7. МОДЕЛИ «ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД» ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Определение 7.1. (О7.1) Динамическим объектом (объектом управления) называется восьмикомпонентный макровектор

$$\sum = \{U, X, Y, \Omega, \Gamma, \mathrm{T}, \lambda, \delta\}, \tag{7.1}$$

где U – множество мгновенных значений r-мерных входных (управляющих) воздействий $U \subset R^r$; X – множество n-мерных состояний $X \subset R^n$; Y – множество мгновенных значений m-мерных выходов $Y \subset R^m$; T – множество моментов времени, образующих интервал управления и наблюдения; $\Omega = \{U \times T\}$ – множество допустимых входных воздействий; $\Gamma = \{Y \times T\}$ – множество выходных величин; $\lambda : X \times T \times U \times T \Rightarrow X$ – функция перехода объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ в последующее состояние x в момент t при помощи входного воздействия $U \times (\tau, t), (\tau, t) \in T; \delta : X \times T \times U \times T \Rightarrow Y$ – функция выхода объекта, которая определяет правило получения мгновенного значения выхода Y в момент $t \in T$ при переходе объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ под воздействием входного воздействия $U \times (\tau, t)$, $(\tau, t) \in T$.

В дальнейшем будем пользоваться редуцированным определением динамического объекта, опуская описание множеств Ω и Γ, т.е. определять динамический объект как шестикомпонентный макровектор

$$\sum = \{U, X, Y, T, \lambda, \delta\}. \tag{7.2}$$

В зависимости от структуры множеств и функций λ и δ все динамические объекты делятся на непрерывные динамические объекты (НДО); дискретные динамические объекты (ДДО); динамические объекты над конечными полями Галуа (конечные автоматы).

Определение 7.2 (О7.2). *Непрерывные динамические объекты (НДО)* характеризуются бесконечностью множеств U, X и Y и континуальностью множеств моментов времени управления и наблюдения, $T = \{\, t : t_0 \le t \le t_k \}$.

Функции перехода (λ) и выхода (δ) в непрерывных динамических объектах задаются в следующей форме:

$$\lambda : \dot{x}(t) = \lambda[x(t), u(t)], \tag{7.3}$$

$$\delta : y(t) = \delta[x(t), u(t)], \tag{7.4}$$

где $x \in X \subset R^n, u \in U \subset R^r, y \in Y \subset R^m$, $\dot{x}(t) = \dfrac{d}{dt} x(t)$.

Определение 7.3 (О7.3). *Дискретные динамические объекты*

(ДДО) характеризуются той же, что и в непрерывном случае, структурой множеств U, X и Y, но множество моментов времени управления и наблюдения T становится дискретным (счетным) так, что $T = \{t : t = t_0 + k\Delta t, k = \overline{1, N}\}$, где Δt есть интервал дискретности, $N = (t_k - t_0)/\Delta t$ – максимальное число дискретных моментов времени управления и наблюдения на T. Если время на интервале управления и наблюдения измерять в числе k интервалов дискретности Δt, то T может быть задано в форме

$$T = \{k : k = k_0 + i, i = \overline{0, N}\}.$$

Функции перехода λ и выхода δ в дискретных динамических объектах управления задаются в следующей форме:

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \tag{7.5}$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \tag{7.6}$$

В выражениях (7.5) и (7.6) время t выражено в числе k интервалов дискретности длительности Δt или, что то же самое, в числе тактов управления (наблюдения).

Определение 7.4 (О7.4). *Конечные автоматы (КА)*. Если мощности множеств входов U, состояний X и выходов Y конечны, а множество моментов времени управления и наблюдения дискретно (счетно) так, что выраженное в числе интервалов дискретности (тактов) оно записывается в виде $T = \{k : k = k_0 + i, i = \overline{0, N}\}$, то такой дискретный динамический объект называется *конечным автоматом (КА)*.

При этом векторные компоненты модельного представления КА

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_r)^T \in U;$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in X;$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T \in Y,$$

характеризуются принадлежностью их элементов простому полю Галуа $GF(p)$

$$u_i, x_j, y_l \in GF(p) = \{0, \overline{p-1}\},\ i = \overline{1, r},\ j = \overline{1, n},\ l = \overline{1, m}.$$

В силу конечности простого поля Галуа мощности множеств U, X и Y также конечны и характеризуются значениями $[U] = p^r, [X] = p^n, [Y] = p^m$. В большинстве практических случаев характеристика p простого поля Галуа принимает значение $p=2$ так, что $GF(p) = GF(2) = \{0,1\}$, при этом конечные автоматы становятся двоичными динамическими системами (ДДС), имеющими две реализационные версии: *нелинейные* ДДС (НДДС) и *линейные* ДДС (ЛДДС).

В теории конечных автоматов векторы входа u, состояния x и выхода y принято называть кодовыми последовательностями, кодовыми словами или просто кодами: код входа u, код состояния x, код выхода y.

Функции перехода и выхода λ и δ конечных автоматов формально задаются в виде (7.5)–(7.6):

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \tag{7.7}$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \tag{7.8}$$

Аналитическое представление функций λ и δ в форме (7.7) и (7.8) при p=2 для НДДС – версии задается с использованием аппарата *булевых функций*, который опирается на исходное задание функций λ и δ в форме графов переходов и выходов автомата, а также их табличных аналогов. Аналитическое представление функций λ и δ в форме (7.7) и (7.8) при p=2 для ЛДДС – версии конструируется с использованием аппарата D - преобразования последовательностей над простым полем Галуа, позволяющего построить модельные представления в форме передаточных функций и векторно-матричных описаний «вход-состояние–выход» (ВСВ).

