МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 681.3.06

Введение в математическое моделирование: Учеб.-метод. пособие / Б.А. Вороненко, А.Г. Крысин, В.В. Пеленко, О.А. Цуранов. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 44 с.

Даны основные понятия, определения и принципы математического моделирования. Представлены классификация моделей, общая схема математического моделирования. Рассмотрены математические модели отдельных физических и инженерных процессов.

Предназначено магистрантам, обучающимся по образовательным программам направления 151000 Технологические машины и оборудование.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. Е.И. Верболоз

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

1. ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для глубокой проработки отдельных разделов теоретического курса «Математическое моделирование в пищевой промышленности» студентами, обучающимися по магистерским программам направления 151000 "Технологические машины и оборудование"

Математическое моделирование в последние десятилетия оформилось в отдельную междисциплинарную область знаний с присущими ей объектами, подходами и методами исследования. Поэтому предмет «Математическое моделирование в пищевой промышленности» опирается на естественно - научные курсы, проходимые студентами во время обучения в вузе, - это, прежде всего, математика, физика, процессы и аппараты пищевых производств, химическая и пищевая технология, гидравлика, теоретическая механика.

Основная цель пособия – дать студентам понятия о модели, моделировании, назначении моделирования, о месте моделирования среди методов познания, научить их составлению математического описания объекта (технологического процесса, машины, аппарата), выводу, решению и анализу соответствующих уравнений и математических моделей.

«Студента уже на вузовской скамье нужно обучать построению моделей своей науки. Именно таким путем математика должна прочно войти в его профессиональную деятельность.

Хорошая модель – это плод сотрудничества математика и специалиста – физика, химика, биолога, инженера…. А чтобы сотрудничество представителей разных наук было плодотворным, они должны понимать друг друга, должны выработать общий язык, основой которого должна служить математика. Причем математику следует усваивать не как свод законов, правил, формул, а как философию, как стиль мышления специалиста, его рабочий аппарат. Нужно учиться в любой науке идти от качественных суждений о предмете исследования к строгой постановке количественных задач и четким алгоритмам их решения».

Акад. А.А. Самарский

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Определяйте значения слов, и вы избавите человечество от многих затруднений
Р. Декарт

Математическая модель – это вопрос, который мы задаем природе
В.В. Налимов

В пищевой науке различают:

- пищевую технологию;
- пищевую инженерию.

Под пищевой технологией понимают науку о практическом применении законов физики, химии, биологии и других базисных наук для обработки, изготовления, изменения состояния, формы сырья, материала или полуфабриката в процессе производства продуктов питания.

Цель пищевой технологии – производство продуктов с заданными свойствами высокого качества с наиболее рациональными затратами и учетом действующего законодательства в области пищевых производств.

В современной трактовке пищевая инженерия рассматривает различные свойства сырья и пищи, различные технологические процессы, аппараты и оборудование, работу предприятий в целом.

Цель пищевой инженерии – интенсификация производственных процессов на основе новейших достижений науки и техники.

Современные направления развития пищевой науки по переработке сельскохозяйственного сырья:

1) разработка новых методов производства пищевых продуктов;

2) изучение применения обработки ультразвуком, использование энергии электромагнитного поля сверхвысокочастотного (СВЧ) и инфракрасного (ИК) диапазонов;

3) изучение физических, или материальных констант продуктов, называемых так по той причине, что эти постоянные представляют физические свойства среды, материала, в котором протекает данный физический процесс (коэффициент теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}$, коэффициент температуропроводности $\boldsymbol{a}$, теплоемкость $\boldsymbol{c}$, плотность $\boldsymbol{\rho}$, коэффициенты вязкости $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$), электрические свойства продуктов;

4) изучение реологических свойств сырья с целью, например, оптимизации формирования структуры продукта с ранее заданными свойствами, расчетов течения в трубопроводах, аппаратах, контроль качества продукции на основе контроля консистенции и т.п.;

5) изучение применения вибрации для более быстрого и равномерного распределения веществ, увеличения площади контакта ингредиентов;

6) изучение применения ультрафильтрации (плазма крови, бульоны, молоко и др.);

7) разработка систем автоматизации и т.п.

Создание новых методов производства продуктов, создание современного аппарата новой конструкции является сложным процессом, состоящим из нескольких этапов:

1) формулирование требований к разрабатываемому аппарату и обоснование технического задания на проектирование;

2) выбор по патентной литературе прототипа аппарата, отвечающего техническому заданию, или его изобретение;

3) разработка эскизного проекта опытного образца аппарата;

4) изготовление опытного образца;

5) испытание опытного образца;

6) внесение конструктивных изменений в опытный образец в ходе его испытаний;

7) проектирование промышленного образца аппарата;

8) изготовление промышленного образца, ввод в эксплуатацию и его доработка;

9) изготовление, монтаж, наладка и эксплуатация серийных образцов.

В науке и технике свойства аппарата или машины изучаются путем анализа аналогичных свойств их на модели.

Модель (от лат. modulus – мера, образец) – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект – оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты, и служит средством для получения новых знаний об оригинале.

Процесс создания, разработки модели, ее исследование и распространение результатов на оригинал, называется моделированием.

Моделирование используется для разных целей. В связи с этим приведем более конкретизированное определение модели.

Моделью некоторого объекта A оригинала называется объект B, в каком-то отношении подобный (аналогичный) оригиналу A, выбранный или построенный субъектом C (человеком), по крайней мере, для одной из следующих целей:

1) замена A в некотором мысленном (воображаемом) или реальном действии (процессе) моделью B, так как B более удобно использовать для этого действия в данных условиях (модель-заместитель);

2) создание наглядного представления об объекте A (реально существующем или воображаемом) с помощью объекта B (модель-представление);

3) истолкование (интерпретация) объекта A в виде объекта B (модель-интерпретация);

4) исследование (изучение) объекта A посредством изучения объекта B (исследовательская модель).

Для того, чтобы модель была пригодна для указанных целей, она должна обладать соответствующими этим целям свойствами. В большинстве случаев модель обладает не только свойствами, соответствующими одной из указанных целей, но и другими свойствами, а поэтому пригодна для реализации и других целей. Так, например, когда для решения научной, технической задачи строят ее знаковую модель в виде дифференциального уравнения, то это уравнение является исследовательской моделью, ибо, изучая уравнение, устанавливают свойства и особенности моделируемой задачи. Но эта модель-уравнение служит одновременно и моделью-заместителем, ибо уравнение замещает исходную задачу в процессе ее решения. Уравнение является и моделью-представлением, ибо дает обобщенное представление о рассматриваемой задаче, и, наконец, оно является и моделью-интерпретацией, ибо уравнение есть истолкование существенных особенностей задачи на языке дифференциальных уравнений.

Моделирование можно рассматривать как особую деятельность по построению (выбору или конструированию) моделей для указанных целей. Невозможно представить современную науку без широкого применения моделирования. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента (первых двух методов).

Таким образом, моделирование – это метод изучения объектов (аппаратов, явлений, процессов), при котором вместо оригинала (интересующего нас объекта) эксперимент проводят на модели (другом объекте), а результаты исследований распространяют на оригинал.

Моделирование – один из главных методов, позволяющих ускорить технический прогресс, сократить сроки освоения новых видов оборудования, новых процессов.

История науки и техники полна примеров того, какое значение имеет использование моделирования для решения тех или иных задач.

Вот один из таких примеров. Перед спуском на воду английского корабля «Кэпетен» инженер Рид предупредил лордов адмиралтейства, что корабль на воде неизбежно перевернется. Установил он это с помощью моделирования. Он построил модель корабля и провел соответствующие испытания модели. Однако лорды не прислушались к его предупреждению, и это стало причиной трагедии: при спуске корабля на воду он перевернулся и затонул. С тех пор в соборе Святого Петра в Лондоне висит памятная доска об этом печальном событии, надпись на которой начинается так: «Вечное порицание невежественному упрямству лордов адмиралтейства…»

Примером физически подобных моделей, различающихся по временному масштабу, являются мухи – дрозофилы, используемые в качестве живых моделей явления наследственности, ибо они размножаются с огромной скоростью по сравнению с другими существами.

Обобщая, можно сказать, что модель нужна:

1) для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;

2) для того, чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях (критерий в данном случае – это признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо, мерило оценки);

3) для того, чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Хорошо построенная модель, как правило, обладает удивительным свойством: ее изучение дает некоторые новые знания об объекте-оригинале.

Путь построения модели таков: вначале предлагаются некоторые логически обоснованные постулаты. Исходя из них записываются дифференциальные уравнения, которые затем интегрируются. Полученные таким образом функциональные зависимости сопоставляют с наблюдаемыми явлениями.

