МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

Т.Б. Полторацкая

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В БИЗНЕС-СИСТЕМАХ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 330.44+519.872

Полторацкая Т.Б. Экономико-математическое моделирование в бизнес-системах: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 30 с.

Приведены программа дисциплины «Экономико-математическое моделирование в бизнес-системах» с учетом требований ФГОС к результатам освоения основной образовательной программы подготовки магистров, а также фонд оценочных средств.

Предназначено для магистрантов направления 080200 Менеджмент очной и заочной форм обучения.

Рецензент: кандидат экон. наук, доц. М.В. Скоробогатов

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных техно-логий, механики и оптики».

ВВЕДЕНИЕ

Цели и задачи изучения дисциплины

Дисциплина «Экономико-математическое моделирование в бизнес-системах» является частью профессионального цикла дисциплин подготовки магистрантов по направлению 080200 «Менеджмент». Термин экономико-математическое моделирование используется как обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов. Бизнес-система является разновидностью социально-экономических систем.

Под социально-экономической системой будем понимать сложную вероятностную динамическую систему, охватывающую процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ. Процесс изучения дисциплины предполагает выполнение магистрантами различных форм работ в строго определенные для этого сроки. Цель этих работ – контроль за степенью усвоения содержания разделов и всего курса.

Целью изучения дисциплины является достижение следующих результатов образования (РО):

знания:

на уровне представлений – знание основных понятий и общих теоретических вопросов исследования операций, моделей и методов решения широкого ряда экономических задач;

на уровне воспроизведения – знание классификации и возможностей применения экономико-математических методов в экономическом анализе, оптимальном планировании и управлении бизнес-системами;

на уровне понимания – знание матричных статических и динамических моделей, прикладных моделей экономических процессов;

умения:

теоретические – владение методами экономико-математического моделирования бизнес-систем; методами формализации и решения детерминированных и стохастических задач текущего планирования и оперативного управления бизнес-системами;

практические – владение методикой обработки результатов экономико-математического моделирования, их экономической интерпретации с применением методов эконометрического анализа; выполнение формализованной постановки задач;

навыки эффективного применения экономико-математического моделирования при решении типовых задач бизнес-менеджмента.

Перечисленные РО являются основой для формирования следующих компетенций:

общекультурных:

ОК-1 – способность развивать свой общекультурный и профессиональный уровень и самостоятельно осваивать новые методы исследования;

ОК-4 – способность принимать организационно-управленческие решения и оценивать их последствия;

профессиональных:

ПК-5 – способность использовать количественные и качественные методы для проведения научных исследований и управления бизнес-процессами;

ПК-9 – способность обобщать и критически оценивать результаты, полученные отечественными и зарубежными исследователями; выявлять и формулировать актуальные научные проблемы.

Дисциплина «Экономико-математическое моделирование в бизнес-системах» относится к циклу профессиональных дисциплин.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины являются: знание основных понятий и инструментов алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, основных понятий и моделей микроэкономической теории, макроэкономики и мировой экономики; умение проводить анализ отрасли, используя экономические модели, применять математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей, обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные, применять информационные технологии для решения задач; владение математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих задач.

Содержание данной дисциплины является логическим продолжением содержания математических и естественно-научных дисциплин: математики, информатики, информационных технологий в менеджменте, а также общих профессиональных дисциплин: статистики, маркетинга, основ менеджмента, управленческой экономики, прогнозирования и моделирования управления бизнес-процессами; служит основой для научно-исследовательской работы и написания магистерской диссертации.

Основные формы обучения по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в бизнес-системах»:

1. Лекции, на которых дается основной объем теоретического материала дисциплины.

2. Практические и семинарские занятия, на которых закрепляются и развиваются теоретические знания, изложенные в лекции, а также полученные самостоятельно. Занятия проводятся в форме опросов или развернутой беседы с решением расчетных задач.

3. Домашние задания, которые выполняются самостоятельно магистрантом и сдаются в письменном виде.

4. Самостоятельная работа магистранта, которая включает в себя работу с конспектом лекции, учебниками и учебными пособиями, а также дополнительной литературой для подготовки специальных сообщений.

