МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

А.Ю. Григорьев, Д.П. Малявко, Л.А. Фёдорова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЯМ ЕЁ ДВИЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2014

УДК 531.8

Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Фёдорова Л.А. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 35 с.

Приводятся методические указания 200 вариантов задания с исходными данными для самостоятельной работы по курсу «Теоретическая механика», а также указания к его выполнению.

Пособие рассчитано на самостоятельную работу студентов направлений 141200, 190600, 220700, 151000, 140700 всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Пронин

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинематика движения точки изучает геометрические свойства механического движения материальной точки без учёта её массы и действующих на неё сил.

В кинематике точки рассматриваются две основные задачи:
а) установление математических способов задания движения точки;
б) определение по заданному закону движения точки всех кинематических характеристик этого движения (траектории скорости и ускорения).

Выполнение задания по определению скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения является решением второй основной задачи кинематики точки при координатном способе задания её движения на плоскости.

2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ И ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.1. Условия к заданию

По заданным уравнениям движения точки М установить вид её траектории и для момента времени $t=t_1$ найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в разд. 2.4, содержащем 200 вариантов задания.

В результате выполнения задания построить (в масштабе)
- траекторию движения точки и определить по ней положение точки М в момент t_1;
- составляющие $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ и вектор скорости $\vec{v}$ точки М в момент t_1;
- ускорения $\overrightarrow{a_x}, \overrightarrow{a_y}, \overrightarrow{a_\tau}, \overrightarrow{a_n}$ и $\vec{a}$ точки М в момент t_1.

2.2. Примеры выполнения задания

Пример 1

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 16t^2 - 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$t_1 = 0{,}5$с.

Координаты точки заданы в сантиметрах.

Определить и построить в масштабе:

1) траекторию точки, положение M_1 с координатами $x(t_1)$, $y(t_1)$;
2) $\vec{V}(t_1)$;
3) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_x(t_1) + \vec{a}_y(t_1)$;
4) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_\tau(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$;
5) вычислить радиус кривизны траектории $\rho(t_1)$

Решение

Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1):

$$t = \frac{x}{4},$$

$$y = 16 \cdot \frac{x^2}{4^2} - 1.$$

Таким образом, уравнение траектории точки имеет вид:

$$y = x^2 - 1, \qquad (2)$$

т. е. траекторией точки является парабола, симметричная относительно оси y, с вершиной в точке с координатами (0; –1), ветви которой направлены в сторону положительной оси y (на рис. 1 траектория изображена в масштабе).

Определяем координаты точки в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с:

$$x(t_1) = 4 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ см},$$
$$y(t_1) = 16 \cdot (0{,}5)^2 - 1 = 3 \text{ см}.$$

Находим положение $(\cdot)\ M_1$ в плоскости xy (рис. 1).

Далее необходимо построить вектор скорости точки в момент времени t_1, представляя его в виде

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y}, \quad (3)$$

или

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j}, \quad (3')$$

где V_{1x}, V_{1y} – алгебраические величины проекций скорости точки на координатные оси в момент времени t_1 ($V_x(t_1) \equiv V_{1x}$; $V_y(t_1) \equiv V_{1y}$ – для краткости); $\vec{i}, \vec{j}$ – орты координатных осей (рис. 1).

Определяем проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя по времени уравнения (1) , представляющие законы изменения координат точки с течением времени:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = 4 = \text{const}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = 32t; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$V_{1x} = 4 \text{ см/с};$$
$$V_{1y} = 32 \cdot 0{,}5 = 16 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки в заданный момент времени равен:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16{,}5 \text{ см/с.}$$

В соответствии с уравнениями (3), (3′) строим вектор скорости $\vec{V}_1$ с началом в $(\cdot)M_1$. Так как $V_{1x}, V_{1y} > 0$, составляющие $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ вектора скорости, параллельные осям x, y, направлены так же, как орты этих осей (рис. 1). Единица масштаба для построения вектора скорости точки выбрана в соответствии с модулями векторов $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ и представлена на рис. 1 справа. Сложив составляющие $\vec{V}_{1x}, \vec{V}_{1y}$ по правилу параллелограмма, получаем направленный по диагонали вектор скорости точки $\vec{V}_1$, линией действия которого является касательная к траектории в $(\cdot)$ M_1, что подтверждает правильность решения задачи (рис. 1).

