

В.В. Биндюк, П.П. Коваленко

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
Учебное пособие



Санкт-Петербург
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

В.В. Биндюк, П.П. Коваленко

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2014

УДК 539.3; 621.01; 681.2

© В.В. Биндюк, П.П. Коваленко, 2014

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА /Учебное пособие по выполнению расчетно-графических работ. - СПб: НИУ ИТМО, 2014.- 54 с.

Учебное пособие содержит сведения по решению задач, возникающих при проектировании передаточных механизмов.

Методическое пособие адресовано студентам направлений подготовки №200100 «Приборостроение», №200400 «Оптотехника» и специальности №220401 «Мехатроника».

Рецензенты - д.т.н., профессор В.М. Медунецкий,
- к.т.н., доцент Ю.А. Каракулев

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета ТМ и Т,
протокол №... от 12 ноября 2013 г.

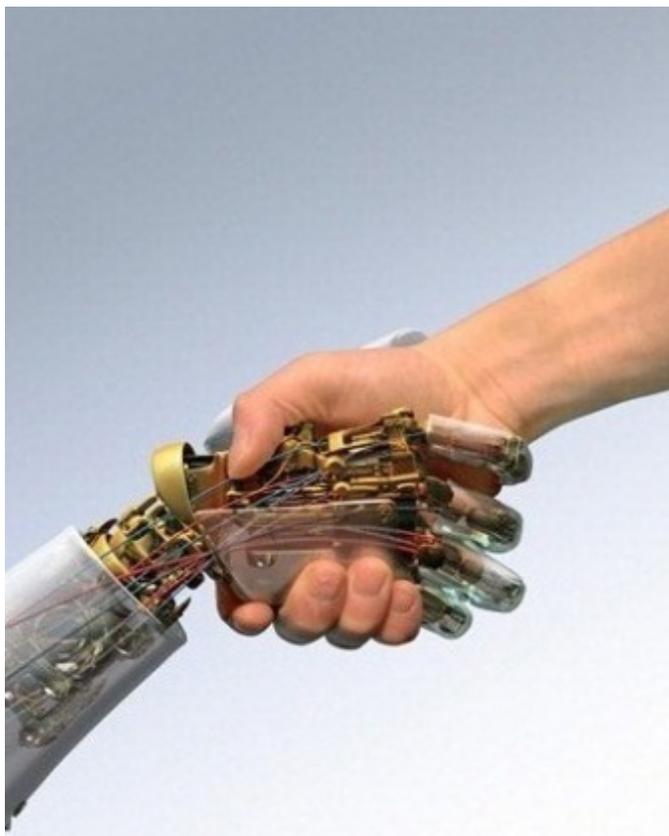


В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
I. Расчет прочностной надежности деталей приборов.....	6
1.1. Исходные данные.....	6
1.2. Алгоритм расчета прочностной надежности деталей приборов.....	12
II. Расчет деформированного состояния деталей приборов.....	27
III. Пример расчета.....	31
Список литературы.....	46
Демонстрационные варианты контрольных тестов.....	48



ВВЕДЕНИЕ

В современном приборостроении на одном из первых мест стоит вопрос повышения точности механизмов приборов. Этого добиваются за счёт повышения точности всех элементов передаточных механизмов (ПМ) и использования специальных технологических и конструкторских приёмов.

Составными частями разработки конструкций ПМ является решение расчётных и конструкторских задач, относящихся к типовым элементам конструкций приборов: валам, опорам, зубчатым колёсам, соединениям и несущим элементам. Поэтому разработка ПМ является удобным объектом для получения начальных знаний и навыков в области конструирования элементов механизмов приборов.

Одной из важнейших задач, которую необходимо решить разработчику при проектировании приборов и механизмов, является задача обеспечения прочности и жесткости элементной базы изделия. С методикой расчета деталей при изгибе знакомит студента бакалавриата предлагаемое учебное методическое пособие.

Пособие состоит из двух разделов:

- I. Расчет прочностной надежности деталей приборов;
- II. Расчет деформированного состояния деталей приборов.

I. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЁЖНОСТИ ДЕТАЛЕЙ ПРИБОРОВ

1.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Исходные данные по вариантам для выполнения расчетно-графической работы приведены в таблицах 1.1, 1.2 и 1.3.

Таблица 1.1

Расчетные схемы

<p>1</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$</p> <p>$\frac{h}{b}=3$</p>	<p>4</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$</p> <p>$\frac{h}{b}=2$</p>
<p>2</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$</p> <p>$\frac{h}{b}=3$</p>	<p>5</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$</p> <p>$\frac{h}{b}=3$</p>
<p>3</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$</p> <p>$\frac{h}{b}=2$</p>	<p>6</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$</p> <p>$\frac{h}{b}=3$</p>

<p>7</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>	<p>10</p> <p>$\alpha=0,3$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>
<p>8</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>	<p>11</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>
<p>9</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>	<p>12</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>

<p>13</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>16</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>
<p>14</p> <p>$\alpha=0,3$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>17</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>
<p>15</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>18</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>

<p>19</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>22</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>
<p>20</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>23</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>
<p>21</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>	<p>24</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>

<p>(25)</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>(28)</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>
<p>(26)</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>	<p>(29)</p> <p>$\alpha=0,5$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>
<p>(27)</p> <p>$\alpha=0,4$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=3$</p>	<p>(30)</p> <p>$\alpha=0,6$ $\frac{d_0}{d}=\alpha$ $\frac{h}{b}=2$</p>

Таблица 1.2

Номер задачи	Внешняя нагрузка			Материал детали	Допустимые напряжения $[\sigma]$, Н/мм ²	Модуль нормальной упругости, Е, Н/мм ²
	q	F	M			
	Н/мм	Н	Н.мм			
1	1	ql_1	ql_1^2	кварц	50	$0,55 \cdot 10^5$
2	1	$2ql_1$	$2ql_1^2$	пластмасса	60	$0,75 \cdot 10^5$
3	10	$5ql_1$	$2ql_1^2$	дюралюминий	70	$1 \cdot 10^5$

Таблица 1.3

Номер варианта	L ₁	L ₂	L ₃	d ₀ /d	h/b		Номер варианта	L ₁	L ₂	L ₃	d ₀ /d	h/b
	мм	мм	мм					мм	мм			
1	20	20	10	0.4	3		16	20	20	10	0.6	2
2	10	20	20	0.5	3		17	10	20	20	0.5	2
3	30	10	20	0.4	2		18	30	20	10	0.4	2
4	15	15	20	0.6	2		19	15	15	20	0.4	3
5	20	20	30	0.5	3		20	20	20	30	0.6	3
6	30	30	40	0.6	3		21	30	30	40	0.4	2
7	10	30	40	0.6	2		22	10	30	40	0.6	3
8	20	20	30	0.5	2		23	20	20	30	0.5	2
9	30	10	20	0.4	2		24	30	10	20	0.5	3
10	20	15	30	0.3	3		25	20	15	30	0.4	3
11	40	40	10	0.4	3		26	40	40	10	0.4	2
12	50	20	30	0.4	2		27	50	20	10	0.4	3
13	30	20	40	0.6	3		28	30	20	40	0.4	2
14	40	40	15	0.3	3		29	40	40	15	0.5	3
15	20	30	40	0.4	3		30	20	30	40	0.6	2

1.2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ ДЕТАЛЕЙ

Алгоритм расчета деталей, испытывающих при эксплуатации деформацию изгиба, состоит из несколько этапов.

Первый этап заключается в выборе расчетной схемы и определении реакций в местах закрепления деталей с целью восполнения общей силовой картины; **второй** — в определении внутренних силовых факторов с целью определения положения опасного сечения в деталях; **третий** — в расчете размеров поперечного сечения детали по нормальным напряжениям; **четвертый** — в проверке прочности сечения детали по касательным напряжениям с целью подтверждения присутствия соответствующего вида деформирования детали.

Выбор расчетной схемы (физической модели или упрощенного прототипа конструкции) состоит в отбрасывании второстепенных факторов, незначительно влияющих на работу детали и схематизации объекта исследования. Если расчетная схема детали или элемента прибора задана, то для решения первой части задачи об изгибе необходимо определить только реакции в закреплениях.

Пусть задана расчетная схема детали прибора в виде стержня с прямоугольной формой поперечного сечения, который установлен на шарнирных опорах (рис. 1).

Определим, пользуясь уравнениями статического равновесия, реакции в шарнирных опорах А и В. При составлении уравнений статического равновесия, не зная истинного направления действия реакций, предварительно направим их вверх в сторону положительного отсчета по координатной оси у.

Реакции в закреплениях (R_A , H_A и R_B) определяются из уравнений статики:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_a = 0.$$

Составим уравнения:

$$\sum X = 0, \quad H_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_q - P + R_B = 0; \quad (2)$$
$$R_A - 2qa - 2qa + R_B = 0;$$

где R_q — равнодействующая равномерно распределенной нагрузки;

$$\sum M_a = 0, \quad R_B * 4a - R_q a - P * 3a - M_0 = 0, \quad (3)$$
$$R_B * 4a - 2qa^2 - 6qa^2 - 2qa^2 = 0.$$
$$R_B = 2,5 qa.$$

Определив реакцию R_B из уравнения (3), подставим ее значение в уравнение

(2) и определим реакцию R_A

$$R_A = 1,5 qa.$$

Обе реакции шарнирных опор положительны. Это говорит о том, что направление действия реакций, указанное на расчетной схеме, соответствует их истинному направлению. Если бы реакции были отрицательные, то их направление действия на расчетной схеме должно быть изменено на противоположное направление. Первоначальное направление реакции зачёркивается двумя наклонными тонкими линиями и у обозначения реакции вписывается её числовое значение без минуса.

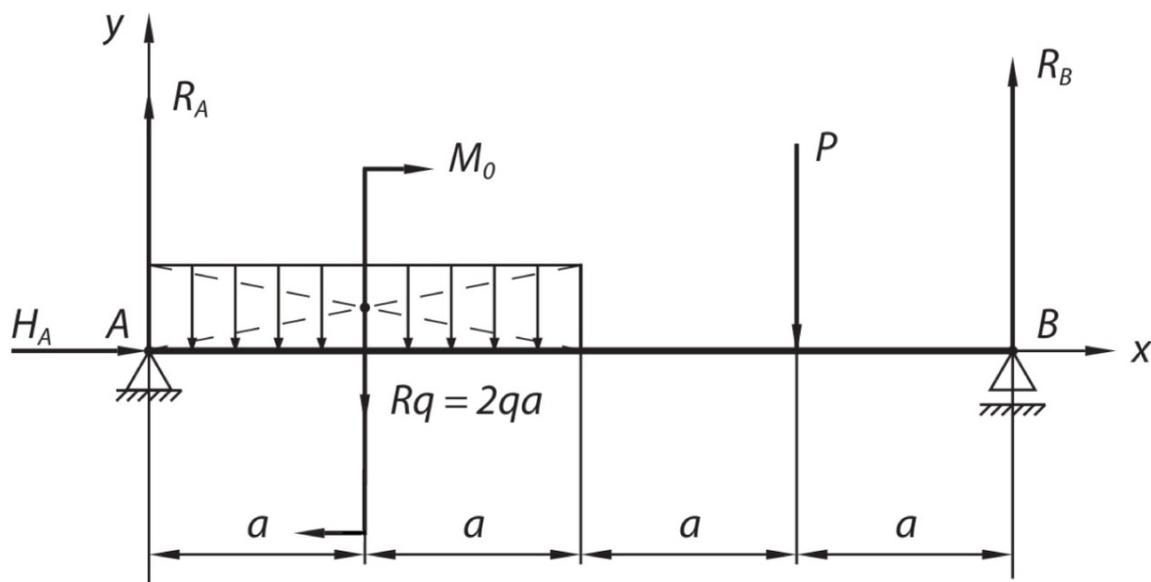


Рис. 1

При определении реакций в опорах полезно проверить правильность произведенных вычислений. Для этого нужно составить дополнительное уравнение статического равновесия, которое при отсутствии ошибок обратится в тождество типа $0 \equiv 0$.

В рассматриваемом примере таким уравнением будет

$$\begin{aligned} \sum Mb = 0, \quad & - R_A * 4a + R_B * 3a - M_0 + Pa = 0, \\ & - 1,5qa * 4a + 2qa * 3a - 2qa^2 + 2qa * a = 0, \\ & 0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при определении реакций не было допущено ошибок.

Нужно иметь в виду, что на данном этапе при составлении уравнений статического равновесия знаки сил и моментов не имеют физического смысла, и поэтому нет строгого правила о том, какое направление действия сил и моментов считать за положительное или отрицательное.

В нашем примере силы, по направлению действия, совпадающие с положительным отсчетом по координатной оси, и моменты от сил, действующие в направлении противоположному ходу движения часовой стрелки, приняты положительными.

Для определения напряжений, действующих в поперечных сечениях стержня, необходимо знать величины внутренних силовых факторов и закон их изменения по длине стержня.

Внутренними силовыми факторами при плоском изгибе являются перерезывающая сила Q и изгибающий момент $M_{изг}$.

Внутренние силовые факторы определяются с помощью метода сечений. **Перерезывающая сила** численно равна алгебраической сумме сосредоточенных и распределенных сил, действующих на одну из частей стержня, слева или справа от рассматриваемого сечения.

Изгибающий момент численно равен алгебраической сумме внешних моментов от сосредоточенных, распределенных сил и пар сил, действующих на одну из частей стержня, слева или справа от рассматриваемого сечения.

Знаки перерезывающей силы и изгибающего момента имеют физический смысл, поэтому для них установлены следующие правила:

— перерезывающая сила Q считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу-вверх, а справа от сечения сверху-вниз (рис. 2);

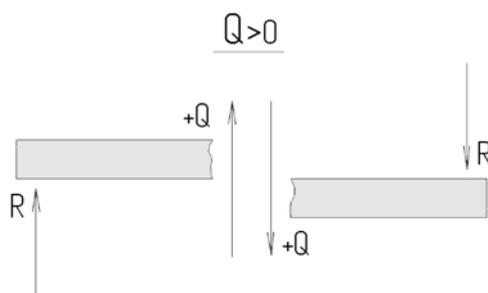


Рис. 2

— изгибающий момент $M_{изг}$ считается положительным, если внешний равнодействующий момент действует на левую часть стержня в направлении по ходу часовой стрелки, а на правую часть стержня — против хода часовой стрелки (рис. 3).

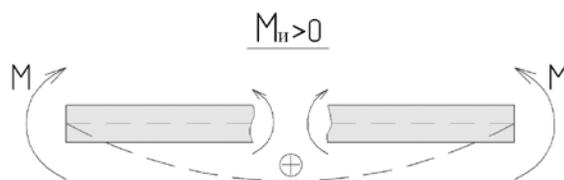


Рис. 3

Графики, выражающие закон изменения перерезывающей силы и изгибающего момента по длине стержня, называются, соответственно, эпюрами Q и $M_{\text{изг}}$.

Переходим к построению эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов. Для определения величины внутренних силовых факторов по длине стержня, последний разбивается на участки, в пределах которых перерезывающая сила и изгибающий момент меняются по определенным законам. Появление нового участка исследования Q и $M_{\text{изг}}$ определяется по изменению силовой картины внешней активной нагрузки (P , M или q) действующей на стержень. В нашем примере (рис.1) таких участков будет четыре.