Если правила λ и δ в описании непрерывных или дискретных объектов представимы в виде композиции линейных операций сложения и умножения матриц на вектор, то такие НДО и ДДО являются *линейными*.

Так, для линейных непрерывных динамических объектов описание функций λ и δ принимает вид:

$$\lambda : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \tag{7.9}$$

$$\delta : y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{7.10}$$

Для линейных дискретных динамических объектов векторно-матричное описание функций λ и δ записывается в форме:

$$\lambda : x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \tag{7.11}$$

$$\delta : y(k) = Cx(k) + Du(k). \tag{7.12}$$

где в (7.9)–(7.12): A – $(n \times n)$ – матрица состояния; B – $(n \times r)$ – матрица входа; C – $(m \times n)$ – матрица выхода; D – $(m \times r)$ – матрица передачи со входа на выход (матрица «вход–выход»). Следует заметить, что в большинстве физических объектов управление u является энергетически самой слабой переменной, в то время как выход объекта y требует заметных энергетических затрат, поэтому прямые связи со входа на выход, представленные матрицей D, чаще всего отсутствуют. В связи со сказанным в большинстве практических случаев матрица $D = 0$ и в дальнейшем при рассмотрении моделей объектов будет опускаться.

Очевидно, если в соответствии с (7.3)–(7.6) или (7.9)–(7.12) построить графы, используя для общего случая: 1) *интеграторы* для НДО и *элементы задержки* для ДДО; 2) нелинейные блоки $\lambda[x,u]$ и $\delta[x,u]$, а для линейного случая: 1) интеграторы для НДО и элементы задержки для ДДО; 2) линейные блоки в виде матричных усилителей и сумматоров, то получим графические представления непрерывных и дискретных динамических объектов в виде структурных схем.

Модели вида $(7.3)\div(7.6)$ или в линейном случае $(7.9)\div(7.12)$ носят название канонических моделей ВСВ динамических объектов. Для непрерывных объектов эта модель является *дифференциальной*, а для дискретных – *рекуррентной*.

Линейные модели состояния (7.9)–(7.12) непрерывных и дискретных динамических объектов характеризуют динамическое отношение «вход–состояние–выход», поэтому они позволяют построить модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы, (i,j)-ый элемент которой представляет собой передаточную функцию сепаратного канала, связывающего i – ый выход $y_i(t)$ с j – ым входом $u_j(t)$.

Так, для *непрерывных линейных объектов* имеем передаточную матрицу

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B;\ \Phi(s): Y(s) = \Phi(s)U(s) \tag{7.13}$$

с передаточной функцией (i,j)-го сепаратного канала

$$\Phi_{ij}(s) \underline{\underline{\Delta}} \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = C^i(sI - A)^{-1}B_j; \tag{7.14}$$

Для *линейных дискретных объектов* управления соответственно можно записать

$$\Phi(z) = C(zI - A)^{-1}B;\ \Phi(z): Y(z) = \Phi(z)U(z) \tag{7.15}$$

$$\Phi_{ij}(z) \underline{\underline{\Delta}} \frac{y_i(z)}{u_j(z)} = C^i(zI - A)^{-1}B_j. \tag{7.16}$$

Здесь в (7.14) и (7.16) $C^i - i$-ая строка матрицы $C, B_j - j$-ый столбец матрицы B.

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект (ЛНДО), описываемый уравнениями (7.9)–(7.10), задающими модель ВСВ в *дифференциальной форме* с нулевой матрицей D:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\quad x(0);\quad y(t) = Cx(t).$$

Поставим задачу – отыскать *интегральную форму* модели ВСВ ЛНДО

$$x(t) = x[x(0), u(t), t];\qquad y(t) = Cx(t).$$

Если воспользоваться *принципом суперпозиции*, который справедлив для линейных объектов, то можно записать

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{в}}(t),$$

где $x_{\text{св}}(t)$ – свободная составляющая движения, порожденная $x(0) \neq 0$, так что $x_{\text{св}}(t) = x[x(0), u(t) \equiv 0, t]$, $y_{\text{св}}(t) = Cx_{\text{св}}(t)$; $x_{\text{в}}(t)$ – вынужденная составляющая движения, порожденная $u(t) \neq 0$ так, что

$$x_{\text{в}}(t) = x[u(t), x(0) \equiv 0, t],\quad y_{\text{в}}(t) = Cx_{\text{в}}(t).$$

Для вычисления $x_{св}(t)$ положим в исходной модели $u(t) \equiv 0$ и получим однородное уравнение состояния $\dot{x} = Ax, x(0)$. Будем искать $x(t)$ в форме $x(t) = \Phi(t)x(0)$, где $\Phi(t) - (n \times n)$ – матрица, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = I$.