Вот что говорит о значении моделирования, в частности о его роли в преподавании, выдающийся русский ученый, основоположник современной гидро- и аэромеханики Н.Е. Жуковский в своей работе «О геометрическом истолковании в механике», написанной в 1894 г.:

«Прежде думали, что прибегать к моделям следует только при элементарном преподавании и что высшие науки не нуждаются в этой степени наглядности. Но эта мысль едва ли справедлива, так как высшие науки часто являются очень сложными и с накоплением научного материала год от года усложняются. Модель, удачно построенная, является хорошим подспорьем даже и для разъяснения теоретического вопроса. Томсон сказал, что явление природы только тогда может считаться вполне понятным, когда мы можем представить его на модели».

К процессу моделирования предъявляются два основных требования.

Во-первых, исследование на модели должно быть более экономичным, чем непосредственное исследование оригинала. Экономичность может выражаться и в том, что создается более дорогая, но универсальная модель.

Во-вторых, должно быть известно, как по результатам испытаний модели определить необходимые параметры оригинала. Это правило называется <u>традуктивностью</u> (от лат. traductio – перенесение, перевод).

Условия, при которых возможно распространение результатов эксперимента с модели на оригинал, определяет теория подобия.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

В действительности вообще нет никаких строго проведенных межей и граней к великой горести систематиков
А.И. Герцен

Классификация моделей и методов моделирования – вопрос достаточно сложный, неоднозначный.

Как было отмечено ранее, моделирование относится к общенаучным методам познания. Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению (условному) моделей на материальные (вещественные, реальные, предметные) и идеальные.

К материальным моделям относятся такие, которые построены из каких-либо вещественных предметов: из металла, дерева, стекла и других материалов. К таким моделям можно отнести использование макетов экспериментальных образцов различного оборудования для пищевой промышленности.

Материальные модели можно разделить на статические (неподвижные) и динамические (действующие).

К статическим моделям относятся макеты аппаратов, пространственные модели молекул и кристаллов в химии и т.д.

К динамическим моделям относятся такие, которые воспроизводят те или иные процессы или явления. Например, модель будущего корабля позволяет в обычной ванне или специальном бассейне изучать некоторые особенности проектируемого корабля (смотри пример из категории техники).

Идеальные модели обычно делят на три вида: иконические (образные) – рисунки, схемы, передающие в образной форме структуру или другие особенности моделируемых предметов или явлений, планы; знаковые (знако-символические) – запись структуры или других особенностей моделируемых объектов с помощью знаков – символов какого-то искусственного языка (математические уравнения, аналитическое задание функции в виде формулы); мысленные (умственные).

Построение модели производится на основе глубокого предварительного анализа моделируемого объекта и создания мысленной модели. Это значит, что субъект, разрабатывая модель того или иного объекта, сначала создает у себя в голове на основе анализа этого объекта его наглядный мысленный образ – его мысленную модель и лишь затем на ее основе строит или выбирает одну из материальных (или знаково-аналитическую, или иконическую) моделей этого объекта. В пищевой реологии применяют мысленные модели поведения различных тел при течении.

Модель не только дает возможность создать наглядный образ моделируемого объекта, но и создает образ наиболее существенных свойств, отраженных в модели. Все остальные свойства, не существенные в данном случае, отбрасываются. Например, в большинстве технологических расчетов свойств газов исходят из модели идеального газа, отлично зная, что реальные газы можно описать гораздо совершеннее. Но достаточна точность, даваемая упрощенной, приближенной моделью. И лишь при высоких давлениях, вблизи температур конденсации или при расчетах высокой точности возникает необходимость в усложненных моделях.

Материальное моделирование разделяется на физическое и аналоговое.

Под физическим понимается моделирование, при котором реальному объекту сопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило, в лабораторных условиях) с целью последующего перенесения свойств изучаемых процессов с модели на объект на основе специально для этого разработанной математической теории подобия. Иными словами, физическое моделирование – это исследование физически подобных процессов на установках, сохраняющих физическую природу явлений, но воспроизводящих их в других размерах в смысле геометрическом или физическом.

Примерами подобных физических моделей могут быть макеты аппаратов и машин.

Изучение свойств объекта моделирования на его модели позволяет снизить расходы на проведение необходимых экспериментов.

Методы измерения свойств модели остаются такими же, как и при исследованиях объекта, что является крупным недостатком физического моделирования. Кроме того, при изменении размеров модели трудно сохранить в ней исследуемый процесс одинаковым по своей физической природе с процессом, который должен протекать в объекте моделирования. У модели могут появиться некоторые свойства, которых нет у объекта, и наоборот, некоторые важные свойства у модели могут потеряться или стать второстепенными. Вследствие этого результаты исследования моделей не всегда можно использовать для моделирования объекта.

Аналоговые (от греческого analogos – соответственный, соразмерный) – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами).

В основу аналогового моделирования положено совпадение математических описаний различных объектов. Примерами аналоговых моделей могут служить электрические и механические колебания, которые с точки зрения математики описываются одинаковыми соотношениями, но относятся к качественно отличающимся физическим процессам. Поэтому изучение механических колебаний можно вести с помощью электрической схемы, и наоборот.

Весьма интересен следующий факт. Уравнение математической физики – уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

описывает такие явления, как гравитационные, оптические, акустические, электромагнитные излучения, морские волны, полет самолета, колебания упругих тел и строение атома, в том числе стационарное тепловое поле и стационарное электростатическое поле. Температурные измерения менее точны и более трудоемки, чем электрические. Вместо температурных можно производить аналогичные электрические измерения, создав соответствующее u поле. В тепловом поле функция u – температура, в электростатическом – электрический потенциал.

Здесь полностью применимо высказывание великого физика и математика А.Пуанкаре: «Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем».

Приведем характерные примеры моделей, представляющие исследуемый объект аналогами, которые ведут себя как реальные объекты, но не выглядят таковыми.

Пример 1. График, иллюстрирующий соотношения между затраченными усилиями и результатами:

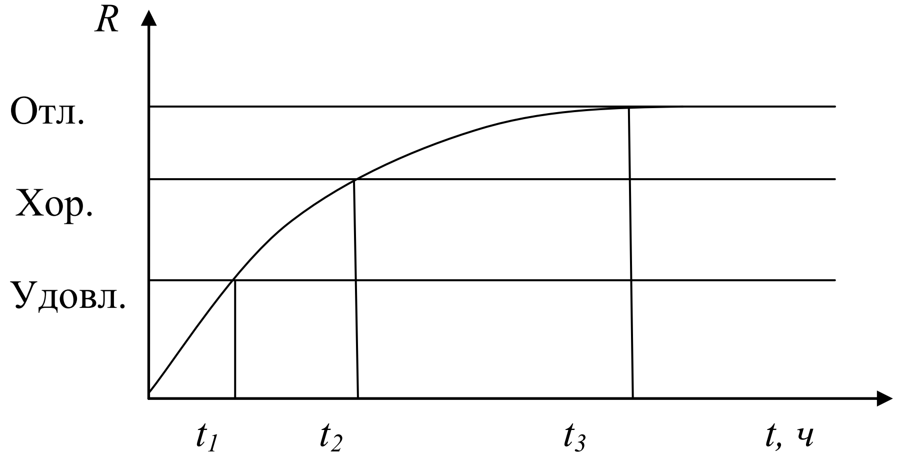

Рис. 1. Зависимость качества знаний от времени подготовки

График на рис. 1 показывает, какое количество времени *t*, отведенное студентом на подготовку к экзамену, влияет на результат *R* его сдачи.

Пример 2. Предположим [11], что нужно найти наиболее экономичный способ для регулярных известных поставок товаров в три города, построив для этого только один склад. Основное требование: место для склада должно быть таким, чтобы полные транспортные расходы были наименьшими (считается, что стоимость каждой перевозки равна произведению расстояния от склада до пункта назначения на общую массу перевозимых товаров и измеряется в тонно-километрах).

Стоимость дорог, которые придется построить заново, для простоты рассуждения в расчет не принимается. Предлагается читателям решить задачу самостоятельно.

Модели физического и аналогового типов являются материальным отражением реального объекта и тесно связаны с ним своими геометрическими, физическими и прочими характеристиками. Фактически процесс исследования моделей данного типа сводится к проведению ряда натурных экспериментов, где вместо реального объекта используется его физическая или аналоговая модель.

Часто процесс исследования значительно упрощается, если воспользоваться методом математического моделирования.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Бывает, что во время урока математики,
когда даже воздух стынет от скуки,
в класс со двора влетает бабочка…

А.П. Чехов «Шампанское»

Не то, что мните вы, природа:
Не слепок, не бездушный лик –
В ней есть душа, в ней есть свобода,
В ней есть любовь, в ней есть язык...

Ф.И. Тютчев

Философия (система идей, взглядов на мир, на место в нем человека; наука о наиболее общих законах развития природы, общества и мышления) написана в грандиозной книге – Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научится понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики.

