованием алгоритма А9.2 построить модель ВСВ дискретных объектов, заданных передаточными функциями (матрицами):

а) $\Phi(z)=\dfrac{\beta z+1}{\alpha z+1}$; б) $\Phi(z)=\dfrac{\beta_1 z^2+\beta_2 z+\beta_3}{z^3+\alpha_1 z^2+\alpha_2 z+\alpha_3}$;

в) $\Phi(z)=\dfrac{\beta_1 z^{-2}+\beta_2 z^{-1}+\beta_3}{z^{-3}+\alpha_1 z^{-2}+\alpha_2 z^{-1}+\alpha_3}$; г) $\Phi(z)=\begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{11}}{z+\alpha_{11}} & \beta_{12} \\ 0 & \dfrac{\beta_{22}}{z+\alpha_{22}} \end{bmatrix}$

9.9. Для значений интервалов дискретности 0.01 сек. и 0.1 сек. построить матрицы $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ дискретного описания непрерывных объектов из задачи 9.2.

Решение вариантов задач

Решение задачи 9.1. Запишем функции λ и δ в координатной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + 0x_2 - \upsilon_3 x_3 + \upsilon_3 u \\ \dot{x}_2 &= 1x_1 + 0x_2 - \upsilon_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= 0x_1 + 1x_2 - \upsilon_1 x_3 \\ y &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \end{aligned} .$$

Для построения структурного представления объекта необходимы 3 интегратора, у которых входом *j*-го интегратора является переменная $\dot{x}_j$, представленная в виде линейной комбинации выходов интеграторов $x_i\left(j, i=\overline{1,n}\right)$ и входного воздействия u, описываемой *j*-ой строкой функции перехода λ, при этом линейная комбинация формируется сумматором. Выход y объекта управления является линейной комбинацией составляющих вектора состояния, который формируется с помощью усилительных элементов с коэффициентами усиления, равными коэффициентам при соответствующих составляющих x_i вектора состояния x в функции выхода δ, и устройством суммирования. Для оценки управляемости и наблюдаемости объекта составим матрицы управляемости W_y и наблюдаемости $W_н$ в силу выражений (9.17) и (9.20):

$$W_y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3 \end{bmatrix},$$

$$W_н = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \left(A^T\right)^2 C^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\upsilon_1 \\ 1 & -\upsilon_1 & -\upsilon_1^2 - -\upsilon_2 \end{bmatrix}.$$

В соответствие с критериями управляемости и наблюдаемости в первых формулировках объект управления является полностью управляемым и наблюдаемым, так как

$rang\left(W_y\right) = 3 = \dim x$, $rang\left(W_н\right) = 3 = \dim x$.

Для того, чтобы воспользоваться критериями управляемости и

наблюдаемости во вторых формулировках (КУ2 и КН2) построим матрицы $Q = W_y W_y^{\ T}$ и $P = W^T{}_н W_н$, которые для рассматриваемого объекта управления принимают вид

$$Q = \begin{bmatrix} \upsilon_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3^2 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon_1 & \upsilon_1^2 - \upsilon_2 \\ -\upsilon_1 & 1+\upsilon_1^2 & -\upsilon_1 + \upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^3 \\ \upsilon_1^2 - \upsilon_2 & -\upsilon_1 + \upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^3 & 1+\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_1^4 - 2\upsilon_1^2\upsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Положительная определенность матрицы Q очевидна.

Для матрицы $P = W^T{}_н W_н$ имеем

$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 1.$

Таким образом, P – положительно определенная матрица.

Определим передаточную функцию (матрицу) «вход–выход» объекта. По определению передаточной функции (матрицы)

$$\Phi(s) \overset{\Delta}{=} Y(s) \big/ U(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{det(sI - A)} C\left[adj(sI - A)\right]^T B =$$

$$= \frac{1}{s^3 + \upsilon_1 s^2 + \upsilon_2 s + \upsilon_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + \upsilon_1 s + \upsilon_2 & -\upsilon_3 & 1 - \upsilon_3 s \\ s + \upsilon_1 & s^2 + \upsilon_1 s & -\upsilon_2 s - \upsilon_3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^3 + \upsilon_1 s^2 + \upsilon_2 s + \upsilon_3} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\upsilon_3}{s^3 + \upsilon_1 s^2 + \upsilon_2 s + \upsilon_3}.$$

Поставленные задачи решены.

Решение задачи 9.5г.

По передаточной функции «вход–выход» ЛНДО $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s + \beta_2}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$, построить *A*, *B*, *C*–«вход–состояние–выход» представление на основе алгоритма А9.1. В соответствие с этим алгоритмом:

1.Выбираем канонический управляемый (фробениусов строчный) базис представления;

2.Пункт 2 алгоритма А9.1 выполнен исходным задание передаточной функции, которая представляет собой отношение двух полиномов относительно переменной «*s*»;

3.Записываем передаточную функцию по отрицательным степеням переменной Лапласа «s» , так чтобы в знаменателе образовался единичный свободный член, для чего числитель и знаменатель делим на член «s^3», в результате чего получаем представление передаточной функции

$$\Phi(s)=\frac{\beta_1\dfrac{1}{s^2}+\beta_2\dfrac{1}{s^3}}{1+\alpha_1\dfrac{1}{s}+\alpha_2\dfrac{1}{s^2}+\alpha_3\dfrac{1}{s^3}};$$

3.,4. Выполняем п.п.3 и 4: строим структурное представление в каноническом управляемом базисе и размечаем его, результат выполнение этих пунктов алгоритма А9.1 представлен на рисунке 9.6

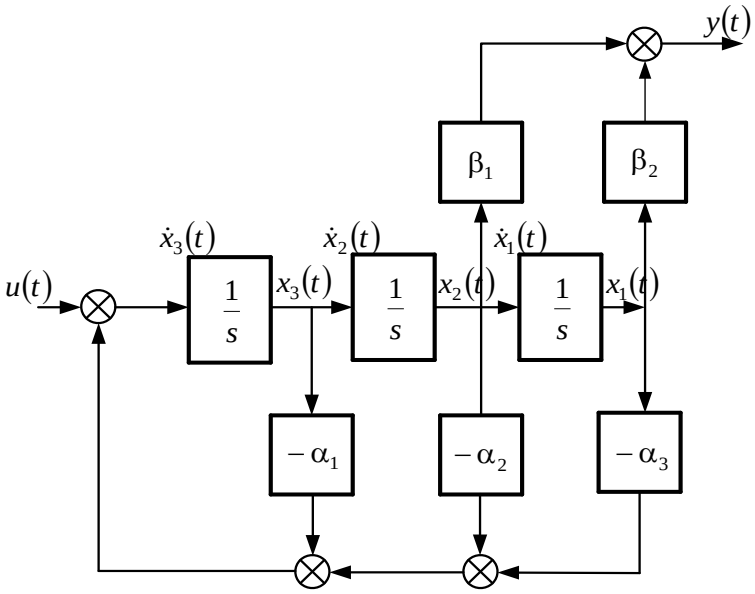


Рисунок 9.6

5.Списываем матрицы A,B,C описания $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad y(t)=Cx(t)$ с отмеченного структурного представления рисунок 9.6 и получаем

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}\beta_2 & \beta_1 & 0\end{bmatrix}.$$ ■

10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКЗОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассматривается задача построения математических моделей физических сред, в которых формируются непрерывные $\varphi(t)$ и дискретные по времени $\varphi(k)$ экзогенные (*рожденные вне т.е. внешние*) воздействия. Как и ранее, t – непрерывное время, k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что для дискретных представлений воздействий выполняется соотношение $t = (\Delta t) \cdot k$.

Определение 10.1 (О10.1). Непрерывное скалярное воздействие $\varphi(t)$ называется конечномерным, если оно может быть представлено в виде суммы конечного числа элементов

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \psi_\nu(t), \tag{10.1}$$

где q – конечное целое положительное число, аддитивные компоненты которого $\psi_\nu(t)$ формируются автономными непрерывными динамическими системами конечной размерности, γ_ν – коэффициенты из поля F.
□

Определение 10.2 (О10.2). Дискретное по времени скалярное воздействие $\varphi(k)$ называется конечномерным, если оно представимо в виде суммы конечного числа элементов

$$\varphi(k) = \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \psi_\nu(k), \tag{10.2}$$

где q – конечное целое положительное число, аддитивные компоненты которого $\psi_\nu(k)$ [1] формируются автономными дискретными динамическими системами конечной размерности, γ_ν – коэффициенты из поля F.
□

Примечание 10.1 (П10.1). В дальнейшем рассматриваются воздействия, коэффициенты $\gamma_\nu (\nu = \overline{1,q})$ которых в (10.1) и (10.2) принадлежат полю действительных чисел ($F = R$).

Понятие «воздействие» предполагает наличие динамического объекта или динамической системы, на которые осуществляется воздействие, которое относительно этих объекта и системы оказывается внешним (экзогенным). В этой связи выделим два типа внешних воздействий на динамический объект (динамическую систему).

[1] В дальнейшем вместо «дискретное по времени» будем использовать понятие «дискретное».

Первый тип экзогенного воздействия именуется *задающим*, которое обозначается для непрерывного случая в форме $g(t)$, а для дискретного – $g(k)$. При этом, если $g(t)$ ($g(k)$) являются конечномерными, то выполняются равенства

$$g(t) = \varphi(t),\ g(k) = \varphi(k). \tag{10.3}$$

Второй тип экзогенного воздействия именуется *возмущающим*, которое для непрерывного случая обозначается как $f(t)$, а для дискретного – $f(k)$. Если $f(t)$ и $f(k)$ являются конечномерными, то выполняются соотношения

$$f(t) = \varphi(t),\ f(k) = \varphi(k). \tag{10.4}$$

Задающее $g(t)$, ($g(k)$) и возмущающее $f(t)$, ($f(k)$) несут различную функциональную нагрузку.

Так, если динамическая система характеризуется выходным сигналом $y(t)$, ($y(k)$), то она должна быть спроектирована таким образом, чтобы при подаче на вход системы задающего воздействия $g(t)$, ($g(k)$) выходной сигнал (или просто выход) $y(t)$, ($y(k)$) с течением времени максимально приближался бы к задающему воздействию, что можно записать в форме

$$\lim_{t\to\infty} y(t, g(t) \neq 0) = g(t), \tag{10.5}$$

$$\lim_{k\to\infty} y(k, g(k) \neq 0) = g(k). \tag{10.6}$$

Если система удовлетворяет условиям (10.5), (10.6), то она решает *задачу слежения* выходной переменной за задающим воздействием.

Возмущающее воздействие является «мешающим» фактором, поэтому динамическая система должна быть спроектирована так, чтобы при подаче на вход системы возмущающего воздействия $f(t)$ ($f(k)$), выход системы $y(t)$ ($y(k)$) с течением времени должен максимально приближаться к его реализации, которая имела место при отсутствии возмущающего воздействия, что можно записать в форме

$$\lim_{t\to\infty} y(t, f(t) \neq 0) = \lim_{t\to\infty} y(t, f(t) = 0), \tag{10.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(k, f(k) \neq 0) = \lim_{t\to\infty} y(k, f(k) = 0). \tag{10.8}$$

Если система удовлетворяет условиям (10.7), (10.8), то она решает задачу стабилизации выхода путем *парирования* возмущающего воздействия.

Поиск модельных представлений конечномерных воздействий в классе автономных динамических систем имеет технологическую, вычислительную и алгоритмическую нагрузки.

10.1 Модели конечномерных непрерывных типовых экзогенных воздействий

В теории и практике управления непрерывными объектами в составе непрерывных систем используются конечномерные воздействия следующих типов:

1. *Полиномиальные воздействия*, представление (10.1) которых имеет вид

$$\psi(t) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \gamma_\nu t^\nu \; ; \tag{10.9}$$

2. *Экспоненциальные*, представление (10.1) которых имеет вид

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu e^{\alpha_\nu t} = \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \exp(\alpha_\nu t) \, ; \tag{10.10}$$

3. *Гармонические*, представление (10.1) которых имеет вид

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \sin(\omega_\nu t + \varphi_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q} (\gamma_{s\nu} \sin \omega_\nu t + \gamma_{c\nu} \cos \omega_\nu t) \, ; \tag{10.11}$$

4. *Затухающие (расходящиеся) гармонические*, представление (10.1) которых имеет вид

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu e^{\alpha_\nu t} \sin(\omega_\nu t + \varphi_\nu) \, . \tag{10.12}$$

Модельные представления источников конечномерных воздействий (ИКВ) перечисленных типов (10.9)-(10.12) в виде автономных динамических систем, имеющих векторно-матричное описание (ВМО) вида

$$\dot{z}(t) = Ez(t) \, , \; z(0) = z(t)\big|_{t=0} \, , \; \psi(t) = P_\psi z(t) \, , \tag{10.13}$$

где z – вектор состояния ИКВ, E, P_ψ – соответственно матрицы состояния и выхода, размерности которых определяются конкретным типом $\psi(t)$, сформируем в виде системы утверждений.

Утверждение 10.1 (У10.1). Полиномиальные конечномерные воздействия вида (10.9) формируются ИКВ, имеющим ВМО (10.13) с матричными компонентами $E \in R^{q \times q}$ и $P_\psi \in R^{1 \times q}$ вида

$$E = \begin{bmatrix} 0_{q \times 1} & I_{(q-1)\times)q-1)} \\ & 0_{1 \times (q-1)} \end{bmatrix}, \; P_\psi = \begin{bmatrix} 1 & row(P_{\psi\nu} = 0; \nu = \overline{1, q-1} \end{bmatrix}, \tag{10.14}$$

при векторе начального состояния $z(0) = col\{z_\nu(0); \nu = \overline{1, q}\}$ с компонентами

$$z_\nu(0) = (\nu!)\gamma_\nu \, ; \; \nu = \overline{1, q} \, . \qquad \square (10.15)$$

Доказательство. Решение системы (10.13) относительно векторов состояния $z(t)$ и выхода $\psi(t)$ имеет вид

$$z(t) = e^{Et} z(0),\ \psi(t) = P_\psi e^{Et} z(0). \qquad (10.16)$$

Матрица E в силу представления (10.14) имеет форму Жордана с нулевыми диагональными элементами ($E_{\nu\nu} = 0; \nu = \overline{1,q}$), поэтому матричная экспонента $\exp(Et)$ в силу (6.31) и учетом того, что $\exp(E_{\nu\nu} t) = 1$, принимает вид

$$e^{Et} = \exp(Et) = \begin{bmatrix} 1 & t & (2!)^{-1}t^2 & \dots & [(q-1)!]^{-1}t^{q-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & [(q-2)!]^{-1}t^{q-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10.17)$$

Подстановка (10.17) в соотношение для $\psi(t)$ (10.16) с учетом вида (10.14) матричных компонентов дает

$$\psi(t) = z_1(0) + z_2(0)t + z_3(0)(2!)^{-1}t^2 + \ldots + z_q(0)[(q-1)!]t^{q-1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{q-1} (\nu!)^{-1} z_{\nu+1}(0) t^\nu . \qquad (10.18)$$

Если в (10.18) подставить (10.15), то получим (10.19). ■

Анализ матричных компонентов (10.14) ВМО источника полиномиального конечномерного воздействия показывает, что ИКВ полиномиального типа представляет собой цепь из q интеграторов, на выходе которой формируется $\psi(t)$. В теории и практике управления для исследования динамических свойств систем управления в классе полиномиальных конечномерных воздействий выделяются типовые воздействия вида:

– статическое воздействие ($\psi(t) = \gamma_0 = const$);

– кинетическое воздействие ($\psi(t) = \gamma_1 t$);

– динамическое воздействие ($\psi(t) = \gamma_2 t^2$).

Первое (статическое) типовое воздействие обычно характеризуется величиной $\gamma_0 = 1$ и именуется *единичным воздействием*, его источник (10.13) имеет матричные компоненты (10.14) и начальное состояние (10.15) вида

$$E = [0_{1\times1}];\ P_\psi = [1];\ z_1(0) = \gamma_0 . \qquad (10.19)$$

Второе (кинетическое) типовое воздействие характеризуется постоянной скоростью $\dot\psi(t) = \gamma_1$, его источник (10.13) имеет компоненты (10.14) и (10.15) вида

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ P_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};\ z(0) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \end{bmatrix}^T . \qquad (10.20)$$

Третье (динамическое) типовое воздействие характеризуется постоянным ускорением $\ddot\psi(t) = 2!\gamma_2$, его источник (10.13) имеет компоненты (10.14) и (10.15) вида

$$E=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ P_\psi=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix};\ z(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2!\gamma_2\end{bmatrix}. \qquad (10.21)$$

Утверждение 10.2 (У10.2). Экспоненциальные конечномерные воздействия вида (10.10) формируются ИКВ, имеющим ВМО (10.13) с матричными компонентами $E\in R^{q\times q}$ и $P_\psi\in R^{1\times q}$ вида

$$E=diag\left\{\alpha_\nu;\ \nu=\overline{1,q}\right\},\ P_\psi=row\left\{P_{\psi\nu}=1,\ \nu=\overline{1,q}\right\}, \qquad (10.22)$$

при векторе начального состояния

$$z(0)=col\left\{z_\nu(0)=\gamma_\nu;\ \nu=\overline{1,q}\right\}.\square \qquad (10.23)$$

Доказательство. Решение системы (10.13) относительно векторов состояния $z(t)$ и выхода $\psi(t)$ имеет вид (10.16). Матричная экспонента $\exp(Et)$ в силу структуры (10.22) матрицы E принимает вид

$$e^{Et}=\exp(Et)=diag\left\{e^{\alpha_\nu t};\ \nu=\overline{1,q}\right\}. \qquad (10.24)$$

Подстановка (10.24) в соотношение для $\psi(t)$ (10.16) с учетом вида (10.22) матричных компонентов E и P_ψ и (10.23) дает

$$\psi(t)=z_1(0)e^{\alpha_1 t}+z_2(0)e^{\alpha_2 t}+\ldots+z_q(0)e^{\alpha_q t}=\sum_{\nu=1}^{q}\gamma_\nu e^{\alpha_\nu t}. \qquad \blacksquare(10.25)$$

Анализ матричных компонентов (10.22) ВМО источника экспоненциального конечномерного воздействия показывает, что ИКВ этого типа представляет собой структуру из параллельно включенных интеграторов, каждый из которых охвачен обратной связью с коэффициентом передачи α_ν ($\nu=\overline{1,q}$), выходы которых объединены на общем сумматоре.

Утверждение 10.3 (У10.3). Гармонические конечномерные воздействия вида (10.11) формируются ИКВ, имеющим ВМО (10.13) с матричными компонентами $E\in R^{2q\times 2q}$ и $P_\psi\in R^{1\times 2q}$ вида

$$E=diag\left\{E_\nu=\begin{bmatrix}0 & \omega_\nu\\ -\omega_\nu & 0\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\},\ P_\psi=row\left\{P_{\psi\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\}, \qquad (10.26)$$

при векторе начального состояния

$$z(0)=col\left\{z_\nu(0)=\begin{bmatrix}\gamma_{c\nu} & \gamma_{s\nu}\end{bmatrix}^T;\ \nu=\overline{1,q}\right\}. \qquad \square(10.27)$$

Доказательство. Решение системы (10.13) относительно векторов состояния $z(t)$ и выхода $\psi(t)$ имеет вид (10.16). Матричная экспонента $\exp(Et)$ в силу структуры (10.26) матрицы E принимает вид

$$e^{Et}=\exp(Et)=diag\left\{e^{E_\nu t}=\begin{bmatrix}\cos(\omega_\nu t) & \sin(\omega_\nu t)\\ -\sin(\omega_\nu t) & \cos(\omega_\nu t)\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\}. \qquad (10.28)$$

Подстановка (10.28) в выражение для $\psi(t)$ с учетом вида (10.26) матрицы P_ψ и представления (10.27) вектора начального состояния $z(0)$ дает

$$\psi(t)=\sum_{\nu=1}^{q}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\omega_\nu t) & \sin(\omega_\nu t)\\ -\sin(\omega_\nu t) & \cos(\omega_\nu t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{c\nu}\\ \lambda_{s\nu}\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{q}\left(\gamma_{c\nu}\cos(\omega_\nu t)+\gamma_{s\nu}\sin(\omega_\nu t)\right). \qquad (10.29)$$

Анализ матричных компонентов (10.26) ВМО источника гармонического конечномерного воздействия показывает, что ИКВ этого типа представляет собой структуру из q параллельно включенных цепочек из двух последовательно соединенных интеграторов, в которых сигнал с выхода второго интегратора подается на вход первого через элемент с коэффициентом передачи ω_ν. При этом с выхода первого интегратора сигнал по цепи обратной связи с коэффициентом передачи $(-\omega_\nu)$ подается на вход второго. Сигналы с выходов первых интеграторов каждой из цепочек объединяются на общем сумматоре.

Утверждение 10.4 (У10.4). Затухающие (расходящиеся) гармонические конечномерные воздействия вида (10.12) формируются ИКВ, имеющим ВМО (10.13) с матричными компонентами $E\in R^{2q\times 2q}$ и $P_\psi\in R^{1\times 2q}$ вида

$$E=diag\left\{E_\nu=\begin{bmatrix}\alpha_\nu & \omega_\nu\\ -\omega_\nu & \alpha_\nu\end{bmatrix};\nu=\overline{1,q}\right\},P_\psi=row\left\{P_{\psi\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\nu=\overline{1,q}\right\} \quad (10.30)$$

при векторе начального состояния (10.27). □

Доказательство. Решение системы (10.13) относительно векторов состояния $z(t)$ и выхода $\psi(t)$ имеет вид (10.16). Матричная экспонента $\exp(Et)$ в силу структуры (10.30) матрицы E принимает вид

$$e^{Et}=\exp(Et)=diag\left\{e^{E_\nu t}=e^{\alpha_\nu t}\begin{bmatrix}\cos(\omega_\nu t) & \sin(\omega_\nu t)\\ -\sin(\omega_\nu t) & \cos(\omega_\nu t)\end{bmatrix};\nu=\overline{1,q}\right\}. \qquad (10.31)$$

Подстановка (10.31) в выражение для $\psi(t)$ с учетом вида (10.30) матрицы P_ψ и представления (10.27) вектора начального состояния $z(0)$ дает

$$\psi(t)=\sum_{\nu=1}^{q}e^{\alpha_\nu t}\left(\gamma_{c\nu}\cos(\omega_\nu t)+\gamma_{s\nu}\sin(\omega_\nu t)\right)=\sum_{\nu=1}^{q}\gamma_\nu e^{\alpha_\nu t}\sin(\omega_\nu t+\varphi_\nu). \qquad (10.32)$$

Если $\alpha_\nu>0$, то воздействие (10.12) будет расходящимся, а в случае $\alpha_\nu<0$ – сходящимся. Структурно ИКВ (10.12) совпадает с ИКВ (10.11) с той разницей, что каждый интегратор ИКВ (10.12) охвачен обратной связью с коэффициентом α_ν.

Примечание 10.2 (П10.2). Если возникает необходимость построить источник конечномерного воздействия, которое представляет собой аддитивную смесь воздействий вида (10.9)–(10.12), то он строится в форме (10.13), где матрица E принимает блочно-

диагональную форму с матричными блоками на диагонали, записанными в виде (10.14), (10.22), (10.26) и (10.30). Матрица выхода такого ИКВ P_ψ строится в блочно-строчной форме с матричными блоками в строке в виде матриц выхода тех же представлений (10.14), (10.22), (10.26) и (10.30).

10.2. Модели дискретных конечномерных типовых воздействий

Дискретные аналоги (10.2) конечномерных непрерывных типовых воздействий вида (10.9) – (10.12) имеют приводимый ниже вид.

1. Для случая *полиномиальной* реализации (10.2)

$$\psi(k) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \bar{\gamma}_\nu k^\nu ; \tag{10.33}$$

2. Для случая *степенной* реализации (10.2)

$$\psi(t) = \sum_{\nu=0}^{q} \bar{\gamma}_\nu \bar{\alpha}_\nu^k ; \tag{10.34}$$

3. Для случая *гармонической* реализации (10.2)

$$\psi(k) = \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{\gamma}_{s\nu} \sin(\omega_\nu(\Delta t)k) + \bar{\gamma}_{c\nu} \cos(\omega_\nu(\Delta t)k)) ; \tag{10.35}$$

4. Для *затухающей (расходящейся) гармонической* реализации (10.2)

$$\psi(k) = \sum_{\nu=1}^{q} \bar{\alpha}_\nu^k (\bar{\gamma}_{s\nu} \sin(\omega_\nu(\Delta t)k) + \bar{\gamma}_{c\nu} \cos(\omega_\nu(\Delta t)k)) . \tag{10.36}$$

Модельные представления источников дискретных конечномерных воздействий (ИДКВ) вида (10.33) – (10.36) в форме автономных дискретных систем вида

$$z(k+1) = \bar{E} z(k);\ z(0) = z(k)\big|_{k=0};\ \psi(k) = \bar{P}_\psi z(k) \tag{10.37}$$

имеют матричные компоненты $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$, связанные с компонентами ВМО (10.13) непрерывных КВ соотношениями

$$\bar{E} = \exp(E\Delta t),\ \bar{P}_\psi = P_\psi . \tag{10.38}$$

Явное решение системы (10.37) относительно переменных $z(k)$ и $\psi(k)$ имеет вид

$$z(k) = \bar{E}^k z(0),\ \psi(k) = \bar{P}_\psi \bar{E}^k z(0) . \tag{10.39}$$

Конкретная реализация $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$ зависит от вида дискретного конечномерного воздействия (10.2), формируемого на выходе ИДКВ (10.37). Зададим представления $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$ с помощью системы утверждений.

Утверждение 10.5 (У10.5). Матрицы $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$ ВМО ИДКВ (10.33) имеют представление

$$\overline{E}=\begin{bmatrix}1 & \Delta t & (2!)^{-1}(\Delta t)^2 & \dots & [(q-1)!]^{-1}(\Delta t)^{q-1}\\ 0 & 1 & \Delta t & \dots & [(q-2)!]^{-1}(\Delta t)^{q-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta t\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}, \qquad (10.40)$$

$$\overline{P}_{\psi}=\left[1 \quad row(\overline{P}_{\psi\nu}=0;\ \nu=\overline{1,q-1}\right]. \qquad \square(10.41)$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в (10.38) представления(10.17) с заменой t на интервал дискретности Δt. Подстановка (10.40) и (10.41) в (10.39) дает

$$\overline{E}^k=\begin{bmatrix}1 & (\Delta t)k & (2!)^{-1}(\Delta tk)^2 & \dots & [(q-1)!]^{-1}(\Delta tk)^{q-1}\\ 0 & 1 & \Delta tk & \dots & [(q-2)!]^{-1}(\Delta tk)^{q-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta tk\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}, \qquad (10.42)$$

$$\psi(k)=z_1(0)+(\Delta t)z_2(0)k+(2!)^{-1}(\Delta t)^2 z_3(0)k^2+$$
$$+\ldots+[(q-1)!]^{-1}(\Delta t)^{q-1}z_q(0)k^{q-1}. \qquad (10.43)$$

Сравнение (10.43) и (10.33) позволяет для коэффициентов $\overline{\gamma}_{\nu}$ записать

$$\overline{\gamma}_{\nu}=(\nu!)^{-1}(\Delta t)^{\nu}z_{\nu+1}(0);\ \nu=\overline{0,q-1}. \qquad (10.44)$$

Анализ представления (10.40) и (10.41) ВМО источника дискретного полиномиального воздействия показывает, что источник этого ДКВ представляет собой структуру, составленную из элементов задержки (ЭЗ), охваченных единичной положительной обратной связью, входы которых связаны с выходами ЭЗ в соответствии с компонентами строк матрицы $\overline{E}$ (10.40), причем коэффициенты передачи этих связей зависят от значения интервала дискретности Δt, при этом полиномиальное ДКВ формируется на выходе первого ЭЗ.

Как и в случае непрерывных КВ, выделим типовые полиномиальные дискретные КВ: *статическое* $\psi(k)=\overline{\gamma}_0=const$, *кинетическое* воздействие $\psi(k)=\overline{\gamma}_1 k$ и *динамическое* $\psi(k)=\overline{\gamma}_2 k^2$.

Первое типовое дискретное воздействие обычно характеризуется величиной $\overline{\gamma}_0=1$ и именуется единичным дискретным воздействием, его источник (10.37) имеет матричные компоненты и начальные условия вида

$$E=[1_{1\times1}];\ P_{\psi}=[1];\ z_1(0)=\overline{\gamma}_0. \qquad (10.45)$$

Второе типовое дискретное воздействие характеризуется постоянной первой разностью $\Delta\psi(k)=\psi(k+1)-\psi(k)=\overline{\gamma}_1$, его источник (10.37) имеет компоненты

$$E=\begin{bmatrix}1 & \Delta t\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ P_\psi=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ z(0)=\begin{bmatrix}0 & (\Delta t)^{-1}\bar{\gamma}_1\end{bmatrix}^T. \qquad (10.46)$$

Третье типовое дискретное воздействие характеризуется постоянной второй разностью $\Delta^2\psi(k)=\Delta\psi(k+1)-\Delta\psi(k)=\Delta^2\psi=2!\bar{\gamma}_2$, источник которого имеет компоненты

$$\bar{E}=\begin{bmatrix}1 & \Delta t & 0.5(\Delta t)^2\\ 0 & 1 & \Delta t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \bar{P}_\psi=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix};z(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & (\Delta t)^{-2}\Delta^2\psi\end{bmatrix}. \qquad (10.47)$$

Утверждение 10.6 (У10.6). Матрицы $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$ ВМО ИДКВ вида (10.34) имеют представление

$$\bar{E}=diag\left\{\bar{\alpha}_\nu=\exp(\alpha_\nu\Delta t);\ \nu=\overline{1,q}\right\},\ \bar{P}_\psi=row\left\{P_{\psi\nu}=1;\ \nu=\overline{1,q}\right\}. \qquad (10.48)$$

При этом $z(0)$ в (10.39) задается в форме $z(0)=col\left\{z_\nu(0)=\bar{\gamma}_\nu;\ \nu=\overline{1,q}\right\}$.

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в (10.38) представления (10.22) с заменой t на интервал дискретности Δt и дальнейшей подстановкой в (10.39). ■

Утверждение 10.7 (У10.7). Матрицы $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$ ВМО ИДКВ вида (10.35) имеют представление

$$\bar{E}=diag\left\{\bar{E}_\nu=\begin{bmatrix}\cos(\omega_\nu\Delta t) & \sin(\omega_\nu\Delta t)\\ -\sin(\omega_\nu\Delta t) & \cos(\omega_\nu\Delta t)\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\}, \qquad (10.49)$$

$$\bar{P}_\psi=row\left\{\bar{P}_{\psi\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\}, \qquad (10.50)$$

при этом вектор начального состояния $z(0)$ задается в форме

$$z(0)=col\left\{z_\nu(0)=\begin{bmatrix}\bar{\gamma}_{c\nu} & \bar{\gamma}_{s\nu}\end{bmatrix}^T\right\};\ \nu=\overline{1,q}. \qquad \square(10.51)$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в (10.38) представления (10.28) с заменой t на интервал дискретности Δt и последующей подстановкой с учетом (10.51) в (10.39). ■

Утверждение 10.8 (У10.8). Матрицы $\bar{E}$ и $\bar{P}_\psi$ ВМО ИДКВ вида (10.36) имеют представление

$$\bar{E}=diag\left\{\bar{E}_\nu=\bar{\alpha}_\nu\begin{bmatrix}\cos(\omega_\nu\Delta t) & \sin(\omega_\nu\Delta t)\\ -\sin(\omega_\nu\Delta t) & \cos(\omega_\nu\Delta t)\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\}, \qquad (10.52)$$

$$\bar{P}_\psi=row\left\{\bar{P}_{\psi\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ \nu=\overline{1,q}\right\}, \qquad (10.53)$$

при этом вектор начального состояния $z(0)$ задается в форме (10.51). □

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в (10.38) представления (10.31) с заменой t на интервал дискретности Δt и последующей подстановкой с учетом (10.51) в (10.39). ■

Если в (10.51) $\overline{\alpha}_\nu < 1$, то воздействие (10.36) будет затухающим, при $\overline{\alpha}_\nu = 1$ – стационарным по амплитуде компонентов, а в случае $\overline{\alpha}_\nu > 1$ – расходящимся.

В заключение следует сказать, что в случае, когда требуется осуществить исследование динамической системы (объекта) типа «многомерный вход – многомерный выход» (МВМВ) при векторном внешнем конечномерном воздействии $\psi(t) = col\{\psi_j(t);\ j = \overline{1,m}\}$ в непрерывном случае и $\psi(k) = col\{\psi_j(k);\ j = \overline{1,m}\}$ - в дискретном, то источник векторного КВ формируется из источников скалярных КВ, сепаратные выходы которых подключены к сепаратным входам системы (объекта).

10.3. Конечномерное представление сложных непрерывных воздействий. Базисные функции. Теорема В.Котельникова – К.Шеннона

Проблема конечномерного представления сложных непрерывных воздействий (сигналов) как элементов функционального пространства $x(t) \in L^2(T)$ имеет две *постановочные версии*.

В первой постановочной версии, именуемой *прямой задачей* конечномерного представления сигналов, ставится задача сопоставления произвольного сигнала $x(t)$ с ограниченной энергией, т.е. $x(t) \in L^2(T)$ его конечному численному представлению. Эта задача сводится к нахождению отображения пространства $L^2(T)$ в пространство $R^n(C^n)$, где n выбирается из соображений обеспечения допустимой погрешности представления.

Прямой подход к решению такой задачи состоит в выборе некоторого n-мерного подпространства $L^2(T)$, натянутого на систему линейно независимых функций, именуемых *базисными функциями* и образующих *функциональный базис*.

Напомним, что если $\varphi_i(t), (i = \overline{1,n})$ – система *линейно независимых функций* в $L^2(T)$, то для $t \in T$ условие

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t) = 0 \qquad (10.54)$$

выполняется почти всюду тогда и только тогда, когда все $\alpha_i = 0, (i = \overline{1,n})$. Введем в рассмотрение линейное подпространство L^n, натянутое на базисные функции $\varphi_i(t)$, т.е. $L^n = L\{\varphi_i(t)\}$. Тогда, если $x(t) \in L^n$, то он представим в виде линейной комбинации

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(t),\ t\in T=\{t:t_0\le t\le t_k\},\qquad(10.55)$$

при этом набор коэффициентов $\alpha_i\ (i=\overline{1,n})$ образует вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T\in R^n(C^n)$.

Напомним, что $L^2(T)$ есть пространство со *скалярным произведением*, определяемым выражением

$$(x,y)\underline{\underline{\Delta}}\int_T x(t)y^*(t)dt\,.\qquad(10.56)$$

Тогда искомое представление сигнала $x(t)$ в $R^n(C^n)$ в виде вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T$ найдется из векторно–матричного соотношения, полученного из (10.55)–(10.56):

$$\begin{bmatrix}(\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_2) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_2)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\varphi_1,\varphi_n) & (\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x,\varphi_1)\\ (x,\varphi_2)\\ \vdots\\ (x,\varphi_n)\end{bmatrix}\qquad(10.57)$$

или в свернутой форме:

$$G\alpha=\beta\Rightarrow\alpha=G^{-1}\beta,\qquad(10.58)$$

где

$$\beta=col\{(x,\varphi_i);i=\overline{1,n}\};\qquad(10.59)$$

$$G=row\{col[(\varphi_i,\varphi_j);i=\overline{1,n}];\ j=\overline{1,n}\}.\qquad(10.60)$$

Матрица G, определенная в форме (10.60), как известно, называется *матрицей Грама.* Она может быть использована для оценки линейной независимости системы функций $(\varphi_i,\varphi_j,\ i,j=\overline{1,n})$. Критерием линейной независимости функций φ_i и φ_j является положительность определителя матрицы Грама

$$\det G=\det\{(\varphi_i,\varphi_j);\quad i,j=\overline{1,n}\}>0.$$

Если $x(t)\notin L^n$, то для любого вектора $x(t)\in L^2(T)$ существует единственный вектор $\hat{x}\in L^n$, задаваемый представлением

$$\hat{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(t)\qquad(10.61)$$

причем такой, что:

вектор разности (невязка) $\eta=x-\hat{x}$ ортогонален всем векторам из L^n, в силу чего выполняется неравенство:

$\|\eta\|=\|x-\hat{x}\|<\|x-\tilde{x}\|$, где $\tilde{x}$ – любой, но такой, что $\tilde{x}\ne\hat{x}$, вектор из L^n.

Очевидно, справедливо $\hat{x}$ именовать ортогональной проекцией $x \in L^2(T)$ на $L^n, \eta = x - \hat{x}$ – вектором невязки, представляющим собой погрешность представление вектора x вектором $\hat{x}$.

Нетрудно видеть, что погрешность η представления элемента $x(t)$ в форме его проекции $\hat{x}(t)$ может быть охарактеризована ее абсолютной оценкой Δ_η и относительной оценкой δ_η, соответственно задаваемых выражениями

$$\Delta_\eta = \|\eta = x - \hat{x}\|; \ \delta_\eta = \Delta_\eta / \|x\|. \tag{10.62}$$

Очевидно, как и в случае конечномерных линейных пространств, в качестве базиса предпочтительнее использовать систему *ортонормированных функций*.

Во второй постановочной версии, именуемой *обратной задачей* дискретного представления сигналов рассматривается непрерывный сигнал $x(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле (ограниченность, кусочная непрерывность, наличие конечного числа разрывов первого рода и отсутствие разрывов второго рода). Сигнал $x(t)$ имеет ограниченный частотный Фурье–спектр $X(j\omega)$ в том смысле, что

$X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$;

$X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$,

где $X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = F\{X(t)\}$.

Построим дискретное представление сигнала $x(t)$ в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{10.63}$$

в котором $\alpha_k = x(k\Delta t)$ – отсчеты непрерывной функции $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$.

Возникают естественные вопросы:

1. С каким интервалом дискретности Δt следует снимать отсчеты $x(k\Delta t)$?

2. Каковыми должны быть базисные функции $\varphi_k(t)$ в представлении (10.63) с тем, чтобы невязка $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \tag{10.64}$$

этого представления обладала нормой $\|\tilde{x}(t)\|$ сколь угодно близкой к нулю?

На эти вопросы отвечает следующая теорема.

Теорема В. Котельникова–К. Шеннона (ТКШ). Пусть непрерывный сигнал $x(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле так, что к нему может быть применено преобразование Фурье, и при этом

обладает ограниченным частотным спектром $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$.

Тогда дискретное представление сигнала (10.63) обладает нулевой невязкой (10.64), если

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_m};\ \varphi_k(t) = \frac{\sin[\omega_m(t - \Delta tk)]}{\omega_m(t - \Delta tk)}; \alpha_k = x(k\Delta t). \qquad (10.65)$$

Доказательство. В силу преобразуемости по Фурье для сигнала $x(t)$ оказываются справедливыми прямое и обратное интегральные преобразования Фурье

$$F\ \{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt;$$

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt.$$

Учтем ограниченность спектра $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$, тогда для обратного интеграла Фурье получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega)e^{j\omega t}dt. \qquad (10.66)$$

Но $X(j\omega)$ в силу ограниченности спектра предствим бесконечным рядом по частоте, записываемый в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=\infty}^{\infty} C_k e^{j\Delta_k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega}, \qquad (10.67)$$

где $\Delta_k = k\Delta = k\dfrac{2\pi}{2\omega_m} = k\dfrac{\pi}{\omega_m}$.

Введем обозначение $\dfrac{\pi}{\omega_m} = \Delta t$, тогда становится справедливой запись ряда (10.67) в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Delta t\omega}, \qquad (10.68)$$

при этом коэффициенты ряда C_k вычисляются в силу соотношения

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega)e^{-jk\omega\Delta t}d\omega. \qquad (10.69)$$

Сравнивая представления (10.66) и (10.69) нетрудно установить для моментов времени $t = k\Delta t$ выполнение равенства

$$C_k = \frac{\pi}{\omega_m}x(-k\Delta t). \qquad (10.70)$$

Подставим выражение (10.70) в ряд Фурье (10.68)

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\Delta t\omega}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_m}x(-k\Delta t)e^{jk\Delta t\omega}. \qquad (10.71)$$

Если спектральную функцию $X(j\omega)$ исходного сигнала $x(t)$ полученного выше вида подставить в обратный интеграл Фурье (10.66), то для сигнала $x(t)$ получим представление

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_m}x(-k\Delta t)e^{jk\Delta t\omega}e^{j\omega t}d\omega.$$

Произведем в полученном выражении замену $k=-k$, тогда получим представление

$$x(t)=\frac{1}{2\omega_m}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)e^{j\omega(t-k\Delta t)}d\omega=\frac{1}{2\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\int_{-\omega_m}^{\omega_m}e^{j\omega(t-k\Delta t)}d\omega.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m}e^{j\omega(t-k\Delta t)}d\omega=\frac{1}{j(t-k\Delta t)}e^{j(t-k\Delta t)\omega}\Big|_{-\omega_m}^{\omega_m}=$$

$$=\frac{1}{j(t-k\Delta t)}\left\{e^{j(t-k\Delta t)\omega_m}-e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m}\right\}=$$

$$=\frac{2}{(t-k\Delta t)}\frac{e^{j(t-k\Delta t)\omega_m}-e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m}}{2j}=2\frac{\sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)\omega_m}.$$

Подставим полученное представление интеграла в выражение для оригинала $x(t)$, тогда будем иметь

$$x(t)=\frac{1}{2\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\,2\frac{sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)}=$$

$$=\sum_{k}^{\infty}x(k\Delta t)\,\frac{sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)\omega_m}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k\varphi_k\ , \qquad \blacksquare(10.72)$$

$$где\,\alpha_k=x(k\Delta t);\varphi_k(t)=\frac{sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)\omega_m};\Delta t=\frac{\pi}{\omega_m}.$$

Примечание 10.3 (П10.3). Базисная функция $\varphi_k(t)=\dfrac{\sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)\omega_m}$ называется *функцией отсчета*, она обладает свойствами:

1. при $t=k\Delta t$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ в силу первого замечательного предела обладает максимумом, равным единице;

2. в моменты времени t кратные Δt, так что $t=\pm l(\Delta t)$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ принимает нулевое значение;

3. на бесконечно большом интервале времени функции отсчета с различными индексами $\varphi_\nu(t)$ и $\varphi_\mu(t)$ ортогональны так, что система

базисных функций $\varphi_k(t) = \dfrac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_m]}{(t - k\Delta t)\omega_m}$ является системой ортогональных базисных функций.

10.4*. Модель бесконечномерного воздействия типа δ – функция Дирака

Содержательно дельта-функция Дирака (Поля Дирака), обозначаемая как $\delta-$функция, моделирует экзогенное воздействие типа «*сильный бесконечно короткий по времени действия удар*». *Формально* $\delta-$функция определяется следующим образом.

Определение 10.3 (О10.3). Обобщенная функция $\delta(t)$, обладающая свойствами:

$$1.\ \delta(t) = \begin{Bmatrix} \infty & при\ \ t = 0 \\ 0 & при\ \ t \neq 0 \end{Bmatrix}, \tag{10.73}$$

$$2.\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \tag{10.74}$$

называется $\delta-$*функцией Дирака* (или просто $\delta-$*функцией*).

Свойство (10.74) $\delta-$*функции* именуется свойством «единичного веса» этой функции.

Помимо несмещенной $\delta-$*функции* $\delta(t)$, введенной определением 10.2, существует смещенная $\delta-$*функция* $\delta(t-\tau)$, определяемая следующим образом.