5. Контроль самостоятельной работы магистрантов.

Материал рассматриваемой дисциплины включает 8 тем, условно сгруппированных в три раздела (три дидактические единицы), посвященных основным проблемам. В первом разделе рассматриваются статические балансовые модели; во втором – динамические балансовые модели; в третьем – прикладные модели экономических процессов.

Рабочую программу дисциплины можно представить в виде таблицы.

Наименование темы и ее краткое содержание	Часы		
	Лекции	ПЗ	СРС
I. Статические балансовые модели	10	9	26
Лекция 1. ***Введение.*** *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* основные понятия математического моделирования; этапы экономико-математического моделирования; классификация экономико-математических моделей	2		

Окончание

Наименование темы и ее краткое содержание	Часы		
	Лекции	ПЗ	СРС
Лекция 2. *Балансовый метод.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* принципиальная схема межпродуктового баланса	2		
Лекция 3. *Экономико-математическая модель межотраслевого баланса.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* формулы и соотношения	2		
Лекция 4. *Коэффициенты прямых и полных материальных затрат.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* три вида плановых расчетов	2		
Лекция 5. *Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* модель международной торговли; труд; фонды	2		
II. Динамические балансовые модели	4	18,5	37
Лекция 6. *Динамическая межотраслевая балансовая модель.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* основные положения модели	2		
Лекция 7. *Динамическая межотраслевая балансовая модель.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* основные соотношения модели	2		
III. Прикладные модели экономических процессов	3	32	40,5
Лекция 8. *Моделирование систем массового обслуживания.* *Основные вопросы, рассматриваемые на лекции:* очередь с несколькими каналами обслуживания	3		

Форма контроля – «экзамен».

1. ПЛАНЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ И ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Раздел 1. Статические балансовые модели

Практические и семинарские занятия – 9 ч.

Занятие 1. Линейная модель международной торговли.

Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения, расчетные уравнения.

Занятие 2. Статическая n-секторная балансовая модель В. Леонтьева. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения.

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева)

Наиболее простой вариант модели называется моделью «затраты–выпуск».

Алгебраическая теория анализа этой модели сводится к решению системы линейных уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции.

Весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «*чистых отраслей*».

«Чистая отрасль» – это условное понятие, некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная (например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство).

Обозначим:

x_{ij} – объем продукции отрасли i, расходуемый в отрасли j;

X_i – объем производства отрасли i за данный промежуток времени (валов**о**й выпуск продукции i);

Y_i – объем потребления продукции отрасли i в непроизводственной сфере (объем конечного потребления);

Z_j – условно чистая продукция, которая включает оплату труда, чистый доход и амортизацию.

Единицы измерения всех величин могут быть натуральными или стоимостными. Мы будем рассматривать стоимостный баланс

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n		
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nn}	Y_n	X_n
Условно чистая продукция	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

по графам: $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_{j,}\ j = 1,\ldots,n$;

по строкам: $X_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Y_{i,}\ i = 1,\ldots,n$ –

уравнения распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Балансовый характер таблицы выражается в том, что

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Коэффициенты прямых материальных затрат. Коэффициент a_{ij} показывает, сколько необходимо единиц продукции отрасли i для производства единицы продукции отрасли j:

$$a_{ij} = x_{ij} / X_j;\ \ x_{ij} = a_{ij}\ X_j.$$

Подставляя в балансовое соотношение, получаем

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j + Y_i,$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y.$$

Занятие 3. Статическая n-секторная балансовая модель В. Леонтьева. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: расчетные уравнения.

С помощью этой модели можно выполнять три вида плановых расчетов.

• Задав в модели величины *валовой продукции* каждой отрасли (X_i), можно определить объемы *конечной продукции* каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)\,X.$$

• Задав величины *конечной продукции* всех отраслей (Y_i), можно определить величины *валовой продукции* каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1}\,Y.$$

• Задав величины *валовой продукции* для ряда отраслей и объемы конечной продукции для всех остальных отраслей, можно найти величины *конечной продукции* первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В формулах E – единичная матрица n-го порядка, *а* $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная к матрице $(E - A)$. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т. е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через $B = (E - A)^{-1}$, тогда последнюю систему уравнений в матричной форме можно записать в виде

$$X = B\,Y.$$

Элементы матрицы B называются *коэффициентами полных затрат*. Они показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Плановые расчеты по модели В. Леонтьева можно проводить, если выполняется *условие продуктивности.*

Будем называть неотрицательную матрицу A *продуктивной,* если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX.$$

Очевидно, что это условие означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса.