Г. Галилей

– Слово «математика» происходит от древнегреческого **mathëmatikë** со значением наука, учение, знание, познание, а то, в свою очередь, восходит к глаголу, первоначальное значение которого «учусь через размышление». (Конфуций: «Учение без размышлений – тщетный труд, размышления без учения пагубны»).

«Можно поставить вопрос – в чем же смысл таких моделей? Ответ на него очень прост. Такие модели позволяют лицам определенной интеллектуальной настроенности понимать поведение системы лучше, чем если бы оно было изложено вербально. Это происходит, видимо, потому, что математический язык и, в частности, язык дифференциальных уравнений обладает очень высокой степенью общности. У ученого, владеющего этим языком, сразу же возникает множество ассоциаций с аналогичными, хорошо известными ему ситуациями, описываемыми такими же уравнениями. Математическая модель сразу же становится на свое место в системе тех представлений, которыми располагает ученый, мыслящий на языке

математики. Но все это вызывает страшное раздражение со стороны представителей гуманитарных наук, для которых язык математики все же остается лишь плохо выученным иностранным языком. Их точку зрения можно сформулировать так: зачем говорить и мыслить на неродном языке?»

(Налимов В.В. Теория эксперимента. – Физико-математическая библиотека инженера. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 280 с.)

Под математическим моделированием понимают изучение свойств объекта на математической модели. Его целью является определение оптимальных условий протекания процесса, управление им на основе математической модели и перенос результатов на объект. Математической моделью называется приближенное описание какого-либо класса явлений, объектов внешнего мира, выраженное с помощью математических понятий и символики.

Математическая модель реальной системы является ее формализованным описанием, позволяющим изучить систему математическими методами. Обычно она состоит из совокупности соотношений (уравнений, неравенств, логических условий, формул и т.д.), определяющих характеристики состояний системы в зависимости от ее параметров, входных сигналов, начальных и граничных условий, времени и др. Формализованное описание системы включает в себя содержательное описание и схему. Содержательное описание составляется на основании изучения теоретических основ процесса, имеющихся сведений о физической природе и количественных характеристиках элементарных явлений, происходящих в системе, о степени и характере взаимодействия между ними, о значении того или иного явления и т.д. Содержательное описание облегчает построение формализованной схемы реальной системы, которая позволяет разложить ее на простейшие элементы. Процессы, происходящие в этих элементах, как и взаимосвязь между ними, упрощаются. Это позволяет построить математическую модель реальной системы, для чего все имеющиеся сведения в виде таблиц или графиков записывают в виде соответствующих математических выражений.

Математическая модель в силу упрощения процессов, происходящих в элементах системы, не всегда полностью соответствует (адекватна) ей. Но даже и в этом случае количественные исследования математической модели позволяют получить качественное описание реальной системы.

На рисунке 2 дана общая схема проведения аналитического исследования.

Рис. 2. Общая схема математического моделирования

Обобщение сказанного показывает, что математическое моделирование включает три взаимосвязанных этапа:

1) составление математического описания изучаемого объекта;

2) выбор метода решения системы уравнений (неравенств) математического описания и реализация его в форме моделирующей программы;

3) установление соответствия (адекватности) модели объекту.

В настоящее время математическое моделирование является одним из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного исследования. Оно опирается на математику, физику, химию, биологию и многие другие научные дисциплины, играя синтезирующую роль.

Рассмотрим примеры некоторых математических моделей.

Простейшими такими моделями являются основные, базисные математические понятия типа производной и интеграла: понятие производной отображает общее свойство – скорость изменения какого-либо параметра изучаемого объекта, понятие интеграла – это математическая модель аддитивных физических или геометрических величин – длины линии, площади фигуры, объема тела, пути, массы, энергии и т.д.

Фактически все современные разделы физики посвящены построению и исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений.

Примером математического моделирования может служить процесс охлаждения тела и классическая механика точки И.Ньютона, с помощью которой можно описать движение любого материального объекта, размеры которого малы по сравнению с расстояниями, проходимыми телом. В последнем случае величинами, характеризующими состояние материального тела, являются координаты, скорость и ускорение его центра масс, затем углы поворота относительно трех фиксированных плоскостей и соответствующие угловые скорости и ускорения, далее, взаимные перемещения отдельных частей тела (например, собственные колебания, происходящие в веществе) и, наконец, координаты, скорости и ускорения отдельных молекул, атомов и элементарных частиц этого тела.

Однако хвататься за все сразу невозможно, поэтому на первой стадии идеализации (упрощения) тело считают точкой, т.е. пренебрегают его протяженностью. Тогда состояние будет полностью определяться координатами, заданными как функции времени, т.е. законом, с помощью которого можно вычислить положение тела для любого момента времени.

Движение должно подчиняться основным законам механики, и это указывает путь к решению задачи.

Второй закон динамики Ньютона гласит: «Изменение количества движения (устаревший, не рекомендуемый в физике термин; то же, что импульс материальной точки механической системы) пропорционально приложенной движущей силе, и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует» (перевод с латинского замечательного отечественного кораблестроителя и математика А.Н.Крылова). Математически это можно записать так:

$$\frac{d(mV)}{dt} = F, \tag{1}$$

где через $\frac{d(mV)}{dt}$ обозначается быстрота изменения импульса mV (m – масса частицы, V – скорость перемещения частицы) со временем, т.е. производная от импульса по времени.

В таком виде уравнение применимо к чему угодно. Конкретный его вид определяется правой частью – равнодействующей всех внешних сил, действующих на тело. Рассмотрим основные случаи, которые здесь могут представиться. Будем считать, что движение происходит по прямой линии, поэтому в дальнейшем не будем прибегать к векторным величинам.

Изменение импульса при постоянстве массы полностью определяется изменением скорости, поэтому

$$\frac{d(mV)}{dt} = m\,\frac{dV}{dt}. \tag{2}$$

1. Внешняя сила – сила сопротивления среды, в которой движется тело, – прямо пропорциональна скорости. Такая пропорциональность имеет место только при малых скоростях или в очень разреженных средах; при движении автомобиля сопротивление воздуха растет уже как квадрат скорости. Для первоначального предположения уравнение (математическая модель) будет таким:

$$m\,\frac{dV}{dt} = -\,kV \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}V = 0,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

2. Сила f, равнодействующая всех сил, приложенных к телу, постоянна. Можно написать:

$$m\,\frac{dV}{dt} = f \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} - \frac{f}{m} = 0. \tag{3}$$

3. Сила зависит от координаты x, $f = f(x)$. Уравнение будет таким:

$$m\,\frac{dV}{dt} = f(x). \tag{4}$$

4. Сила, как и в предыдущем случае, зависит от x, и, кроме того, присутствует сопротивление среды. Уравнение запишется так:

$$m\,\frac{dV}{dt} + kV - f(x) = 0. \tag{5}$$

5. Если добавить к сформулированным условиям внешнюю силу F, зависящую от времени, то получится уравнение

$$m\,\frac{dV}{dt} + kV - f\;\;x\;\; = F(t). \tag{6}$$

Во всех пяти примерах пришли к уравнениям, которые содержат неизвестную функцию (скорость, как функция времени), а также ее производные. Как известно, такие уравнения называются дифференциальными, ибо операция отыскания производной называется дифференцированием (более того, обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) – в уравнение входит функция одного аргумента). Решив эти ОДУ, т.е. найдя функции, им удовлетворяющие, установим, как движется тело в том или ином случае.

5. БЕСКОНЕЧНОЕ ЗАМЕДЛЕНИЕ

А она все падала и падала. Неужели
этому не будет конца?
Л. Кэрролл «Алиса в стране чудес»

Физика учит нас допрашивать
дифференциальное уравнение.
Акад. Л.И. Мандельштам

Рассмотрим уравнение, описывающее движение тела в среде, сопротивление которой движущемуся телу пропорционально скорости:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}V = 0, \text{ или } V' + \frac{k}{m}V = 0. \quad (1)$$

Иногда написанный закон изменения называется уравнением Мальтуса, так как предположительно первым его получил в 1798 г. английский экономист и священник Т.Р. Мальтус. Мальтус применил указанный закон к описанию демографической ситуации в масштабах всей планеты, предсказывая перенаселенность при относительной ограниченности средств существования людей: «для любой популяции (в том числе человеческой) верна закономерность: если ничто не сдерживает ее роста, то численность увеличивается по экспоненциальному закону (в терминологии Мальтуса, по геометрической прогрессии)». (Т. Мальтус «Опыт закона о народонаселении»).

Уравнение (1) – это обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{k}{m} \quad dt, \quad (2)$$

$$\ln V - \ln C = -\frac{k}{m}t, \quad (3)$$

где $C = \text{const} > 0$.