Определение 10.4(О10.4). Обобщенная функция $\delta(t-\tau)$, обладающая свойствами:

$$1.\ \delta(t-\tau) = \begin{Bmatrix} \infty\ при\ t = \tau \\ 0\ при\ t \neq \tau \end{Bmatrix}, \tag{10.75}$$

$$2.\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = 1, \tag{10.76}$$

называется *смещенной* $\delta-$*функцией.*

Примечание 10.4(ПР10.4). Для смещенных функций $(*)(t-\tau)$ используется эквивалентная компактная запись $(*)(t,\tau)$ так, что оказывается справедливым соотношение $\delta(t-\tau) = \delta(t,\tau)$.

Смещенная $\delta-$*функция*, как и несмещенная, обладает единичным весом, но тем не менее, эти функции являются *технически невоспроизводимыми*, при этом реакции на них являются *технически воспроизводимыми.*

Рассмотрим теперь «*интегральное свойство*» $\delta-$*функции*, которое сформулируем в виде утверждения применительно к смещенной $\delta-$*функции.*

Утверждение 10.9(У10.9). Пусть $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция, не содержащая разрывов второго рода, тогда оказывается справедливым функционально–интегральное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t,\tau)dt = f(\tau). \qquad (10.77)$$

Доказательство утверждения строится на вычислении интеграла в левой части (10.77) с использованием свойств $\delta-$*функции.* В связи со свойством (10.75) в интеграле (10.77) от интегрирования на бесконечном интервале $(-\infty,\infty)$ можно перейти к интегрированию на бесконечно малом интервале $(\tau-\Delta,\tau+\Delta)$, причем на этом интервале функция $f(t)$ принимает фиксированное значение $f(\tau)$. В связи со сказанным становится справедливой цепочка равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t,\tau)dt = \int_{\tau-\Delta}^{\tau+\Delta} f(t)\delta(t,\tau)dt = \int_{\tau-\Delta}^{\tau+\Delta} f(\tau)\delta(t,\tau)dt$$
$$= f(\tau)\int_{\tau-\Delta}^{\tau+\Delta}\delta(t,\tau)dt = f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)dt = f(\tau)1 = f(\tau). \qquad \blacksquare(10.78)$$

Интеграл вида (10.77) называется интегралом «*свертки*», при этом он «сворачивается» в подынтегральную функцию также в случае, когда сдвиг аргумента осуществляется не в $\delta-$функции, а в функции $f(t)$.

Рассмотрим теперь спектральные частотные свойства $\delta-$функции, для этих целей сформулируем утверждение.

Утверждение 10.10 (У10.10). Спектральная функция $F_\delta(j\omega)$ $\delta-$функции как *прямая трансформанта* Фурье от $\delta-$функции является вещественной и единичной на всей оси частот так, что выполняется равенство

$$F_\delta(j\omega)=1 \text{ при } 0\le|\omega|<\infty. \qquad \square(10.79)$$

Доказательство утверждения строится на определении спектральной частотной функции исследуемого оригинала $(*)(t)=\delta(t)$ как прямого преобразования Фурье от него и на интегральном свойстве $\delta-$функции. В результате получим цепочку равенств

$$F_\delta(j\omega)=F\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t,\tau)\,|_{\tau=0}\,e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega\tau}\,|_{\tau=0}=1. \qquad \blacksquare(10.80)$$

Положения утверждения 10.10 характеризуют $\delta-$функцию как *бесконечномерное* экзогенное воздействие так, как для представления ее в *базисе гармонических* элементов требуется сплошное (т.е. *бесконечное*) множество этих элементов *единичной* амплитуды.

10.5*. Модели стохастических стационарных в широком смысле непрерывных экзогенных воздействий

Стохастическими процессами (сигналами, воздействиями) наполнен окружающий нас физический мир. Стохастическими

являются: ветровое воздействие, волнение морской поверхности, пульсация естественных водных потоков, пульсация напряжения и частоты сетевого электропитания, помехи в электрических проводах линий связи и т.д. Поэтому математическое изучение их является весьма полезным.

Погружение в тематику данного параграфа начнем с разъяснения используемых в нем терминов, определения которым дадим сначала на *понятийном* уровне, а затем на основе *математического* формализма.

Итак: *стохастический* означает случайный, вероятностный; *математическое ожидание* означает среднее по численным или по временным реализациям; *дисперсия* означает меру разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания, заданную в квадратичной форме; *корреляция* – взаимная связь значений случайной величины; *ковариация* означает совместное изменение случайных величин.

Примечание 10.5 (ПР10.5). Содержательно понятия *корреляция* и *ковариация* очень близки, поэтому в силу негласного правила понятие корреляция используется в основном применительно к представлению связей случайных переменных во времени, а ковариация к представлению связей случайных переменных по ансамблям значений.

Обратимся теперь к определениям на основе *математического* формализма.

Определение 10.5 (О10.5). Пусть $\eta(t)$ – *скалярный* непрерывный стохастический процесс со значениями из вещественного поля $F = R$ $(\eta \in R, \forall t)$, тогда *математическим ожиданием* $M[\eta(t)] = M_\eta(t)$ или *средним значением* $\overline{\eta}(t)$ процесса называется скалярная величина, параметризованная непрерывным временем t, вычисляемая с помощью соотношения

$$M[\eta(t)] = \overline{\eta}(t) = \frac{1}{t}\int_{-t/2}^{t/2} \eta(\theta)\, d\theta,\ t > 0. \qquad \square(10.81)$$

Примечание 10.6 (ПР10.6). $M[(*)]$ именуется *оператором математического ожидания* стохастического процесса $[(*)]$.

Определение 10.6 (О10.6). Пусть $\eta(t) - \nu -$мерный *векторный* непрерывный стохастический процесс $\eta(t) = col\{\eta_l(t); l = \overline{1,\nu}\}$ со скалярными стохастическими непрерывными компонентами $\eta_l(t)$, тогда *математическим ожиданием* или вектором *средних значений* $\overline{\eta}(t)$векторного процесса называется $\nu -$мерный вектор, составленный из математических ожиданий его скалярных компонентов так, что становится справедливой запись

$$M[\eta(t)] = \overline{\eta}(t) = col\{M\{\eta_l(t)\}; l = \overline{1,\nu}\} = col\{\overline{\eta_l}(t); l = \overline{1,\nu}\}. \qquad \square(10.82)$$

Определение 10.7 (О10.7). Пусть $\eta(t) - \nu -$мерный *векторный* непрерывный стохастический процесс $\eta(t) = col\{\eta_l(t); l = \overline{1,\nu}\}$ с вектором *средних значений* $\overline{\eta}(t)$ тогда:

ковариационной матрицей этого векторного процесса называется матрица вида

$$R_\eta(t \pm \tau, t) = M\left[[\eta(t \pm \tau) - \overline{\eta}(t \pm \tau)][\eta(t) - \overline{\eta}(t)]^T\right], \qquad \square(10.83)$$

матрицей смешанных моментов второго порядка этого векторного процесса называется матрица вида

$$Q_\eta(t \pm \tau, t) = M\left[[\eta(t \pm \tau)][\eta(t)]^T\right], \qquad \square(10.84)$$

матрицей дисперсий этого векторного процесса именуется матрица вида

$$D_\eta(t) = R_\eta(t,t) = M\left[[\eta(t) - \overline{\eta}(t)][\eta(t) - \overline{\eta}(t)]^T\right]. \qquad \square(10.85)$$

Определение 10.8 (О10.8). Стохастический процесс $\eta(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если:

математическое ожидание процесса $\overline{\eta}(t)$ не зависит от времени и является постоянным $(\overline{\eta}(t) = \overline{\eta})$,

дисперсия (*матрица дисперсий) этого процесса* $D_\eta(t)$ не зависит от времени и является постоянной $(D_\eta(t) = D_\eta)$,

корреляционная функция (*ковариационная матрица*) этого процесса не зависит от времени t, а *зависит только от величины* τ $R_\eta(t \pm \tau, t) = R_\eta(\pm \tau)$.

Примечание 10.7 (ПР10.7). Стохастический процесс стационарный в широком смысле обычно обладает эргодическим свойством. Сущность его заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить обо всех его статистических свойствах так же, как по любому количеству реализаций меньшей длительности. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же, как по ансамблю реализаций, так и по времени. В соответствии с этим свойством математическое ожидание и дисперсия скалярного стохастического процесса $\eta(t)$ стационарного в широком смысле определяются выражениями

$$M[\eta(t)] = \overline{\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)dt, \qquad (10.86)$$

$$D_\eta = M\left\{[\eta(t) - \overline{\eta}]^2\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\eta(t) - \overline{\eta}]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\eta(t) - \overline{\eta}]^2 dt. \qquad (10.87)$$

Определение 10.9 (О10.9). Стохастический процесс $\eta(t)$ называется *центрированным*, если *математическое ожидание процесса* $\overline{\eta}(t)$ является *нулевым* $(\overline{\eta}(t) = 0)$.

Стационарный в широком смысле стохастический процесс может быть охарактеризован матрицей (функцией) спектральных плотностей (плотности).

Определение 10.10 (О10.10). Матрица (функция) $S_\eta(\omega)$ *спектральных плотностей* (плотности) *стационарного в широком смысле стохастического* процесса $\eta(t)$ определяется как прямое преобразование Фурье $\mathsf{F}\{(*)\}$ от ковариационной матрицы (функции) $R_\eta(\pm\tau)$ этого процесса

$$S_\eta(\omega)=\mathsf{F}\{R_\eta(\pm\tau)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}R_\eta(\pm\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{0}R_\eta(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}R_\eta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.\square \quad (10.88)$$

В разделе рассматриваются реакции системы на экзогенные центрированные стохастические воздействия $v(t)$ стационарные в широком смысле типа «*белый шум*» $w(t)$ и «*окрашенный шум*» $\xi(t)$.

Определение 10.11 (О10.11). Стохастический процесс $w(t)$, характеризующийся:

– *нулевым математическим ожиданием*

$$M\{w(t)\}=\overline{w}(t)=0, \quad (10.89)$$

– *некоррелированными отсчетами* $w(t), w(t+\tau)$ при сколь угодно малом τ, а потому

– *ковариационной матрицей (функцией)* вида

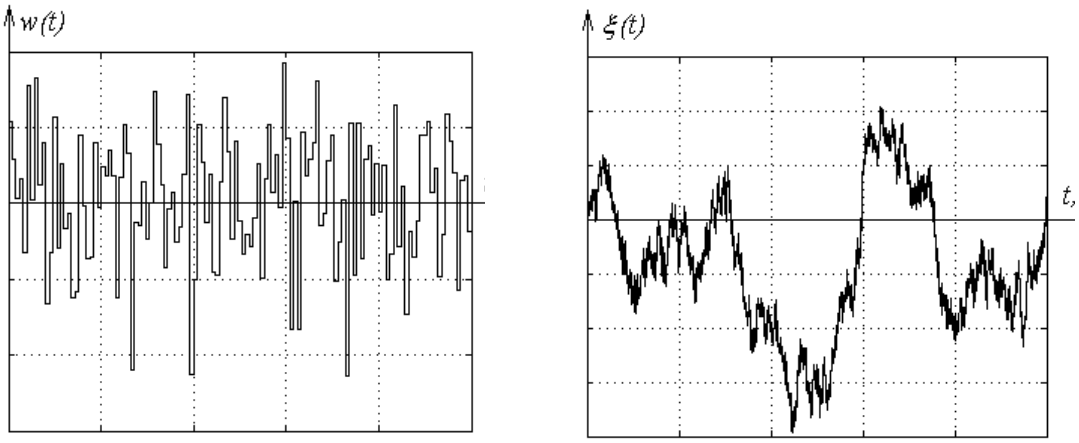
$$R_w(t\pm\tau,t)=N(t)\delta(\tau), \quad (10.90)$$

где $N(t),\delta(\tau)-$ соответственно диагональная *матрица (функция) интенсивностей* и $\delta-$функция Дирака, называется стохастическим процессом типа «*белый шум*».

Примечание 10.8 (ПР10.8). Дадим дополнительную трактовку некоррелированности отсчетов, снимаемых с кривых стохастического процесса типа «белый шум». Напомним, что коррелированность это связность. Простейшим видом связи является линейная зависимость, графически задаваемая отрезком прямой линии, наклоненной к оси времени. Таким образом, если отсчеты приходятся на указанный отрезок прямой, то они оказываются связанными уравнением этой прямой, и следовательно, коррелированными. Если все отсчеты, снятые с любым сколь угодно малым шагом, оказываются не коррелированными, это означает, что наклонных к оси времени отрезков прямых не существует, все фронты кривой такого процесса ортогональны оси времени (см. рисунок 10.1а). Производные от них по времени (т.е. скорость их изменения во времени) оказываются бесконечными, а источник «белого шума» обладает бесконечной мощностью, а такого источника в природе не существует. Поэтому непрерывный «белый шум» является примером не воспроизводимого процесса. Это идеализированная математическая модель.

Следует ожидать что, если в кривых стохастических процессов появляются участки, аппроксимируемые отрезками наклонных прямых

линий (см.рисунок 10.1 б) , то процесс оказывается коррелированным, а интервал корреляции определяется математическим ожиданием длин этих отрезков.



а б

Рисунок 10.1

Определение 10.12 (О10.11). Стохастический процесс типа «*белый шум»* $w(t)$, характеризующийся *независящей от времени постоянной матрицей (функцией) интенсивности* $N(t) = N$, называется стационарным в широком смысле *«белым шумом»,* при этом выражение для ковариационной матрицы (10.90) принимает вид

$$R_w(\tau) = N\delta(\tau). \qquad (10.91)$$

Примечание 10.12 (ПР10.12). Выражение (10.91) позволяет сделать два вывода:

1. *Стохастический процесс* $w(t)$ *стационарный в широком смысле типа «белый шум»* характеризуется *бесконечной дисперсией*

$$D_w = R_w(0) = N\delta(0) = N \cdot (\infty) = \infty; \qquad (10.92)$$

2. *Стохастический процесс* $w(t)$ *стационарный в широком смысле типа «белый шум»* характеризуется постоянной матрицей спектральных плотностей $S_w(\omega) = N$, что устанавливается с использованием интегрального свойства $\delta-$функции на основании цепочки равенств

$$S_w(\omega) = \mathbf{F}\{R_w(\tau) = N\delta(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = N. \qquad (10.93)$$

Сравнение спектральных функций (10.80) и (10.93) для $\delta-$функции Дирака и стационарного в широком смысле стохастического воздействия $w(t)$ типа «белый шум» обнаруживает их общность, состоящую в том, что они оказываются элементами бесконечномерного функционального пространства.

Определение 10.13 (О10.13). Стохастическим *процессом стационарным в широком смысле типа «окрашенный шум»* $\xi(t)$ называется процесс, наблюдаемый на *выходе формирующего фильтра* при условии, что на его вход подано стационарное в широком смысле *стохастическое воздействие* $w(t)$ *типа « белый шум» интенсивности* N.

В теории и практике исследования непрерывных динамических систем при стохастических экзогенных воздействиях выделяют две модельные версии *«окрашенных шумов»* $\xi(t)$:

1. «*экспоненциально коррелированный шум»,* который формируется из «*белого шума*» фильтром, представляющим собой *апериодическое звено первого порядка*;

2. *окрашенный шум типа «нерегулярная качка»*, который формируется из «*белого шума*» фильтром, представляющим собой *колебательное звено второго порядка*.

10.6* Модели стохастических стационарных в широком смысле дискретных экзогенных воздействий

Как и в непрерывном случае, рассмотрение стохастических стационарных в широком смысле дискретных экзогенных воздействий начнем с дискретного «белого шума» $w(k)$.

Определение 10.14 (О10.14). Дискретная по времени выборка $w(k)$ в моменты $t=(\Delta t)k$ из непрерывного «белого шума» $w(t)$, где Δt – интервал дискретности, k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности, называется «дискретным белым шумом», представляющим собой дискретную по времени последовательность стохастических скалярных (векторных) величин.

Примечание 10.13 (ПР10.13). Дискретный белый шум, будучи дискретной по времени выборкой из непрерывного белого шума унаследовал часть свойств непрерывного, но в силу выборочности характеризуется конечной дисперсией (матрицей дисперсий). Таким образом, дискретный белый шум $w(k)$ характеризуется:

нулевым математическим ожиданием так, что справедлива запись

$$M[w(k)]=0; \tag{10.94}$$

конечной дисперсией (матрицей дисперсий с конечными элементами)

$$D_w=M\left[w(k)w^T(k)\right]=V; \tag{10.95}$$

в силу некоррелированности отсчетов $w(k)$ и $w(i)$ (при $k\neq i$) ковариационной функцией (матрицей)

$$R_w(k,i) = M\left\lfloor w(k)w^T(i)\right\rfloor = V\delta(k,i).$$

(10.96)

Операция вычисления математических ожиданий стохастических дискретных последовательностей осуществляется в силу соотношения

$$\overline{\eta}(k) = M[\eta(k)] = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\eta(i). \qquad (10.97)$$

Нетрудно видеть, что выражение (10.97) может быть записано в рекуррентной форме. Действительно справедлива цепочка соотношений

$$\overline{\eta}(k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\eta(i) = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k}.\sum_{i=0}^{k-1}\eta(i) + \frac{1}{k+1}\eta(k) = \frac{k}{k+1}\overline{\eta}(k) + \frac{1}{k+1}\eta(k). \qquad (10.98)$$

Если стационарный в широком смысле стохастический дискретный процесс обладает эргодическим свойством, то операция вычисления математических ожиданий осуществляется в силу соотношений в:

суммарной форме

$$\overline{\eta} = M[\eta(k)] = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\eta(i), \qquad (10.99)$$

рекуррентной форме

$$\overline{\eta} = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{k}{k+1}\overline{\eta}(k) + \frac{1}{k+1}\eta(k)\right\}; \overline{\eta}(0) = \eta(0). \qquad (10.100)$$

Матрица (функция) спектральных плотностей векторной (скалярной) стохастической переменной $(*)$ стационарной в широком смысле, обладающей матрицей ковариаций $R_{(*)}(\nu)$, называется бесконечный ряд Фурье от матрицы ковариаций, записываемый в виде

$$S_{(*)}(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} R_{(*)}(v)e^{-jv\omega\Delta t}. \qquad (10.101)$$

Подстановка в (10.101) выражения (10.96) для ковариационной матрицы (функции) дискретного белого шума позволяет записать для него матрицу (функцию) спектральных плотностей в форме

$$S_w(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} R_w(v)e^{-jv\omega\Delta t} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} V\delta(\nu)e^{-jv\omega\Delta t}\Bigg|_{\delta(\nu)=\begin{cases}1:\nu=0\\0:\nu\neq 0\end{cases}} = V; \forall|\omega| \le \frac{\pi}{\Delta t}. \qquad (10.102)$$

Примечание 10.14 (ПР10.14). Проблема связи параметров N стохастических стационарных в широком смысле непрерывных и V дискретных экзогенных воздействий типа «белый шум» будет рассмотрена в следующем разделе.

Примеры и задачи

Построить модельные представления ИКВ, генерирующих на своих выходах воздействия:

10.1. $\psi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ при:

1. $a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1;$
2. $a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = -3;$
3. $a_0 = 2; a_1 = -1; a_2 = 0.5;$

10.2. $\psi(t) = a_0 + a_1 e^{\alpha_1 t}$ при:

1. $a_0 = 1; a_1 = -1; \alpha_1 = -1;$
2. $a_0 = 2; a_1 = -1; \alpha_1 = -1;$
3. $a_0 = 1; a_1 = 1; \alpha_1 = -1;$

10.3. $\psi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 e^{\alpha_1 t}$ при:

1. $a_0 = 0; a_1 = 1;\ a_2 = 1; \alpha_1 = -1;$
2. $a_0 = 0; a_1 = 1;\ a_2 = -1; \alpha_1 = -1;$
3. $a_0 = 1; a_1 = 1;\ a_2 = 2; \alpha_1 = -1;$
4. $a_0 = 0; a_1 = 1;\ a_2 = -1; \alpha_1 = -1;$

10.4. $\psi(t) = a_1 \cos\beta_1 t + a_2 \sin\beta_2 t$ при:

1. $a_1 = 1; \beta_1 = 1;\ a_2 = 1; \beta_2 = 1;$
2. $a_1 = 1; \beta_1 = 1;\ a_2 = -1; \beta_2 = 1;$
3. $a_1 = 1; \beta_1 = 1;\ a_2 = 1; \beta_2 = 3;$
4. $a_1 = 1; \beta_1 = 1;\ a_2 = -1; \beta_2 = 3;$

10.5. $\psi(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} \cos\beta_1 t + a_2 e^{\alpha_2 t} \sin\beta_2 t$ при:

1. $a_1 = 1; \alpha_1 = -3; \beta_1 = 3;\ a_2 = 0; \alpha_2 = 0; \beta_2 = 0;$
2. $a_1 = 1; \alpha_1 = -2; \beta_1 = 3;\ a_2 = 0; \alpha_2 = 0; \beta_2 = 0;$
3. $a_1 = 1; \alpha_1 = -1; \beta_1 = 3;\ a_2 = 0; \alpha_2 = 0; \beta_2 = 0;$
4. $a_1 = 1; \alpha_1 = -1; \beta_1 = 3;\ a_2 = 1; \alpha_2 = -2; \beta_2 = 5;$

10.6. $\psi(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2; t = (\Delta t)k$ при:

1. $a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1; \Delta t = 0.1C$
2. $a_0 = 1; a_1 = -1; a_2 = 1; \Delta t = 0.1C$
3. $a_0 = -1; a_1 = 1; a_2 = -1; \Delta t = 0.1C$

10.7. $\psi(k) = a_0 + a_1 k + a_2 \alpha^k; t = (\Delta t)k$ при:

1. $a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1; \alpha = 0.1; \Delta t = 0.1C$

2. $a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1; \alpha = 0.5; \Delta t = 0.1C$

3. $a_0 = -1; a_1 = 1; a_2 = 1; \alpha = 0.95;\ \Delta t = 0.1C.$

Решение вариантов задач

<u>Решение задачи 10.2 (1)</u>

Требуется построить модельное представление ИКВ вида (10.13) $\dot{z}(t) = Ez(t)$, $z(0) = z(t)\big|_{t=0}$, $\psi(t) = P_\psi z(t)$, на выходе которого должен формироваться сигнал $\psi(t) = 1 - e^{-t}$.Этот сигнал будет генерироваться ИКВ (10.13) с матричными компонентами в форме

$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; P_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ при начальном состоянии $z(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. ■

11. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ (ОБЪЕКТЫ) ПРИ ЭКЗОГЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Прежде чем приступать к изложению материала, вынесенного в заголовок раздела объясним, почему в нем наряду с понятием *объект* появилось понятие *система*. Напомним, что системой называется функциональное объединение объекта управления и устройства управления, которое наделяет образованную таким образом систему необходимыми динамическими показателями качества процессов в переходном и установившемся режимах движения. Исходный объект управления, взятый в отдельности, может обладать плохими динамическими показателями и даже быть неустойчивым, поэтому ставить задачу исследования его показателей при экзогенном (внешнем) воздействии возможное, но бессмысленное занятие. Поэтому приводимый ниже материал сориентирован в основном на исследование динамических систем.

Таким образом, рассматриваются проблемы, связанные с изучением реакции динамической системы (ДС) непрерывной и дискретной по времени версий модельного представления, фиксируемой как на ее выходе, так и по вектору состояния в случае подачи на ее вход экзогенного воздействия. Полагается, что исследуемая система линейная (или локально линейная) так, что ее векторно-матричное описание (ВМО) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0) = x(t)|_{t=0}, y(t) = Cx(t) \qquad (11.1)$$

для непрерывного случая и

$$x(k+1) = \overline{F}x(k) + \overline{G}g(k), x(0) = x(k)|_{k=0}, y(k) = \overline{C}x(k) \qquad (11.2)$$

для дискретного случая. В (11.1) и (11.2) x – вектор состояния ДС, $x \in R^n$; g – вектор экзогенного (внешнего) воздействия, y – вектор выхода; $g, y \in R^m$; $F, \overline{F}$ – матрицы состояния; $F, \overline{F} \in R^{n\times n}$; $G, \overline{G}$ – матрицы входа; $G, \overline{G} \in R^{n\times m}$; $C, \overline{C}$ – матрицы выхода; $C, \overline{C} \in R^{m\times n}$. Непрерывное время t и дискретное k связаны соотношением $t = (\Delta t)k$, где Δt - интервал дискретности.

В разделе 9 показано, что решение системы (11.1) относительно векторов состояния $x(t)$ и выхода $y(t)$ может быть представлено в форме

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gg(\tau)d\tau, \qquad (11.3)$$

$$y(t) = Ce^{Ft}x(0) + \int_0^t Ce^{F(t-\tau)}Gg(\tau)d\tau. \qquad (11.4)$$

В свою очередь решение системы (11.2) относительно векторов состояния $x(k)$ и выхода $y(k)$ принимает вид

$$x(k) = \overline{F}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{F}^{(k-1-i)} \overline{G} g(i), \tag{11.5}$$

$$y(k) = \overline{C}\overline{F}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \overline{C}\overline{F}^{(k-1-i)} \overline{G} g(i). \tag{11.6}$$

Из приведенных выражений (11.3) – (11.6) видно, что движения непрерывной и дискретной систем как по вектору состояния, так и по вектору выхода содержат *свободные* составляющие, порожденные ненулевым начальным состоянием $x(0)$

$$x_{св}(t) = x(t, x(0) \neq 0) = e^{Ft} x(0), \tag{11.7}$$

$$y_{св}(t) = C x_{св}(t) = C e^{Ft} x(0), \tag{11.8}$$

$$x_{св}(k) = x(k, x(0) \neq 0) = \overline{F}^k x(0), \tag{11.9}$$

$$y_{св}(k) = \overline{C} x_{св}(k) = \overline{C}\overline{F}^k x(0), \tag{11.10}$$

а также *вынужденные* составляющие, порожденные внешними воздействиями $g(t)$ и $g(k)$

$$x_в(t) = x(t, g(t), x(0) = 0) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G g(\tau) d\tau, \tag{11.11}$$

$$y_в(t) = C x_в(t) = \int_0^t C e^{F(t-\tau)} G g(\tau) d\tau, \tag{11.12}$$

$$x_в(k) = x(k, g(k), x(0) = 0) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{F}^{(k-1-i)} \overline{G} g(i), \tag{11.13}$$

$$y_в(k) = \overline{C} x_в(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \overline{C}\overline{F}^{(k-1-i)} \overline{G} g(i). \tag{11.14}$$

Нетрудно видеть, что *аналитическое* вычисление вынужденных составляющих движений в непрерывной и дискретной системах с помощью выражений (11.12) и (11.14) представляет заметные трудности, так как требует необходимости взятия интеграла и формирования суммы. При этом вычисление *установившихся* компонентов $y_y(t)$ и $y_y(k)$ реакций непрерывной и дискретной ДС, определяемых в силу соотношений

$$y_y(t) = \lim_{t \to \infty} y_в(t),\ y_y(k) = \lim_{k \to \infty} y_в(k)\ , \tag{11.15}$$

в форме компактных аналитических выражений может оказаться достаточно сложным.

Покажем, что обнаруженные сложности аналитических представлений реакций непрерывной и дискретной динамических систем на *конечномерные* экзогенные (внешние) воздействия существенно сокращаются, если воспользоваться возможностями матричных уравнений Сильвестра.

11.1. Динамические непрерывные системы (объекты) при конечномерном экзогенном воздействии. Уравнения Сильвестра

Рассматривается непрерывная линейная система (11.1), в которой экзогенное воздействие $g(t)$ формируется с помощью автономной конечномерной ДС вида (10.13), имеющей ВМО вида

$$\dot{z}(t) = Ez(t),\ z(0) = z(t)\big|_{t=0},\ g(t) = P_g z(t). \tag{11.16}$$

Объединение систем (11.1) и (11.16) образует агрегированную систему с вектором состояния $\tilde{x} = \left[x^T, z^T\right]^T = col\{x, z\}$, задаваемую системой векторно-матричных описаний

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t), \tilde{x}(0) = \left[x^T(0), z^T(0)\right]^T, \tag{11.17}$$

$$x(t) = \tilde{C}_x\tilde{x}(t), y(t) = \tilde{C}_y\tilde{x}(t), z(t) = \tilde{C}_z\tilde{x}(t), g(t) = \tilde{C}_g\tilde{x}(t). \tag{11.18}$$

Утверждение 11.1 (У11.1). Матричные компоненты ВМО (11.17) и (11.18) имеют представления

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & GP_g \\ 0 & E \end{bmatrix}, \tilde{C}_x = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0_{n\times l} \end{bmatrix}, \tilde{C}_y = \begin{bmatrix} C & 0_{m\times l} \end{bmatrix}, \tag{11.19}$$

$$\tilde{C}_z = \begin{bmatrix} 0_{l\times n} & I_{l\times n} \end{bmatrix}, \tilde{C}_g = \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & P_g \end{bmatrix}. \qquad \square \ (11.20)$$

Доказательство. Сформируем производную $\dot{\tilde{x}}(t)$ вектора состояния агрегированной системы из компонентов $\dot{x}(t), \dot{z}(t)$, тогда на основании (11.1) и (11.16) можно построить цепочку векторно-матричных равенств

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fx(t) + Gg(t) \\ 0x(t) + Ez(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fx(t) + GP_g z(t) \\ 0x(t) + Ez(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F & GP_g \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \tilde{F}\tilde{x}(t). \end{aligned} \tag{11.21}$$

Из сравнения (11.17) и (11.21) следует справедливость первого равенства (11.19). Запишем для переменных $x(t), y(t), z(t), g(t)$ следующие представления

$$x(t) = Ix(t) + 0z(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\left[x^T(t), z^T(t)\right]^T = \tilde{C}_x\tilde{x}(t), \tag{11.22}$$

$$y(t) = Cx(t) + 0z(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\left[x^T(t), z^T(t)\right]^T = \tilde{C}_y\tilde{x}(t), \tag{11.23}$$

$$z(t) = 0x(t) + Iz(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\left[x^T(t), z^T(t)\right]^T = \tilde{C}_z\tilde{x}(t), \tag{11.24}$$

$$g(t) = 0x(t) + P_g z(t) = \begin{bmatrix} 0 & P_g \end{bmatrix}\left[x^T(t), z^T(t)\right]^T = \tilde{C}_g\tilde{x}(t). \tag{11.25}$$

Из (11.22) – (11.25) следуют остальные соотношения в (11.19) и (11.20). ■

Представления (11.17), (11.18) для векторов $x(t)$ и $y(t)$ исследуемой динамической системы (11.1) позволяют записать

$$x(t) = \tilde{C}_x e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0),\ y(t) = \tilde{C}_y e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0)\ . \tag{11.26}$$

Матрица $\tilde{F}$ представляет собой блочную матрицу (11.19), матричные компоненты которой можно связать *матричным уравнением Сильвестра.* Для этой цели докажем утверждение.

Утверждение 11.2 (У11.2). Пусть выбором начальных состояний $x(0)$ и $z(0)$ обеспечивается выполнение векторного равенства

$$x(t) = Tz(t)\ \forall t, \tag{11.27}$$

тогда $T-(n \times l)$ – матрица подобия (в общем случае особого) удовлетворяет *матричному уравнению Сильвестра*

$$TE - FT = GP_g. \qquad \square(11.28)$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании (11.27) по времени, которое дает равенство

$$\dot{x}(t) = T\dot{z}(t)\ \forall t, \tag{11.29}$$

и на последующей подстановке (11.27) и (11.29) в соотношения (11.1) для $\dot{x}(t)$ и (11.16) для $\dot{z}(t)$, в результате чего возникают две цепочки векторно-матричных соотношений

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t) = FTz(t) + GP_g z(t) = (FT + GP_g)z(t), \tag{11.30}$$

$$\dot{x}(t) = T\dot{z}(t) = TEz(t). \tag{11.31}$$

Векторно-матричные соотношения (11.30) и (11.31) делают справедливыми матричные равенства

$$TE = FT + GP_g \Rightarrow TE - FT = GP_g. \qquad \blacksquare(11.32)$$

Матричное уравнение Сильвестра (11.28) позволяет представить матрицу $\tilde{F}$ (11.19) в форме

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & GP_g \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix}. \tag{11.33}$$

Представление матрицы $\tilde{F}$ вида (12.33) позволяет сформулировать и доказать следующее утверждение.

Утверждение 11.3 (У11.3). Показательная (степенная) матричная функция $f(\tilde{F}) = \tilde{F}^k$ от матрицы $\tilde{F}$ вида (11.33), где k – целое положительное число представима в форме

$$\tilde{F}^k = \begin{bmatrix} F^k & TE^k - F^k T \\ 0 & E^k \end{bmatrix}. \tag{11.34}$$

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении целых степеней матрицы $\tilde{F}$ путем их перемножения. В результате получим

$$\tilde{F}^1 = \tilde{F} = \begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix};$$

$$\tilde{F}^2 = \tilde{F}\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} F^2 & FTE - F^2T + TE^2 - FTE \\ 0 & E^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^2 & TE^2 - F^2T \\ 0 & E^2 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{F}^3 = \tilde{F}^2\tilde{F} = \begin{bmatrix} F^2 & TE^2 - F^2T \\ 0 & E^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} F^3 & F^2TE - F^3T + TE^3 - F^2TE \\ 0 & E^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^3 & TE^3 - F^3T \\ 0 & E^3 \end{bmatrix};$$

База индукции сформирована, поэтому для искомой матричной функции $f(\tilde{F}) = \tilde{F}^k$ можно записать

$$\tilde{F}^k = \tilde{F}^{k-1}\tilde{F} = \begin{bmatrix} F^{k-1} & TE^{k-1} - F^{k-1}T \\ 0 & E^{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} F^k & F^{k-1}TE - F^kT + TE^k - F^{k-1}TE \\ 0 & E^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^k & TE^k - F^kT \\ 0 & E^k \end{bmatrix}. \quad ■(11.35)$$

Примечание 11.1 (ПР11.1). Нетрудно видеть, что положения утверждения 11.3 позволяют сделать следующее обобщение. Если матричная функция от матрицы $f(\tilde{F})$ представляет собой степенной конечный или бесконечный ряд по целым положительным степеням матрицы $\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & GP_g \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix}$, то оказывается справедливым представление

$$f(\tilde{F}) = \begin{bmatrix} f(F) & Tf(E) - f(F)T \\ 0 & f(E) \end{bmatrix}. \quad (11.36)$$

Представление (11.36) матричной степенной функции от матрицы делает справедливыми положения следующего утверждения.

Утверждение 11.4 (У11.4). Матричная экспонента $e^{\tilde{F}t}$, где матрица $\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & GP_g \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & TE - FT \\ 0 & E \end{bmatrix}$ имеет вид

$$e^{\tilde{F}t} = \begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{Et} - e^{Ft}T \\ 0 & e^{Et} \end{bmatrix}. \quad □■(11.37)$$

Если в (11.22) – (11.24) подставить (11.26), в котором использовать (11.37), то получим для переменных $x(t), y(t), z(t)$ представление

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + (Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0) = Te^{Et}z(0) + e^{Ft}(x(0) - Tz(0)); \quad (11.38)$$

$$y(t) = Ce^{Ft}x(0) + C(Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0) = CTe^{Et} + Ce^{Ft}(x(0) - Tz(0)); \quad (11.39)$$

$$z(t) = e^{Et}z(0). \quad (11.40)$$

Анализ выражений (11.38) – (11.40) позволяет получить представления всех компонентов движения системы (11.1) при конечномерном экзогенном воздействии на ее входе.

Вынужденные составляющие движения по состоянию, выходу и ошибке $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$

$$x_в(t) = x(t, g(t), x(0) = 0) = x(t, z(0) \neq 0, x(0) = 0) = Te^{Et}z(0) - e^{Ft}Tz(0); \qquad (11.41)$$

$$\begin{aligned} y_в(t) &= Cx_в(t) = CTe^{Et}z(0) - Ce^{Ft}Tz(0); \\ \varepsilon_в(t) &= (P_g - CT)e^{Et}z(0) + Ce^{Ft}Tz(0). \end{aligned} \qquad (11.42)$$

Установившиеся составляющие движения по состоянию, выходу и ошибке

$$x_y(t) = \lim_{t\to\infty} x_в(t) = Te^{Et}z(0); \qquad (11.43)$$

$$y_y(t) = Cx_y(t) = CTe^{Et}z(0); \varepsilon_y(t) = g(t) - y_y(t) = (P_g - CT)e^{Et}z(0). \qquad (11.44)$$

Переходные составляющие движения по состоянию, выходу и ошибке

$$x_{пер}(t) = x_y(t) - x_в(t) = e^{Ft}Tz(0),\ y_{пер}(t) = Cx_{пер}(t) = Ce^{Ft}Tz(0) = -\varepsilon_{пер}(t). \qquad (11.45)$$

Из сравнения представлений (11.40) и (11.43) становится понятным математическое «содержание» матрицы T, состоящее в том, что она представляет собой матрицу подобия между процессами *по вектору состояния источника конечномерного экзогенного воздействия* (ИКЭВ) и *установившейся составляющей вектора состояния исследуемой динамической системы* так, что устанавливаются соотношение

$$x_y(t) = Te^{Et}z(0) = Tz(t). \qquad (11.46)$$

Если обратиться к общему решению (11.38) для $x(t)$, то из него можно видеть, что соотношение (11.46) устанавливаются с начального момента $t = 0$, если начальные соотношения подчинить условию $x(0) = Tz(0)$.

Таким образом, для вычисления реакции непрерывной линейной системы (11.1) на *произвольное* конечномерное экзогенное воздействие можно воспользоваться приводимым ниже алгоритмом.

Алгоритм 11.1 (А11.1)

1. Построить векторно-матричное описание непрерывной системы (11.1) с матрицами (F,G,C);

2. Построить векторно-матричное описание источника экзогенного конечномерного воздействия (11.16) с матрицами (E,P_g);

3. Решить аналитически или численно матричное уравнение Сильвестра (11.28) относительно матрицы подобия T;

4. С помощью соотношений (11.41) – (11.45) решить задачу анализа реакции непрерывной системы на конечномерное экзогенное воздействие.

Остановимся теперь на ситуации, когда ИКЭВ формирует *типовые экзогенные воздействия*, ограничившись случаями *ступенчатого и гармонического* экзогенных воздействий. Первое типовое воздействие используется *для оценки динамических свойств* исследуемой ДС по *кривой переходного процесса*, второе – по *амплитудным частотным характеристикам*.

Случай 11.1 (Сл11.1) *ступенчатого* экзогенного воздействия характеризуется матрицами E и P_g модельного представления ИКЭВ (11.16) в силу (11.19), имеющими вид

$$E = [0_{m\times m}],\ P_g = [I_{m\times m}]. \tag{11.47}$$

Подстановка матриц вида(11.47) в уравнение Сильвестра (11.28) дает

$-FT = G$, что позволяет для матрицы T записать

$$T = -F^{-1}G. \tag{11.48}$$

Матрицы E вида (11.47) и T вида (11.48) дают для матричной экспоненты $e^{\tilde{F}t}$, записанной в форме (11.37) представление

$$e^{\tilde{F}t} = \begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{Et} - e^{Ft}T \\ 0 & e^{Et} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{Ft} & \left(e^{Ft} - I\right)F^{-1}G \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{11.49}$$

Подстановка матричной экспоненты вида (11.49) и выделение из полного движения вынужденной составляющей по вектору состояния и выхода исследуемой системы дает

$$x_в(t) = \left(e^{Ft} - I\right)F^{-1}Gz(0) = H_x(t)z(0); z(0) = argmin\left(\|z(0)\| = 1\right), \tag{11.50}$$

$$y_в(t) = Cx_в(t) = C\left(e^{Ft} - I\right)F^{-1}Gz(0) = CH_x(t)z(0) = H_y(t)z(0). \tag{11.51}$$

В выражениях (11.50) и (11.51) матрицы

$$H_x(t) = \left(e^{Ft} - I\right)F^{-1}G \text{ и } H_y(t) = C\left(e^{Ft} - I\right)F^{-1}G = CH_x(t), \tag{11.52}$$

представляют собой матричные *переходные функции* соответственно по состоянию и выходу. Если возникает необходимость *скаляризации* задачи, состоящей в исследовании динамических свойств (i, j)–го сепаратного канала ДС, связывающего i–й выход $y_i(t)$ с j–м входом $g_j(t)$, то в этом случае в *переходной матрице* по выходу $H_y(t) = H(t)$ (или просто в *переходной матрице*) выделить (i, j)–й элемент

$$H_{ij}(t) = C^i\left(e^{Ft} - I\right)F^{-1}G_j\left(i, j = \overline{1,m}\right), \tag{11.53}$$

где C^i, G_j – соответственно i–я строка матрицы выхода C и j–й столбец матрицы входа G.

Скаляризация векторных процессов в системах типа «многомерный вход – многомерный выход» (МВМВ) строится с

помощью мажорант и минорант, являющихся для $\forall t$ максимальным и минимальным сингулярными числами переходной матрицы $H(t)$.

Случай 11.2 (Сл11.2) *гармонического* экзогенного воздействия характеризуется матрицами E и P_g модельного представления ИКЭВ (11.16) в силу (10.26), имеющими вид

$$E = diag\left\{E_j = \begin{bmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{bmatrix};\ j = \overline{1,m}\right\}, P_g = diag\left\{P_{gj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};\ j = \overline{1,m}\right\} \quad (11.54)$$

Прежде, чем формировать аналитическое представление реакции динамической системы на гармоническое воздействие следует заметить, что *частотные методы* применяются для исследования *установившихся* составляющих движения системы, которые для векторов состояния и выхода имеют соответственно вид (11.43) и (11.44), в которых требуется вычислить матрицу T из решения матричного уравнения Сильвестра(11.28) и матричную экспоненту e^{Et}.

Для решения уравнения Сильвестра (11.28) с матричными компонентами вида (11.54) запишем его в столбцовой форме

$$TE_\rho - FT_\rho = GP_{g\rho};\ \rho = \overline{1,2m}. \quad (11.55)$$

Выделим в (11.55) по два соседних столбца с индексами $\rho = 2j-1,\ \rho = 2j\ (j = \overline{1,m})$ в составе каждой из правых матриц E, T, P_g. Тогда с учетом структуры (11.54) матриц E и P_g для смежных столбцов T_{2j-1}, T_{2j} матрицы T получим два уравнения Сильвестра

$$-T_{2j}\omega_j - FT_{2j-1} = G_j,\ T_{2j-1}\omega_j - FT_{2j} = 0. \quad (11.56)$$

Решение системы (11.56) относительно фрагмента матрицы T, составленного из двух смежных столбцов принимает вид

$$\begin{bmatrix} T_{2j-1} & T_{2j} \end{bmatrix} = -(\omega_j^2 I + F^2)^{-1}\begin{bmatrix} F & \omega_j I \end{bmatrix} G_j;\ j = \overline{1,m}. \quad (11.57)$$

Матрица T, как решение матричного уравнения Сильвестра (12.28) в итоге принимает вид

$$T = row\left\{\begin{bmatrix} T_{2j-1} & T_{2j} \end{bmatrix};\ j = \overline{1,m}\right\} = -row\left\{(\omega_j^2 I + F^2)^{-1}\begin{bmatrix} F & \omega_j I \end{bmatrix} G_j;\ j = \overline{1,m}\right\}. \quad (11.58)$$

Отметим, что результат (11.58) получен для *разночастотного* случая гармонических экзогенных воздействий, подаваемых на входы динамической системы МВМВ - типа, если же режим воздействия *одночастотный* так, что $\omega_j = \omega, (j = \overline{1,m})$, в этом случае матрица T принимает вид

$$T = -(\omega^2 I + F^2)^{-1}\begin{bmatrix} F \vdots & \omega I \end{bmatrix} G. \quad (11.59)$$

Матричная экспонента e^{Et} для источника *разночастотного* гармонического воздействия в силу (10.28) записывается в форме

$$e^{Et} = \exp(Et) = diag\left\{ e^{E_j t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\sin(\omega_j t) & \cos(\omega_j t) \end{bmatrix};\ j = \overline{1,m} \right\}, \quad (11.60)$$

для источника *одночастотного* гармонического воздействия принимает вид (11.60), в котором следует положить $\omega_j = \omega,\ (j = \overline{1,m})$.