Подстановка $x(t)$ в исходное однородное уравнение дает матричное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \qquad \Phi(0) = I.$$

Решение для $\Phi(t)$ будем искать в виде $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0) = e^{At}$. Прямая подстановка последнего выражения в матричное дифференциальное уравнение относительно $\Phi(t)$ приводит к тождеству

$$Ae^{At} = Ae^{At}.$$

Таким образом,

$$x_{св}(t) = \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0),$$

$$y_{св}(t) = Cx_{св}(t) = C\Phi(t)x(0) = Ce^{At}x(0)$$

Для отыскания вынужденной составляющей движения в исходном уравнении положим $x(0) \equiv 0$, при этом будем искать составляющую в виде $x(t) = \Phi(t)z(t)$, где $z(t)$ – неизвестная *вектор–функция* со значениями из R^n. Если последнее выражение подставить в исходную модель ВСВ, то получим

$$\dot{\Phi}(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t) = A\Phi(t)z(t) + Bu(t).$$

Если теперь учесть, что $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, то нетрудно для $z(t)$ получить векторно-матричное уравнение в дифференциальной форме

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t)Bu(t)$$

и соответственно в интегральной форме

$$z(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

что позволяет для вынужденной составляющей движения непрерывного линейного объекта управления записать

$$x_{в}(t) = \Phi(t)z(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t,\tau) \underline{\underline{\Delta}} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

Для вынужденной составляющей $y_в(t)$ переменной выхода линейного непрерывного динамического объекта оказывается справедливым представление

$$y_{в}(t) = Cx_{в}(t) = \int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Общий вид интегральной модели «вход–состояние–выход» линейного непрерывного динамического объекта принимает вид

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_0^t C\Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t) = e^{At}, \quad \Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}$.

Интегральная запись модели ВСВ ЛНДО позволяет ввести в рассмотрение три основные динамические матрицы линейного непрерывного объекта:

1. $\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица* объекта
2. $\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ – *переходная матрица* объекта
3. $w(t) = C\Phi(t,0)B = C\Phi(t)B$ – *весовая матрица* объекта

Отметим основные свойства переходной матрицы линейного динамического объекта $\Phi(t,\tau)$:

1. $\Phi(\tau,\tau) = \Phi(t,t) = \Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I$;
2. $\Phi(t,\tau) = \Phi(t,t_1)\Phi(t_1,\tau),\ \forall t, t_1, \tau$;
3. $\det\Phi(t,\tau) \neq 0,\ \forall t,\tau$;
4. $\Phi(t,\tau): \dot{\Phi}(t,\tau) = A\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,\tau) = I$;
5. $\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t),\ \forall t,\tau$;

матрица $\Phi^T(\tau,t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{\Phi}^T(\tau,t) = -A^T(t)\Phi^T(\tau,t),\ \Phi^T(\tau,\tau) = I.$$

Очевидно, что ключевым моментом при изучении свойств интегральной модели «вход–состояние–выход» линейных непрерывных объектов является матричная экспонента e^{At}.

Интегральная форма записи модели ВСВ *непрерывного объекта* позволяет получить выражения для *матриц состояния и входа рекуррентной модели* «вход–состояние–выход» линейного *дискретного объекта*. Напомним содержательное отличие непрерывных и дискретных динамических объектов. Дискретный динамический объект реализует дискретную по времени с интервалом длительности Δt выборку из управляемых переменных по состоянию и выходу непрерывного динамического процесса. При этом переменные состояния между моментами выборки изменяются в соответствии с интегральной моделью состояния непрерывного объекта, переменные выхода изменяются по такому же закону, а *переменные входа (управления)* между моментами выборки *фиксируются на уровне* значений в предыдущий момент выборки.

Учитывая сказанное, используя интегральную запись модели ВСВ непрерывного динамического объекта, нетрудно получить связь между матрицами модели ВСВ *дискретного* и *непрерывного объектов* в форме

$$\overline{A} = \Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t},\ \overline{B} = \Phi(\Delta t)\int_{0}^{\Delta t} \Phi^{-1}(\tau) d\tau B,\ \overline{C} = C.$$

Здесь черточкой сверху отмечены матрицы дискретного динамического объекта.

Если в выражении для матрицы входа дискретного объекта осуществить интегрирование, то получим связь между матрицами ЛДДО и ЛНДО в виде

$$\overline{A} = e^{A\Delta t},\ \overline{B} = \overline{A}[-A^{-1}e^{-A\tau}\,|_{0}^{\Delta t}]B = (\overline{A} - I)A^{-1}B,\ \overline{C} = C.$$

Остановимся *на важных структурных свойствах* динамических объектов как непрерывных, так и дискретных, которые удалось установить специалистам по теории систем лишь при изучении моделей ВСВ этих объектов. Ниже ограничимся рассмотрением двух *базовых* структурных свойств объектов управления (ОУ): *управляемости и наблюдаемости.*

Определение 7.5 (О7.5). Объект с матрицами (A, B) называется *полностью управляемым,* если его можно из произвольного начального состояния $x_0 = x(t)|_{t=t_0}$ перевести за конечное время в произвольное конечное состояние $x_k = x(t)|_{t=t_k}$, применив *подходящим образом выбранное управляющее воздействие* (возможно, даже неограниченное).

Определение 7.6 (О.7.6). Объект с матрицами (A, C) называется *полностью наблюдаемым* на интервале наблюдения $T = \{t : t_0 \le t \le t_k\}$, если его состояние $x(t)$ может быть определено на основе наблюдений за выходом $y(t)$ (а возможно, и входом $u(t)$) в течение интервала наблюдения.

Приведенные определения *управляемости* и *наблюдаемости* носят общесистемный характер и построены без учета специфики объектов (непрерывный или дискретный). Ниже приводятся *критерии управляемости и наблюдаемости*, которые инвариантны относительно специфики динамических объектов.