Потенцируя, находим:

$$V(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} , \quad (4)$$

то есть получаем общее решение исходного дифференциального уравнения. Оно содержит произвольную постоянную C. При любом конкретном значении C получается конкретная функция, удовлетворяющая уравнению, т.е. частное решение. Таким образом, общее решение включает в себя бесчисленное множество частных решений.

При рассмотрении определенной физической задачи обычно требуется найти частное решение – однозначно определить, как будет протекать такой-то процесс. Выделить из общего решения частное решение помогают начальные условия. В данном примере математическое условие, описывающее задание скорости тела в начальный момент времени движения тела $t = 0$, будет выглядеть так:

$$V(0) = V_0 = \text{const}. \tag{5}$$

Действительно, подставляя $t = 0$ в (4) и используя (5), придем к равенству $C = V_0$. Окончательный ответ (скорость как функцию времени в данном конкретном случае) получаем в виде

$$V(t) = V_0\, e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{6}$$

Это частное решение, соответствующее данным задачи. Именно по этому закону будет двигаться тело, имевшее начальную скорость V_0 и массу m при наличии сопротивления с коэффициентом сопротивления k.

Особенности этого движения видны наглядно, если изобразить функцию скорости графически (рис. 3).

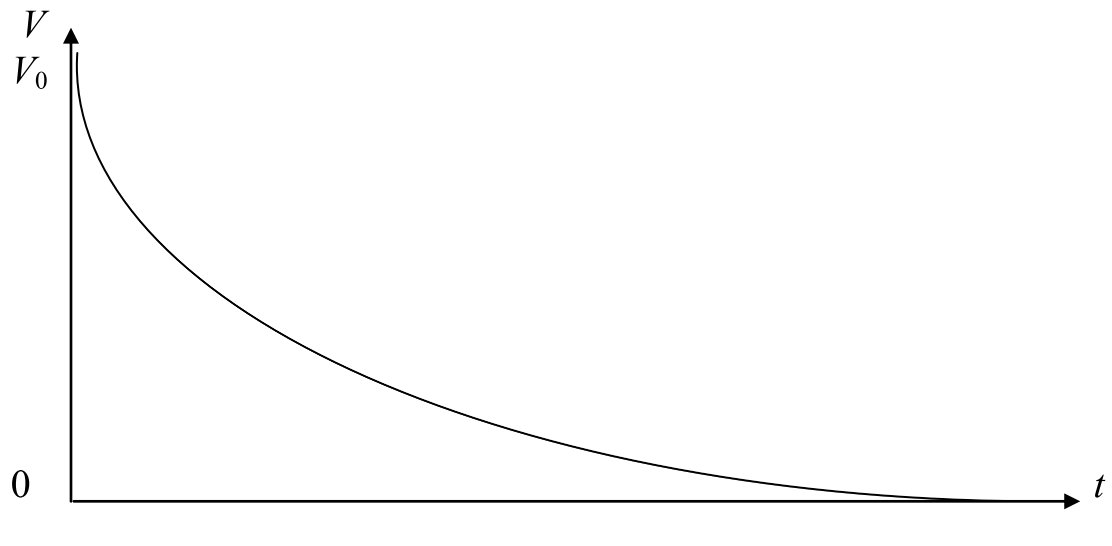

Рис. 3. График зависимости скорости движения тела от времени в среде с сопротивлением

Из рисунка ясно, что скорость становится со временем все меньше и меньше, но никогда не обратится в нуль. В идеальных условиях даже через тысячу лет после толчка лодка будет двигаться по воде, но, конечно ее движение будет совершенно незаметно для глаз.

Это – то, что можно сказать сразу, что лежит на поверхности. Более тонкие и интересные выводы можно сделать, рассмотрев аналитическое выражение для решения. Оно представляет собой показательную функцию с отрицательным показателем степени. Из курса алгебры известно, что основным свойством этой функции является следующее: ее значения в точках оси абсцисс, взятых на одинаковом расстоянии друг от друга, образуют убывающую геометрическую прогрессию (если нумеровать точки слева направо). Иными словами, через один и тот же промежуток времени скорость будет убывать в одно и то же число раз.

Отсюда следует поразительный вывод. К нему можно прийти, если учесть, что путь, пройденный телом в течение промежутка времени, заведомо меньше длины этого промежутка, умноженного на скорость тела в начале промежутка. Значит, общий путь, пройденный телом за бесконечное время, будет меньше суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, членами которой будут произведения из двух сомножителей: постоянной длины промежутка времени и образующей прогрессию скорости в начальной точке промежутка. Сколько бы времени ни двигалось тело, оно не уйдет дальше определенной точки, но, наряду с этим, никогда не остановится! (Парадокс Д'Аламбера).

Долог путь поучений, короток и успешен путь примеров
Сенека Младший

При изучении наук примеры полезнее правил
И. Ньютон

6. ЗАДАЧА НА ОХЛАЖДЕНИЕ ТЕЛ

Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач
Р. Декарт

Температура вынутого из печи хлеба в течение τ_1 = 20 мин падает от t_0 = 100 °С до t_1 = 60 °С (рис. 4). Температура охлаждающего воздуха t_c = 25 °С. Через какое время от момента начала охлаждения температура хлеба понизится до $t_к$ = 30 °С?

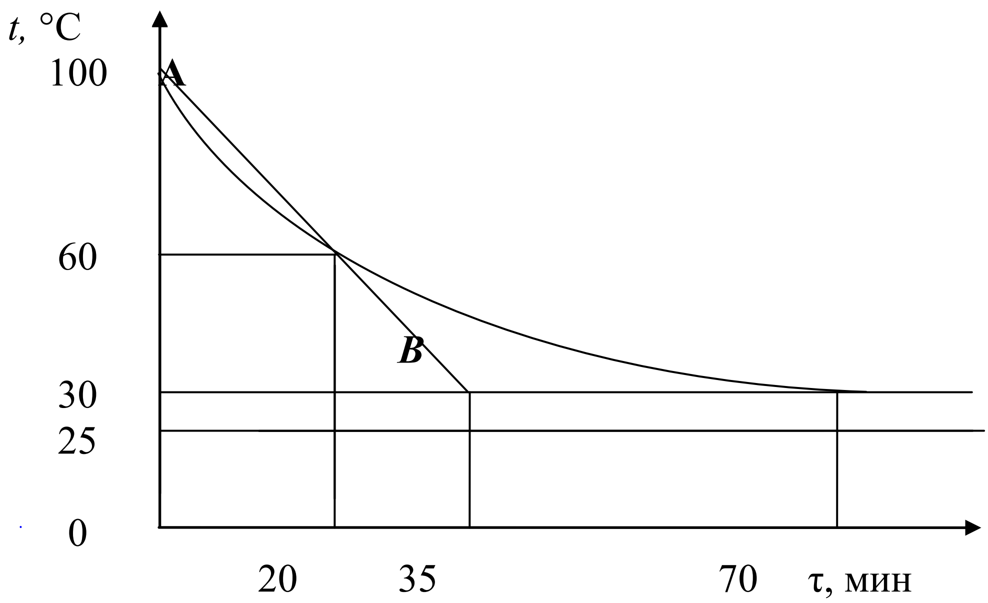

Рис. 4. Зависимость среднеобъемной температуры тела при его охлаждении от времени процесса

Решение.

Скорость охлаждения тела представляет собой понижение температуры тела $t = t(\tau)$ в единицу времени и выражается производной $\frac{dt}{d\tau}$. По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это процесс неравномерный. С изменением разности температур меняется и скорость охлаждения тела.

Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет

$$\frac{dt}{d\tau} = k\,(t - t_с), \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности, $t_с$ – температура среды.

Выражение (1) точнее следует называть не законом, а уравнением, формулой Ньютона, так как коэффициент k является сложной функцией многих переменных, он зависит от следующих факторов:

– скорости среды (жидкости, газа), обтекающей тело, ее плотности и вязкости, то есть переменных, определяющих режим течения жидкости;

– тепловых свойств жидкости (удельной теплоемкости, теплопроводности, коэффициента объемного расширения);

– тепловых свойств обтекаемого тела;

– геометрических параметров – формы и определяющих размеров, а также шероховатости поверхности тела.

Из этой сложной зависимости коэффициента пропорциональности k от многих параметров процесса следует, что простота уравнения (1) только кажущаяся. При его использовании трудности, связанные с определением количества тепла, передаваемого путем конвективного теплообмена, заключается в расчете величины k. В рассматриваемой задаче считаем коэффициент k постоянной величиной, которая должна быть задана непосредственно либо дополнительным условием, из которого коэффициент k может быть определен.

Уравнение (1) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Оно аналогично дифференциальному уравнению, описывающему бесконечное замедление тела, движущегося в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости. Пусть τ – время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим:

$$\frac{dt}{t - t_c} = k\,d\tau. \tag{2}$$

Интегрируя уравнение (2),

$$\frac{dt}{t - t_c} = k \quad d\tau, \tag{3}$$

получаем:

$$\ln(t - t_c) = k\,\tau + \ln A, \tag{4}$$

где A – произвольная положительная постоянная.