В итоге для векторов состояния $x(t)$, выхода $y(t)$ и ошибки $\varepsilon(t)$ для *разночастотного* и одночастотного гармонического воздействий соответственно можно записать

$$x(t) = Tz(t) = Te^{Et} z(0) =$$

$$= \left\{ -row\left\{ (\omega_j^2 I + F^2)^{-1} \left[F \vdots \quad \omega_j I \right] G_j \right\} diag\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\sin(\omega_j t) & \cos(\omega_j t) \end{bmatrix}; \right\} j = \overline{1,m} \right\} z(0);$$

$$x(t) = -(\omega^2 I + F^2)^{-1} \left[F \vdots \quad \omega I \right] G\, diag\left\{ e^{Et_j} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix};\ j = \overline{1,m} \right\};$$

$$y(t) = Cx(t) = CTz(t) = CTe^{Et} z(0),\ \varepsilon(t) = (P - CT)z(t). \quad (11.61)$$

Завершая рассмотрение проблемы конструирования аналитического представления реакции динамической непрерывной системы (11.1) в общем случае МВМВ – типа следует заметить, что в силу (11.46) матрицы $T(\omega)$, $CT(\omega)$ и $\left(P - CT(\omega)\right)$ выполняют функции *передаточных матриц (функций)* для случая вещественного гармонического экзогенного воздействия.

Скаляризация векторных процессов в системах МВМВ-типа строится с помощью мажорант и минорант, являющихся для $\forall\omega$ максимальным и минимальным сингулярными числами передаточных матриц $T(\omega)$ и $CT(\omega)$.

11.2. Динамические дискретные системы (объекты) при конечномерном экзогенном воздействии. Уравнение Сильвестра

Рассматривается линейная *дискретная* система (11.2), в которой экзогенное воздействие $g(k)$ формируется с помощью автономной конечномерной ДС вида (10.37), имеющей ВМО вида

$$z(k+1) = \overline{E}z(k);\ z(0) = z(k)\big|_{k=0};\ g(k) = \overline{P}_g z(k) \quad (11.62)$$

Построение аналитического представление реакции дискретной системы (11.2) опирается на возможности матричного уравнения Сильвестра и строится по той же схеме, что и в случае непрерывных ДС. В связи со сказанным процедуру формирования аналитического представления реакции дискретных динамических систем на конечномерные экзогенные воздействия представим конспективно в виде алгоритма 11.2.

Алгоритм 11.2(А11.2)

1. Формирование векторно–матричного описания (11.2) исследуемой дискретной системы с матрицами $\left(\overline{F},\overline{G},\overline{C}\right)$;

2. Формирование векторно-матричного описания (10.62) источника дискретного конечномерного экзогенного воздействия с матрицами $\left(\overline{E},\overline{P_g}\right)$;

3. Формирование агрегированной автономной дискретной системы

$$\begin{gathered}\tilde{x}(k+1)=\tilde{\overline{F}}\tilde{x}(k);\, x(k)=\tilde{\overline{C}}_x\tilde{x}(k);\, y(k)=\tilde{\overline{C}}_y\tilde{x}(k);\, z(k)=\tilde{\overline{C}}_z\tilde{x}(k);\\ g(k)=\tilde{\overline{C}}_g\tilde{x}(k);\, \varepsilon(k)=\tilde{\overline{C}}_\varepsilon\tilde{x}(k),\end{gathered} \tag{11.63}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{x}(k)=\left[x^T(k)\quad z^T(k)\right]^T;\, \tilde{\overline{F}}=\begin{bmatrix}\overline{F} & \overline{G}\overline{P_g}\\ 0 & \overline{E}\end{bmatrix};\, \tilde{\overline{C}}_x=\left[I\quad 0\right];\, \tilde{\overline{C}}_y=\left[\overline{C}\quad 0\right];\\ \tilde{\overline{C}}_z=\left[0\quad I\right];\, \tilde{\overline{C}}_g=\left[0\quad \overline{P}_g\right];\, \tilde{\overline{C}}_\varepsilon=\left[-\overline{C}\quad \overline{P}_g\right]\end{gathered} \tag{11.64}$$

позволяющей для агрегированного вектора состояния $\tilde{x}(k)$ записать

$$\tilde{x}(k)=\tilde{\overline{F}}^k\tilde{x}(0); \tag{11.65}$$

4. Введение априорной «*гипотезы*» о соблюдении векторного подобия

$$x(k)=\overline{T}z(k),\forall k\geq 0, \tag{11.66}$$

где $\overline{T}$ – $(n\times l)$- матрица подобия;

5. На основе (11.2), (11.62) и (11.66) установление того, что матрица $\overline{T}$ удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра вида (11.28), записываемого для дискретного случая в форме

$$\overline{T}\overline{E}-\overline{F}\overline{T}=\overline{G}\overline{P_g}\,; \tag{11.67}$$

6. Представление матрицы $\tilde{\overline{F}}$ вида (11.64) на основе уравнения Сильвестра (11.67) в форме

$$\tilde{\overline{F}}=\begin{bmatrix}\overline{F} & \overline{G}\overline{P_g}\\ 0 & \overline{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{F} & \overline{T}\overline{E}-\overline{F}\overline{T}\\ 0 & \overline{E}\end{bmatrix}; \tag{11.68}$$

7. С использованием положений утверждения 11.3 представление показательной (*степенной*) функции $\tilde{\overline{F}}^k$ в блочной матричной форме

$$\tilde{\overline{F}}^k=\begin{bmatrix}\overline{F}^k & \overline{T}\overline{E}^k-\overline{F}^k\overline{T}\\ 0 & \overline{E}^k\end{bmatrix}; \tag{11.69}$$

8. Формирование аналитических представлений векторных переменных исследуемой дискретной системы (11.2) и источника дискретного конечномерного экзогенного воздействия (11.62) с

использованием векторно-матричных зависимостей (11.63), (11.64) на основе показательной функции (11.69) в форме:

$$
\begin{aligned}
&x(k)=\overline{F}^{k}x(0)+\left(\overline{T}\,\overline{E}^{k}-\overline{F}^{k}\overline{T}\right)z(0),\\
&y(k)=\overline{C}x(k)=\overline{C}\,\overline{F}^{k}x(0)+\overline{C}\left(\overline{T}\,\overline{E}^{k}-\overline{F}^{k}\overline{T}\right)z(0),\\
&z(k)=\overline{E}^{k}z(0),\, g(k)=\overline{P_g}\,\overline{E}^{k}z(0),\\
&\varepsilon(k)=g(k)-y(k)=(\overline{P_g}-\overline{C}\,\overline{T})\overline{E}^{k}z(0)+\overline{C}\,\overline{F}^{k}\left(x(0)-\overline{T}\,\overline{z}(0)\right).
\end{aligned}
\tag{11.70}
$$

9. На основе полных представлений векторных переменных задачи в форме (11.70) построение аналитических описаний:

Вынужденных составляющих по состоянию, входу и ошибке

$$x_в(k)=x(k,g(k),x(0)=0)=x(k,z(0)\neq 0,x(0)=0)=\overline{T}\,\overline{E}z(0)-\overline{F}\,\overline{T}z(0); \tag{11.71}$$

$$y_в(k)=\overline{C}x_в(k)=\overline{C}\,\overline{T}\,\overline{E}^{k}z(0)-\overline{C}\,\overline{F}^{k}\overline{T}z(0),\ \varepsilon_в(k)=\left(\overline{P}_g-\overline{C}\,\overline{T}\right)\overline{E}^{k}z(0)+\overline{C}\,\overline{F}^{k}\overline{T}z(0). \tag{11.72}$$

Установившихся составляющих по состоянию, выходу и ошибке

$$x_y(k)=\lim_{k\to\infty}x_в(k)=\overline{T}\,\overline{E}^{k}z(0); \tag{11.73}$$

$$y_y(k)=\overline{C}x_y(k)=\overline{C}\,\overline{T}\,\overline{E}^{k}z(0),\ \varepsilon_y(k)=(\overline{P}_g-\overline{C}\,\overline{T})\overline{E}^{k}z(0). \tag{11.74}$$

Переходных составляющих по состоянию, выходу и ошибке

$$x_{пер}(k)=x_y(k)-x_в(k)=\overline{F}^{k}\overline{T}z(0),\ y_{пер}(k)=\overline{C}x_{пер}(k)=\overline{C}\,\overline{F}^{k}\overline{T}z(0)=-\varepsilon_{пер}(k).$$

Из сравнения представлений для $x_y(k)$ (11.73) и $z(k)$ (11.70) становится понятным математическое «содержание» матрицы $\overline{T}$, состоящее в том, что она представляет собой матрицу подобия процессов *по вектору состояния в источнике конечномерного дискретного экзогенного воздействия* (ИКДЭВ) и *установившейся составляющей вектора состояния исследуемой дискретной динамической системы* так, что устанавливаются соотношения

$$x_y(k)=\overline{T}\,\overline{E}^{k}z(0)=\overline{T}z(k).$$

Как и в случае непрерывных систем, остановимся теперь на ситуации, когда ИКДЭВ формирует *типовые дискретные экзогенные воздействия*, ограничившись случаями: *ступенчатого и гармонического дискретных* экзогенного воздействий. Первое типовое воздействие используется *для оценки динамических свойств* исследуемой ДС по *кривой переходного процесса*, второе – по *амплитудным частотным характеристикам*.

Случай 11.3 (Сл11.3) *ступенчатого дискретного* экзогенного воздействия характеризуется матрицами $\overline{E}$ и $\overline{P}_g$ модельного представления ИКДЭВ (12.62) в силу (11.45), имеющими вид

$$\overline{E}=\left[I_{m\times m}\right],\ \overline{P}_g=\left[I_{m\times m}\right]. \tag{11.75}$$

Подстановка матриц вида (11.75) в уравнение Сильвестра (11.67) дает

$\overline{T} - \overline{F}\overline{T} = \overline{G}$, что позволяет для матрицы $\overline{T}$ записать

$$\overline{T} = \left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G}. \qquad (11.76)$$

Матрицы $\overline{E}$ вида (11.75) и $\overline{T}$ вида (11.76) дают для степенной матричной функции $\tilde{\overline{F}}$, записанной в форме (11.69) представление

$$\tilde{\overline{F}}^k = \begin{bmatrix} \overline{F}^k & (I - \overline{F}^k)\overline{T} \\ 0 & \overline{E}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{F}^k & (I - \overline{F}^k)\left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \qquad (11.77)$$

Подстановка матричной степенной функции вида (11.77) и выделение из полного движения вынужденной составляющей по вектору состояния и выхода исследуемой системы дает

$$x_в(k) = (I - \overline{F}^k)\left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G}z(0) = \overline{H}_x(k)z(0); z(0) = argmin\left(\left\|z(0)\right\| = 1\right), \qquad (11.78)$$

$$y_в(k) = \overline{C}x_в(k) = \overline{C}(I - \overline{F}^k)\left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G}z(0) = \overline{C}\overline{H}_x(k)z(0) = \overline{H}_y(k)z(0). \qquad (11.79)$$

В выражениях (11.78) и (11.79) матрицы

$$\overline{H}_x(k) = (I - \overline{F}^k)\left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G}, \qquad (11.80)$$

$$\overline{H}_y(k) = (I - \overline{F}^k)\left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G} = \overline{C}\overline{H}_x(k) \qquad (11.81)$$

представляют собой соответственно матричные переходные функции по состоянию и выходу дискретной системы (11.2) Если возникает необходимость *скаляризации* задачи, состоящей в исследовании динамических свойств $(i, j)-$го сепаратного канала дискретной ДС, связывающего $i-$й выход $y_i(k)$ с $j-$м входом $g_j(t)$, то в этом случае в *переходной матрице* по выходу $\overline{H}_y(k) = \overline{H}(k)$ (или просто в *переходной матрице*) выделить $(i, j)-$й элемент

$$\overline{H}_{ij}(k) = \overline{C}^i(I - \overline{F}^k)\left(I - \overline{F}\right)^{-1}\overline{G}_j; \left(i, j = \overline{1, m}\right), \qquad (11.82)$$

где $\overline{C}^i, \overline{G}_j$ –соответственно $i-$я строка матрицы выхода $\overline{C}$ и $j-$й столбец матрицы входа $\overline{G}$.

Глобальная скаляризация векторных процессов в системах типа «многомерный вход – многомерный выход» строится с помощью мажорант и минорант, являющихся для $\forall k$ максимальным и минимальным сингулярными числами переходной матрицы $\overline{H}(k)$.

Случай 11.4 Сл11.4) *гармонического дискретного* экзогенного воздействия характеризуется матрицами $\overline{E}$ и $\overline{P}_g$ модельного представления ИКДЭВ (11.62) в силу (10.49) – (10.50), имеющими вид

$$\overline{E} = diag\left\{\overline{E}_j = \begin{bmatrix} \cos(\omega_j \Delta t) & \sin(\omega_j \Delta t) \\ -\sin(\omega_j \Delta t) & \cos(\omega_j \Delta t) \end{bmatrix}; j = \overline{1, m}\right\}, \qquad (11.83)$$

$$\overline{P}_g = row\left\{\overline{P}_{gj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; j = \overline{1, m}\right\}. \qquad (11.84)$$

Прежде, чем формировать аналитическое представление реакции динамической системы на *дискретное* гармоническое воздействие следует заметить, что *частотные методы* применяются для исследования *установившихся* составляющих движения системы, которые для векторов состояния и выхода имеют соответственно вид (11.73) и (11.74), в которых требуется вычислить матрицу $\overline{T}$ из решения матричного уравнения Сильвестра (11.67) и матричную показательную функцию $\overline{E}^k$.

Для решения уравнения Сильвестра (11.67) с матричными компонентами вида (11.83), (11.84) запишем его в столбцовой форме

$$TE_\rho - FT_\rho = GP_{g\rho}; \rho = \overline{1,2m}. \qquad (11.85)$$

Выделим в (11.85) по два соседних столбца с индексами $\rho = 2j-1,\ \rho = 2j\ (j = \overline{1,m})$ в составе каждой из правых матриц $\overline{E}, \overline{T}, \overline{P}_g$. Тогда с учетом структуры (11.83), (11.84) матриц $\overline{E}$ и $\overline{P}_g$ для смежных столбцов $\overline{T}_{2j-1}, \overline{T}_{2j}$ матрицы $\overline{T}$ получим два уравнения Сильвестра

$$\begin{aligned} &(\cos(\omega_j \Delta t)I - \overline{F})\overline{T}_{2j-1} - \sin(\omega_j \Delta t)\overline{T}_{2j} = \overline{G}_j, \\ &\sin(\omega_j \Delta t)\overline{T}_{2j-1} + (\cos(\omega_j \Delta t)I - \overline{F})\overline{T}_{2j} = 0. \end{aligned} \qquad (11.86)$$

Решение системы (11.86) относительно фрагмента матрицы T, составленного из двух смежных столбцов принимает вид

$$\left[\overline{T}_{2j-1} \quad \overline{T}_{2j}\right] = (I - 2\overline{F}\cos(\omega_j \Delta t) + \overline{F}^2)^{-1}\left[\cos(\omega_j \Delta t)I - \overline{F} \vdots \quad -\sin(\omega_j \Delta t)I\right]\overline{G}_j;\ j = \overline{1,m}. \qquad (11.87)$$

Матрица $\overline{T}$ как решение матричного уравнения Сильвестра (11.67) в итоге принимает вид

$$\begin{aligned} &\overline{T} = row\left\{\left[\overline{T}_{2j-1} \quad \overline{T}_{2j}\right];\ j = \overline{1,m}\right\} = \\ &= row\left\{(I - 2\overline{F}\cos(\omega_j \Delta t) + \overline{F}^2)^{-1}\left[\cos(\omega_j \Delta t)I - \overline{F} \vdots \quad -\sin(\omega_j \Delta t)I\right]\overline{G}_j;\ j = \overline{1,m}\right\}. \end{aligned} \qquad (11.88)$$

Отметим, что результат (11.88) получен для *разночастотного* случая *дискретных* гармонических экзогенных воздействий на входы дискретной динамической системы (11.2) МВМВ – типа, если же режим воздействия *одночастотный* так, что $\omega_j = \omega, (j = \overline{1,m})$, то матрица $\overline{T}$ принимает вид

$$\overline{T} = (I - 2\overline{F}\cos(\omega \Delta t) + \overline{F}^2)^{-1}\left[\cos(\omega \Delta t)I - \overline{F} \vdots \quad -\sin(\omega \Delta t)I\right]\overline{G}. \qquad (11.89)$$

Теперь вычислим показательную матричную функцию $\overline{E}^k$. Для источника *разночастотного дискретного* гармонического воздействия в силу (10.28) путем замены в нем $t = (\Delta t)k$ и представления $e^{Et} = (e^{E(\Delta t)})^k = \overline{E}^k$ получим

$$\overline{E}^k = diag\left\{\overline{E}_j^k = \begin{bmatrix} \cos(\omega_j(\Delta t)k) & \sin(\omega_j(\Delta t)k) \\ -\sin(\omega_j(\Delta t)k) & \cos(\omega_j(\Delta t)k) \end{bmatrix};\ j = \overline{1,m}\right\}. \quad (11.90)$$

В итоге для векторов состояния $x(k)$, выхода $y(k)$ и ошибки $\varepsilon(k)$ в *установившемся режиме* для *разночастотного дискретного* гармонического воздействия можно записать

$$x(k) = \overline{T}\overline{E}^k z(0), y(k) = \overline{C}\overline{T}\overline{E}^k z(0), \varepsilon(k) = (\overline{P} - \overline{C}\overline{T})\overline{E}^k z(0), \quad (11.91)$$

где $\overline{T}$ принимает вид (11.88), а $\overline{E}^k$ - (11.90).

Завершая рассмотрение проблемы конструирования аналитического представления реакции динамической *дискретной* системы (11.2) в общем случае МВМВ – типа, следует заметить, что матрицы $\overline{T}(\omega)$, $\overline{C}\overline{T}(\omega)$ и $\left(\overline{P}_g - \overline{C}\overline{T}(\omega)\right)$ выполняют функции *передаточных матриц (функций)* для случая вещественного гармонического экзогенного воздействия, максимальные и минимальные сингулярные числа этих матриц как функции частоты задают мажоранты и миноранты соответствующих амплитудных частотных характеристик.

11.3* Динамические непрерывные системы (объекты) при стохастическом экзогенном воздействии. Уравнение Ляпунова

Рассмотрим непрерывную динамическую систему (11.1), *экзогенное воздействие* $g(t)$ на входе которой принимает смысл $v(t)$ – *стационарного в широком смысле стохастического воздействия* так, что (11.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gv(t), x(0) = x(t)|_{t=0}, y(t) = Cx(t). \quad (11.92)$$

Ставится задача исследовать установившиеся стохастические процессы в динамической системе вида (11.92) по векторам состояния, выхода и ошибки на предмет *формирования их матриц дисперсий, ковариаций и спектральных плотностей* при стохастических экзогенных воздействий стационарных в широком смысле типа *«белый» и «окрашенный» шумы*.

Пусть $v(t) = w(t)$, где $w(t)$- «*белый шум*» стационарный в широком смысле с нулевым средним значение $M[w(t)] = \overline{w} = 0$, тогда решение системы (11.92) примет вид

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\lambda)}Gw(\lambda)d\lambda.$$

Применим к полученному интегральному выражению оператор вычисления математического ожидания, тогда получим

$$M[x(t)] = M\left[e^{Ft}x(0)\right] + M\left[\int_0^t e^{F(t-\lambda)}Gw(\lambda)d\lambda\right] = e^{Ft}M[x(0)] + \int_0^t e^{F(t-\lambda)}GM[w(\lambda)]d\lambda.$$

В силу $M[w(*)] = \overline{w} = 0$ последнее выражение можно записать в эквивалентной форме

$$\overline{x}(t) = e^{Ft}\overline{x}(0).$$

Теперь становится справедливой запись для центрированного стохастического процесса по вектору состояния

$$x(t) - \overline{x}(t) = e^{Ft}(x(0) - \overline{x}(0)) + \int_0^t e^{F(t-\lambda)}Gw(\lambda)d\lambda. \qquad (11.93)$$

В свою очередь $(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T$ принимает вид

$$(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T = (x(0) - \overline{x}(0))^T e^{F^T\sigma} + \int_0^\sigma w^T(\mu)G^T e^{F^T(\sigma-\mu)}d\mu. \qquad (11.94)$$

Сформируем на векторах $(x(t) - \overline{x}(t))$ и $(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T$ матрицу $(x(t) - \overline{x}(t))(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T$, для которой на основании (11.93), (11.94) получим

$$(x(t) - \overline{x}(t))(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T = e^{Ft}(x(0) - \overline{x}(0))(x(0) - \overline{x}(0))^T e^{F^T\sigma}$$
$$+ e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}Gw(\lambda)(x(0) - \overline{x}(0))^T d\lambda\, e^{F^T\sigma} + e^{Ft}\int_0^\sigma (x(0) - \overline{x}(0))w^T(\mu)G^T e^{-F^T\mu}d\mu +$$
$$+ e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}d\lambda\int_0^\sigma e^{F\lambda}Gw(\lambda)w^T(\mu)G^T e^{-F^T\mu}d\mu\, e^{F^T\sigma}. \qquad (11.95)$$

Применим к (11.95) оператор вычисления математического ожидания, тогда получим выражение

$$M\left[(x(t) - \overline{x}(t))(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T\right] = R_x(t,\sigma) = e^{Ft}M\left[(x(0) - \overline{x}(0))(x(0) - \overline{x}(0))^T\right]e^{F^T\sigma} +$$
$$+ e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}GM\left[w(\lambda)(x(\sigma) - \overline{x}(\sigma))^T\right]d\lambda\, e^{F^T\sigma} +$$
$$+ e^{Ft}\int_0^\sigma M\left[(x(0) - \overline{x}(0))w^T(\mu)\right]G^T e^{-F^T\mu}d\mu +$$
$$+ e^{Ft}\int_0^t d\tau\int_0^\sigma e^{-F\lambda}GM\left[w(\lambda)w^T(\mu)\right]G^T e^{-F^T\mu}d\mu e^{F^T\sigma}. \qquad (11.96)$$

Свойства стационарного в широком смысле «белого шума» $w(t)$, в том числе его некоррелированность со стохастическим вектором начального состояния $x(0)$ позволяют записать

$$D_x(0) = \mathrm{M}\left[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T\right] = D_{x(0)};\ M\left[w(\lambda)w^T(\mu)\right] = N\delta(\lambda,\mu),$$
$$M\left[(x(0) - \overline{x}(0))w^T(\mu)\right] = 0; \qquad M\left[w(\tau)(x(0) - x(0))^T\right] = 0. \qquad (11.97)$$

Соотношения (11.97) позволяют выражение (11.96) записать в форме

$$R_x(t,\sigma)=e^{Ft}D_{x(0)}e^{F^T\sigma}+e^{Ft}\int_0^t d\lambda\int_0^\sigma e^{-F\lambda}GN\delta(\lambda,\mu)G^Te^{-F^T\mu}d\mu\, e^{F^T\sigma}=$$

$$=e^{Ft}D_{x(0)}e^{F^T\sigma}+e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda e^{F^T\sigma}. \quad (11.98)$$

Осуществим в (11.97) переход к матрице дисперсии $D_x(t)=R_x(t,\sigma)|_{\sigma=t}$, тогда для нее получим интегральное представление

$$D_x(t)= \quad e^{Ft}D_{x(0)}e^{F^Tt}+e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda e^{F^Tt}. \quad (11.99)$$

Продифференцируем по переменной t левую и правую части соотношения (11.99), в результате получим дифференциальное представление для матрицы дисперсий

$$\begin{aligned}\dot{D}_x(t)&=FD_x(t)+e^{Ft}\left(e^{-Ft}GNG^Te^{-F^Tt}\right)e^{F^Tt}+D_x(t)F^T=FD_x(t)+\\&+\left(GNG^T\right)+D_x(t)F^T=FD_x(t)+D_x(t)F^T+\left(GNG^T\right),D_x(0)=D_{x(0)}.\end{aligned} \quad (11.100)$$

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение (11.100) относительно матрицы $D_x(t)$ в установившемся режиме для случая, когда матрица F системы является «устойчивой». Для него оказываются справедливыми два предельных соотношения

$$\lim_{t\to\infty}D_x(t)=D_x,\ \lim_{t\to\infty}\dot{D}_x(t)=0. \quad (11.101)$$

Подстановка второго равенства (11.101) в (11.100) позволяет для установившегося значения D_x матрицы дисперсий вектора состояния исследуемой системы (11.92), ко входу которого приложено стохастическое воздействие стационарное в широком смысле типа «белый шум» с матрицей интенсивностей N, записать

$$FD_x+D_xF^T=-GNG^T. \quad (11.102)$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 11.5 (У11.5). Установившееся значение D_x матрицы дисперсий $D_x(t)$ вектора состояния $x(t)$ системы (11.92) возбуждаемой экзогенным стохастическим воздействие стационарным в широком смысле типа «белый шум» $w(t)$ с матрицей интенсивностей N, может быть вычислена как решение уравнения Ляпунова (11.102).□■

Примечание 11.2 (ПР11.2).Нетрудно видеть, что оказываются справедливыми соотношения

$$\begin{aligned}&R_y(t,\sigma)=M\left[y(t)y^T(\sigma)\right]=M\left[Cx(t)x^T(\sigma)C^T\right]=CR_x(t,\sigma)C^T,\\&D_y=M\left[y(t)y^T(t)\right]=R_y(t,\sigma)_{|t=\sigma}=CD_xC^T\end{aligned}. \quad (11.103)$$

Более того, сравнение выражений (11.97) и (11.98) делает справедливыми представления для матриц ковариаций по *состоянию и выходу системы*

$$R_x(|\tau|) = e^{F|\tau|} D_x = D_x e^{F^T|\tau|},\ |\tau| = |\sigma - t|, \tag{11.104}$$

$$R_y(|\tau|) = C e^{F|\tau|} D_x C^T = C D_x e^{F^T|\tau|} C^T. \tag{11.105}$$

Пусть теперь $v(t) = \xi(t)$, где $\xi(t)$ – стационарное в широком смысле стохастическое экзогенное воздействие типа «окрашенный шум». «Окрашенный шум» $\xi(t)$ формируется фильтром (ФФ), имеющим векторно-матричное описание

$$\dot{z}_\phi(t) = \Gamma_\phi z_\phi(t) + G_\phi w(t);\ \xi(t) = P_\phi z_\phi(t), \tag{11.106}$$

где $z_\phi \in R^{l_\phi}$, $\xi \in R^m$.

Если объединить систему (11.92), где $g(t) = \xi(t)$ и ФФ (11.106) в единую агрегированную систему, то рассматриваемый случай сводится к предыдущему, когда $g(t) = w(t)$. Для этого введем в рассмотрение составной вектор $\tilde{x} = \left[x^T\ z_\phi^T\right]^T$, относительно которого можно записать

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{F}x(t) + \tilde{G}w(t);\ \tilde{x}(0) = \left[x^T(0)\quad 0^T\right]^T, \tag{11.107}$$

$$x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t);\ y(t) = \tilde{C}_y \tilde{x}(t);\ \varepsilon(t) = \tilde{C}_\varepsilon \tilde{x}(t), \tag{11.108}$$

$$z_\phi = \tilde{C}_z \tilde{x}(t);\ \xi(t) = \tilde{C}_\xi \tilde{x}(t), \tag{11.109}$$

где

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & GP_\Phi \\ 0 & \Gamma_\Phi \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ G_\phi \end{bmatrix}, \tag{11.110}$$

$$\tilde{C}_x = [I\quad 0],\ \tilde{C}_y = [C\quad 0],\ \tilde{C}_\varepsilon = [-C\quad P_\Phi], \tag{11.111}$$

$$\tilde{C}_z = [0\quad I],\ \tilde{C}_\xi = [0\quad P_\Phi]. \tag{11.112}$$

Нетрудно видеть, что системой соотношений (11.107) – (11.111) задача исследования процессов в системе (11.92) при внешнем стохастическом воздействии типа «окрашенный шум» свелась к исследованию процессов в расширенной системе (11.107) при внешнем стохастическом воздействии типа «белый шум» $w(t)$. Тогда оказываются справедливыми матричные уравнения

$$\dot{\tilde{D}}_x(t) = \tilde{F}\tilde{D}_x(t) + \tilde{D}_x(t)\tilde{F}^T + \tilde{G}N\tilde{G}^T;\ \tilde{D}_x(0), \tag{11.113}$$

$$D_x = \tilde{C}_x \tilde{D}_x \tilde{C}_x^T;\ D_y = \tilde{C}_y \tilde{D}_x \tilde{C}_y^T;\ D_\varepsilon = \tilde{C}_e \tilde{D}_x \tilde{C}_\varepsilon^T, \tag{11.114}$$

$$D_{z_\phi} = \tilde{C}_z \tilde{D}_x \tilde{C}_z^T;\ D_\xi = \tilde{C}_\xi \tilde{D}_x \tilde{C}_\xi^T, \tag{11.115}$$

где $\overline{D}_x = M\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$.

Если (11.110) имеется установившееся решение $\tilde{D}_x$, то оно удовлетворяет алгебраическому матричному уравнению типа Ляпунова

$$\tilde{F}\tilde{D}_x + \tilde{D}_x\tilde{F}^T = -\tilde{G}N\tilde{G}^T. \tag{11.116}$$

По аналогии с (11.104) и (11.105) могут быть сформированы матрицы ковариаций по всем векторам составной системы

$$R_x(\tau) = \tilde{C}_x e^{\tilde{F}\tau} \tilde{D}_x \tilde{C}_x^T, \ \forall \tau \geq 0, \tag{11.117}$$

$$R_y(\tau) = \tilde{C}_y e^{\tilde{F}\tau} \tilde{D}_x \tilde{C}_y^T, \ \forall \tau \geq 0, \tag{11.118}$$

$$R_\varepsilon(\tau) = \tilde{C}_\varepsilon e^{\tilde{F}\tau} \tilde{D}_x \tilde{C}_\varepsilon^T, \ \forall \tau \geq 0, \tag{11.119}$$

$$R_z(\tau) = \tilde{C}_z e^{\tilde{F}\tau} \tilde{D}_x \tilde{C}_z^T, \ \forall \tau \geq 0, \tag{11.120}$$

$$R_\xi(\tau) = \tilde{C}_\xi e^{\tilde{F}\tau} \tilde{D}_x \tilde{C}_\xi^T, \ \forall \tau \geq 0. \tag{11.121}$$

Полученные соотношения (11.113) – (11.121) полностью решают задачу исследования процессов в стационарной многомерной непрерывной системе (11.92) при внешнем стохастическом воздействии $\xi(t)$ типа «окрашенный шум». При этом матричное описание процесса свелось к решению дифференциального и алгебраического матричных уравнений типа Ляпунова. Следует заметить, что решение матричных уравнений (11.113), (11.114), а также (11.116) может быть использовано для изучения управляемости системы (11.92). Очевидно, система (11.92) является полностью управляемой, если матрицы дисперсий $D_x(t)$, $\forall t$ или D_x являются *невырожденными*.

Рассмотрим теперь проблемы, связанные с конструированием матриц спектральных плотностей переменных системы (11.92).Следует заметить, что в силу определения матрица $S_{(*)}(\omega)$ спектральных плотностей переменной $(*)(t)$ вычисляется с помощью (10.88), которое будем использовать записанным в форме

$$S_{(*)}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} R_{(*)}(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} R_{(*)}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{11.122}$$

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 11.6 (У11.6). Для динамической системы вида (11.92) при стохастическом экзогенном воздействии $v(t)$ стационарном в широком смысле типа «белый шум» $w(t)$ или «окрашенный шум» $\xi(t)$ матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей вектора состояния $x(t)$ и $S_y(\omega)$ спектральных плотностей вектора выхода $y(t)$ задаются выражениями

$$S_x(\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \tag{11.123}$$

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T. \tag{11.124}$$

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении (11.122), где переменная $(*)(t)$ принимает смысл $x(t)$ и $y(t)$. Тогда при вычислении матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей вектора состояния $x(t)$ с учетом представления (11.104) матрицы ковариаций, которое можно записать в форме

$$R_x(-\tau) = e^{-F\tau} D_x, \tau \leq 0; R_x(\tau) = e^{F\tau} D_x, \tau \geq 0, \tag{11.125}$$

получим

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{-F\tau}D_x e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{F\tau}D_x e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{0}e^{-(F+j\omega I)\tau}D_x d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{(F-j\omega I)\tau}D_x d\tau=$$

$$=-(F+j\omega I)^{-1}(I-0)D_x+(F-j\omega I)^{-1}(0-I)D_x=-\left\{(F+j\omega I)^{-1}+(F-j\omega I)^{-1}\right\}D_x.$$

В полученном выражении неявно присутствующую единичную матрицу I слева от матрицы D_x представим в эквивалентной форме

$$I=\left(F^2+\omega^2 I\right)\left(F^2+\omega^2 I\right)^{-1}=(F+j\omega I)(F-j\omega I)\left(F^2+\omega^2 I\right)^{-1},$$

что позволяет для матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей вектора состояния $x(t)$ записать

$$S_x(\omega)=-2F\left(F^2+\omega^2 I\right)^{-1}D_x. \qquad (11.126)$$

В свою очередь, в силу (11.103), (11.105) и (11.126) оказываются справедливыми соотношения

$$R_y(\tau)=CR_x(\tau)C^T,$$

$$S_y(\omega)=F\left\{R_y(\tau)=CR_x(\tau)C^T\right\}=CF\left\{R_x(\tau)\right\}C^T=CS(\omega)C^T.$$

$$S_y(\omega)=CS(\omega)C^T=-2CF\left(F^2+\omega^2 I\right)^{-1}D_x C^T. \qquad \blacksquare(11.127)$$

Примечание 11.3 (ПР11.3). Если возникает необходимость вычислить матрицу $S_\varepsilon(\omega)$спектральных плотностей вектора ошибки $\varepsilon(t)$, то следует иметь в виду, что это возможно *только для случая экзогенного стохастического воздействия стационарного в широком смысле типа «окрашенный шум»*. В этом случае матрица $S_\varepsilon(\omega)$ строится по схеме формулы (11.127) с заменой всех его компонентов вида $(*)$ на компоненты вида $(\tilde{*})$, в результате чего искомая матрица принимает вид

$$S_\varepsilon(\omega)=-2\tilde{C}_\varepsilon\tilde{F}\left(\tilde{F}^2+\omega^2 I\right)^{-1}\tilde{D}_x\tilde{C}_\varepsilon^{\,T}. \qquad (11.128)$$

11.4* Динамические дискретные системы (объекты) при стохастическом экзогенном воздействии. Уравнение Ляпунова.

Рассмотрим дискретную систему (11.2), возбуждаемую стохастическим экзогенным дискретным воздействием $g(k)=v(k)$ стационарным в широком смысле так, что система (11.2) получает представление

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}v(k),\ x(0)=x(k)\,|_{k=0},\ y(k)=\overline{C}x(k). \qquad (11.129)$$

Как и в непрерывном случае, сначала рассмотрим реализацию $v(k)$ в форме дискретного «белого шума» $w(k)$, а затем – в форме дискретного «окрашенного шума». Проблему вычисления показателей реакции дискретной динамической системы вида (11.129) на перечисленные дискретные экзогенные стационарные в широком смысле стохастические воздействия будем решать, опираясь на

результаты решения подобной задачи для непрерывного случая, которые изложим в конспективной форме.

Сформулируем основные результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 11.6 (У11.6). Рассмотрим векторные дискретные процессы по состоянию и выходу, являющиеся решением линейного стохастического векторно-матричного уравнения (11.71) при $v(k)=w(k)$, где $w(k)$ – дискретная последовательность векторных *стохастических величин*, именуемая *дискретным "белым шумом"*, *характеризующаяся* нулевым средним значением

$$M\left[w(k)\right]=0, \tag{11.130}$$

некоррелированностью отсчетов $w(k)$ и $w(i)$ так, что выполняется соотношение

$$R_w(k,i)=M\left[w(k)w^T(i)\right]=V\delta(k,i),$$

где $\delta(k,i)$ – символ Кронекера, принимающий значение «1» при $k=i$ и значение «0» при $k\neq i$, и следовательно матрицей дисперсий

$$D_w=M\left[w(k)w^T(k)\right]=V; \tag{11.131}$$

при $x(0)$ – векторе начального состояния процесса (13.129) таком, что

$$M\left[x(0)\right]=\bar{x}(0),\ D_x(0)=M\left[(x(0)-\bar{x}(0))(x(0)-\bar{x}(0))^T\right]=D_{x(0)}. \tag{11.132}$$

Тогда математическое ожидание $\bar{x}(k)=\mathrm{M}\left[x(k)\right]$ и матрица дисперсий $D_x(k)$ вектора $x(k)$

$$D_x(k)=M\left[(x(k)-\bar{x}(k))(x(k)-\bar{x}(k))^T\right] \tag{11.133}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\bar{x}(k)=\bar{F}^k\bar{x}(0), \tag{11.134}$$

$$D_x(k+1)=\bar{F}D_x(k)\bar{F}^T+\bar{G}V\bar{G}^T, D_x(0)=D_{x(0)}. \tag{11.135}$$

Доказательство. Сначала докажем справедливость (11.134), для чего к свободной составляющей движения системы (11.129) $x(k)=\bar{F}^k x(0)$ применим оператор вычисления математического ожидания. В результате получим $M\left[x(k)\right]=\bar{F}^k M\left[x(0)\right]$, имеющего эквивалентное представление в форме (11.134), заметим при этом, что оказывается справедливым соотношение $\bar{x}(k+1)=\bar{F}\bar{x}(k)$.

Для доказательства справедливости (11.135) сначала на основании (11.129)) составим выражения

$$x(k+1)-\bar{x}(k+1)=\bar{F}\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)+\bar{G}w(k),\ x(0)-\bar{x}(0),$$

$$(x(k+1)-\bar{x}(k+1))^T=(x(k)-\bar{x}(k))^T\bar{F}^T+w^T(k)\bar{G}. \tag{11.136}$$

Сформируем теперь мультипликативную конструкцию $(x(k+1)-\bar{x}(k+1))(x(k+1)-\bar{x}(k+1))^T$, для которой при $v(k)=w(k)$, на основании (11.129), (11.136) запишем

$$\begin{aligned}(x(k+1)-\bar{x}(k+1))(x(k+1)-\bar{x}(k+1))^T &= \bar{F}(x(k)-\bar{x}(k))(x(k)-\bar{x}(k))^T\bar{F}^T \\ &+\bar{G}w(k)(x(k)-\bar{x}(k))^T\bar{F}^T+\bar{F}(x(k)-\bar{x}(k))w^T(k)\bar{G}^T+\bar{G}w(k)w^T(k)\bar{G}^T.\end{aligned} \quad (11.137)$$

Применим к выражению (11.137) оператор вычисления математического ожидания, тогда получим с учетом (11.131),(11.133) и условий $M\left[x(k)w^T(\mu)\right]=0$, $M\left[w(\mu)x^T(k)\right]=0$ соотношение (11.135). ■

Примечание 11.4 (ПР11.4). Рассмотрим матричное рекуррентное уравнение (11.135) относительно матрицы $D_x(k)$ в установившемся режиме для случая, когда матрица $\bar{F}$ системы имеет все собственные значения в единичном круге. Для него оказываются справедливыми предельные соотношения

$\lim\limits_{k\to\infty} D_x(k+1)=\lim\limits_{k\to\infty} D_x(k)=D_x$, при этом рекуррентное матричное уравнение (11.135) вырождается в алгебраическое матричное уравнение

$$D_x-\bar{F}D_x\bar{F}^T=\bar{G}V\bar{G}^T, \quad (11.138)$$

именуемое дискретным матричным уравнением Ляпунова.

Примечание 11.5 (ПР11.5). Для вектора математического ожидания выхода $\bar{y}(k)\overset{\Delta}{=}M\left[y(k)\right]$ дискретной системы (11.129) и матрицы дисперсий $D_y=M\left[(y-\bar{y})(y-\bar{y})^T\right]$ справедливы соотношения

$$\bar{y}(k)=\bar{C}\bar{x}(k)=\bar{C}\bar{F}^k\bar{x}(0),\ D_y=M\left[\bar{C}(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T\bar{C}^T\right]=\bar{C}D_x\bar{C}^T. \quad (11.139)$$

Примечание 11.6 (ПР11.6). По аналогии с непрерывными системами для матриц ковариаций по векторам состояния и выхода можно записать

$$R_x(v)=M[x(k+v)x^T(k)]=M[\bar{F}^v x(k)x^T(k)]=\bar{F}^v D_x : v>0; \quad (11.140)$$

$$R_x(v)=M[x(k-v)x^T(k)]=M[\bar{F}^{-v} x(k)x^T(k)]=\bar{F}^{-v} D_x : v<0; \quad (11.141)$$

$$R_y(v)=\bar{C}R_x\bar{C}^T=\bar{C}\bar{F}^v D_x\bar{C}^T : v>0; \quad (11.142)$$

$$R_y(v)=\bar{C}R_x\bar{C}^T=\bar{C}\bar{F}^{-v} D_x\bar{C}^T : v<0. \quad (11.143)$$

Пусть теперь $v(k)=\xi(k)$, где $\xi(k)$ – стационарное в широком смысле стохастическое экзогенное воздействие типа дискретный «окрашенный шум». «Окрашенный шум» $\xi(k)$ формируется дискретным фильтром (ДФФ), имеющим векторно-матричное описание

$$z_\phi(k+1)=\bar{\Gamma}_\phi z_\phi(k)+\bar{G}_\phi w(k); z_\phi(0)\equiv 0;\ \xi(k)=\bar{P}_\phi z_\phi(k). \quad (11.144)$$

В итоге задача сводится к предыдущей путём объединения дискретного формирующего фильтра и исследуемой системы (11.129), что образует составную дискретную систему, возбуждаемую внешним

стохастическим дискретным воздействием типа дискретный белый шум. Полученные результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 11.7 (У11.7). Рассмотрим дискретные процессы по векторам состояния, выхода и ошибки, являющиеся решением линейного стохастического векторно-матричного рекуррентного уравнения

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}\xi(k), x(0), y(k)=\overline{C}x(k), \varepsilon(k)=\xi(k)-y(k), \qquad (11.145)$$

где $\xi(k)$ – решение рекуррентного уравнения (11.144). Тогда оказываются справедливыми матричные соотношения

$$\tilde{D}_x(k+1)=\tilde{\overline{F}}\tilde{D}_x(k)\tilde{\overline{F}}^T+\tilde{\overline{G}}V\tilde{\overline{G}}^T, \tilde{D}_x(0), \tilde{D}_x=M\left[(\tilde{x}-\tilde{\overline{x}})(\tilde{x}-\tilde{\overline{x}})^T\right], \qquad (11.146)$$

$$D_x(k)=\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\tilde{D}_x(k)\begin{bmatrix} I & O \end{bmatrix}^T, \qquad (11.147)$$

$$D_y(k)=\begin{bmatrix} \overline{C} & 0 \end{bmatrix}D_{\tilde{x}}(k)\begin{bmatrix} \overline{C} & 0 \end{bmatrix};^T D_y(k)=\begin{bmatrix} -\overline{C} & \overline{P}_\Phi \end{bmatrix}D_{\tilde{x}}(k)\begin{bmatrix} -\overline{C} & \overline{P}_\Phi \end{bmatrix}^T, \qquad (11.148)$$

где $\tilde{x}=\left[x^T, z_\Phi{}^T\right]^T$, $\quad \tilde{\overline{F}}=\begin{bmatrix} \overline{F} & \overline{G}\overline{P}_\Phi \\ O & \overline{\Gamma}_\Phi \end{bmatrix}$; $\quad \tilde{\overline{G}}=\begin{bmatrix} O \\ \overline{G}_\Phi \end{bmatrix}$. □(11.149)

Доказательство утверждения строится на конструировании агрегированной системы

$$\tilde{x}(k+1)=\tilde{\overline{F}}\tilde{x}(k)+\tilde{G}w(k), \tilde{x}(0)=\left[x^T(0) \quad 0^T\right]^T, \qquad (11.150)$$

$$\boldsymbol{x(k)=\tilde{C}_x\tilde{x}(k)}; \boldsymbol{y(k)=\tilde{C}_y\tilde{x}(k)}; \varepsilon(k)=\tilde{C}_\varepsilon\tilde{x}(k), \qquad (11.151)$$

$$z_\Phi=\tilde{C}_z\tilde{x}(k); \xi(k)=\tilde{C}_\xi\tilde{x}(k), \qquad (11.152)$$

с вектором состояния $\tilde{x}$ и матрицами $\tilde{\overline{F}}, \tilde{\overline{G}}$ вида (11.149), а также матрицами

$$\tilde{C}_x=\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}; \tilde{C}_y=\begin{bmatrix} \overline{C} & 0 \end{bmatrix}; \tilde{C}_\varepsilon=\begin{bmatrix} -\overline{C} & \overline{P}_\Phi \end{bmatrix}; \tilde{C}_z=\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}; \tilde{C}_\xi=\begin{bmatrix} 0 & \overline{P}_\Phi \end{bmatrix}, \qquad (11.153)$$

опирающейся на системы (11.144) и (11.145). Сконструированная таким образом система (11.150) оказывается возбуждаемой стохастическим воздействием типа дискретный «белый шум» $w(k)$, для которой оказываются применимы уравнения Ляпунова вида (11.135), имеющего реализацию в форме (11.146), и вида (11.138), имеющего представление

$$\tilde{D}_x=\tilde{\overline{F}}\tilde{D}_x\tilde{\overline{F}}^T+\tilde{\overline{G}}V\tilde{\overline{G}}^T. \qquad ■(11.154)$$

Рассмотрим теперь проблемы, связанные с конструированием матриц спектральных плотностей переменных системы (11.129). Сначала дадим определение матрицы спектральных плотностей векторной переменной $(*)$ дискретной системы вида (11.129).