На каждом из участков выбирается произвольное сечение, которое отмечается на схеме тонкой волнистой линией на расстоянии x от начала координат. Относительно этих сечений составляются функции перерезывающей силы Q_y и изгибающего момента M_z . Начало координат можно располагать на левом либо правом концах стержня, в начале первого или в конце последнего участка, при этом ось x фактически является осевой стержня, направленной, соответственно, слева направо или наоборот справа налево. Задаваясь рядом значений x в пределах каждого из участков, получаем соответствующие величины Q_y и M_z , по которым строим эпюры.

Построение эпюр производится следующим образом.

Две линии, изображенные ниже расчетной схемы параллельно оси стержня, принимаем за оси эпюр, от которых в произвольном масштабе для характерных сечений стержня откладывают ординаты, соответствующие значениям Q_y и $M_{\text{изг}}$.

Ординаты, выражающие величины положительных перерезывающих сил и изгибающих моментов, откладывают вверх от оси, а отрицательных — вниз. Соединяя концы отложенных ординат, получаем эпюры Q_y и $M_{\text{изг}}$ (рис. 4). Штрихуются эпюры Q_y и $M_{\text{изг}}$ строго вертикальными линиями, поскольку каждая линия штриховки в принятом масштабе выражает величину Q_y и $M_{\text{изг}}$ в данном сечении.

Рассмотрим сечения на расстоянии x_i от начала координат и определим внутренние силовые факторы.

В системе координат XOY .

I участок:

$$0 \leq x_1 \leq a;$$

$$Q_1 = R_A - qx_1 = 1,5qa - qx_1;$$
$$M_1 = R_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} = 1,5qax_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

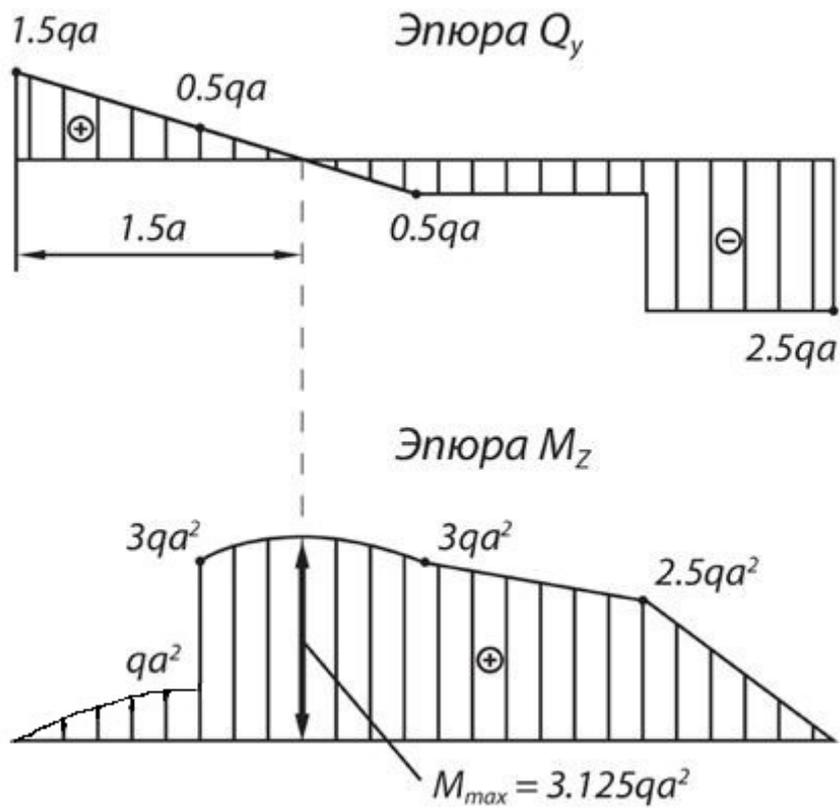
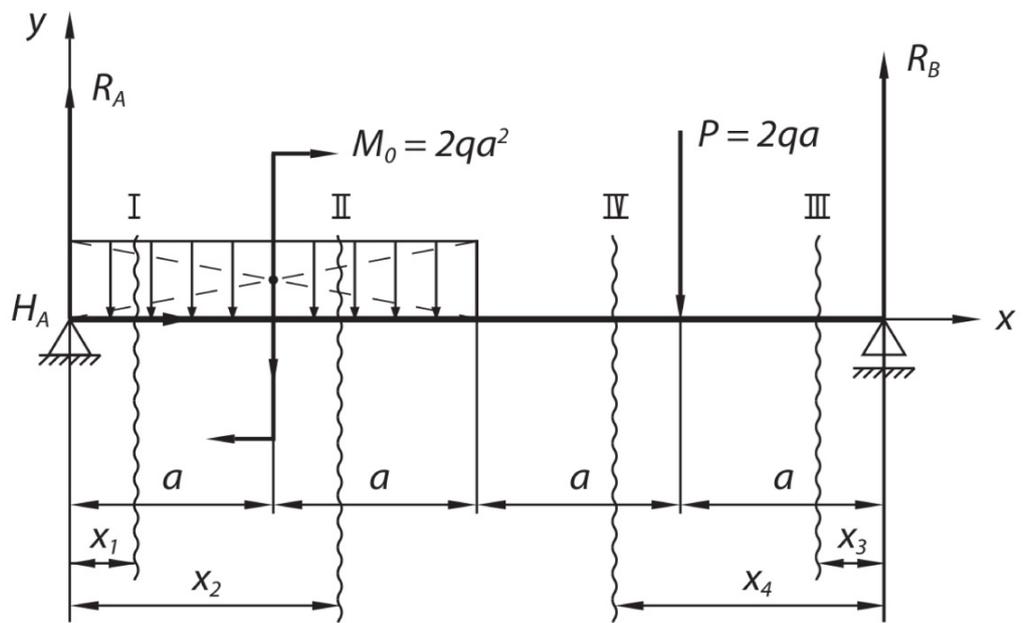


Рис.4

.....II участок:

$$a \leq x_2 \leq 2a;$$

$$Q_2 = R_A - qx_2 = 1,5qa - qx_2;$$

$$M_2 = R_A \cdot x_2 - qx_2 \frac{x_2}{2} + M_0 = 1,5qax_2 - \frac{qx_2^2}{2} + 2qa^2.$$

В системе координат $X_1O_1Y_1$.

III участок:

$$0 \leq x_3 \leq a;$$

$$Q_3 = -R_B = -2,5qa;$$

$$M_3 = R_B x_3 = 2,5qa x_3;$$

IV участок:

$$a \leq x_4 \leq 2a$$

$$Q_4 = -R_B + P = -2,5qa + 2qa = -0,5qa;$$

$$M_4 = R_B x_4 - P(x_4 - a) = 2,5qax_4 - 2qa(x_4 - a).$$

Составив функции Q_y и M_z и определив интервалы изменения x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 , строим эпюры Q_y и M_z , задаваясь рядом значений x в пределах соответствующих участков:

• **I участок.** Уравнение $Q_1 = R_A - qx_1$, определяющее закон изменения перерезывающей силы в пределах длины первого участка, представляет собою уравнение прямой. Следовательно, чтобы графически изобразить закон изменения перерезывающей силы в пределах первого участка, достаточно знать ее величину в двух сечениях:

$$x_1 = 0, \quad Q_1 = 1,5qa;$$

$$x_1 = a, \quad Q_1 = 1,5qa - qa = 0,5qa.$$

Отложив полученные величины и соединив точки прямой, получим эпюру Q на первом участке.

Уравнение $M_1 = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2}$ представляет собой уравнение квадратной параболы и для ее построения необходимо задаться несколькими значениями x . Кроме того, необходимо исследовать функцию изгибающего момента на экстремум (т. е. взять производную и приравнять ее нулю).

Как показывают исследования функции M_z , экстремальных значений она не достигает, и, следовательно, в пределах первого участка эпюра $M_{изг}$ будет ограничена квадратной параболой, не имеющей экстремума:

$$x_1 = 0, \quad M_1 = 0;$$

$$x_1 = a, \quad M_1 = qa^2.$$

• **II участок.** Уравнение $Q_2 = R_A - qx_2$ также представляет собой уравнение прямой, для построения которой достаточно иметь два значения перерезывающей силы:

$$\begin{aligned} x_2 = a, & \quad Q_2 = 0,5qa; \\ x_2 = 2a, & \quad Q_2 = -0,5qa. \end{aligned}$$

Соединив полученные точки прямой, определим эпюру Q на втором участке.

Уравнение $M_2 = R_A x_2 + M_0 - \frac{qx_2^2}{2}$ также представляет собой уравнение квадратной параболы.

Исследуем функцию на экстремум:

$$\begin{aligned} \frac{dM_2}{dx_2} &= R_A - qx_2; \\ R_A - qx_2 &= 0. \quad x_2 = \frac{R_A}{q} = \frac{1,5qa}{q} = 1,5a. \end{aligned}$$

Следовательно, экстремального значения функция достигает при значении $x_2 = 1,5a$.

Известно, что кривизна кривой определяется знаком второй производной. В свою очередь знак второй производной зависит от направления осей координат. При принятой нами системе координат кривизна кривой будет положительна в случае, когда кривая имеет выпуклость вниз. В пределах второго участка кривизна кривой, ограничивающей эпюры $M_{изг}$, отрицательна и, следовательно, кривая обращена выпуклостью вверх.

Абсцисса сечения, где изгибающий момент M_2 достигает своего наибольшего значения, известна ($x_2 = 1,5a$), следовательно, можно определить величину M_{max} . Для этого используем функцию изгибающего момента M_2 , составленную для участка, в пределах которого расположено сечение x_2 :

$$M_{max} = M_2 = 1,5qa * 1,5a - \frac{q(1,5a)^2}{2} + 2qa^2 = 3,125qa^2.$$

• **III участок.** В пределах этого участка величина перерезывающей силы остается постоянной ($Q_3 = -2,5qa$), и, следовательно, эпюра перерезывающей силы на этом участке ограничивается прямой, параллельной оси эпюры.

Уравнение $M_3 = 2,5qax_3$ представляет собой уравнение прямой, для построения которой достаточно определить величину изгибающего момента в начале и конце участка:

$$\begin{aligned} x_3 = 0; & \quad M_3 = 0; \\ x_3 = a; & \quad M_3 = 2,5qa^2. \end{aligned}$$

• **IV участок.** На этом участке величина перерезывающей силы не изменяется ($Q_4 = -0,5qa$) и эпюра перерезывающей силы будет ограничена прямой, параллельной оси эпюры.

Уравнение $M_4 = 2,5qa \cdot x_4 - 2qa(x_4 - a)$ представляет собою уравнение прямой. Построение прямой произведем, вычислив изгибающий момент в начале и конце участка:

$$\begin{aligned} x_4 = a, & \quad M_4 = 2,5qa^2; \\ x_4 = 2a, & \quad M_4 = 3qa^2. \end{aligned}$$

Общие выводы о характере эпюр $M_{\text{изг}}$ и Q , позволяющие контролировать правильность их построения, можно сделать на основании дифференциальных зависимостей при изгибе (теоремы Д.И. Журавского):

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = q.$$

1. Так, если стержень нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = \text{const}$, очевидно, что функция Q будет линейной, а $M_{\text{изг}}$ квадратичной (I и II участки стержня в нашем примере).

2. Если $q > 0$, то величина перерезывающей силы будет возрастать в направлении слева направо. Если $q < 0$, величина перерезывающей силы будет убывать в том же направлении (I и II участки стержня).

3. Если стержень нагружен сосредоточенными силами или моментами, то в промежутках между точками их приложения интенсивность $q = 0$ и, следовательно, $Q = \text{const}$, а $M_{\text{изг}}$ является линейной функцией от x (участки III и IV в нашем примере).

4. В сечениях стержня, где приложены сосредоточенные силы, эпюра Q претерпевает скачок на величину приложенной силы в направлении ее действия, а на эпюре $M_{\text{изг}}$ возникает излом (разрыв производной). В нашем примере - сечения A и B и сечение, где приложена сосредоточенная сила P.

5. В сечениях стержня, где приложены сосредоточенные моменты на эпюре $M_{\text{изг}}$ возникают скачки, по величине равные внешнему моменту. Направление скачка определяется знаком изгибающего момента, возникающего в этом сечении в результате действия внешнего сосредоточенного момента M_0 (II участок стержня в нашем примере).

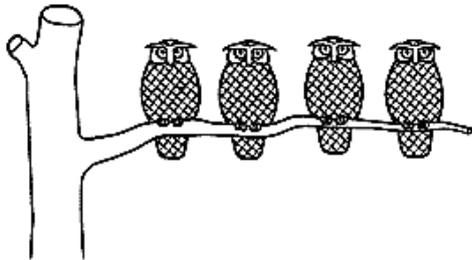
6. В сечении, где эпюра Q , изменяясь непрерывно, проходит через нуль (пересекает ось), изгибающий момент принимает экстремальные значения — касательная к эпюре $M_{\text{изг}}$ параллельна оси эпюры (участок II в нашем примере).

7. На участке стержня, где $Q > 0$ (производная $\frac{dM}{dx} > 0$) функция изгибающего момента возрастает, и наоборот (участок III, $Q < 0$, $M_{\text{изг}}$ убывает).

8. На участках стержня, где $Q = 0$, $M_{\text{изг}} = \text{const}$.
Используя дифференциальные зависимости между $M_{\text{изг}}$, Q и q , можно упростить построение эпюр, вычисляя значения $M_{\text{изг}}$ и Q в характерных точках, т. е. на границах участков и в сечениях, где внутренние усилия имеют экстремальные значения.

В пределах между соответствующими характерными точками очертание эпюры устанавливается на основании дифференциальных зависимостей.

В качестве второго примера рассмотрим консоль*, стержень - один конец которого жестко зашпелен, а второй свободен.



В этом случае можно обойтись без определения реакций в закреплении, если рассматривать равновесия *левых отсечённых частей* (сечения I и II) балки рис. 5.

