МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ- ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

В.О. Мамченко

РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2014

УДК 539.3/8(031)

Мамченко В.О. Расчет балок на прочность и жесткость при прямом плоском изгибе: Учеб.-метод. пособие. − СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. − 48 с.

Учебно-методическое пособие содержит материал к расчетно-графической работе, предусмотренной учебной программой курса «Прикладная механика».

Предназначено для бакалавров направлений 140700, 141200, 151000, 190600, 220700 всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Пронин

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

Введение

Балками называют стержни, работающие на изгиб.

Рассмотрим случай прямого плоского поперечного изгиба, когда все нагрузки направлены перпендикулярно оси балки и расположены в одной плоскости, проходящей через ось балки и одну из главных центральных осей инерции ее поперечного сечения.

1. Определение опорных реакций

Напомним способ определения опорных реакций на примере простой балки (рис. 1).

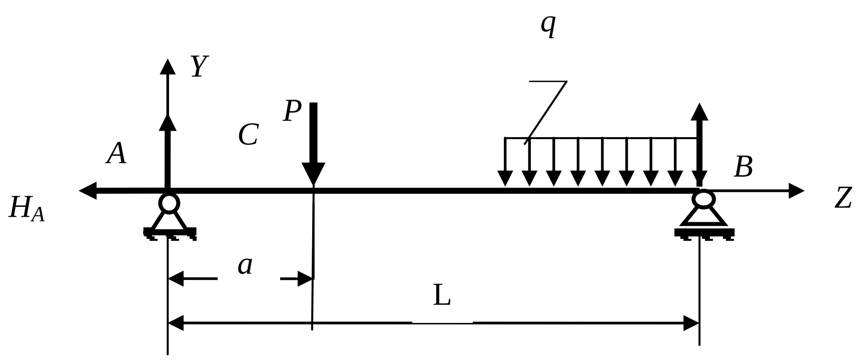


Рис. 1

Опоры обозначены буквами A и B. Поместим начало координат в точку A.

Перед составлением уравнений равновесия необходимо выбрать направления реакций и показать их на расчетной схеме (рис. 1). Если в результате вычислений какая-либо реакция получится отрицательной, значит ее направление противоположно выбранному. В этом случае следует на расчетной схеме изменить ее направление на обратное и в дальнейшем считать эту реакцию положительной.

Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций опор ее заменяют равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

Три неизвестных реакции опор определим из уравнений равновесия.

Поскольку все внешние нагрузки перпендикулярны оси балки (распор отсутствует), сумма проекций всех сил на ось Z равна нулю и $H_A = 0$.

Сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира A равна нулю $\Sigma M_A = 0$. Составляя уравнение равновесия, находим опорную реакцию R_B. Аналогично сумма моментов относительно опоры B – $\Sigma M_B = 0$ откуда находится реакция опоры A.

Проверка правильности определения реакций может быть осуществлена путем использования условия равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось $\Sigma Y = 0$ или условия равенства нулю суммы моментов относительно любой точки C, отличной от A и B, т. е. $\Sigma M_C = 0$.

2. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении балки

Рассмотрим балку, жестко защемленную одним концом (рис. 2).

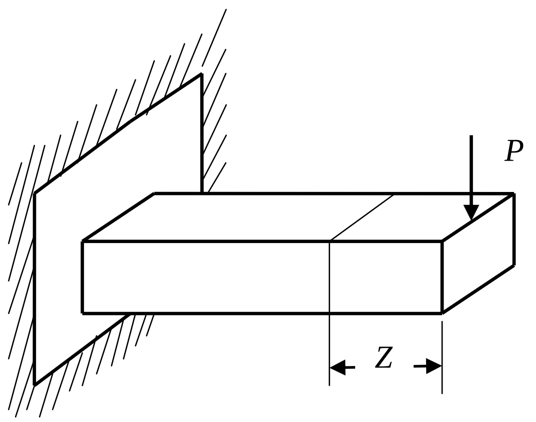
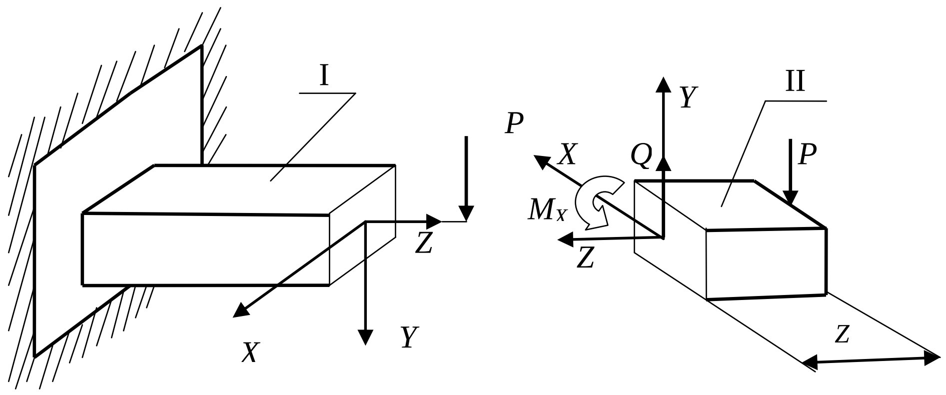


Рис. 2

Для определения внутренних силовых факторов в сечениях балки воспользуемся методом сечений. На расстоянии z от свободного конца балки мысленно разделим ее на две части: I и II (рис. 3, а и 3, б). Рассмотрим часть II. Поскольку элемент находится в равновесии, то внешняя сила P вызывает появление внутреннего силового фактора – поперечной или перерезывающей силы Q, равной по величине силе P, т. е. $Q = P$. Пара сил Q и P обуславливает возникновение другого внутреннего силового фактора – изгибающего момента $M_X = -P \cdot z$, уравновешивающего эту пару.

Если рассматривать равновесие части I (обратная система координат), то результат будет таким же, в силу действия третьего закона Ньютона.



а) б)

Рис. 3

Поперечная сила Q в любом сечении равна сумме проекций на главную центральную ось сечения Y всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. При расчете поперечной силы принято считать ее положительной, если она поворачивает рассматриваемую отсеченную часть балки по часовой стрелке.

Изгибающий момент M в данном сечении балки равен сумме моментов внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения.

При вычислении изгибающего момента принято считать положительным моментом внешних сил тот, который изгибает рассматриваемую часть выпуклостью вниз.

Символически правила знаков для Q и M представлены на рис. 4.

$M > 0$

$Q > 0$

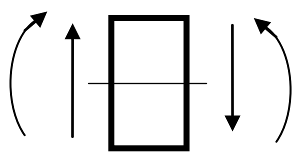


Рис. 4

Графики распределения Q и M по длине балки называются эпюрами Q и M. В сопротивлении материалов принято положительные значения Q и M откладывать от оси балки вверх. Эпюры M строятся на сжатых волокнах балки.

3. Дифференциальные зависимости при изгибе

Рассмотрим консольную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 5).

Поперечная сила в сечении z равна $Q = +\, q \cdot z$, изгибающий момент

$$M = +q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = +q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

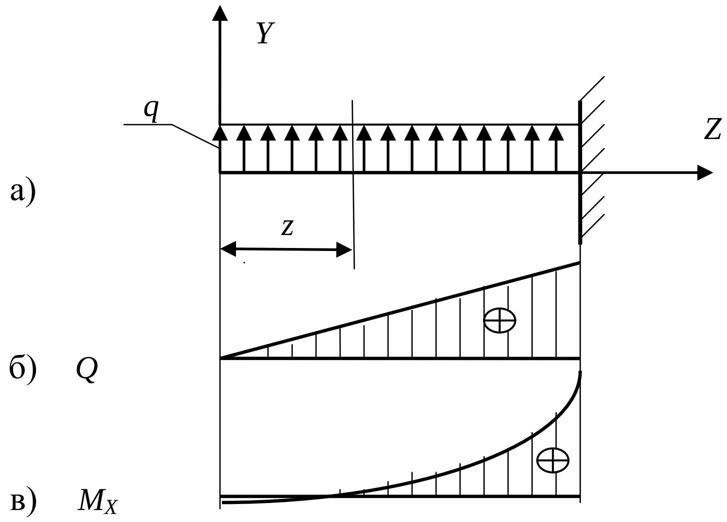


Рис. 5

В соответствии с геометрической интерпретацией первой производной тангенс угла наклона касательной к эпюре перерезывающих сил Q равен интенсивности распределенной нагрузки q в этом сечении. Очевидно, аналогичное утверждение справедливо и для эпюры M, только в этом случае тангенс угла наклона касательной к эпюре M равен Q в соответствующем сечении, т. е.

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q; \quad \frac{d^2M}{dz^2} = q. \qquad (1)$$

Из первых двух зависимостей следует: в сечениях, где $q = 0$, поперечная сила Q экстремальна; где $Q = 0$, изгибающий момент M экстремален.

В приведенных дифференциальных зависимостях интенсивность распределенной нагрузки q положительна, если последняя действует вверх, а для Q и M справедливо принятое ранее правило знаков.

Поскольку вторая производная определяет знак кривизны кривой, то при принятом правиле знаков справедливо так называемое правило «дождя» или правило «зонтика». Суть этих правил заключается в том, что выпуклость эпюры M всегда направлена навстречу распределенной нагрузке. Символично это правило представлено на рис. 6.

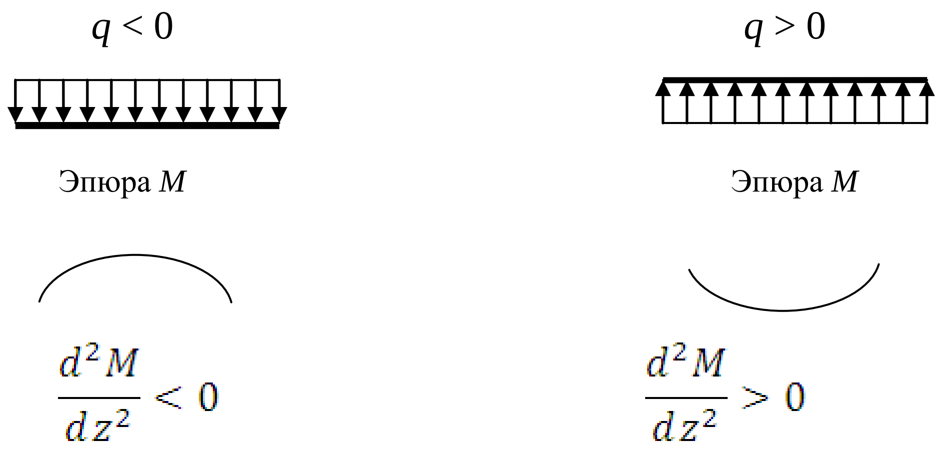


Рис. 6

Следует отметить, что приведенное правило справедливо только для изгибающего момента. Дифференциальные зависимости используются для проверки правильности построения эпюр, а также при построении эпюр по площадям.

Из дифференциальных зависимостей (1) и понятий о поперечной силе и изгибающем моменте можно сделать следующие выводы:

1. На участках балки, где $Q > 0$, изгибающий момент возрастает, там, где $Q < 0$, момент убывает.

2. В сечении, где Q при постоянном изменении обращается в нуль, изгибающий момент имеет экстремальное значение.

3. На том участке, где $Q = 0$, на эпюре M будет горизонтальная линия (прямая нулевого порядка), т. е. $M = \text{const}$ (случай чистого изгиба).

4. При $M = 0$ изгиба нет, данный участок балки остается прямым, хотя и может изменить свое положение (переместиться) на плоскости.

5. На участке, где отсутствует распределенная нагрузка ($q = 0$), поперечная сила постоянна, т. е. эпюра Q представляет собой прямую, параллельную оси балки (прямая нулевого порядка), а эпюра M – наклонную прямую (прямая первого порядка).

6. На участке, загруженном равномерно распределенной нагрузкой (линия нулевого порядка), эпюра Q представляет собой прямую первого порядка, а эпюра M – дугу квадратной параболы (линия второго порядка).

Если при этом q действует сверху вниз, то при движении по эпюре слева направо линия эпюры Q направлена вниз; если q действует снизу вверх, линия эпюры Q направлена вверх.

Если линия эпюры Q пересекает горизонтальную ось по нисходящей прямой, то на эпюре M имеется максимум, а если по восходящей – минимум.

7. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q имеет место скачок на величину этой силы и направленный в сторону действия силы. На эпюре M в этом сечении должен быть перелом.