Определение 11.1 (О11.1). Матрицей $\overline{S}_{(*)}(\omega)$ спектральных плотностей векторной стохастической переменной $(*)$, обладающей

матрицей ковариаций $\overline{R}_{(*)}(\nu)$ называется бесконечный ряд Фурье от матрицы ковариаций, записываемый в виде

$$\overline{S}_{(*)}(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \overline{R}_{(*)}(v) e^{-jv\omega\Delta t}. \qquad (11.155)$$

Применительно к векторным переменным дискретной системы (11.129) введенное определение матрицы спектральных плотностей с учетом соотношений (11.142) и (11.143) позволяет записать

$$\overline{S}_x(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \overline{R}_x(v) e^{-jv\omega\Delta t}; \overline{S}_y(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \overline{R}_y(v) e^{-jv\omega\Delta t} = \overline{C}\overline{S}_x(\omega)\overline{C}^T. \qquad (11.156)$$

Для целей получения компактного представления матриц спектральных плотностей (11.156) сформулируем и докажем утверждение.

Утверждение 11.8 (У11.8). Матрицы спектральных плотностей векторных переменных x состояния и y дискретной системы вида (11.129) представимы в форме

$$\overline{S}_x(\omega) = 2(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t)\{I - 2\overline{F}\cos\omega\Delta t + \overline{F}^2\}^{-1}\overline{D}_x, \qquad (11.157)$$

$$\overline{S}_y(\omega) = \overline{C}\overline{S}_x(\omega)\overline{C}^T = 2\overline{C}(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t)\{I - 2\overline{F}\cos\omega\Delta t + \overline{F}^2\}^{-1}\overline{D}_x\overline{C}^T. \quad \square (11.158)$$

Доказательство. Представим матрицу спектральных плотностей $\overline{S}_x(\omega)$, задаваемую с помощью (11.156), в форме цепочки матричных равенств

$$\begin{aligned}\overline{S}_x(\omega) &= \sum_{v=-\infty}^{0} \overline{F}^{-v}\overline{D}_x e^{-jv\omega\Delta t} + \sum_{v=0}^{\infty} \overline{F}^{v}\overline{D}_x e^{-jv\omega\Delta t} = \sum_{v=-\infty}^{0} (\overline{F}^{-1}e^{-j\omega\Delta t})^v \overline{D}_x + \\ &+ \sum_{v=0}^{\infty} (\overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^v \overline{D}_x = \sum_{v=-\infty}^{0} (\overline{F}e^{j\omega\Delta t})^{-v} \overline{D}_x + \sum_{v=0}^{\infty} (\overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^v \overline{D}_x.\end{aligned} \qquad (11.159)$$

В выражениях (11.159) содержатся члены суммы матричной геометрической прогрессии соответственно с показателями $\overline{F}e^{j\omega\Delta t}$ и $\overline{F}e^{-j\omega\Delta t}$, для которых оказываются справедливыми представления геометрических прогрессий в виде свернутых сумм

$$\sum_{v=-\infty}^{0} (\overline{F}e^{j\omega\Delta t})^{-v} = +...(\overline{F}e^{j\omega\Delta t})^3 + (\overline{F}e^{j\omega\Delta t})^2 + \overline{F}e^{j\omega\Delta t} + I = (I - \overline{F}e^{j\omega\Delta t})^{-1}, \qquad (11.160)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} (\overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^{v} = I + \overline{F}e^{-j\omega\Delta t} + (\overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^2 + (\overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^3 + ... = (I - \overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^{-1}. \qquad (11.161)$$

С учетом (11.159), (11.160) и (11.161) для матрицы $\overline{S}_x(\omega)$ спектральной плотности процессов по состоянию можно записать

$$\begin{aligned}\overline{S}_x(\omega) &= \{(I - \overline{F}e^{j\omega\Delta t})^{-1} + (I - \overline{F}e^{-j\omega\Delta t})^{-1}\}\overline{D}_x = \\ &= \{[(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) - j\overline{F}\sin\omega\Delta t]^{-1} + [(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) + j\overline{F}\sin\omega\Delta t]^{-1}\}\overline{D}_x.\end{aligned} \qquad (11.162)$$

Запишем единичную матрицу, неявно присутствующую в выражении (11.162) непосредственно слева от матрицы $\overline{D}_x$ в форме

$$I = [(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) - j\overline{F}\sin\omega\Delta t][(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) + j\overline{F}\sin\omega\Delta t] \times \{[(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) -$$
$$- j\overline{F}\sin\omega\Delta t][(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) + j\overline{F}\sin\omega\Delta t]\}^{-1} = [(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t) - j\overline{F}\sin\omega\Delta t][(I -$$
$$- \overline{F}\cos\omega\Delta t) + j\overline{F}\sin\omega\Delta t]\{I - 2\overline{F}\cos\omega\Delta t + \overline{F}^2\}^{-1}.$$

Подстановка полученного представления единичной матрицы I в (11.162) дает

$$\overline{S}_x(\omega) = 2(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t)\{I - 2\overline{F}\cos\omega\Delta t + \overline{F}^2\}^{-1}\overline{D}_x,$$
$$\overline{S}_y(\omega) = \overline{C}\overline{S}_x(\omega)\overline{C}^T = 2\overline{C}(I - \overline{F}\cos\omega\Delta t)\{I - 2\overline{F}\cos\omega\Delta t + \overline{F}^2\}^{-1}\overline{D}_x\overline{C}^T. \quad \blacksquare$$

Примечание 11.7 (ПР11.7). При формировании матрицы $\overline{S}_\varepsilon(\omega)$ спектральных плотностей вектора ε ошибки по выходу дискретной системы (11.129) следует пользоваться выражением

$$\overline{S}_\varepsilon(\omega) = 2\tilde{\overline{C}}_\varepsilon(I - \tilde{\overline{F}}\cos\omega\Delta t)\{I - 2\tilde{\overline{F}}\cos\omega\Delta t + \tilde{\overline{F}}^2\}^{-1}\tilde{D}_x\tilde{\overline{C}}_\varepsilon^{\,T}, \qquad (11.163)$$

где матрицы $\tilde{\overline{C}}_\varepsilon$, $\tilde{\overline{F}}$ и $\tilde{D}_x$ определяются соответственно с помощью выражений (11.153) и (11.154).

Примечание 11.8 (ПР11.8). В выражениях для матриц спектральных плотностей $\overline{S}_x(\omega)$, $\overline{S}_y(\omega)$ и $\overline{S}_\varepsilon(\omega)$ формах (11.157), (11.158) (11.163) соответственно для ω следует иметь в виду ограничение $-\pi(\Delta t)^{-1} \le \omega \le \pi(\Delta t)^{-1}$.

11.5* Связь параметров стохастических стационарных в широком смысле непрерывных и дискретных экзогенных воздействий типа «белый шум»

Данный параграф имеет прикладное назначение. Он решает задачу подготовки пользователя материалами раздела к экспериментальной среде такой, как Matlab с расширением Simulink, для проведения исследований моделей динамических систем при стохастических экзогенных воздействиях. Надо предупредить читателя, что корректное исследования может быть организовано только в дискретной по времени модельной среде, которая должна состоять из источника дискретного белого шума, дискретного формирующего фильтра и дискретной модели исследуемой непрерывной системы. Сказанное объясняется тем, что источник непрерывного белого шума аппаратно не реализуем, а дискретного – реализуем. Однако расчетные процедуры могут быть осуществлены с помощью приведенных в разделе аналитических соотношений для непрерывных систем в полном объеме.

В этой связи встает задача формирования параметров источника дискретного белого шума $w(k)$ в виде его матрицы дисперсий V по параметрам виртуального источника непрерывного белого шума $w(t)$ в виде его матрицы интенсивностей N с учетом факта перехода от

непрерывного времени к дискретному в форме $t = k(\Delta t)$, то есть задача вида

$$V = V\{N, \Delta t\}. \qquad (11.164)$$

Инструментально ставится задача добиться на выходе дискретной модели непрерывного формирующего фильтра дисперсии $\overline{D}_\xi$ окрашенного дискретного шума $\xi(k)$ при дискретном на ее входе белом шуме $w(k)$ дисперсии V такой, чтобы она равнялась дисперсии D_ξ окрашенного непрерывного шума $\xi(t)$ на выходе непрерывного формирующего фильтра, возбуждаемого виртуальным белым шумом $w(t)$ интенсивности N.Иначе говоря, решить задачу эквивалентирования источников непрерывного и дискретного белых шумов в смысле выполнения равенства $D_\xi(t)\big|_{t=k(\Delta t)} = D_\xi(k)$.

Для решения задачи сформулируем утверждение.

Утверждение 11.9 (У11.9). Для того, чтобы стохастические процессы $\xi(t)$ и $\xi(k)$, формируемые соответственно ФФ (11.106) и (11.144) были эквивалентными в смысле выполнения равенства $D_\xi(t)\big|_{t=k(\Delta t)} = D_\xi(k)$ необходимо, чтобы матрица дисперсий V удовлетворяла

$$V = \left(\overline{G}_\text{ф}^T \overline{G}_\text{ф}\right)^{-1} \overline{G}_\text{ф}^T Dz(\Delta t \overline{G}_\text{ф}^T \left(\overline{G}_\text{ф}^T \overline{G}_\text{ф}\right)^{-1}. \qquad (11.165)$$

Доказательство. Для доказательства сформируем аналитическое представление для матрицы $D_z(k+1) = M\left[z_\phi(k+1) z_\phi^T(k+1)\right]$. С этой целью на основании (11.144) сформируем выражение для вектора – строки $z_\phi^T(k+1)$

$$z_\phi^T(k+1) = z_\phi^T(k)\,\overline{\Gamma}_\phi^T + w^T(k)\,\overline{G}_\phi^T\ , \qquad (11.166)$$

$$D_z(k+1) = M\left[z_\phi(k+1) z_\phi^T(k+1)\right] = M\left[\overline{\Gamma}_\phi z_\phi(k) z_\phi^T(k) \overline{\Gamma}_\phi^T\right] + M\left[\overline{G}_\phi w(k) w^T(k) \overline{G}_\phi^T\right] +$$
$$+ M\left[\overline{\Gamma}_\phi z_\phi(k) w^T(k) \overline{G}_\phi^T\right] + M\left[\overline{G}_\phi w(k) z_\phi^T(k) \overline{\Gamma}_\phi^T\right] = \overline{\Gamma}_\phi D_z(k) \overline{\Gamma}_\phi^T + \overline{G}_\phi V \overline{G}_\phi^T, D_z(0) = 0.$$

Положим в полученное рекуррентное уравнение для матриц дисперсий условие $k = 0, D_z(0) = 0$, тогда получим

$D_z(1) = \overline{G}_\phi V \overline{G}_\phi^T$, где $D_z(1) = D_z(1\Delta t) = D_z(\Delta t)$.

Решение матричного уравнения $D_z(\Delta t) = \overline{G}_\phi V \overline{G}_\phi^T$ относительно матрицы дисперсии V дискретного «белого» шума путем умножения $D_z(\Delta t) = \overline{G}_\phi V \overline{G}_\phi^T$ слева на G_ϕ^T, а справа на G_ϕ с последующим умножением слева и справа на матрицу $\left(G_\phi^T G_\phi\right)^{-1}$ приводит к (11.165).■

Примечание 11.9 (ПР11.9). Нетрудно видеть, что значение дисперсии $D_z(\Delta t)$ может быть вычислено с помощью (11.99), если положить $t = \Delta t$, что даст

$$D_z(\Delta t) = e^{\Gamma_\phi \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\Gamma_\phi \tau} G_\phi N G_\phi^T e^{-\Gamma_\phi^T \tau} d\tau \, e^{\Gamma_\phi^T \Delta t}. \qquad (11.167)$$

Воспользуемся положениями доказанных утверждений, для формирования параметров эквивалентного дискретного “белого “ шума $w(k)$ на основе параметров N и Ω_ϕ интенсивности непрерывного “белого” шума и эффективной полосы пропускания непрерывного ФФ в виде апериодического звена первого порядка с передаточной функцией

$$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{T_\phi s + 1} = \frac{\Omega_\phi}{s + \Omega_\phi} = \frac{\Omega_\phi s^{-1}}{1 + \Omega_\phi}; \Omega_\phi =$$

Решение задачи оформим в виде процедуры

1. Представление матричных компонент исходного непрерывного ФФ в виде

$\Gamma_\phi = [-\Omega_\phi]$; $G_\phi = [\Omega_\phi]$; $P_\phi = [1]$. (11.168)

2. Представление матричных компонентов дискретного ФФ при заданном Δt: с помощью (11.75) в виде

$\overline{\Gamma}_\phi = \exp(-\Omega_\phi \Delta t)$; $\overline{G}_\phi = 1 - \exp(-\Omega_\phi \Delta t)$; $P_\phi = [1]$, (11.169)

3. Вычисление значение дисперсии $D_z(\Delta t) = D_z(t)\big|_{t=\Delta t}$ с помощью (11.99)

$$D_z(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \exp\left(-\Omega_\phi(\Delta t - \tau)\right) \Omega_\phi N \Omega_\phi \exp\left(-\Omega_\phi(\Delta t - \tau)\right) d\tau =$$

$$= N\Omega_\phi^2 \exp\left(-2\Omega_\phi \Delta t\right) \int_0^{\Delta t} \exp\left(2\Omega_\phi \tau\right) d\tau = \frac{N\Omega_\phi}{2}\left(1 - \exp\left(-2\Omega_\phi \Delta t\right)\right). \qquad (11.170)$$

4. Вычисление значения дисперсии V дискретного "белого" шума с помощью соотношений (11.165) и (11.170) дает

$$V = \frac{N\Omega_\phi}{2} \frac{\left(1 + \exp\left(-\Omega_\phi \Delta t\right)\right)}{\left(1 - \exp\left(-\Omega_\phi \Delta t\right)\right)} \qquad (11.171)$$

Из последнего выражения нетрудно видеть, что при $\Delta t \to 0$ значение V стремится к бесконечности, т. е. дискретный "белый" шум по своим свойствам приближается к непрерывному.

При моделировании стохастического дискретного процесса типа "белый" шум с матрицей дисперсии V в программной оболочке MATLAB с помощью генераторов случайных чисел возникает задача

определения коэффициента нормирования $k_н$, доставляющего требуемое значение дисперсии V. моделируемому дискретному процессу.

При решении данной задачи можно ограничиться случаями двух наиболее распространённых генераторов случайных чисел: с равномерным и нормальным распределением. Если выход генератора случайных чисел обозначить $\zeta_{ген}$, то базовое выражение для вычисления коэффициента $k_н$, примет вид

$$k_н^2 D_{\zeta ген} = V, \tag{11.172}$$

где $D_{\zeta ген}$ — дисперсия на выходе генератора случайных чисел.

Для случая равномерного распределения случайных чисел в интервале [–a , a] $k_н$, вычисляется в силу соотношения

$$k_н = \left(\frac{V}{D_{\zeta ген}}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{a} V^{1/2}. \tag{11.173}$$

При использовании генератора с нормальным распределением случайных чисел с параметром $\sigma_{ген}$ значение коэффициента $k_н$, определяется выражением

$$k_н = \frac{1}{\sigma_{ген}} V^{1/2}. \tag{11.174}$$

При моделировании ветрового воздействия выход генератора *равномерно распределенных чисел* должен быть связан со входом дискретного ФФ через линейный блок с коэффициентом передачи

$$k_н = \frac{\sqrt{3}}{a}\left(\frac{N\Omega_ф}{2} \cdot \frac{1+\exp(-\Omega_ф \Delta t)}{1-\exp(-\Omega_ф \Delta t)}\right)^{1/2}; \tag{11.175}$$

для случая генератора *нормально распределенных случайных чисел* этот коэффициент приобретает значение

$$k_н = \frac{1}{\sigma_{ген}}\left(\frac{N\Omega_ф}{2} \cdot \frac{1+\exp(-\Omega_ф \Delta t)}{1-\exp(-\Omega_ф \Delta t)}\right)^{1/2}. \quad ■(11.176)$$

Примеры и задачи

11.1. Для непрерывной динамической системы, заданной передаточной функцией $\Phi(s)$ «вход–выход» вида

$\Phi(s) = \dfrac{Y(s)}{G(s)} = \dfrac{b_0 s + b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$, построить ее ВМО в произвольном базисе $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(t)|_{t=0} = x(0) = 0, y(t) = Cx(t),$ используя значения параметров передаточной функции из наборов:

1. $b_0 = 0;\ b_1 = 1;\ a_0 = 0;\ a_1 = 0.1;\ a_2 = 1;$

2. $b_0 = 0;\ b_1 = 1;\ a_0 = 0;\ a_1 = 0.5;\ a_2 = 1;$

3. $b_0 = 0;\ b_1 = 1;\ a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = 1;$

4. $b_0 = 1;\ b_1 = 0;\ a_0 = 0;\ a_1 = 0.1;\ a_2 = 1;$

5. $b_0 = 1;\ b_1 = 0;\ a_0 = 0;\ a_1 = 0.5;\ a_2 = 1;$

6. $b_0 = 1;\ b_1 = 0;\ a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = 1;$

7. $b_0 = 0.5;\ b_1 = 0;\ a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = 1;$

8. $b_0 = 1;\ b_1 = 1;\ a_0 = 0;\ a_1 = 0.1;\ a_2 = 1;$

9. $b_0 = 1;\ b_1 = 1;\ a_0 = 0;\ a_1 = 0.5;\ a_2 = 1;$

10. $b_0 = 0;\ b_1 = 1;\ a_0 = 1;\ a_1 = 2;\ a_2 = 1;$

11. $b_0 = 0;\ b_1 = 9;\ a_0 = 1;\ a_1 = 6;\ a_2 = 9;$

12. $b_0 = 0;\ b_1 = 1;\ a_0 = 1;\ a_1 = 1.5;\ a_2 = 1;$

13. $b_0 = 0;\ b_1 = 16;\ a_0 = 1;\ a_1 = 6;\ a_2 = 16;$

14. $b_0 = 0;\ b_1 = 4;\ a_0 = 1;\ a_1 = 1;\ a_2 = 4;$

и вычислить реакцию системы на одно из непрерывных конечномерных экзогенных воздействий из примеров 10.1.1. – 10.4.4. раздела 10 по выбору преподавателя.

11.2. Для значений параметров из примеров 11.1.1 – 11.1.14 непрерывной системы при значении интервала дискретности $\Delta t = 0.1C$ сформировать ее дискретное представление

$x(k+1) = \overline{F}x(k) + \overline{G}g(k), x(k)|_{k=0} = x(0) = 0, y(k) = \overline{C}x(k)$ с тем, чтобы вычислить реакцию системы на одно из дискретных конечномерных экзогенных воздействий из примеров 10.6.1. – 10.7.4. раздела 10 по выбору преподавателя.

11.3. Вычислить матрицы дисперсий D_x, D_y соответственно векторов состояния и выхода непрерывной системы примера 11.1, а также корреляционную функцию выхода $R_y(\tau)$ и его функцию $S_y(\omega)$ спектральной плотности для вариантов 11.1.1–11.1.14 по выбору преподавателя для случая экзогенного стохастического воздействия стационарного в широком смысле типа «белый шум» $w(t)$ интенсивности $N = 1\,B^2C$.

Решение вариантов задач

<u>Решение задачи 11.3</u> (с вариантом параметров 11.1.1)

В соответствии с вариантом параметров 11.1.1 передаточная функция непрерывной системы принимает вид

$\Phi(s) = \dfrac{Y(s)}{G(s)} = \dfrac{b_1}{a_1 s + a_2} = \dfrac{1}{0.1s + 1} = \dfrac{10s^{-1}}{1 + 10s^{-1}}$; ВМО которой будет характеризоваться матрицами: $G = [10],\ F = [-10],\ C = [1]$.

Для вычисления матрицы дисперсий $D_x = M\left\{x(t)x^T(t)\right\} = M\left\{x^2(t)\right\}$ воспользуемся матричным уравнением Ляпунова (11.102)

$FD_x + D_x F^T = -GNG^T$, которое принимает вид $-10D_x + D_x(-10)^T = -10N(10)^T$, что приводит к равенствам $20D_x = 100N\big|_{N=1} = 100$, $D_x = 5B^2$.Матрица дисперсии выхода в силу (11.103) и $C = [1]$принимает вид $D_y = D_x = 5B^2$. Корреляционная матрица по вектору состояния в силу (11.104) определяется выражением $R_x(\tau) = e^{F\tau}D_x = 5e^{-10\tau}$, а по вектору выхода в силу (11.105) получает представление $R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = R_x(\tau) = 5e^{-10\tau}$. Осталось определить матрицу спектральной плотности состояния и выхода, которые в силу соотношений (11.123)–(11.124), а также матриц системы принимают вид $S_x(\omega) = -2F\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_x = \dfrac{100}{100+\omega^2}; S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = \dfrac{100}{100+\omega^2}$. ■

12*. ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Погружение в проблемную среду решений линейных матричных уравнений осуществим следующим образом. Для начала напомним, что читатель в неявной форме уже встречался с линейным матричным уравнением при рассмотрении проблем приведения подобия. Действительно, если уравнение приведения подобия $M\overline{A} = AM$ записать в эквивалентной форме $M\overline{A} - AM = 0$, то получим линейное однородное матричное уравнение относительно матрицы приведения подобия M. Однородное матричное уравнение является недоопределенным и его решение в классе не тривиальных решений весьма затруднено. Проблема решается путем модификации однородного уравнения с тем, чтобы на его основе построить неоднородное матричное уравнение относительно той же неизвестной матрицы M. Модификация его состоит в представлении матрицы A в форме $A = E - LN$ так, что *однородное* матричное уравнение подобия принимает вид *неоднородного* матричного уравнения Сильвестра $M\overline{A} - EM = -LH$, где свободно назначаемый матричный компонент: $H = \arg\{\dim(H) = \dim(L^T)\}$ определяет матрицу $N = HM^{-1}$.

В явном виде читатель встретился с матричным уравнением Сильвестра в задачах поиска реакции системы на конечномерное экзогенное воздействие и с матричным уравнением Ляпунова при поиске реакции системы на стохастическое экзогенное воздействие стационарное в широком смысле.

Встает естественный вопрос как решаются матричные уравнения? Ответ на него составляет предмет настоящего раздела. По пути заметим, что читатель встретит еще один тип матричного уравнения, именуемого матричным уравнением Риккати, использование которого в пособии не продемонстрировано. Читатель встретится с ним только в курсе теории систем, в разделе синтеза оптимального управления.

12.1 Матричные уравнения Сильвестра, Ляпунова, Риккати

Параграф начнем с установление связи между матричными уравнениями Сильвестра, Ляпунова и Риккати, решающих задачи управления и динамического наблюдения, преследующей следующие цели. Первая цель – системологическая, вторая – пользовательская, ставящая задачу унификации алгоритмического и программного обеспечения решений матричных уравнений.

Проблему связи между матричными уравнениями Сильвестра, Ляпунова и Риккати сформулируем в виде системы утверждений.

Утверждение 12.1 (У12.1). Введем в рассмотрение обобщенное уравнение Риккати

$$A^T P + PA - PBVB^T P = -Q, \qquad (12.1)$$

где $V = V^T$, $V > 0$.

Тогда уравнение Ляпунова

$$F^T P + PF = -Q \qquad (12.2)$$

с матрицами $F = A - BK$ и $F^T = A^T - K^T B^T$, где $K = R^{-1} B^T P$, совпадает с матричным уравнением Риккати (12.1) при $V = 2R^{-1}$. □

Доказательство. Для доказательства У12.1 достаточно в (12.1) положить $V = 2R^{-1}$, в (12.2) подставить $F = A - BR^{-1}B^T P$ и $F^T = A^T - PBR^{-1}B^T$, и убедиться в совпадении левых и правых частей (12.1) и (12.2). ■

Утверждение 12.2 (У12.2). Если уравнение Риккати используется для синтеза закона управления, доставляющего системе качественную экспоненциальную устойчивость, так, что оно записывается в виде

$$A^T P + PA - PBVB^T P = -\alpha P, \qquad (12.3)$$

то оно может быть сведено к уравнению Ляпунова вида

$$(A - \frac{1}{2}\alpha^{-1} I)^T P^{-1} + P^{-1}(A^T + \frac{1}{2}\alpha^{-1} I) = BVB^T. \qquad (12.4)$$

Доказательство. Умножим уравнение Риккати (12.3) слева и справа на матрицу P^{-1}, тогда получим

$$P^{-1}A^T + AP^{-1} - BVB^T = -\alpha P^{-1}$$

В полученном матричном уравнении относительно матрицы P^{-1} все члены ее содержащие разместим в левой части уравнения, а не содержащие ее – в правой, тогда получим (12.4). ■

Утверждение 12.3 (У9.3). Матрицы P и Q: $P = P^T$, $P > 0$; $Q = Q^T$, $Q > 0$ вида

$$P = (M^{-1})^T M^{-1},\ Q = -(M^{-1})^T (\Gamma + \Gamma^T) M^{-1}, \qquad (12.5)$$

где матрицы M и Γ удовлетворяют матричному уравнению Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH \qquad (12.6)$$

удовлетворяют матричному уравнению Ляпунова (12.2). □

Доказательство. Пусть матрица K обратной связи найдена в результате решения задачи модального управления так, что $K = HM^{-1}$, где M – решение уравнения Сильвестра (12.6).

Тогда подстановка $H = KM$ в (12.6) приводит к уравнению подобия

$$M\Gamma = FM, \qquad (12.7)$$

которое позволяет записать

$$F = M\Gamma M^{-1},\ F^T = (M^{-1})^T \Gamma^T M^T. \qquad (12.8)$$

Подстановка в (12.2) матриц P и Q вида (12.5), а также F и F^T вида (12.8) дает

$$\begin{aligned} F^T P + PF &= (M^{-1})^T \Gamma^T M^T (M^{-1})^T M^{-1} + (M^{-1})^T M^{-1} M\Gamma M^{-1} \\ &= (M^{-1})^T (\Gamma + \Gamma^T) M^{-1} = -Q \end{aligned}, \qquad (12.9)$$

что доказывает справедливость утверждения 12.3. ■

Примечание 12.1 (П12.1). Необходимо заметить, что матрица $-\left(\Gamma + \Gamma^{\mathrm{T}}\right)$, в которой матрица Γ имеют спектр собственных значений $\left(\lambda_i : Re(\lambda_i) < 0; i = \overline{1,n}\right)$с отрицательными вещественными частями, не в любом базисе ее представления является положительно определенной. Эта матрица является гарантировано положительно определенной, если матрица Γ является диагональной $(\Gamma = \Lambda)$ или блочно – диагональной $\left(\Gamma = \tilde{\Lambda}\right)$.Действительно в этом случае имеет место представление $-\left(\Gamma + \Gamma^T\right) = -diag\left\{2Re(\lambda_i); i = \overline{1,n}\right\}$.

Утверждение 12.4 (У12.4). Матрицы P и Q вида

$$P = (M^{-1})^T M^{-1},\ Q = -(M^{-1})^T \left\{(\Gamma + \Gamma^T) + H^T BR^{-1} B^T H\right\} M^{-1}, \qquad (12.10)$$

где матрицы Γ, M, H и R удовлетворяют модифицированному УС

$$M\Gamma - AM = -BR^{-1}B^T H,\ HM^T = I, \qquad (12.11)$$

в котором (A, B) – управляема, $(\Gamma, R^{-1}B^T H)$ – наблюдаема, а также $\sigma\{\Gamma\} \cap \sigma\{A\} = \varnothing$, удовлетворяют обобщенному уравнению Риккати (12.1) при $V = R^{-1}$. □

Доказательство. Для доказательства У12.4 сконструируем на основании (12.11) представления матриц A и A^T

$$\begin{aligned} A &= M\Gamma M^{-1} + BR^{-1}B^T (M^{-1})^T M^{-1}, \\ A^T &= (M^{-1})^T \Gamma^T M^T + (M^{-1})^T M^{-1} BR^{-1} B^T. \end{aligned} \qquad (12.12)$$

Тогда подстановка в (12.1) $V = R^{-1}$, а также представлений A и A^T (12.12) дает

$$\begin{aligned} A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P &= \left[(M^{-1})^T \Gamma^T M^T + (M^{-1})^T M^{-1} BR^{-1} B^T\right](M^{-1})^T M^{-1} + \\ &+ (M^{-1})^T M^{-1}\left[M\Gamma M^{-1} + BR^{-1}B^T (M^{-1})^T M^{-1}\right] - \\ &(M^{-1})^T M^{-1} BR^{-1} B^T (M^{-1})^T M^{-1} = (M^{-1})^T \left\{(\Gamma + \Gamma^T) + H^T BP^{-1} BH\right\} M^{-1} = -Q, \end{aligned}$$

что доказывает справедливость сформулированного утверждения. ■

Примечание 12.2 (П12.2). Управление $u = -Kx$, где $K = R^{-1}B^T HM^{-1}$ является *модальным управлением, оптимальным в смысле квадратичного функционала качества* (15.17). Это управление доставляет матрице $F = A - BK$ состояния системы структуру мод,

носителем которой является матрица Γ, и минимизирует функционал (15.17) с матрицами P и Q вида (12.10) на траекториях системы.

Таким образом, наличие установленных связей между матричными уравнениями Сильвестра, Ляпунова и Риккати обнаруживает полезную однотипность матричного формализма в задачах управления в их *многовариантной содержательной постановке*, тем не менее в зависимости от решаемой задачи алгоритмически сводящихся к решению линейного матричного уравнения вида

$$MS + RM = U \tag{12.13}$$

или

$$MS + RM = VW, \tag{12.14}$$

в которых соблюдаются соотношения размерностей матричных компонентов

$$dimM = dimS = dimR = dimU = dim(VW) = n \times n. \tag{12.15}$$

12.2 Методы прямого решения линейных матричных уравнений

Под *прямым решением* уравнений (12.13) и (12.14) понимается решение этих матричных уравнений относительно матрицы M соответственно в формах

$$M = M\{S, R, U\}, \qquad M = M\{(S,W),(R,V)\}. \tag{12.16}$$

<u>*Первым*</u> *аналитическим способом* решения матричного уравнения вида (12.13) является способ, основанный на сведении матричного уравнения к векторно–матричному с использованием *кронекеровской суммы* матриц R и S^T, в результате чего становится справедливой запись

$$\tilde{T}\tilde{M} = \tilde{U}, \tag{12.17}$$

где $\tilde{T} = R \oplus S^T = R \otimes I + I \otimes S^T$, (12.18)

$\oplus, \otimes$ - символы кронекеровских суммы и произведения матриц, n^2 – мерные векторы $\tilde{M}$ и $\tilde{U}$ имеют структуру

$$\tilde{M} = \left[M_1^T, M_2^T, ..., M_n^T\right]^T, \ \tilde{U} = \left[U_1^T, U_2^T, ..., U_n^T\right]^T, \tag{12.19}$$

M_i, U_i – i-й столбец соответственно матриц M и U, $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Решение уравнения (12.17) находится стандартным способом в форме

$$\tilde{M} = \tilde{T}^{-1}\tilde{U}. \tag{12.20}$$

Из столбца $\tilde{M}$ формируется искомая матрица $M = \left[M_1 \vdots M_2 \vdots \ \ldots \vdots M_n\right]$.

Примечание 12.3 (П12.3). Ключевым моментом реализуемости предлагаемого способа решения является обратимость матрицы $\tilde{T}$

размерности $\left(n^2 \times n^2\right)$, которая, являясь кронекеровской суммой матриц R и S^T, имеет своими собственными значениями попарные суммы собственных значений матриц R и S^T.Таким образом обратимость матрицы $\tilde{T}$ будет обеспечена, если алгебраические спектры собственных значений матриц S и $-R$ не будут пересекаться, то есть будет выполняться соотношение $\sigma\{S\} \bigcap \sigma\{-R\} = \varnothing$.

Следует также заметить, что предложенный способ не гарантирует *невырожденности* матрицы M, так как она «собирается» из элементов вектора $\tilde{M}$.

В связи с отмеченным выше прежде, чем продолжить рассмотрение способов прямого решения матричных уравнений вида (12.13) и (12.14) сформулируем условие существования *единственного невырожденного* решения этих уравнений, опираясь на представление (12.14) с декомпозированной правой частью, ограничившись случаем матриц S и R простой структуры.

Утверждение 12.5 (У9.5). Линейное матричное уравнение вида (12.14) имеет *единственное невырожденное* решение, если матричные компоненты этого уравнения удовлетворяют условиям:

– *непересекаемость* алгебраических спектров собственных значений матриц S и $-R$, то есть выполнение соотношения $\sigma\{S\} \bigcap \sigma\{-R\} = \varnothing$;

– *управляемость* пары матриц $\{R, V\}$;

– *наблюдаемость* пары матриц $\{S, W\}$.

Доказательство. Необходимость выполнения условия *непересекаемости* алгебраических спектров собственных значений матриц S и $-R$ доказана при рассмотрении *первого способа* решения матричных уравнений вида (12.14).Тем не менее, осуществим еще раз доказательство необходимости выполнения этого условия в контексте подготовки новых способов решения матричного уравнения (12.14).

Для этих целей предположим, что матрица S задана в диагональной форме $S = \Lambda_S = diag\left\{\lambda_{si};\ i = \overline{1,n}\right\}$ так, что уравнение (12.14) принимает вид $M\Lambda_S + RM = VW$.Запишем последнее матричное уравнение в виде системы векторно – матричных уравнений вида

$$M\Lambda_{Si} + RM_i = VW_i;\ i = \overline{1,n}. \tag{12.21}$$

Столбец Λ_{Si} имеет вид $\Lambda_{Si} = \left[0_{i-1}^T \mid \lambda_{si} \mid 0_{n-i}^T\right]^T$, подстановка которого в векторно–матричное уравнение (12.21) дает $(\lambda_{si}\mathrm{I} + R)M_i = VW_i,\ i = \overline{1,n}$,

откуда для матрицы M получим представление

$$M = row\left\{M_i = \left(\lambda_{si}\mathrm{I} + R\right)^{-1} VW_i;\ i = \overline{1,n}\right\}. \tag{12.22}$$

Решение матричного уравнения (12.14) в форме (12.22) возможно только при обратимости матрицы $(\lambda_{si}\mathrm{I}+R)$, что возможно только при выполнении условия $\sigma\{S\}\bigcap\sigma\{-R\}=\varnothing$.

Покажем теперь справедливость *требования управляемости пары* матриц $\{R\,,V\}$. Для этих целей воспользуемся разложением Д.Фаддеева матрицы $(\lambda_{si}\mathrm{I}+R)^{-1}$, в соответствии с которым получаем развернутое по степеням матрицы R представление

$$\left(\lambda_{si}I+R\right)^{-1}=\frac{1}{D(\lambda_{si})}\left[D_{n-1}(\lambda_{si})I+D_{n-2}(\lambda_{si})R+D_{n-3}(\lambda_{si})R^2+\ldots+D_0(\lambda_{si})R^{n-1}\right],\quad(12.23)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&D(\lambda_{si})=det(\lambda_{si}I+R)=\lambda_{si}^{n}+a_1\lambda_{si}^{n-1}+a_2\lambda_{si}^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda_{si}+a_n;\\
&D_{n-1}(\lambda_{si})=\lambda_{si}^{n-1}+a_1\lambda_{si}^{n-2}+\ldots+a_{n-2}\lambda_{si}+a_{n-1};\\
&D_{n-2}(\lambda_{si})=\lambda_{si}^{n-2}+a_1\lambda_{si}^{n-3}+\ldots+a_{n-3}\lambda_{si}+a_{n-2};\\
&\vdots\\
&D_1(\lambda_{si})=\lambda_{si}+a_1;\\
&D_0(\lambda_{si})=1.
\end{aligned}\right\}.\qquad(12.24)$$

Введем обозначения

$$\vec{D}_j(\lambda_{si})=\frac{D_j(\lambda_{si})}{D(\lambda_{si})};\;\; j=\overline{0,n-1}.\qquad(12.25)$$

В результате для $(\lambda_{si}\mathrm{I}+R)^{-1}$ получаем запись

$$\left(\lambda_{si}I+R\right)^{-1}=\left[\mathrm{I}\,|\,R\,|\,R^2\,|\ldots|\,R^{n-1}\right]col\left\{\overline{D}_j(\lambda_{si});\; j=\overline{n-1,0}\right\}.\qquad(12.26)$$

Подстановка (12.26) в (12.22) дает для матрицы M

$$M=\left[V\,|\,RV\,|\ldots|\,R^{n-1}V\right]row\left\{col\left[\overline{D}_j(\lambda_{si})W_i;\; j=\overline{n-1,0}\right];\; i=\overline{1,n}\right\}.\qquad(12.27)$$

Из (12.27) следует, что матрица M оказывается невырожденной, то есть $\exists M^{-1}$, если $rang\left[V\,|\,RV\,|\ldots|\,R^{n-1}V\right]=n$, то есть если пара матриц $\{R\,,V\}$ *управляема*.

Для целей дальнейших исследований транспонируем матричное уравнение (12.14), тогда получим

$$M^TR^T+S^TM^T=W^TV^T.\qquad(12.28)$$

Теперь сделаем предположение, что матрица R задана в диагональной форме $R=\Lambda_R=diag\left\{\lambda_{Ri};\; i=\overline{1,n}\right\}$ так, что уравнение (12.28) принимает вид $M^T\Lambda_R+S^TM^T=W^TV^T$.

Запишем последнее матричное уравнение в виде системы векторно – матричных уравнений вида

$$M^T\Lambda_{Ri}+S^TM_i^{\,T}=W^TV_i^{\,T};\, i=\overline{1,n}.\qquad(12.29)$$

Столбец Λ_{Ri} имеет вид $\Lambda_{Ri} = \left[0_{i-1}^T \mid \lambda_{Ri} \mid 0_{n-i}^T\right]^T$, подстановка которого в векторно – матричное уравнение (12.29) дает $(\lambda_{Ri}\mathrm{I} + S^T)M_i = W^T V_i^T$, $i = \overline{1,n}$, откуда для матрицы M^T получим представление

$$M^T = row\left\{M_i^T = \left(\lambda_{Ri}\mathrm{I} + S^T\right)^{-1} W^T V_i^T;\ i = \overline{1,n}\right\}. \qquad (12.30)$$

Решение матричного уравнения (12.14) в форме (12.30) возможно только при обратимости матрицы $(\lambda_{Ri}\mathrm{I} + S^T)$, что возможно только при выполнении условия $\sigma\{S\} \cap \sigma\{-R\} = \varnothing$.

Покажем теперь справедливость *требования наблюдаемости пары* матриц $\{S, W\}$. Для этих целей воспользуемся разложением Д.Фаддеева матрицы $(\lambda_{Ri}\mathrm{I} + S^T)^{-1}$, в соответствии с которым получаем развернутое по степеням матрицы S^T представление

$$\left(\lambda_{Ri} I + S^T\right)^{-1} = \frac{1}{D(\lambda_{Ri})}\left[D_{n-1}(\lambda_{Ri})I + D_{n-2}(\lambda_{Ri})S^T + D_{n-3}(\lambda_{Ri})S^{T2} + \ldots + D_0(\lambda_{Ri})S^{T(n-1)}\right],$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&D(\lambda_{Ri}) = det(\lambda_{Ri} I + S^T) = \lambda_{Ri}^n + a_1\lambda_{Ri}^{n-1} + a_2\lambda_{Ri}^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda_{Ri} + a_n;\\
&D_{n-1}(\lambda_{Ri}) = \lambda_{Ri}^{n-1} + a_1\lambda_{Ri}^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\lambda_{Ri} + a_{n-1};\\
&D_{n-2}(\lambda_{Ri}) = \lambda_{Ri}^{n-2} + a_1\lambda_{Ri}^{n-3} + \ldots + a_{n-3}\lambda_{Ri} + a_{n-2};\\
&\vdots\\
&D_1(\lambda_{Ri}) = \lambda_{Ri} + a_1;\\
&D_0(\lambda_{Ri}) = 1.
\end{aligned}\right\}. \qquad (12.31)$$

Введем обозначения

$$\bar{D}_j(\lambda_{Ri}) = \frac{D_j(\lambda_{Ri})}{D(\lambda_{Ri})};\ \ j = \overline{0, n-1}. \qquad (12.32)$$

В результате для $(\lambda_{Ri}\mathrm{I} + S^T)^{-1}$ получаем запись

$$\left(\lambda_{Ri} I + S^T\right)^{-1} = \left[\mathrm{I} \mid S^T \mid S^{T2} \mid \ldots \mid S^{T(n-1)}\right] col\left\{\bar{D}_j(\lambda_{Ri});\ j = \overline{n-1, 0}\right\} \qquad (12.33)$$

Подстановка (12.33) в (12.30) дает для матрицы M^T

$$M^T = \left[W^T \mid S^T W^T \mid \ldots \mid S^{T(n-1)} W^T\right] row\left\{col\left[\bar{D}_j(\lambda_{Ri}) V_i^T;\ j = \overline{n-1, 0}\right];\ i = \overline{1,n}\right\}. \qquad (12.34)$$

Из (12.34) следует, что матрица M оказывается невырожденной, то есть $\exists M^{-1}$, если $rang\left[W^T \mid S^T W^T \mid \ldots \mid S^{T(n-1)} W^T\right] = n$, то есть если пара матриц $\{S, W\}$ *наблюдаема*. ■

Примечание 12.4 (П12.4). В процессе доказательства утверждения 12.5 сформированы два *аналитических способа* решения матричного

уравнения (12.14), представленных соотношениями (12.22) и (12.30), которые соответственно названы <u>*вторым*</u> и <u>*третьим*</u>.