I участок:

$$0 \leq x_1 \leq a;$$

$$Q_1 = -P;$$

$$M_1 = -Px_1;$$

$$M_1 = 0;$$

$$M_1 = -Pa.$$

при $x_1 = 0;$

при $x_1 = a;$

II участок:

$$a \leq x_2 \leq a + b;$$

$$Q_2 = -P - q(x_2 - a);$$

$$M_2 = -Px_2 + M_0 - \frac{q(x_2 - a)^2}{2};$$

при $x_2 = a;$

$$Q_2 = -P;$$

$$M_2 = -Pa + M_0;$$

при $x_2 = a + b;$

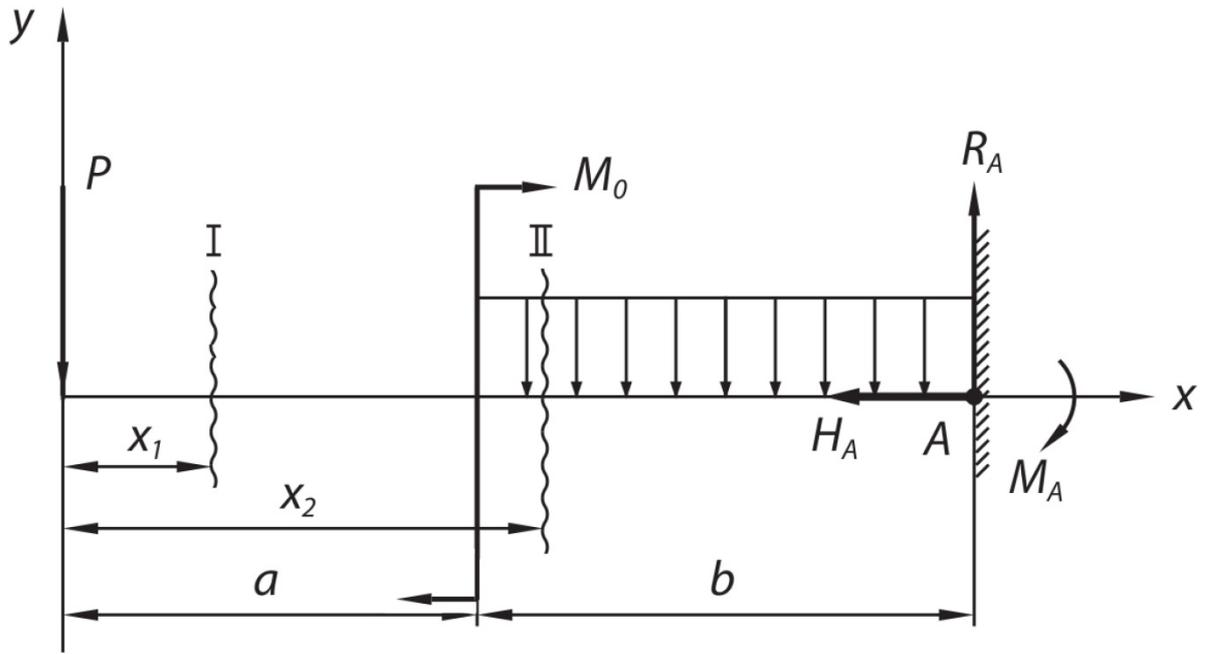
$$Q_2 = -P - qb;$$

$$M_2 = -P(a + b) + M_0 - \frac{qb^2}{2};$$

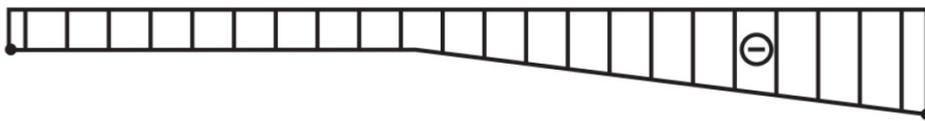
Перерезывающая сила и изгибающий момент в зашпелении определяют величину и направление действия вертикальной составляющей реакции R_A и опорного момента M_A . Построив эпюры $M_{изг}$ и Q , находим опасное сечение, т.е. сечение, в котором величина изгибающего момента будет наибольшей. В этом сечении возникают и наибольшие нормальные напряжения.

При плоском изгибе в поперечных сечениях стержня могут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. Расчет стержня на прочность производится по наибольшим нормальным напряжениям, так как величина касательных напряжений обычно незначительна. Однако в некоторых случаях (при больших сосредоточенных силах вблизи опор коротких стержней, когда изгибающий момент незначителен, а перерезывающая сила велика) касательные напряжения могут достигать допускаемых величин и даже превышать их. В этих случаях производится проверка прочности стержня по касательным напряжениям.

*) J. E. Gordon *STRUCTURES, OR WHY THINGS DON'T FALL DOWN* Penguin Books, Harmondsworth, 1978.



Эпюра Q_y



Эпюра M_z

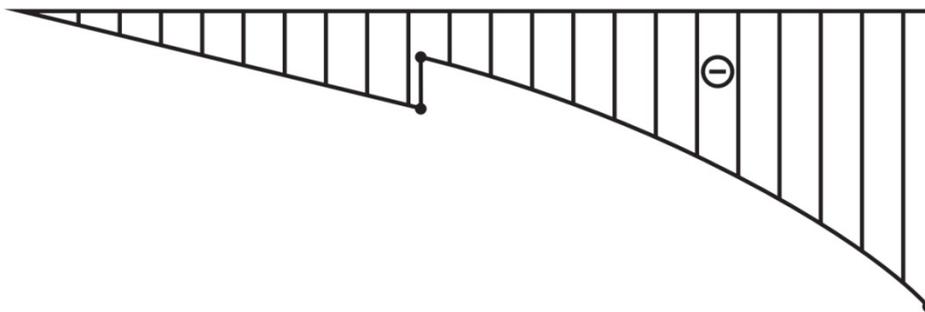


Рис.5

Условие прочности при плоском изгибе —

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

где M_{\max} — наибольший по модулю изгибающий момент, определяемый из эпюры M_z (момент в опасном сечении), W — момент сопротивления поперечного сечения относительно нейтральной оси, вокруг которой происходит деформация (изгиб) стержня, $[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение.

Подбор сечения при изгибе производится по формуле

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

Определив величину момента сопротивления и, задавшись формой сечения, можно вычислить размеры поперечного сечения балки.

Круглое сечение (рис. 6):

$$W = \frac{\pi d^3}{32}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}},$$

где d — диаметр круга.

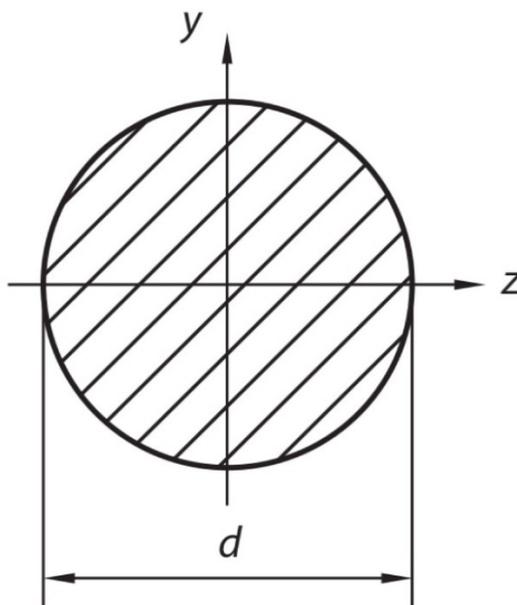


Рис.6

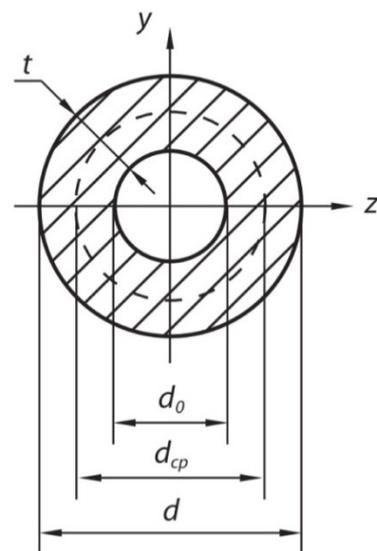


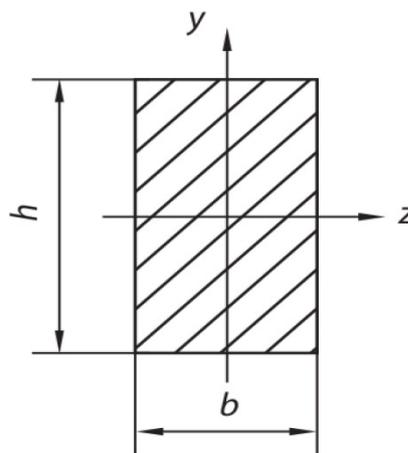
Рис.7

Кольцевое сечение (рис. 7): $W_{\text{п.в.}} \geq \frac{\pi d^3}{32}(1 - \alpha^4); \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32W}{(1 - \alpha^4)\pi}},$

где d — наружный диаметр, d_0 — внутренний диаметр, d_{cp} — средний диаметр сечения, t — толщина стенки полуваля.

$$\alpha = \frac{d_0}{d}; \quad d_{cp} = \frac{d + d_0}{2}; \quad t = \frac{d - d_0}{2}.$$

При назначении конечных размеров кольцевого сечения следует наружный диаметр округлить в большую сторону, а внутренний диаметр в меньшую с кратностью 0,5мм. Например, если расчетный диаметр $d = 8,40$ мм, то при $\alpha = 0,3$ получим $d_0 = 2,52$ мм. Исходя из выше сказанного, следует назначить следующие размеры сечения полуваля: $d = 8,50$ мм и $d_0 = 2,50$ мм.



Прямоугольное сечение (рис. 8):

$$W_z = \frac{bh^2}{6};$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Задав соотношение размеров прямоугольника $\frac{h}{b}$, определим их, зная величины W_y и W_z .

При подборе профилей (двутавр, швеллер, уголок), нужный номер профиля выбирается по сортаменту, например по ГОСТ 13621—90, в зависимости от величины вычисленного момента сопротивления W поперечного сечения.

Момент сопротивления выбранного профиля не должен быть меньше момента сопротивления, определенного из условия прочности.

Условие прочности по касательным напряжениям определяется уравнением

$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

В зависимости от формы поперечного сечения это условие прочности будет иметь вид:

— круглое сечение $\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \leq [\tau],$

— кольцевое сечение $\tau_{max} = \frac{2Q}{\pi t d_{cp}} \leq [\tau],$

— прямоугольное сечение $\tau_{max} = \frac{3Q}{2F} \leq [\tau],$

— двутавровое сечение (или сечение произвольной формы)

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_{отс}(z)}{b I_z} \leq [\tau], \quad (*)$$

где Q — наибольшая по модулю перерезывающая сила, определяемая из эпюры; F — площадь поперечного сечения.

После выполнения расчетов следует графически изобразить закон изменения величины напряжений в сечении, т. е. построить эпюры нормальных и касательных напряжений. Из выражения (**) для нормальных напряжений при изгибе следует,

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (**)$$

что напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Нормальные напряжения равны нулю (при $y = 0$) в точках нейтральной оси. Наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (при $y = y_{\max}$).

Касательные напряжения при изгибе стержней с поперечным сечением круглой и прямоугольной формы изменяются от своего максимального значения в точках, лежащих на нейтральной оси, до нуля на периферии сечения по закону квадратной параболы.

Эту параболу можно построить, вычислив статический момент $S_{\text{отс}}$ при различных значениях y — расстояния от нейтрального слоя до слоя, в котором определяется величина касательного напряжения.

В качестве примера построим эпюры нормальных и касательных напряжений для прямоугольного (рис. 9) и двутаврового (рис. 10) сечений. Предположим, что наибольшие значения $|Q_y|$ и $|M_z|$, взятые из эпюр (рис.5), имеют отрицательные значения, тогда эпюры σ и τ имеют вид

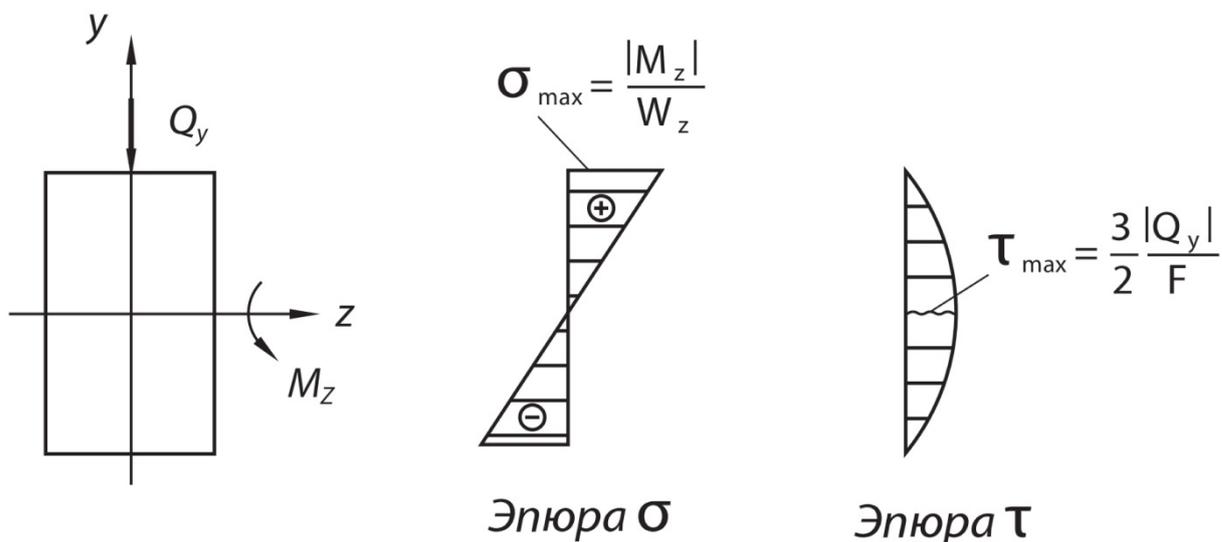


Рис.9

При расчёте двутаврового сечения статический момент $S_{\text{отс}}$ определяется для отсеченной половины площади всего поперечного сечения относительно нейтральной оси (т. е. площади сечения выше или ниже слоя, в котором определяется напряжение); b — ширина стенки двутаврового сечения;

I_z — момент инерции всего поперечного сечения двутавра относительно нейтральной оси;

Отсечённую половину площади двутаврового сечения стержня можно рассматривать как составленную из прямоугольников. Вследствие более сложного закона распределения касательных напряжений в полках двутаврового сечения, чем в стержнях с прямоугольной формой поперечного сечения, формулой Журавского Д.И.(*) следует пользоваться только для вычисления касательных напряжений в стенке двутаврового сечения.

Сортамент на двутавр из алюминиевого или магниевых сплавов по ГОСТ 13621—90 приведён в таблице 1. В таблице приняты обозначения: H — высота профиля; B — ширина верхней и нижней полки; S_1 и S_2 — высота полки; $S = b$ — ширина стенки профиля. На рис. 11 показана заштрихованная площадь сечения, для которой вычисляется статический момент $S_{отс(z)}$ половины площади поперечного сечения двутавра относительно нейтральной оси.