Для того чтобы *матрица коэффициентов прямых затрат A* была *продуктивной*, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось следующее условие: *матрица* $(E - A)$ *неотрицательно обратима*, т. е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Управление самостоятельной работой

Консультации по выполнению домашнего задания.

Раздел 2. Динамические балансовые модели

Практические и семинарские занятия – 18,5 ч.

Занятие 4. Динамические односекторные балансовые модели В. Леонтьева.

Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения, расчетные уравнения.

Занятие 5. Модель В. Леонтьева с дискретным временем. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: случай переменного потребления.

Занятие 6. Модель В. Леонтьева с дискретным временем. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: случай постоянного потребления.

Занятие 7. Модель В. Леонтьева с непрерывным временем. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: случай переменного потребления.

Занятие 8. Модель В. Леонтьева с непрерывным временем. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: случай постоянного потребления.

Управление самостоятельной работой магистранта

Консультации по выполнению домашнего задания.

Раздел 3. Прикладные модели экономических процессов

Практические и семинарские занятия – 32 ч.

Занятие 9. Модель оптимизации состава покупки. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения.

Занятие 10. Модель оптимизации состава покупки. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: бюджетное множество; поверхности безразличия.

Занятие 11. Модель рынка одного товара. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения.

Занятие 12. Модели Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения.

Занятие 13. Модель Эванса. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: модель Эванса с непрерывным временем.

Занятие 14. Модель Эванса. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: модель Эванса с дискретным временем.

Занятие 15. Модель выпуска продукции. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: понятие производственной функции.

Занятие 16. Производственная функция Кобба–Дугласа. Форма проведения занятий – решение задач. Отрабатываемые вопросы: исходные положения.

1. Домашнее задание № 1. Линейная модель международной торговли.
2. Домашнее задание № 2. Статическая n-секторная балансовая модель В. Леонтьева.
3. Домашнее задание № 3. Динамические односекторные балансовые модели В. Леонтьева.
4. Домашнее задание № 4. Модель В. Леонтьева с дискретным временем. Случай переменного потребления.

5. Домашнее задание № 5. Модель В. Леонтьева с дискретным временем. Случай постоянного потребления.

6. Домашнее задание № 6. Модель В. Леонтьева с непрерывным временем. Случай переменного потребления.

7. Домашнее задание № 7. Модель Леонтьева с непрерывным временем. Случай постоянного потребления.

8. Домашнее задание № 8. Модель оптимизации состава покупки.

9. Домашнее задание № 9. Модель Эванса с непрерывным временем.

10. Домашнее задание № 10. Модель Эванса с дискретным временем.

11. Домашнее задание № 11. Модель выпуска продукции.

12. Домашнее задание № 12. Производственная функция Кобба–Дугласа.

13. Домашнее задание № 13. Моделирование систем массового обслуживания.

Типовой расчет 1. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270 \text{ (усл. ден. ед.)}.$$

Типовой расчет 2. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле, при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ед.

Типовой расчет 3. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле, при условии, что бюджет четвертой страны равен 500 у.е.

Типовой расчет 4. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 350 у.е.

Типовой расчет 5. Известна структурная матрица торговли трех стран:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Суммарный национальный доход трех стран равен 900. Найти национальный доход каждой из стран, позволяющий осуществлять бездефицитную торговлю.

Решение. В рассматриваемом случае матричное уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Записав в форме системы линейных уравнений, получаем

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}\, x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}\, x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}\, x_2 - \frac{2}{3}\, x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x_1 + 3\, x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3\, x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12x_1 + 3\, x_2 + 4x_3 = 0 \\ -9\, x_2 + 12x_3 = 0 \\ 9x_2 - 12x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x_1 + 3\, x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3\, x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12x_1 + 8x_3 = 0 \\ -3\, x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = \frac{2}{3}\, d \\ x_2 = \frac{4}{3}\, d \\ x_3 = d \end{cases}$$

где символом d обозначено произвольное число.