<u>*Четвертый*</u> *(поэлементный) способ* решения уравнений (12.13), (12.14).

При этом способе решения уравнения (12.13) строятся n^2 скалярных соотношений вида

$$M^i S_j + R^i M_j = U_{ij}, \tag{12.35}$$

где $M^i, R^i - i$-е строки матрицы M и R, $S_j, M_j - j$-е столбцы матриц S и M , $U_{ij} - (i, j)$-ый элемент матрицы U. В результате приведения подобных членов получается система содержащая n^2 условий для n^2 неизвестных M_{ij} матрицы M, которая решается стандартными методами линейной алгебры.

<u>*Пятый*</u> *способ* (с использованием итеративной процедуры)

Рассмотрим матрицу $Z(t)$, определяемую решением дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Z}(t) = RZ + ZS - U, \quad Z(0). \tag{12.36}$$

Прямой подстановкой в выражение (12.36) нетрудно убедиться, что решение уравнения имеет вид $Z(t) = e^{Rt} Z(0) e^{St} - \int_0^t e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau$.

Если $\lim_{t\to\infty} e^{Rt} Z(0) e^{St} = 0$, то очевидно, что

$$M = \lim_{t\to\infty} Z(t) = -\int_0^\infty e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau. \tag{12.37}$$

Построим суммарное приближение интегрального выражения (12.37) в виде

$$\int_0^\infty e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau = \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{\infty} e^{Rhk} U e^{Shk}. \tag{12.38}$$

Если для матричных экспонент использовать аппроксимацию Е. Девисона:

$$e^{Rh} = \Gamma_R = [12I - 6hR + h^2R^2]^{-1}[12I + 6hR + h^2R^2]$$

$$e^{Sh} = \Gamma_S = [12I - 6hS + h^2S^2]^{-1}[12I + 6hS + h^2S^2],$$

то получим

$$e^{Rhk} = \Gamma_R^K, \; e^{Shk} = \Gamma_S^k.$$

Для суммарного представления интеграла можно записать

$$\int_0^\infty e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} h \Gamma_R^k U \Gamma_S^k.$$

Введем в рассмотрение частичную сумму

$$M(\nu) = -\sum_{k=0}^{\nu} h\Gamma_R^k U \Gamma_S^k = -h[U + \Gamma_R U \Gamma_S + \ldots + \Gamma_R^\nu U \Gamma_S^\nu]$$

На базе частичной суммы нетрудно построить рекуррентную процедуру

$$M(\nu+1) = M(\nu) - \Gamma_R^{\nu+1}(hU)\Gamma_S^{\nu+1}, \quad M(0) = -hU \qquad (12.39)$$

Тогда искомая матрица M найдется в результате предельного перехода

$$M = \lim_{\nu\to\infty} M(\nu)$$

Алгоритм 12.1 (А12.1)

решения уравнения (12.13) *<u>пятым</u>* *способом* принимает следующий вид:

1.Выбор шага дискретизации h из условия

$$h \le \frac{\alpha}{|\lambda_{\max}|}, \ \lambda_{\max} = \max_{i,j}(\lambda_i, \lambda_j),$$

где λ_i – собственные значения матрицы R; λ_j – собственные значения матрицы S; α – константа;

2. Вычисление матриц Γ_R, Γ_S;

3. Вычисление матрицы $M(0) = -hU$;

4. Для шагов рекуррентной процедуры $\nu = 1,2,\ldots$ вычисление матрицы

$$M(\nu+1) = M(\nu) - \Gamma_R[\Gamma_R^\nu(hU)\Gamma_S^\nu]\Gamma_S;$$

5. Останов рекуррентной процедуры на основании удовлетворения неравенству

$$\|\Delta(\nu)\| = \|M(\nu+1) - M(\nu)\| \le \varepsilon$$

где ε рекомендуется выбирать в пределах от 10^{-7} до 10^{-5}; в качестве правила останова можно использовать условие

$$|tr\Delta(\nu)| = \left|\sum_{i=1}^{m} \Delta_{ii}(\nu)\right| \le \varepsilon.$$

Рассмотренные способы решения матричных уравнений (12.13), (12.14) не исчерпывают весь банк способов, с некоторыми из них можно ознакомиться в приводимой литературе.

Следует также добавить, что в случае, если правые части матричных уравнений (12.13) и (12.14) оказываются нулевыми, то они превращаются в однородные матричные уравнения тем самым становятся *матричными условиями подобия* матриц S и $-R$, поэтому *алгебраическим условием* нетривиального решения этих уравнений в оговоренном случае является *совпадение* алгебраических спектров собственных значений матриц S и $-R$.

Также необходимо отметить проблему вычислительной устойчивости рассмотренных матричных уравнений, которую можно проконтролировать с помощью $C\{МУ\}$ – числа обусловленности

«матричного уравнения» вида (12.13), (12.14), вычисляемого в силу соотношения

$$C\{МУ\} = \max_{i,j}\{\alpha_i(S) + \alpha_j(R)\}\left[\min_{i,j}\{\alpha_i(S) + \alpha_j(R)\}\right]^{-1}, \qquad (12.40)$$

где $\alpha(*)$ - сингулярное число матрицы $*$.

В заключение следует сказать, что в настоящее время самым эффективным способом решения матричных уравнений (12.13) (Ляпунова) и (12.14) (Сильвестра) является способ, использующий оператор «*lyap*» в программной оболочке MatLab, который для уравнения (12.13) имеет запись $M = lyap(S, R, U)$.

12.3 Инверсное решение линейных матричных уравнений

В основу *инверсного способа* решения матричных уравнений вида (12.13),(12.14) положено то соображение, что матрица M есть *матрица преобразования базисов*, банк которых для случаев приведения произвольных матриц к каноническим формам S, в алгебраической и по использованию метода пространства состояния библиографии довольно обширен, часть которых приведена в разделе 4.

Под *инверсным решением* уравнений (12.13) и (12.14) понимается решение этих матричных уравнений относительно матрицы U в форме

$$U = U\{S, R, M\} \qquad (12.41)$$

применительно к уравнению (12.13) и в формах

$$W = W\{S, R, V, M\}, \qquad (12.42)$$

$$V = V\{S, R, W, M\} \qquad (12.43)$$

применительно к матричному уравнению (12.14). Причем *инверсное* решение матричного уравнения (12.14) в форме (12.42) используется в основном в *задачах управления*, а в форме (12.43) – в *задачах наблюдения.*

Инверсный способ решения матричных уравнений вида (12.13),(12.14) не всегда реализуем. Сформулируем условия реализуемости инверсного способа решения матричных уравнений вида (12.13),(12.14).

Применительно к матричному уравнению (12.13), которое в задачах *исследования устойчивости и динамических свойств систем при стохастических экзогенных воздействиях* стационарных в широком смысле принимает вид матричного уравнения Ляпунова, эти условия принимают вид.

Условие 12.1 (УС12.1). Условие разрешимости матричного уравнения (12.13), используемого в *задачах исследования устойчивости* непрерывных систем в форме уравнения Ляпунова,

состоит в том, чтобы матрица $\{-(MS+RM)\}$ размерности $(n\times n)$ была *симметричной и положительно определенной*, то есть имела n положительных собственных значений.

Условие 12.2 (УС12.2). Условие разрешимости матричного уравнения (12.13), используемого в *задачах исследования динамических свойств непрерывных систем при стохастических экзогенных воздействиях* стационарных в широком смысле в форме уравнения Ляпунова, состоит в том, чтобы матрица $\{-(MS+RM)\}$размерности $(n\times n)$ была *симметричной, положительно полуопределенной* и имела ранг, равный рангу матрицы входа системы.

Применительно к матричному уравнению (12.14), которое в задачах *синтеза формирователей сигналов управления и устройств динамического наблюдения* принимает вид матричного уравнения Сильвестра, эти условия принимают вид.

Условие 12.3 (УС12.3). Условие разрешимости матричного уравнения (12.14) в форме (12.42), используемого в задачах *синтеза формирователей сигналов управления* в форме уравнения Сильвестра, состоит в том, чтобы столбцы $\{(MS+RM)\}_i$ матрицы $\{(MS+RM)\}$ размерности $(n\times n)$ принадлежали *образу* матрицы V

$$\{(MS+RM)\}_i \in Jm\{V\}; i=\overline{1,n}. \qquad (12.44)$$

В случае выполнения условия 12.3 в форме (12.44) решение (12.42) уравнения (12.14) относительно матрицы W представимо в форме

$$W=\left(V^TV\right)^{-1}V^T(MS+RM). \qquad (12.45)$$

Условие 12.4 (УС12.4). Условие разрешимости матричного уравнения (12.14) в форме (12.43), используемого в задачах *синтеза устройств динамического наблюдения* в форме уравнения Сильвестра, состоит в том, чтобы столбцы матрицы $\{(M^TR^T+S^TM^T)\}$ размерности $(n\times n)$ принадлежали *образу* матрицы W^T

$$\{(M^TR^T+S^TM^T)\}_i \in Jm\{W^T\}; i=\overline{1,n}. \qquad (12.46)$$

В случае выполнения условия 12.4 в форме (12.46) решение (12.43) уравнения (12.14) относительно матрицы V представимо в форме

$$V=(MS+RM)W^T\left(WW^T\right)^{-1}. \qquad (12.47)$$

Примеры и задачи

12.1.* Определить, разрешимо ли матричное уравнение $MS+RM=U$ относительно матрицы M, если матрицы S, R и U принимают значения

$$U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix};\ -R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix}.$$

12.2.Определить, разрешимы ли матричные уравнения вида $MS+RM=U$ относительно матрицы M, а в случае разрешимости решить первым способом при:

а) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 10 & 7\end{bmatrix};$

б) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 0 & -5\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}0 & 10\\ -1 & 7\end{bmatrix};$

в) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -5\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 7 & -1\end{bmatrix};$

г) $U=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};$

д) $U=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 10\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & 9\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}4 & 0{,}707\\ 0{,}707 & 3\end{bmatrix}.$

12.3. Решить матричное уравнение $MS+RM=U$, используя кронекеровское произведение матриц и приведение уравнения к векторно – матричному виду для матриц S, R и U из примеров а) - д) задачи 12.2.

12.4. Используя матричное уравнение (12.12), найти матрицы модального преобразования M, приводящие к диагональному виду следующие матрицы.

а) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix};$ б) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix};$ в) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & -2\end{bmatrix};$

г) $\begin{bmatrix}-5 & 2 & -5\\ -2 & -1 & -8\\ 2 & -3 & -2\end{bmatrix};$ д) $\begin{bmatrix}6 & 3 & 8\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix};$ е) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix};$

ж) $\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ 4 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix};$ з) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & -6 & -4\\ -1 & 4 & 7\end{bmatrix};$ и) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 3\\ -4 & 2 & -1\end{bmatrix}.$

12.5. Путем перестановки произвольных столбцов матрицы преобразования M убедиться, что в диагональных матрицах, подобных матрицам а)$\div$и) задачи 12.4, происходит согласованная с перестановкой столбцов перестановка собственных чисел на диагонали.

12.6. Найти матрицу преобразования подобия M для следующих пар подобных матриц:

а) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & 81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{bmatrix}$

д) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{bmatrix}$;

е) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{bmatrix}$;

ж) $\begin{bmatrix} 6 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12.7. Используя формулу (12.24) для матрицы M, решить матричное уравнение (12.6) частного вида (12.10), где матрица Γ – диагональная матрица, для следующих композиций спектра $\sigma\{\Gamma\}$ матрицы Г, и значений матрицы A, B, H:

а) $\sigma\{\Gamma\} = \{2, -5\}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\sigma\{\Gamma\} = \{-3, -4\}$, $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$;

в) $\sigma\{\Gamma\} = \{-1, -2, -6\}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

г) $\sigma\{\Gamma\} = \{-2, -4, -6\}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\sigma\{\Gamma\} = \{-1, -3, -5\}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

е) $\sigma\{\Gamma\} = \{-3,-7,-11\}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение вариантов задач

Задача12.1. Определить, разрешимо ли матричное уравнение $MS + RM = U$ относительно матрицы *M*, если матрицы *S*, *R* и *U* принимают значения

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ S = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix};\ -R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

Решение. Как указывалось в раздела, уравнение (12.13) при нулевой правой части имеет нетривиальное решение $M \neq 0$ в случае, если спектры матрицы *S* и –*R* совпадают, т.е. $\sigma\{S\} = \sigma\{-R\}$. Таким образом, первым шагом решения задачи является установление факта совпадения спектров матриц *S* и –*R* . Характеристические уравнения матриц *S* и –*R* принимают вид

$$\det(\lambda I - S) = \det\left[\begin{array}{c|c} \lambda+5 & 0 \\ \hline -4 & \lambda+2 \end{array}\right] = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0,$$

$$\det(\lambda I + R) = \det\left[\begin{array}{c|c} \lambda & -1 \\ \hline 10 & \lambda+7 \end{array}\right] = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Из приведенных характеристических уравнений матриц *S* и –*R* видно, что они идентичны, а, следовательно, спектры матриц совпадают. Таким образом, уравнение $MS + RM = 0$ имеет нетривиальное решение. Найдем матрицу M, используя *четвертый* (поэлементный) способ. Уравнения $MS + RM = 0$ в поэлементной форме запишется:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы и сложив их поэлементно, получим матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} -5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} & -2m_{12} - m_{22} \\ 2m_{21} + 10m_{11} + 4m_{22} & 10m_{12} + 5m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если две матрицы равны, то равны их элементы с одинаковыми индексами, в силу чего для элементов матриц M получим систему скалярных соотношений

$$-5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} = 0,\ \ -2m_{12} - m_{22} = 0;$$

$$2m_{21} + 10m_{11} + 4m_{22} = 0,\ 10m_{12} + 5m_{22} = 0.$$

Очевидно, что число линейно независимых условий в полученной системе только два. Воспользуемся первыми двумя соотношениями $-5m_{11}+4m_{12}-m_{21}=0;\ \ -2m_{12}-m_{22}=0.$

Система уравнений относительно элементов матрицы M оказалось недоопределенной, так как содержит два уравнения относительно четырех неизвестных. Зададим два недостающих условия, положив, к примеру, $m_{11}=1, m_{12}=1$. Матрица M в результате принимает вид

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}.$$

Матрица M^{-1}, обратная M, равняется $M^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$.

Покажем, что матрицы S и R, связанные друг с другом матричным уравнением (12.13), при известных матрицах M и M^{-1} могут быть найдены друг из друга с помощью отношений подобия:

$$S=-M^{-1}RM,\ R=-MSM^{-1}.$$

Действительно,

$$-M^{-1}RM=-\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 10 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}=S$$

и, наоборот,

$$-MSM^{-1}=-\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 10 & 7\end{bmatrix}=R.$$

В заключение заметим, что произвольность назначения двух элементов матрицы M не сказалось на выполнении соотношения подобия, т.е. на связи матрицы S и R. Положим теперь $m_{11}=3$ и $m_{12}=5$, в этом случае матрицы M и M^{-1} принимают вид

$$M=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & -10\end{bmatrix},\ M^{-1}=\begin{bmatrix}2/11 & 1/11\\ 1/11 & -3/55\end{bmatrix}.$$

Используя соотношения подобия матриц S и $-R$, для последних получаем

$$-M^{-1}RM=-\begin{bmatrix}2/11 & 1/11\\ 1/11 & -3/55\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 10 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}=S,$$

$$-MSM^{-1}=-\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/11 & 1/11\\ 1/11 & -3/55\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 10 & 7\end{bmatrix}=R. \quad \blacksquare$$

13*. МОДЕЛИ ТРАЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

Рассмотренные в предыдущих разделах модели непрерывных и дискретных динамических объектов строились на гипотезах точного знания их параметров и неизменяемости в течение их функциональной эксплуатации. Однако эти гипотезы являются очень сильными и являются мечтой исследователя и в реальности не всегда выполняются.

Известно, что знание о любом объекте исследования всегда являются неполными. Известно также, что все течет, все изменяется. Это относится и к динамическим объектам и системам, а это значит, что встает задача оценки влияния неточности исходного знания и изменение параметров объектов должно быть как-то учтено в модельной среде. На этот вопрос частично отвечает теория параметрической чувствительности. При этом наибольшей наглядностью обладает аппарат функций траекторной чувствительности, применимый как к непрерывным, так и дискретным по времени динамическим процессам.

13.1. Модели траекторной параметрической чувствительности непрерывных динамических объектов и систем

Аппарат функций траекторной чувствительности (ФТЧ) в своей первичной постановке строился так, чтобы дать разработчикам возможность наблюдать дополнительное движение динамической системы или объекта, порожденное вариациями параметров их функциональных компонентов относительно их номинальных значений, оценивать влияние этого движения на качественные показатели системы.

В связи с тем, что наблюдение дополнительного движения осуществляется с помощью дополнительной динамической системы с фиксированными параметрами, именуемой моделью траекторной чувствительности (МТЧ), аппарат дает возможность разработчику при формировании объекта управления, представляющего собой функциональное объединение физического (технологического) процесса, регулирующих органов и устройств измерения компонентов вектора состояния и выхода, сравнивать конфигурации ОУ на предмет оценки потенциальной стабильности показателей качества проектируемой системы в условиях неопределенности параметров. Анализ управляемости составной системы «номинальный ОУ – МТЧ» по выходу модели траекторной чувствительности с помощью аппарата матриц управляемости по состоянию и выходу МТЧ позволяет ранжировать параметры по степени достижимости стабильности показателей качества систем с использованием возможностей

неадаптивных алгоритмов управления, рационально распределять ресурсы управления, решать задачу «оптимального номинала» агрегатов ОУ. Применительно к спроектированной системе аппарат ФТЧ позволяет как на траекторном, так и на структурном уровне оценивать эффект введения в состав системы устройств управления (УУ) в условиях параметрической неопределенности, проводить сравнения альтернативных вариантов УУ. Применение аппарата функций траекторной чувствительности к дискретным динамическим системам дает возможность как траекторно, так и структурно оценивать влияние таких чисто «дискретных» параметров, как интервал дискретности и запаздывания вывода из микроЭВМ вычисленного управления.

Для введения аппарата траекторной чувствительности рассмотрим непрерывную динамическую систему, которая характеризуется вектором состояния $x \in R^n$, вектором выхода $y \in R^m$, а также вектором q квазистационарных параметров $(\dot{q}(t) = 0)$, который претерпевает вариацию Δq относительно вектора q_0 *номинальных значений параметров* так, что $q = q_0 + \Delta q, q \in R^P$. Чтобы обеспечить прозрачность трактовки результатов, будем использовать безразмерную форму представления элементов q_j вектора параметров q $(j = \overline{1, p})$.

Полное движение динамической системы для случая произвольного значения вектора q параметров по состоянию и выходу может быть представлено в форме

$$x(t, q = q_0 + \Delta q) = x(t) + \Delta x(t, q_0, \Delta q), \tag{13.1}$$

$$y(t, q = q_0 + \Delta q) = y(t) + \Delta x(t, q_0, \Delta q), \tag{13.2}$$

где $x(t) \overset{\Delta}{=} x(t, q_0); y(t) \overset{\Delta}{=} y(t, q_0)$. В выражениях (13.1), (13.2) $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой *номинальные* траектории непрерывной динамических объекта или системы соответственно по состоянию и выходу, $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$– *дополнительные движения* объекта или системы по состоянию и выходу, определяемые вариацией Δq, а также номинальным значением q_0 вектора параметров. Будем полагать справедливыми две гипотезы: *первая* – о малости $\|\Delta q\|$ нормы вариации Δq вектора параметров, *вторая* – о непрерывной дифференцируемости по вектору параметров q в точке $q = q_0$ траекторий $x(t, q)$ и $y(t, q)$ в каждый момент времени. Тогда (13.1) и (13.2) принимают вид

$$x(t, q) = x(t) + \frac{\partial x(t, q)}{\partial q}\Big|_{q=q_0} \Delta q + O_x^2(\Delta q), \tag{13.3}$$

$$y(t,q)=y(t)+\frac{\partial y(t,q)}{\partial q}\Big|_{q=q_0}\Delta q+O_y^2(\Delta q), \tag{13.4}$$

в которых выполняются соотношения

$$\lim_{\|\Delta q\|\to 0}\frac{\|O_x^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|}=0;\ \lim_{\|\Delta q\|\to 0}\frac{\|O_y^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|}=0. \tag{13.5}$$

Если воспользоваться (13.3)–(13.5), то для дополнительных движений $\Delta x(t,q_0,\Delta q)$ и $\Delta y(t,q_0,\Delta q)$ параметрически возмущенной системы можно записать:

$$\Delta x(t,q_0,\Delta q)=\Sigma(t)\Delta q, \tag{13.6}$$

$$\Delta y(t,q_0,\Delta q)=\Xi(t)\Delta q. \tag{13.7}$$

Матрицы Якоби вида $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$ именуются *матрицами траекторной чувствительности* непрерывной системы соответственно по состоянию и выходу, и столбцовая форма их записи имеет вид

$$\Sigma(t)=row\left\{\sigma_j(t)\overset{\Delta}{=}\frac{\partial x(t,q)}{\partial q_j}|_{q=q_0};\ j=\overline{1,p}\right\}, \tag{13.8}$$

$$\Xi(t)=row\left\{\eta_j(t)\overset{\Delta}{=}\frac{\partial y(t,q)}{\partial q_j}|_{q=q_0};\ j=\overline{1,p}\right\}, \tag{13.9}$$

где $\sigma_j(t)$ и $\eta_j(t)$ являются *функциями траекторной чувствительности* первого порядка (в дальнейшем – просто функциями траекторной чувствительности) по состоянию и выходу.

Заметим, что если известны матрицы чувствительности $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$ непрерывной динамической системы для любого t, то основные задачи анализа параметрической неопределенности в традиционной постановке могут быть решены. Причем, если достаточно решения задачи в экстремальной версии, в *форме мажорант и минорант* дополнительных движений, то эффективным инструментом здесь оказывается сингулярное разложение матрицы траекторной чувствительности $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$. В пространстве траекторий для любого t максимальное $\alpha(*)_M(t)$ и минимальное $\alpha(*)_m(t)$ сингулярные числа матрицы $(*)(t)$, задают значение нормы максимальной и минимальной полуосей элипсоидных покрытий дополнительных движений (13.6) и (13.7), порожденных сферой $\|\Delta q\|=1$, а элементы правого сингулярного базиса матрицы $(*)(t)$ задают сочетания вариаций параметров, порождающие максимальную и минимальную полуоси этого покрытия.

Конструирование модели траекторной чувствительности проиллюстрируем на примере линейного непрерывного ОУ, матричные компоненты модельного представления которого зависят от вектора параметров q.

$$\dot{x}(t,q)=\mathrm{A}(q)x(t,q)+\mathrm{B}(q)u(t);\ x(0,q)=x(0);\ y(t,q)=C(q)x(q)(t,q), \quad (13.10)$$

где $x\in R^n, u\in R^r, y\in R^m \forall q,t$. Продифференцируем выражение (13.10) по j-му компоненту q_j вектора параметров q в точке $q=q_0$. Поменяем порядок дифференцирования по времени t и параметру q_j в левой части первого уравнения (13.10) так, что получим цепочку равенств

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\dot{x}(t,q)\right)\Big|_{q=q_0}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dx(t,q)}{dt}\right)\Big|_{q=q_0}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x(t,q)}{\partial q_j}\right)\Big|_{q=q_0}=\dot{\sigma}_j(t), \quad (13.11)$$

а также введем обозначения

$$A_{q_j}\overset{\Delta}{=}\frac{\partial A(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0};\ B_{q_j}\overset{\Delta}{=}\frac{\partial B(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0};\ C_{q_j}\overset{\Delta}{=}\frac{\partial C(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0}, \quad (13.12)$$

$$A(q)\big|_{q=q_0}=A;\ B(q)\big|_{q=q_0}=B;\ C(q)\big|_{q=q_0}=C, \quad (13.13)$$

$$x(t,q)\big|_{q=q_0}=x(t);\ y(t,q)\big|_{q=q_0}=y(t). \quad (13.14)$$

Теперь для j-й модели траекторной чувствительности получим представление

$$\dot{\sigma}_j(t)=A\sigma_j(t)+A_{q_j}x(t)+B_{q_j}u(t);\ \eta_j=C\sigma_j(t)+C_{q_j}x(t), \quad (13.15)$$

МТЧ (13.15) будет генерировать функции траекторной чувствительности $\sigma_j(t)$ по состоянию и $\eta_j(t)$ по выходу, если ее дополнить моделью номинального ОУ (см. рисунок 13.1), полученной из (13.10) при $q=q_0$:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t);\ x(0);\ y(t)=Cx(t). \quad (13.16)$$

Нетрудно видеть из (13.10) и (13.16), что динамическая модель дополнительных движений (13.6) и (13.7) с точностью до мультипликативной составляющей Δq_j $j=\overline{1,p}$ по выходам $\sigma_j(j)$ и $\eta_j(t)$ совпадает системой из p МТЧ (13.15).

Анализ возможности сведения дополнительных движений к нулю хотя бы в асимптотике сводится к анализу управляемости МТЧ вида (13.15). Для этих целей сконструируем агрегированную систему с составным вектором $\tilde{x}_j=col\{x,\sigma_j\}$ размерности $\dim\tilde{x}=2n$, которая

объединением (13.15) и (13.16), получает векторно-матричное представление

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \tilde{A}_j \tilde{x}_j(t) + \tilde{B}_j u(t);\ \tilde{x}_j(0) = col\{x(0), 0\} \tag{13.17}$$

$$x(t) = \tilde{C}_{xj} \tilde{x}_j(t);\ y(t) = \tilde{C}_j \tilde{x}_j(t);\ \sigma_j(t) = \tilde{C}_{\sigma j} \tilde{x}_j(t);\ \eta_j(t) = \tilde{C}_{\eta j} \tilde{x}_j(t) \tag{13.18}$$

где

$$\tilde{A}_j = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_j} & A \end{bmatrix};\quad \tilde{B}_j = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_j} \end{bmatrix}; \tag{13.19}$$

$$\tilde{C}_{x_j} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix};\ \tilde{C}_j = \begin{bmatrix} C & 0_{m\times n} \end{bmatrix};\ \tilde{C}_{\sigma_j} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \end{bmatrix};\ \tilde{C}_{\eta_j} = \begin{bmatrix} C_{q_j} & C \end{bmatrix}. \tag{13.20}$$

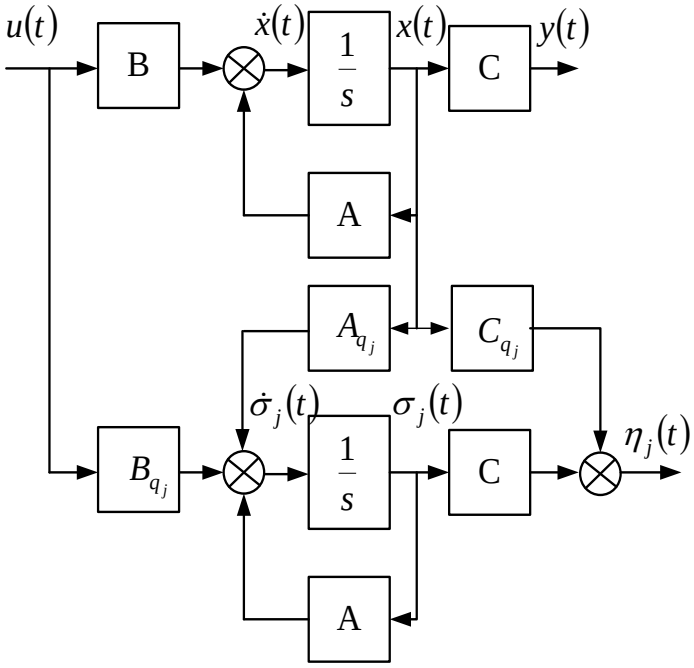


Рисунок 13.1 Модель траекторной чувствительности, дополненная моделью номинального ОУ

Если провести агрегирование номинального ОУ (13.16) и всех p МТЧ (13.15) путем введения вектора $\tilde{x} = col\{x, \sigma_j;\ j = \overline{1, p}\}$ размерности $\dim \tilde{x} = (p+1)n$, то векторно-матричное представление такой системы получает вид

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t);\ \tilde{x}(0) = col\{x(0), \sigma_j(0) = 0;\ j = \overline{1, p}\}, \tag{13.21}$$

$$x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t);\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t);\ \sigma(t) = \tilde{C}_\sigma \tilde{x}(t);\ \eta(t) = \tilde{C}_\eta \tilde{x}(t), \tag{13.22}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times np} \\ col\{A_{qj};\ j = \overline{1, p}\} & diag\{\tilde{A}_{jj} = A;\ j = \overline{1, p}\} \end{bmatrix}, \tag{13.23}$$

$$\tilde{B} = col\{B, B_{aj};\ j = \overline{1, p}\};\ \tilde{C}_x = row\left[\, I_{n\times n} \quad 0_{n\times np} \,\right], \tag{13.24}$$

$$\tilde{C} = row\left[\, C \quad 0_{m\times pn} \,\right];\ \tilde{C}_\sigma = \left[\, 0_{np\times n} \quad I_{np\times np} \,\right], \tag{13.25}$$

$$\tilde{C}_\eta = \left[\, col\,\{C_{qj};\ j = \overline{1, p}\} \quad diag\{C_{\eta jj} = C;\ j = \overline{1, p}\} \,\right], \tag{13.26}$$

$$\sigma(t) = col\{\sigma_j(t);\ j = \overline{1, p}\};\ \eta(t) = col\{\eta_j(t);\ j = \overline{1, p}\}. \tag{13.27}$$

Нетрудно видеть, что с ростом числа варьируемых параметров заметно растет размерность $\dim \tilde{x} = (p+1)n$ агрегированной системы (13.21), (13.22), что может породить проблемы вычислительной устойчивости. В этой связи аддитивная природа дополнительных движений по состоянию (13.06) и выходу (13.07) позволяет p раз воспользоваться агрегированной системой (13.17), (13.18) размерности $\dim \tilde{x}_j = 2n$ для всех $j = \overline{1, p}$.

Для оценки достижимости нулевой траекторной чувствительности к вариациям параметра q_j $(j = \overline{1, p})$, а также ранжирования параметров по возможным затратам ресурсов управления для достижения нечувствительности траектории проектируемой системы к этим вариациям проведем анализ управляемости системы (13.17), (13.18) по вектору состояния σ_j МТУ и ее выходу η_j. Первая задача решается на тройке матриц $(\tilde{C}_{\sigma_j}, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$, а вторая – на тройке матриц $(\tilde{C}_{\eta_j}, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 13.1 (У13.1). Если тройка матриц $(\tilde{C}_{\sigma_j}, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$ полностью управляема для всех $j = \overline{1, p}$ в том смысле, что матрица управляемости

$$\tilde{W}_{y\sigma_j} = \left[\, \tilde{C}_{\sigma_j}\tilde{B}_j \quad \tilde{C}_{\sigma_j}\tilde{A}_j\tilde{B}_j \quad \ldots \quad \tilde{C}_{\sigma_j}\tilde{A}_j^{2n-1}\tilde{B}_j \,\right],\ j = \overline{1, p} \tag{13.28}$$

имеет ранг, равный n $(rang\, \tilde{W}_{y\sigma_j} = n)$, то в системе управления, полученной агрегированием параметрически возмущенного ОУ (13.10) и УУ, содержащего в своем составе номинальный ОУ (13.16) и реализующего закон управления по вектору дополнительного движения $\Delta x(t, q_0, \Delta q_j)$, достижима в асимптотике траекторная нечувствительность вектора состояния $x(t)$ к вариациям всех компонентов q_j $(j = \overline{1, p})$ вектора параметров q относительно их номинальных значений в смысле выполнения условия

$$\lim_{t\to\infty} \Delta x(t, q_0, \Delta q_j) = 0 \quad \forall j = \overline{1, p} \tag{13.29}$$

с наперед заданным темпом. □

Для доказательства утверждения используется тот факт, что в силу (13.06) и (13.08) условие (13.29) эквивалентно выполнению предельного перехода

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_j(t) = 0 \quad \forall j = \overline{1, p}. \tag{13.30}$$

Тогда управляемость тройки матриц $(\tilde{C}_{\sigma_j}, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$ $j = \overline{1, p}$ гарантирует существование такого закона управления, при котором выполняется (13.30), а, следовательно, (13.29). ■

Требования к ресурсам управления заметно снижаются, если изначально ограничиться задачей обеспечения траекторной нечувствительности выхода проектируемой системы. На уровне требований к структурным свойствам агрегированной системы (13.17), (13.18) задача сводится к контролю управляемости тройки матриц $(\tilde{C}_{\eta_j}, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$ и количественной оценке эффекта управления по переменной η_j при приложении управления $u(t)$ фиксированной нормы с помощью сингулярных чисел матрицы управляемости

$$\tilde{W}_{y\eta_j} = \left[\tilde{C}_{\eta_j}\tilde{B}_j \quad \tilde{C}_{\eta_j}\tilde{A}_j\tilde{B}_j \quad \ldots \quad \tilde{C}_{\eta_j}\tilde{A}_j^{2n-1}\tilde{B}_j \right]. \tag{13.31}$$

Следует заметить, что если ранг матриц $\tilde{B}_j$ и $\tilde{C}_{\eta_j}$ больше единицы, то матрица управляемости (13.31) по выходу составляется для всех возможных композиций столбцов матрицы $\tilde{B}_j$ и всех строк матрицы $\tilde{C}_{\eta_j}$. Ранжирование параметров q_j $(j = \overline{1, p})$ осуществляется по значению сингулярных чисел $\alpha\{\tilde{W}_{q\eta_j}\}$. Чем эти числа меньше, тем большими по норме управлениями достигается асимптотическая траекторная нечувствительность данного компонента $y_j(t)$ $(j = \overline{1, m})$ вектора выхода $y(t)$ к вариациям *j*-го элемента q_j вектора параметров q. Нулевому сингулярному числу соответствуют бесконечные по норме управления, с помощью которых достигается асимптотическая траекторная нечувствительность компонента $y_j(t)$ вектора выхода $y(t)$.

Пример 13.1 (ПР13.1) Рассмотрим исполнительный электропривод (ЭП) проектируемой следящей системы, описываемый передаточной функцией

$$W_{ЭП}(s) = \frac{K_{дв}}{(T_{дв}s + 1)s}$$

при номинальном значении параметров и передаточной функцией

$$W_{ЭП}(s,q)=\frac{K_{дв}(1+q_1)}{(T_{дв}(1+q_2)s+1)s}$$

при варьируемых параметрах $q_1=q_{10}+\Delta q_1;\, q_2=q_{20}+\Delta q_2;\, q_{10}=q_{20}=0;$ $|\Delta q_1|=|\Delta q_2|\le 0.3$. В выражениях для передаточных функций $K_{дв}=20$ рад$\cdot$с$^{-1}\cdot B^{-1}, T_{дв}=0.1$ с. Для составления векторно–матричного описания ОУ (13.10), (13.16), МТЧ (13.15) и агрегированных систем (13.17), (13.18) запишем передаточную матрицу ЭП в форме

$$W_{эп}(s,q)=\frac{\frac{K_{дв}}{T_{дв}}\cdot\frac{1+q_1}{1+q_2}\cdot\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{T_{дв}(1+q_2)\cdot\frac{1}{s}}}=\frac{200\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1+q_1}{1+q_2}\cdot\frac{1}{s}}{1+10\cdot\frac{1}{1+q_2}\frac{1}{s}}.$$

Воспользуемся базисом представления передаточной функции $W_{эп}(s,q)$, в котором от q_1 и q_2 зависит только матрица состояния, тогда векторно-матричное описание (13.10) ОУ получает вид

$$\dot{x}(t,q)=A(q)x(t,q)+Bu(t);\qquad y(t)=Cx(t),$$

в котором

$$A(q)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1+q_1}{1+q_2}\\ 0 & -\frac{10}{1+q_2}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\200\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Матрицы номинального ОУ (13.16) имеют реализации

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -10\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\200\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Матрицы моделей траекторий чувствительности (13.15):

$$A_{q_1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix};\quad B_{q_1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};\quad C_{q_1}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix};$$

$$A_{q_1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 10\end{bmatrix};\quad B_{q_1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};\quad C_{q_1}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}.$$

Матрицы агрегированной системы (13.17), (13.18) имеют представление:

$$\tilde{A}_1=\begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_1} & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix};\quad \tilde{B}_1=\begin{bmatrix} B \\ B_{q_1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \begin{matrix} \tilde{C}_{\sigma_1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \tilde{C}_{\eta_1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \end{matrix}$$

$$\tilde{A}_2=\begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_2} & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \end{bmatrix};\quad \tilde{B}_2=\begin{bmatrix} B \\ B_{q_2} \end{bmatrix}=\tilde{B}_1;\quad \begin{matrix} \tilde{C}_{\delta_2}=\tilde{C}_{\delta_1}; \\ \tilde{C}_{\eta_2}=\tilde{C}_{\eta_1}; \end{matrix}$$

Проверим управляемость агрегированных систем по состоянию $\sigma_j(t)$ и выходу $\eta_j(t)$ $(j=1{,}2)$ с помощью матриц управляемости $\tilde{W}_{y\sigma_j}$ (13.28) и $\tilde{W}_{y\eta_j}$ (13.31), которые с учетом n=2 имеют реализации

$$\tilde{W}_{y\sigma_1}=\begin{bmatrix} \tilde{C}_{\sigma_1}\tilde{B}_1 & \tilde{C}_{\sigma_1}\tilde{A}_1\tilde{B}_1 & \tilde{C}_{\sigma_1}\tilde{A}_1^2\tilde{B}_1 & \tilde{C}_{\sigma_1}\tilde{A}_1^3\tilde{B}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 200 & -2000 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_{y\eta_1}=\begin{bmatrix} \tilde{C}_{\eta_1}\tilde{B}_1 & \tilde{C}_{\eta_1}\tilde{A}_1\tilde{B}_1 & \tilde{C}_{\eta_1}\tilde{A}_1^2\tilde{B}_1 & \tilde{C}_{\eta_1}\tilde{A}_1^3\tilde{B}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 200 & -2000 & 20000 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_{y\sigma_2}=\begin{bmatrix} \tilde{C}_{\sigma_2}\tilde{B}_2 & \tilde{C}_{\sigma_2}\tilde{A}_2\tilde{B}_2 & \tilde{C}_{\sigma_2}\tilde{A}_2^2\tilde{B}_2 & \tilde{C}_{\sigma_2}\tilde{A}_2^3\tilde{B}_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -200 & 4000 & -60000 \\ 0 & 2000 & -40000 & 600000 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_{y\eta_2}=\begin{bmatrix} \tilde{C}_{\eta_2}\tilde{B}_2 & \tilde{C}_{\eta_2}\tilde{A}_2\tilde{B}_2 & \tilde{C}_{\eta_2}\tilde{A}_2^2\tilde{B}_2 & \tilde{C}_{\eta_2}\tilde{A}_2^3\tilde{B}_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -200 & 4000 & -60000 \end{bmatrix}.$$

Ранги матриц $\tilde{W}_{y\sigma_1}$ и $\tilde{W}_{y\sigma_2}$ соответственно равны $rang\,\tilde{W}_{y\sigma_1}=1$, $rang\,\tilde{W}_{y\sigma_2}=1$, агрегированные системы (13.17), (13.18) с составными векторами состояний $\tilde{x}_1=col\{x,\sigma_1\}$ и $\tilde{x}_2=col\{x,\sigma_2\}$ не являются полностью управляемыми по векторам $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$, поэтому недостаточно выполнения условия асимптотической сходимости (13.29) по состоянию параметрически возмущенного ОУ. Ранги матриц $\tilde{W}_{y\eta_1}$ и $\tilde{W}_{y\eta_2}$ равны $rang\,\tilde{W}_{y\eta_1}=rang\,\tilde{W}_{y\eta_2}=1$, что совпадает с размерностью $m=1$ вектора выхода. Таким образом, выбором закона управления можно обеспечить сходимость $\lim\limits_{t\to\infty}\Delta y\left(t,q_0,\Delta q_j\right)=0;\ j=\overline{1,2}$ с заданным темпом. Сингулярные числа матриц $\tilde{W}_{y\eta j}\left(j=\overline{1,2}\right)$ принимают значения $\alpha\left\{\tilde{W}_{y\eta_1}\right\}=2\cdot10^4;\alpha\left\{\tilde{W}_{y\eta_2}\right\}=6\cdot10^4$. Отсюда следует, что асимптотическая сходимость к нулю дополнительного движения

$\Delta y(t, q_0, \Delta q_1)$ потребует больших затрат на управление, чем сходимость дополнительного движения $\Delta y(t, q_0, \Delta q_2)$ с тем же темпом.

Рассмотрим теперь возможности аппарата функций траекторной чувствительности применительно к исследованию спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности, а, следовательно, к оценке эффекта введения регулятора, реализующего просинтезированный закон управления.

При произвольном значении $q = q_0 + \Delta q$ векторе параметров исследуемая система имеет векторно-матричное представление

$$\dot{x}(t,q) = F(q)x(t,q) + G(q)g(t); x(0); y(t,q) = C(q)x(t,q), \qquad (13.32)$$

$$\varepsilon(t,q) = g(t) - y(t,q), \qquad (13.33)$$

где $g(t)$ –экзогенное воздействие, $\varepsilon(t,q)$ – ошибка воспроизведения системой (13.32) внешнего воздействия. Система (13.32) образована агрегированием ОУ (13.33) и устройства управления, реализующего закон управления (ЗУ) в форме

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t) \qquad (13.34)$$

в виде прямой связи (ПС) по экзогенному воздействию и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния ОУ, матрицы которого K_g и K просинтезированы для случая номинальной версии (13.16) объекта управления так, чтобы доставить номинальной системе желаемые свойства в переходном и установившемся режимах при воспроизведении экзогенного воздействия. Закон управления в форме (13.34) предполагает измеримость экзогенного воздействия. Если это предположение не реализуемо, то прямая связь осуществляется по ошибке так, что ЗУ принимает вид

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t); K_x = K - K_\varepsilon C. \qquad (13.35)$$

Модель траекторной чувствительности системы (13.32), (13.33), если ввести обозначения

$$F_{q_j} \overset{\Delta}{=} \frac{\partial F(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0}; G_{q_j} \overset{\Delta}{=} \frac{\partial G(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0}; F(q)\big|_{q=q_0} = F; G(q)\big|_{q=q_0} = G, \qquad (13.36)$$

по аналогии с (13.15) (см. рисунок 13.2) имеет вид

$$\dot{\sigma}_j(t) = F\sigma_j(t) + F_{q_j}x(t) + G_{q_j}g(t); \eta_j(t) = C\sigma_j(t) + C_{q_j}x(t). \qquad (13.37)$$

Функция траекторной чувствительности $\varepsilon_j(t)$ вектора ошибки удовлетворяет условию

$$\varepsilon_j(t) \overset{\Delta}{=} \frac{\partial \varepsilon(t,q)}{\partial q_j}\Bigg|_{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[g(t) - y(t,q)\right]\Bigg|_{q=q_0} = -y_j(t). \qquad (13.38)$$

Если по аналогии с (13.17), (13.18) ввести в рассмотрение агрегированную систему с вектором состояния $\tilde{x}_j(t) = col\left\{x, \sigma_j\right\}$,то для нее получим

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \tilde{F}_j \tilde{x}_j(t) + \tilde{G}_j g(t); \tilde{x}_j(0) = col\left\{x(0), 0\right\}, \tag{13.39}$$

$$x(t) = \tilde{C}_{xj} \tilde{x}_j(t); y(t) = \tilde{C}_j \tilde{x}_j(t); \sigma_j(t) = \tilde{C}_{\sigma j} \tilde{x}_j(t), \tag{13.40}$$

$$\eta_j(t) = \tilde{C}_{\eta_j} \tilde{x}_j(t); \xi_j(t) = -\eta_j(t), \tag{13.41}$$

где

$$\tilde{F}_j = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_j} & F \end{bmatrix} : \tilde{G}_j = \begin{bmatrix} G \\ G_{q_j} \end{bmatrix}, \tag{13.42}$$

а матрицы $\tilde{C}_{x_j}, \tilde{C}_j, \tilde{C}_{\sigma_j}$ и $\tilde{C}_{\eta_j}$ задаются в форме (13.20).