8. В сечении, где приложен сосредоточенный момент (пара сил) на эпюре M имеет место скачок на величину этого момента в направлении, соответствующем правилу знаков для моментов слева от сечения. Значение поперечной силы в этом сечении не изменяется.

9. На участке, загруженном треугольной нагрузкой (линия первого порядка), на эпюре Q – кривая второго порядка, на эпюре M – третьего.

10. В концевых сечениях балки поперечная сила и изгибающий момент равны соответственно приложенным в этих сечениях сосредоточенной силе и моменту пары.

11. Пересечение эпюрой Q горизонтальной оси с переходом с плюса на минус дает на эпюре M максимум, а с минуса на плюс – минимум.

4. Построение эпюр *Q* и *M* по уравнениям

Рассмотрим порядок построения эпюр Q и M для наиболее характерных случаев нагружения балок.

Расчетная схема балки должна быть вычерчена с соблюдением горизонтального масштаба. На схеме должны быть показаны все нагрузки с их обозначениями и численными значениями, а также найденные опорные реакции. Необходимо проставить длины всех участков. Участками называют расстояние между приложенными нагрузками.

Пример 1.

Для заданной схемы двухопорной статически определимой балки (рис. 7, а) требуется:

• определить опорные реакции;

• построить эпюры Q и M по уравнениям.

Решение.

1. Указываем на схеме направления опорных реакций R_A и R_B (см. рис. 7, б). Определяем опорные реакции, составляя следующие уравнения равновесия:

$$\sum M_A = \frac{qa^2}{2} - q\frac{(2b)^2}{2} + M + R_B(2b+c) - P(3b+c) = 0;$$

$$\frac{30 \cdot 0{,}6^2}{2} - \frac{30 \cdot 2^2}{2} + 50 - 40 \cdot 3{,}5 + 2{,}5R_B = 0\ ,$$

откуда R_B = 57, 84 кН.

$$\sum M_B = q(a+2b) \cdot (\frac{a+2b+c}{2}) - R_A \cdot (2b+c) + M - P \cdot b = 0,$$

откуда R_A = 60,16 кН.

Проверка:

$$\sum Y = -q(a+2b) - P + R_A + R_B = 0\,;$$

$$-30 \cdot 2{,}6 - 40 + 60{,}16 + 57{,}84 = 0\,.$$

2. Слева направо балка имеет пять грузовых участков.

Первый участок $z_1 = 0 \div 0{,}6$ м.

Поперечная сила выражается уравнением первой степени относительно z, т. е. $Q = -q \cdot z.$ Таким образом, эпюра Q имеет вид прямой, наклоненной к оси z и для ее построения достаточно двух ординат: в начале и конце участка.

При $z = 0$ $Q = 0$; при $z = 0,6$ $Q = 18,0$ кН.

Изгибающий момент на этом участке выражается уравнением второго порядка относительно оси z, т. е.

$$M = -q\frac{z^2}{2} = -30\frac{0,6^2}{2} = 5,4\,\text{кН}\cdot\text{м}.$$

Второй участок $z_2 = 0,6 \div 1,6$ м.

Граница между первым и вторым участками ($z = 0,6$ м) соответствует опоре A, где действует опорная реакция R_A, следовательно, в этой точке на эпюре Q будет скачок на величину реакции.

$$Q = -q\cdot z_2 + R_A = -30\cdot 0,6 + 60,16 = +42,16\,кН\cdot$$

Изгибающий момент M остается неизменным и равным 5,4 кНм.

При $z = 1,6$ м

$$Q = -q\cdot z + R_A = -30\cdot 1,6 + 60,16 = +12,16\,кН;$$

$$M = -q\frac{z^2}{2} + R_A(z-a) = -30\frac{1,6^2}{2} + 60,16(1,6-0,6) = 21,76\,\text{кНм}.$$

Третий участок $z = 1,6 \div 2,6$ м.

При $z = 1,6$ м поперечная сила не претерпевает изменений и остается равной $Q = +\,12,16$ кН.

Эпюра изгибающего момента имеет скачок на величину внешнего момента, т. е.

$$M = -q\frac{z^2}{2} + R_A\cdot(z - a) - M = -30\frac{1,6^2}{2} + 60,16\cdot 1,0 - 50 = -28,24\,кНм.$$

Рассчитывая Q на третьем участке, получаем, что величина поперечной силы непрерывно уменьшаясь, пересекает нулевую линию и изменяет знак на противоположный. Согласно дифференциальным уравнениям (1), в точке, где эпюра Q пересекает нулевую линию, изгибающий момент имеет экстремум. Координату z_0 этой точки определяем из условия

$$Q = -q\cdot z_0 + R_A = 0,$$

откуда

$$z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{60,16}{30} = 2,01 \text{ м}.$$

Эпюру M на этом участке строим по граничным значениям изгибающего момента и величине, рассчитанной при z_0.

Четвертый участок z = 2,6 ÷ 3,1 м.

При z = 2,6 м

$$Q = -q \cdot z + R_A = -30 \cdot 2,6 + 60,16 = -17,84 кН;$$

$$M = -q\frac{z^2}{2} + R_A \;\; z - a \;\; - M = -30\frac{2,6^2}{2} + 60,16 \cdot 2 - 50 = 31,08 кН \cdot м.$$

При z = 3,1 м поперечная сила слева от опоры B остается низменной и равной Q = – 17,84 кН.

$$M = -q \;\; a + 2b \;\; \left\{\frac{a + 2b}{2} + c\right\} + R_A \;\; 2b + c \;\; - M =$$

$$= -30 \cdot 2,6\left\{\frac{2,6}{2} + 0,5\right\} + 60,16 \cdot 2,5 - 50 = -40 кНм.$$

Поскольку опорная реакция опоры B равна R_A = 57,84 кН, то на минимальном расстоянии вправо от опоры на эпюре Q будет скачок на величину этой реакции. Таким образом,

$$Q = \;\; Q = -q \cdot \;\; a + 2b \;\; + R_A + R_B = -30 \cdot 2,6 + 60,16 + 57,84 = +40 кН.$$

Пятый участок z = 3,1 ÷ 4,1 м.

При z = 3,1 м

$$Q_4 = Q_5 = \; +40 кН;$$

$$M_4 = M_5 = -40 кНм.$$

При z = 4,1 м, очевидно,

$$Q_4 = Q_5 = \; +40 кН;$$

$$M = -q \;\; a + 2b \;\; \left(\frac{a + 2b}{2} + c + b\right) + R_A \;\; 3b + c \;\; - M + R_B \cdot b =$$

$$= -30 \cdot 2,6 \cdot 2,8 + 60,16 \cdot 3,5 - 50 + 57,84 \cdot 1 = 0$$

Величины Q и M на пятом участке удобнее и проще вычислять, начиная с правого конца балки, т. е. справа налево:

при z = 0

$$Q = P; \quad Q = 40 кН;$$

$$M = 0;$$

при z = 1 м

$$Q = P; \quad Q = 40 кН;$$

$$M = -P \cdot z = -P \cdot 1 = -40 кН \cdot м.$$

Результат вычислений по усилиям слева и справа один и тот же.

Строим эпюры внутренних силовых факторов Q и M (см. рис. 7, в, г).

После построения эпюр Q и M рекомендуется проверить их правильность на основании приемов, вытекающих из дифференциальных зависимостей между Q, M и q [см. уравнения (1)].

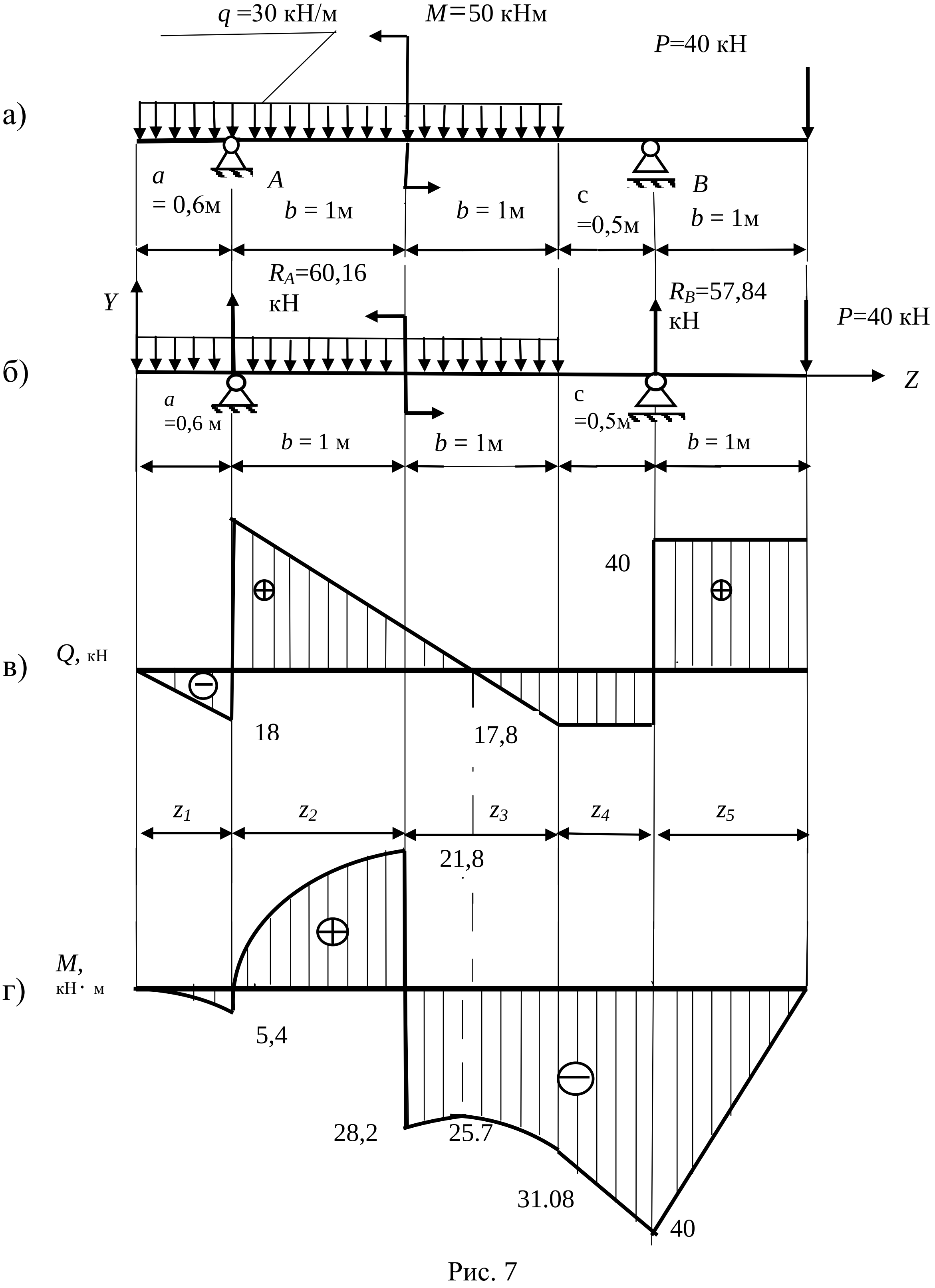


Рис. 7

Пример 2.

Для заданной схемы консольной балки, защемленной левым концом (рис. 8, а) требуется построить эпюры Q и M по уравнениям.

Решение.

Для консольной балки эпюры усилий можно построить, не определяя опорных реакций в заделке, если определять внутренние силовые факторы, начиная со свободного конца консоли.

Запишем уравнения усилий для произвольного сечения каждого из четырех грузовых участков балки:

I участок: $0 \le z \le 2$;

$$Q_1 = -q \cdot z \ ;$$

$$M_1 = -q \cdot \frac{z^2}{2} \ ;$$

напомним, что равнодействующая распределенной нагрузки приложена в центре тяжести грузовой площади.

II участок: $0 \le z \le 1$;

$$Q = -q \cdot 2;$$

$$M = -q \cdot 2 \cdot (1 + z);$$

III участок: $0 \le z \le 1$;

$$Q = -q \cdot 2 + P;$$

$$Q = -q \cdot 2 + P;$$

$$M = -q \cdot 2 \cdot (1 + 1 + z) + P \cdot z \ ;$$

IV участок: $0 \le z \le 2$;

$$Q = -q \cdot 2 + P;$$

$$Q = -q \cdot 2 + P;$$

$$M = -q \cdot 2 \cdot (1 + 1 + 1 + z) + \mathrm{P}(1 + \mathrm{z}) + M.$$

Результаты расчета по приведенным уравнениям сведены в табл. 1, эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M приведены на рис. 8.