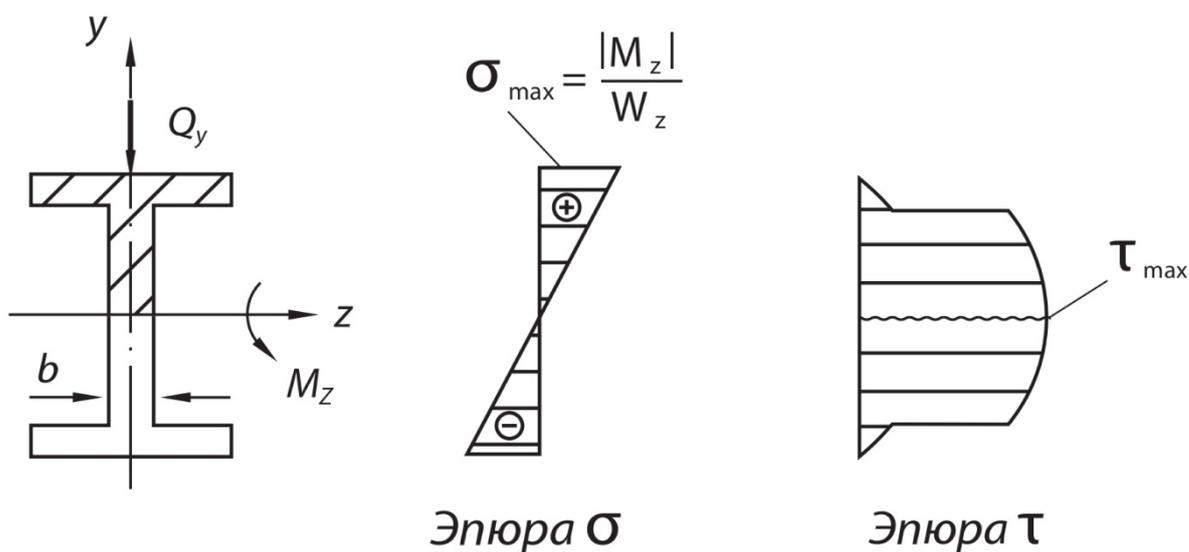


Рис.10

Зоны сжимающих и растягивающих определяются направлением изгибающего момента. Определим $S_{отс(z)}$

$$S_{отс(z)} = \int_{F_{отс}} y dF = F_{отс} y_{цт} ,$$

где $F_{отс}$ — площадь, расположенная выше слоя, в котором определяется касательное напряжение; $y_{цт}$ — расстояния от центра отсеченной площади до нейтральной оси;

$$S_{отс(z)} = S_1 + S_2 = F_1 y_{1цт} + F_2 y_{2цт} .$$

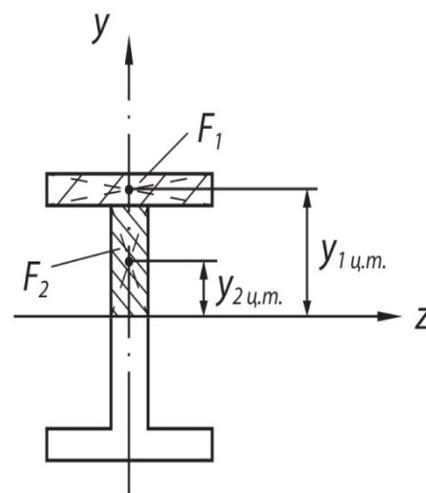


Рис.11

ДУГАТВРЫ РАВНОПОЛОЧНЫЕ ПРЕССОВАННЫЕ ИЗ АЛЮМИНИЕВЫХ И МАГНИЕВЫХ СПЛАВОВ (ПО ГОСТ 13621-90)

№ профиля	H	B	S	S _l	R	r	Площадь сечения $F_0, \text{см}^2$	Масса 1м профиля, кг, из сплава		Координаты центра тяжести		Момент инерции		Момент сопротивления		Радиус инерции	
	мм							алюминиевого	магниевого	мм	J_x	J_y	W_x	W_y	i_x	i_y	
	23	38	1,2	1,2	2	1											0,336
430020	23	38	1,2	1,2	2	1	1,178	0,336	0,212	19	11,5	1,191	1,098	1,036	0,578	1,005	0,965
430021	26	34,5	3,5	3,5	2	1	3,165	0,902	0,570	17,25	13	3,341	2,407	1,570	1,395	1,029	0,873
430022	30	30	1,5	2	2	1	1,624	0,463	0,292	15	15	2,615	0,882	1,743	0,588	1,272	0,739
430025	35	30	2	2,5	2,5	1,2	2,154	0,614	0,388	15	17,5	4,499	1,099	2,571	0,732	1,450	0,717
430041	40	50	2	3,5	3,5	1,7	4,265	1,216	0,768	25	20	12,478	7,143	6,239	2,857	1,715	1,298
430053	50	50	2,5	4	4	2	5,187	1,478	0,934	25	25	23,148	8,129	9,259	3,251	2,120	1,256
430058	57	93	7	8	3	1,5	17,827	5,081	3,209	46,5	28,5	94,349	106,733	33,104	22,953	2,301	2,450
430062	60	70	3	5	5	2,5	8,715	2,484	1,569	35	30	57,068	27,952	19,022	7,986	2,567	1,797
430063	68	38	2,5	2,5	2	-	3,509	1,000	0,632	19	34	25,929	2,279	7,626	1,200	2,718	0,806
430081	86	95	9	8	3	1,5	21,577	6,150	3,884	47,5	43	258,392	113,482	60,092	23,890	3,462	2,294

Примечания:

1. Значения радиуса притупления острых кромок r должны соответствовать требованиям ГОСТ 8617-81.
2. Масса 1м профиля вычислена по номинальным размерам при плотности: - алюминиевого сплава $2,85\text{г/см}^3$, что соответствует плотности сплава марки В95; - магниевого сплава $1,80\text{г/см}^3$, что соответствует плотности сплава марки МА14.

II. РАСЧЕТ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДЕТАЛЕЙ ПРИБОРОВ

При расчете деталей приборов, кроме ограничения на величину наибольшего напряжения, действующего в опасном сечении детали

$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, накладывается также ограничение на величину перемещения сечения детали, получаемого в результате ее деформации.

Условие, ограничивающее величину перемещения детали в заданном сечении, носит название условие жесткости, а расчет, выполняемый на основе этого условия, — расчет на жесткость.

Необходимость в расчете на жесткость вызвана тем обстоятельством, что при перемещениях, по величине превышающих допускаемые значения, может нарушаться нормальная работа прибора (нарушится зацепление шестерен, исказится передаточное отношение рычагов, увеличится трение и т. д.). При расчете на жесткость наибольшая величина прогиба и угла поворота ограничивается допускаемыми величинами.

При действии на деталь прибора, имеющую форму стержня, системы внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции и действующих перпендикулярно к ее оси, возникает деформация изгиба.

В результате деформации стержень изгибается и его продольная ось искривляется. Продольная ось деформированного стержня носит название упругой линии. Изменение кривизны упругой линии происходит в плоскости действия внешних сил, приложенных к стержню.

Деформация стержня характеризуется двумя величинами:

— **линейным перемещением** — прогибом, т. е. перемещением центра тяжести поперечного сечения в направлении, перпендикулярном к оси стержня до деформации.

— **угловым перемещением** — углом поворота, т. е. углом, на который поворачивается каждое поперечное сечение вокруг нейтральной оси по отношению к своему положению до деформации.

На рис. 1 обозначено: y_A — прогиб в сечении на расстоянии x от начала координат; θ_A — угол поворота в том же сечении.

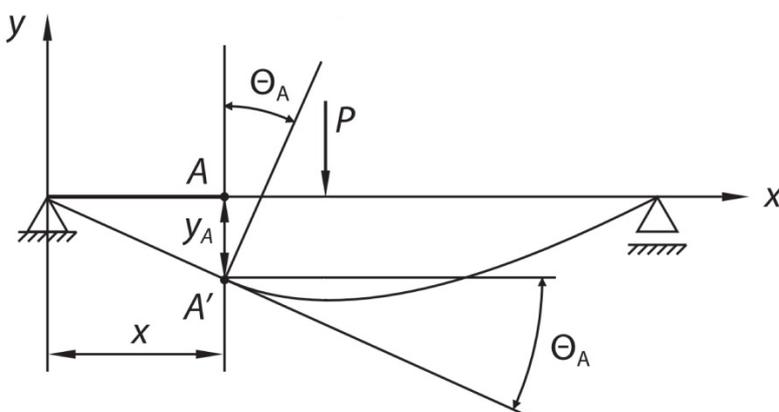


Рис.1

Угол поворота сечения на расстоянии x от начала координат равен углу наклона к оси x касательной к упругой линии (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). На основании известного положения о геометрическом смысле производной

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta.$$

На практике углы поворота поперечных сечений не превышают 1° и тангенсы углов выражаются сотыми долями единицы. Учитывая это положение, можно принять

$$\operatorname{tg} \theta = \theta,$$

и, следовательно,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Уравнение $y = f(x)$ выражающее зависимость между прогибом y и координатой сечения x , называется уравнением упругой линии. Используя зависимость между кривизной упругой линии, изгибающим моментом и жесткостью при плоском изгибе из курса сопротивления материалов, а также выражение для кривизны кривой, известное из курса высшей математики, получим приближенное дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EIy'' = M_{\text{изг.}}$$

При интегрировании этого уравнения получим выражения для определения углов поворотов и прогибов (при $EI = \text{const}$):

$$EIy' = \int M dx + C \text{ — уравнение углов поворота,}$$

$$EIy = \int (\int M dx + C) dx + D \text{ — уравнение прогибов,}$$

где C и D — произвольные постоянные интегрирования, подлежащие в дальнейшем определению.

Если стержень имеет один участок нагружения, т. е. изгибающий момент по всей длине стержня изменяется по одному и тому же закону, упругая линия описывается одним дифференциальным уравнением. Если же участков нагружения несколько, необходимо составлять дифференциальные уравнения упругой линии для каждого из них.

При интегрировании дифференциальных уравнений, составленных для n участков, появляются произвольные постоянные, число которых равно удвоенному количеству участков нагружения ($2n$). Для определения произвольных постоянных интегрирования используются условия закрепления стержня (опорные условия) и свойства плавности и непрерывности упругой линии на границах участков (граничные условия).

Из условия плавности и непрерывности упругой линии следует, что в каждом поперечном сечении стержня значения угла поворота и прогиба будут единственными. Следовательно, прогибы и углы поворота, определенные из уравнений двух смежных участков, будут равны в сечении на границе этих участков (рис.2):

$y_{p1} = y_{p2}$ — условие непрерывности упругой линии,

$y'_{p1} = y'_{p2}$ — условие плавности упругой линии.

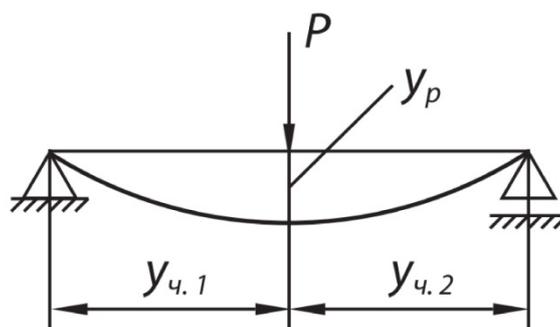


Рис. 2

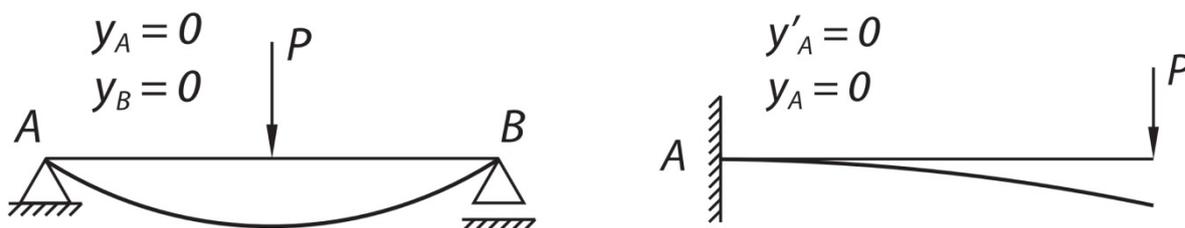


Рис. 3

Используя условия закрепления стержня, можно сделать вывод о том, что каждая шарнирная опора дает одно условие для определения произвольных постоянных, а жесткое защемление — два условия (рис. 3).

Таким образом, всегда имеется возможность определения произвольных постоянных интегрирования из $2n$ уравнений. Но при большом числе участков нагружения определение произвольных постоянных приводит к решению системы уравнений с большим числом неизвестных, что связано с громоздкими вычислениями. Однако, применяя специальные приемы составления и интегрирования дифференциального уравнения упругой линии, можно добиться равенства постоянных интегрирования на участках и свести решаемую задачу при любом количестве участков к определению лишь двух постоянных интегрирования.

Совокупность упомянутых приемов носит название метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии стержня («метод И.Г.Бубнова») и сводится к следующему:

1. Начало координат располагается на одном из концов стержня. При выборе, начала координат следует иметь в виду физический смысл постоянных интегрирования:

$\frac{C}{EI}$ — угол поворота в начале координат,

$\frac{D}{EI}$ — прогиб в начале координат.

2. В уравнение упругой линии включаются внешние моменты и моменты от внешних сил, действующие на участке стержня между началом координат и сечением.

3. Сосредоточенный момент учитывается в уравнении с множителем $(x - a)^0$, равным единице, где a — расстояние от начала координат до сечения, в котором приложен сосредоточенный момент (рис.4).

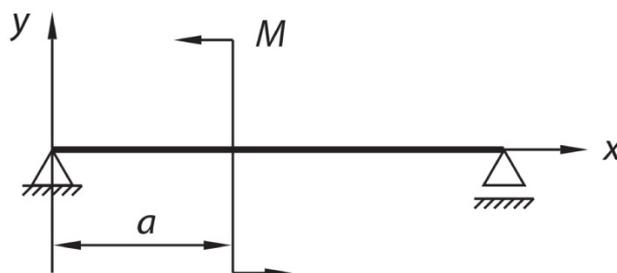


Рис. 4

4. Если участок действия равномерно распределенной нагрузки находится вне рассматриваемого сечения, то действие нагрузки необходимо продолжить до сечения, приложив одновременно в виде компенсации нагрузку той же интенсивности, но противоположного направления (рис. 5).

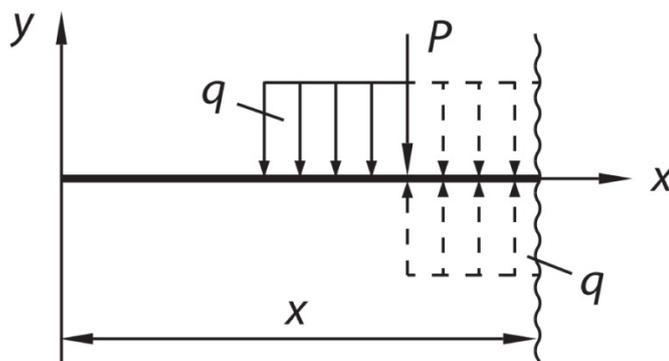


Рис. 5

5. Приводить подобные члены в уравнениях нельзя.
6. Интегрирование уравнений производится без раскрытия скобок.
7. Получение отрицательного результата в скобках слагаемых уравнений лишает эти слагаемые смысла. Это объясняется тем, что указанные слагаемые выражают величины угловых и линейных перемещений в пределах последующих участков нагружения и не входят в уравнение упругой линии, составленное для участка, на котором расположено рассматриваемое сечение.

Составленное таким образом дифференциальное уравнение упругой линии после двукратного интегрирования и определения произвольных постоянных даст уравнения для определения углов поворота (y') и прогибов (y) в сечениях. Определив наибольший прогиб, сравнивают его с допускаемой величиной:

$$y_{\max} \leq [f].$$

Это условие носит название условия жесткости.

Обычно допускаемая величина прогиба определяется нормами и составляет:

$$\begin{aligned} \text{для пролета} & \text{--- } [f] = \frac{1}{750} l_{\text{пролета}}, \\ \text{для консоли} & \text{--- } [f] = \frac{1}{350} l_{\text{консоли}}. \end{aligned}$$

Однако для некоторых деталей и элементов приборов допускаемая величина прогиба может быть оговорена особо, с учетом условий работы, характера воспринимаемых нагрузок и степени точности расчета.

III. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Произвести расчет на прочность и жесткость по схеме (рис. 6).

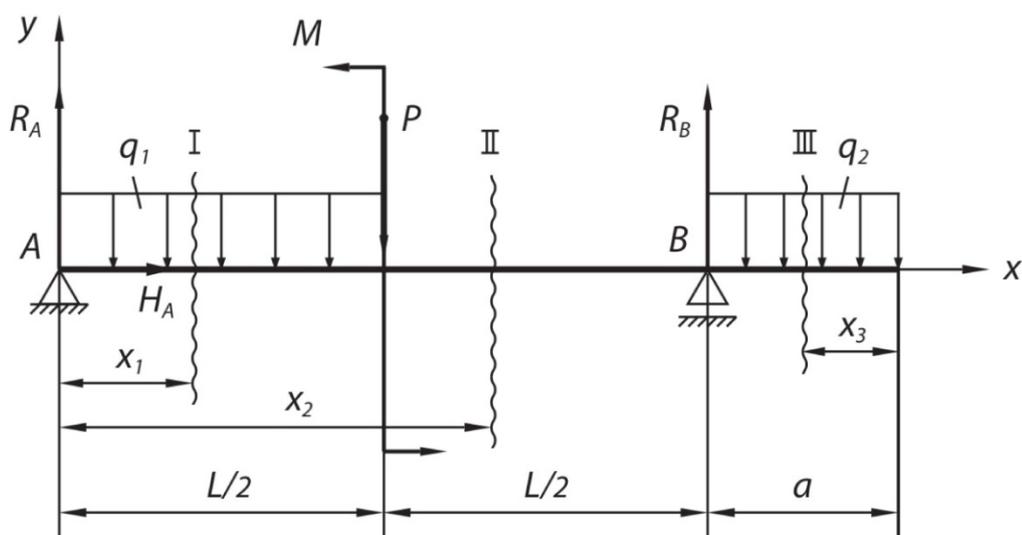


Рис. 6

Исходные данные:

- материал — Алюминиевый сплав Д16Т;
- модуль I рода — $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$;
- допускаемое напряжение $[\sigma] = 70 \text{ Н/мм}^2$;
- интенсивность распределённой нагрузки — $q_1 = 4 \text{ Н/мм}$; $q_2 = 15 \text{ Н/мм}$;
- сосредоточенная нагрузка — $P = 200 \text{ Н}$;
- сосредоточенный момент — $M = 10000 \text{ Н*мм}$;
- линейные размеры — $a = 40 \text{ мм}$, $l = 200 \text{ мм}$;
- изгибная жесткость бруса — $EI = \text{const}$.

Решение

1. Определяем реакции R_A , H_A и R_B (рис.7):

$$\sum X = 0, \quad H_A = 0;$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - \frac{q_1 l}{2} - P - q_2 a = 0;$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A l + q_1 \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} \right) + M + P \frac{l}{2} - q_2 a \frac{a}{2} = 0.$$

$$R_A = 390 \text{ Н}, \quad R_B = 810 \text{ Н}.$$

Для проверки найденных значений опорных реакций составим уравнение статики, которое при отсутствии ошибок в вычислениях даст тождество типа $0 \equiv 0$:

$$\sum M_A = 0, \quad -q_1 \frac{l}{2} * \frac{l}{4} - P \frac{l}{2} + M + R_B l - q_2 a \left(l + \frac{a}{2} \right) \equiv 0,$$

$$-4 \frac{200 * 200}{2 * 4} - 200 \frac{200}{2} + 10000 + 810 * 200 - 15 * 40 \left(200 + \frac{40}{2} \right) \equiv 0.$$
$$0 \equiv 0.$$

2. Для построения эпюр $M_{\text{изг}}$ и Q составим уравнения перерезывающей силы и изгибающего момента для каждого из трех участков нагружения.

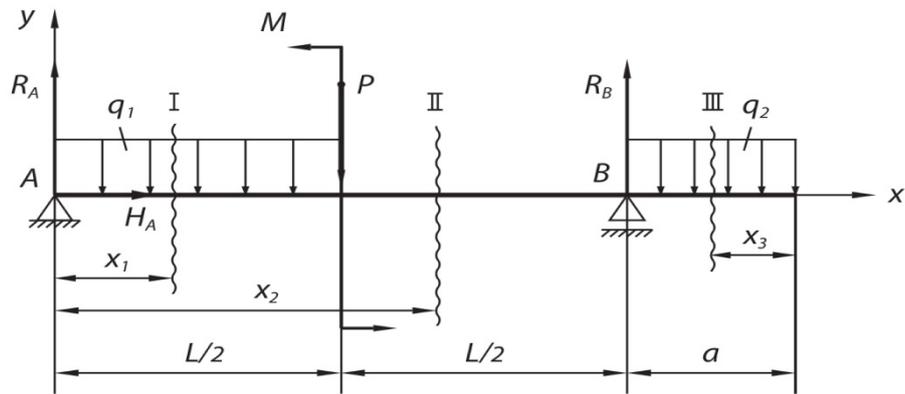
I участок: $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$.

$$Q_1 = R_A - q_1 x_1; \quad M_1 = R_A x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2};$$

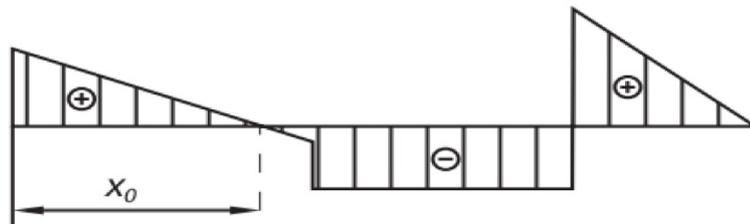
при $x_1 = 0$, $Q_1 = R_A = 390 \text{ Н}$,
 $M_1 = 0$.

при $x_1 = \frac{l}{2} = 100 \text{ мм}$, $Q_1 = R_A - q_1 \frac{l}{2} = 390 - 4 \frac{200}{2} = -10 \text{ Н}$,

$$M_1 = R_A \frac{l}{2} - \frac{q_1}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{390 \cdot 200}{2} - \frac{4}{2} \left(\frac{200}{2}\right)^2 = 19000 \text{ Н*мм.}$$



Эюра Q_y



Эюра M_z

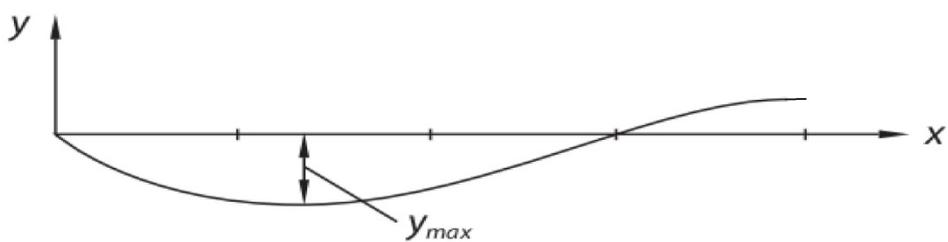
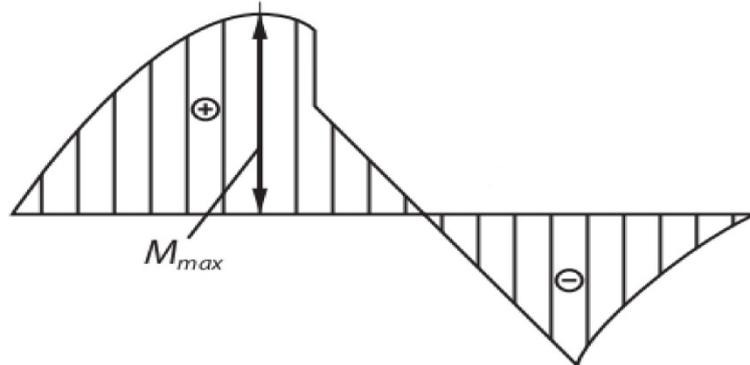


Рис. 7

II участок: $\frac{l}{2} \leq x_2 \leq l$.

$$Q_2 = R_A - q_1 \frac{l}{2} - P;$$

$$M_2 = R_A x_2 - q_1 \frac{l}{2} (x_2 - \frac{l}{4}) - M - P(x_2 - \frac{l}{2});$$

при $x_2 = \frac{l}{2}$,

$$Q_2 = 390 - 4 \frac{200}{2} - 200 = -210 \text{ Н},$$

$$M_2 = 390 \frac{200}{2} - 4 \frac{200}{2} * \frac{200}{2} - 10000 = 9000 \text{ Н*мм},$$

при $x_2 = l$,

$$Q_2 = -210 \text{ Н},$$

$$M_2 = 390*200 - 4 \frac{200}{2} * \frac{3*200}{4} - 10000 - 200 * \frac{200}{2} = -12000 \text{ Н*мм}.$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq a$.

$$Q_3 = q_2 x_3;$$

$$M_3 = -q_2 \frac{x_3^2}{2};$$

при $x_3 = 0$,

$$Q_3 = 0, \quad M_3 = 0.$$

при $x_3 = a = 40 \text{ мм}$,

$$Q_3 = 15*40 = 600 \text{ Н},$$

$$M_3 = -15 \frac{40^2}{2} = -12000 \text{ Н*мм}.$$

3. По числовым значениям и, учитывая вид уравнений, изображаем эпюры $M_{\text{изг}}$ и Q_y (рис. 7). На первом участке эпюра Q_y , изменяясь непрерывно, пересекает ось эпюры, следовательно, в соответствии с теоремой Д.И. Журавского на эпюре $M_{\text{изг}}$ наблюдается экстремум. При $x_0 = 97,5 \text{ мм}$ экстремальный изгибающий момент равен $M_{\text{экстр}} = 19012,5 \text{ Н*мм}$. Этот момент также является и максимальным, поэтому это сечение считается наиболее опасным.

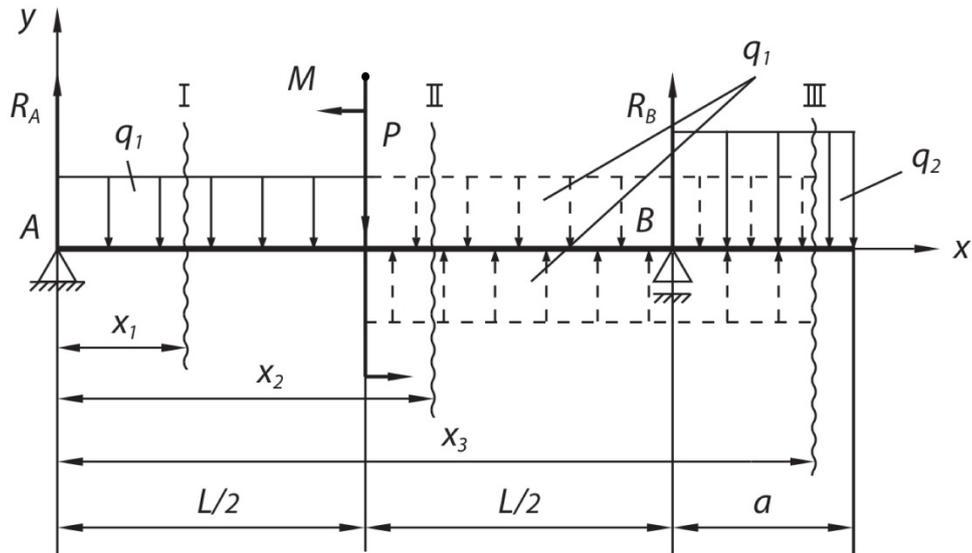


Рис. 8

4. Составляем дифференциальное уравнение упругой линии для каждого из трех участков нагружения стержня (рис. 8).

Начало координат рациональней расположить на левом конце стержня, так как в этом случае прогиб в начале координат будет равен нулю (неподвижная шарнирная опора А), и, следовательно, нулю будет равна одна из постоянных интегрирования $D = 0$.

I участок. Дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI_z y'' = R_A x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2}; \quad (1)$$

интегрируя это уравнение, получим выражение для определения углов поворота сечения:

$$EI_z y' = \frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{q_1 x_1^3}{6} + C_1; \quad (2)$$

проинтегрировав уравнение углов поворота, получим уравнение, с помощью которого вычисляются прогибы:

$$EI_z y = \frac{R_A x_1^3}{6} - \frac{q_1 x_1^4}{24} + C_1 x_1 + D_1 \quad (3)$$

II участок. Дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI_z y'' = R_A x_2 - \frac{q_1 x_2^2}{2} + \frac{q_1 (x_2 - \frac{l}{2})^2}{2} - P(x_2 - \frac{l}{2}) - M(x_2 - \frac{l}{2})^0;$$

уравнение углов поворота сечения —

$$EI_z y' = \frac{R_A x_2^2}{2} - \frac{q_1 x_2^3}{6} + \frac{q_1 (x_2 - \frac{l}{2})^3}{6} - \frac{P (x_2 - \frac{l}{2})^2}{2} - M(x_2 - \frac{l}{2}) + C_2$$

уравнение прогибов —

$$EI_{zy} = \frac{R_A X_2^3}{6} - \frac{q_1 X_2^4}{24} + \frac{q_1 (x_2 - \frac{l}{2})^4}{24} - \frac{P (x_2 - \frac{l}{2})^3}{6} - \frac{M (x_2 - \frac{l}{2})^2}{2} + C_2 X_2 + D_2$$

III участок. Дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI_{zy}'' = R_A X_3 - \frac{q_1 X_3^2}{2} + \frac{q_1 (x_3 - \frac{l}{2})^2}{2} - P (x_3 - \frac{l}{2}) - M (x_3 - \frac{l}{2})^0 + R_B (x_3 - l) - \frac{q_2 (x_3 - l)^2}{2};$$

$$EI_{zy}' = \frac{R_A X_3^2}{2} - \frac{q_1 X_3^3}{6} + \frac{q_1 (x_3 - \frac{l}{2})^3}{6} - \frac{P (x_3 - \frac{l}{2})^2}{2} - M (x_3 - \frac{l}{2}) + \frac{R_B (x_3 - l)^2}{2} - \frac{q_2 (x_3 - l)^3}{6} + C_3;$$

$$EI_{zy} = \frac{R_A X_3^3}{6} - \frac{q_1 X_3^4}{24} + \frac{q_1 (x_3 - \frac{l}{2})^4}{24} - \frac{P (x_3 - \frac{l}{2})^3}{6} - \frac{M (x_3 - \frac{l}{2})^2}{2} + \frac{R_B (x_3 - l)^3}{6} + \frac{q_2 (x_3 - l)^4}{24} + C_3 X_3 + D_3.$$

5. Определяем произвольные постоянные интегрирования. При составлении дифференциальных уравнений упругой линии выполнены все необходимые требования, позволяющие использовать при решении задачи метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии (метод И.Г. Бубнова).

Применение метода Бубнова И.Г. приводит к равенству произвольных постоянных интегрирования на участках нагружения.