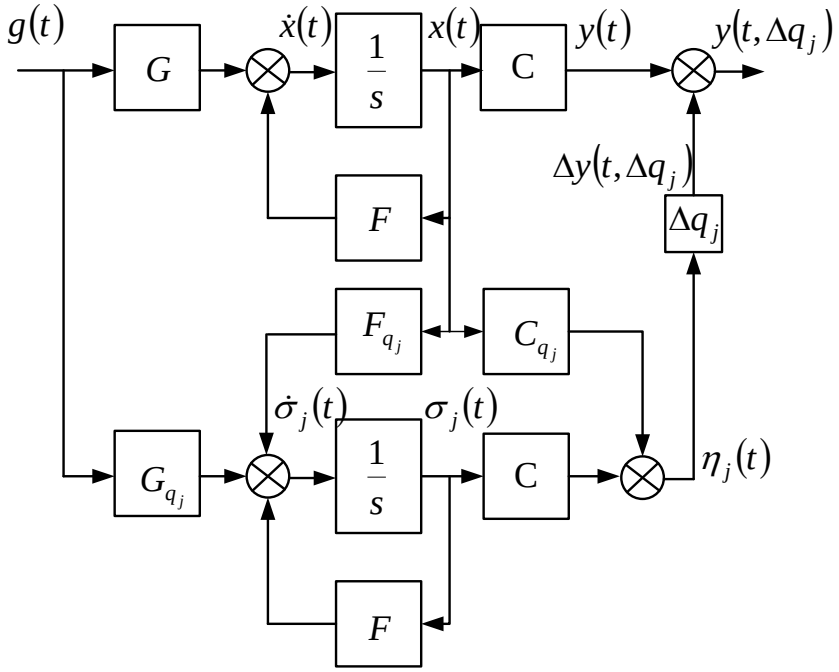


Рисунок 13.2 Модель траекторной чувствительности, дополненная номинальной моделью системы (13.32), (13.33)

Если провести агрегирование номинальной системы и всех p МТЧ вида (13.37) путем введения вектора $\tilde{x} = col\left\{x, \sigma_j;\ j = 1, p\right\}$ размерности $\dim \tilde{x} = (p+1)n$, то векторно-матричное представление такой системы по аналогии с (13.21)–(13.24) получает представление

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t) + \tilde{G}_g(t); \tilde{x}(0) = col\left\{x(0), \sigma_j(0) = 0;\ j = \overline{l, p}\right\}, \tag{13.43}$$

$$x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t); y(t) = \tilde{C}\ \tilde{x}(t); \sigma(t) = \tilde{C}_\sigma \tilde{x}(t); \eta(t) = \tilde{C}_\eta \tilde{x}(t); \xi(t) = -\eta(t), \tag{13.44}$$

где

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & O_{n\times np} \\ col\left\{F_{qj}; j=\overline{l,p}\right\} & diag\left\{\tilde{F}_{jj} = F; j=\overline{l,p}\right\} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G} = col\left\{G, G_{qj}; j=\overline{1,p}\right\}. \qquad (13.45)$$

Матрицы $\tilde{C}_x$, $\tilde{C}$, $\tilde{C}_\sigma$ $\tilde{C}_\eta$ определяются посредством (13.24)–(13.26).

Анализ свойств спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности ее функциональных компонентов может быть осуществлен визуально траекторным методом.

Траекторный метод предполагает визуальное конструирование оценок максимального и минимального размеров сечений трубки, в которой размещаются движения $\Delta x(g(t), q_0, \Delta q, t)$ по состоянию, $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$ и $\Delta\varepsilon(g(t), q_0, \Delta q, t)$ по выходу и ошибке.

Если эта задача решается в *глобальной постановке*, т.е. на множестве всех параметров q_j $j=\overline{1,p}$, образующих вектор p, то для формирования оценок, как это уже отмечено в начале параграфа, целесообразно использовать SVD–анализ применительно к матрицам чувствительности $\Sigma(t)$ (13.31) и $\Xi(t)$ (13.32), конструируемым с помощью агрегированной системы (13.43)–(13.45).

Если задача решается в локальной покомпонентной форме, то оценки максимальных размеров трубок дополнительных движений $\Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t)$ и $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t)$ на множестве угловых реализаций вектора Δq, параметризованные временем t, определяются соотношениями

$$\hat{\Delta} x_i(t) = \max_{\Delta q} \Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^{p} \left|\sigma_{ji}(t)\right| \cdot \left|\Delta q_j\right|, \qquad (13.46)$$

$$\hat{\Delta} y_l(t) = \max_{\Delta q} \Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^{p} \left|\eta_{jl}(t)\right| \cdot \left|\Delta q_j\right|, \qquad (13.47)$$

$$\hat{\Delta}\varepsilon_l(t) = \hat{\Delta} y_l(t). \qquad (13.48)$$

Пример 13.2 (ПР13.2) Рассматривается система, представляющая собой объединение ОУ с передаточной функцией $W_{oy}(s) = \dfrac{1}{(s+1)s}$ и УУ, доставляющего матрице $F = A - BK$ распределение мод Баттерворта с характеристической частотой $\omega_0 = 10c^{-1}$, так что ее собственные значения имеют реализацию $\lambda_{1,2} = -10(0,707 \mp j0.707)$.

Ставится задача сравнить по чувствительности реализации ЗУ (13.34) в информационно, но не структурно, идентичных формах

$$u(t) = K_\varepsilon(1+q_3)\varepsilon(t) - K_x x(t), \qquad (13.49)$$

$$u(t) = K_g(1+q_1)g(t) - K_y(1+q_2)y(t) - K_x x(t) \qquad (13.50)$$

применительно к дополнительному установившемуся движению по выходу при ступенчатом входном воздействии $g(t) = g_0 1(t)$. Модель (13.16) номинального ОУ характеризуется матрицами $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Система (13.32) при номинальном значении вектора параметров $q = q_0 = 0$ характеризуется матрицами $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -14.1 \end{bmatrix}$; $G\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$. Система (13.32) при реализации ЗУ в форме (13.50) имеет матрицы $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1+q_2) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1+q_1) \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$, а при реализации ЗУ в форме (13.49)

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1+q_3) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1+q_3) \end{bmatrix}.$$

Агрегированные системы с векторами $\tilde{x}_j = col\left\{x, \sigma_j;\ j = \overline{1,3}\right\}$ (13.39)–(13.42) характеризуются матрицами

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q1} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \tilde{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \tilde{G}_{\eta 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

;

$$\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \tilde{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{G}_{\eta 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

;

$$\tilde{F}_3 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \tilde{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \tilde{G}_{\eta 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Для решения поставленной задачи используем структурный подход, основанный на аппарате передаточных функций, для которых

$$\Phi_{\eta 1g}(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\eta_1(s)}{g(s)} = \tilde{C}_{\eta 1}(sI - \tilde{F}_1)^{-1}\tilde{G}_1 = \frac{100}{s^2 + 14{,}1s + 100};$$

$$\Phi_{\eta 2g}(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\eta_2(s)}{g(s)} = \tilde{C}_{\eta 2}(sI - \tilde{F}_2)^{-1}\tilde{G}_2 = \frac{(100)^2}{(s^2 + 14{,}1s + 100)^2};$$

$$\Phi_{\eta 3g}(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\eta_3(s)}{g(s)} = \tilde{C}_{\eta 3}(sI - \tilde{F}_3)^{-1}\tilde{G}_3 = \frac{100s(s + 14{,}1)}{(s^2 + 14{,}1s + 100)^2}.$$

Анализ установившегося значения функций чувствительности по выходу на основе их лапласовых образов при скачкообразном входе $g(t) = g_0 1(t)$

$$\eta_j(s) = \Phi_{\eta_j}(s) g(s)$$

дает:

$$\eta_{1уст} = \lim_{t\to\infty} \eta_1(t) = g_0 \lim_{s\to 0} \Phi_{\eta_1}(s) = g_0,$$

$$\eta_{2уст} = \lim_{t\to\infty} \eta_2(t) = g_0 \lim_{s\to 0} \Phi_{\eta_2}(s) = -g_0,$$

$$\eta_{3уст} = \lim_{t\to\infty} \eta_3(t) = g_0 \lim_{s\to 0} \Phi_{\eta_3}(s) = 0.$$

Таким образом, дополнительные движения по выходу в установившемся режиме при ступенчатом внешнем воздействии, соответственно при реализации закона управления в форме (13.50) и (13.49), получают представления

$$\Delta y_{уст}(t) = \eta_{3уст}\Delta q_3 = 0, \Delta y_{уст}(t) = \eta_{1уст}\Delta q_1 + \eta_{2уст}\Delta q_2 = g_0(\Delta q_1 - \Delta q_2).\blacksquare$$

13.2 Модели траекторной параметрической чувствительности дискретных динамических объектов и систем

В заключение рассмотрим возможности аппарата функций траекторной чувствительности к исследованию дополнительных движений дискретных по времени динамических объектов и систем

по состоянию,

$$\Delta x(k, q_0, \Delta q) \overset{\Delta}{=} x(k, q_0 + \Delta q) - x(k, q_0) = \Sigma(k)\Delta q, \qquad (13.51)$$

и выходу,

$$\Delta y(k, q_0, \Delta q) = y(k, q_0 + \Delta q) - y(k, q_0) = \Xi(k)\Delta q, \qquad (13.52)$$

где k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt, для дискретных динамических систем на примере

$$x(k+1,q)=\overline{A}(q)x(k,q)+\overline{B}(q)u(k);x(0);y(k,q)=C(q)x(k,q). \quad (13.53)$$

Будем придерживаться концепции дискретного объекта управления (ДОУ), состоящей в том, что ДОУ (13.53) представляет собой дискретную по времени с интервалом дискретности длительности Δt выборку из непрерывных процессов по вектору состояния $x(t,q)$ и выходу $y(t,q)$ при фиксированном на интервале $t\in\left[\Delta tk,\Delta t\left(k+1\right)\right]$ значении управления $u(t)=u(\Delta tk)=u(k)$. Эта концепция связывает матрицы непрерывного (13.16) и дискретного ОУ (13.53) известными функциональными соотношениями:

$$\overline{A}(q)=e^{A(q)\Delta t};\ \overline{B}(q)=A^{-1}(q)\left(e^{A(q)\Delta t}-I\right)B(q);\overline{C}(q)=C(q), \quad (13.54)$$

если при выводе управления из устройства, его формирующего и осуществляющего цифро–аналоговое преобразование, можно пренебречь задержкой τ по сравнению с Δt. Если задержкой τ пренебречь нельзя, то размерность вектора ДОУ становится на r больше размерности вектора состояния непрерывного ОУ, где r – размерность вектора управления, а матрицы модели (13.53) принимают вид

$$\overline{A}(q)=\begin{bmatrix} e^{A(q)\Delta t} & e^{A(q)\Delta t}(I-e^{A(q)\tau})A^{-1}(q)B(q) \\ O_{r\times n} & O_{r\times r} \end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix} \left(e^{A(q)(\Delta t-\tau)}-I\right)A^{-1}(q)B(q) \\ I_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad (13.55)$$

$$\overline{C}=\begin{bmatrix} C & 0_{m\times r} \end{bmatrix}. \quad (13.56)$$

Матрицы функций чувствительности $\sum(k)$ и $\aleph(k)$ строятся в форме (13.08), (13.09) на основе гипотезы о том, что в каждый дискретный момент времени векторы $x(k,g)$ и $y(k,g)$ дифференцируемы по q:

$$\sum(k)=row\left\{\sigma_j(k)\overset{\Delta}{=}\left.\frac{\partial x(k,q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0};\ j=\overline{1,p}\right\}, \quad (13.57)$$

$$\Xi(k)=row\left\{\eta_j(k)\overset{\Delta}{=}\frac{\partial y(k,q)}{\partial q_j}|_{q=q_0};\ j=\overline{1,p}\right\}. \quad (13.58)$$

Модель траекторной чувствительности, необходимая для генерирования функций траекторной чувствительности $\sigma_j(k)$ и $\eta_j(k)$ $j=\overline{1,p}$ по состоянию и выходу ДОУ, строится путем дифференцирования компонентов представления (13.53) по компонентам q_j вектора параметров q при его номинальном значении, в результате чего для МТЧ получаем

$$\sigma(k+1)=\overline{A}\sigma(k)+\overline{A}_{q_j}x(k)+\overline{B}u(k);\ \sigma_j(0)=0;\ \eta_{j(k)}=\overline{C}\sigma_j(k)+\overline{C}_{q_j}x(k). \quad (13.59)$$

Дальнейшее конструирование инструментария аппарата функций траекторной чувствительности осуществляется по той же схеме, что и в случае непрерывных ОУ, если модель траекторной чувствительности (13.59) дополнить моделью ДОУ (13.53) при номинальных параметрах

$$x(k+1)=\overline{A}x(k)+\overline{B}u(k);\ x(0);\ y(k)=\overline{C}x(k).$$

Необходимо в заключение отметить, что векторно-матричное представление ДОУ в форме (13.53) с матричными компонентами (13.54) и (13.55), в явном виде содержащими такие чисто "дискретные" параметры, как интервал дискретности Δt и задержку τ вывода управления, заметно упрощает анализ процессов ДОУ, опирающийся на возможности аппарата функций траекторной чувствительности.

Примеры и задачи

13.1. Для непрерывной динамической системы, заданной передаточной функцией $\Phi(s)$ «вход–выход» вида

$$\Phi(s,q)=\frac{Y(s,q)}{G(s)}=\frac{b_0(1+q_2)s+b_1(1+q_1)}{a_0(1+q_5)s^2+a_1(1+q_4)s+a_2(1+q_3)}$$ где

$q_{0j}=0;\left|\Delta q_j\right|\le 0.3;\ j=\overline{1,5}$, построить ее ВМО в произвольном базисе $\dot{x}(t,q)=F(q)x(t,q)+G(q)g(t),\ x(t)\big|_{t=0}=x(0)=0,\ y(t,q)=C(q)x(t,q)$, исполь–зуя значения параметров передаточной функции из наборов по выбору преподавателя:

1. $b_0=0;\ b_1=1;\ a_0=0;\ a_1=0.1;\ a_2=1;$
2. $b_0=0;\ b_1=1;\ a_0=0;\ a_1=0.5;\ a_2=1;$
3. $b_0=0;\ b_1=1;\ a_0=0;\ a_1=1;\ a_2=1;$
4. $b_0=1;\ b_1=0;\ a_0=0;\ a_1=0.1;\ a_2=1;$
5. $b_0=1;\ b_1=0;\ a_0=0;\ a_1=0.5;\ a_2=1;$
6. $b_0=1;\ b_1=0;\ a_0=0;\ a_1=1;\ a_2=1;$
7. $b_0=0.5;\ b_1=0;\ a_0=0;\ a_1=1;\ a_2=1;$
8. $b_0=1;\ b_1=1;\ a_0=0;\ a_1=0.1;\ a_2=1;$
9. $b_0=1;\ b_1=1;\ a_0=0;\ a_1=0.5;\ a_2=1;$
10. $b_0=0;\ b_1=1;\ a_0=1;\ a_1=2;\ a_2=1;$
11. $b_0=0;\ b_1=9;\ a_0=1;\ a_1=6;\ a_2=9;$
12. $b_0=0;\ b_1=1;\ a_0=1;\ a_1=1.5;\ a_2=1;$
13. $b_0=0;\ b_1=16;\ a_0=1;\ a_1=6;\ a_2=16;$
14. $b_0=0;\ b_1=4;\ a_0=1;\ a_1=1;\ a_2=4;$

построить модели траекторной чувствительности вида (13.37) с целью наблюдения дополнительного движения по выходу системы

$\Delta y(t, q_0, \Delta q_j) = (\eta_j(t))(\Delta q_j)$, вызванного вариацией Δq_j параметров системы в указанных выше пределах при экзогенных воздействиях:

а) единичного ступенчатого типа $g(t) = 1(t)$;

б)гармонического типа $g(t) = 1\sin(t)$.

13.2. Для значений параметров из примеров 13.1.1 – 13.1.14 непрерывной системы путем замены производной отношением конечных малых при значении интервала дискретности $\Delta t = 0.1C$ сформировать ее дискретное представление

$$x(k+1) = \overline{F}x(k) + \overline{G}g(k), x(k)|_{k=0} = x(0) = 0, y(k) = \overline{C}x(k)$$

с тем, чтобы построить модели траекторной чувствительности вида (13.59) с целью наблюдения дополнительного движения по выходу системы $\Delta y(k, q_0, \Delta q_j) = (\eta_j(k))(\Delta q_j)$, вызванного вариацией Δq_j параметров системы, включая интервал дискретности, который следует задать в форме $(\Delta t(q)) = (\Delta t)\cdot(1+q_6)$, в указанных выше пределах при экзогенных воздействиях:

а) единичного ступенчатого типа $g(k) = 1(k)$;

б) гармонического типа $g(k) = 1\sin((\Delta t)k)$.

Решение вариантов задач

<u>Решение задачи 13.1</u> (с вариантом параметров 13.1.1)

В соответствии с вариантом параметров 13.1.1 передаточная функция непрерывной системы принимает вид

$$\Phi(s,q) = \frac{b_1(1+q_1)}{a_1(1+q_4)s + a_2(1+q_3)} = \frac{(1+q_1)}{0.1(1+q_4)s + (1+q_3)} = \frac{10\dfrac{(1+q_1)}{(1+q_4)}s^{-1}}{1+10\dfrac{(1+q_3)}{(1+q_4)}s^{-1}},$$

ВМО которой при $q \neq q_0 = 0$ будет иметь вид

$$\dot{x}(t,q) = \left[-10\frac{(1+q_3)}{(1+q_4)}\right]x(t,q) + \left[10\frac{(1+q_1)}{(1+q_4)}\right]g(t),\ y(t,q) = x(t,q).$$

При $q = q_0 = 0$ номинальная версия системы получает представление

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + 10g(t),\ y(t) = x(t).$$

Матрицы чувствительности принимают вид

$$F_{q_1} = \left.\frac{\partial F(q)}{\partial q_1}\right|_{q=q_0} = 0; G_{q_1} = \left.\frac{\partial G(q)}{\partial q_1}\right|_{q=q_0} = 10\left.\frac{1}{(1+q_4)}\right|_{q_4=0} = 10;$$

$$F_{q_3} = \left.\frac{\partial F(q)}{\partial q_2}\right|_{q=q_0} = -10; G_{q_3} = \left.\frac{\partial G(q)}{\partial q_1}\right|_{q=q_0} = 0;$$

$$F_{q_4} = \left.\frac{\partial F(q)}{\partial q_1}\right|_{q=q_0} = 10; G_{q_4} = \left.\frac{\partial G(q)}{\partial q_1}\right|_{q=q_0} = -10.$$

В результате получаем три модели траекторной чувствительности вида (13.37)

$$\sigma_1(t) = -10\sigma_1(t) + 10g(t); \eta_1(t) = \sigma_1(t);$$

$$\sigma_3(t) = -10\sigma_3(t) - 10x(t); \eta_3(t) = \sigma_3(t);$$

$$\sigma_4(t) = -10\sigma_4(t) + 10x(t) - 10g(t); \eta_4(t) = \sigma_4(t);$$

Теперь полученные модели чувствительности вместе с номинальной моделью системы следует поместить в модельную среду Simulink и провести исследования параметрически возмущенного выхода системы

$y(t, q = q_0 + \Delta q) = y(t) + (\eta_1(t))(\Delta q_1) + (\eta_3(t))(\Delta q_3) + (\eta_4(t))(\Delta q_4)$ при $\left|\Delta q_j\right| \le 0.3 (j = 1, 3, 4)$ и ступенчатом и гармоническом воздействиях. ■

14*. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

В предыдущем разделе рассмотрен метод решения задачи учета неопределенности (неточности задания, знания) параметров исходного объекта при построении его математической модели, основанный на аппарате траекторной параметрической чувствительности. Аппарат обладает наглядностью, но характеризуется явным системным изъяном, состоящим в том, что он справедлив для неопределенности параметров, не превышающей сорока процентов от их номинальных значений.

Для случаев, когда неопределенность параметров значительно превышает диапазон в 40% от их номинальных значений, в настоящее время разработан аппарат интервальных модельных представлений, изучению возможностей которого посвящен настоящий раздел.

14.1. Элементы интервальных вычислений и линейной алгебры

Проблему, вынесенную в заголовок параграфа будем излагать в форме определений, примечаний и утверждений.

Определение 14.1 (О14.1). Пусть числа $\underline{\rho}, \overline{\rho}$ такие, что $\underline{\rho}, \overline{\rho} \in R$, $\underline{\rho} \le \overline{\rho}$, и при этом задают вещественное число ρ в параметризованной относительным параметром $q \in [0,1]$ форме

$$\rho(q) = (1-q)\underline{\rho} + q\overline{\rho}. \qquad (14.1)$$

Тогда вещественное интервальное число $[\rho]$ образуется экстремальными реализациями этого числа

$$\underline{\rho} = \min_q \{\rho(q);\ q \in [0,1]\},\ \overline{\rho} = \max_q \{\rho(q);\ q \in [0,1]\} \qquad (14.2)$$

так, что оно может быть записано в форме

$$[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}] \qquad (14.3)$$

Примечание 14.1 (П14.1). Фиксированное число ρ имеет интервальное представление, записываемое в форме $\rho = [\rho, \rho]$.

Определение 14.2 (О14.2). Интервальным комплексным числом $[\gamma = \rho + j\delta]$ называется комплексное число, у которого интервальными являются вещественная и мнимая части так, что становится справедливым представление

$$[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta], \qquad (14.4)$$

где, $[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}], [\delta] = [\underline{\delta}, \overline{\delta}]$

Определение 14.3 (О14.3). Интервальным вектором $[x]$ размерности n называется вектор с интер вальными компонентами $[x_i\ ]=[\underline{x_i}, \overline{x_i}]$ так, что становится справедливой запись

$$[x]=col\{\,[x_i]; i=\overline{1,n}\ \} \tag{14.5}$$

Определение 14.4 (О14.4). Интервальной $(n\times m)$ – матрицей $[A]$ называется матрица, составленная из интервальных скалярных компонентов

$$[A_{ij}]=[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}], [A]=row\{col([A_{ij}]; i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\} \tag{14.6}$$

при этом справедливым оказывается представление

$$[A]=[\underline{A}, \overline{A}], \tag{14.7}$$

где $$[\underline{A}]=row\{col([\underline{A}_{ij}]\,; i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\}, \tag{14.8}$$

$$[\overline{A}]=row\{col([\overline{A}_{ij}]\,; i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\}. \tag{14.9}$$

Определение 14.5 (О14.5). Произведением

$$[a]\cdot[b]=[c] \tag{14.10}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[c]=[\underline{c}, \overline{c}]$, граничные значения которого $\underline{c}$ и $\overline{c}$ вычисляются в силу

$$\underline{c}=min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \tag{14.11}$$

$$\overline{c}=max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}. \tag{14.12}$$

Определение 14.6 (О14.6). Суммой

$$[a]+[b]=[d] \tag{14.13}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[d]=[\underline{d}, \overline{d}]$, граничные значения которого $\underline{d}$ и $\overline{d}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{d}=min\{\underline{a}+\underline{b}, \underline{a}+\overline{b}, \overline{a}+\underline{b}, \overline{a}+\overline{b}\}=\underline{a}+\underline{b}\,, \tag{14.14}$$

$$\overline{d}=max\{\underline{a}+\underline{b}, \underline{a}+\overline{b}, \overline{a}+\underline{b}, \overline{a}+\overline{b}\}=\overline{a}+\overline{b}\,. \tag{14.15}$$

Определение 14.7 (О14.7). Частным от деления

$$\frac{[a]}{[b]}=[f] \tag{14.16}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[f]=[\underline{f}, \overline{f}]$, граничные значения которого $\underline{f}$ и $\overline{f}$ вычисляются в силу выражений

$$\underline{f}=min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\},\ \overline{f}=max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}. \tag{14.17}$$

Определение 14.8 (О14.8). Разностью

$$[a]-[b]=[h] \tag{14.18}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[h]=[\underline{h},\overline{h}]$, граничные значения которого $\underline{h}$ и $\overline{h}$ определяются с помощью выражений

$$\underline{h}=min\{\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\}, \tag{14.19}$$

$$\underline{h}=max\{\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\}. \tag{14.20}$$

Определение 14.9 (О14.9). Фиксированное число g имеет интервальное представление $[g]=[\underline{g},\overline{g}]$, которое характеризуется выполнением равенства

$$\underline{g}=\overline{g}. \tag{14.21}$$

Утверждение 14.1 (У14.1). Частное от деления интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ на самое себя является интервальное число $[1_a]=[\underline{1}_a,\overline{1}_a]$

$$\frac{[a]}{[a]}=[1_a], \tag{14.22}$$

граничные значения которого $\underline{1}_a$ и $\overline{1}_a$ в силу (14.17) вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{1}_a=min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}},\frac{\underline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\}, \tag{14.23}$$

$$\overline{1}_a=max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}},\frac{\underline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\}. \tag{14.24}$$

Утверждение 14.2 (У14.2). Разностью интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$

$$[a]-[a]=[0_a] \tag{14.25}$$

является интервальное число $[0_a]=[\underline{0}_a,\overline{0}_a]$, граничные значения которого $\underline{0}_a$, $\overline{0}_a$ в силу (14.14), (14.15) задаются соотношениями

$$\underline{0}_a=min\{\underline{a}-\underline{a},\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a},\overline{a}-\overline{a}\}, \tag{14.26}$$

$$\underline{0}_a=max\{\underline{a}-\underline{a},\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a},\overline{a}-\overline{a}\}. \tag{14.27}$$

Определение 14.10 (О14.10). Медианой $mid[a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ называется фиксированное число a_0, задаваемое соотношением

$$mid[a]=a_0=0.5(\overline{a}+\underline{a}). \tag{14.28}$$

Определение 14.11 (О14.11). Интервальным компонентом $wid[a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ называется интервальное число $[\Delta a]=[\underline{\Delta a},\overline{\Delta a}]$, граничные значения которого $\underline{\Delta a}$ и $\overline{\Delta a}$ задаются с помощью соотношений

$$\underline{\Delta a}=\underline{a}-a_0,\ \overline{\Delta a}=\overline{a}-a_0, \tag{14.29}$$

Утверждение 14.3 (У14.3). Интервальное число $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ в силу (14.28), (14.29), а также (14.14), (14.15), (14.21) представимо в виде аддитивной композиции

$$[a]=a_0+[\Delta a], \tag{14.30}$$

Определение 14.12 (О14.12). Медианой $mid[a]$ интервальной $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$, называется матрица A_0 с фиксированными скалярными компонентами A_{0ij}

$$A_0=row\{col(A_{0ij};\, i=\overline{1,n});\ j=\overline{1,m}\} \tag{14.31}$$

где элементы A_{0ij} матрицы A_0 задаются соотношением

$$A_{0ij}=mid\{[A_{ij}]=[\underline{A}_{ij},\overline{A}_{ij}]\}=0.5(\underline{A}_{ij}+\overline{A}_{ij}). \tag{14.32}$$

Определение 14.13 (О14.13). Интервальным матричным компонентом $wid[A]$ интервальной матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ называется интервальная матрица $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$, граничные реализации которой $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ задаются соотношениями

$$[\underline{\Delta A}]=\underline{A}-A_0=col\{row([\underline{\Delta A}_{ij}]=\underline{A}_{ij}-A_{0ij};\, i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\}, \tag{14.33}$$

$$[\overline{\Delta A}]=\overline{A}-A_0=col\{row([\overline{\Delta A}_{ij}]=\overline{A}_{ij}-A_{0ij};\, i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\} \tag{14.34}$$

Утверждение 14.4 (У14.4). Интервальная $(n\times m)$ – матрица $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ в силу (14.31), (14.33), (14.34), а также (14.32), (14.9) представима в аддитивной форме

$$[A]=A_0+[\Delta A], \tag{14.35}$$

где $A_0=mid[A], [\Delta A]=wid[A]$.

Определение 14.14 (О14.14). Произведением интервальных $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ и $(m\times k)$ – матрицы $[B]=[\underline{B},\overline{B}]$

$$[A]\times[B]=[C] \tag{14.36}$$

называется интервальная $(n\times k)$ – матрица $[C]=[\underline{C},\overline{C}]$ с интервальными скалярными элементами $[C_{il}]=[\underline{C}_{il},\overline{C}_{il}]$, вычисляемыми в силу соотношений

$$[C_{il}]=\sum_{j=i}^{m}[A_{ij}][B_{ij}];\ i=\overline{1,n};\ l=\overline{1,k}, \tag{14.37}$$

где произведение $[A_{ij}][B_{ij}]$ интервальных чисел определяется в соответствии с (14.10), (14.11), (14.12) а суммирование этих произведений осуществляется в соответствии с (14.13), (14.14), (П.15).

Определение 14.15 (О14.15). Угловой реализацией $(A_c)_\upsilon$ $(n\times m)$ - интервальной матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]=A_0+[\Delta A]$, получаемой в результате υ-й выборки $\upsilon=\overline{1,2^{nm}}$ из множества мощностью, равной (nm) пар

$\{\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\}, i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ граничных значений интервальных скалярных компонентов $\lfloor A_{ij} \rfloor$ матрицы $[A]$, называется матрица

$$(A_c)_\upsilon = row\{col((A_{cij})_\upsilon \in \{\underline{A}_{ij}, A_{ij}\}, i=\overline{1,n}); j=\overline{1,m}\} \qquad (14.38)$$

с фиксированными на этой реализации компонентами.

Утверждение 14.5 (У14.5). Пусть $[\Delta A]=[\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ интервальный матричный компонент матрицы $[A]$, определенной в силу факторизации в форме (14.35), тогда интервальные компоненты $[\Delta A_{ij}]=[\underline{\Delta A}_{ij}, \Delta\overline{A}_{ij}], i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ обладают тем свойством, что

$$|\underline{\Delta A}_{ij}| = |\overline{\Delta A}_{ij}|, i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}, \qquad (14.39)$$

которое выполняется в силу (14.31), (14.32).

Утверждение 14.6 (У14.6). Угловые реализации $(\Delta A_c)_\upsilon$ и $(\Delta A_c)_\mu$ $(n\times m)$- интервальной матрицы $[\Delta A]=[\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ с граничными компонентами $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ (14.33), (14.34), полученных в результате υ-й и μ-й выборок $\upsilon, \mu=\overline{1,2^{mn}}$ в силу (14.38) и свойства (14.39) обладают равными матричными нормами так, что выполняется равенство

$$\|(\Delta A_c)_\upsilon\| = \|(\Delta A_c)_\mu\|; \upsilon, \mu=\overline{1,2^{mn}}. \qquad (14.40)$$

Определение 14.16 (О14.16). Интервальным полиномом $[D(z)]$ степени n называется полином, коэффициенты которого являются интервальными числами так, что он принимает вид

$$[D(z)]=[a_0]z^n+[a_1]z^{n-1}+[a_2]z^{n-2}+...+[a_{n-1}]z\ +[a_n] \qquad (14.41)$$

где $[a_i]=[\underline{a}_i, \overline{a}_i]; i=\overline{0,n}$

Определение 14.17 (О14.17). Интервальным характеристическим полиномом ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной $(n\times n)$ - матрицы $[A]=[\underline{A}, \overline{A}]$ называется интервальный полином степени n, получаемый в силу определения характеристического полинома $(n\times n)$ - квадратной матрицы

$$\det(\lambda I-[A])=[a_0]\lambda^n+[a_1]\lambda^{n-1}+...+[a_{n-1}]\lambda\ +[a_n] \qquad (14.42)$$

так, что $[D(\lambda)]=\det(\lambda I-[A])$.

При формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[A]$ системы необходимо отметить проблему объема вычислений. Очевидно, если размерность матрицы $[A]$ составляет $(n\times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(A)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[A]$ составляет $2^{n\times n}$, минимальная мощность этого множества составляет 2^n, что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как *диагональное и фробениусово*. Однако независимо от базиса мощность множества $\{(A)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксировано на уровне 2^p, где p – число исходных

интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров . Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий *рост ширины* $wid\,[a_\ell]$ *системных интервальных параметров* $[a_\ell]$. *Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности* $[a_\ell]-[a_\ell]$ *и частного от деления* $[a_\ell]/[a_\ell]$. Очевидно, в силу параметризованных представлений $a_\ell(q)-a_\ell(q)=0$ и $=1$ в том числе и при $q=0$ и $q=1$. Таким образом без нарушения существа интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением $[a_\ell]-[a_\ell]=0, [a_\ell]/[a_\ell]=1$.

Приведем несколько способов вычисления коэффициентов ИХП интервальной $(n\times n)$ матрицы [*A*].

Способ 1. Способ основан на обобщенной теореме Ф. Виета. Пусть спектр собственных значений интервальной матрицы [*A*]

$$\sigma\{[A]\}=\left\{[\lambda_i]=[\underline{\lambda}_i,\overline{\lambda}_i]:\det(\lambda I-[A])=0;i=\overline{1,n}\right\} \tag{14.43}$$

известен, тогда ИХП (П14.42) представим в форме

$$[D(\lambda)]=[a_0]\lambda^n+[a_1]\lambda^{n-1}+...+[a_{n-1}]\lambda\ +[a_n]=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-[\lambda_i]), \tag{14.44}$$

где $[a_0]=[1,1]=1$

Обобщенная теорема Виета устанавливает связь собственных значений $[\lambda_i]$ с коэффициентами $[a_i];i=\overline{1,n}$ в форме

$$[a_1]=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_1=-tr[A], \tag{14.45}$$

$$[a_2]=\sum_{\substack{i1=1\\ i2=2\\ i3=3}}^{n}[\lambda_{i1}][\lambda_{i2}], \tag{14.46}$$

$$[a_3]=-\sum_{\substack{i1=1\\ i2=2\\ i3=3\\ i1<i2<i3}}^{n}[\lambda_{i1}][\lambda_{i2}][\lambda_{i3}]; \tag{14.47}$$

$$[a_{n-1}]=(-1)^{n-1}\sum_{\substack{i1=1\\ i2=2\\ \vdots\\ i(n-1)=n-1\\ i1<i2<\cdots<i(m-1)}}^{n}[\lambda_{i1}]\,[\lambda_{i2}]\cdots[\lambda_{im-1}]; \tag{14.48}$$

$$[a_n]=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}[\lambda_i]. \tag{14.49}$$

Способ 2. Способ Г. Крамера главных миноров:

$$[a_1] = -tR[A] = -\left[\sum_{i=1}^{n} \underline{A}_{ij}, \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{ij}}\right], \tag{14.50}$$

$$[a_k] = (-1)^k \sum_{i=1}^{k} [M_{ii}], \tag{14.51}$$

где $[M_{ii}]$ алгебраическое дополнение (ii)–го элемента [A_{ii}] матрицы [A];

$$[a_n] = (-1)^n det[A]. \tag{14.52}$$

Способ 3. Способ У.Ж.Ж. Леверье:

$$[a_k] = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} [a_{i-1}] t_2 \left[A^{k-i+1}\right]; k = \overline{1,n}; [a_0] = 1 \tag{14.53}$$

Способ 4. Способ Д.К. Фаддеева:

$$[a_k] = -\frac{1}{k} tr\{[A][H_{k-1}]\}; k = \overline{1,n}, \tag{14.54}$$

Где

$$[H_k] = [A][H_{k-1}] + [a_k]I; [H_0 = I] \tag{14.55}$$

В силу выше изложенного (14.32), (14.33), (14.34) допустимо следующее определение

Определение 14.18 (О14.18). Интервальный матричный компонент $[(*)]$

$$[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)] = (*)_0 + \left[\underline{\Delta}(*), \overline{\Delta}(*)\right], \tag{14.56}$$

может быть охарактеризован показателем абсолютной интервальности,

$$\Delta_I(*) \overset{\Delta}{=} \| [\Delta(*)] \|. \tag{14.57}$$

Нетрудно видеть, что в силу структуры интервального матричного компонента $[\Delta(*)]$ его Фробениусова норма , а также индуцированные с индексами p=1 и p=∞ нормы всех угловых реализаций этого компонента оказываются фиксированными так, что становится справедливым равенство

$$\Delta_I(*) \overset{\Delta}{=} \| [\Delta(*)] \| = \| \underline{\Delta}(*) \| = \| \overline{\Delta}(*) \|. \tag{14.58}$$

Это же положение оказывается справедливым для индуцированной нормы с индексом p=2 (спектральной нормы) в силу справедливости соотношения $\|(\circ)\|_2 \le \{\|(\circ)\|_1 \|(\circ)\|_\infty\}^{1/2}$ для ее оценки через нормы с индексами p=1 и p=∞.

Определение 14.19 (О14.19). Интервальный матричный компонент $[(*)]$ представленный в форме (14.56) может быть охарактеризован показателем $\delta_I(*)$ относительной интервальности задаваемым соотношением

$$\delta_I(*) = \frac{\Delta_I(*)}{\| (*)_0 \|}. \qquad (14.59)$$

Последние два определения по существу содержат доказательства следующего утверждения

Утверждение 14.7 (У14.7). *Оценки абсолютной и относительной интервальности* интервальных компонентов исходного интервального объекта (числа, вектора, матрицы) *не являются интервальными числами*. ■

В заключении необходимо отметить, что формализм правил интервальной арифметики в процессе приведенных выше преобразований математических выражений содержащих интервальные числа, векторы и матрицы, может наблюдаться заметный рост нормы интервальной части интервального компонента. Этот рост в основном определяется операциями вычитания и деления скалярного интервального элемента соответственного *самого из себя* и *самого на себя*, не приводящими соответственно к нулевому и единичному результатам. Тем не менее, параметризованная параметром q форма (14.2) интервального скалярного элемента при любых значениях q в перечисленных выше операциях *дает нулевой и единичный результаты*, в том числе и при граничных значениях q=0 и q=1. В этой связи при построении интервальных модельных представлений предлагается использование *модифицированную версию интервальных вычислений* в которых сделаны допущения о справедливости выполнения равенств $[a]-[a]=0$ и $\frac{[a]}{[a]}=1$, что не нарушает существа интервальных вычислений

Необходимо отметить также проблемы объема вычислений при формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[F]$системы. Если размерность матрицы $[F]$ составляет $(n \times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[F]$ составляет $2^{n \times n}$, минимальная мощность этого множества составляет 2^n, что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как диагональное и фробениусово. Независимо от базиса представления мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне 2^p, где p – число исходных интервальных физических параметров. Таким образом целесообразно интервальные вычисления производить не на угловых системных реализациях с накопленной интервальностью, а на угловых реализациях исходных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть, кроме того, заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров.

14.2. Интервальные математические модели динамических объектов

Проблемы, внесенные в заголовок параграфа, будем решать на примере непрерывных динамических объектов применительно к моделям «вход–выход» и «вход–состояние–выход» линейных НДО.

Определение 14.20 (О14.20). Дифференциальное уравнение отношения «вход–выход» линейного непрерывного динамического объекта называется интервальным дифференциальным уравнением, если являются интервальными его коэффициенты, так, что оно имеет представление

$$[a_0]y^{(n)}(t)+[a_1]y^{(n-1)}(t)+...+[a_n]y(t)=[b_0]g^{(m)}(t)+[b_1]g^{(m-1)}(t)...+[b_m]g(t) \quad (14.60)$$

Определение 14.21 (О14.21). Передаточная функция отношения «вход–выход» линейного непрерывного динамического объекта называется интервальной передаточной функцией, если являются интервальными коэффициенты полиномов ее числителя и знаменателя, так, что она имеет представление

$$[\Phi(s)]=\frac{[b_0]s^m+[b_1]s^{m-1}...+[b_{m-1}]s+[b_m]}{[a_0]s^n+[a_1]s^{n-1}+...+[a_{n-1}]s+[a_n]}. \quad (14.61)$$

Определение 14.22 (О14.22). Дифференциальная модель вида (9.10) отношения «вход–состояние–выход» линейного непрерывного динамического объекта называется интервальной, если являются интервальными матричные компоненты этой дифференциальной модели, так, что представима в виде

$$\dot{x}(t)=[A]x(t)+[B]u(t), \quad x(0); \quad y(t)=[C]x(t). \quad (14.62)$$

Примечание 14.2 (П14.2). Следует заметить, что интервальное представление отношения «вход–состояние–выход» вида (14.62) является данью общности записи, в большинстве практических случаев интервальное представление отношения «вход–состояние–выход» имеет вид

$$\dot{x}(t)=[A]x(t)+[B]u(t), \quad x(0); \quad y(t)=Cx(t). \quad (14.63)$$

Остановимся на вычислительных особенностях построения интервальных моделей отношения ВСВ вида (14.61)–(14.62) на основе интервальной передаточной функции (14.61) с помощью алгоритма 9.1.

Напомним, что одним из пунктов этого алгоритма с тем, чтобы построить представление передаточной функции, записанной по

отрицательным степеням переменной «*s*», а также подготовить представление к возможному использованию правила Мейсона не касающихся контуров, является деление всех членов полиномов числителя и знаменателя на член знаменателя, содержащий переменную «*s*» в наивысшей степени. Очевидно, в случае интервального представления передаточной функции это деление будет содержать деление интервальных чисел, которое неизбежно приведет к расширению интервалов интервального представления результирующих значений коэффициентов конструируемого представления.

В этой связи будет полезна информация о росте относительной интервальности результатов простейших операций над интервальными числами, приведенная в таблице 14.1.

Таблица 14.1.

$\delta_I[(\#)]\%$	0	5	10	15	20	25	30	50
$\delta_I[(*)]^{-1}\%$	0	5	10	15	20	25	30	50
$\delta_I\{[(\circ)][(\bullet)]\}\%$	0	5	19.8	29.33	38.46	47.05	55.04	80
$\delta_I\{[(\bullet)][(*)]^{-1}\}\%$	0	10.25	21	32.25	44.4	56.25	69	125
$\delta_I\{[(\circ)][(\bullet)][(*)]^{-1}\}\%$	0	15.78	33.3	52.76	61.32	98.49	125.1	262.5

Оценка относительной интервальности несет большую содержательную нагрузку, так как позволяет оценить те пределы относительной интервальности параметров, при которых факт учета или не учета их интервальности оказывается корректным и обязательным.