Таблица 1

№ участка	Q, кН	M, кН$\cdot$ м
I $0 \le z \le 2$	$Q = q \cdot z$	$M = -q \cdot \frac{z^2}{2}$
$z = 0$	0	0
$z = 2$	40	–40
II $0 \le z \le 1$	$Q_{II} = Q_I = q \cdot 2$	$M = -q \cdot 2 \cdot (\frac{2}{2} + z)$
$z = 0$	40	–40
$z = 1$	40	–80
III $0 \le z \le 1$	$Q = q \cdot 2 - P$	$M = -q \cdot 2 \cdot (\frac{2}{2} + 1 + z) + P \cdot z$
$z = 0$	–30	–80
$z = 1$	–30	–50
IV $0 \le z \le 2$	$Q_{VI} = Q_{III} = q \cdot 2 - P$	$M = -q \cdot 2 \cdot (\frac{2}{2} + 1 + 1 + z) + \mathrm{P}(1 + \mathrm{z}) + M$
$z = 0$	–30	–30
$z = 2$	–30	30

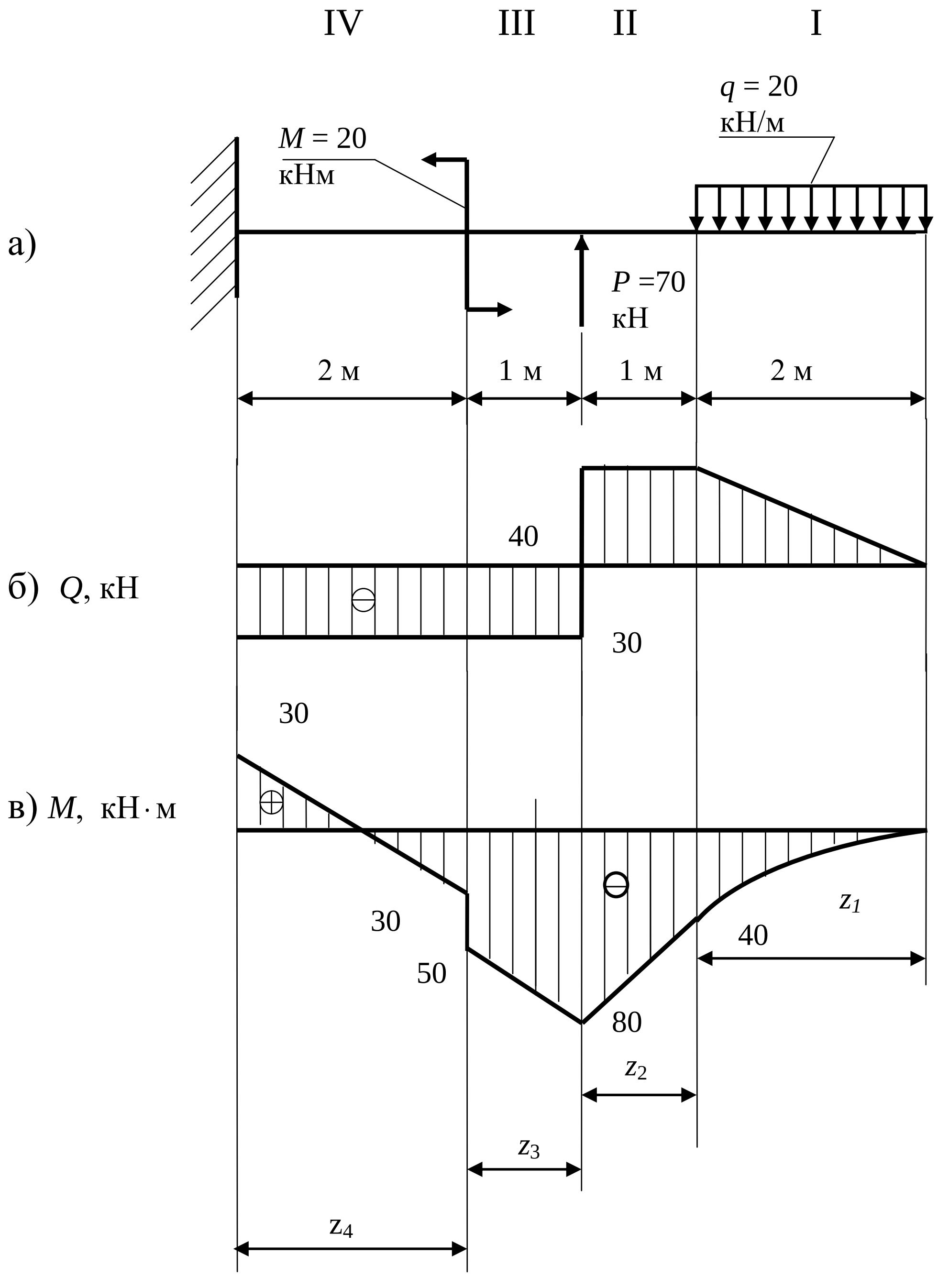

IV
III
II
I
q = 20
кН/м
M = 20
кНм
а)
P =70
кН
2 м
1 м
1 м
2 м
40
б) Q, кН
30
30
в) M, кН·м
30
50
80
40
z1
z2
z3
z4

Рис. 8

Пример 3.

Для двухопорной статически определимой двутавровой балки, расчетная схема которой приведена на рис. 9, требуется:

1) определить реакции опор;

2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам;

3) определить из условия прочности по нормальным напряжениям размер балки двутаврового сечения при [σ] = 160 МПа.

Решение.

Определение реакций опор:

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 3 \cdot 1{,}5 + R_B \cdot 5 - P \cdot 6 + M = 0;$$

откуда $R_B = 100$ кН;

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 5 + q \cdot 3 \cdot 3{,}5 + M - P \cdot 1 = 0;$$

откуда $R_A = 80$ кН.

Проверим правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - q \cdot 3 - P = 80 + 100 - 40 \cdot 3 - 60 = 0.$$

5. Построение эпюр *Q* и *M* по характерным точкам

Эпюры *Q* и *M* можно строить (рис. 9, б, в), не составляя аналитических выражений для *Q(z)* и *M(z)* в функции z, основываясь на дифференциальных зависимостях.

Характерными сечениями считаются границы участков, а также те сечения, в которых поперечная сила обращается в нуль.

Для вычислений внутренних силовых факторов в точках приложения внешних сосредоточенных сил или моментов следует рассматривать величины *Q* и *M* слева и справа от указанных точек (см. рис. 9, а). (Это справедливо, поскольку под *сосредоточенной* понимают нагрузку, приложенную к небольшим *участкам* балки).

По виду нагрузки на данном участке устанавливается характер линий, выражающих эпюры *Q* и *M*.

Балка имеет три участка. На первом участке ($0 \le z_1 \le 3$ м) действует равномерно распределенная нагрузка. Эпюра *Q* на этом участке выражается линией первого порядка, т.е. наклонной прямой.

Для ее построения достаточно знать Q в начале и конце участка. Очевидно, поперечная сила в начале участка будет равна реакции опоры A (величина положительная), в конце участка – алгебраической сумме реакции опоры и равнодействующей равномерно распределенной нагрузки (величина отрицательная). Эпюра M на этом участке представляет собой кривую второго порядка, причем в начале координат M = 0. В сечении, где эпюра Q пересекает нулевую линию, эпюра изгибающих моментов имеет экстремум. Расстояние от начала координат до этого сечения определяется из условия: $Q = R_A - q \cdot z_0 = 0$. Момент в этом сечении определится как:

$$M = R_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} .$$

Эпюры Q и M удобно строить, начиная с правого конца балки, т. е. с третьего участка. Здесь приложена сосредоточенная сила P, поэтому на эпюре наблюдается скачок на величину этой силы. Других сил на этом участке нет, следовательно, эпюра Q – прямая нулевого порядка.

На границе третьего и второго участков действует реакция опоры B, поэтому здесь на эпюре Q скачок на величину этой реакции. На втором участке никаких внешних сил нет, поэтому поперечная сила остается постоянной и равной Q на границе первого и второго участков.

Момент на правом конце балки равен нулю. На третьем и втором участках эпюра M ограничена линиями первого порядка, так как в пределах каждого из этих участков поперечная сила постоянна. На границе третьего и второго участков приложен сосредоточенный момент (пара сил), поэтому в этом сечении на эпюре изгибающих моментов имеет место скачок на его величину.

Таким образом:

I участок слева направо $0 \le z \le 3$;

при $z = 0$ $\quad Q = R_A = 80$ кН; $\quad M = 0$;

при $z = 3$м

$$Q = R_A - q \cdot z = 80 - 40 \cdot 3 = -40 \text{кН};$$

$$M = R_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} = 80 \cdot 3 - 40 \cdot \frac{3^2}{2} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение, где имеет место экстремум M,

$$Q_0 = R_A - q \cdot z_0 = 80 - 40 \cdot z_0 = 0;$$

откуда $z_0 = 2$ м.

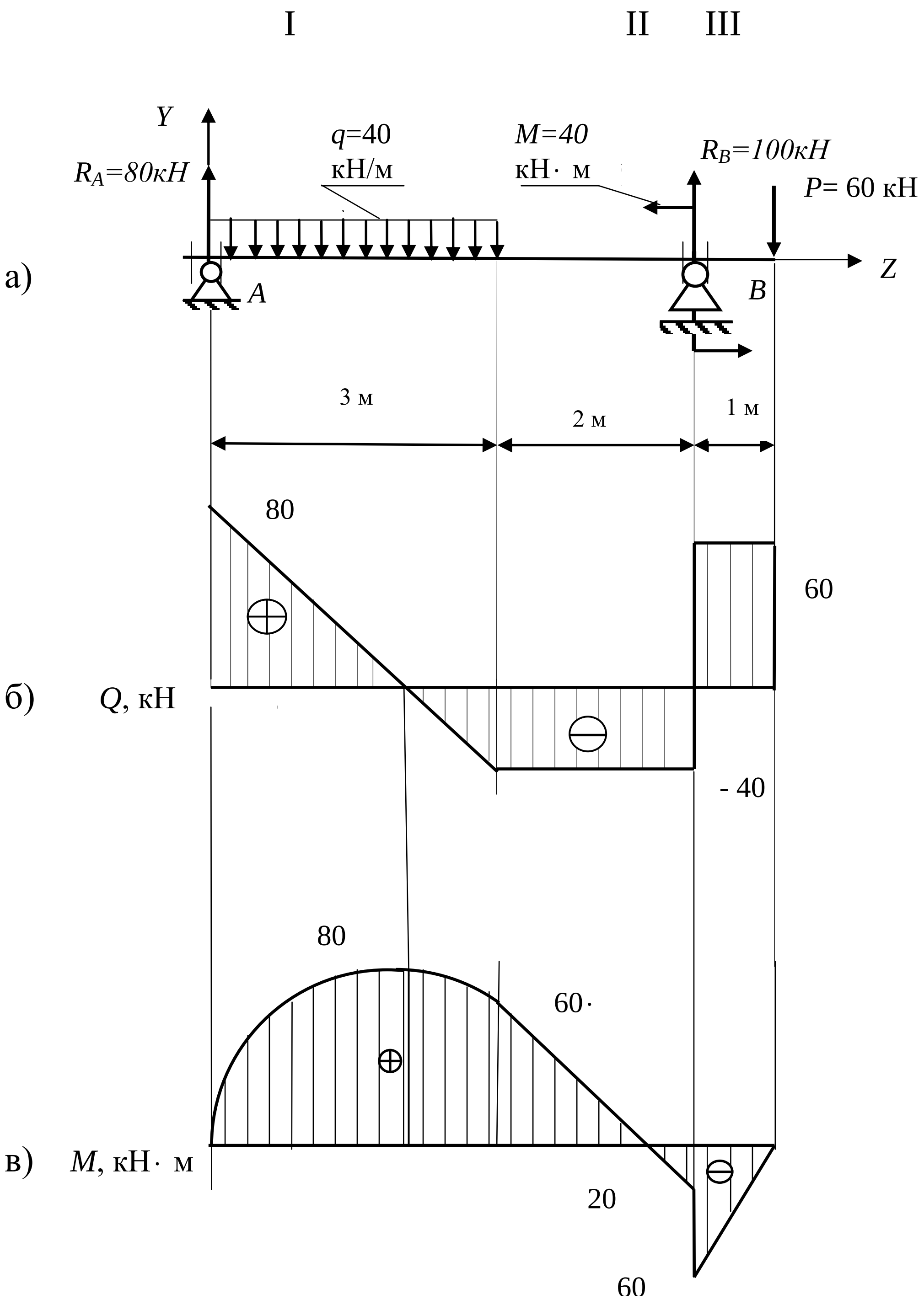

I
II
III
Y
R_A=80кН
q=40
кН/м
M=40
кН· м
R_B=100кН
P= 60 кН
а)
A
B
Z
3 м
2 м
1 м
80
60
б)
Q, кН
- 40
80
60·
в)
M, кН· м
20
60

Рис. 9

Экстремум изгибающего момента

$$M_0 = R_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} = 80 \cdot 2 - 40 \cdot \frac{2^2}{2} = 80\,\text{кН} \cdot \text{м}.$$

По нагрузкам справа налево.