Вектор ускорения точки $\vec{a}(t_1)$, для краткости обозначаемый $\vec{a}_1$, строим в масштабе двумя способами, чтобы произвести графическую проверку правильности его определения.

I способ подобен рассмотренному выше для построения скорости точки.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y}, \tag{5}$$

или

$$\vec{a}_1 = a_{1x}\vec{i} + a_{1y}\vec{j}, \tag{5'}$$

где a_{1x}, a_{1y} – алгебраические величины проекций ускорения точки на координатные оси в момент времени t_1. Определяем проекции ускорения точки на оси x, y, дифференцируя по времени законы (4) изменения проекций скорости точки на эти оси с течением времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0 = \text{const},$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = 32 = \text{const}.$$

Таким образом,

$$a_{1x} = 0,$$
$$a_{1y} = 32 \text{ см/с}^2,$$
$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = 32 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с уравнениями (5), (5′) строим вектор ускорения точки $\vec{a}_1$с началом в (·) M_1. Так как $a_{1x} = 0$, то полное ускорение точки $\vec{a}_1$совпадает с его составляющей, параллельной оси y. Ускорение $\vec{a}_1$ направлено вверх (как орт $\vec{j}$), поскольку $a_{1y} \succ 0$. Единица масштаба выбрана в соответствии с его модулем и представлена справа (рис. 1).

II способ. Представляем ускорение точки в момент времени t_1 как геометрическую сумму тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}. \qquad (6)$$

и определяем каждую из составляющих.

Известно, что

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

Принимая во внимание, что в любой момент времени $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, где V_x, V_y – функции времени, получим:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right) = \frac{2V_x \dfrac{dV_x}{dt} + 2V_y \dfrac{dV_y}{dt}}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}};$$

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}, \qquad (7)$$

где a_τ – алгебраическая величина тангенциального ускорения.

Тогда $a_{1\tau} = \dfrac{V_{1x}a_{1x} + V_{1y}a_{1y}}{V_1} = \dfrac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16{,}5} = 31{,}0$ см/с^2.

Положительный знак $a_{1\tau}$ говорит о том, что в рассматриваемый момент времени направления скорости точки $\vec{V}_1$ и ее тангенциального ускорения совпадают (ускоренное движение). Если $a_{\tau 1} \prec 0$, то касательное ускорение точки направляют по касательной к траектории противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (замедленное движение).

Модуль нормального ускорения точки равен:

$$a_{1n} = \frac{V_1^2}{\rho_1}, \tag{8}$$

где ρ_1 – радиус кривизны траектории точки в положении M_1.

Так как ρ_1 неизвестен, модуль нормального ускорения a_{1n} определяется по формуле:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2}, \tag{9}$$

$$a_{1n} = \sqrt{32^2 - 31^2} = 7{,}9 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с формулой (8) нормальное ускорение точки всегда положительно, а потому вектор нормального ускорения $\vec{a}_{1n}$ должен быть направлен, как и орт $\vec{n}_1$ главной нормали в положении M_1, в сторону *вогнутости* траектории точки (к центру кривизны кривой в $(\cdot)$ M_1)

$$\vec{a}_{1n} = \vec{n}_1 \frac{V_1^2}{\rho_1}.$$

На рис. 1 нормальное и касательное ускорения точки построены в масштабе. Вектор $\vec{a}_1$, представляющий их геометрическую сумму (6), совместился с ускорением точки в положении M_1, построенным согласно уравнению (5), что подтверждает правильность его определения.

После того, как найдено нормальное ускорение, радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения $\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}}$, полученного из формулы (8).

$$\rho_1 = \frac{16{,}5^2}{7{,}9} = 34{,}4 \text{ см}.$$

Результаты вычислений приведены ниже.

Координаты,см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x_1	y_1	V_{1x}	V_{1y}	V_1	a_{1x}	a_{1y}	a_1	$a_{1\tau}$	a_{1n}	ρ_1
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,9	34,4

Пример 2

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 - 8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ y &= -4 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$t_1 = 1\text{c}$

Координаты точки заданы в сантиметрах.