Остановимся дополнительно на возможности управлять относительной интервальностью матричных компонентов интервального представления модели ВСВ непрерывного ДО (14.63) на примере матрицы состояния. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 14.8 (У14.8). Пусть интервальная матрица $[A_\delta]$, характеризующаяся значением δ_A относительной интервальности, представима в форме $[A_\delta]=[A]+BK$, что в развернутой форме представляется записью $A_{\delta 0}+[\Delta A_\delta]=A_0+[\Delta A]+BK$, откуда следуют равенства $A_{\delta 0}=A_0+BK, [\Delta A_\delta]=[\Delta A]$, причем пара матриц (A_0, B) полностью управляемая, тогда требуемое значение δ_A относительной интервальности матрицы $[A_\delta]$ может быть обеспечено выбором матрицы K. □

Доказательство утверждения строится на определении оценки относительной интервальности, в соответствии с которым получаем цепочку соотношений

$$\delta_A = \frac{\|[\Delta A_\delta]\|}{\|A_{\delta 0}\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 + BK\|}. \qquad \blacksquare$$

В заключение следует сказать, что аналогичным рассмотренному случаю непрерывных объектов образом строятся и исследуются интервальные математические модели дискретных линейных объектов.

Примеры и задачи

14.1. Найти результаты сложения, вычитания, перемножения и деления интервальных чисел $[a]=[4;6]$ и $[b]=[-2;5]$;

14.2. Найти сумму интервальных векторов $[x]=([1;5],[2;4],[3;7])^T$ и $[y]=([-3;7],[4;-6],[5;9])^T$;

14.3. Найти интервальное скалярное произведение интервальных векторов примера 14.2;

14.4. Найти интервальные $p-$ые нормы для $p=1,2,\infty$ интервального вектора $[x]=([1;5],[2;4],[3;7])^T$;

14.5. Найти произведение интервальной матрицы $[A]$ на вектор $[x]$ $[A]=\begin{bmatrix}[-5;3] & [4;6]\\ [-2;8] & [1;3]\end{bmatrix}$ $[x]=([1;5],[3;7])^T$;

14.6. Найти интервальную матрицу $\lfloor A^{-1}\rfloor$ обратную интервальной матрице $[A]=\begin{bmatrix}[-5;3] & [4;6]\\ 2 & [1;3]\end{bmatrix}$;

14.7. Определить число угловых реализаций интервальной матрицы примера 14.6;

14.8. Сформировать угловые реализации A_{cj} интервальной матрицы $[A]=\begin{bmatrix}[-5;3] & [4;6]\\ 2 & [1;3]\end{bmatrix}$

14.9. Найти медианную составляющую $mid[a]=a_0$ и интервальный компонент $wid[a]=[\Delta a]$ интервального числа $[a]=[15;39]$;

;

14.10. Найти медианную составляющую $mid[x]=x_0$ и интервальный компонент $wid[x]=[\Delta x]$, интервального вектора $[x]$ примера 14.2;

14.11. Найти медианную составляющую $mid[A]=A_0$ и интервальный компонент $wid[A]=[\Delta A]$ интервальной матрицы $[A]=[\underline{A};\overline{A}]=\left[\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}6 & 5\\ 4 & 3\end{bmatrix}\right]$;

14.12. Вычислить оценку $\delta_I a$ относительной интервальности интервального числа $[a]=[15;39]$;

14.13. Вычислить оценку $\delta_I x$ относительной интервальности интервального вектора $[x]=([1;5],[2;4],[3;7])^T$;

14.14. Вычислить оценку $\delta_I A$ относительной интервальности интервальной матрицы $[A]=\begin{bmatrix}[4;6] & [-3;5]\\ [-2;4] & [1;3]\end{bmatrix}$;

14.15. На основе интервальной матрицы $[A]$ примера 14.14 сформировать интервальную матрицу $[A_\delta]=[A]+BK$, где $B=col\{0;1\}$, путем выбора матрицы K такую, чтобы оценка $\delta_I A_\delta$ ее относительной интервальности не превышала значения 0.1;

14.16. На основе интервальной матрицы $[A]$ примера 14.14 сформировать интервальную матрицу $[A_\delta]=[A]+BK$, где $B=col\{0;1\}$, путем выбора матрицы K такую, чтобы оценка $\delta_I A_\delta$ ее относительной интервальности не превышала значения 0.01. □

Решение вариантов задач

<u>Решение задачи 14.9</u>. Найти медианную составляющую $mid[a]=a_0$ и интервальный компонент $wid[a]=[\Delta a]$ интервального числа $[a]=[15;39]$

В соответствии с (14.29) и (14.30) записываем цепочку равенств $[a]=[\underline{a},\overline{a}]=a_0+[\underline{\Delta a},\overline{\Delta a}]=[15;39]$, из которой становятся справедливыми соотношения:

$a_0=0.5(\underline{a}+\overline{a})=0.5(15+39)=27;$

$\underline{\Delta a}=\underline{a}-a_0=15-27=-12;\overline{\Delta a}=\overline{a}-a_0=39-27=12.$

Тогда становится справедливым представление

$[a]=[15;39]=27+[-12;12]$. Задача решена. ■

15. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

15.1. Элементы интервальных вычислений и линейной алгебры

Современная наука и технологии ставят своими задачами решения новых более трудных задач для сложных динамических систем. Сегодня уже не достаточно информации для описания определенного объекта сосредоточенными значениями. В этой связи становится актуальным использование интервальной алгебры для описания динамических объектов и систем. Она позволяет задавать интервалами возможные значения параметров без указания какого-либо распределения возможных значений числа внутри заданного интервала.

Определение 15.1. Пусть числа $\underline{\rho}, \overline{\rho}$ такие, что $\underline{\rho}, \overline{\rho} \in R$, $\underline{\rho} \le \overline{\rho}$, и при этом задают вещественное число ρ в параметризованной относительным параметром $q \in [0,1]$ форме

$$\rho(q) = (1-q)\underline{\rho} + q\overline{p}. \tag{15.1}$$

Тогда вещественное интервальное число $[\rho]$ образуется экстремальными реализациями этого числа

$$\underline{\rho} = \min_q \{\rho(q); q \in [0,1]\}, \overline{\rho} = \max_q \{\rho(q); q \in [0,1]\} \tag{15.2}$$

так, что оно может быть записано в форме

$$[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}] \tag{15.3}$$

Определение 15.2. Интервальным комплексным числом $[\gamma = \rho + j\delta]$ называется комплексное число, у которого интервальными являются вещественные и мнимые части так, что становится справедливым представление

$$[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta], \tag{15.4}$$

где $[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}]$, $[\delta] = [\underline{\delta}, \overline{\delta}]$.

Определение 15.3. Интервальным вектором $[x]$ размерности n называется вектор с интервальными компонентами $[x_i] = [\underline{x_i}, \overline{x_i}]$ так, что становится справедливой запись

$$[x] = col\{[x_i]; i = \overline{1,n}\} \tag{15.5}$$

Определение 15.4. Интервальной $(n \times m)$ – матрицей $[A]$ называется матрица, составленная из интервальных скалярных компонентов

$$[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}], [A] = row\{col([A_{ij}]; i = \overline{1,n})\ j = \overline{1,m}\} \tag{15.6}$$

при этом справедливым оказывается представление

$$[A]=[\underline{A},\overline{A}], \tag{15.7}$$

где $$[\underline{A}]=row\{col([\underline{A}_{ij}];\, i=\overline{1,n})\; j=\overline{1,m}\}, \tag{15.8}$$

$$[\overline{A}]=row\{col([\overline{A}_{ij}];\, i=\overline{1,n})\; j=\overline{1,m}\}. \tag{15.9}$$

Определение 15.5. Произведением

$$[a]\cdot[b]=[c] \tag{15.10}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[c]=[\underline{c},\overline{c}]$, граничные значения которого $\underline{c}$ и $\overline{c}$ вычисляются в силу

$$\underline{c}=min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}, \tag{15.11}$$

$$\overline{c}=max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}. \tag{15.12}$$

Определение 15.6. Суммой

$$[a]+[b]=[d] \tag{15.13}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[d]=[\underline{d},\overline{d}]$, граничные значения которого $\underline{d}$ и $\overline{d}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{d}=min\{\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\overline{b},\overline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}\}=\underline{a}+\underline{b}, \tag{15.14}$$

$$\overline{d}=max\{\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\overline{b},\overline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}\}=\overline{a}+\overline{b}. \tag{15.15}$$

Определение 15.7. Частным от деления

$$\frac{[a]}{[b]}=[f] \tag{15.16}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[f]=[\underline{f},\overline{f}]$, граничные значения которого $\underline{f}$ и $\overline{f}$ вычисляются в силу выражений

$$\underline{f}=min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\},\ \overline{f}=max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}. \tag{15.17}$$

Определение 15.8. Разностью

$$[a]-[b]=[d] \tag{15.18}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[h]=[\underline{h},\overline{h}]$, граничные значения которого $\underline{h}$ и $\overline{h}$ определяются с помощью выражений

$$\underline{h}=min\{\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\}, \tag{15.19}$$

$$\underline{h}=max\{\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\}. \tag{15.20}$$

Определение 15.9. Фиксированное число g имеет интервальное представление $[g]=[\underline{g},\overline{g}]$, которое характеризуется выполнением равенства

$$\underline{g}=\overline{g}. \tag{15.21}$$

Утверждение 15.1. Частное от деления интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ на самое себя является интервальное число $[1_a]=[\underline{1}_a,\overline{1}_a]$

$$\frac{[a]}{[a]}=[1_a], \tag{15.22}$$

граничные значения которого $\underline{1}_a$ и $\overline{1}_a$ в силу (15.17) вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{1}_a=min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}},\frac{\underline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\}, \tag{15.23}$$

$$\overline{1}_a=max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}},\frac{\underline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\}. \tag{15.24}$$

Утверждение 15.2. Разностью интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$

$$[a]-[a]=[0_a] \tag{15.25}$$

является интервальное число $[0_a]=[\underline{0}_a,\overline{0}_a]$, граничные значения которого $\underline{0}_a$, $\overline{0}_a$ в силу (15.14), (15.15) задаются соотношениями

$$\underline{0}_a=min\{\underline{a}-\underline{a},\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a},\overline{a}-\overline{a}\}, \tag{15.26}$$

$$\underline{0}_a=max\{\underline{a}-\underline{a},\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a},\overline{a}-\overline{a}\}. \tag{15.27}$$

Определение 15.10. Медианой $mid\ [a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ называется фиксированное число a_0, задаваемое соотношением

$$mid[a]=a_0=0.5(\overline{a}+\underline{a}). \tag{15.28}$$

Определение 15.11. Интервальным компонентом $wid\ [a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ называется интервальное число $[\Delta a]=[\underline{\Delta a},\overline{\Delta a}]$, граничные значения которого $\underline{\Delta a}$ и $\overline{\Delta a}$ задаются с помощью соотношений

$$\underline{\Delta a}=\underline{a}-a_0,\ \overline{\Delta a}=\overline{a}-a_0, \tag{15.29}$$

Утверждение 15.3. Интервальное число $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ в силу (15.28), (15.29), а также (15.14), (15.15), (15.21) представимо в виде аддитивной композиции

$$[a]=a_0+[\Delta a], \tag{15.30}$$

Определение 15.12. Медианой $mid[a]$ интервальной $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$, называется матрица A_0 с фиксированными скалярными компонентами A_{0ij}

$$A_0=row\{col(A_{0ij};i=\overline{1,n});\ j=\overline{1,m}\} \tag{15.31}$$

где элементы A_{0ij} матрицы A_0 задаются соотношением

$$A_{0ij}=mid\{[A_{ij}]=[\underline{A}_{ij},\overline{A}_{ij}]\}=0.5(\underline{A}_{ij}+\overline{A}_{ij}). \tag{15.32}$$

Определение 15.13. Интервальным матричным компонентом $wid[A]$ интервальной матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ называется интервальная матрица $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$, граничные реализации которой $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ задаются соотношениями

$$[\underline{\Delta A}]=\underline{A}-A_0=col\{row([\underline{\Delta A}_{ij}]=\underline{A}_{ij}-A_{0ij};\, i=\overline{1,n})\; j=\overline{1,m}\}, \qquad (15.33)$$

$$[\overline{\Delta A}]=\overline{A}-A_0=col\{row([\overline{\Delta A}_{ij}]=\overline{A}_{ij}-A_{0ij};\, i=\overline{1,n})\; j=\overline{1,m}\} \qquad (15.34)$$

Утверждение 15.4. Интервальная $(n\times m)$ – матрица $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ в силу (15.31), (15.33), (15.34), а также (15.32), (15.9) представима в аддитивной форме

$$[A]=A_0+[\Delta A], \qquad (15.35)$$

где $A_0=mid[A], [\Delta A]=wid[A]$.

Определение 15.14. Произведением интервальных $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ и $(m\times k)$ – матрицы $[B]=[\underline{B},\overline{B}]$

$$[A]\times[B]=[C] \qquad (15.36)$$

называется интервальная $(n\times k)$ – матрица $[C]=[\underline{C},\overline{C}]$ с интервальными скалярными элементами $[C_{il}]=[\underline{C}_{il},\overline{C_{il}}]$, вычисляемыми в силу соотношений

$$[C_{il}]=\sum_{j=i}^{m}[A_{ij}][B_{ij}];\; i=\overline{1,n};\; l=\overline{1,k}, \qquad (15.37)$$

где произведение $[A_{ij}][B_{ij}]$ интервальных чисел определяется в соответствии с (15.10), (15.11), (15.12) а суммирование этих произведений осуществляется в соответствии с (15.13), (15.14), (П.15).

Определение 15.15. Угловой реализацией $(A_c)_\upsilon$ $(n\times m)$ - интервальной матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]=A_0+[\Delta A]$, получаемой в результате υ-й выборки $\upsilon=\overline{1,2^{nm}}$ из множества мощностью, равной (nm) пар $\{\underline{A}_{ij},\overline{A}_{ij}\}, i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m}$ граничных значений интервальных скалярных компонентов $[A_{ij}]$ матрицы $[A]$, называется матрица

$$(A_c)_\upsilon=row\{col((A_{cij})_\upsilon\in\{\underline{A}_{ij},A_{ij}\}, i=\overline{1,n});\; j=\overline{1,m}\} \qquad (15.38)$$

с фиксированными на этой реализации компонентами.

Утверждение 15.5. Пусть $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$ интервальный матричный компонент матрицы $[A]$, определенной в силу факторизации в форме (15.35), тогда интервальные компоненты $[\Delta A_{ij}]=[\underline{\Delta A}_{ij},\Delta\overline{A}_{ij}], i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m}$ обладают тем свойством, что

$$|\underline{\Delta A}_{ij}|=|\overline{\Delta A}_{ij}|, i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m}, \qquad (15.39)$$

которое выполняется в силу (15.31), (15.32).

Утверждение 15.6. Угловые реализации $(\Delta A_c)_\upsilon$ и $(\Delta A_c)_\mu$ $(n\times m)$- интервальной матрицы $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$ с граничными компонентами $\underline{\Delta A}$

и $\overline{\Delta A}$ (15.33), (15.34), полученных в результате υ-й и μ-й выборок $\upsilon, \mu = \overline{1,2^{mn}}$ в силу (15.38) и свойства (15.39) обладают равными матричными нормами так, что выполняется равенство

$$\left\|(\Delta A_c)_\upsilon\right\| = \left\|(\Delta A_c)_\mu\right\|; \upsilon, \mu = \overline{1,2^{mn}}. \qquad (15.40)$$

Определение 15.16. Интервальным полиномом $[D(z)]$ степени n называется полином, коэффициенты которого являются интервальными числами так, что он принимает вид

$$[D(z)] = [a_0]z^n + [a_1]z^{n-1} + [a_2]z^{n-2} + ... + [a_{n-1}]z + [a_n] \qquad (15.41)$$

где $[a_i] = [\underline{a}_i, \overline{a}_i]; i = \overline{0,n}$

Определение 15.17. Интервальным характеристическим полиномом ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной $(n \times n)$ - матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ называется интервальный полином степени n, получаемый в силу определения характеристического полинома $(n \times n)$ - квадратной матрицы

$$\det(\lambda I - [A]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + ... + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] \qquad (15.42)$$

так, что $[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [A])$.

При формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[A]$ системы необходимо отметить проблему объема вычислений. Очевидно, если размерность матрицы $[A]$ составляет $(n \times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(A)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[A]$ составляет $2^{n \times n}$, минимальная мощность этого множества составляет 2^n, что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как *диагональное и фробениусово*. Однако независимо от базиса мощность множества $\{(A)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксировано на уровне 2^p, где p – число исходных интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров . Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий *рост ширины* $wid\,[a_\ell]$ *системных интервальных параметров* $[a_\ell]$. *Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности* $[a_\ell] - [a_\ell]$ *и частного от деления* $[a_\ell]/[a_\ell]$. Очевидно, в силу параметризованных представлений $a_\ell(q) - a_\ell(q) = 0$ и $=1$ в том числе и при $q = 0$ и $q = 1$. Таким образом без нарушения существа интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением $[a_\ell] - [a_\ell] = 0, [a_\ell]/[a_\ell] = 1$.

Приведем несколько способов вычисления коэффициентов ИХП интервальной $(n \times n)$ матрицы [A].

Способ 1. Способ основан на обобщенной теореме Ф. Виета. Пусть спектр собственных значений интервальной матрицы [A]

$$\sigma\{[A]\} = \left\{[\lambda_i] = [\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i] : \det(\lambda I - [A]) = 0; i = \overline{1,n}\right\} \qquad (15.43)$$

известен, тогда ИХП (П.42) представим в форме

$$[D(\lambda)] = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + ... + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - [\lambda_i]), \qquad (15.44)$$

где $[a_0] = [1,1] = 1$

Обобщенная теорема Виета устанавливает связь собственных значений $[\lambda_i]$ с коэффициентами $[a_i]; i = \overline{1,n}$ в форме

$$[a_1] = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 = -tr[A], \qquad (15.45)$$

$$[a_2] = \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ i3=3}}^{n} [\lambda_{i1}][\lambda_{i2}], \qquad (15.46)$$

$$[a_3] = -\sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ i3=3 \\ i1<i2<i3}}^{n} [\lambda_{i1}][\lambda_{i2}][\lambda_{i3}]; \qquad (15.47)$$

$$[a_{n-1}] = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ \vdots \\ i(n-1)=n-1 \\ i1<i2<\cdots<i(m-1)}}^{n} [\lambda_{i1}]\,[\lambda_{i2}]\cdots[\lambda_{im-1}]; \qquad (15.48)$$

$$[a_n] = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} [\lambda_i]. \qquad (15.49)$$

Способ 2. Способ Г. Крамера главных миноров:

$$[a_1] = -tR[A] = -\left[\sum_{i=1}^{n} \underline{A}_{ij}, \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{ij}}\right], \qquad (15.50)$$

$$[a_k] = (-1)^k \sum_{i=1}^{k} [M_{ii}], \qquad (15.51)$$

где $[M_{ii}]$ алгебраическое дополнение (ii)–го элемента [A_{ii}] матрицы [A];

$$[a_n] = (-1)^n det[A]. \qquad (15.52)$$

Способ 3. Способ У.Ж.Ж. Леверье:

$$[a_k] = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} [a_{i-1}] tr\left[A^{k-i+1}\right]; k = \overline{1,n};\ [a_0] = 1 \qquad (15.53)$$

Способ 4. Способ Д.К. Фадеева:

$$[a_k] = -\frac{1}{k} tr\{[A][H_{k-1}]\}; k = \overline{1,n}, \qquad (15.54)$$

где

$$[H_k] = [A][H_{k-1}] + [a_k]I; [H_0 = I] \qquad (15.55)$$

В силу выше изложенного (15.32), (15.33), (15.34) допустимо следующее определение

Определение 15.18. Интервальный матричный компонент $[(*)]$

$$[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)] = (*)_0 + [\underline{\Delta}(*), \overline{\Delta}(*)], \qquad (15.56)$$

может быть охарактеризован показателем абсолютной интервальности,

$$\Delta_I(*) \overset{\Delta}{=} \| [\Delta(*)] \|. \qquad (15.57)$$

Нетрудно видеть, что в силу структуры интервального матричного компонента $[\Delta(*)]$ Фробениусова, а также индуцированные с индексами p=1 и p=∞ нормы всех угловых реализаций этого компонента оказываются фиксированными так, что становится справедливым равенство

$$\Delta_I(*) \overset{\Delta}{=} \| [\Delta(*)] \| = \| \underline{\Delta}(*) \| = \| \overline{\Delta}(*) \|. \qquad (15.58)$$

Это же положение оказывается справедливым для индуцированной нормы с индексом p=2 (спектральной нормы) в силу справедливости соотношения $\|(\circ)\|_2 \le \{\|(\circ)\|_1 \|(\circ)\|_\infty\}^{1/2}$ для ее оценки через нормы с индексами p=1 и p=∞.

Определение 15.19. Интервальный матричный компонент $[(*)]$ представленный в форме (15.56) может быть охарактеризован показателем $\delta_I(*)$ относительной интервальности задаваемым соотношением

$$\delta_I(*) = \frac{\Delta_I(*)}{\| (*)_0 \|}. \qquad (15.59)$$

Последние два определения по существу содержат доказательства следующего утверждения

Утверждение 15.7. *Оценки абсолютной и относительной интервальности* интервальных компонентов исходного интервального объекта (числа, вектора, матрицы) *не являются интервальными числами*.■

В заключении необходимо отметить, что формализм правил интервальной арифметики в процессе приведенных выше преобразований математических выражений содержащих интервальные числа, векторы и матрицы, может наблюдаться заметный рост нормы интервальной части интервального компонента. Этот рост в основном определяется операциями вычитания и деления скалярного интервального элемента соответственного *самого из себя* и *самого на себя*, не приводящими соответственно к нулевому и единичному

результатам. Тем не менее, параметризованная параметром q форма (15.2) интервального скалярного элемента при любых значениях q в перечисленных выше операциях *дает нулевой и единичный результаты*, в том числе и при граничных значениях q=0 и q=1. В этой связи при построении интервальных модельных представлений авторы использовали *модифицированную версию интервальных вычислений* в которых сделаны допущения о справедливости выполнения равенств $[a]-[a]=0$ и $\frac{[a]}{[a]}=1$, что не нарушает существа интервальных вычислений

Необходимо отметить также проблемы объема вычислений при формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[F]$системы. Если размерность матрицы $[F]$ составляет $(n\times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[F]$ составляет $2^{n\times n}$, минимальная мощность этого множества составляет 2^n, что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как диагональное и фробениусово. Независимо от базиса представления мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне 2^p, где p – число исходных интервальных физических параметров. Таким образом целесообразно интервальные вычисления производить не на угловых системных реализациях с накопленной интервальностью, а на угловых реализациях исходных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть, кроме того, заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров.

??? 15.2. Интервальные модели «вход-состояние-выход» динамических объектов

Обратимся к способам построения моделей «вход-состояние-выход» (ВСВ) интервальных моделей (ИМ) динамических объектов.

Способ 1. Построение модели ВСВ ИМ ОУ по передаточной функции с интервальными коэффициентами

$$\underbrace{\Phi(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{\bar{b}_0 s^m+\bar{b}_1 s^{m-1}+\ldots+\bar{b}_{m-1}s+\bar{b}_m}{\bar{a}_0 s^n+\bar{a}_1 s^{n-1}+\ldots+\bar{a}_{n-1}s+\bar{a}_n}}, \; n\ge m \qquad (15.60)$$

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t); y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

Алгоритм

1. Представление передаточной функции $\Phi(s)$ по отрицательным степеням s путём деления всех элементов передаточной функции на член $\bar{a}_0 s^n$, содержащей s в наибольшей степени

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^{-\mu} + b_1 s^{-(\mu+1)} + \ldots + b_{\mu-1} s^{-(n-1)} + b_m s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + \ldots + a s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}} \qquad (2)$$

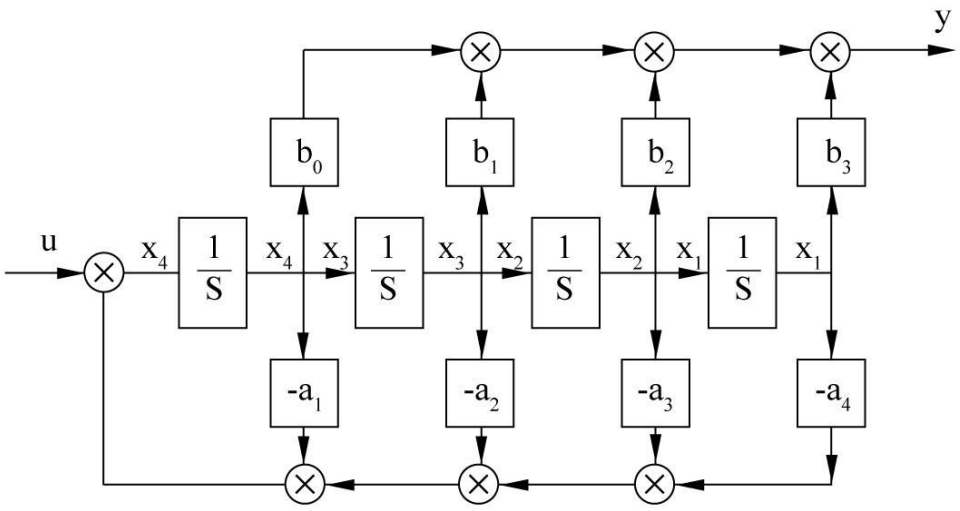
где $b_j = \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_0}; j = \overline{o,m}; a_i = \frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_0}; j = \overline{1,u}; \mu = n - m$

2. Учесть, что $s^{-1} = \frac{1}{s}$ есть передаточная функция интегратора

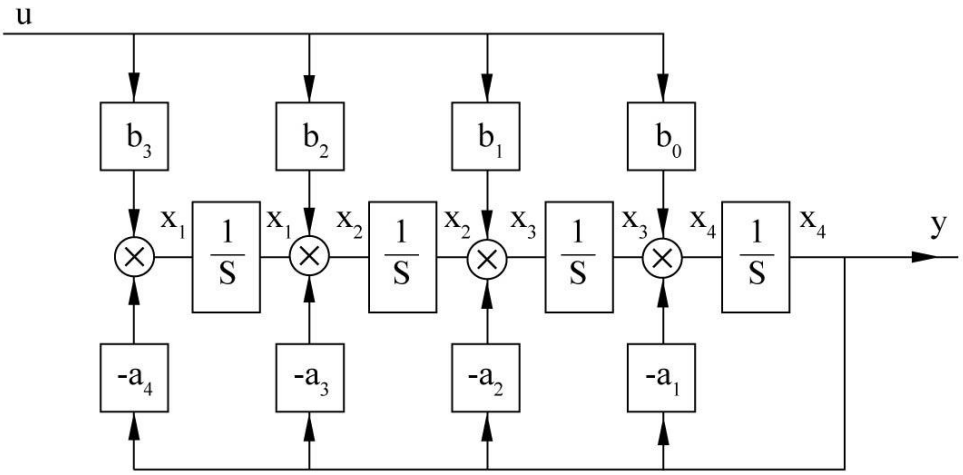
3. Пользуясь правилом Мейсона, построить структурную реализацию передаточной функции на интеграторах в двух возможных базисах:

3.1. (Положим $m = 3; n = 4$)

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_2 s^{-3} + b_3 s^{-4}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3} + a_4 s^{-4}} \qquad (3)$$



3.2.



4. «Отметить» построенные структурные представления передаточной функции, построенной по отрицательным степеням s, для чего в определённом порядке выходам интеграторов приписать переменные. $x_i (i = \overline{1,n})$, а непосредственным входам интеграторов

– производные $\dot{x}_i (\tau = \overline{1,4})$

5. Списать с отмеченных структурных реализаций матрицы A, B, C, D

Для пункта 3.1. и 3.2. составим уравнения состояния и выхода по которым построим матрицы A, B, C, D

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot u\\
&\dot{x}_2 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot u\\
&\dot{x}_3 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot u\\
&\dot{x}_4 = -a_4 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 - a_1 x_4 + 1\cdot u\\
&y = b_3 x_1 + b_2 x_2 + b_1 x_3 + b_0 x_4 + 0\cdot u\\
&\dot{x} = Ax + Bu;\ y = Cx + Du
\end{aligned} \tag{4}$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} : C = \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$ $D = [0]$ (5)

для 3.2.

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - a_4 x_4 + b_3 u\\
&\dot{x}_2 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - a_3 x_4 + b_2 u\\
&\dot{x}_3 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - a_2 x_4 + b_1 u\\
&\dot{x}_4 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 - a_1 x_4 + b_0 u\\
&y = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_3 + 0\cdot u\\
&\dot{x} = Ax + Bu;\ y = Cx + Du
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu;\ y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4\\ 1 & 0 & 0 & -a_3\\ 0 & 1 & 0 & -a_2\\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} : B = \begin{bmatrix} b_3\\ b_2\\ b_1\\ b_0 \end{bmatrix} : C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [0] \tag{7}$$

Пример

Построить (A, B, C, D)-представление ОУ по передаточной функции

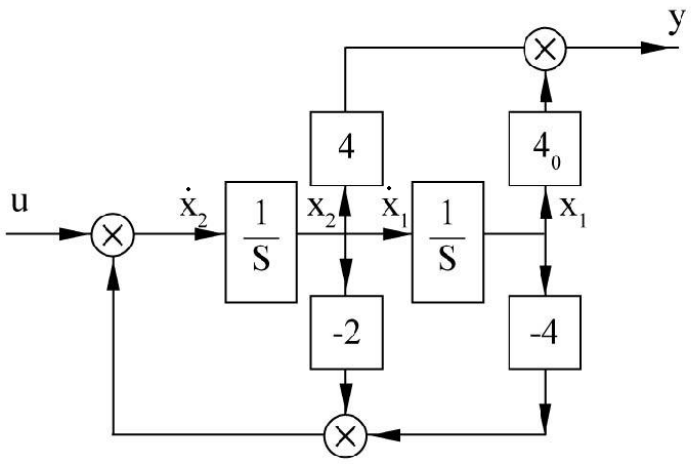
$$\Phi(s) = \frac{10(0{,}1s + 1)}{0{,}25s^2 + 0{,}5s + 1} \tag{8}$$

Решение

1. $\Phi(s) = \dfrac{s+10}{0{,}25s^2 + 0{,}5s + 1} = \dfrac{4\dfrac{1}{s} + 40\dfrac{1}{s^2}}{1 + 2\dfrac{1}{s} + 4\dfrac{1}{s^2}}$ (9)

2. Структурные реализации $\Phi(s)$

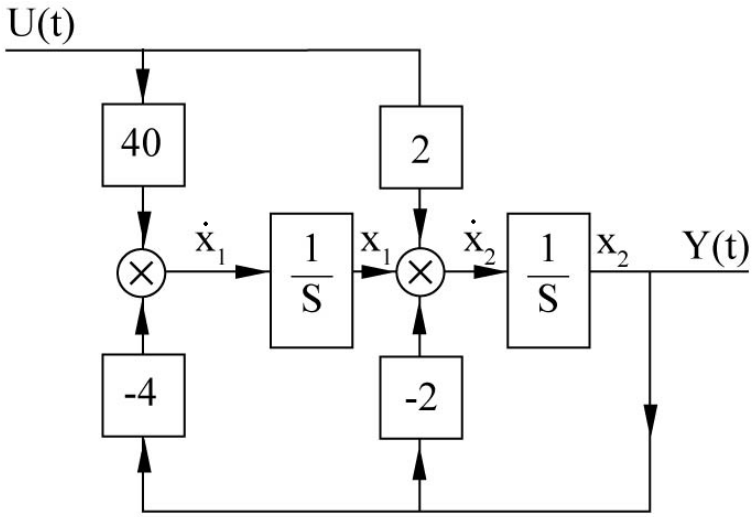
2.1.



$\dot{x} = Ax + Bu : y = Cx + Du$ (10)

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} : B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : C = \begin{bmatrix} 40 & 4 \end{bmatrix} : D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

2.2.



$$\dot{x} = Ax + Bu : y = Cx + Du \tag{11}$$

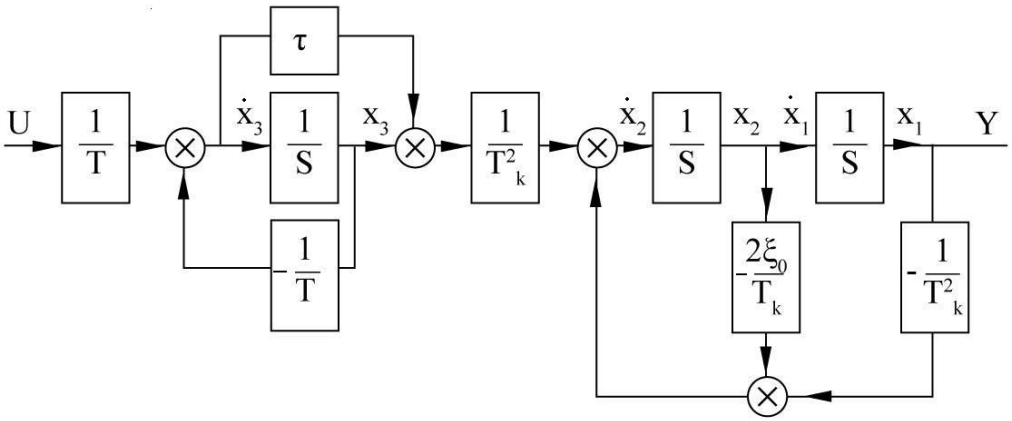
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} : B = \begin{bmatrix} 40 \\ 2 \end{bmatrix} : C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} : D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

II. Построение (A, B, C, D)-представления в физическом базисе

$$\Phi(s) = W_{КЗ}(s) W_K(s) = \frac{\tau S + 1}{TS + 1} \cdot \frac{K}{T_k{}^2 S^2 + 2\xi T_k S + 1} \tag{12}$$

1. Запись передаточных функций звеньев по отрицательным степеням S

$$\Phi(s) = \frac{\frac{\tau}{T} + \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{S}}{1 + \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{S}} \cdot \frac{\frac{K}{T_k^2} \cdot \frac{1}{S^2}}{1 + \frac{2\xi}{T_k} \cdot \frac{1}{S} + \frac{1}{T_k^2} \cdot \frac{1}{S^2}} \tag{13}$$



$$\dot{x} = Ax + Bu : y = Cx \qquad (14)$$

2. Считывание матричных компонентов с отмеченных структурных схем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{T_k^2} & -\dfrac{2\xi}{T_k} & \dfrac{K}{T_k^2}\left(1-\dfrac{\tau}{T}\right) \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{T} \end{bmatrix} : B \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\tau}{T}\cdot\dfrac{K}{T_k^2} \\ \dfrac{1}{T} \end{bmatrix} : C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0] \qquad (15)$$

Задание.

Построить (A, B, C, D)-представление по передаточным функциям:

1. $\Phi(s) = \dfrac{10(s+1)}{0{,}1s^2 + 0{,}4s + 1}$ в двух базисах;
2. $\Phi(s) = \dfrac{1}{0{,}25s+1} \cdot \dfrac{0{,}25s+1}{0{,}05s^2 + 0{,}2s + 1}$ в физическом базисе;
3. 3. $\Phi(s) = \dfrac{5s+1}{(0{,}25s+1)(s+1)}$;
4. $\Phi(s) = \dfrac{2s+1}{0{,}1s+1} \cdot \dfrac{10}{(2s+1)s}$ в физическом базисе

Примеры и задачи

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РЯДЫ ФУРЬЕ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П1.1 (ОП1.1). Пусть функция $f(t)$ принадлежит *функциональному пространству* L_T^p, где $p=1, T=\{t:-T/2\le t\le T/2\}$, то есть она имеет ограниченную *абсолютную норму*, иначе говоря, является *интегрируемой абсолютно* в том смысле, что

$$\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|dt = const < \infty. \qquad (П1.1)$$

Тогда на интервале $T=\{t:-T/2\le t\le T/2\}$ функция $f(t)$ представима бесконечным дискретным рядом Фурье

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega t}, \text{ где } \omega=2\pi/T, \qquad (П1.2)$$

при этом коэффициенты C_k разложения вычисляются по правилам вычисления скалярных произведений элементов *функционального пространства* L_T^p в виде интегралов Эйлера – Фурье

$$C_k = T^{-1}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt. \qquad \square(П1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П1.2 (ОП1.2). Пусть функция $f(t)$ принадлежит *функциональному пространству* L_T^p, где $p=1, T=\{t:-\infty<t<+\infty\}$, то есть она имеет ограниченную *абсолютную норму*. Иначе говоря, функция является *интегрируемой абсолютно* в том смысле, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt = const < \infty. \qquad (П1.4)$$

Тогда на интервале $T=\{t:-\infty<t<+\infty\}$ функция $f(t)$ представима *обратным интегралом* Фурье

$$f(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \qquad (П1.5)$$

где $F(j\omega)$ ищется с помощью *прямого интеграла* Фурье

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (П1.6)$$

Тогда *интегральное преобразование* $F\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt = F(j\omega)$ именуется *прямым преобразованием* Фурье, *интегральное преобразование*

$F^{-1}\{F(j\omega)\}=(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=f(t)$ именуется *обратным преобразованием* Фурье. □

При этом $f(t)$ называется *оригиналом*, а $F(j\omega)$ называется *образом* (преобразованием) Фурье *интегрируемой абсолютно* функции $f(t)$. Пару $\{f(t),F(j\omega)\}$ называют *взаимными трансформантами* Фурье.

Функция $F(j\omega)$ мнимого аргумента является *комплексным сплошным частотным спектром* функции $f(t)$, составленным из комплексных гармоник $e^{j\omega t}$ с амплитудой $|F(j\omega)|$ и фазой $\varphi(\omega)=arg\{F(j\omega)\}$

УТВЕРЖДЕНИЕ П1.1 (УП1.1). Пусть функция $f(t)$ такова, что $f(t)\equiv 0$ при $-\infty<t<0$, $f(t)=f(t)\neq 0$ при $0\le t<\infty$ и при этом она не принадлежит *функциональному пространству* L_T^p, где $p=1, T=\{t:-\infty<t<+\infty\}$ в силу того, что она не имеет ограниченную *абсолютную норму*, иначе говоря, не является *интегрируемой абсолютно* в том смысле, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\tau}|f(t)|dt=\lim_{\tau\to\infty}\int\limits_{0}^{\tau}|f(t)|dt=\infty. \qquad (П1.7)$$

Пусть функция $f_1(t)$ такова, что $f_1(t)\equiv 0$ при $-\infty<t<0$, $f_1(t)=f(t)e^{-ct}\neq 0$ при $0\le t<\infty$ и при этом она принадлежит *функциональному пространству* L_T^p, где $p=1, T=\{t:-\infty<t<+\infty\}$ в силу того, что она при некотором $c>0$ имеет ограниченную *абсолютную норму*, иначе говоря, является *интегрируемой абсолютно* в том смысле, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_1(t)|dt=\int\limits_{0}^{\infty}|f(t)|e^{-ct}dt=const<\infty. \qquad (П1.8)$$

Тогда преобразование Фурье $F\{f_1(t)\}=F_1(j\omega)$ функции $f_1(t)$ порождает преобразование Лапласа $L\{f(t)\}=F(s)$, где $s=c+j\omega$, функции $f(t)$ с абсциссой сходимости c. □■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П1.3(ОП1.3). *Прямым преобразованием* Лапласа функции $f(t)$ действительного аргумента t с абсциссой сходимости c называется интегральное преобразование

$$L\{f(t)\}=\int\limits_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=F(s). \qquad □(П1.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П1.4(ОП1.). *Обратным преобразованием* Лапласа функции $F(s)$ комплексного аргумента $s=c+j\omega$ называется интегральное преобразование

$$L^{-1}\{F(s)\} = (2\pi j)^{-1} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = f(t). \qquad \square(\text{П}1.10)$$

В (П1.9) и (П1.10) $f(t)$ – оригинал с абсциссой сходимости c, $F(s)$ – лапласов образ (преобразование Лапласа, изображение Лапласа) функции $f(t)$ действительного аргумента t.

ПРИМЕЧАНИЕ П1.1(ПРП1.1). Нетрудно понять, что преобразование Лапласа существует только для тех функций $f(t)$, абсцисса сходимости которых конечна. В этой связи существуют функции, которые не преобразуемы по Лапласу. Примером такой функции является функция $f(t) = e^{t^2}$.

Основные свойства преобразования Лапласа

Таблица П1.1.

Свойство преобразования Лапласа (ПЛ)	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s) = L\{f(t)\}$
1. Линейность ПЛ	$f(t) = a\, f_1(t) + b\, f_2(t)$, $a, b -$ константы	$F(s) = a F_1(s) + b F_2(s)$
2.Правило вычисление ПЛ от производной от оригинала по времени	а) $\dot{f}(t)$ б) $f^{(r)}(t)$, $r \geq 1$	а) $L\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$ б) $L\{f^{r}(t)\} = s^r F(s) - s^{r-1} f(0) - s^{r-2} \dot{f}(0) - \ldots - f^{(r-1)}(0)$
3. Правило вычисление ПЛ от интеграла от оригинала по времени	а) $\int f(t)dt = f_{(-1)}(t)$ б) $\int\int\ldots\int f(t)dtdt\ldots dt = f_{(-r)}(t)$ $- r -$ кратный интеграл	а) $L\{f_{(-1)}(t)\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{f_{(-1)}(0)}{s}$ б) $L\{f_{(-r)}(t)\} = \frac{F(s)}{s^r} + \sum_{k=1}^{r} \frac{f_{(-k)}(0)}{s^k}$
4.Правило изменения масштаба	$f(at)$, $(a > 0)$	$L\{af(t)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
5. Правило вычисление ПЛ от оригинала со сдвинутым аргументом	$f(t-b)$, $(b > 0)$	$L\{f(t-b)\} = e^{-bs} F(s)$
6. Правило формирование изображения со сдвинутым	$e^{at} f(t)$	$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

комплексным аргументом		
7. Теорема о начальном значении оригинала	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=?$	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$
8. Теорема о конечном значении оригинала	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=?$	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$
9. Правило формирование изображения от свертки оригиналов	$f(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$L\{f(t)\}=F(s)=F_1(s)F_2(s)$
10. Правило формирования изображения в форме свертки изображений сепаратных оригиналов	$f(t)=f_1(t)f_2(t)$	$L\{f(t)\}=F(s)=$ $=(2\pi j)^{-1}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-\sigma)F_2(\sigma)d\sigma$
11. Правило формирование изображения производной и интеграла оригинала по параметру α, независящему от аргументов t и s	а) $f(t)=\frac{\partial}{\partial\alpha}g(t,\alpha)$ б) $f(t)=\int\limits_{a_1}^{a_2} g(t,\alpha)d\alpha$	а) $L\{f(t)\}=F(s)=\frac{\partial}{\partial\alpha}G(s,\alpha)$ б) $L\{f(t)\}=F(s)=\int\limits_{a_1}^{a_2} G(s,\alpha)d\alpha$

Изображения Лапласа оригиналов - типовых воздействий

Таблица П.1.2.