Следовательно:

$$C_1 = C_2 = C_3 \text{ [Н мм}^2\text{]}, \\ D_1 = D_2 = D_3 \text{ [Н мм}^3\text{]}.$$

Для определения произвольных постоянных используем уравнение прогибов, полученное для II участка:

$$EI_{zy} = \frac{R_A X_2^3}{6} - \frac{q_1 X_2^4}{24} + \frac{q_1 (x_2 - \frac{l}{2})^4}{24} - \frac{P (x_2 - \frac{l}{2})^3}{6} - \frac{M (x_2 - \frac{l}{2})^2}{2} + C_2 X_2 + D_2$$

Очевидно, что прогибы на опорах равны нулю. Следовательно, при $x_2 = 0$ и $x_2 = l$ $y = 0$. Используя условие $x_2 = 0$; $y_2 = 0$, из уравнения прогибов для II участка получим $D_2 = 0$.

Используя условия $x_2 = l$; $y = 0$, из того же уравнения прогибов II участка получим:

$$0 = \frac{R_A l^3}{6} - \frac{q_1 l^4}{24} + \frac{q_1 (l - \frac{l}{2})^4}{24} - \frac{P (l - \frac{l}{2})^3}{6} - \frac{M (l - \frac{l}{2})^2}{2} + C_2 l + 0,$$

откуда

$$C = \frac{-\frac{R_A l^3}{6} + \frac{q_1 l^4}{24} - \frac{q_1 (l - \frac{l}{2})^4}{24} + \frac{P (l - \frac{l}{2})^3}{6} + \frac{M (l - \frac{l}{2})^2}{2}}{l} = -\frac{R_A l^2}{6} + \frac{q_1 l^3}{24} - \frac{q_1 l^3}{384} + \frac{P l^2}{48} + \frac{M l}{8} =$$

$$= -\frac{390 \cdot 200^2}{6} + \frac{4 \cdot 200^3}{24} - \frac{4 \cdot 200^3}{384} + \frac{200 \cdot 200^2}{48} + \frac{10000 \cdot 200}{8} = -933333 \frac{1}{3} \text{ (Н мм}^2\text{)}.$$

6. Определение прогибов и углов поворота, построение упругой линии. Определим прогибы и углы поворота в начале, середине и конце каждого из трех участков.

I участок: $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$.

$x_1 = 0$,

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{q_1 x_1^3}{6} + C \right] = \frac{C}{EI_z} = -\frac{933333 \frac{1}{3}}{EI_z};$$

$$y = 0;$$

$x_1 = 50 \text{ мм}$,

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 50^2}{2} - \frac{4 \cdot 50^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = -\frac{529166 \frac{1}{6}}{EI_z};$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 50^3}{5} - \frac{4 \cdot 50^4}{24} - 933333 \frac{1}{3} \cdot 50 \right] = -\frac{39583331 \frac{1}{6}}{EI_z};$$

$x_1 = 100 \text{ мм}$,

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 100^2}{2} - \frac{4 \cdot 100^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = \frac{350000}{EI_z};$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 100^3}{6} - \frac{4 \cdot 100^4}{24} - 933333 \frac{1}{3} \cdot 100 \right] = -\frac{45 \cdot 10^6}{EI_z}.$$

В интервале $50 \text{ мм} \leq x_1 \leq 100 \text{ мм}$ функция прогиба $y = f(x_1)$ достигает экстремального значения, так как в этом интервале производная функция $y' = f'(x)$ меняет знак, проходя через нулевое значение.

Величина аргумента x_1 , при котором функция прогиба достигает экстремаль-

ного значения, может быть определена следующим образом: производная от функции прогиба — функция углов поворота $y' = f(x_1)$ приравняется нулю.

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{R_A x_3^2}{2} - \frac{q_1 x_{31}^3}{6} + C \right] = 0. \quad (4)$$

Из полученного уравнения определяется значение координаты x_3 , при котором величина прогиба наибольшая. Определив x_3 , подставляем его значение в уравнение прогибов (3) и находим:

$$y_{\max/\min} = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 * x_3^3}{6} - \frac{4 * x_3^4}{24} - 933333 \frac{1}{3} x_3 \right].$$

Если отыскание корней уравнения, определяющих значение x_3 , представляет сложную задачу, уравнение следует решить приближенным методом. При приближенном решении уравнений делается вначале грубое приближение, а затем производится уточнение значений корней, найденных в результате грубого приближения. Расчет по уравнению (2) показал, что производная

меняет знак: при значении $x_1 = 50\text{мм}$ $y' = - \frac{529166 \frac{1}{6}}{EI_z}$, а при значении

$x_1 = 100\text{мм}$ $y' = \frac{350000}{EI_z}$. Следовательно, значение x_3 лежит в интервале $50\text{мм} \leq x_3 \leq 100\text{мм}$. В качестве первого приближения предполагаем, что функция углов поворота $y' = f(x_1)$ —линейная. Построив график этой функции, найдем значение x_3 , при котором функция обращается в нуль. Значение x_{31} и будет представлять собою корень уравнения в первом приближении (рис. 9).

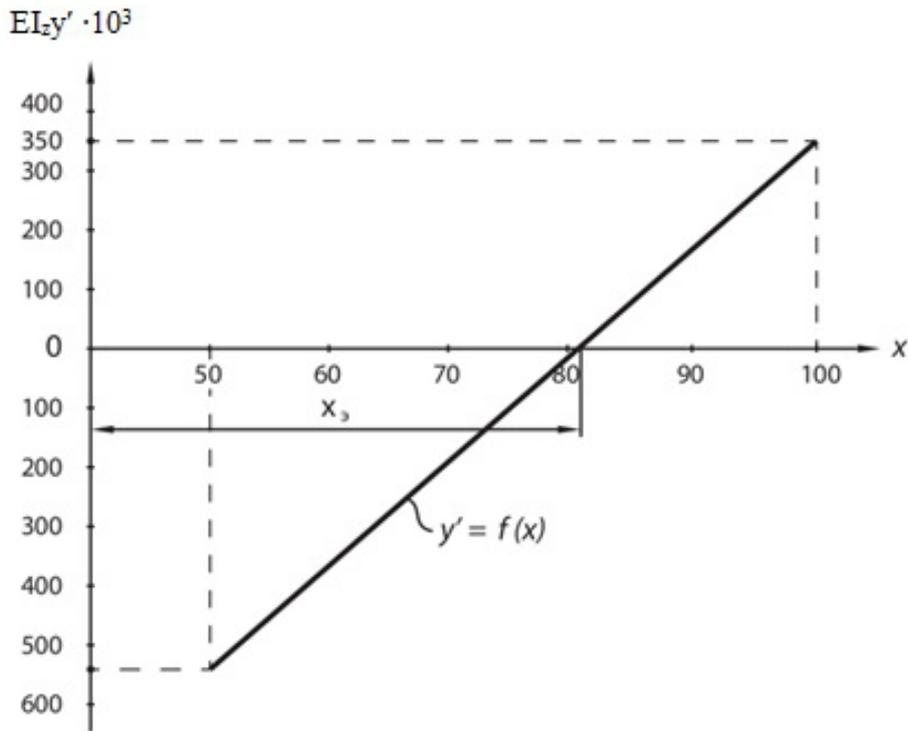


Рис. 9

Вычислив величину угла поворота сечения (y') при значении корня $x_3 = 81$ мм, видим, что величина угла поворота оказывается отличной от нуля, и, следовательно, значение корня требует уточнения. Уточнение значения корня уравнения производим, используя метод Ньютона:

$$x_{32} = x_{31} - \frac{y'}{y''},$$

где

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{R_A x_3^2}{2} - \frac{q_1 x_3^3}{6} + C \right] = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 81^2}{2} - \frac{4 \cdot 81^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = -\frac{8232,3(3)}{EI};$$

$$y'' = \frac{1}{EI_z} (R_A x_{31} - \frac{q_1 x_{31}^2}{2}) = \frac{1}{EI_z} (390 \cdot 81 - \frac{4 \cdot 81^2}{2}) = \frac{18468}{EI_z};$$

$$x_{32} = 81 - \left(-\frac{8232,3(3)}{18468} \right) = 81 + 0,445 = 81,445 \text{ мм.}$$

Процесс приближения можно продолжить до определения значения корня с необходимой степенью точности. Произведем еще одно уточнение и на этом ограничимся:

$$x_{33} = x_{32} - \frac{y'_1}{y''_1};$$

$$y_1' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{R_A x_{32}^2}{2} - \frac{q_1 x_{32}^3}{6} + C \right] = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 81,445^2}{2} - \frac{4 \cdot 81,445^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = -\frac{7,597}{EI_z};$$

$$y_1'' = \frac{1}{EI_z} (R_A x_{32} - \frac{q_1 x_{32}^2}{2}) = \frac{1}{EI_z} (390 \cdot 81,445 - \frac{4 \cdot 81,445^2}{2}) = \frac{18496,98}{EI_z};$$

$$x_{33} = 81,445 - \left(-\frac{7,597}{18496,98} \right) = 81,445 + 0,0004 = 81,4454 \text{ мм};$$

при значении $x_3 = 81,4454 \text{ мм}$ из уравнения (4)

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 81,4454^2}{2} - \frac{4 \cdot 81,4454^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = -\frac{0,2}{EI_z};$$

Таким образом, $y' \approx 0$, и, следовательно, корень уравнения (4)

$$y' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 x_3^2}{2} - \frac{4 x_3^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = 0$$

будет $x_3 = 81,4454 \text{ мм}$.

Вычислим значения прогибов из уравнения (3) при $x_3 = 81 \text{ мм}$, $x_3 = 81,445 \text{ мм}$ и $x_3 = 81,4454 \text{ мм}$:

	$x_3 = 81 \text{ мм}$	$x_3 = 81,445 \text{ мм}$	$x_3 = 81,4454 \text{ мм}$
Y_{x_3}	$-\frac{48\,230\,788,23}{EI_z}$	$-\frac{48\,232\,622,09}{EI_z}$	$-\frac{48\,232\,622,09}{EI_z}$

Как видно, величины прогибов мало отличаются друг от друга. Это подтверждает то, что изогнутая ось стержня является полой кривой (углы поворота сечения не превышают 1°).

Вследствие малого отличия величин прогибов, для практических расчётов можно ограничиться значением корня x_3 в первом приближении. Ошибка в этом случае составляет 5...7%.

II участок: $\frac{l}{2} \leq x_2 \leq l$.

$$x_2 = \frac{l}{2} = 100 \text{ мм},$$

$$y' = \frac{350000}{EI_z};$$

$$y = -\frac{45 \cdot 10^6}{EI_z};$$

$$x_2 = 150 \text{ мм},$$

$$y' = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{390 \cdot 150^2}{2} - \frac{4 \cdot 150^3}{6} + \frac{4 \cdot 50^3}{6} - \frac{200 \cdot 50^2}{2} - 10^4 \cdot 50 - 933333 \frac{1}{3} \right] = \frac{537500}{EI_Z};$$

$$y = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{390 \cdot 150^3}{6} - \frac{4 \cdot 150^4}{24} + \frac{4 \cdot 50^4}{24} - \frac{200 \cdot 50^3}{6} - \frac{10^4 \cdot 50^2}{2} - 933333 \frac{1}{3} \cdot 150 \right] = -\frac{20625000}{EI_Z};$$

$$x_2 = 200 \text{ мм}$$

$$y' = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{390 \cdot 200^2}{2} - \frac{4 \cdot 200^3}{6} + \frac{4 \cdot 100^3}{6} - \frac{200 \cdot 100^2}{2} - 10^4 \cdot 100 - 933333 \frac{1}{3} \right] = \frac{2 \cdot 10^5}{EI_Z};$$

$$y = 0.$$

III участок: $l \leq x_3 \leq (l + a).$

$$x_3 = 200 \text{ мм},$$

$$y' = \frac{2 \cdot 10^5}{EI_Z};$$

$$y = 0;$$

$$x_3 = 220 \text{ мм},$$

$$y' = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{390 \cdot 220^2}{2} - \frac{4 \cdot 220^3}{6} + \frac{4 \cdot 120^3}{6} - \frac{200 \cdot 120^2}{2} - 10^4 \cdot 120 + \frac{810 \cdot 20^2}{2} - \frac{15 \cdot 20^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = \frac{6 \cdot 10^4}{EI_Z}.$$

$$y = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{390 \cdot 220^3}{6} - \frac{4 \cdot 220^4}{24} + \frac{4 \cdot 120^4}{24} - \frac{200 \cdot 120^3}{6} - \frac{10^4 \cdot 120^2}{2} + \frac{810 \cdot 20^3}{6} - \frac{15 \cdot 20^4}{24} - 933333 \frac{1}{3} \cdot 220 \right] = \frac{23 \cdot 10^5}{EI_Z}.$$

$$x_3 = 240 \text{ мм},$$

$$y' = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{390 \cdot 240^2}{2} - \frac{4 \cdot 240^3}{6} + \frac{4 \cdot 140^3}{6} - \frac{200 \cdot 140^2}{2} - 10^4 \cdot 140 + \frac{810 \cdot 40^2}{2} - \frac{15 \cdot 40^3}{6} - 933333 \frac{1}{3} \right] = \frac{4 \cdot 10^4}{EI_Z};$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{390 \cdot 240^3}{6} - \frac{4 \cdot 240^4}{24} + \frac{4 \cdot 140^4}{24} - \frac{200 \cdot 140^3}{6} - \frac{10^4 \cdot 140^2}{2} + \frac{810 \cdot 40^3}{6} - \frac{15 \cdot 40^4}{24} - 933333 \frac{1}{3} * 240 \right] = \frac{32 \cdot 10^5}{EI_z}.$$

На II и III участках деформирования стержня угол поворота сечения не меняет своего знака. Следовательно, функция прогиба не имеет экстремума. На основании полученных в результате расчета величин углов поворота и прогибов в различных сечениях по длине стержня составим сводную таблицу и построим упругую линию (рис. 7).

$x, \text{ мм}$	$EI_z y'$	$EI_z y$		$x, \text{ мм}$	$EI_z y'$	$EI_z y$
0	$-933333 \frac{1}{3}$	0		150	537500	-20625000
50	$-529166 \frac{1}{6}$	$-39583331 \frac{1}{6}$		200	$2 \cdot 10^5$	0
81,4454	-0,2	-48232622,09		220	$6 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^5$
100	350000	$-45 \cdot 10^6$		240	$4 \cdot 10^4$	$32 \cdot 10^5$

Построение упругой линии стержня производится с учетом того, что:

- эта линия представляет собой плавную и непрерывную кривую;
- в сечении по длине стержня, где изгибающий момент M_z равен нулю, изогнутая ось стержня (упругая линия) имеет точку перегиба (кривизна кривой меняет знак);
- на участке стержня, где $M_z > 0$, кривизна кривой положительна ($K = \frac{1}{\rho} > 0$) и, следовательно, упругая линия обращена выпуклостью вниз;
- на участках стержня, где $M_z < 0$, кривизна кривой отрицательна ($K = \frac{1}{\rho} < 0$) и кривая обращена выпуклостью вверх;
- в сечении, где угол поворота равен нулю, функция прогиба достигает экстремального значения.

7. Определение размеров поперечного сечения детали исходя из условия прочности и жесткости.