Теперь можно найти значения национальных доходов стран:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2}{3}d + \frac{4}{3}d + d = 3d = 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 300, x_1 = 200, x_2 = 400, x_3 = 300.$$

Ответ: $x_1 = 200$; $x_2 = 400$; $x_3 = 300$.

Типовой расчет 6. Технологическая матрица замкнутого производственного комплекса, состоящего из трех секторов S_1, S_2, S_3, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}17 & 0 \\ 0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}14 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Вектор конечной продукции $C = \begin{pmatrix} 80{,}1 \\ 42{,}8 \\ 96 \end{pmatrix}$.

Найти вектор выпуска продукции.

Типовой расчет 7. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции, заполнить схему межотраслевого материального баланса.

Решение. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат с помощью формул обращения невырожденных матриц.

1. Находим матрицу $(E - A)$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем определитель этой матрицы:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}196.$$

3. Транспонируем матрицу $(E-A)$:

$$(E-A)' = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & 0,0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

4. Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы $(E-A)'$:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ 0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,4; \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,1 & -0,1 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,12;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,1 & 0,5 \\ -0,4 & 0,0 \end{vmatrix} = 0,2; \qquad A_{21} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ -0,0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,16;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,44; \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,0 \end{vmatrix} = 0,08;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ 0,5 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,17; \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,1 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,1;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,33.$$

Таким образом, присоединенная к матрице $(E-A)$ матрица имеет вид

$$(\overline{E-A}) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,12 & 0,2 \\ 0,16 & 0,44 & 0,08 \\ 0,17 & 0,1 & 0,33 \end{pmatrix}.$$

5. Находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат:

$$B = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,02 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix}.$$

6. Находим величины валовой продукции трех отраслей (вектор X):

$$X = BY = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,02 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,3 \\ 510,1 \\ 729,6 \end{pmatrix}.$$

7. Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой $X_{ij} = a_{ij}X_j$. Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадранта нужно элементы первого столбца заданной матрицы A умножить на величину $X_1 = 775,3$; элементы второго столбца матрицы A – на величину $X_2 = 510,1$; элементы третьего столбца матрицы A – на $X_3 = 729,6$.

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов первого квадранта.

Четвертый квадрант в этом примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта.

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	232,6	51	291,8	200	775,3
2	155,1	255	0	100	510,1
3	232,6	51	145,9	300	729,6
Условно чистая продукция	155	153,1	291,9	600	
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		2015,0

Задачи данного типа удобно решать при помощи электронной таблицы Excel.

Разместим в ячейках электронной таблицы исходную матрицу и единичную соответствующего ей размера:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0,3	0,1	0,4				1	0	0	
2	A	0,2	0,5	0			E	0	1	0	
3		0,3	0,1	0,2				0	0	1	
4											

1. Находим матрицу $(E - A)$:

B5 {=H1:J3-B1:D3}

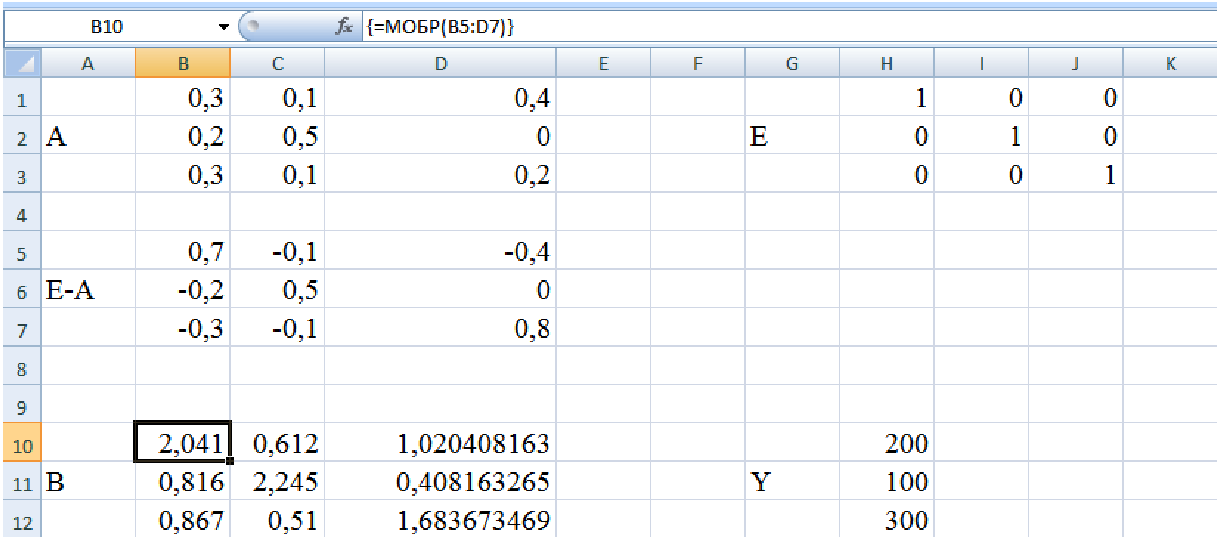
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0,3	0,1	0,4				1	0	0	
2	A	0,2	0,5	0			E	0	1	0	
3		0,3	0,1	0,2				0	0	1	
4											
5		0,7	-0,1	-0,4							
6	E-A	-0,2	0,5	0							
7		-0,3	-0,1	0,8							
8											

Для получения результата по этой формуле необходимо:
– выделить диапазон ячеек, содержащий матрицу *E*;
– нажать знак « – »;
– выделить диапазон ячеек, содержащий матрицу *A*;
– нажать три клавиши: CTRL + SHIFT + ENTER.
Формулу, как обычно, начинаем писать со знака «=».

3. Находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат:

$$B = (E - A)^{-1}$$

и размещаем в ячейках вектор конечной продукции *Y*:



B10 | {=МОБР(B5:D7)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0,3	0,1	0,4				1	0	0	
2	A	0,2	0,5	0			E	0	1	0	
3		0,3	0,1	0,2				0	0	1	
4											
5		0,7	-0,1	-0,4							
6	E-A	-0,2	0,5	0							
7		-0,3	-0,1	0,8							
8											
9											
10		2,041	0,612	1,020408163				200			
11	B	0,816	2,245	0,408163265			Y	100			
12		0,867	0,51	1,683673469				300			

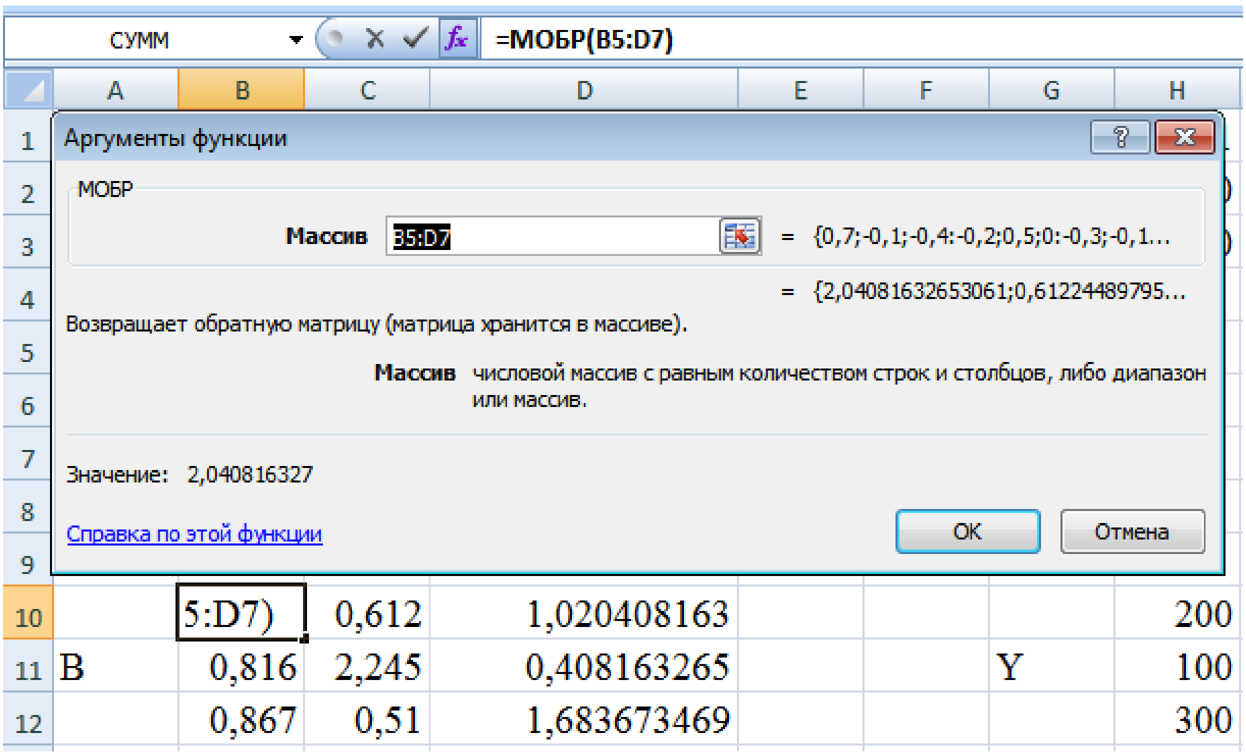
Для вычисления обратной матрицы необходимо:

– выделить диапазон ячеек для размещения обратной матрицы;

– выбрать функцию МОБР в категории Математические;

– в диалоговое окно ввести диапазон ячеек, где содержится матрица ($E - A$);

– нажать три клавиши: CTRL+SHIFT+ENTER.



Все элементы матрицы коэффициентов полных затрат B неотрицательны, следовательно, матрица A продуктивна.

4. Найдем величины валовой продукции трех отраслей (вектор X): $X = BY$:

B14 {=МУМНОЖ(B10:D12;H10:H12)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0,3	0,1	0,4				1	0	0	
2	A	0,2	0,5	0			E	0	1	0	
3		0,3	0,1	0,2				0	0	1	
4											
5		0,7	-0,1	-0,4							
6	E-A	-0,2	0,5	0							
7		-0,3	-0,1	0,8							
8											
9											
10		2,041	0,612	1,020408163				200			
11	B	0,816	2,245	0,408163265			Y	100			
12		0,867	0,51	1,683673469				300			
13											
14		775,5									
15	X	510,2									
16		729,6									

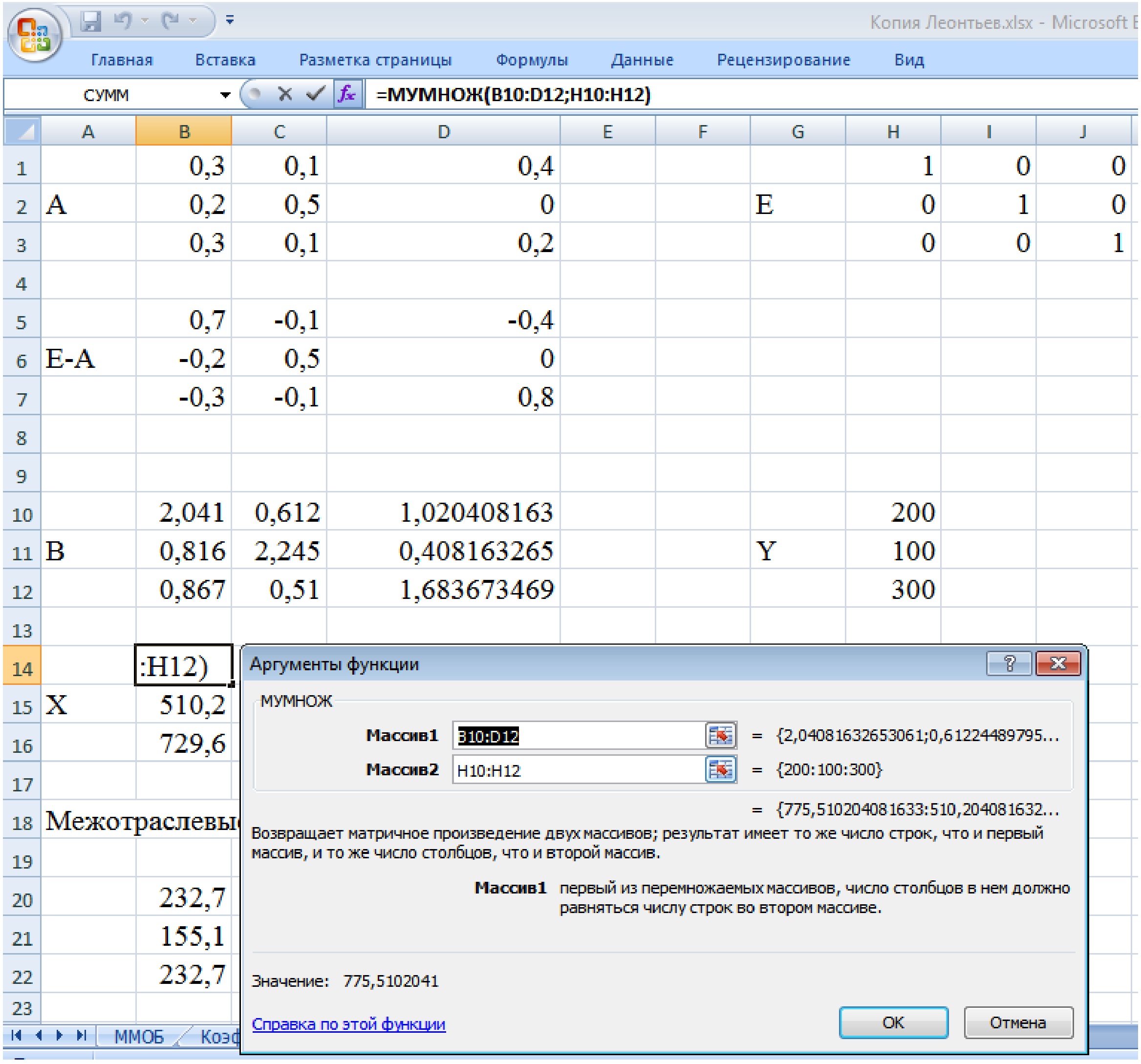
Для этого:

– выделить диапазон ячеек для размещения вектора валового выпуска X;

– выбрать функцию МУМНОЖ в категории Математические;

– в диалоговое окно ввести диапазоны ячеек, где содержатся матрицы B и Y;

– нажать три клавиши: CTRL+SHIFT+ENTER.



5. Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой $X_{ij} = a_{ij}X_j$.