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $L\{f(t)\}=F(s)$
1.	$f(t)=\delta(t)$ – дельта функция	$L\{\delta(t)\}=F(s)=1$
2.	$f(t)=1$ – единичное воздействие	$L\{1\}=F(s)=1/s$
3.	$f(t)=t^n$ – степенное воздействие	$L\{t^n\}=F(s)=n!/s^{(n+1)}$
4.	$f(t)=e^{\lambda t}$ – экспоненциальное воздействие	$L\{e^{\lambda t}\}=F(s)=(s-\lambda)^{-1}$
5.	$f(t)=e^{\lambda t}t^n$ экспоненциально степенное воздействие	$L\{e^{\lambda t}t^n\}=F(s)=n!/(s-\lambda)^{n+1}$

6.	$f(t)=\sin\omega t$ - синусоидальное гармоническое воздействие	$L\{sin\omega t\}=F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$f(t)=\cos\omega t$ – косинусоидальное гармоническое воздействие	$L\{cos\omega t\}=F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
8.	$f(t)=e^{\lambda t}\sin\omega t$ – затухающее синусоидальное воздействие $(\lambda<0)$	$L\{e^{\lambda t}sin\omega t\}=F(s)=\dfrac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$
9.	$f(t)=e^{\lambda t}\cos\omega t$ – затухающее косинусоидальное воздействие $(\lambda<0)$	$L\{e^{\lambda t}cos\omega t\}=F(s)=\dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$
10.	$f(t)=g(t)\sin\omega t$ – синусоидально-модулированное воздействие	$L\{g(t)sin\omega t\}=F(s)=\dfrac{1}{2j}\left\{\begin{matrix}G(s-j\omega)-\\-G(s+j\omega)\end{matrix}\right\}$
11.	$f(t)=g(t)\cos\omega t$ – косинусоидально-модулированное воздействие	$L\{g(t)cos\omega t\}=F(s)=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}G(s-j\omega)+\\+G(s+j\omega)\end{matrix}\right\}$
12.	$f(t)=\lvert\sin\omega t\rvert$ – демодулированное воздействие	$L\{\lvert\sin\omega t\rvert\}=F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1+e^{\frac{-\pi s}{\omega}}}{1-e^{\frac{-\pi s}{\omega}}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Z – ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРАНА)

КОНЦЕПЦИЯ П2.1(КП2.1). Прежде чем вводить Z – преобразование и изучать его свойства, подойдем к этой проблеме, опираясь на некоторую *аппаратную техническую среду* и преобразование Лапласа.

Пусть непрерывный сигнал $f(t)$, преобразуемый по Лапласу, в некоторой *аппаратной технической среде* претерпевает двухфазное преобразование. *Первая фаза* преобразования состоит в том, что с *интервалом дискретности* длительности Δt из сигнала $f(t)$ формируется *дискретная выборка*

$$f(k\Delta t):\ f(0),\ f(\Delta t),\ f(2\Delta t)\ldots f((k-1)\Delta t),\ f(k\Delta t),\ f((k+1)\Delta t)\ldots \qquad (\text{П}2.1)$$

со значениями $f(k\Delta t) = f(t)|_{t=k\Delta t}$, компактная форма записи которой имеет вид

$$f(k):\ f(0),\ f(1),\ f(2)\ldots f(k-1),\ f(k),\ f(k+1)\ldots, \qquad (\text{П}2.2)$$

где k – дискретное время, выраженное в числе тактов (интервалов дискретности) длительности Δt, так что непрерывное и дискретное время связаны соотношением $t = k\Delta t$, при этом $f(k)$ вида (П2.2) именуется *дискретной последовательностью*, порожденной парой $\{f(t), \Delta t\}$.

Вторая фаза преобразования состоит в формировании из дискретной последовательности (П2.2), наблюдаемой на выходе фиксатора (запоминающего элемента) *нулевого порядка*, кусочно – постоянного сигнала

$$f^*(t):\ f^*(t) = f(k\Delta t) \text{ при } k\Delta t \le t < (k+1)\Delta t. \qquad (\text{П}2.3)$$

Сигнал $f^*(t)$ преобразуем по Лапласу в силу преобразуемости по Лапласу сигнала $f(t)$, тогда для него можно записать

$$L\{f^*(t)\} = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty f(k\Delta t)\right\} e^{-st}dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(k\Delta t)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^\infty f(k\Delta t)\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-st}dt =$$
$$= \frac{1-e^{-s\Delta t}}{s}\sum_{k=0}^\infty f(k\Delta t)e^{-k\Delta ts}. \qquad (\text{П}2.4)$$

Если в (П2.4) учесть, что $\dfrac{1-e^{-s\Delta t}}{s} = W_\phi(s)$ – передаточная функция фиксатора нулевого порядка, то тогда для лапласова образа дискретной последовательности (П2.2) имеем

$$L\{f(k)\} = \sum_{k=0}^\infty f(k)\left(e^{\Delta ts}\right)^{-k}. \qquad (\text{П}2.5)$$

Введем обозначение

$$e^{\Delta ts} = z, \qquad (П2.6)$$

и введем в рассмотрение Z – преобразование дискретных последовательностей с помощью следующих определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П2.1(ОП2.1). Прямым Z – преобразованием (преобразованием Лорана) $Z\{f(k)\} = F(z)$ дискретной последовательности $f(k)$ вида (П2.2) называется бесконечная сумма

$$Z\{f(k)\} = F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + ... + f(k)z^{-k} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \qquad (П2.7)$$

если она сходится. □

$F(z)$ именуется Z – образом дискретной последовательности $f(k)$, а $f(k)$ именуется оригиналом Z – преобразования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П2.2 (ОП2.2). Если воспользоваться выражениями для коэффициентов ряда Лорана, то обратное Z – преобразование $Z^{-1}\{F(z)\} = f(k)$, ставящее Z – образу $F(z)$ в соответствие его оригинал $f(k)$, задается интегральным преобразованием вида

$$f(k) = (2\pi j)^{-1} \int F(z) z^{k-1} dz. \qquad □(П2.8)$$

ПРИМЕЧАНИЕ П2.1(ПРП2.1). При решении практических задач исследования дискретных систем, связанных с восстановлением дискретной последовательности по ее Z – образу в большинстве случаев интегральное преобразование (П2.8) не используется. Используются в основном два способа. *Первый способ* основан на таблице Z – образов наиболее употребительных дискретных последовательностей, *второй* – на представлении Z – образа в виде бесконечной последовательности по отрицательным степеням аргумента z путем деления полинома числителя на полином знаменателя Z – образа.

Основные свойства Z – преобразования

Таблица П2.1.

Свойство Z - преобразования (ZП)	Оригинал $f(k)$	Изображение $F(z) = Z\{f(k)\}$
1. Линейность ZП	$f(k) = a\, f_1(k) + b\, f_2(k)$, a, b – константы	$F(z) = a F_1(z) + b F_2(z)$
2. Правило вычисления ZП от смещенной последовательности	$f(k+m)$	$Z\{f(k+m)\} = = z^m \left\{ F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(i) z^{-i} \right\}$
3.Теорема изменения масштаба в области комплекс-	$\alpha^{-\kappa} f(k)$ $\alpha^{\kappa} f(k)$	$Z\{\alpha^{-\kappa} f(k)\} = F(\alpha z)$ $Z\{\alpha^{\kappa} f(k)\} = F(\alpha^{-1} z)$

ного аргумента z		
4. Правило вычисление ZП от разности	$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$	$Z\{\Delta f(k)\} = (z-1)F(z) - zf(0)$
5. Правило вычисление ZП от конечной суммы	$\sum_{i=0}^{k-1} f(i)$ $\sum_{i=0}^{k} f(i)$	$Z\left\{\sum_{i=0}^{k-1} f(i)\right\} = (z-1)^{-1}F(z)$ $Z\left\{\sum_{i=0}^{k} f(i)\right\} = z(z-1)^{-1}F(z)$
6 Теорема о начальном значении оригинала.	$f(0) = \lim_{k\to 0_+} f(k) = ?$	$f(0) = \lim_{k\to 0_+} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
7. Теорема о конечном значении оригинала	$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(k) = ?$	$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$
8. Правило формирование ZП от свертки оригиналов	$\sum_{i=0}^{k} f_1(k-i)f_2(i)$	$Z\left\{\sum_{i=0}^{k} f_1(k-i)f_2(i)\right\} = F_1(z)F_2(z)$

Z – образы оригиналов - типовых последовательностей

Таблица П.2.2.

№	Оригинал $f(k)$	Z – образ $Z\{f(k)\} = F(z)$
1.	$f(k) = \delta(k)$ - дискретная дельта функция (оди - ночный единичный импульс)	$Z\{\delta(k)\} = F(z) = 1$
2.	$f(k) = 1(k)$ – единичная дискретная последовательность (унитарный код)	$Z\{1(k)\} = F(z) = z(z-1)^{-1}$
3.	$f(k) = \alpha^k$ - степенная дискретная последовательность	$Z\{\alpha^k\} = F(z) = z(z-\alpha)^{-1}$
4.	$f(k) = k$ - линейно нарастающая дискретная последовательность	$Z\{k\} = F(z) = z(z-1)^{-2}$
5.	$f(k) = \sin\omega k$ - синусоидальная дискретная последова - тельность	$Z\{\sin\omega k\} = F(z) = \dfrac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$

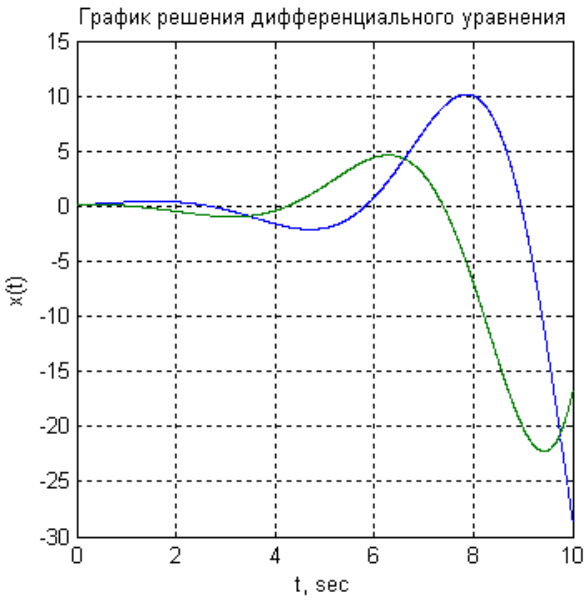
6.	$f(k)=\cos\omega\, k$ - косинусоидальная дискретная последовательность	$Z\{\cos\omega k\}=F(z)=\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$
7.	$f(k)=\alpha^k\sin\omega\, k$ - затухающая синусоидальная дискретная последовательность $(\alpha<1)$	$Z\{\alpha^k\sin\omega k\}=F(z)=\dfrac{\alpha\, z\sin\omega}{z^2-2\alpha\, z\cos\omega+\alpha^2}$
8.	$f(k)=\alpha^k\cos\omega\, k$ - затухающая косинусоидальная дискретная последовательность $(\alpha<1)$	$Z\{\alpha^k\cos\omega k\}=F(z)=\dfrac{z(z-\alpha\, z\cos\omega)}{z^2-2\alpha\, z\cos\omega+\alpha^2}$

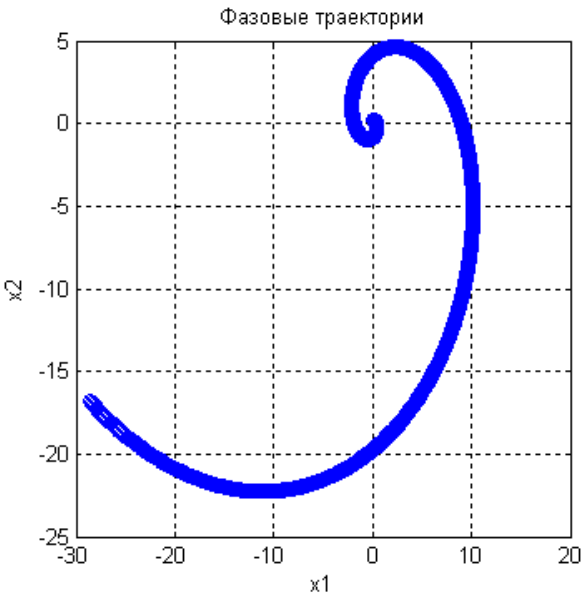
ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление матричной экспоненты в задаче исследования системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

```
%Ввод начальных данных
A=input('Введите матрицу состояний системы A=')
x0=input('Введите вектор начальных условий x0=')
t0=input('Введите начальное время t0=')
tk=input('Введите конечное время tk=')
dt=input('Введите шаг приращения временной оси dt=')
title('Построение графика решения уравнения системы и фазовых
траекторий')
for t=t0:dt:tk
% Вычисление решения уравнения системы  x(t)={exp(At)}x(0)
xt=expm(t*A)*x0;
% Построение графика решения уравнения системы
subplot(1,2,1), plot(t,xt),hold on, xlabel('t, sec'), ylabel('x(t)'), grid
title('Графики решения уравнения системы')
% Построение фазовой траектории на плоскости
subplot(1,2,2), plot(xt(1,:),xt(2,:),'-o'),hold on, xlabel('x1'), ylabel('x2'), grid
title('Фазовые траектории')
end;
```





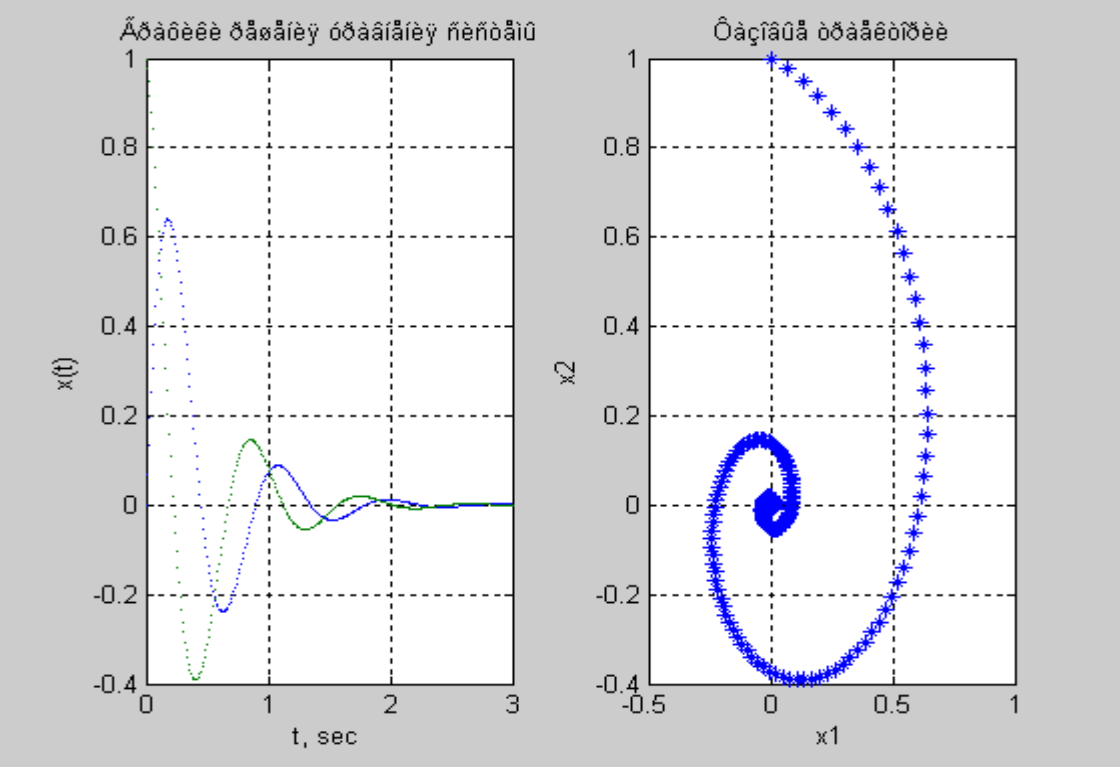
Графики приведены для системы с матрицей состояний $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$ и вектором начальных условий $x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление матричной экспоненты в задаче исследования системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

```
%Ввод начальных данных
%('Введите матрицу состояний системы A=')
A=[-2.2 7; -7 -2.2]
%('Введите вектор начальных условий x0=')
x0=[0;1]
%('Введите начальное время t0=')
t0=0
%('Введите конечное время tk=')
tk=3
%('Введите шаг приращения временной оси dt=')
dt=0.01
for t=t0:dt:tk
% Вычисление решения уравнения системы  x(t)={exp(At)}x(0)
xt=expm(t*A)*x0;
% Построение графика решения уравнения системы
subplot(1,2,1), plot(t,xt),hold on, xlabel('t, sec'), ylabel('x(t)'), grid
title('Графики решения уравнения системы')
% Построение фазовой траектории на плоскости
subplot(1,2,2), plot(xt(1,:),xt(2,:),'*'),hold on, xlabel('x1'), ylabel('x2'), grid
title('Фазовые траектории')
end;
```



ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Матрицы и действия с ними

Материал приложения излагается в форме системы определений и примечаний к ним.

Определение П4.1. Матрицей A размерности $(m \times n)$ называется двумерный массив (таблица) из m строк и n столбцов, составленный из элементов A_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, расположенных на пересечении i – й строки и j – го столбца . □

Примечание П4.1. Матрица A размерности $(m \times n)$ может также именоваться $(m \times n)$–матрицей A, задаваться в форме $A \in R^{n \times n}$, если элементами матрицы являются действительные числа, или в форме $A \in C^{n \times n}$, если элементами матрицы являются комплексные числа. □

Определение П4.2. Матрица A размерности $(m \times n)$, у которой $m \neq n$, называется *прямоугольной*. □

Определение П4.3. Матрица A размерности $(m \times n)$, у которой $m = n$, называется *квадратной*. □

Определение П4.4. Матрица A размерности $(m \times n)$, у которой $m > 1, n = 1$, называется m–мерным *вектором–столбцом*. □

Определение П4.5. Матрица A размерности $(m \times n)$, у которой $m = 1, n > 1$, называется n–мерным *вектором–строкой*. □

Определение П4.6. Матрица A размерности $(m \times n)$, у которой $m = 1, n = 1$, становится *числом*, если она составлена из числовых элементов. Или иначе, *число* есть *матрица* размерности (1×1). □

Определение П4.7. *Столбцовой* формой представления матрицы A размерности $(m \times n)$ называется ее представление в виде *ряда* (по-аглийски «*row*») из n ее m–мерных столбцов A_j:

$$A = \left[A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_j \quad \ldots \mid A_n \right] = row\left\{ A_j;\ j = \overline{1,n} \right\}. \qquad \square(\text{П}4.1)$$

Примечание П4.2. Столбцы матрицы принято индексировать с помощью *нижнего* правого индекса.

Определение П4.8. *Строчной* формой представления матрица A размерности $(m \times n)$ называется ее представление в виде *столбца* (по-

аглийски «*column*» в сокращении «*col*») из m ее n–мерных *строк* A^i:

$$A=\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^m \end{bmatrix}=col\left\{A^i; i=\overline{1,m}\right\}. \qquad \square(\text{П}4.2)$$

Примечание П4.3. Строки матрицы принято индексировать с помощью *верхнего* правого индекса, что совпадает с обозначением *степени* матрицы. Поэтому, с тем, чтобы не совершать ошибок, следует внимательно следить за математическим *контекстом*, в котором используется верхний правый индекс матрицы.

Определение П4.9. *Поэлементной* формой представления матрицы A размерности $(m\times n)$ называется ее представление в виде

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mj} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}=row\left\{\left[col\left(A_{ij}\right); i=\overline{1,m}\right]; j=\overline{1,n}\right\}$$

$$=col\left\{\left[row\left(A_{ij}\right); j=\overline{1,n}\right]; i=\overline{1,m}\right\}.$$

$\square(\text{П}4.3)$

Определение П4.10. Квадратная матрица A размерности $(n\times n)$, элементы A_{ij} которой удовлетворяют условию

$$A_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j; \\ 0 \text{ при } i\neq j; \end{cases} i, j=\overline{1,n}, \qquad (\text{П}4.4)$$

называется *единичной* и обозначается $A=I$ (иногда встречается обозначение $A=E$). $\square$

Определение П4.11. *Транспонированной* называется $(n\times m)$–матрица A^T, полученная из $(m\times n)$–матрицы A посредством присвоения элементам строк $\left(A^T\right)^j$ значений элементов столбцов A_j

$\left(j=\overline{1,n}\right)$ и присвоения элементам столбцов A_i^T значений элементов строк A^i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. □

Определение П4.12. Квадратная $(n\times n)-$матрица A называется *симметричной*, если выполняется равенство $A=A^T$. □

Определение П4.13. Матрица A размерности $(n\times n)$ называется *ортогональной*, если для нее выполняется соотношение $AA^T=A^TA=I$. □

Определение П4.14. Матрицей, обратной к $(n\times n)-$матрице A, называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая соотношениям

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I. \qquad \square(\text{П}4.5)$$

Примечание П4.4. Обратимая $(n\times n)-$матрица A, т.е. матрица, имеющая себе обратную, называется *невырожденной*. В противном случае она является *вырожденной*. □

Определение П4.15. Квадратная матрица A размерности $(n\times n)$, элементы A_{ij} которой удовлетворяют условию

$$A_{ij}=\begin{cases}\lambda_i \text{ при } i=j;\\ 0 \text{ при } i\neq j;\end{cases} i,j=\overline{1,n}, \qquad (\text{П}4.6)$$

называется *диагональной* и обозначается $A=\Lambda$, причем для Λ используется представление

$$\Lambda=diag\left\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\right\}. \qquad \square(\text{П}4.7)$$

Определение П4.16. Квадратная матрица A размерности $(n\times n)$, элементы A_{ij} которой удовлетворяют условию

$$A_{ij}=\begin{cases}A_{ij}\neq 0 \text{ при } i\leq j;\\ A_{ij}=0 \text{ при } i>j;\end{cases} i,j=\overline{1,n}, \qquad (\text{П}4.8)$$

называется *верхней треугольной.* □

Определение П4.17. Квадратная матрица A размерности $(n\times n)$, элементы A_{ij} которой удовлетворяют условию

$$A_{ij}=\begin{cases}A_{ij}\neq 0 \text{ при } i\geq j;\\ A_{ij}=0 \text{ при } i<j;\end{cases} i,j=\overline{1,n}, \qquad (\text{П}4.9)$$

называется *нижней треугольной.* □

Определение П4.17. Суммой матриц A и B размерности $(m\times n)$ с элементами A_{ij} и B_{ij} соответственно называется $(m\times n)-$ матрица $C=A+B$ с элементами C_{ij}, формируемыми в силу соотношения

$$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right). \qquad \square(\text{П}4.10)$$

Определение П4.18. Произведением матрицы A размерности $(m \times n)$ и матрицы B размерности $(n \times p)$ с элементами A_{ij} и B_{jk} соответственно называется $(m \times p)$– матрица, записываемая в одной из форм $C = A \times B = A \cdot B = AB$ с элементами C_{ik}, формируемыми в силу соотношения

$$C_{ik} = A^i B_k \left(i = \overline{1,m}; k = \overline{1,p} \right), \qquad (П4.11)$$

в котором умножение строки A^i матрицы A на столбец B_k матрицы B производится поэлементно с последующим суммированием результатов по правилам скалярного произведения векторов. □

Примечание П4.5. Из соотношения (П4.11) видно, что произведение матриц существует только в случае матриц, размерность строк левой из перемножаемых матриц совпадает с размерностью столбцов правой. В общем случае перемножение матриц *некоммутативно.* Некоммутативность перемножения матриц проявляется в двух формах. *Первая* из них состоит в том, что если $A \times B$ существует, то $B \times A$ может не существовать. *Вторая* – в том, что даже, если существуют $A \times B$ и $B \times A$, то в общем случае $A \times B \neq B \times A$. □

Примечание П4.6. В случае, когда перемножаются несколько последовательно согласованных по размерностям строк и столбцов матриц так, что оказывается справедливой запись

$$H = A \times B \times D \times \ldots \times L, \qquad (П4.12)$$

то размерность матрицы H по числу строк будет определяться числом строк левой матрицы A, а по числу столбцов – числом столбцов самой правой L. □

Примечание П4.7. Транспонирование мультипликативной структуры (П4.11) проводится в силу соотношения

$$H^T = \left(A \times B \times D \times \ldots \times L \right)^T = L^T \times \ldots D^T \times B^T \times A^T. \qquad □(П4.13)$$

Теперь остановимся на выполнения самого сложного действия над квадратной матрицей A размерности $(n \times n)$, состоящего в вычислении обратной A матрицы A^{-1} в силу определения П4.14. Решение этой задачи состоит из двух частей. Первая состоит в определении условий обратимости исходной квадратной матрицы A. Вторая состоит в формировании алгоритмического обеспечения процедуры обращения матрицы A, позволяющего вычислить матрицу A^{-1}. Сформулируем необходимые для решения задачи обращения квадратной матрицы A размерности $(n \times n)$.

Примечание П4.8. Обращение мультипликативной структуры (П4.11), в которой все матричные сомножители квадратные и обратимы производится в силу соотношения

$$H^{-1} = \left(A \times B \times D \times \ldots \times L \right)^{-1} = L^{-1} \times \ldots D^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}.$$

Определение П4.19. *Минором* M_{ij} элемента A_{ij} квадратной матрицы A размерности $(n \times n)$ называется определитель (детерминант, обозначение det) квадратной матрицы размерности $((n-1)\times(n-1))$, полученной из матрицы A вычеркиванием $i-$й строки и $j-$го столбца этой матрицы. □

Определение П4.20. *Алгебраическим дополнением* $(\Delta A)_{ij}$ элемента A_{ij} квадратной матрицы A размерности $(n \times n)$ называется численная характеристика, вычисляемая с помощью соотношения

$$(\Delta A)_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}. \qquad \square(\text{П}4.14)$$

Определение П4.21 (формула Лапласа). *Определителем* $\det(A)$ квадратной матрицы A размерности $(n \times n)$ называется ее численная характеристика, которая может быть вычислена в силу соотношений (формул Лапласа)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\Delta A)_{ij} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(\Delta A)_{ij}. \qquad \square(\text{П}4.15)$$

Определение П4.22. *Союзной* (присоединенной, по–английски «*adjoint*» с сокращением «adj») матрицей $\Delta A(\mathrm{adj}(A))$ квадратной матрицы A размерности $(n \times n)$ называется матрица той же размерности, составленная из алгебраических дополнений $(\Delta A)_{ij}$ ее элементов A_{ij}. □

Примечание П4.9. Нетрудно видеть, что соотношение (П4.5) порождает систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно n^2 неизвестных элементов матрицы A^{-1}. Покажем это на примере $(n \times n) = (2 \times 2)$, введя обозначение $A^{-1} = \tilde{A}$. Тогда соотношение (П4.5), принимающее вид $AA^{-1} = A\tilde{A} = I$, в поэлементной форме при $(n \times n) = (2 \times 2)$, получает представление

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножение матриц и приравнивание соответствующих членов матриц левой и правой частей матричного уравнения порождает искомую систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_{11}\tilde{A}_{11} + A_{12}\tilde{A}_{21} &= 1 \\ A_{11}\tilde{A}_{12} + A_{12}\tilde{A}_{22} &= 0 \\ A_{21}\tilde{A}_{11} + A_{22}\tilde{A}_{21} &= 0 \\ A_{21}\tilde{A}_{12} + A_{22}\tilde{A}_{22} &= 1 \end{aligned}\right\}. \qquad (П4.16)$$

Решение системы (П4.16) относительно неизвестных $\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{21}, \tilde{A}_{22}$ дает:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \\ \tilde{A}_{12} &= \frac{-A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \\ \tilde{A}_{21} &= \frac{-A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \\ \tilde{A}_{22} &= \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \end{aligned}\right\} \qquad (П4.17)$$

Тогда матрица $\tilde{A} = A^{-1}$ принимает вид

$$\tilde{A} = A^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}. \qquad (П4.18)$$

Заметим, что использование (П4.14) и (П4.15) позволяет (П4.18) представить в форме

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\Delta A)^T. \qquad \square(П4.19)$$

Выражение (П4.19) оказывается справедливым для обращения матрицы A произвольной размерности $(n \times n)$.Задача построения аналитического обращения матрицы A произвольной размерности $(n \times n)$ решена. При этом установлено, что матрицы A обратима, если ее определитель отличен от нуля.

Завершая приложение, следует сказать, что матричное представление обладает богатыми информационными возможностями. Так, в случае использования в качестве матрицы вектора-строки с вербальными (словесными) компонентами можно описывать довольно сложные объекты. В этом случае вектор именуют *макровектором*, а сам вектор задается с использованием фигурных скобах. Например, систему дистанционного управления (СДУ) можно задать в виде макровектора

$$\text{СДУ}=\{\text{УУ}, \text{ПКС}, \text{ОУ}, \text{ИУ}, \text{ОКС}\},$$

в котором: УУ – устройство управления, ПКС – прямой (управляющий) канал связи, ОУ – объект управления, ИУ –

измерительное устройство, ОКС – обратный (информационный) канал связи. В качестве второго примера приведем векторное модельное представление позитивного студента (ПС) в форме перечисления компонентов его деятельности в течение учебного дня

$$\text{ПС}=\{\text{УП},\text{ПУ},\text{ПСЗ},\text{СПД},\text{ЛП},\text{ОС}\},$$

в котором УП – утреннее пробуждение, ПУ – пребывание в университете, ПСЗ – посещение спортивного заведения, СПД – самостоятельная познавательная деятельность, ЛП – литературная пауза, ОС – отход ко сну. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Книга, которую Вы, уважаемый читатель, подержали в руках, полистали ее, а возможно и прочитали, написана с одной целью – погрузить Вас в инструментарий и методологию современной теории управления на уровне модельных представлений объектов и систем управления, источников экзогенных воздействий, целей управления в их математическом представлении.

Вы узнали, что объекты управление, то есть то, что надо перемещать, поворачивать, преобразовывать и т.д. могут быть представлены непрерывными или дискретными во времени математическими моделями. Они могут быть построены по двум схемам: «вход-выход» и «вход-состояние-выход», причем первые модели описывают процессы без памяти, а вторые – обладают памятью, роль которой выполняет вектор состояния. Первые модели описываются передаточными функциями, для построения которых надо знать преобразование Лапласа, а вторые используют векторно–матричные представления. В этой связи надо многое знать о векторах и матрицах, способах их задания, преобразования и прочее. И это авторы попытались доходчиво изложить на страницах учебного пособия, а Вы это все узнали.

Вы познакомились с такими удивительными свойствами объектов управления как управляемость и наблюдаемость, что изменило и обогатило Ваше восприятие окружающего Вас физического и технического мира

Вам рассказали, что система управления получается объединением объекта управления и устройства управления, которое наделяют объект желаемым поведением. Вас предупредили, что система при определенных условиях может стать неустойчивой, а следовательно, неработоспособной и сообщили математические условия гарантии устойчивости системы. Еще многое Вы узнали из нашей книги.

В книги есть разделы, которые отмечены звездочками, которые свидетельствуют о том, что эти разделы не входят в рабочую программу учебной дисциплины «Математические основы теории систем». Но не обедняйте себя. Если Вы их не читали и не решали примеров и задач из этих разделов, вернитесь к ним, и Вы получите удовольствие от процесса познания и преодоления себя.

Вы подготовлены к общению с огромным миром проблем современного управления, желаем Вам успеха и проблемно ориентированных радостей познавательного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акунова А., Баячорова Б.Ж., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Математические основы теории информационных систем в управлении / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Салам, 2003.
2. Алгебраические методы в теории устройств дискретной автоматики и телемеханики: Труды лаборатории телемеханики СПбГИТМО(ТУ) / Под ред. А.В. Ушакова. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2001.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
4. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. – СПб: Наука, 2001.
5. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1968.
6. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
7. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. / Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
8. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2003.
9. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
10. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
12. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
13. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983.
14. Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.
15. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление./ Пер. с англ. под ред. А.Н. Ширяева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.
16. Деч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и z–преобразования. – М.: Наука, 1971.
17. Дорф Р., Бишоп Р.. Современные системы управления. Пер. с англ. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
18. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: СПбГУИТМО. 2008

19. Дьяконов В.П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя.– М.: Солон-Пресс, 2002.
20. Дьяконов В.П. MATLAB 7.*/ R2006/2007. Самоучитель.–М.:ДМК Пресс, 2008.
21. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем /Пер.с.англ. М.: Наука, 1970.
22. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975.
23. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. / Под редакцией Д.К. Фаддеева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
24. Калмыков С.А., Шокин Б.Л., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
25. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. – М: Мир, 1977.
26. Калужнин А.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
27. Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Следящий опто-электронный мониторинг деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения / Под ред. А. В. Ушакова.- СПб.: СПбГУИТМО, 2008.
28. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
29. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
30. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985.
31. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков; Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
32. Матричные уравнения в исследовании дискретных процессов над бесконечными и конечными полями / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков./ Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1993.
33. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб: Питер, 2005.
34. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы.- СПб.: Питер, 2006.
35. Мороз А.И. Курс теории систем. – М.: Высшая школа,1987.
36. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
37. Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2011.

38. Никифорова Л.Т., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Теоретические основы кибернетики. Учебное пособие. – Л.: ЛИТМО, 1984
39. Сержантова М., Ушаков. А. Антропокомпоненты в составе сложных динамических систем: // LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.
40. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.
41. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987.
42. Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории управления: элементы метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В.–СПб.: Балт. гос. техн. ун-т «Военмех» им.Н.Ф.Устинова. 2008
43. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем/ Учебник. Минск: Дизайн ПРО. 2004.
44. Ту Ю.Современная теория управления/ Пер. с англ. М.: Машиностроение,1971.
45. Уонем М. Линейные многомерные системы: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
46. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление// Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. №3. С. 8-16.
47. Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.
48. Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А. Математические основы теории систем: элементы теории и практикум./ Под ред. Ушакова А.В. – СПб: СПбГУИТМО, 2007.
49. Ушаков А.В., Быстров П.С., Нуйя (Осипцева) О.С. Цифровое дистанционное управление: сетевые технологии и алгоритмы. - Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing – 2013
50. Френкс Л. Теория сигналов. Нью-Джерси, 1969 г. Пер с англ. под ред. Д.Е.Вакмана – М.: Сов. Радио, 1974.
51. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости семейства систем линейных дифференциальных уравнений// Диф. уравн. 1978. Т.14. №11.С. 2086-2088.
52. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью// Теория и системы управления. 1997. №3. С. 51–61.
53. Van Loan C.F. Introduction to Scientific Computing, A Matrix-Vector Approach Using MATLAB, Prentice Hall, 2000.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

ИЗ ИСТОРИИ КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года автоматики и телемеханики) была образована в 1945 году как подразделение основанного в тот же год факультета Электроприборостроения ЛИТМО и именовалась кафедрой Электроприборостроения (№80). Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и первого декана факультета Электроприборостроения профессора Марка Львовича Цуккермана. Профессор М.Л. Цуккерман в 1913–м году закончил электромеханический факультет Санкт-Петербургского политехнического института им. Петра Великого, в двадцатые годы организовал в Ленинграде отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области систем телеизмерений. С 1933–го по 1935–й год профессор М.Л. Цуккерман руководит кафедрой « Автоматизации и телемеханизации» ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина). В 1935–м году профессор М.Л. Цуккерман вплоть до начала Великой отечественной войны находится в научной командировке в Европе.

В отличие от существовавших к тому моменту кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина), на кафедру автоматики и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Осенью 1945 года кафедра провела первый набор

студентов по специальности электроприборостроение. В 1947–м году кафедра претерпевает первое изменение своего названия, после которого называется кафедрой Автоматики и телемеханики (№80 вплоть до XX–го съезда КПСС). Первый выпуск инженеров–электромехаников по специальности «приборы автоматики и телемеханики» состоялся уже в 1948 году и составил 17 человек. По временной хронологии это событие совпало в выходом в свет на английском языке известной книги Норберта Винера "Кибернетика или наука об управлении и связи в машинах, живом организме и обществах", в которой дается обоснование кибернетического подхода, выдвигающего на передний план информационное содержание природных, социальных и технических процессов и рассматривающего проблемы автоматического управления с точки зрения преобразования, передачи и использования информации. Советская научная общественность познакомится с этой книгой в переводе на русский язык только в 1958–м году.

Профессор М.Л. Цуккерман руководил кафедрой с 1945 по 1959 год. К своей работе кафедра приступила, имея преподавательский состав, включавший профессора Д.И. Зорина, доцентов Е.А. Танского и Р.И. Юргенсона и заведующего лабораторией А.А. Мезерина. В пятидесятые годы в преподавательский состав кафедры вошли профессор А.А. Кампе-Немм, доцент Г.А. Тацитов, а также старшие преподаватели В.А. Борисов, В.Г. Новиков и В.В. Соколов. К концу пятидесятых годов преподавательский состав пополнился выпускниками ЛИТМО доцентом Н.М. Яковлевым, старшими преподавателями Л.Т. Никифоровой, Н.М. Перевозчиковым, Ю.Б. Ганту и ассистентом А.М. Шпаковым, а также доцентом Б.А. Арефьевым.

В 1955 году при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 года по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана, выпускник кафедры Автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) 1936 года, доцент Евфимий Аполлонович Танский. За время его руководства профессорско–преподавательский состав пополнился старшим преподавателем Л.Л. Бориной, доцентами А.И. Новоселовым и И.П. Пальтовым, пришедшими из промышленности и высших военных учебных заведений, а также выпускниками кафедры, успешно закончившими обучение в ее аспирантуре, доцентами В.Н.

Дроздовым, А.В. Ушаковым, В.А. Власенко, и ассистентом И.Н. Богоявленской. В этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты Б.А. Арефьев и Р.И. Юргенсон. В научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико–механического приборостроения, что привело к длительному научно – техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса "Газета-2".

С 1970 по 1990 год кафедрой руководил известный в стране специалист в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктор технических наук, профессор Юрий Алексеевич Сабинин. В эти годы заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам "Теория автоматического регулирования и следящие системы", "Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы", "Элементы автоматики" и "Телемеханика" были добавлены дисциплины: "Теоретические основы кибернетики", "Локальные системы управления", "САПР систем управления" и другие. Коллектив преподавателей пополнился новым отрядом выпускников ее аспирантуры: доцентами Ю.Л. Тихоновым, В.В. Лаврентьевым, В.В. Григорьевым, В.В. Хабаловым, Л.С. Громовой, В.И. Бойковым, С.В. Быстровым, А.Б. Бушуевым, А.Н. Коровьяковым, И.В. Мирошником, Ю.П. Котельниковым, Г.И. Болтуновым, старшим преподавателем И.П. Салмыгиным. Из промышленности и других подразделений института пришли на кафедру доценты И.Ю. Рогинский, П.В. Николаев, И.П. Болтунов. Приобрела устойчивый характер система подготовки кадров высшей квалификации. В период с 1970–го по 1990–й защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты И.П. Пальтов, В.В. Григорьев и В.Н. Дроздов. Более 40 человек успешно завершили обучение в аспирантуре.

Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; с задачами автоматизации обработки снимков в пузырьковых камерах; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов. Новый облик теории управления 1970 годов, внедрение

метода пространства состояний и вычислительной техники, повышение математического уровня научных исследований нашли отражение в научных разработках кафедры, многочисленных трудах и монографиях. В эти годы интенсивно разрабатываются проблемы теории многомерных динамических систем, качественная теория устойчивости, методы согласованного и многорежимного управления, положено начало теоретическим работам в области робототехники. Научное руководство перечисленными работами осуществляли профессора кафедры Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В. Ушаков, В.В. Григорьев и И.В. Мирошник .

С 1990 года по 1995–й год кафедра переживает «смутное время» на уровне руководства ею, но не на уровне интеллектуальной обстановке в ее коллективе. Известно высказывание ректора НИУ ИТМО: «Интересно, на кафедре автоматики нет номинального заведующего вот уже столько лет и ни одного скандала». Лучшего комплимента кафедре не придумаешь. С 1990 года по 1992–й обязанности заведующего кафедрой исполнял профессор В.В.Григорьев, в 1992–м году в результате проведенного конкурса заведующим кафедрой автоматики и телемеханики становится профессор Таганрогского радиотехнического института Анатолий Аркадьевич Колесников, известный специалист в области синергетики. К сожалению, по причинам личного характера он так и не покинул Таганрог и не приступил к руководству кафедрой автоматики и телемеханики ЛИТМО. В 1994–м году его заведование руководством института приостанавливается, объявляется новый конкурс, в результате которого с 1995–го года по 2010–й кафедрой руководил ее воспитанник доктор технических наук, профессор Валерий Владимирович Григорьев, по инициативе которого в 2001–м году кафедра получила название кафедры «Систем управления и информатики». В эти годы профессорско-преподавательский состав пополнился профессором Е.Ф. Очиным (1993-1996 годы), а также выпускниками аспирантуры ИТМО В.В. Черноусовым, А.П. Баевым, В.О. Никифоровым, М.С. Чежиным, А.В. Ляминым, А.А. Бобцовым и К.А. Сергеевым. Продолжала эффективно работать система подготовки кадров высшей квалификации, диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук защитили И.В. Мирошник, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков, А.И. Скалон, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов.

Помимо традиционной подготовки инженеров–электриков была начата подготовка бакалавров по направлению "Управление и автоматизация". С введением локальной сети и подключением к Интернет проведена модернизация компьютерного класса и учебных лабораторий. Научно-исследовательская работа ведется по целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. Завершилось формирование

научной школы кафедры и ее основных направлений, возглавляемых профессорами В.В. Григорьевым, А.В. Ушаковым, И.В. Мирошником, В.О. Никифоровым и доцентом В.И. Бойковым. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивным систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 году образована научная лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 года существенно расширились международные контакты кафедры, участие в международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. Профессора кафедры Григорьев В.В., Мирошник И.В, Ушаков А.В. , а позднее и Никифоров В.О. становятся действительными членами (академиками) Международной Академии нелинейных наук.

В феврале 2010 года заведующим кафедрой Систем управления и информатики был избран выпускник кафедры 1996–го года декан факультета компьютерных технологий и управления, доктор технических наук, профессор Алексей Алексеевич Бобцов, А.А. Бобцов является также председателем Совета молодых ученых и специалистов при Правительстве Санкт–Петербурга, действительным членом академии Навигации и управления движением и членом научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации.

В последние годы профессорско-преподавательский состав кафедры пополнился молодыми кадрами: доцентами Кремлевым А.С., Чепинским С.А. (выпуска кафедры 2002-го года), Дударенко Н.А., Нуйей (Осипцеволй) О.С., Николаевым Н.А., Слитой О.В. (выпуска кафедры 2003-го года), Герасимовым Д.Н. (выпуска кафедры 2005-го года), Арановским С.В., Блинниковым А.А. (выпуска кафедры 2006-го года), Сержантовой (Поляковой) М.В. (выпуска кафедры 2007-го года), Пыркиным А.А. (выпуска кафедры 2008-го года), Колюбиным С.А. (выпуска кафедры 2010-го года). К участие в подготовке магистров подключились профессора из санкт-петербургских университетов Фрадков А.Л., Андриевский Б.Р., Тертычный В.Ю. и Фуртат И.Б.

Продолжает эффективно работать система подготовки кадров высшей научной квалификации, диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук защитил в 2013-м году выпусник кафедры 1998-го года Мельников В.Г.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области автоматических систем и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI–го столетия. На кафедре функционируют четыре научно-исследовательские группы: «Технической кибернетики» (основатель профессор И.В. Мирошник,

научный руководитель профессор А.А. Бобцов), «Автоматизированного оптоэлектронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели профессор Ю.А. Сабинин и доцент П.В. Николаев, научные руководители – доцент В.И. Бойков и профессор А.В. Ушаков) и «Технической информатики и телемеханики (основатель профессор М.Л. Цуккерман, научный руководитель профессор А.В. Ушаков), «Интеллектуальной робототехники» (основатель и научный руководитель профессор А.А.Бобцов). Усилиями ученых кафедры на кафедре создана научная школа « Управление в условиях системных неопределенностей», при кафедре вот уже второе десятилетие проводятся ежегодные «Крещенские научные чтения», имеющие статус городского семинара по теории управления.

Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и трудах международных конференций. Сотрудниками кафедры опубликовано более 120 монографий и учебников, 250 методических и учебных пособий, 3500 статей, из них более 380 в журналах академий наук, около 300 статей и докладов в зарубежных научных изданиях. Ученые кафедры являются авторами более 600 изобретений, постоянно принимают участие в работе российских и зарубежных семинаров, конференций и конгрессов. Кафедра поддерживает контакты с 20 техническими зарубежными университетами.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов. Кафедра активно готовится к своему семидесятилетию, которое будет иметь место осенью 2015–го года.