Определить и построить в масштабе:

1) траекторию точки, положение M_1 с координатами $x(t_1)$, $y(t_1)$;

2) $\vec{V}(t_1)$;

3) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_x(t_1) + \vec{a}_y(t_1)$;

4) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_\tau(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$;

5) вычислить радиус кривизны траектории $\rho(t_1)$.

Решение.

Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1), для чего преобразуем их, оставив в правых частях только косинус или синус угла с коэффициентом, равным единице:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-4}{8} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{y+4}{6} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Возведем, левые и правые части уравнений (2) в квадрат, затем сложим полученные выражения почленно.

Уравнение траектории имеет вид

$$\frac{(x-4)^2}{8^2} + \frac{(y+4)^2}{6^2} = 1 \tag{3}$$

и представляет эллипс с центром в точке C с координатами $x_C = 4$ см, $y_C = -4$ см и полуосями a = 8 см, b = 6 см (на рис. 2 траектория изображена в масштабе).

Определяем координаты точки в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$x(1) = 4 - 8\cos\frac{\pi}{6} = -2{,}8 \text{ см},$$

$$y(1) = -4 + 6\sin\frac{\pi}{6} = -1 \text{ см}.$$

Находим положение (·) M_1 в плоскости xy – рис. 2.

Далее необходимо построить вектор скорости точки в момент времени t_1, представляя его в виде:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y}, \tag{4}$$

или

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\,\vec{i} + V_{1y}\,\vec{j}. \tag{4'}$$

Определяем проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя по времени уравнения (1):

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = 8\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = 6\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$V_{1x} = 8\,\frac{\pi}{6}\,\sin\frac{\pi}{6} = 2{,}1 \text{ см/с},$$

$$V_{1y} = 6\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2{,}7 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки в заданный момент времени равен:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{2{,}1^2 + 2{,}7^2} = 3{,}4 \text{ см/с}.$$

В соответствии с формулами (4), (4′) строим вектор скорости $\vec{V}_1$ с началом в (·) M_1. Так как $V_{1x}, V_{1y} \succ 0$, составляющие $\vec{V}_{1x}, \vec{V}_{1y}$ вектора скорости, параллельные осям *x, y*, направлены так же, как орты этих осей (рис. 2). Единица масштаба для построения вектора скорости точки выбрана в соответствии с модулями векторов $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ и представлена на рис. 2 справа. Сложив составляющие $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ по правилу параллелограмма, получаем направленный по диагонали вектор скорости точки $\vec{V}_1$, линией действия которого является касательная к траектории в (·) M_1, что подтверждает правильность решения задачи (рис. 2).

Вектор ускорения точки $\vec{a}(t_1)$, для краткости обозначаемый $\vec{a}_1$, строим в масштабе двумя способами, чтобы произвести графическую проверку правильности его определения.

I способ подобен рассмотренному выше для построения скорости точки:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y}, \qquad (6)$$

или

$$\vec{a}_1 = a_{1x}\,\vec{i} + a_{1y}\,\vec{j}, \qquad (6')$$

где a_{1x}, a_{1y} – алгебраические величины проекций ускорения точки на координатные оси в момент времени t_1.

Определяем проекции ускорения точки на оси x, y, дифференцируя по времени законы (5) изменения проекций скорости точки на эти оси с течением времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 8\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{2}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \pi\,\frac{\pi}{6}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] = -\frac{\pi^2}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Таким образом,

$$a_{1x} = 2\cdot\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{6} = 1{,}9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{1y} = -\frac{\pi^2}{6}\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}8 \text{ см/с}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{1{,}9^2 + 0{,}8^2} = 2{,}06 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с уравнениями (6), (6′) строим вектор ускорения точки $\vec{a}_1$ с началом в (·) M_1. Ускорение $\vec{a}_{1x}$ направляем вправо (как орт $\vec{i}$), поскольку $a_{1x} \succ 0$; ускорение $\vec{a}_{1y}$ направляем вниз (противоположно орту $\vec{j}$), так как $a_{1y} \prec 0$. Единица масштаба выбрана в соответствии с модулями векторов $\vec{a}_{1x}, \vec{a}_{1y}$ и представлена справа (рис. 2).