III участок $0 \le z \le 1\text{м}$;

при $z = 0$ $Q = P = 60\,\text{кН}$; $M = 0$;

при $z = 1$ м $Q = 60\,\text{кН}$; $M = -P \cdot 1 = -60\,\text{кН} \cdot \text{м}$.

II участок $1 \le z \le 3\text{м}$

при $z = 1$ м

$$Q = P - R_B = 60 - 100 = -40\,\text{кН};$$

$$M = -P \cdot z + M = -60 + 40 = -20\,\text{кН} \cdot \text{м};$$

при $z = 3\text{м}$

$Q_{II} = Q_{III} = -40$ кН – результат, который получен и по силам слева;

$$M = -P \cdot z + R_B \cdot z + M = -60 \cdot 3 + 100 \cdot 2 + 40 = 60\ \text{кН} \cdot \text{м};$$

та же величина получена и по силам слева.

По рассчитанным величинам Q и M строим их эпюры (см. рис. 9, б и 9, в).

6. Расчет на прочность при изгибе

При одновременном действии в каком-либо сечении балки поперечной силы Q и изгибающего момента M нормальные σ и касательные τ напряжения в произвольной точке поперечного сечения определяются формулами

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_X}; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_X^O}{I_X \cdot b}, \tag{2}$$

где I_X – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента (силовой плоскости);

S_X^O – статический момент относительно нейтральной оси части площади поперечного сечения, отсеченной на уровне рассматриваемой точки, в которой определяется напряжение, параллельно нейтральной оси;

b – ширина сечения на уровне точки, в которой определяется напряжение;

y – координата точки, в которой рассчитывается напряжение.

Анализируя формулы для расчета напряжений, можно установить, что σ изменяется по высоте сечения по линейному закону, достигая наибольших значений в наиболее удаленных от нейтральной оси X точках $(\sigma^P_{\max}, \sigma^C_{\max})$, а касательные напряжения, изменяясь по параболе, в этих точках равны нулю, достигая максимального значения в точках, лежащих на нейтральной оси X (для большинства встречающихся на практике сечений) (рис. 10).

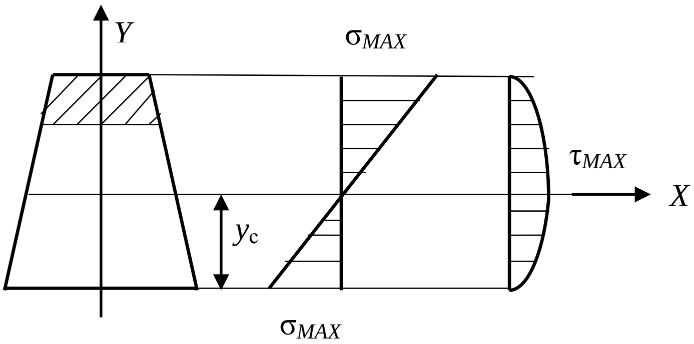
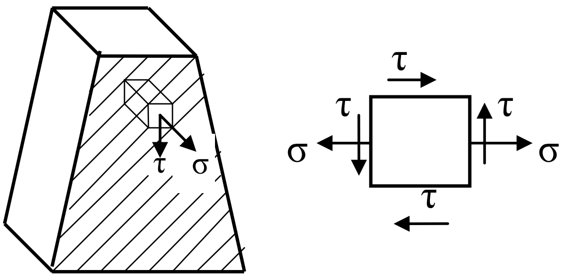


Рис. 10

Учитывая, что силы действуют только в одной из главных плоскостей, можно заключить, что во всех точках поперечного сечения, исключая наиболее удаленные от оси X, имеет место плоское напряженное состояние (рис. 11 а, б).



а) б)

Рис. 11

Для этих точек условия прочности записываются в виде:

а) для пластичных материалов:

по третьей теории прочности

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le \sigma \quad ; \tag{3}$$

по четвертой теории прочности

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le \sigma \quad ;$$

б) для хрупких материалов по теории прочности Мора

$$\sigma_M = \frac{1-k}{2}\cdot\sigma + \frac{1+k}{2}\cdot\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_P \ ,$$

где коэффициент k равен отношению допускаемого напряжения при растяжении σ_P к допускаемому напряжению при сжатии σ_C .

В наиболее удаленных от нейтральной оси точках имеет место линейное напряженное состояние и условия прочности в этих точках:

а) для пластичных материалов

$$|\sigma_{MAX}| \leq \sigma \ ;$$

б) для хрупких материалов (4)

$$|\sigma^P_{MAX}| \leq \sigma_P \ ;$$

$$|\sigma^C_{MAX}| \leq \sigma_C \ .$$

В точках, лежащих на нейтральной оси, имеет место частный случай плоского напряженного состояния – чистый сдвиг (σ = 0) и условия прочности принимают вид:

а) для пластичных материалов

$$\sigma_{III} = 2|\tau| \leq \sigma \ ; \ \sigma_{IV} = \sqrt{3}|\tau| \leq \sigma \ ;$$

б) для хрупких материалов (5)

$$\sigma_M = (1-k)\cdot|\tau| \leq \sigma_P \ .$$

Заметим, что для балок постоянного по длине поперечного сечения, условия прочности должны выполняться в опасных точках опасных поперечных сечений. Под опасными сечениями понимаются те, в которых:

1) максимальный по модулю изгибающий момент | max M|;

2) максимальная по модулю поперечная сила |max Q|;

3) достаточно велики по модулю и |M| и |Q| одновременно.

В последнем случае при неоднозначности в качестве вероятных опасных сечений приходится рассматривать несколько сечений.

При расчете балок по нормальным напряжениям наиболее опасными точками будут те, которые наиболее удалены от нейтральной оси. Условие прочности (3) в этом случае будут иметь вид:

а) для пластичных материалов

$$\sigma_{MAX} = \frac{|M_{MAX}|}{W_X} \leq \sigma \ ;$$

б) для хрупких материалов (6)

$$\sigma^P_{MAX} = \frac{|M_{MAX}\cdot y^P_{MAX}|}{I_X} \leq \sigma_P \ ;$$

$$\sigma_{MAX}^{C} = \frac{\left| M_{MAX} \cdot y_{MAX}^{C} \right|}{I_X} \leq \sigma_C \;;$$

где W_X – момент сопротивления при изгибе (осевой момент сопротивления) равный $\dfrac{I_X}{y_{MAX}}$;

y_{MAX}^{P}, y_{MAX}^{C} – координаты максимально удаленных от нейтральной оси растянутых и сжатых волокон.

Известно, что для хрупких материалов $\sigma_P < \sigma_C$, поэтому при постоянном по длине балки знаке момента *M* рациональной формой сечения балки следует признать сечение ассиметричное относительно нейтральной оси (тавр, трапеция, треугольник и т. д.) и расположенное таким образом, чтобы соблюдалось условие $\left| y_{MAX}^{P} \right| < y_{MAX}^{C}$. Для наиболее полного использования материала балки следует соблюдать соотношение

$$\frac{\left| y_{MAX}^{P} \right|}{\left| y_{MAX}^{C} \right|} = \frac{\sigma_P}{\sigma_C} \;.$$

При расчете по касательным напряжениям для сечения, в котором действует максимальная поперечная сила, опасными, согласно (2), являются точки, лежащие на нейтральной оси. Условия прочности по касательным напряжениям в этом случае могут быть представлены в виде

$$\tau_{MAX} = \left| \frac{Q_{MAX} \cdot S_X^{O}}{b \cdot I_X} \right| \leq \tau \;, \tag{7}$$

где $$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma = 0{,}6\,[\sigma]$$

или $$\tau = 0{,}5\,\sigma \;,$$

соответственно по четвертой или третьей теории прочности;

для хрупких материалов по теории прочности Мора

$$\tau = \frac{1}{1+k} \sigma_P \;.$$

Для балок толстостенного поперечного сечения (прямоугольник, круг, трапеция, треугольник и т. п.) достаточно выполнения только условий (6) и (7).

В случае тонкостенного поперечного сечения балки (тавр, двутавр, швеллер и т. п.) необходима проверка прочности в опасном сечении третьего типа. Дело в том, что в месте перехода от полки к стенке в указанных сечениях велики как нормальные напряжения σ (близкие к σ_{MAX}), так и τ (также близкие к τ_{MAX}). Таким образом, для опасных сечений третьего типа опасными точками являются точки перехода от полки к стенке. Условия прочности в этом случае будут определяться уравнениями (3) с использованием формул (2). Если хотя бы в одной из опасных точек прочность не обеспечивается, необходимо увеличить размер сечения или выбрать больший номер профиля и вновь проверить прочность в этой точке. При этом прочность считается обеспеченной, даже если действующее напряжение превышает допускаемое, но не более чем на 5 %.

7. Подбор двутаврового сечения балки и проверка прочности

Для балки, расчетная схема которой представлена на рис. 9, изгибающий момент в опасном сечении равен $M_{MAX} = 80$ кН·м (см. рис. 9, в).

Из условия прочности

$$\sigma_{MAX} = \frac{|M_{MAX}|}{W_X} \leq \sigma$$

необходимый минимальный момент сопротивления

$$W_X = \frac{M_{MAX}}{\sigma} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} м^3 = 500 см^3 .$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем:

1) двутавр № 30 W_X = 472 см^3;

2) двутавр № 30а W_X = 518 см^3.

Проверяем прочность балки с поперечным сечением из двутавра 1:

$$\sigma_1 = \frac{80 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} = 0,1695 \cdot 10^9 Па = 169,5 МПа \ .$$

Перенапряжение составит $\Delta = \frac{169,5 - 160}{160} \cdot 100\% = 5.9\%$, что больше допускаемого значения.

Для балки из двутавра 2

$$\sigma_2 = \frac{80 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} = 0,154,4 Па = 154,4 МПа.$$

Недогрузка составит $\Delta = \dfrac{154.4 - 160}{160} \cdot 100\% = -3{,}5\%$, что соответствует условию $\Delta = \pm 5\%$.

Таким образом, принимаем двутавр № 30а, для которого W_X =518 см^3, I = 7780 см^4; статический момент полусечения S_X = 292 см^3; толщина стенки d = 6,5 мм; ширина полки b =145 мм; средняя толщина полки t = 10,7 мм; высота h = 300 мм (рис. 12).

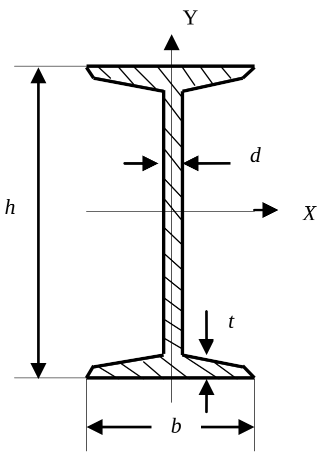


Рис. 12

Как следует из эпюры поперечных сил (см. рис. 9, б), максимальная величина Q (опасное сечение второго типа) соответствует реакции на опоре А и равна 80 кН. Условие прочности (7), согласно четвертой теории прочности,

$$\tau_{MAX} = \left| \frac{Q_{MAX} \cdot S_X}{I_X \cdot b} \right|.$$

В данном случае толщина стенки $b = d$, и тогда

$$\tau_{MAX} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 292 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}462 \cdot 10^8\, Па = 46{,}2 МПа;$$

$$\tau = 0{,}6 \cdot 160 = 96 МПа;$$

$$\tau_{MAX} < \tau .$$

Следовательно, прочность в опасной точке опасного сечения обеспечена.

Как указывалось выше, у двутавра имеется еще одна опасная точка – точка перехода от полки к стенке. Наиболее вероятными опасными сечениями здесь могут быть сечения третьего типа, т. е. там, где велики и поперечная сила и изгибающий момент. В нашем случае это опорное сечение B; здесь Q = 60 кН; M = 60 кН$\cdot$м.