Из (4) следует общее решение уравнения (2):

$$t - t_c = A \cdot e^{k\tau}. \tag{5}$$

Постоянную A определяем из начального условия $t(0) = t_0$:

$$A = t_0 - t_c. \tag{6}$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из данного в задаче дополнительного условия:

при $\tau = \tau_1$ $t(\tau_1) = t_1$.

Получаем:

$$t_1 - t_c = (t_0 - t_c)\, e^{\,k \cdot \tau_1}. \tag{7}$$

Откуда

$$k = \frac{1}{\tau_1} \ln \frac{t_1 - t_c}{t_0 - t_c}. \tag{8}$$

Окончательное решение уравнения (1), то есть закон охлаждения хлеба в условиях задачи, принимает вид:

$$t(\tau) = t_c + (t_0 - t_c)\left(\frac{t_1 - t_c}{t_0 - t_c}\right)^{\frac{\tau}{\tau_1}}. \tag{9}$$

Таким образом, получили зависимость температуры тела от заданных начальной его температуры и температуры окружающей среды, а также от длительности процесса охлаждения. Необходимо отметить, что в данном случае можно определить только усредненную по объему температуру тела, но невозможно найти, например, температуру в центре тела либо в какой-нибудь другой его точке.

Из закона изменения температуры (9) находим искомое время $\tau_к$, необходимое для охлаждения хлеба от начальной его температуры t_0 до конечной $t_к$:

$$\tau_к = \tau_1 \frac{\ln\frac{t_к - t_с}{t_0 - t_с}}{\ln\frac{t_1 - t_с}{t_0 - t_с}} \approx 71 \text{ мин.} \qquad (10)$$

Замечание: если считать охлаждение тела происходящим по линейному закону (прямая АВ на рис. 4), получим искомое время охлаждения, равное 35 минутам, что, очевидно, ошибочно и недопустимо.

7. НАХОЖДЕНИЕ ЗАКОНА НАГРЕВА ТЕПЛООБМЕННИКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ПРИТОКЕ ТЕПЛОТЫ

Теплообменники обеспечивают передачу теплоты между двумя или большим числом потоков теплоносителей, проходящих через аппарат. Основной характеристикой конструкции теплообменника является тип относительного движения потоков теплоносителей, взаимная геометрия этих течений.

Наиболее общие типы конструкций течений:

1) противоток (два теплоносителя движутся параллельно друг другу, но в противоположных направлениях, рис. 5); противоточные теплообменники наиболее эффективны, поскольку обеспечивают наилучшее использование располагаемой разности температур, в них также может быть достигнуто наибольшее изменение температуры каждого теплоносителя;

2) параллельное однонаправленное течение;

3) перекрестный ток;

4) перекрестный ток с противотоком и другие.

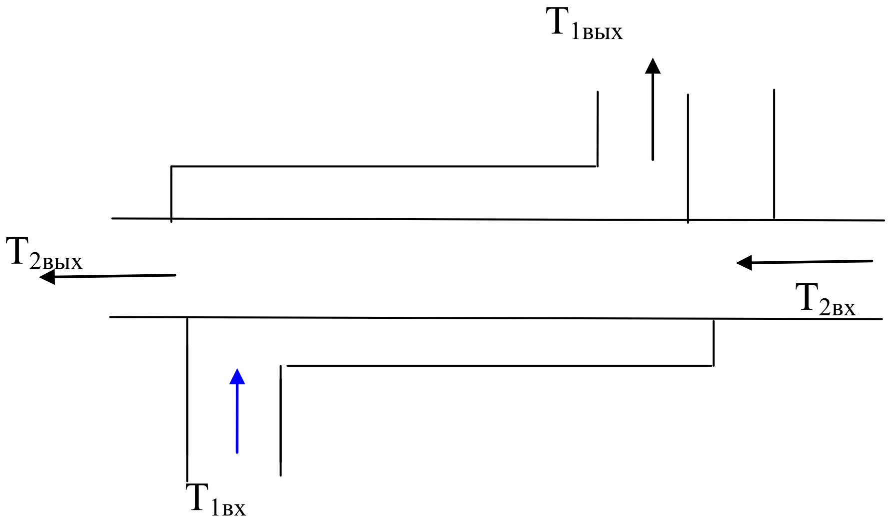

Рис. 5. Схема движения потоков теплоносителей:
1 – одиночная труба относительно малого диаметра, расположенная внутри трубы большого диаметра 2; один теплоноситель течет во внутренней трубе (T_2), другой – в кольцевом пространстве 2 между двумя трубами (T_1); Т – температура, вх – условия на входе, вых – условия на выходе теплообменника

Для того чтобы рассчитать характеристики теплообменника, необходимо задать схему движения теплоносителей в нем, установить расходы теплоносителей по выбранным направлениям и определить значения термических сопротивлений передаче теплоты от одного теплоносителя другому в каждой точке объема теплообменника. После этого отыскание распределения температуры в отдельных потоках является чисто математической операцией.

Задача 1.

Рассмотрим задачу нахождения простейшего закона нагрева теплообменника при постоянном притоке теплоты.

Решение.

Пусть T – температура наружной поверхности теплообменника;

dT – изменение температуры отопительного аппарата в течение времени dt;

m – масса аппарата;

c – удельная теплоемкость материала аппарата;

α – коэффициент теплоотдачи (теплообмена) от поверхности аппарата;

Q – количество теплоты, поступающей в теплообменник в единицу времени;

S – поверхность теплообмена (теплоотдачи) аппарата;

T_1 – наружная температура (температура среды);

$T - T_1$ – превышение наружной температуры теплообменника над температурой среды.

Требуется найти закон $T(t)$.

В течение времени dt происходят следующие процессы:

а) в теплообменник поступает количество теплоты, равное Qdt;

б) количество теплоты в аппарате изменяется на величину, равную $mcdT$;

в) отдается в окружающую среду количество теплоты, равное величине $\alpha S\,(T–T_1)dt$.

Суммируя эти количества, получаем уравнение теплового баланса (применение закона сохранения энергии к тепловым процессам):

$$mcdT + \alpha S(T–T_1)dt = Qdt, \tag{1}$$

или

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha S}{mc}(T–T_1) = \frac{Q}{mc}\,. \tag{2}$$

Полагая $a = \alpha S/(mc)$ и $b = Q/(mc)$, получаем дифференциальное уравнение процесса (2) в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} + a(T–T_1) = b. \tag{3}$$

Разделяем переменные, преобразуя при этом левую часть уравнения (3) так, чтобы в числителе получился дифференциал знаменателя:

$$-\frac{1}{a}\,\frac{d[b-a(T-T_1)]}{b-a(T-T_1)} = dt. \tag{4}$$

Интегрируя (4), получаем:

$$\ln[b - a(T - T_1)] - \ln C_1 = -at\,, \tag{5}$$

где $C_1 = \text{const} > 0$, откуда следует

$$T - T_1 = \frac{b}{a} + Ce^{-at},$$

где $C = -\frac{C_1}{a}$.

Используя начальное условие $T = T_1$ при $t = 0$, получаем

$$C = -b/a.$$

Тогда уравнение процесса примет вид:

$$T - T_1 = \frac{b}{a}(1 - e^{-at}), \tag{6}$$

или, подставляя значения a и b, имеем:

$$T = T_1 + \frac{Q}{\alpha S}(1 - e^{-\frac{\alpha S}{mc}t}). \tag{7}$$

Рассмотрим этот закон ((7) или (6)).

При $t \to \infty$ $T \to T_1 + b/a = T_к$, где $T_к$ – конечная температура теплообменника.

Уравнение (6) может быть записано в виде

$$T(t) = T_к - \frac{b}{a} e^{-at}. \tag{8}$$

Если $T_1 = 0$, то $T_к = b/a$ и (8) будет

$$T = T_к(1 - e^{-at}). \tag{9}$$

Подставляя в уравнение (9) значение $t = 1/a = \tau$, которое называется постоянной времени, получим:

$$T = T_к(1 - e^{-1}) = 0{,}63\ T_к. \tag{10}$$

Задача 2.

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна начальной его массе x. Первоначальная масса фермента a в течение часа удвоилась. Во сколько раз она увеличится через 3 часа?

Решение.

По условию задачи дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad (1)$$

где t – время, k – коэффициент пропорциональности.

(1) – уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение

$$x = C\, e^{kt}, \qquad (2)$$

где C = const >0.

Из начального условия (при $t = 0$ $x = a$) имеем C = a. Поэтому частное решение имеет вид

$$x = a\, e^{kt}. \qquad (3)$$

Коэффициент k определяется из дополнительного условия: при t = 1ч $x = 2a$.