II способ. Представляем ускорение точки в момент времени t_1 как геометрическую сумму тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}, \qquad (7)$$

и определяем каждую из составляющих.

$$a_{1\tau} = \frac{v_{1x}\,a_{1x} + v_{1y}\,a_{1y}}{v_1} = \frac{2{,}1\cdot 1{,}9 - 2{,}7\cdot 0{,}8}{3{,}4} = +0{,}54\ \text{см/с}^2,$$

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{(2{,}06)^2 - (0{,}54)^2} = 1{,}99 \cong 2{,}0\,\text{см/с}^2.$$

Положительный знак $a_{1\tau}$ говорит о том, что в рассматриваемый момент времени направление скорости точки $\vec{V}_1$ и ее тангенциального ускорения совпадают (ускоренное движение).

На рис. 10 нормальное и касательное ускорения точки построены в масштабе.

Вектор $\vec{a}_1$, представляющий их геометрическую сумму (7), совместился с ускорением точки в положении M_1, построенным согласно уравнению (6), что подтверждает правильность его определения.

Радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке равен

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{3{,}4^2}{2{,}0} = 5{,}85\ \text{см}.$$

Результаты вычислений приведены ниже.

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x_1	y_1	V_{1x}	V_{1y}	V_1	a_{1x}	a_{1y}	a_1	$a_{1\tau}$	a_{1n}	ρ_1
–2,8	–1,0	2,1	2,7	3,4	1,9	–0,8	2,06	0,54	2,0	5,85