По условию прочности —

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

определим размеры поперечного сечения для нашего примера:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \geq \frac{19012,5}{70} \geq 272 \text{ мм}^3.$$

Для круглого сечения

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 272}{3,14}} = 14 \text{ мм}, \quad d = 14 \text{ мм}.$$

Для прямоугольного сечения

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \quad \text{задавшись } \frac{h}{b} = 1,5 - \text{будем иметь: } W_z = \frac{2,25b^3}{6};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{6W_z}{2,25}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 272}{2,25}} = 9,0 \text{ мм} \quad \text{и} \quad h = 2b = 2 \cdot 9,0 = 18 \text{ мм}.$$

Для двутавра, также выполненного из алюминиевого сплава (допускаемое напряжение $[\sigma] = 70 \text{ Н/мм}^2$), по значению осевого момента сопротивления сечения $W_z \geq 0,272 \text{ см}^3$ из таблицы сортамента ГОСТ 13621-90 требуется назначить номер профиля.

Из свойства, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции её составных частей, получим момент инерции поперечного сечения двутавровой балки относительно оси z :

- момент инерции прямоугольника А со сторонами: H - высота и B – ширина профиля двутавра:

$$I_z^A = BH^3/12;$$

- моменты инерции внутренних полостей двутаврового сечения в виде прямоугольников В и С слева и справа от вертикальной стенки профиля двутавра:

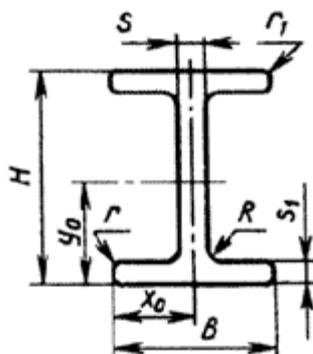
$$I_z^B = I_z^C = [((B - S)/2) * (H - S_1 - S_2)^3]/12;$$

$$I_z = I_z^A - I_z^B - I_z^C = \{BH^3 - 2*((B - S)/2) * (H - S_1 - S_2)^3\}/12,$$

если высоты полок профиля $S_1 = S_2$,

$$\text{то} \quad I_z = I_z^A - I_z^B - I_z^C = \{BH^3 - 2*((B - S)/2) * (H - 2S_1)^3\}/12.$$

Профили прессованные прямоугольные равнополочного двутаврового сечения из алюминиевых и магниевых сплавов ГОСТ 13621-90



Номер профиля	H	B	S	S ₁	S ₂	R	Площадь сечения, см ²	Диаметр описанной окружности, мм	Теоретическая масса l м, кг	
	мм								Алюминиевый сплав	Магниевый сплав
430001	5,0	13,0	3,0	1,5	1,5	1,0	0,459	14	0,131	0,083
430141	6,0	25,0	5,0	2,0	2,0	-	1,300	26	0,370	0,234
430003	8,0	14,0	6,0	2,0	2,0	-	0,800	16	0,228	0,144
430721	9,0	24,0	4,0	2,0	2,0	-	1,160	26	0,331	0,209
430722	13,0	18,0	1,5	1,5	1,5	1,0	0,699	22	0,199	0,126
430006	14,0	18,0	2,5	2,5	2,5	2,0	1,159	23	0,330	0,209
430007	15,0	7,0	1,5	1,5	1,5	0,5	0,392	17	0,112	0,071
430142	17,0	20,0	4,0	4,0	4,0	3,0	2,037	26	0,581	0,367
430724	18,0	24,0	2,0	5,5	5,5	3,0	2,857	30	0,814	0,514
430010	20,0	30,0	1,5	1,5	1,5	2,0	1,189	36	0,339	0,214
430013	23,0	38,0	1,2	1,2	1,2	1,5	1,179	44	0,336	0,212
430014	25,0	36,0	2,0	2,0	2,0	2,5	1,914	44	0,545	0,344
430725	26,0	28,0	4,0	10,0	10,0	3,0	5,917	38	1,686	1,065
430016	26,0	34,5	3,5	3,5	3,5	3,0	3,157	43	0,900	0,568
430143	28,0	19,0	1,5	1,5	2,2	1,0	1,076	34	0,307	0,194
430726	28,0	28,0	4,0	11,0	11,0	3,0	6,477	40	1,846	1,166
430022	30,0	30,0	1,5	2,0	2,0	2,0	1,624	42	0,463	0,292
430144	33,0	34,0	2,0	2,0	2,0	2,0	1,974	47	0,563	0,355
430025	35,0	30,0	2,0	2,5	2,5	2,5	2,154	46	0,614	0,388
430027	35,0	40,0	4,0	10,0	5,0	3,0	6,877	53	1,960	1,238
430028	35,0	60,0	5,0	5,0	5,0	2,5	8,591	69	2,449	1,546
430038	38,0	40,0	4,0	10,0	8,0	3,0	8,077	55	2,302	1,454
430040	40,0	40,0	4,0	13,0	10,0	2,5	9,934	57	2,831	1,788

Из таблицы 2 выберем данные по геометрическим размерам профиля двутавра: $H = 9,0\text{мм}$; $B = 24\text{мм}$; $S = 4\text{мм}$; $S_1 = S_2 = 2\text{мм}$.
Выполним расчёт момента инерции и момента сопротивления поперечного сечения профиля при этих геометрических размерах.

$$I_z = I_z^A - I_z^B - I_z^C = \{BH^3 - 2*((B - S)/2) * (H - 2S_1)^3\}/12 = \\ = \{24*9^3 - 2*((24 - 4)/2) * (9 - 2*2)^3\}/12 = 1250\text{мм}^4.$$

$$W_z = I_z / (H/2) = 1250/4,5 = 278\text{мм}^3.$$

Вывод: сравнивая величину осевого момента сопротивления $W_z = 272\text{мм}^3$ поперечного сечения профиля двутавра, полученного из условия прочности при изгибе с расчетным - $W_z = 278\text{мм}^3$, назначаем профиль № 430721.

По условию жесткости —

$$y_{\max} \leq [f].$$

В нашем примере максимальный прогиб в пролёте балки имеет место при координате $x_3 = 81, 4454\text{мм}$ (участок АВ)

$$y_{\max \text{ пр}} = - \frac{48232622}{EI_z} \text{ мм.}$$

Максимальный прогиб консоли балки имеет место при $x_3 = 240\text{мм}$

$$y_{\max \text{ к}} = \frac{32*10^5}{EI_z} \text{ мм.}$$

Назначим допускаемые прогибы для пролёта и консоли

$$[f]_{\text{пр}} \leq \frac{l_{\text{пр}}}{750} = \frac{200}{750} = 0,27 \text{ мм,}$$

$$[f]_{\text{к}} \leq \frac{l_{\text{к}}}{350} = \frac{40}{350} = 0,11 \text{ мм.}$$

Запишем условия жесткости для пролета и консоли:

$$y_{\max \text{ пр}} = \left| - \frac{48232622}{EI_z} \right| \leq 0,27 \text{ мм,}$$

$$y_{\max \text{ к}} = \frac{32*10^5}{EI_z} \leq 0,11 \text{ мм.}$$

Из этих уравнений определим значения моментов инерции

$$I_{z \text{ пр}} \geq \frac{48232622}{E * 0,27} \geq \frac{17865266}{0,7*10^5} \geq 255,22 \text{ мм}^4,$$

$$I_{z \text{ к}} \geq \frac{32*10^5}{E * 0,11} \geq \frac{29090909}{0,7*10^5} \geq 415,58 \text{ мм}^4.$$

Из полученных величин моментов инерции поперечного сечения детали выбираем больший: $I_z = 415,6 \text{ мм}^4$. Определяем размеры поперечного сечения.

Для круглого сечения

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = 415,6 \text{ мм}^4; \quad d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 415,6}{3,14}} = 9,6 \text{ мм}.$$

Для прямоугольного сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 415,6 \text{ мм}^4; \quad \frac{h}{b} = 1,5; \quad b = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 415,6}{3,375}} = 11,4 \text{ мм}, \quad h = 17,1 \text{ мм}.$$

Для двутаврового сечения. Из таблицы сортамента ГОСТ 13621-90 выбираем профиль, у которого величина $I_z \geq 415,6 \text{ мм}^4$. Назначаем профиль № 430003, у которого момент инерции поперечного сечения $I_z = 554,6 \text{ мм}^4$.

При требованиях по одновременному обеспечению прочности и жесткости элементов приборов из размеров, определенных расчетами на прочность и жесткость, необходимо принять наибольшие.

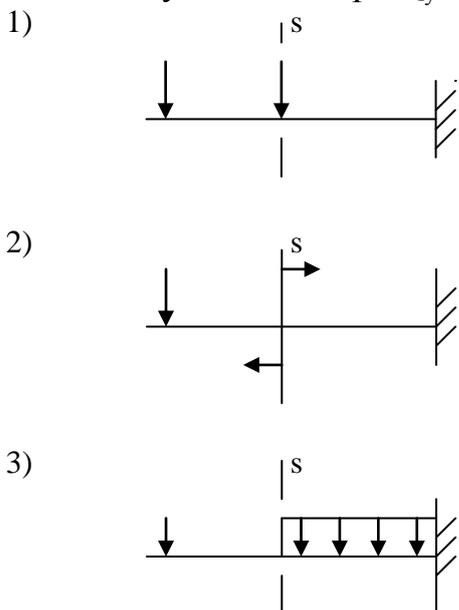
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в сопротивление материалов / П.А. Павлов, Л.К. Паршин, Г.Б. Колчин, Б.Е. Мельников; под ред. Б.Е. Мельникова; Санкт-Петербургский государственный технический университет.- Изд. 2-е, испр. -СПб.: Издательство "Лань", 2002. - 155 с.
- 2.. Дунаев П. Ф. Конструирование узлов и деталей машин: доп. М-вом образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов .— 11-е изд., стер — М.: Издательский центр "Академия", 2006 .— 495, [1] с.: ил. — (Высшее профессиональное образование, Машиностроение). — Библиогр.: с. 493 .— ISBN 978-5-7695-4929-8((в пер.)).
3. Николаенко В. Л. Прикладная механика. Расчет типовых элементов конструкций / В. Л. Николаенко. — Минск: Издательство Гревцова, 2010 .— 383, [3] с.: ил. — Прил.: с. 360-384 .— Библиограф.: с. 385 .— ISBN 978-985-6826-88-0((в пер.)).
4. Прикладная механика: доп. М-вом образования Рос. Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям высшего профессионального

- образования в области техники и технологии / В. В. Джамай [и др.]; под ред. В.В. Джамая .— М.: Дрофа, 2004 .— 416 с.: ил .— (Высшее образование) .— Библиогр.: с. 410-411 .— ISBN 5-7107-6232-6((в пер.)).
5. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач. /И.Н. Миролубов и др./ СПб.: Лань, 2004.
6. Стрелков С. П. Механика: учебник / С. П. Стрелков .- Изд.4-е, стер .— СПб. [и др.]: Издательство "Лань", 2005 .— 560 с.: ил .— (Учебники для вузов. Специальная литература) .— (Лучшие классические учебники) .— ISBN 5-8114-0622-3((в пер.)).
7. Сурин В. М. Прикладная механика: доп. УМО вузов России по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов вузов / В. М. Сурин .— 3-е изд., испр. — Минск: Новое знание, 2008 .— 388 с.: ил. — (Техническое образование) .— Библиогр.: с. 387 .— ISBN 978-985-475-278-5((в пер.)).
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов - Изд. 13-е, стер .- М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005 .- 590 с.
9. Электронно - библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Сопротивление материалов / П.А. Павлов, Л.К. Паршин, Б.Е. Мельников, В.А. Шерстнев; Санкт-Петербургский государственный технический университет. -СПб.: Издательство "Лань", 2007. -560с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=668
10. Электронно - библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Сопротивление материалов. Интернет-тестирование базовых знаний. Кудрявцев С. Г., Сердюков В. Н. -СПб.: Издательство "Лань", 2013. -176с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=5247

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ТЕСТОВ
(выберите один вариант ответа)

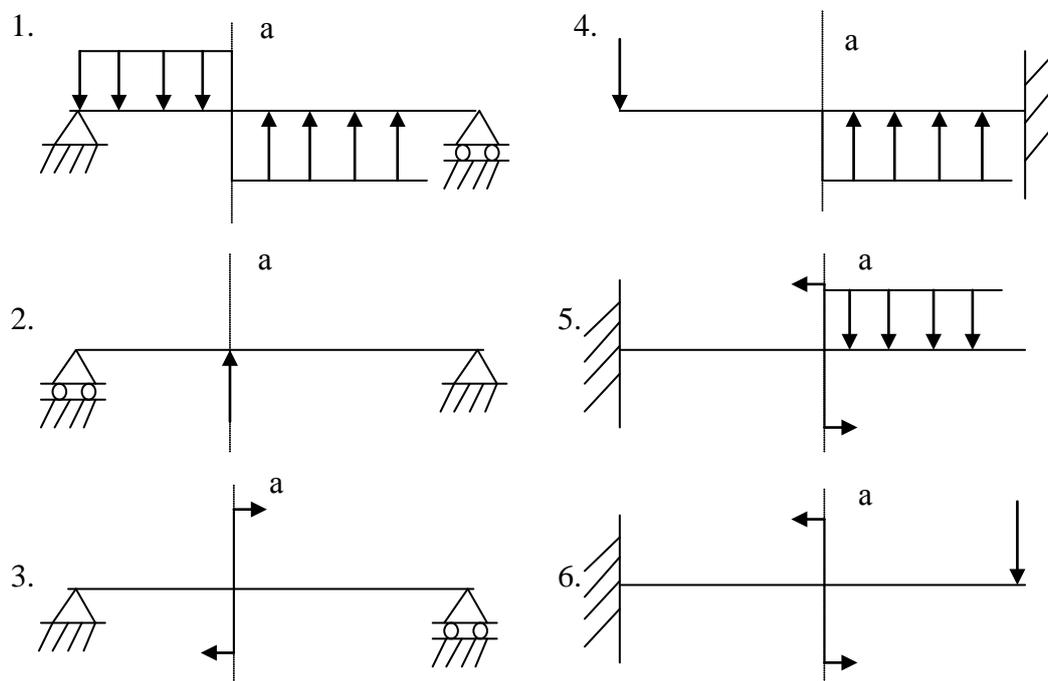
1. В каком случае на эюре Q_y в сечении "s" произойдет скачок вниз?



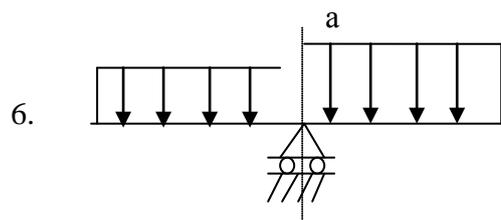
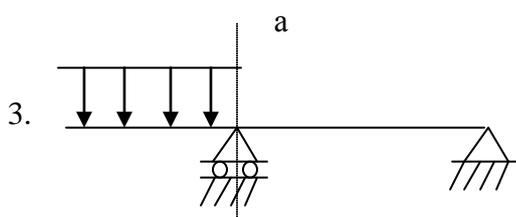
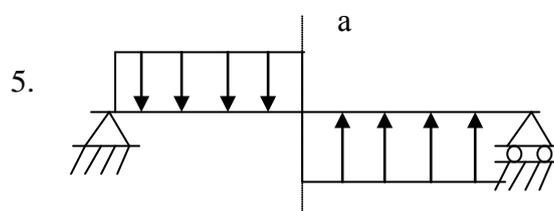
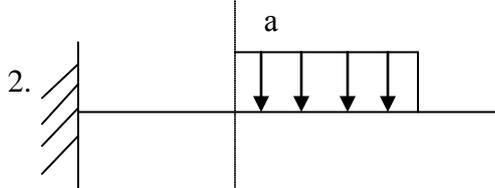
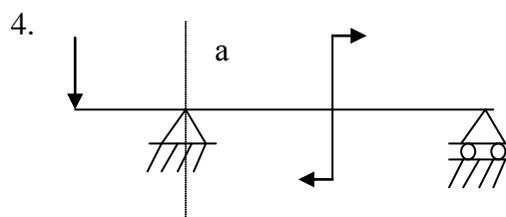
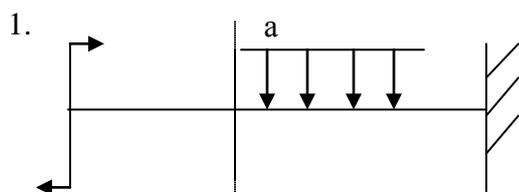
2. Балка длиной L , опирающаяся шарнирно на две опоры, нагружена в центре пролёта сосредоточенной силой P . Какое выражение осевого момента сопротивления поперечного сечения балки удовлетворяет условию прочности при изгибе, если допускаемое напряжение материала балки равно $[\sigma]$?