Утверждение 7.1 (У7.1). (*Критерий управляемости 1* **(КУ1))** Объект с парой матриц (A, B) является полностью управляемым тогда и только тогда, когда *матрица управляемости объекта,* построенная в силу матричного соотношения

$$W_y \overset{\Delta}{=} \left[B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right] \tag{7.17}$$

имеет ранг, равный $n = \dim x$, т.е.

$$rang\, W_y = \dim x = n. \qquad \square\ (7.18)$$

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере дискретного объекта управления с использованием его *рекуррентного* модельного представления

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); x(0). \qquad (7.19)$$

Поставим задачу перевода дискретного ОУ (7.19) из произвольного ненулевого начального состояния $x(0)$ за $n = \dim x$ – интервалов дискретности (тактов управления) в желаемое конечное $x(n)$. *Вычислим последовательность* управляющих воздействий, образующих «*стратегию* управления», осуществляющих этот перевод. Для этой цели построим *суммарную* модель дискретного объекта, которая опирается на базу индукции, конструируемую на основе модели (7.19)

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0); x(0);$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1);$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2);$$

$$\vdots$$

$$x(k) = A^k x(0) + A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \ldots + ABu(k-2) + Bu(k-1).$$

Запишем последнее выражение для $k = n$ в следующей форме, поменяв при этом порядок суммирования компонентов,

$$x(n) - A^n x(0) = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T(n-1) u^T(n-2) \ldots u^T(0) \end{bmatrix}^T.$$

Разрешим полученное выражение относительно вектора «стратегии управления», осуществляющего перевод за n тактов ОУ из начального состояния $x(0)$ в желаемое конечное $x(n)$, в результате получим

$$\begin{bmatrix} u^T(n-1) u^T(n-2) \ldots u^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(n) - A^n x(0) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим существование искомого управления является *обратимость матрицы*, которая имеет место только при выполнении условия (7.18). ■

Критерий управляемости 2 (**КУ2**). Пара матриц (A, B) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда матрица

$$Q = W_y W_y^T \qquad (7.20)$$

является положительно определенной, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения $\mu_{yi} > 0,\ \mu_{yi} \in \sigma\{Q\},: \det\left(\mu_y I - Q\right) = 0;\quad i = \overline{1,n}$.

Примечание 7.1 (ПР7.1). Критерий управляемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений μ_{yi} матрицы Q (7.20) дополнить вычислением ее собственных векторов $\varsigma_{yi}\left(i = \overline{1,n}\right)$, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора $\varsigma_{yi}\left(i=\overline{1,n}\right)$. При этом подпространство *неуправляемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы Q, которые соответствуют нулевым (минимальным по величине) собственным значениям, а подпространство *наилучшей* управляемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение.

Утверждение 7.2 (У7.2). (*Критерий наблюдаемости 1*(**КН1**)). Объект с парой матриц (A,C) являются полностью наблюдаемым тогда и только тогда, когда *матрица наблюдаемости объекта*, построенная в силу матричного соотношения

$$W_н \overset{\Delta}{=} \left[C^T \vdots A^T C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1} C^T\right]^T \tag{7.21}$$

имеет ранг, равный n, т.е. $rangW_н = n = \dim x$. □

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере непрерывного объекта с использованием его дифференциального модельного описания

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = x(t).$$

Для получения n условий для вычисления $n-$ компонентного вектора состояния x по *результатам измерения* векторов выхода $y(t)$ и управления $u(t)$, а возможно и производных продифференцируем $(n-1)$ раз по времени вектор выхода $y(t)$, что породит следующий состав измерения

$$y(t) = Cx(t);$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t);$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t);$$

$$\begin{aligned}\dddot{y}(t) &= CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) = \\ &= CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)\end{aligned};$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{(n-1)}x(t) + CA^{(n-2)}Bu(t) + \ldots + CABu^{(n-1)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

Сформируем на основе полученных соотношений вектор измерений $z(t)$ в форме

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CBu(t) \\ \ddot{y}(t) - CABu(t) - CB\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - CA^{(n-2)}Bu(t) - \ldots - CABu^{(n-1)}(t) - CBu^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор измерений $z(t)$ позволяет систему уравнений, построенных на производных вектора выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ привести к виду

$$z(t) = [C^T \vdots A^T C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]^T x(t) = W_н x(t). \tag{7.22}$$

Уравнение (7.22) позволяет для *искомого* вектора $x(t)$ состояния объекта записать

$$x(t) = W_н^{-1} z(t). \tag{7.23}$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим *восстановление* искомого вектора $x(t)$ состояния объекта является обратимость матрицы наблюдаемости $W_н$, которая имеет место только при выполнении условия $rang W_н = n = \dim x.$ ■

Критерий наблюдаемости 2 **(КН2)**. Пара матриц (A, C) является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица

$$P = W_н^T W_н \tag{7.23}$$

является положительно определенной $(P > 0)$, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения.

Примечание 7.2 (ПР7.2). Критерий наблюдаемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений матрицы P (7.23) дополнить вычислением ее собственных векторов, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора. При этом подпространство *ненаблюдаемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы P, которые соответствуют нулевым собственным значениям, а подпространство *наилучшей* наблюдаемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение. Движение в подпространствах *ненаблюдаемости* не проектируются на выход объекта, а движение в подпространстве *наилучшей* наблюдаемости характеризуются максимальной нормой его проекции на выход.