При этих условиях из (3) следует $k = \ln 2\ \frac{1}{ч}$.

Таким образом, окончательно получаем закон, которому подчиняется данный процесс, в виде

$$x = a\, 2^{\tau}, \qquad (4)$$

где $\tau = \frac{t}{1ч}$.

Из (4) получаем требование задачи: при t = 3ч $x = 8\,a$, т. е. спустя 3 часа от начала процесса масса фермента увеличится в 8 раз.

Задача 3 для самостоятельного решения. Пусть при постоянной температуре скорость растворения твердого тела в жидкости пропорциональна массе этого вещества, еще могущего раствориться до полного насыщения жидкости. Найти закон зависимости массы растворившегося вещества от времени.

Ответ: $x = P\,(1 - e^{-kt})$,

где x – масса растворившегося вещества; P – масса вещества, дающая насыщенный раствор; t – время; k – эмпирический коэффициент пропорциональности.

Задача 4.

Найти закон распределения скорости по сечению круглой цилиндрической горизонтальной трубы радиусом R при равномерном движении несжимаемой жидкости в ламинарном режиме.

Решение.

Рассмотрим ламинарное (струйчатое) течение несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе (рис. 6): R = const; плотность жидкости ρ = const; число Рейнольдса Re = $\frac{Vd}{\nu} < 2300$; V – скорость жидкости; $d = 2R$ – диаметр трубы; ν – коэффициент кинематической вязкости.

Выделим сечениями 1 – 1 и 2 – 2 объем движущейся жидкости длиной L (рис. 6).

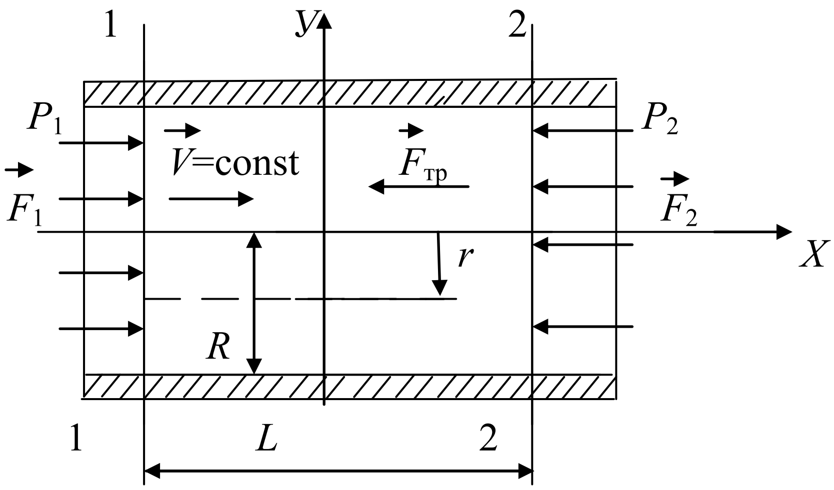

Рис. 6. Расчетная схема задачи

Обозначим давление жидкости в плоскости сечений 1–1 и 2–2 соответственно через P_1 и P_2.

Внутри жидкости выделим концентрический слой радиусом r.

Пусть сила трения со стороны соседних струек на выделенную равна $F_{тр}$.

Уравнение равновесия для определенной таким образом элементарной струйки в проекции на ось X будет

$$F_1 - F_2 - F_{тр} = 0, \tag{1}$$

где F_1, F_2 – силы давления в соответствующих сечениях:

$F_1 = P_1\omega$; $F_2 = P_2\,\omega$;

площадь этих сечений $\omega = \pi r^2$;

площадь трения боковой поверхности выделенного концентрического слоя $S = 2\pi rL$;

$F_{тр}$ – сила трения на этой поверхности.

Согласно закону Ньютона для внутреннего трения

$$F_{тр} = -\mu S \frac{dV}{dr},$$

где $\mu = \nu\rho$ – коэффициент динамической вязкости жидкости. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\pi r^2 P_1 - \pi r^2 P_2 + \mu\, 2\pi rL \frac{dV}{dr} = 0,$$

или

$$\frac{P_1 - P_2}{L} + \frac{2\mu}{r}\frac{dV}{dr} = 0. \qquad (2)$$

Введем обозначение $\tau = \frac{F_{тр}}{S}$, то есть $\tau_{yx} = -\mu\frac{dV}{dr}$, где $\tau = \tau_{yx}$ – касательные напряжения сдвига, возникающие на границе слоев жидкости, движущихся относительно друг друга. Первый индекс у касательных напряжений обозначает ориентацию площадки, в которой действуют касательные напряжения, а второй индекс определяет направление действия этих напряжений.

Тогда из формулы (2) имеем

$$\tau_{yx} = \frac{P_1 - P_2}{L}\frac{r}{2}. \qquad (3)$$

При равномерном установившемся движении жидкости $\frac{P_1 - P_2}{L}$ = const, поэтому из формулы (3) следует линейная зависимость касательного напряжения сил трения τ от r: при $r = R$, $\tau = \tau_{max}$; при $r = 0$ $\tau = 0$.

Разделяя переменные, представим уравнение (2) как

$$dV = -\frac{P_1 - P_2}{L}\frac{rdr}{2\mu},$$

общее решение которого будет

$$V = -\frac{P_1 - P_2}{4\mu L} r^2 + C. \qquad (4)$$

Поскольку при $r = R$ $V = 0$, то из уравнения (4) постоянная интегрирования $C = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} R^2$ и скорость потока на любом радиусе по сечению определяется из выражения

$$V = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} (R^2 - r^2), \quad (5)$$

которое является искомым законом распределения скорости жидкости по сечению круглой цилиндрической горизонтальной трубы.

Из уравнения (5) находим максимальную скорость несжимаемой жидкости (скорость на оси трубы, когда $r = 0$):

$$V_{\max} = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} R^2. \quad (6)$$

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ ВОЗДУХА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЫСОТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

При равновесном состоянии газа хаотическое тепловое движение его молекул приводит к тому, что газ равномерно распределяется по всему занимаемому им объему, то есть в каждой единице объема в среднем содержится одинаковое число молекул. Однако, если газ находится в поле внешних сил, то распределение его молекул по занимаемому им объему может быть и неоднородным.

Рассмотрим газ, находящийся в поле сил тяжести.

Обозначим высоту над определенным уровнем (например, моря) через h, давление воздуха через p. Задача состоит в том, чтобы отыскать функцию $p = p(h)$, описывающую зависимость давления от высоты (рис. 7).

Выделим мысленно в атмосфере вертикальный призматический столб с площадью поперечного сечения S, равной единице.

Давление на горизонтальное основание призмы площадью S, находящееся на высоте h, определяется весом столба воздуха над сечением. Проведем второе горизонтальное сечение на высоте $(h + \Delta h)$.

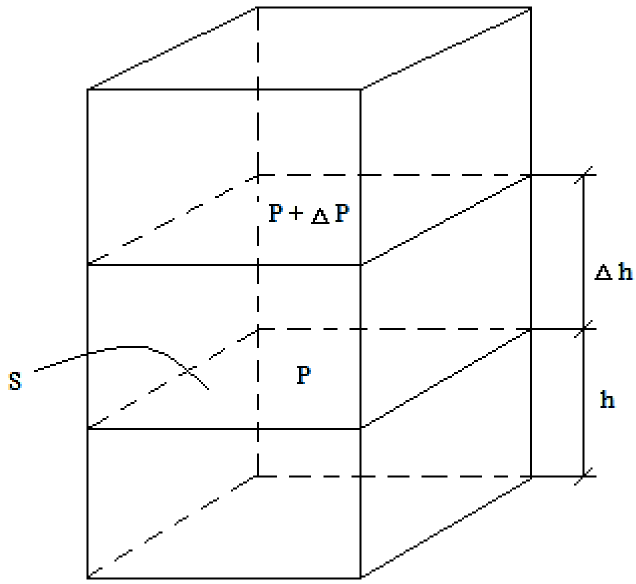

Рис. 7. К задаче распределения атмосферного давления по высоте

Давление в этом сечении будет меньше на величину Δp, равную весу воздуха в столбе между двумя сечениями. Поэтому можно написать:

$$\Delta p = p(h + \Delta h) - p(h) = -\rho g \Delta h, \tag{1}$$

где ρ – плотность воздуха на высоте h, g – ускорение свободного падения ($\rho g = \gamma$ – удельный вес воздуха на высоте h).

При условиях, близких к нормальным (то есть при давлении порядка 10^5 Па и температурах, близких к 0 °C), воздух довольно хорошо подчиняется уравнению состояния идеального газа $\rho = \frac{\mathrm{M}p}{\mathrm{R}T}$, где M – молярная масса газа (воздуха); R – молярная газовая постоянная (или просто газовая постоянная), $\mathrm{R} = 8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$; T – термодинамическая температура.