Для расчета нормального напряжения в этом сечении предварительно определим координату y точки перехода от полки к стенке:

$$y = \frac{1}{2}h - t = \frac{1}{2} \cdot 300 - 10{,}7 = 139{,}3 \text{ мм}.$$

Поскольку двутавр имеет симметричное сечение и изготовлен из пластичного материала, знак нормального напряжения в условии прочности не имеет значения. Тогда

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_X} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 139,3 \cdot 10^{-3}}{7780 \cdot 10^{-8}} = 1,07 \cdot 10^8 \, Па = 107 МПа \, .$$

Для вычисления касательного напряжения предварительно определим статический момент площади полки. Его проще рассчитать как произведение площади сечения полки на координату ее центра тяжести y_c

$$S_X^O = F \cdot y_c = b \cdot t \cdot \frac{1}{2}(h-t) = 145 \cdot 10,7 \cdot \frac{1}{2}(300-10,7) \cdot 10^{-9} = 224,4 \cdot 10^{-6} \, м \, .$$

В качестве ширины сечения на уровне точки перехода от полки к стенке может быть выбрана ширина полки или толщина стенки. Очевидно, что для оценки прочности нужно выбрать меньшую величину, т.е. в соответствии с уравнением (2) – толщину стенки d .

С учетом этого

$$\tau = \frac{Q \cdot S_X^O}{I_X \cdot d} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 224,4 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = 26,62 \cdot 10^6 \, Па = 26,62 МПа \, .$$

Применяя четвертую теорию прочности, проверяем выполнение условия (2)

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{107^2 + 3 \cdot 26,62^2} = 116,5 МПа < \sigma = 160 МПа \, .$$

Следовательно, прочность обеспечена.

По полученным значениям напряжений в точках выбранного опасного сечения балки строим эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте двутавра (рис. 13).

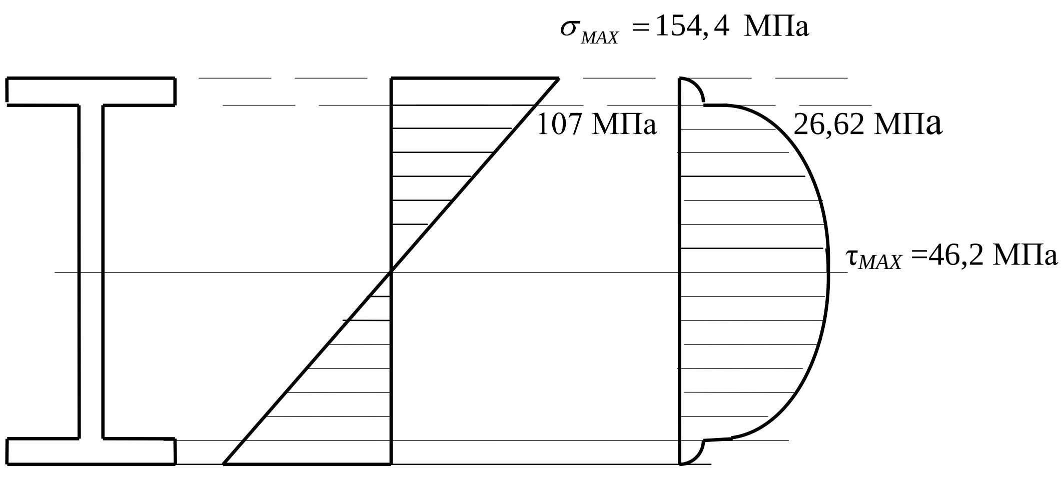


Рис. 13

Пример 4.

Подобрать из условия прочности стальную балку круглого, кольцевого, прямоугольного или двутаврового сечений, сравнить их массы. Принять: M = 20 кНм, q = 15 кН/м, [σ] = 160 МПа, $\alpha = d/D = 0{,}8$, $h/b = 2$. Расчетная схема представлена на рис. 14.

Решение. Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \qquad -M - q\frac{b^2}{2} + R_B \cdot b = 0 \Rightarrow -20 - 15\cdot\frac{2^2}{2} + R_B \cdot 2 = 0 \ \Rightarrow R_B = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M + q\frac{b^2}{2} - R_A \cdot b = 0 \Rightarrow -20 + 15\frac{2^2}{2} = 2R_A \Rightarrow R_A = 5 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; \ \ R_A + R_B - q\cdot b = 0; \ \ 25 + 5 - 30 = 0.$$

Реакции определены верно.

По полученным усилиям строим эпюры Q и M (табл. 2 и рис. 14 б, в).

Таблица 2

№ участка	Z, м	Q, кН	M, кН· м
1	0	0	20
$Z = 0 \div 1$ м	1	5	20
2	1	5	20
$Z = 1 \div 3$ м	3	25	0

Определим координату, при которой эпюра M будет иметь экстремум:

$$R_A - q\cdot z_0 = 0 \ ; \ \ \Rightarrow z_0 = 0{,}333 м;$$

изгибающий момент в этом сечении

$$M = 20 + 5\cdot 0{,}333 - 15\cdot\frac{0{,}333^2}{2} = 20{,}8 \text{ кНм}.$$

Подбор сечений балок указанных форм

Требуемый минимальный момент сопротивления из условия прочности

$$W_{TP} \geq \frac{|M_{MAX}|}{\sigma} = \frac{20{,}8\cdot 10^3}{160\cdot 10^6} = 0{,}13\cdot 10^{-3} м^3 = 130 \text{ см}^3.$$

Подбираем прямоугольное сечение с отношением сторон $h/b = 2$ (рис. 15).

Для прямоугольного сечения осевой момент инерции и момент сопротивления относительно оси x равны соответственно

$$I_X = bh^3/12 \quad \text{и} \quad W_X = \frac{b\cdot h^2}{6} = \frac{b\cdot (2b)^2}{6};$$

откуда $$b = \sqrt[3]{\frac{130\cdot 6}{4}} = 5{,}79 \text{ см и } h = 11{,}59 \text{ см.}$$

Площадь поперечного сечения

$$F_{ПР} = b\cdot h = 5{,}79\cdot 11{,}58 = 67{,}05 см^2.$$

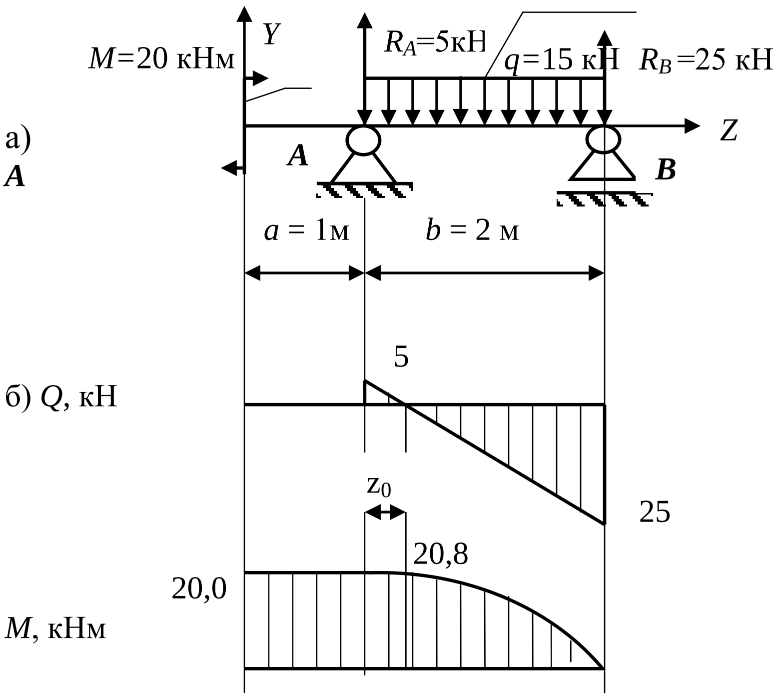


Рис. 14

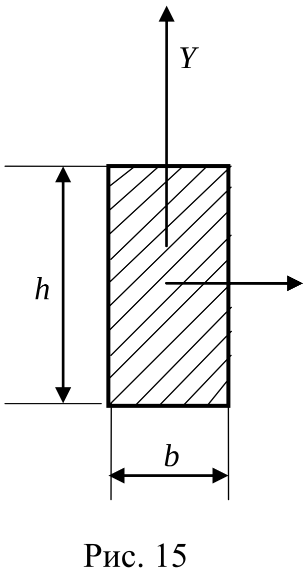


Рис. 15

Подбираем балку сплошного круглого сечения (рис. 16).

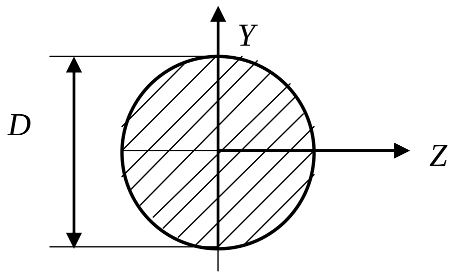


Рис.16

Для круглого сечения осевые момент инерции и момент сопротивления, соответственно равны:

$$I_X = I_Y = \pi \cdot D^4 / 64 \approx 0,05D^4; \qquad W_X = W_Y = \frac{I_X}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \approx 0,1D^3.$$

Тогда

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W_X}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 130}{3,14}} = 10,96 см$$

и площадь поперечного сечения балки

$$F_{KP} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10,96^2}{4} = 94,3 см^2.$$

Подберем для тех же внешних нагрузок балку кольцевого поперечного сечения (рис. 17) при $\alpha = d/D = 0,8$. Осевые момент инерции и момент сопротивления для кольцевого сечения:

$$I_X = I_Y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}\ 1-\alpha^4 \ \approx 0,05D^4 \cdot\ 1-\alpha^4\ ;$$

$$W_X = W_Y = \frac{\pi \cdot D^3}{32}\ 1-\alpha^4\ \approx 0,1D^3\ 1-\alpha^4\ ;$$

или $$W_X = 0,1D^3\ 1-\ 0,8\ ^4\ = 0,1D^3 \cdot 0,59,$$

откуда $D = \sqrt[3]{\dfrac{W_X}{0,059}}$ и $D = 12,98 см$; $d = 12,98 \cdot 0,8 = 10,38 см$.

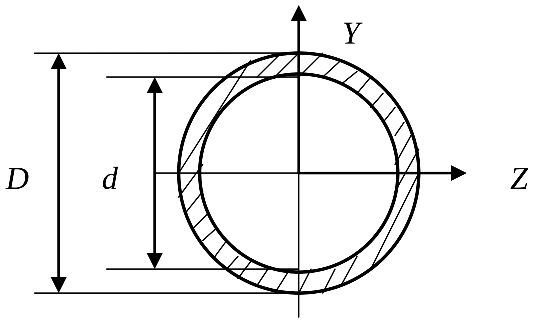


Рис. 17

Площадь поперечного сечения кольцевого сечения

$$F_{КОЛ.} = \frac{\pi \cdot D^2}{4}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{3,14 \cdot 12,98^2}{4}\left(1-0,8^4\right) = 78,03 см^2.$$

Жесткость кольцевого сечения балки

$$\frac{1}{EI_X} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,05 \cdot 12,98^4\left(1-0,8^4\right)} = 0,000597 \cdot 10^{-3}\left(Н \cdot м^2\right)^{-1}.$$

Подбор балки двутаврового сечения (рис. 18).

При требуемой величине осевого момента сопротивления для обеспечения прочности балки $W_X = 130 см^3$ подбираем по ГОСТ 8239–89 двутавр № 18, у которого $W_X = 143 см^3$, $I_X = 1290 см^4$, площадь поперечного сечения $F_{ДВ} = 23,4 см^2$. В этом случае недогруз составит $\frac{143-130}{130} \cdot 100\% = 10\%$. (Заметим, что если выбрать двутавр № 16, у которого $W_X = 109,0 см^3$, то перегруз составит 16,15 %.)

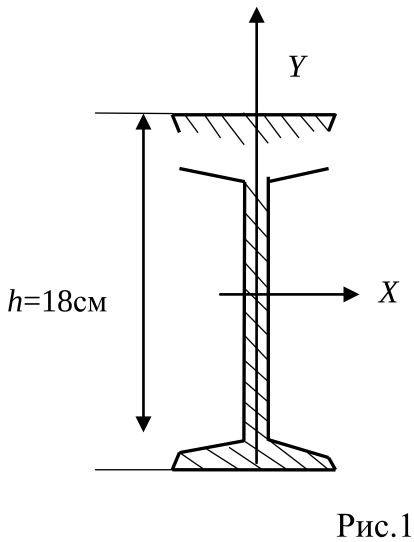


Рис.18

Жесткость сечения принятого двутавра

$$\frac{1}{EI_X} = \frac{1 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290} = 0{,}000388 \cdot 10^{-3} (H \cdot м^2)^{-1}.$$

Сравним теперь рассмотренные сечения балки одинаковой прочности по весу. Очевидно, вес единицы длины каждой из рассчитанных балок пропорционален площади ее поперечного сечения.