2.3. Схемы к примерам

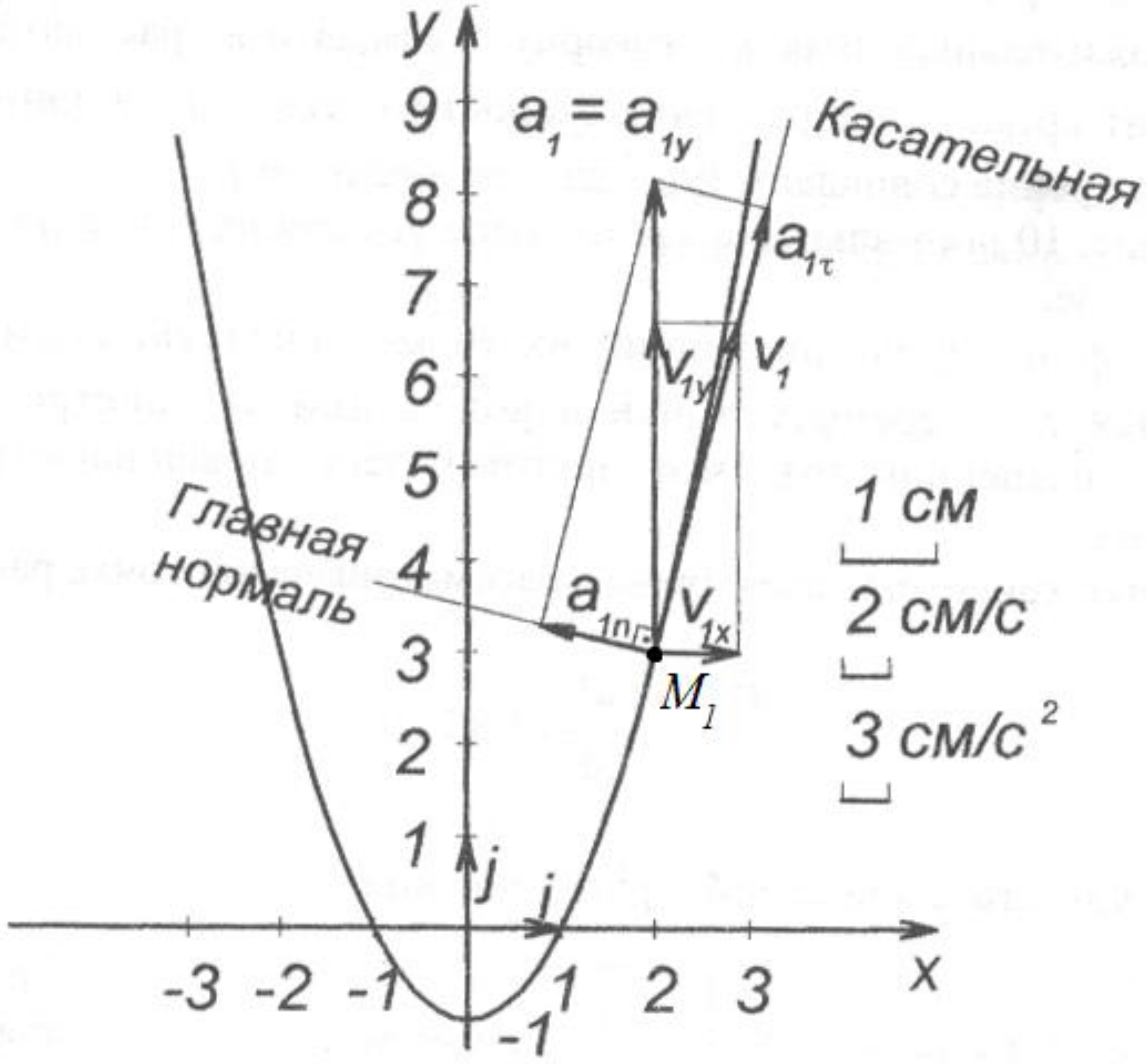

Рис. 1


y
Касательная
v_{1y}
v_1
$a_{1\tau}$
-2,8
j
i
4
x
M_1
v_{1x}
a_{1x}
a_1
C
a_{1y}
-4
a_{1n}
Главная нормаль
1 см
1 см/с
1 см/с^2

Рис. 2

2.4. Варианты задания

Вариант №	$X = f_1(t), см$	$Y = f_2(t), см$	
I	II	III	IV
1	$2t$	$\frac{3}{t}$	1
2	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
3	$4-8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-4$	1
4	$2t$	$2t-3t^2$	2
5	$2\cos(\pi t^2)$	$\cos(2\pi t^2)$	0,5
6	$4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4-6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
7	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
8	$3-6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
9	$4\sin(2\pi t)$	$4\cos(\pi t)$	$\frac{1}{3}$
10	$3+4\cos(\pi t^2)$	$25\sin(\pi t^2)$	1,5
11	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
12	$6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$3-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1

13	$1-4t^2$	$-3t$	1
14	$2+\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$1+2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\frac{1}{2}$
15	$6\sin(\pi t)$	$6\cos(2\pi t)$	$\frac{1}{6}$
16	$2+3\cos(\pi t)$	$3\sin(\pi t)$	$\frac{1}{2}$
17	$4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
18	t^2	$4t$	2
19	$2\sin t$	$4\cos(2t)$	$\frac{\pi}{2}$
20	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)-2$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+3$	1
21	$75\cos(4t^2)$	$75\sin t^2$	1
22	$8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
23	$6t$	$-2t^2-4$	1
24	t^2-3	$5t$	$\frac{1}{4}$
25	$2\cos t$	$4\cos(2t)$	$\frac{\pi}{6}$
26	$t-5$	$6(t+0{,}5t^2)$	2
27	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$4-3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1

28	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
29	$4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1,5
30	$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	2
31	$\frac{\pi}{4}t$	$\frac{3\pi t^2}{4}$	1
32	$\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
33	$3t+6$	$-\frac{3}{t}+2$	2
34	$\cos(2\pi t)$	$2\sin(\pi t)$	0,5
35	$3+2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	1
36	t^2	$2t-1$	1
37	$2+3t^2$	$4-3t$	1
38	$5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-5\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
39	$4t^2+1$	$8t$	1
40	$1-4t^2$	$-3t^2$	1
41	$4t+4$	$-\frac{4}{t}+1$	2
42	$2t^2+2$	$-4t$	$\frac{1}{2}$

43	$3-\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)-2$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)-1$	1
44	$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$2\sin(\pi t)$	1
45	$7-\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$-2-7\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	1
46	$3-2t^2$	$-5t$	0,5
47	$4\sin(\pi t)$	$4\cos(\pi t)$	$\frac{1}{3}$
48	$4\cos(2t)$	$4\sin(2t)$	$\frac{\pi}{2}$
49	$2\cos(2t)$	$3\sin t$	$\frac{\pi}{2}$
50	$10t-0.1t^2$	$5t$	2
51	$3t$	$4t-5t^2$	2
52	$15\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\frac{1}{2}$
53	$3+2\cos^2(\pi t)$	$\cos(\pi t)$	$\frac{\pi}{6}$
54	$3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	0,5
55	$4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$\cos(\pi t)$	0,5
56	$4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1