Подставляя в (1) выражение для ρ из последнего уравнения, получим соотношение

$$\Delta p = -\frac{\mathrm{M}pg}{\mathrm{R}T}\Delta h = -k\,p\,\Delta h, \tag{2}$$

где $k = \frac{\mathrm{M}g}{\mathrm{R}T}$ – коэффициент пропорциональности.

Равенство (2) является неточным: здесь предположено, что во всех сечениях между h и $h + \Delta h$ давление постоянно и равно p. На самом же деле давление в этих сечениях различно и падает с увеличением h. Однако функцию $p = p(h)$ естественно предположить непрерывной, поэтому ошибка равенства (2) невелика и будет тем меньше, чем меньше величина Δh. Если разделить обе части (2) на Δh и перейти к пределу при $\Delta h \to 0$, то ошибка в нем также будет стремиться к нулю, и получится уже точное равенство

$$\frac{dp}{dh} = -kp. \tag{3}$$

Равенство (3) – обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее неизвестную (искомую) функцию $p(h)$ и ее производную. Решением этого уравнения и будет функция, выражающая зависимость давления воздуха p от высоты h, то есть $p(h)$. Уравнение (3) – известное уже по вышерассмотренным задачам – уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение

$$p = \mathrm{C}\, e^{-kh}, \tag{4}$$

где С – произвольная постоянная интегрирования.

Здесь уместно напомнить мысль В.И. Ленина из его работы «Материализм и эмпириокритицизм»:

«Единство природы обнаруживается в поразительной аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям знаний».

При решении уравнения (3) пренебрегли зависимостью g от h (на высотах до 10 км от поверхности Земли), а также рассмотрен случай, когда температура с высотой не изменяется, то есть атмосфера изотермическая (по сравнению с температурой, равной примерно 300 К, относительное изменение температуры невелико).

Для того, чтобы достичь полной определенности, необходимо знать С, что достигается при каком-либо значении h. Положив $h = 0$, получим $\mathrm{C} = p_0$, где p_0 – атмосферное давление на высоте, принятой за начало отсчета (например, уровень моря).

Таким образом, для изотермической атмосферы зависимость давления от высоты определяется формулой

$$p = p_0\, e^{-\frac{\mathrm{M}gh}{RT}}, \tag{5}$$

которая называется <u>барометрической формулой</u>.

Формула (5) позволяет определять довольно точно высоту, измеряя давление. Предназначенный для этой цели проградуированный в значениях высоты барометр называется альтиметром.

Преобразуем показатель степени в формуле (5), используя следующие равенства

$$\mathrm{M} = m\,N_{\mathrm{A}} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{R}/N_{\mathrm{A}} = k,$$

где $N_{\mathrm{A}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная (число) Авогадро, m – масса молекулы; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Из последних равенств следует, что $\mathrm{M}/\mathrm{R} = m/k$.

Кроме того, учтем, что давление $p = nkT$, $p_0 = n_0kT$, где n – число молекул в единице объема газа, т. е. концентрация молекул газа на высоте h, n_0 – концентрация молекул на высоте $h_0 = 0$.

Таким образом, барометрическая формула преобразуется в соотношение

$$n = n_0\, e^{-\frac{mgh}{kT}}. \qquad (6)$$

На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии:

$$\varepsilon_{\text{п}} = mgh. \qquad (7)$$

Следовательно, распределение молекул по высоте является вместе с тем и распределением их по значениям потенциальной энергии.

С учетом (7) формула (6) записывается в виде важной физической закономерности, называемой распределением Больцмана:

$$n = n_0\, e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}}. \qquad (8)$$

9. ИМПУЛЬСНОЕ ВЫСОКОВОЛЬТНОЕ РАЗМОРАЖИВАНИЕ ПИЩЕВОГО МАТЕРИАЛА

В настоящее время в пищевой промышленности актуальна проблема размораживания продуктов. Например, в России доля продукции из замороженной рыбы составляет более 70 %. При этом чем дольше длится процесс размораживания, тем больше структура тканей отличается по качеству от первоначального состояния. Поэтому эффективными являются разработанные аспирантом института холода и биотехнологий НИУ ИТМО О.В. Бычихиным способ и устройство разрушения замороженного брикета рыбы на тушки с применением электрогидравлического удара при подготовке к размораживанию без снижения потребительских свойств продукта. Принцип действия электрогидравлических установок основан на применении электрогидравлического эффекта Л.А. Юткина, который представляет собой высоковольтный импульсный разряд электрического тока при перегорании проволочки в жидкости, сопровождающийся выделением энергии в виде ударных и акустических волн. В электрогидравлическом эффекте используется энергия, накопленная в конденсаторной батарее. В результате электрического разряда, проходящего в жидкой среде, формируется канал, представляющий собой парогазовую полость, расширение которой сопровождается волнами давления и скоростным потоком, образующим мощный электрогидравлический удар, разрушающий ледяные мостики в замороженном брикете рыбы.

Компоновка технологической установки для разрушения брикетов замороженной рыбы с использованием электрогидравлического удара предусматривает размещение источника возбуждаемых колебаний от поверхности размораживаемого брикета на расстоянии, соизмеримом с длиной самого источника колебаний. Это позволяет в первом приближении считать рассматриваемую задачу распространения колебаний одномерной, предполагая, что вне зоны, ограниченной вертикалями *a* и *b*, влияние электрогидравлического удара ничтожно мало (рис. 8)

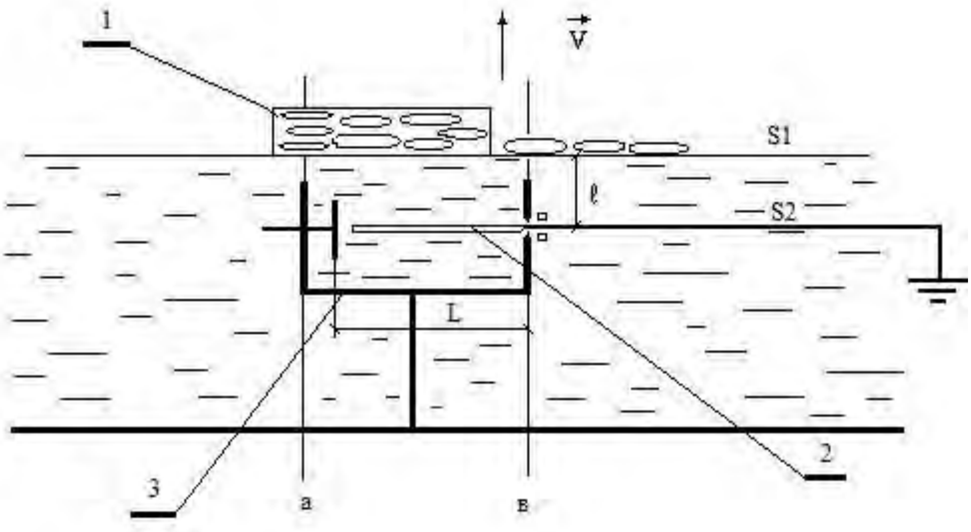

Рис. 8. Схема зоны электрогидравлического воздействия на брикет замороженной рыбы:
1 – брикет замороженной рыбы, *2* – взрывающаяся проволочка, *3* – цилиндрическая разрядная камера

В результате использования теоремы об изменении импульса (количества движения) и уравнения неразрывности в предположении, что скачок уплотнения при электрогидравлическом ударе сопровождается образованием парогазовой смеси, и что среда в рассматриваемом выделенном объеме отвечает условиям адиабатного расширения, выводится известное уравнение Гюгонио

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{k+1\ \rho_2 - \ k-1\ \rho_1}{k+1\ \rho_1 - \ k-1\ \rho_2} = \varkappa, \tag{1}$$

где P_1 и P_2 – давления на плоскостях S_1 и S_2 соответственно; k – показатель адиабаты; ρ_1, ρ_2 – плотность жидкости в сечениях S_1 и S_2, $S_1 = S_2 = S$ – площадь сечения.