Сопоставляя их веса с самой эффективной (меньшей по весу) балкой двутаврового сечения, отметим, что балка прямоугольного сечения тяжелее в 2,87 раза, кольцевого – в 3,33 раза, а еще менее эффективная балка – сплошного круглого сечения, она тяжелее двутавровой в 4,01 раза.

Пример 5.

Для чугунной балки расчетная схема представлена на рис. 19, а; подобрать из условия прочности размеры таврового сечения (рис. 20). Принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma]_P = 40$ МПа; $[\sigma]_C = 150$ МПа.

Решение.

Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \quad -P \cdot 4 + R_B \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 + M = 0$$

или $$-10 \cdot 4 + R_B \cdot 3 - 10 \cdot 4 + 20 = 0,$$

откуда $R_B = 20$ кН.

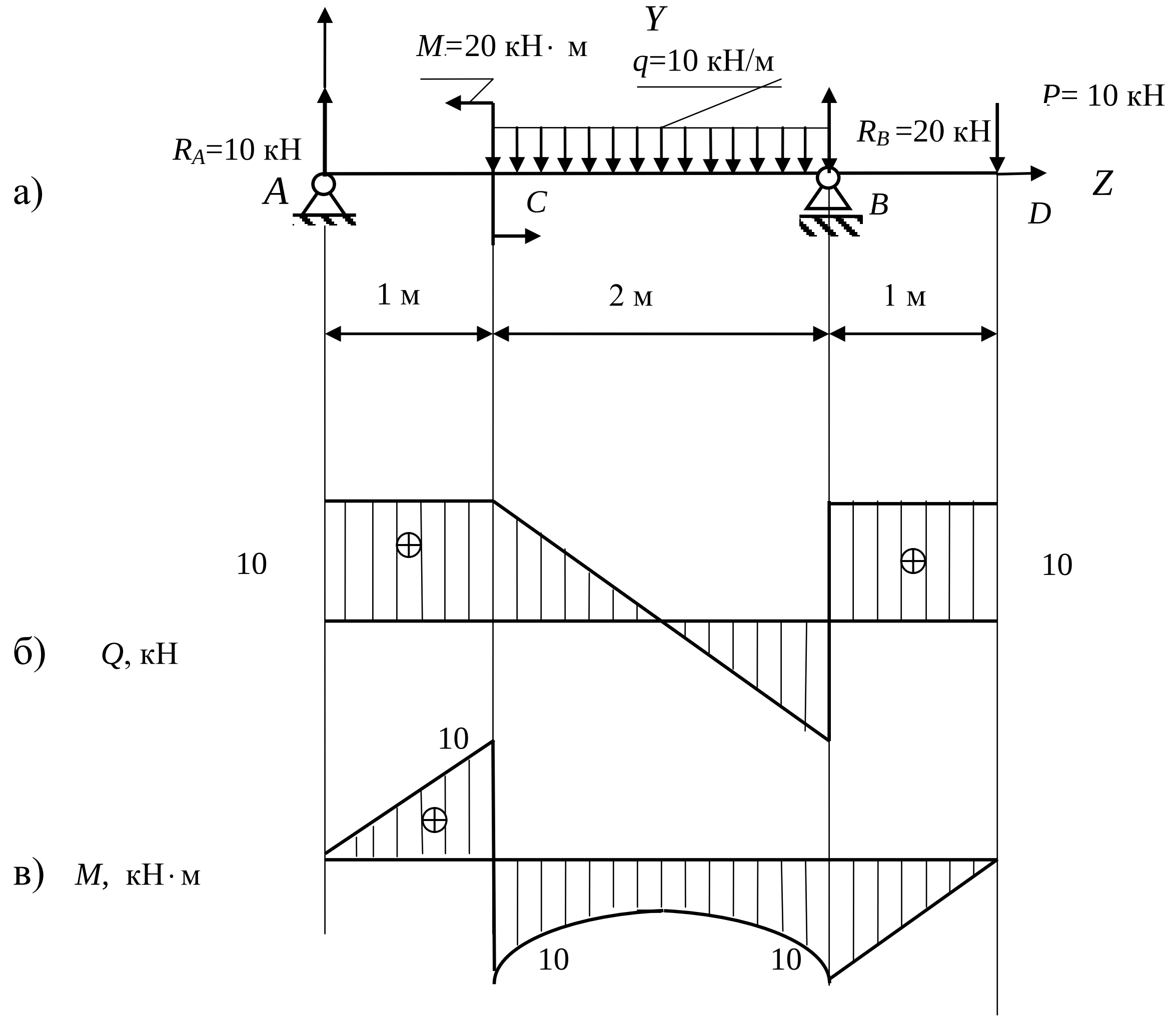
$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 3 + M + q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 1 = 0;$$

или $$-R_A \cdot 3 + 20 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 1 = 0,$$

откуда $R_A = 10$ кН.

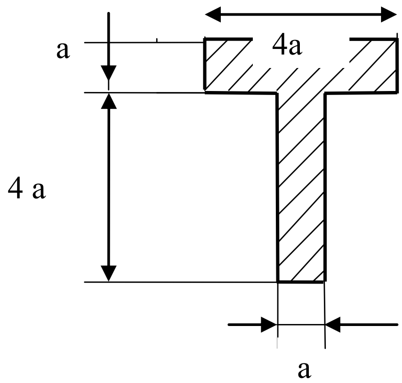
По полученным величинам внешних нагрузок строим эпюры поперечных сил (см. рис. 19, б) и изгибающих моментов (см. рис. 19, в) по характерным точкам.

Поскольку чугун хрупкий материал, то для использования условия прочности для расчета размеров таврового сечения (6) следует предварительно вычислить осевой момент инерции относительно главной центральной оси X (рис. 21) I_X, а также y^P_{MAX}; y^c_{MAX}.



а)
M=20 кН· м
Y
q=10 кН/м
P= 10 кН
R_A=10 кН
R_B =20 кН
A
C
B
D
Z
1 м
2 м
1 м
10
10
б) Q, кН
10
в) M, кН·м
10
10

Рис.19



a
4a
4 a
a

Рис. 20

Определим координату нейтральной оси, которая, как известно, проходит через центр тяжести фигуры. Для этого разделим тавровое сечение на два прямоугольника 1 и 2 (см. рис. 21). Положение центра тяжести сечения с осью симметрии y относительно оси X_{C1}, проходящей через центр тяжести первой фигуры X_{C1}, определится как

$$y_C = \frac{\sum F_i \cdot y_{Ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{C1} + F_2 \cdot y_{C2}}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \cdot 0 + 4a^2 \cdot 2,5a}{4a^2 + 4a^2} = 1,25a.,$$

где F_1, F_2 – площади поперечных сечений прямоугольников 1 и 2 соответственно; y_{C1} и y_{C2} – координаты их центров тяжести.

Расстояние от главной центральной оси x_C до верхней грани прямоугольника 1 $y_{1MAX} = 1,75a$; до нижней грани прямоугольника 2 – $y_{2MAX} = 3,25a$.

Момент инерции сечения тавра относительно нейтральной оси X_C

$$I_X = \sum \left(I_{Xi} + F_i \cdot b_i^2 \right) = I_{X1} + F_1 \cdot b_1^2 + I_{X2} + F_2 \cdot b_2^2 ,$$

где b_1 и b_2 – расстояния между центрами тяжести прямоугольников и общим центром тяжести, соответственно.

Подставляя численные значения, получаем

$$I_X = \frac{4a \cdot a^3}{12} + 4a \cdot (1,25a)^2 + \frac{a \cdot (4a)^3}{12} + 4a^2 \cdot \left[(2 - 1,25)a \right]^2 = 14,16a^4.$$

Из эпюры изгибающих моментов (см. рис. 19, в) следует, что их максимальные величины соответствуют сечениям в точке приложения сосредоточенного момента и на опоре B, где они равны $|M|$ = 10 кН·м.

Заметим, что на участке AC балки изгибающий момент положительный, следовательно, верхние волокна таврового сечения (выше нейтрального слоя) испытывают сжатие, нижние – растяжение; на участке CD – наоборот.

Напомним условия прочности для хрупких материалов:

$$\sigma_{MAX}^C = \frac{\left| M_{MAX} \cdot y_{MAX}^C \right|}{I_X} \le \sigma_C ;$$

$$\sigma_{MAX}^P = \frac{\left| M_{MAX} \cdot y_{MAX}^P \right|}{I_X} \le \sigma_P .$$

Подставляя численные значения, имеем для сжатых волокон

$$\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,75a}{14,16a^4} \le 150 \cdot 10^6,$$

откуда

$$a_{СЖ} \ge \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,75}{14,16 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,0202м = 20,2мм;$$

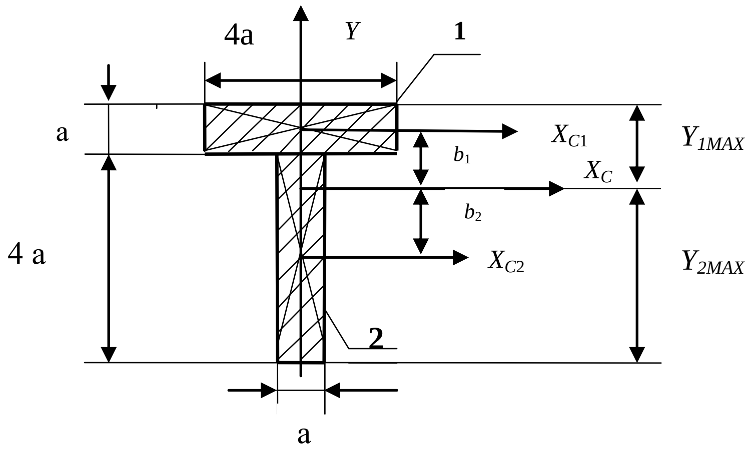


Рис. 21

из условия прочности для растянутых волокон (очевидно, наиболее опасные точки)

$$\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3,25a}{14,16a^4} \ge 40 \cdot 10^6,$$

откуда

$$a_{РАСТ.} \ge \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3,25}{14,16 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0,0386м = 38,6мм.$$

Для обеспечения прочности в растянутых и сжатых волокнах принимаем ближайший стандартный размер, *a* = 40 мм.

Момент инерции относительно нейтральной оси

$$I_X = 14,16 \cdot 4^4 = 3625см^4.$$

Из эпюры Q (см. рис. 19, б) следует, что опасными сечениями второго типа являются точки C и B балки, где Q =10 кН.

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{MAX} = \left| \frac{Q_{MAX} \cdot S_X^o}{I_X \cdot b} \right| \leq \frac{1}{1+k} \ \sigma_P \ .$$

В нашем случае

$$k = \frac{\sigma_P}{\sigma_C} = \frac{40}{150} = 0,267; \ b = 4 \ см;$$

$$S_X^O = b \cdot y_{2MAX} \cdot \frac{1}{2} y_{2MAX} = 4 \cdot 3,25 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,25 \cdot 4 = 338 см^3,$$

тогда

$$\tau_{MAX} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 338 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 3625 \cdot 10^{-8}} = 0,0233 \cdot 10^8 = 2,33 МПа;$$

$$\tau = \frac{1}{1+k} \ \sigma_P = \frac{1}{1+0,267} \cdot 40 = 31,5 МПа;$$

$$\tau_{MAX} < \tau \ .$$

Прочность обеспечена.