57	$4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$\sin(\pi t)$	2
58	$4t^2+1$	$12t-3$	2
59	$3t$	$1+t^2$	1
60	$3t^2+5t$	$5t$	2
61	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$1+3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	3
62	$2+\cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$	$3-\sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$	1
63	$3t$	$6t^2$	2
64	$4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
65	$3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$\frac{1}{2}$
66	$4-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
67	$12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
68	$3-6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
69	$4-2t$	$(t+1)^2$	1
70	$4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$12\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
71	$2t+2$	$3t^2-2$	1
72	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1

73	$5+3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
74	$-3+4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2+4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
75	$10t$	$4+5t^2$	2
76	$75\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$75\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	2
77	$2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$2\sin(\pi t)$	0,5
78	$2t^2$	$4t-1$	$\frac{1}{4}$
79	$2t^2$	$4t$	1
80	$6\sin(\pi t)-2$	$6\cos(\pi t)-1$	$\frac{1}{4}$
81	$5t$	$4{,}9t^2-5$	1
82	$2\cos(\pi t)$	$2\sin(\pi t)$	1
83	$20t$	$245-49t^2$	1
84	$10t$	$20t-5t^2$	1
85	t^2-6t	$25t$	2
86	$4t^2+1$	$8t-2$	1
87	$\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+3$	$-\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+1$	1
88	$4t+2$	$-\frac{2}{t+1}$	1
89	$\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	1

90	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)+2$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	1
91	$-\frac{3}{t+4}$	$2t+4$	1
92	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)-3$	1
93	$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-5\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
94	$-4t+8$	$-\frac{2}{t+1}$	1
95	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
96	$8t$	$2t^2+1$	$\frac{1}{2}$
97	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)-2$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+3$	1
98	$1-2t^2$	$3t$	1
99	$6\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)-2$	$6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+3$	1
100	$-5t+4$	$2t^2$	1
101	$\frac{1}{3}\pi t$	$\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right)-1$	$\frac{1}{2}$
102	$3\cos t$	$2t$	$\frac{\pi}{6}$
103	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right)+1$	πt	$\frac{1}{6}$

104	$\dfrac{t}{2}$	$2\sin t+1$	$\dfrac{\pi}{3}$
105	πt	$\sin^2\left(\dfrac{3}{2}\pi t\right)+1$	$\dfrac{1}{6}$
106	$3\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$	$\dfrac{2}{3}t$	$\dfrac{\pi}{2}$
107	$\dfrac{\pi t\cdot 2}{3}$	$\sin^2\left(\dfrac{\pi t^2}{4}\right)$	1
108	$\dfrac{t}{3}$	$2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2}$
109	$\cos^2\left(\pi\dfrac{t}{4}\right)$	$\pi\dfrac{t}{3}$	$\dfrac{2}{3}$
110	$2t^2$	$2\sin t^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$
111	$\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)+1$	$\dfrac{\pi t}{2}$	$\dfrac{2}{3}$
112	$\cos\left(\;^2\right)+2$	$\dfrac{3}{2}t$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$
113	$\cos^2\left(\dfrac{3}{4}\pi t\right)-1$	πt	$\dfrac{1}{3}$
114	$\dfrac{2}{3}t^2$	$\cos\left(\dfrac{t^2}{2}\right)+1$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
115	$\dfrac{1}{4}\pi t$	$\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)+2$	$\dfrac{2}{3}$

116	t^2	$2\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)+1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
117	$\frac{2}{3}\pi t$	$\sin^2\left(\frac{5}{6}\pi t\right)+1$	1
118	$2\sin\frac{1}{3}t$	$\frac{2}{3}t$	$\frac{\pi}{2}$
119	$\sin^2\left(\frac{5}{6}\pi t^2\right)$	$\pi\frac{t^2}{3}$	1
120	$\frac{t}{2}$	$3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
121	$\frac{2}{3}\pi t^2$	$\cos^2\left(\frac{5}{6}\pi t^2\right)$	1
122	$\frac{t^2}{4}$	$\sin\left(\frac{t^2}{3}\right)+2$	$\sqrt{\pi}$
123	$2\sin(\pi t)$	$\sin\left(\frac{t^2}{3}\right)+2$	$\frac{1}{3}$
124	$2\cos\left(\frac{t^2}{3}\right)$	$\frac{t^2}{3}$	$\sqrt{\pi}$
125	$\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+1$	πt	$\frac{1}{3}$
126	$\frac{t}{3}$	$\cos\left(\frac{2}{3}t\right)$	$\frac{\pi}{2}$
127	πt^2	$\sin(\pi t^2)+2$	$\frac{1}{3}$