Нахождение давления P_2 может быть обеспечено уточнением процесса, происходящего в плоскости S инициирования волны, за счет учета ускорения расширения парогазовой полости:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{1}{m}\frac{\pi L^2(P_2-P_1)}{4} - \ mg, \tag{2}$$

(основное уравнение динамики), где r – радиус парогазовой полости, м

$$r_0 < r < l, \text{ при } \tau = 0 \quad r = r_0; \tag{3}$$

τ – время расширения парогазовой полости текущее, с,

$$0<\tau<\tau_к=\frac{l}{V}; \text{ при } \tau = \tau_к \quad r = l; \tag{4}$$

L – длина взрываемой проволочки, м;
m – масса брикета замороженной рыбы, кг;
g – ускорение свободного падения, м/с^2;
V – скорость ударной волны, м/с;
r_0 – радиус проволочки, м;
l – расстояние между плоскостями, м.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (2) с учетом условий (3) и (4) получаем в виде

$$r - r_0 = \frac{l-r_0}{\tau_к}\tau + \frac{\tau(\tau-\tau_к)}{2}\ \ \frac{\pi L^2(P_2-P_1)}{4m} - g\ . \tag{5}$$

При использовании уравнения Гюгонио (1) окончательное решение для нахождения искомого давления будет

$$P_2 = \frac{4m}{(1-\frac{1}{\varkappa})\pi L^2}\left[\left(r - r_0 - \frac{l - r_0}{\tau_к}\tau\right)\frac{2}{\tau(\tau-\tau_к)} + g\right]. \qquad (6)$$

Выражение (6) является математической моделью интенсивного разрушения замороженного брикета рыбы импульсным высоковольтным разрядом и может быть использовано для количественной оценки давления на нижнюю поверхность брикета рыбы. Это давление должно превышать прочность ледяных мостиков ($\sigma_{лд}$), но быть меньше прочности мышц рыбы ($\sigma_{рб}$): ($\sigma_{лд} < P_2 < \sigma_{рб}$), (5 МПа $< P_2 <$ 30 МПа).

Подставив известные значения m, r, r_0, L, l, τ, $\tau_к$, $\varkappa$, g в уравнение (6), получим графическую зависимость давления ударной волны на нижнюю поверхность брикета в зависимости от времени расширения парогазовой полости (рис. 9)

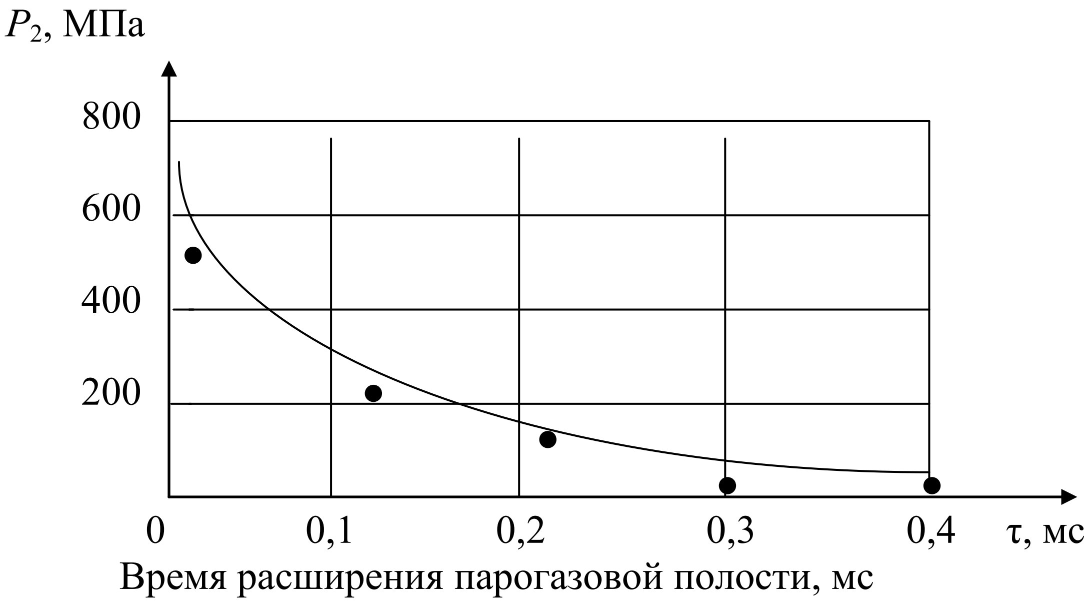

Рис. 9. Оценка давления на нижнюю поверхность брикета рыбы

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрены основные определения и задачи моделирования, классификация моделей и некоторые частные вопросы математического моделирования, а также отдельные примеры и задачи теоретического описания основных типов процессов (механических, тепломассообменных), характерных для пищевых и холодильных машин и технологий. Этими вопросами не исчерпывается, разумеется, вся проблема математического моделирования процессов энерго- и массообмена, осуществляемых в соответствующих технологиях и аппаратах, однако такое подробное рассмотрение конкретных практикоориентированных примеров является хорошей методической основой для решения любых задач, которые ставит отрасль перед выпускником высшей школы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлов В.В.**, **Селевцов А.Л.** Математическое моделирование машин и аппаратов пищевых производств. Конспект лекций. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2003. – 55 с.

2. **Закгейм А.Ю.** Введение в моделирование химико-технологических процессов. – М.: Химия, 1982. – 288 с.

3. **Кафаров В.В.**, **Глебов М.Б.** Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. – 440 с.

4. **Ашихмин В.Н., Гитман М.Б., Келлер И.Э.** и др. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под. ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.

5. **Самарский А.А., Михайлов А.П.** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

6. **Батунер Л.М., Позин М.Е.** Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824 с.

7. **Пономарев К.К.** Составление дифференциальных уравнений. Минск.: Вышэйш. шк., 1973. – 560 с.

8. **Кудашов В.Н., Рыков В.А., Тестов Ю.Н.** Элементы математической физики. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2006. – 35 с.

9. **Алексеев Г.В., Вороненко Б.А., Лукин Н.И.** Математические методы в пищевой инженерии: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2012. – 176 с.

10. **Касаткин А.С.** Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1971. – 784 с.

11. **Смирнова Г.П., Смирнов А.А., Буркацкая О.А.** Сравнительный анализ развития малого предпринимательства в СЗФО РФ. – 2011.

12. **Антуфьев В.Т., Вороненко Б.А., Бычихин О.В., Пеленко В.В.** Количественная оценка давления на поверхность брикета замороженной рыбы при импульсном высоковольтном разряде // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: «Процессы и аппараты пищевых производств». 2013. № 2. С. 13–16.

СОДЕРЖАНИЕ

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

Институт холода и биотехнологий является преемником Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ), который в ходе реорганизации (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 2209 от 17 августа 2011г.) в январе 2012 года был присоединен к Санкт-Петербургскому национальному исследовательскому университету информационных технологий, механики и оптики.

Созданный 31 мая 1931года институт стал крупнейшим образовательным и научным центром, одним их ведущих вузов страны в области холодильной, криогенной техники, технологий и в экономике пищевых производств.

В институте обучается более 6500 студентов и аспирантов. Коллектив преподавателей и сотрудников составляет около 900 человек, из них 82 доктора наук, профессора; реализуется более 40 образовательных программ.

Действуют 6 факультетов:

- холодильной техники;
- пищевой инженерии и автоматизации;
- пищевых технологий;
- криогенной техники и кондиционирования;
- экономики и экологического менеджмента;
- заочного обучения.

За годы существования вуза сформировались известные во всем мире научные и педагогические школы. В настоящее время фундаментальные и прикладные исследования проводятся по 20 основным научным направлениям: научные основы холодильных машин и термотрансформаторов; повышение эффективности холодильных установок; газодинамика и компрессоростроение; совершенствование процессов, машин и аппаратов криогенной техники; теплофизика; теплофизическое приборостроение; машины, аппараты и системы кондиционирования; хладостойкие стали; проблемы прочности при низких температурах; твердотельные преобразователи энергии; холодильная обработка и хранение пищевых продуктов; тепломассоперенос в пищевой промышленности; технология молока и молочных продуктов; физико-химические, биохимические и микробиологические основы переработки пищевого сырья; пищевая технология продуктов из растительного сырья; физико-химическая механика и тепло-и массообмен; методы управления технологическими процессами; техника пищевых производств и торговли; промышленная экология; от экологической теории к практике инновационного управления предприятием.

В институте создан информационно-технологический комплекс, включающий в себя технопарк, инжиниринговый центр, проектно-конструкторское бюро, центр компетенции «Холодильщик», научно-образовательную лабораторию инновационных технологий. На предприятиях холодильной, пищевых отраслей реализовано около тысячи крупных проектов, разработанных учеными и преподавателями института.

Ежегодно проводятся международные научные конференции, семинары, конференции научно-технического творчества молодежи.

Издаются журнал «Вестник Международной академии холода» и электронные научные журналы «Холодильная техника и кондиционирование», «Процессы и аппараты пищевых производств», «Экономика и экологический менеджмент».

В вузе ведется подготовка кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по 11 специальностям.

Действуют два диссертационных совета, которые принимают к защите докторские и кандидатские диссертации.

Вуз является активным участником мирового рынка образовательных и научных услуг.

www.ihbt.edu.ru
www.gunipt.edu.ru

Вороненко Борух Авсеевич
Крысин Анатолий Григорьевич
Пеленко Валерий Викторович
Цуранов Олег Алексеевич

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Редактор
Р.А. Сафарова

Компьютерная верстка
Д.Е. Мышковский

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 14.09.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,56. Печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 2,56
Тираж 50 экз. Заказ № С 49

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
Институт холода и биотехнологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9