- а) $W \geq PL / [\sigma]$,
- б) $W \geq PL / 2[\sigma]$,
- в) $W \geq PL / 4[\sigma]$,
- г) $W \geq PL / 6[\sigma]$.

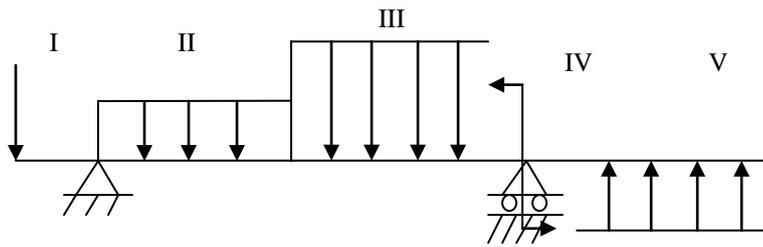
3. В каком случае на эюре M_z в сечении «а» произойдет скачок вверх?



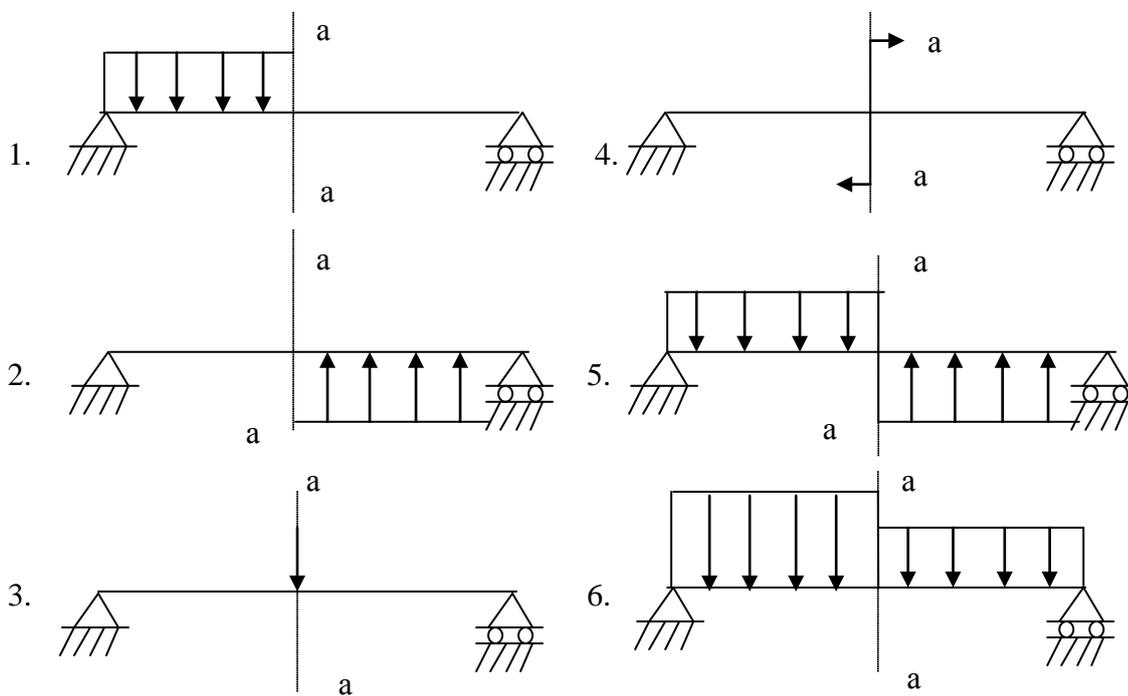
4. По какому закону изменяется осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения стержня?
5. В каких точках поперечного сечения нормальные напряжения при изгибе наибольшие?
6. Модуль первого рода материала имеет размерность ...
 - а) $\text{мм}^2 \cdot \text{Н}$,
 - б) $\text{Н}/\text{мм}^2$,
 - в) $\text{Н} \cdot \text{мм}$,
 - г) безразмерная величина.
7. Какое свойство приборостроительных материалов характеризует модуль нормальной упругости?
 - а) пластичность,
 - б) прочность,
 - в) жесткость,
 - г) вязкость.
8. Жесткость элемента при изгибе равна ...
 - а) EI_z ,
 - б) GF ,
 - в) GI_p ,
 - г) EF
9. Укажите размерность полярного момента инерции прямоугольного поперечного сечения.
10. В каком случае на эпюре M_z в сечении «а» наклонная прямая переходит в кривую 2-го порядка?



11. На каком участке эюра Q_y очерчивается прямой направленной вверх?

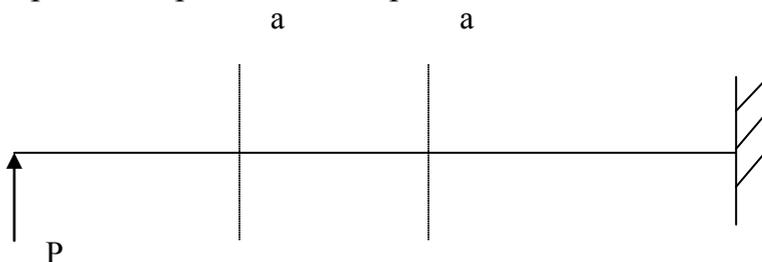


12. В каком случае на эпюре Q_y в сечении «а» прямая параллельная оси x перейдет в наклонную?

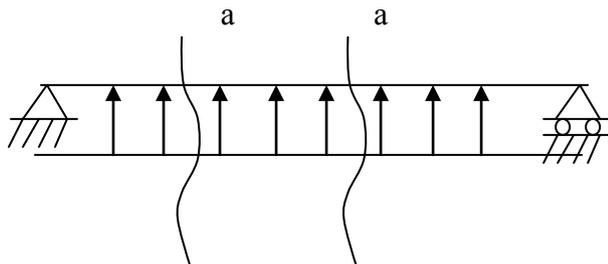


13. Эюра M_z на участке «а-а» это график в виде ...

- а) кривой 2-го порядка, направленной выпуклостью вверх;
- б) кривой 2-го порядка, направленной выпуклостью вниз;
- в) наклонной прямой направленной вверх;
- г) наклонной прямой направленной вниз;
- д) прямой параллельной продольной оси.

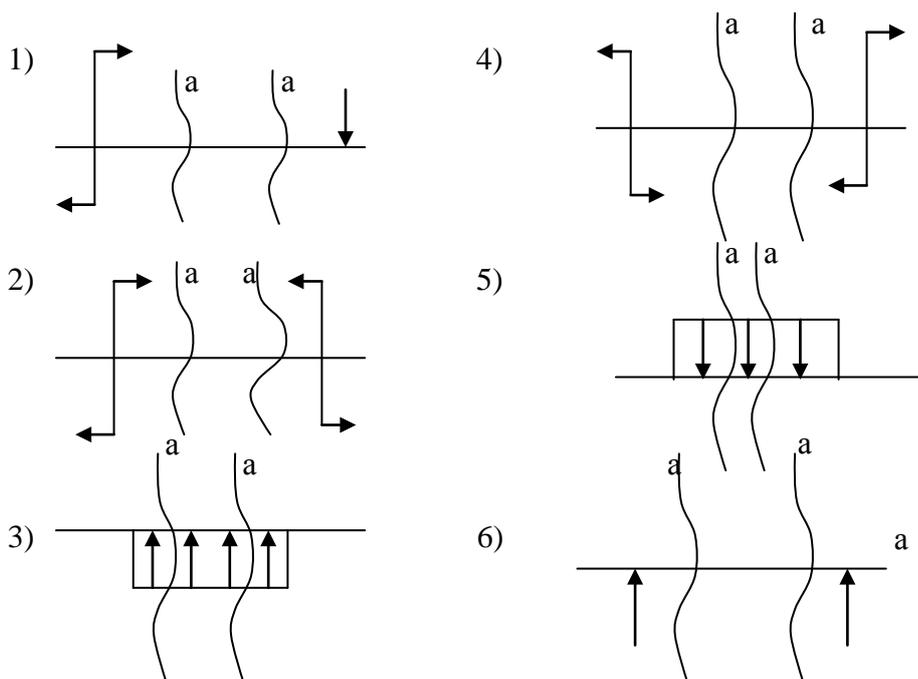


14. Как очерчивается эюра Q_y на участке «а-а»?



- а) прямой параллельной оси x .
- б) наклонной прямой идущей снизу вверх.
- в) наклонной прямой идущей сверху вниз.
- г) кривой 2-го порядка.
- д) эюра Q_y совпадает с осью x ($Q_y=0$)

15. В каком случае эюра M_z на участке «а» очерчивается кривой 2-го порядка, направленной выпуклостью вверх?



16. Составьте расчетную схему по уравнениям внутренних компонентов при поперечном изгибе пролёта балки.

I участок

$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$Q_Y = R_A - qx_1$$

$$M_Z = -M + R_A x_1 - qx_1^2 / 2$$

II участок

$$0 \leq x_2 \leq a$$

$$Q_Y = -R_B + qx_2$$

$$M_Z = R_B x_2 - qx_2^2 / 2$$



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА МЕХАТРОНИКИ



Кафедра Мехатроники, одна из старейших кафедр НИУ ИТМО, история которой начинается с 30-х годов XX века. Первое упоминание о прародительнице кафедры Мехатроники содержится в приказе № 18 от 3.10.1930 по Учебному комбинату точной механики и оптики: доцент Замыцкий Н.П. назначен с 1.10.1930 заведующим кафедрой «Детали машин института точной механики и оптики».

С 1945 г. руководство кафедрой осуществляет Н.И. Колчин, крупнейший учёный механик в самом широком смысле этого слова. Он расширил и обогатил исследовательскую и преподавательскую деятельность кафедры методами Теории машин и механизмов. Нельзя не сказать, что Н.И. Колчин был в той или иной мере учителем трех последующих заведующих кафедрой – Ф.Л. Литвина, К.И. Гуляева, Б.П. Тимофеева.

С 1949 года, заведующим кафедрой Теории механизмов и деталей машин, становится Рифтин Л.П. За время работы в ЛИТМО Рифтин Л.П. опубликовал более двух десятков научных работ. О том каким он был прекрасным педагогом с благодарностью вспоминали его ученики, в частности профессора Г.И. Новиков и Г.Н. Дульнев.

В 1963 году кафедру возглавил профессор Литвин Ф.Л.. Известность среди исследователей и специалистов принесло ему опубликование монографий: "Методы расчета при изготовлении и контроле зубчатых изделий" (совместно с Н.И. Колчиным, 1953 г.) и "Некруглые зубчатые колеса" (1956 г.). Но основной заслугой Ф.Л. Литвина следует считать его работы по общей теории зубчатых зацеплений, в которых ему удалось

предугадать тенденции развития аналитической теории зацеплений и создать методы анализа и синтеза. Результаты этих работ были опубликованы в монографии "Теория зубчатых зацеплений" (1960 г. – первое издание, 1968 г. – второе). Последнее издание до сих пор сохранило свою актуальность в качестве энциклопедии методов и результатов исследований. Отличительной особенностью научных работ Литвина Ф.Л. всегда была ярко выраженная их практическая направленность. За время работы в СССР Ф.Л.Литвин опубликовал около 150 работ, а в США – свыше 120, в том числе – три монографии.

В начале 1979 года заведующим кафедрой становится профессор Гуляев К.И. По своей направленности кафедра становится общинженерной.

В 1989 году Тимофеев Б.П. приступил к заведыванию общинженерной кафедрой Теории механизмов и деталей приборов, преобразовав её в 1991 году в выпускающую кафедру «Мехатроника», предугадав тенденции развития современного приборостроения. Интересно то, что как специальность «Мехатроника» появилась в официальном списке только в 1994 году.

С 2005 по 2011 год кафедру возглавлял доцент Ноздрин М.А. В учебную и научную деятельность были внедрены компьютерные технологии, разработаны инновационные образовательные программы, созданы новые лабораторные циклы и лаборатории. В 2009 году утверждена научная школа «Фундаментальные проблемы надежности и точности машин и приборов». Основные научные направления работы школы направлены на вопросы разработки мехатронных и биомехатронных устройств, прогнозирование метрологической надежности средств измерений, совершенствование измерительных технологий, также особое внимание уделено моделированию технологических и деградиационных процессов. Кафедра Мехатроники получила грант и становится организатором Всероссийской студенческой олимпиады по прикладной механике.

В настоящее время кафедрой руководит профессор В.М. Мусалимов. Кафедра ведет активную пропаганду научно-исследовательских достижений. Преподавателями и аспирантами кафедры сделано свыше 500 докладов на международных, межотраслевых и межвузовских научно-технических конференциях и симпозиумах, опубликовано свыше 200 работ и статей в научно-технических журналах и сборниках, как в Российских, так и в зарубежных. Виктор Михайлович является руководителем научной школы НИУ ИТМО «Фундаментальные и прикладные проблемы точности и надежности машин и приборов». Им опубликовано более 300 работ, ряд монографий и учебных пособий, получено 25 патентов на изобретения, подготовлено 25 кандидатов наук. Профессор В.М. Мусалимов регулярно читает лекции в НИУ ИТМО, институте машиностроения (завод-ВТУЗ) и ТУ Ильменау (Германия). В.М. Мусалимов является почетным работником высшего профессионального образования РФ, главным научным сотрудником ИПМаш РАН, членом редколлегии журнала «Приборостроение» и действительным членом Нью-Йоркской АН. Включен в ряд англоязычных изданий книг-справочников «Кто есть кто в мире». Осуществляется тесное

научное сотрудничество с зарубежными вузами (технический университет Ильменау, Германия; инженерно-аграрной академией г. Быдгощь, Польша; ИММС НАН Беларуси, г. Гомель; Таллиннский Технологический университет; с исследовательским центром механизмов г. Иллинойс, Чикаго). Направления исследований профессора В.М. Мусалимова: трибология, механика деформируемого твердого тела, техническое зрение, биомехатроника.

Владимир Владимирович Биндюк
Павел Павлович Коваленко

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

В авторской редакции

В. В. Биндюк
П. П. Коваленко

Дизайн обложки

В. В. Биндюк

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 300 экз.

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики
и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49