128	$\sin\left(\frac{2t}{3}\right)+1$	$3\frac{t}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
129	$2+\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)+1$	$\pi\frac{t}{6}$	1
130	$\frac{t^2}{3}$	$2\sin\left(\frac{2}{3}t^2\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
131	$\cos\left(\pi\frac{t^2}{2}\right)-1$	$\pi\frac{t^2}{2}$	$\frac{2}{3}$
132	$2\cos\left(\frac{2}{3}t^2\right)$	$\frac{2}{3}t^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{4}}$
133	$\sin\left(\frac{2}{3}\pi t^2\right)$	$\pi\frac{t^2}{3}$	1
134	$\frac{2}{3}t$	$\cos\left(\frac{4}{3}t\right)+1$	$\frac{\pi}{4}$
135	$\pi\frac{t^2}{6}$	$2\cos\frac{2}{3}\pi t^2$	1
136	$3\sin\left(\frac{4}{3}t\right)$	$\frac{1}{2}t$	$\frac{\pi}{2}$
137	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\pi\frac{t}{6}$	1
138	$\cos\frac{4}{3}t^2$	$\sin\left(\frac{4}{3}t^2\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{4}}$
139	$2+\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\pi\frac{t}{6}$	1

140	$\frac{t^2}{3}$	$\sin\left(\frac{4}{3}t^2\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
141	$2+\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\pi\frac{t}{6}$	1
142	$\cos\left(\frac{t}{6}\right)+2$	$\frac{t}{3}$	2π
143	$2\pi\frac{t^2}{3}$	$\cos\pi\left(\frac{t^2}{6}\right)-2$	1
144	$\frac{2}{3}t$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	π
145	πt	$\frac{t}{3}$	$\frac{1}{6}$
146	$\frac{t^2}{3}$	$2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\sqrt{\pi}$
147	$3\sin\left(\pi\frac{t^2}{3}\right)-2$	$\frac{\pi t^2}{6}$	1
148	$2+\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\frac{1}{3}t^2$	$\sqrt{\pi}$
149	$\frac{\pi}{3}t$	$\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)-3$	1
150	$\frac{t}{2}$	$\cos\left(\frac{3}{4}t\right)+1$	$\frac{\pi}{3}$
151	$2+\cos\left(\frac{3}{4}\pi t\right)$	$\frac{\pi t}{2}$	1

152	$2\sin\left(\frac{3}{4}t\right)$	$\frac{t}{4}$	π
153	$\pi\frac{t^2}{2}$	$\cos\left(\pi\frac{t^2}{4}+1\right)$	1
154	$\sin^2(\pi t)+1$	$\pi\frac{t}{2}$	$\frac{1}{3}$
155	$\frac{3}{2}t^2$	$\sin\left(\frac{3}{4}t^2\right)+1$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
156	$3\pi t^2$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi t^2\right)+1$	$\frac{1}{3}$
157	$\cos^2\left(\pi\frac{t}{2}\right)$	πt	$\frac{1}{3}$
158	$3\cos\left(\frac{3}{4}t^2\right)$	$\frac{t^2}{2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
159	$2+\sin\left(\frac{3}{4}\pi t^2\right)$	$\frac{3}{2}\pi t^2$	$\frac{1}{3}$
160	πt^2	$\sin^2(\pi t^2)$	$\frac{1}{3}$
161	$3t$	$\cos(2t)+1$	$\frac{\pi}{2}$
162	$2\cos\left(\frac{3}{2}\pi t^2\right)$	$3\pi t^2$	$\frac{1}{3}$
163	$1+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\pi\frac{t}{6}$	1
164	$\sin(2t)+2$	$\frac{3}{2}t$	$\frac{\pi}{6}$