Введение понятий *управляемости* и *наблюдаемости* позволяет представить исходный объект управления ОУ в виде объединения его структурных компонентов

$$ОУ = \{ОУ_у^н \cup ОУ_у^{нн} \cup ОУ_{ну}^н \cup ОУ_{ну}^{нн}\}. \tag{7.24}$$

В представлении (7.24), которое носит название *каноническое представление ОУ* Р.Калмана:

$ОУ_у^н$ – полностью *управляемая* и *наблюдаемая* часть ОУ; $ОУ_у^{нн}$ – полностью *управляемая,* но *ненаблюдаемая* часть ОУ; $ОУ_{ну}^н$ – *неуправляемая*, но полностью *наблюдаемая* часть ОУ; $ОУ_{ну}^{нн}$ – *неуправляемая* и *ненаблюдаемая* часть ОУ.

Следует заметить, что все модели *«вход–выход»* (ВВ) описывают поведение только полностью *управляемой* и *наблюдаемой* $ОУ_у^н$ части ОУ при *нулевом начальном состоянии* объекта в целом. Таким образом модели ВВ оказываются *модельно менее полными*, чем модели «вход–состояние–выход» (ВСВ). Очевидно, размерность вектора состояния модельного компонента $ОУ_у^н$ объекта меньше размерности объекта управления в целом, как следствие модель ВВ ОУ имеет меньшую размерность, чем модель ВСВ объекта. Аналитически *редуцирование размерности* модели ВВ происходит путем *сокращения* общих сомножителей полиномов числителя и знаменателя сепаратных передаточных функций ВВ.

Модели ВСВ предоставляют исследователю объектов управления и динамических систем, построенных на их основе, *непрерывного* и *дискретного* описаний хорошие технологические возможности конструирования моделей ВВ в виде *дифференциальных (рекуррентных) уравнений отношения «вход–выход»* (ДУВВ). Технологию конструирования моделей ДУВВ, опирающуюся на алгоритм Фаддеева–Леверье разложения резолвенты, проиллюстрируем на примере непрерывного линейного ОУ, задаваемого векторно-матричной моделью ВСВ в виде соотношений (7.9)–(7.10)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{7.25}$$

Передаточная функция $\Phi(s): Y(s) = \Phi(s)U(s)$ ОУ (7.25) имеет вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D\,. \tag{7.26}$$

Воспользуемся представлением резолвенты $(sI - A)^{-1}$ в форме

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\left[\Delta(sI - A)\right]^T = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n},$$

где $(n \times n)$ – матрицы $H_i\ (i = \overline{0, n-1})$ и коэффициенты характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Фаддеева-Леверье (6.33). Приведенные соотношения позволяют уравнение «вход-выход» $Y(s) = \Phi(s)U(s)$ записать в форме

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right)Y(s) = \left\{\begin{matrix} C\left(s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}\right)B + \\ + \left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n\right)D \end{matrix}\right\}U(s),$$

что на основе применения обратного преобразования Лапласа с учетом его свойств приводит к дифференциальному уравнению «вход-выход» с матричными коэффициентами относительно производных по времени векторных переменных $y(t)$ и $u(t)$:

$$y^{n}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_n y(t)=D u^{n}(t)+$$
$$+\left(CH_0B+a_1D\right)u^{(n-1)}(t)+\ldots+\left(CH_{n-2}B+a_{n-1}D\right)\dot{u}(t)+\left(CH_{n-1}B+a_nD\right)u(t).$$

Если возникает необходимость составления дифференциального уравнения, связывающего $i-$й выход $y_i(t)$ с $j-$м входом $u_j(t)$, то для этого в левой части векторно-матричного дифференциального уравнения «вход-выход» в векторе выхода $y(t)$ следует выделить $i-$й элемент, в правой части в векторе входа $u(t)$ $j-$й элемент, а в матричных коэффициентах выделить $(i,j)-$ые компоненты, находящиеся на пересечении $i-$х строк и $j-$х столбцов.

Приведем теперь *алгоритм построения* (A,B,C,D) – модельного «вход–состояние–выход» – представления линейных непрерывных динамических объектов (ЛНДО) (7.9),(7.10) по их передаточным функциям (матрицам) $\Phi(s)=Y(s)U^{-1}(s)$ отношения «вход-выход».

АЛГОРИТМ 7.1 (А7.1)

построения векторно-матричного ВСВ–представления ЛНДО с использованием моделей ВВ в виде передаточной функции

1. Выбрать базис ВСВ–представления ЛНДО вида (7.9),(7.10):

– канонический фробениусов строчный (управляемый);
– канонический фробениусов столбцовый (наблюдаемый);
– физический.

2. В случае:

2.1. Канонического фробениусова управляемого и канонического фробениусова наблюдаемого базисов записать передаточную функцию ВВ $\Phi(s)=Y(s)U^{-1}(s)$ в форме отношения двух полиномов, построенных по положительным степеням переменной s

$$\Phi(s)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\bar{\alpha}_i s^{m-i}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\bar{\beta}_j s^{n-j}},\ \textit{где}\ n>m; \qquad (7.27)$$

2.2. Физического базиса записать передаточную функцию ВВ в виде произведения передаточных функций $\Phi_l(s)$ $l-$х последовательно соединенных функциональных компонентов таких как *исполнительный двигатель, усилительно–преобразовательное устройство, фильтр, корректирующее звено* и т.д., $\Phi(s)=\prod\limits_{l}\Phi_l(s)$, после чего каждую передаточную функцию $\Phi_l(s)$ записать в форме (7.27).

3. Записать передаточную функцию (7.27) по отрицательным степеням s^{-1} переменной s, для чего числитель и знаменатель передаточной функции (7.27) разделить на член знаменателя $\bar{\beta}_0 s^n$, так что в зна-

менателе передаточной функции образуется свободный член равный единице, а передаточная функция (7.27) принимает вид

$$\Phi(s) \overset{\Delta}{=} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i s^{m-i-n}}{\sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j s^{-j}} \quad , \tag{7.28}$$

где $\beta_0 = 1$; $\alpha_i = \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_0^{-1}$; $\beta_j = \bar{\beta}_j \bar{\beta}_0^{-1}$.