Из эпюр Q и M (см. рис. 19, б, в) следует, что в качестве опасного сечения третьего типа могут быть сечения C и B, где Q =10 кН, M = 10 кН⋅м. Для расчета напряжений в точке перехода от полки к стенке по уравнениям (1) определим

$$S_X^{полки} = a \cdot 4a \cdot \ 1,75a - 0,5a \ = 320 \text{ см}^3,$$

тогда касательные напряжения на границе полка–стенка

$$\tau^{полки} = \frac{Q \cdot S_X^{полки}}{b \cdot I_X} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 320 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 3625 \cdot 10^{-8}} = 0,0221 \cdot 10^8 \frac{Н}{м^2} = 2,21 МПа .$$

Нормальные напряжения на этой границе

$$\sigma^{полки} = \frac{M_X \cdot y}{I_X} = \frac{M_X \cdot \ 1,75 - 1,0 \ \cdot a}{I_X} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,75 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3625 \cdot 10^{-8}} = 0,828 \cdot 10^7 \ Па = 8,28 МПа.$$

Условие прочности для хрупких материалов по теории Мора

$$\sigma_M = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le \left[\sigma^P\right].$$

Подставляя численные значения, имеем

$$\sigma_M = \frac{1-0,267}{2}8,28 + \frac{1+0,267}{2}\sqrt{8,28^2 + 4\cdot 2,21^2} = 8,98МПа << \left[\sigma^P\right] = 40МПа.$$

Таким образом, прочность балки полностью обеспечена.

8. Метод начальных параметров

Пример 6.

Для балки, расчетная схема которой показана на рис. 22, определить аналитическим путем прогибы и углы поворота сечений балки и проверить выполнение условия жесткости.

Принять: E=2·10^5 МПа; [y]= L/300.

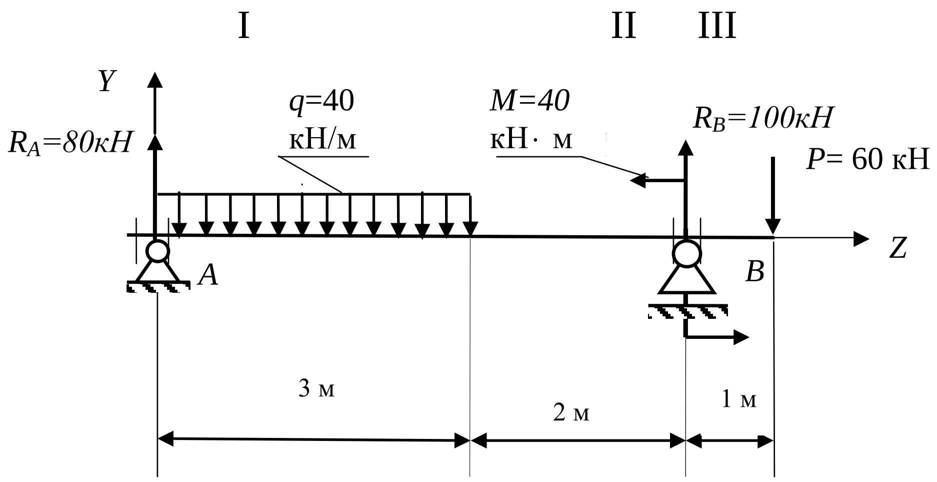


Рис. 22

Решение.

Расчет балки на жесткость предполагает выполнение условия $y_{\max} \le [y]$, где $y_{\max}$ – максимальная величина стрелы прогиба балки. Под прогибом понимают перемещение центра тяжести поперечного сечения балки в направлении, перпендикулярном ее недеформированной оси.

Для определения прогибов балки воспользуемся методом начальных параметров. Суть данного метода заключается в том, что независимо от числа грузовых участков число постоянных интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки остается равным двум. Это возможно только тогда, когда в выражениях изгибающего момента, углов поворота сечения и прогибов повторяются все члены предыдущего участка, а вновь появляющиеся члены на границах участка обращаются в нуль.

Для обеспечения этих условий необходимо соблюдать следующие правила (правила Клебша – Бубнова):

1. Начало координат следует помещать на одном из концов балки. Оно является общим для всех участков.

2. Если среди нагрузок встречается сосредоточенный внешний момент, то в уравнении для изгибающего момента его следует умножать на фиктивное плечо и записывать в виде

$$M\,(z - a_M)^0,$$

где z – текущая координата; a_M – абсцисса точки приложения момента.

3. Если среди нагрузок встречается распределенная нагрузка, не доходящая до конца балки, то ее следует по такому же закону довести до конца балки, компенсировав в месте дополнения такой же нагрузкой противоположного направления (рис. 23, а).

4. Интегрирование уравнений на всех участках следует производить без раскрытия скобок типа $(z – a)$, поскольку $d(z – a) = dz$.

При выполнении этих условий постоянные интегрирования на всех участках уравниваются, становятся равными углу поворота и прогибу в начале координат и поэтому называются начальными параметрами θ_0 и y_0.

Уравнение прогиба для любого сечения балки (универсальное уравнение изогнутой оси) имеет вид

$$y = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_X}\left(\sum M_i \frac{(z - a_M)^2}{2!} + \sum P_i \frac{(z - a_P)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - a_q)^4}{4!} \right). \qquad (8)$$

Дифференцируя уравнение (7) без раскрытия скобок, получаем выражение для углов поворота сечения:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{E \cdot I_X}\left(\sum M_i \frac{(z - a_M)^1}{1!} + \sum P_i \frac{(z - a_P)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z - a_q)^3}{3!} \right), \qquad (9)$$

где a_M; a_P; a_q – соответственно, координаты точек приложения внешнего момента, сосредоточенной силы и распределенной нагрузки.

В соответствии с правилами помещаем общее для всех участков начало координат в левый конец балки, распределенную нагрузку q продлеваем до правого конца балки и компенсируем добавление такой же нагрузкой q^* обратного направления (см. рис. 23, а). Так как слагаемое, содержащее силу P, действует только при z > 6 м, то его следует пропустить.

Применительно к рассматриваемому примеру универсальное уравнение изогнутой оси (7) примет вид

$$y = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_X}\left(R_A \frac{z^3}{6} - q\frac{z^4}{24} + q^* \frac{(z-3)^4}{24} - M\frac{(z-5)^2}{2} + R_B \frac{(z-5)^3}{6} \right).$$

Граничные условия: на опорах A и B прогиб отсутствует, т. е.:

1. При z = 0 y = 0.

2. При z = 5 м y = 0.

Подставляя граничные условия в универсальное уравнение изогнутой оси, имеем:

1. 0 = y_0.

2. 0 = $\theta_0 \cdot 5 + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} \left(80 \cdot 10^3 \cdot \frac{5^3}{6} - 40 \cdot 10^3 \frac{5^4}{24} + 40 \cdot 10^3 \frac{(5-3)^4}{24} \right)$,

откуда $\theta_0 = -0,0084$ рад.

Вычислим отдельно

$$\frac{1}{E \cdot I_X} = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 7780 \cdot 10^8} = 0,642(\kappa H \cdot м^2)^{-1}.$$

С учетом этого уравнения для углов поворота и прогибов с учетом численных значений входящих в них величин приобретают вид:

$$\theta = -0,0084 + 0,642 \cdot 10^{-4} \left(80 \cdot \frac{z^2}{2} - 40\frac{z^3}{6} + 40\frac{(z-3)^3}{6} - 40\frac{z-5}{1} + 100\frac{(z-5)^2}{2} \right);$$

$$y = -0,0084z + 0,642 \cdot 10^{-4} \left(80 \cdot \frac{z^3}{6} - 40\frac{z^4}{24} + 40\frac{(z-3)^4}{24} - 40\frac{(z-5)^2}{2} + 100\frac{(z-5)^3}{6} \right).$$

Для построения графиков θ и y определим их значения через каждый метр длины балки:

при $z = 0$ $\qquad \theta = -0{,}0084\,рад$; $\quad y = 0$.

при $z = 1м$ $\qquad \theta = -0{,}0084 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{1^2}{2} - 40\frac{1^3}{6}\right) - 0{,}0063\,рад;$

$$y = -0{,}0084\cdot 1 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\frac{1^3}{6} - 40\frac{1^4}{24}\right) = -0{,}00765\,м = -7{,}65\,мм;$$

при $z = 2$ м $\qquad \theta = -0{,}0084 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{2^2}{2} - 40\frac{2^3}{6}\right) = -0{,}00155\,рад;$

$$y = -0{,}0084\cdot 2 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\frac{2^3}{6} - 40\frac{2^4}{24}\right) = 0{,}0116\,м = 11{,}6\,мм;$$

при $z = 3$ м $\qquad \theta = -0{,}0084 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{3^2}{2} - 40\cdot\frac{3^3}{6}\right) = +0{,}0032\,рад;$

$$y = -0{,}0084\cdot 3 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{3^3}{6} - 40\frac{3^4}{24}\right) = -0{,}0108\,м = -10{,}8\,мм;$$

при $z = 4$ м

$$\theta = -0{,}0084 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{4^2}{2} - 40\frac{4^3}{6} + 40\frac{4-3\ ^{3}}{6}\right) = 0{,}0057\,рад;$$

$$y = -0{,}0084\cdot 4 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{4^3}{6} - 40\frac{4^4}{24} + 40\frac{4-3\ ^{4}}{24}\right) = -0{,}0061\,м = -6{,}1\,мм;$$

при $z = 5$ м

$$\theta = -0{,}0084 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{5^2}{2} - 40\frac{5^3}{6} + 40\frac{5-3\ ^{3}}{6}\right) = +0{,}0057\,\text{рад};$$

$$y = -0{,}0084\cdot 5 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{5^3}{6} - 40\frac{5^4}{24} + 40\frac{5-3\ ^{4}}{24}\right) = 0{,}0;$$

при $z = 6$ м

$$\theta = -0{,}0084 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{6^2}{2} - 40\frac{6^3}{6} + 40\frac{6-3\ ^{3}}{6} - 40\frac{6-5}{1} + 100\frac{6-5\ ^{2}}{2}\right) = +0{,}0038\,\text{рад};$$

$$y = -0{,}0084\cdot 6 + 0{,}642\cdot 10^{-4}\left(80\cdot\frac{6^3}{6} - 40\frac{6^4}{24} + 40\frac{6-3\ ^{4}}{24} - 40\frac{6-5\ ^{2}}{2} + 100\frac{6-5\ ^{3}}{6}\right) = 0{,}0043\,м = 4.3\,мм.$$

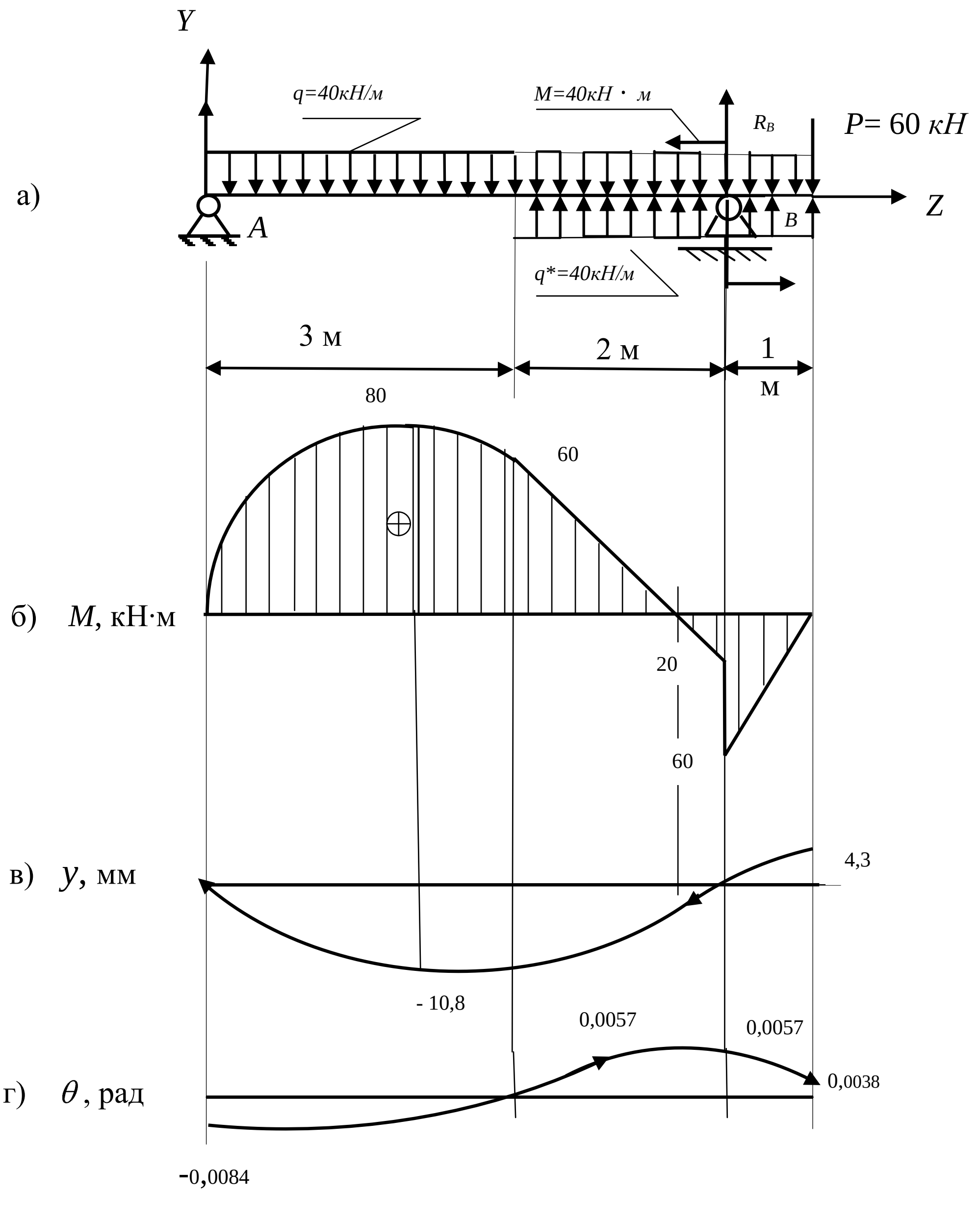


Рис. 23

По полученным значениям θ и y строим графики (см. рис. 23, в и 23, г).