165	$\sin\left(\pi\frac{t}{6}\right)+2$	$\frac{2}{3}\pi t$	1
166	$\cos^2\left(\pi\frac{t^2}{2}\right)-1$	$\pi\frac{t^2}{2}$	$\frac{2}{3}$
167	$2\cos\left(2t^2\right)+1$	$\frac{t^2}{2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{6}}$
168	$\frac{3}{2}\pi t$	$\sin\left(\frac{3}{4}\pi t\right)-2$	$\frac{1}{3}$
169	$\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi t^2\right)$	$\pi\frac{t^2}{2}$	1
170	$2t^2$	$2\sin\left(2t^2\right)+1$	$\sqrt{\frac{\pi}{12}}$
171	$\cos\left(\frac{3}{4}\pi t^2\right)+1$	$\frac{1}{2}\pi t^2$	$\frac{1}{3}$
172	$\pi\frac{t^2}{6}$	$\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi t^2\right)$	1
173	$\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+2$	$2t$	$\frac{\pi}{2}$
174	$3\sin\left(\frac{4}{3}\pi t\right)$	$2\pi t$	$\frac{1}{4}$
175	$\sin^2\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	$\pi\frac{t^2}{3}$	1
176	$\frac{3}{2}t$	$3\sin\left(\frac{3}{2}t\right)+1$	$\frac{\pi}{6}$

177	$\frac{8}{3}\pi t$	$\cos\left(\frac{4}{3}\pi t\right)-1$	$\frac{1}{8}$
178	$1+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\pi\frac{t}{6}$	1
179	$\cos\left(\frac{3}{2}t^2\right)+1$	$\frac{2}{3}t^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{9}}$
180	$\frac{2}{3}\pi t^2$	$\sin\left(\frac{4}{3}\pi t^2\right)+1$	$\frac{1}{2}$
181	πt	$\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi t\right)+2$	$\frac{1}{6}$
182	t^2	$\sin\left(\frac{3}{2}t^2\right)+2$	$\sqrt{\frac{\pi}{6}}$
183	$2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t^2\right)$	$2\pi t^2$	$\frac{1}{2}$
184	$\pi\frac{t}{3}$	$\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi t\right)-1$	1
185	$3\cos\frac{t}{6}$	$\frac{t}{3}$	$\frac{3}{2}\pi$
186	$\pi\frac{t^2}{2}$	$\cos(\pi t)+2$	$\frac{1}{3}$
187	$1+\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi t\right)$	$\pi\frac{t}{2}$	1
188	$\frac{2}{3}t$	$\sin\left(\frac{1}{6}t\right)+2$	$\frac{\pi}{2}$
189	$\cos(\pi t^2)+3$	πt^2	$\frac{1}{2}$

190	$\frac{3}{2}\pi t$	$1+\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi t\right)$	$\frac{1}{3}$
191	$\frac{t^2}{4}$	$\cos\left(\frac{t^2}{6}\right)$	$\sqrt{\pi}$
192	$2\pi t$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+1$	$\frac{1}{3}$
193	$\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+2$	πt^2	$\frac{1}{2}$
194	$2+\sin\left(\frac{t^2}{6}\right)$	$\frac{t^2}{2}$	$\sqrt{\pi}$
195	$\frac{1}{3}\pi t$	$\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right)-2$	$\frac{1}{2}$
196	$\frac{5}{3}t$	$\cos\left(\frac{5}{6}t\right)-2$	$\frac{\pi}{2}$
197	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right)+2$	πt	$\frac{1}{6}$
198	$\pi\frac{t^2}{3}$	$\sin\left(\pi\frac{t^2}{4}\right)$	1
199	$\sin\left(\frac{5}{6}t\right)+1$	$\frac{5}{2}t$	π
200	$\pi\frac{1}{3}$	$\cos\left(\pi\frac{t}{4}\right)-1$	$\frac{2}{3}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Яблонский А.А., Никифорова В.М.** Курс теоретической механики: Статика, кинематика, динамика: Учеб. пособие для вузов. 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007 – 764с.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под общ. ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

Григорьев Александр Юрьевич

Малявко Дмитрий Пантелеймонович

Фёдорова Людмила Анатольевна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЯМ ЕЁ ДВИЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор

Т.Г. Смирнова

Компьютерная верстка

А.М. Елисеев

Дизайн обложки

Н.А. Потехина

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.04.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,09. Печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,0
Тираж 150 экз. Заказ № С 25

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9