4. Построить структурное модельное представление ЛНДО, описываемое передаточной функцией (ПФ) вида (7.28) с единичным свободным членом знаменателя, на основе использования правила Мейсона не касающихся контуров, в соответствие с которым передаточная функция имеет реализацию в форме n касающихся (вложенных в друг друга) *замкнутых контуров*, передаточные функции которых заданы мультипликативными структурами из постоянного коэффициента $(-\beta_j)$ и сомножителя (s^{-j}) *знаменателя*, а число *прямых ветвей* от входа к выходу структурной реализации ПФ (7.28) определяется числом ненулевых членов *числителя* с передаточными функциями $\alpha_i s^{m-i-n}$, количество которых не превосходит $m+1$.

5. Произвести разметку полученной в п.4 структурной реализации ПФ (7.28) с учетом того, что s^{-1} есть передаточная функция *интегрирующего звена (интегратора)*; при разметке *выходам* интеграторов в определенном порядке приписать переменные состояния x_j $(j = \overline{1,n})$, а *непосредственным входам* интеграторов приписать переменную $\dot{x}_j$ – производную по времени от переменной x_j.

6. Списать с размеченной в п.5 структурной реализации ПФ (7.28) матрицы A, B, C, D векторно-матричного ВСВ представления ЛНДО (7.9) и (7.10).

Примеры и задачи

7.1.* Построить структурное представление непрерывного объекта управления, описываемого функцией перехода λ и выхода δ вида:

$\lambda : \dot{x} = Ax + Bu$, $\delta : y = Cx$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\upsilon_3 \\ 1 & 0 & -\upsilon_2 \\ 0 & 1 & -\upsilon_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \upsilon_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью критериев управляемости и наблюдаемости исследовать объект на управляемость и наблюдаемость, составить передаточную функцию (матрицу) объекта.

7.2. Построить структурные схемы непрерывных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода вида:

а) $\lambda: \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 + 3x_1 u; \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u^3; \end{cases}$ $\delta: y = x_1^2 + 2x_2 + u;$

б) $\lambda: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3; \\ \dot{x}_2 = x_2; \\ \dot{x}_3 = -100x_1 - 10x_2^2 - 5x_1 x_2; \end{cases}$ $\delta: y = x_1 + 2x_2 + 15x_3^2;$

в) $\lambda: \begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - (\sin\varphi_2)x_2 + (\sin\varphi_2)u_2 + (\cos\varphi_1)u_1; \\ \dot{x}_2 = (\sin\varphi_1)x_1 - \alpha_2 x_2 + (\cos\varphi_2)u_2 - (\sin\varphi_1)u_1; \end{cases}$

$\delta: \begin{cases} y_1 = (\cos\varphi_1)x_1 + (\sin\varphi_2)x_2; \\ y_2 = (-\sin\varphi_1)x_1 + (\cos\varphi_2)x_2; \end{cases}$

г) $\lambda: \begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1 x_2; \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 u - \beta_2 |u| x_2 - \alpha_1 x_1; \end{cases}$ $\delta: y = 10x_1$

д) $\lambda: \begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1 x_2; \\ \dot{x}_2 = \beta_3 x_3 + \beta_2 |x_3| x_3 - \beta_1 x_2 + \alpha_1 u; \\ \dot{x}_3 = \alpha_2 u - \beta_4 x_1; \end{cases}$ $\delta: y = 0.1x_3;$

е) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu;$ $\delta: y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\vartheta_3 & -\vartheta_2 & -\vartheta_1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} \vartheta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

ж) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu;$ $\delta: y = Cx;$

где A, B из пункта е), а $C = \begin{bmatrix} \vartheta_3 & \vartheta_2 & \vartheta_1 \end{bmatrix};$

з) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu;$ $\delta: y = Cx;$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\vartheta_3 \\ 1 & 0 & -\vartheta_2 \\ 0 & 1 & -\vartheta_1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} \vartheta_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

и) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu;$ $\delta: y = Cx$,

где A, C из пункта 3), а $B = \begin{bmatrix} \vartheta_3 & \vartheta_2 & \vartheta_1 \end{bmatrix}^T;$

к) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu;$ $\delta: y = Cx + Du,$

где A, B и C те же, что в пункте з), а $D = [\vartheta_0]$.

л) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu;$ $\delta: y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

м) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta: y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

н) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta: y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 0 & 8\end{bmatrix};$$

о) $\lambda: \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta: y = Cx;$ где

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 4 & 5\\ 6 & 3\\ 8 & 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5 & 0\end{bmatrix}.$$

7.3. Определить передаточные матрицы и функции сепаратных каналов линейных непрерывных объектов, описываемых функциями перехода и выхода из 7.2: п.п. е) $\div$ о)

7.4. Определить, управляемы и наблюдаемы ли объекты управления, а также управляемы и наблюдаемы ли они по каждому из входов и выходов (в случае $r > 1, m > 1$), если объекты описываются функциями перехода и выхода из п.п. е) $\div$ о)

7.5. Построить модели состояния линейных непрерывных объектов в форме функций перехода λ и выхода δ по заданным передаточным матрицам (функциям) «вход–выход»:

а) $\Phi(s) = \dfrac{10}{s^3}$, б) $\Phi(s) = \dfrac{s+\beta}{s+\alpha}$,

в) $\Phi(s) = \dfrac{\beta}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$, г) $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s + \beta_2}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$,

д) $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$, е) $\Phi(s) = \dfrac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$,

ж) $\Phi(s) = \dfrac{\beta(s+\gamma)}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$, з) $\Phi(s) = \dfrac{\beta}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)}$, и) $\Phi(s) = \dfrac{\beta s + \gamma}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$, к) $\Phi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{11}}{s+\alpha_{11}} & -\beta_{12} \\ \beta_{21} & \dfrac{\beta_{22}}{s+\alpha_{22}} \end{bmatrix}$,

л) $\Phi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{11}}{s+\alpha_{11}} & \dfrac{\beta_{12}}{s} & \dfrac{\beta_{13}s+\beta_{13}^2}{s(s+\alpha_{13})} \\ -\beta_{21} & \dfrac{\beta^1{}_{22}s+\beta_{22}^2}{s} & \dfrac{\beta_{23}}{s+\alpha_{23}} \end{bmatrix}$.

7.6. Построить структурные схемы дискретных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода:

а) $\lambda: \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + Tx_2(k) - \dfrac{1}{2}T^2u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + Tu(k) \end{cases}$ $\delta: y(k) = x_1(k)$,

б) $\lambda: \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + Tx_2(k) + \dfrac{T^2}{2}x_3(k) + \dfrac{1}{6}T^3u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + Tx_3(k) + \dfrac{T^2}{2}u(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + Tu(k) \end{cases}$ $\delta: y(k) = x_1(k)$,

в) $\lambda: x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \delta: y(k) = Cx(k)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

г) $\lambda: x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \delta: y(k) = Cx(k)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.9 & 0.6 \\ 0.02 & -0.004 & -1.5 & 0.1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.7. Определить передаточные матрицы и функции дискретных объектов примеров 7.6

7.8. Построить модель ВСВ дискретных объектов, заданных передаточными функциями (матрицами):

а) $\Phi(z) = \dfrac{\beta z + 1}{\alpha z + 1}$; б) $\Phi(z) = \dfrac{\beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3}{z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3}$;

в) $\Phi(z)=\dfrac{\beta_1 z^{-2}+\beta_2 z^{-1}+\beta_3}{z^{-3}+\alpha_1 z^{-2}+\alpha_2 z^{-1}+\alpha_3}$; г) $\Phi(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta_{11}}{z+\alpha_{11}} & \beta_{12}\\ 0 & \dfrac{\beta_{22}}{z+\alpha_{22}}\end{bmatrix}$

7.9. Для значений интервалов дискретности 0.01 сек. и 0.1 сек. построить матрицы A, B, C дискретного описания непрерывных объектов из задачи 7.2.

Решение вариантов задач

Решение задачи 7.1. Запишем функции λ и δ в координатной форме:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0x_1+0x_2-\upsilon_3 x_3+\upsilon_3 u\\
\dot{x}_2 &= 1x_1+0x_2-\upsilon_2 x_3\\
\dot{x}_3 &= 0x_1+1x_2-\upsilon_1 x_3\\
y &= 0x_1+0x_2+1x_3
\end{aligned}.$$

Для построения структурного представления объекта необходимы 3 интегратора, у которых входом j-го интегратора является переменная $\dot{x}_j$, представленная в виде линейной комбинации выходов интеграторов $x_i\left(j,i=\overline{1,n}\right)$ и входного воздействия u, описываемой j-ой строкой функции перехода λ, при этом линейная комбинация формируется сумматором. Выход y объекта управления является линейной комбинацией составляющих вектора состояния, который формируется с помощью усилительных элементов с коэффициентами усиления, равными коэффициентам при соответствующих составляющих x_i вектора состояния x в функции выхода δ, и устройством суммирования.

Для оценки управляемости и наблюдаемости объекта составим матрицы управляемости W_y и наблюдаемости $W_н$ в силу выражений (7.17) и (7.20):

$$W_y=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\upsilon_3 & 0 & 0\\ 0 & \upsilon_3 & 0\\ 0 & 0 & \upsilon_3\end{bmatrix},$$

$$W_н=\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & \left(A^T\right)^2C^T\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -\upsilon_1\\ 1 & -\upsilon_1 & -\upsilon_1^2--\upsilon_2\end{bmatrix}.$$

В соответствие с критериями управляемости и наблюдаемости в первых формулировках объект управления является полностью управляемым и наблюдаемым, так как

$rang(W_y) = 3 = \dim x$, $rang(W_н) = 3 = \dim x$.

Для того, чтобы воспользоваться критериями управляемости и наблюдаемости во вторых формулировках (КУ2 и КН2) построим матрицы $Q = W_y W_y^T$ и $P = W^T{}_н W_н$, которые для рассматриваемого объекта управления принимают вид

$$Q = \begin{bmatrix} \upsilon_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3^2 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon_1 & \upsilon_1^2 - \upsilon_2 \\ -\upsilon_1 & 1 + \upsilon_1^2 & -\upsilon_1 + \upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^3 \\ \upsilon_1^2 - \upsilon_2 & -\upsilon_1 + \upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^3 & 1 + \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_1^4 - 2\upsilon_1^2\upsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Положительная определенность матрицы Q очевидна. Для оценки положительной определенности матрицы P воспользуемся критерием *Сильвестра положительной определенности* матриц:

Пусть произвольная квадратная матрица E имеет вид

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{21} & \cdots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & E_{nn} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим определители подматриц (главные диагональные миноры) матрицы E

$$\Delta_1 = E_{11}; \quad \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_k = \det\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E_{k1} & E_{k2} & \dots & E_{kn} \end{bmatrix}; k = \overline{1, n}.$$

Тогда критерий положительной определенности матрицы E состоит в выполнении условий

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \cdots \Delta_k > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для матрицы $P = W^T{}_н W_н$ имеем

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 1.$$

Таким образом, P – положительно определенная матрица.