Максимальная величина прогиба будет в сечении, где θ – 0. В данном случае y_{MAX} = 10,8 мм. Допускаемая величина прогиба

$$[y] = 5/300 = 0{,}0167 \text{ м} > y_{MAX} = 0{,}0108 \text{ м}.$$

Таким образом, условие жесткости выполняется.

Пример 7.

Рассчитать прогибы посередине пролета балки прямоугольного, круглого сплошного, кольцевого и двутаврового сечений, расчетная схема которой представлена на рис. 24, расчеты на прочность выполнены в примере 4.

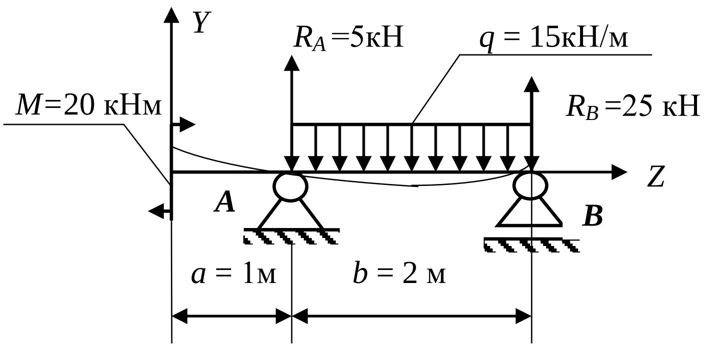


Рис. 24

Решение.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$y = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{1}{E \cdot I_X}\left(M\frac{z^2}{2} + R_A\frac{z-1^{\,3}}{6} - q\frac{z-1^{\,4}}{24} \right). \qquad (10)$$

Постоянные интегрирования y_0 и θ_0 находим из опорных условий:

$$\text{при } z = 1 \text{ м} \quad y = 0; \qquad (11)$$

$$\text{при } z = 3 \text{ м} \quad y = 0. \qquad (12)$$

Подставляя в (10) условие (11), имеем

$$y_0 + \theta_0 \cdot 1 = -\frac{1}{E \cdot I_X} \cdot \frac{M \cdot 1^2}{2} = -\frac{1}{E \cdot \left(\frac{bh^3}{12} \right)} \cdot \frac{M \cdot 1^2}{2}, \qquad (13)$$

где b = 5,79 см; h = 11,59 см (см. пример 4), или для балки прямоугольного поперечного сечения

$$y_0 + \theta_0 \cdot 1 = -\frac{1 \cdot 12 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5{,}79 \cdot 11{,}58^3}\left(\frac{20 \cdot 1^2}{2} \right) \cdot 10^3; \qquad (14)$$

Подставляя теперь (12) в (10), получаем

$$y_0+\theta_0\cdot 3=-\frac{1}{E\cdot I_X}\left(\frac{M\cdot 3^2}{2}+R_A\frac{2^3}{6}-q\frac{2^4}{24}\right), \qquad (15)$$

или

$$y_0+\theta_0\cdot 3=-\frac{1\cdot 12\cdot 10^8}{2\cdot 10^{11}\cdot 5,79\cdot 11,58^3}\left(\frac{20\cdot 3^2}{2}+5\frac{2^3}{6}-15\frac{2^4}{24}\right)\cdot 10^3. \qquad (16)$$

$$y_0+\theta_0\cdot 3=-\frac{1\cdot 12\cdot 10^8}{2\cdot 10^{11}\cdot 5,79\cdot 11,58^3}\left(\frac{20\cdot 3^2}{2}+5\frac{2^3}{6}-15\frac{2^4}{24}\right)\cdot 10^3. \qquad (16)$$

Решая совместно уравнения (14) и (16), получаем

$$\theta_0=-0,0284\,рад; \qquad y_0=0,0216\,м=21,6\,мм.$$

Рассчитаем теперь прогиб посередине пролета балки:

$$y=y_0+\theta_0\cdot 2+\frac{12\cdot 10^8}{2\cdot 10^{11}\cdot 5,79\cdot 11,5^3}\left(20\frac{2^2}{2}+5\frac{1^3}{6}-15\frac{1^4}{24}\right)\cdot 10^3=-0,00782\,м=-7,82\,мм.$$

Расчет показывает, что балка в этом сечении прогибается вниз на 7,82 мм, левый конец балки перемещается вверх на 21,6 мм (см. рис. 24).

Определим прогиб в центре пролета балки сплошного круглого поперечного сечения. Используя опорные условия, при D = 10,96 см (пример 4) имеем:

$$y_0+\theta_0\cdot 1=-\frac{10^8}{2\cdot 10^{11}\cdot 0,05\cdot 10,96^4}\cdot\frac{20\cdot 10^3\cdot 1^2}{2}; \qquad (17)$$

$$y_0+\theta_0\cdot 3=-\frac{10^8}{2\cdot 10^{11}\cdot 0,05\cdot 10,46^4}\left(\frac{20\cdot 3^2}{2}+5\frac{2^3}{6}-15\frac{2^4}{24}\right)\cdot 10^3. \qquad (18)$$

Решая совместно уравнения (17) и (18), получаем

$$\theta_0 = -0,0266\,рад; \qquad y_0 = 0,0196\,м = 19,6\,мм.$$

и прогиб балки посередине пролета

$$y_{Z=2} = 0,0196 - 2\cdot 0,0266 + \frac{10^8}{2\cdot 10^{11}\cdot 0,05\cdot 10,96^4}\left(\frac{20\cdot 2^2}{2} + \frac{5\cdot 1^2}{6} - \frac{15\cdot 1^4}{24}\right)\cdot 10^3 =$$

$$= -0,0059\text{м} = -5,9\text{мм}.$$

Меньшая величина прогиба, чем для прямоугольного сечения естественна, поскольку жесткость круглого сечения несколько больше чем прямоугольного, т. е.

$$I_X = I_Y = \frac{\pi\cdot D^4}{}\left(\frac{1}{E\cdot I_X}\right)_{ПР} = 0,681\cdot 10^3 < \left(\frac{1}{EI_X}\right)_{КР} = 0,693\cdot 10^{-3}\ (\ H\cdot м^2\ ^{-1}.$$

Рассчитаем для тех же внешних нагрузок балку кольцевого поперечного сечения (D= 12,98 см, d=10,38см).

Жесткость сечения

$$\frac{1}{EI_X} = \frac{1}{2\cdot 10^{11}\cdot 0,05\cdot 12,98^4\ \ 1-0,8^4} = 0,000597\cdot 10^{-3}\ \ H\cdot м^2\ ^{-1}.$$

Из опорных условий находим начальные параметры y_0 и θ_0:

при z = 1 м

$$y_0 + \theta_0\cdot 1 = -0,000597\cdot 10^{-3}\cdot\frac{20\cdot 1^2}{2}\cdot 10^3;$$

$$y_0 + \theta_0\cdot 1 = -0,000597\cdot 10^{-3}\cdot\frac{20\cdot 1^2}{2}\cdot 10^3;$$

откуда $$y_0 + \theta_0 = -0,00597; \qquad (19)$$

при z = 3 м

$$y_0 + 3\theta_0 = -0,000597\cdot 10^{-3}\left(\frac{20\cdot 3^2}{2} + \frac{5\cdot 2^3}{6} - \frac{15\cdot 2^4}{24}\right),$$

откуда

$$y_0 + 3\theta_0 = -0,0517. \qquad (20)$$

Решая совместно уравнения (19) и (20), имеем

$$\theta_0 = -0,0229\, рад. \quad y_0 = 0,0169\, м = 16,9\, мм.$$

Прогиб посередине балки

$$y_{Z=2} = y_0 + 2\theta_0 + \frac{1}{EI_X}\left(\frac{M \cdot 2^2}{2} + \frac{R_A \cdot 1^3}{6} - \frac{q \cdot 1^4}{24}\right).$$

$$y_{Z=2} = y_0 + 2\theta_0 + \frac{1}{EI_X}\left(\frac{M \cdot 2^2}{2} + \frac{R_A \cdot 1^3}{6} - \frac{q \cdot 1^4}{24}\right).$$

Подставляя численные значения, получаем

$$y_{Z=2} = 0,0169 - 2 \cdot 0,0229 + 0,000597 \cdot 10^{-3}\left(\frac{20 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 1^3}{6} - \frac{15 \cdot 1^4}{24}\right) = -0,0045\, м = 4,5\, мм.$$

Рассчитаем прогибы балки двутаврового сечения (двутавр № 18). Воспользуемся данными, полученными ранее в примере 4:

$$\frac{1}{EI_X} = \frac{1 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290} = 0,000388 \cdot 10^{-3} (H \cdot м^2)^{-1}.$$

Определим начальные параметры, используя опорные условия при $z = 1$ м

$$y_0 + \theta_0 \cdot 1 = -0,000388 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20 \cdot 1^2}{2} \cdot 10^3 = -0,00388; \qquad (21)$$

при $z = 3$ м

$$y_0 + 3\theta_0 = -0,000388 \cdot 10^{-3}\left(\frac{20 \cdot 3^2}{2} + \frac{5 \cdot 2^3}{6} - \frac{15 \cdot 2^4}{24}\right) \cdot 10^3 = -0,0336. \qquad (22)$$

Решая совместно (21) и (22), имеем

$$\theta_0 = -0,0151\, рад; \quad y_0 = 0,0117\, м = 11,7\, мм.$$

Прогиб балки посередине пролета ($z = 2$ м)

$$y_{Z=2} = 0,0117 - 2\cdot 0,0151 + 0,000338\cdot 10^{-3}\left(\frac{20\cdot 2^2}{2} + \frac{5\cdot 1^3}{6} - \frac{15\cdot 1^4}{24}\right)\cdot 10^3 =$$

$$= -0,0029\textit{м} = -2,9\textit{мм}.$$

Следовательно, балка прогибается выпуклостью вниз, что соответствует положительной величине изгибающего момента (см. рис. 14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Феодосьев В.И.** Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 592 с.

2. **Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.** Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 2000. – 559 с.

3. **Анурьев В.И.** Справочник конструктора-машиностроителя: В 3 т. Т. 1. 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1979. – 728 с.

4. **Макаров Е.Г.** Сопротивление материалов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.

5. **Радченко Е.А., Петрова С.Б.** Расчет балок на прочность при прямом плоском изгибе: Метод. указания к расчетно-графической работе. 2-е изд. – Л.: ЛТИХП, 1989. – 37 с.

6. **Радченко Е.А., Петрова С.Б.** Определение перемещений при плоском изгибе: Метод. указания к практическим занятиям и самостоятельной работе. 2-е изд., испр. – СПб.: СПбГУНиПТ. – 36 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
1. Определение опорных реакций 3
2. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении балки 4
3. Дифференциальные зависимости при изгибе 6
4. Построение эпюр *Q* и *M* по уравнениям 8
Пример 1. 9
Пример 2. 13
Пример 3. 16
5. Построение эпюр *Q* и *M* по характерным точкам 16
6. Расчет на прочность при изгибе 20
7. Подбор двутаврового сечения балки и проверка прочности 24
Пример 4. 27
Пример 5 31
8. Метод начальных параметров 36
Пример 6. 36
Пример 7. 41
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 46

Мамченко Валерий Олегович

РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 5.09.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,79. Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,81
Тираж 170 экз. Заказ № С 51

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9