Копия Леонтьев.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

B20 =B1*B14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		0,3	0,1	0,4				1	0	0	
2	A	0,2	0,5	0			E	0	1	0	
3		0,3	0,1	0,2				0	0	1	
4											
5		0,7	-0,1	-0,4							
6	E-A	-0,2	0,5	0							
7		-0,3	-0,1	0,8							
8											
9											
10		2,041	0,612	1,020408163				200			
11	B	0,816	2,245	0,408163265			Y	100			
12		0,867	0,51	1,683673469				300			
13											
14		775,5									
15	X	510,2									
16		729,6									
17											
18	Межотраслевые поставки продукции:				xij =aij *Xj						
19											
20		232,7	51,02	291,8367347							
21		155,1	255,1	0							
22		232,7	51,02	145,9183673							

Или более подробно

19				
20		=B1*B14	=C1*B15	=D1*B16
21		=B2*B14	=C2*B15	=D2*B16
22		=B3*B14	=C3*B15	=D3*B16
23				

В результате получаем

24					
25	Межотраслевой баланс производства и распределения продукции:				
26	232,65306122449	51,0204081632653	291,836734693878	200	=СУММ(B26:E26)
27	155,102040816327	255,102040816327	0	100	=СУММ(B27:E27)
28	232,65306122449	51,0204081632653	145,918367346939	300	=СУММ(B28:E28)
29	=B30-СУММ(B26:B28)	=C30-СУММ(C26:C28)	=D30-СУММ(D26:D28)	=СУММ(B29:D29)	
30	775,510204081633	510,204081632653	729,591836734694	=СУММ(B30:D30)	=СУММ(F26:F29)
31					

или в числовом выражении

23						
24						
25		Межотраслевой баланс производства и распределения продукции:				
26		232,7	51,02	291,84	200	775,5102041
27		155,10	255,10	0,00	100	510,2040816
28		232,65	51,02	145,92	300	729,5918367
29		155,10204	153,06122	291,836735	600	
30		775,5102	510,20408	729,591837	2015,31	2015,306122
31						

Типовой расчет 8. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

а также затраты живого труда в трех отраслях: $L_1 = 1160$, $L_2 = 460$, $L_3 = 875$ ед. измерения трудовых затрат.

Определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

Типовой расчет 9. На основании данных, приведенных в таблице, рассчитать коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Отрасль	Прямые межотраслевые потоки			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	60	80	60
2	25	90	40	25
3	25	60	40	35

Типовой расчет 10. В таблице приведены коэффициенты прямых материальных затрат и объемы конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей:

Отрасль	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0,2	0,2	0,1	50
2	0,5	0,3	0,2	0
3	0,2	0,3	0,4	30

Проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых затрат, рассчитать коэффициенты полных материальных затрат.

2. ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия математического моделирования. Определение системы. Понятие бизнес-системы.
2. Этапы экономико-математического моделирования.
3. Классификация экономико-математических моделей.
4. Балансовый метод. Принципиальная схема межпродуктового баланса. Основные положения.
5. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса. Варианты расчетов.
6. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат.
7. Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей. Труд.
8. Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей. Фонды.
9. Динамическая межотраслевая балансовая модель. Основные положения.
10. Динамическая межотраслевая балансовая модель. Основные соотношения.
11. Статическая n-секторная балансовая модель В. Леонтьева. Схема решений расчетных уравнений.
12. Динамические односекторные балансовые модели В. Леонтьева.
13. Модель В. Леонтьева с дискретным временем. Случай переменного потребления.
14. Модель В. Леонтьева с дискретным временем. Случай постоянного потребления.
15. Модель В. Леонтьева с непрерывным временем. Случай переменного потребления.
16. Модель В. Леонтьева с непрерывным временем. Случай постоянного потребления.
17. Линейная модель международной торговли. Структурная матрица.
18. Линейная модель международной торговли. Схема решения расчетных уравнений.
19. Модель выпуска продукции. Понятие производственной функции.
20. Моделирование систем массового обслуживания. Основные понятия, классификация, методы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Орлова И.В., Половников В.А.** Экономико-математические методы и модели. Компьютерное моделирование. – М.: Вузовский учебник – ИНФРА-М, 2010.

2. **Орлова И.В.** Экономико-математическое моделирование: Практ. пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2008.

3. **Кремер Н.Ш.** Исследование операций в экономике. – М.: Юрайт, 2011.

4. Электронно-библиотечная система. Изд-во «Лань» **[Электронный ресурс]** Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. – М.: Юрайт, 2011.

– Режим доступа:
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=1621

5. Статьи научного журнала «Экономика и математические методы».

Дополнительная

6. **Маркин Ю.П.** Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2007.

7. **Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б.** Математические методы и модели для менеджмента. 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007.

8. Эконометрика: Учеб. 2-е изд., перераб. и доп. / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2008.

9. **Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Каныгин Г.И.** Методы оптимизации. Практикум. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

10. **Потапов Д.К.** Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие. – СПб., 2006.

11. **Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д.** Экономико-математические методы и модели. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учеб. – М.: Финансы и статистика, 2005.

12. Моделирование экономических процессов: Учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

13. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

14. **Шелобаев С.И.** Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

Программное обеспечение, Интернет-ресурсы, электронные библиотечные системы

http://lib.4i5.ru/cu753.htm
http://www.cemi.rssi.ru/emm/home.htm

СОДЕРЖАНИЕ

Полторацкая Татьяна Борисовна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В БИЗНЕС-СИСТЕМАХ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 10.02.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 1,86. Печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,81
Тираж 50 экз. Заказ № С 10

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9