Определим передаточную функцию (матрицу) «вход–выход» объекта. По определению передаточной функции (матрицы)

$$\Phi(s) \overset{\Delta}{=} {Y(s)}\Big/{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{det(sI-A)} C\left[adj(sI-A)\right]^T B =$$

$$= \frac{1}{s^3+\upsilon_1 s^2+\upsilon_2 s+\upsilon_3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2+\upsilon_1 s+\upsilon_2 & -\upsilon_3 & 1-\upsilon_3 s \\ s+\upsilon_1 & s^2+\upsilon_1 s & -\upsilon_2 s-\upsilon_3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon_3 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^3+\upsilon_1 s^2+\upsilon_2 s+\upsilon_3}\begin{bmatrix}1 & s & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon_3 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} = \frac{\upsilon_3}{s^3+\upsilon_1 s^2+\upsilon_2 s+\upsilon_3}.$$

Поставленные задачи решены.

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ «ВХОД-ВЫХОД» ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Наиболее общими математическими моделями динамических объектов с сосредоточенными параметрами являются их дифференциальные или разностные уравнения «вход–выход» (ВВ), они исторически появились раньше моделей ВСВ, рассмотренных в предыдущем разделе. Как отмечено в предыдущем разделе модели типа ВВ описывают только полностью управляемую и наблюдаемую часть динамического объекта (системы).

По виду протекающих в них процессов преобразования сигналов объектов и их модели принято подразделять на непрерывные и дискретные.

Определение 8.1(О8.1). *Непрерывными* называют объекты, входные и выходные сигналы которых являются функциями непрерывно изменяющейся независимой переменной t.

Определение 8.2(О8.2). *Дискретными* называют объекты, входные и выходные сигналы которых являются функциями, определенными на конечном или счетном множестве значений переменной t, фиксируемые с интервалом дискретности по времени Δt так, что непрерывное время t и дискретное время k, выраженное в числе интервалов дискретности Δt, связаны соотношением $t = k(\Delta t)$.

Если объект является непрерывным и одномерным, то есть имеет один вход и один выход, то его динамика, в терминах «вход–выход» описываются обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y; u^{(m)}, u^{(m-1)}, ..., u; t) = 0, \tag{8.1}$$

где $u(t)$ – входной сигнал объекта, $y(t)$ – выходной сигнал объекта.

Решение уравнения (8.1), зависящее как от входного сигнала, так и от начальных условий содержит в рамках данной модели всю информацию о протекающих в объекте процессах.

Непосредственная линеаризация уравнения движения (8.1) относительно номинальной (опорной) траектории приводит к математической модели объекта в виде линейного дифференциального уравнения n-го порядка относительно отклонений входного и выходного сигналов объекта от их номинальных значений:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_n(t)y = b_0(t)u^{(m)} + ... + b_m(t)u \tag{8.2}$$

Выражение (8.2) называют уравнением в отклонениях или в вариациях; объекты, математические модели которых могут быть представлены в виде уравнения (8.2), называются *непрерывными линейными объектами*.

Если объект стационарный, то все коэффициенты уравнения (8.2) являются постоянными величинами, т.е. $a_k(t) = a_k$, $k = \overline{0,n}$ и $b_j(t) = b_j$, $j = \overline{0,m}$, так, что уравнение (8.2) может быть записано в виде

$$D(p)y(t) = B(p)U(t), \tag{8.3}$$

где $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n$; $B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m$; $p = \frac{d}{dt}$. $D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$

Многочлен $D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ называется *характеристическим многочленом,* а уравнение

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{8.4}$$

– *характеристическим уравнением.*

Выходной сигнал $y(t)$ объекта, описываемого уравнением (8.3), зависит как от входного сигнала $u(t)$, так и от его предыстории (до момента приложения входного сигнала), определяемой заданными начальными условиями для выходного сигнала и его производных при $t_0 = 0$:

$$y(0) = y_0^{(0)}, \dot{y}(0) = y_0^{(1)}, ..., y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}\ . \tag{8.5}$$

Общее решение уравнения (8.3) целесообразно в соответствии с характером причинно-следственных связей представить в виде суммы двух слагаемых:

$$y(t) = y_c(t) + y_в(t). \tag{8.6}$$

Первое слагаемое в выражении (8.6), равное $y_c(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)$, называется *свободным движением* объекта. Оно представляет собой общее решение соответствующего равенству (8.3) однородного уравнения $D(p)y(t) = 0$, где $y_k(t), k = \overline{1,n}$ – система n линейно независимых решений однородного уравнения (фундаментальная система решений): $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (8.5):

$$\begin{cases} c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + ... + c_n y_n(0) = y_0^{(0)} \\ c_1 \dot{y}_1(0) + c_2 \dot{y}_2(0) + ... + c_n \dot{y}_n(0) = y_0^{(1)} \\ .... \\ c_1 y_1^{(n-1)}(0) + c_2 y_2^{(n-1)}(0) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}. \tag{8.7}$$

Если все корни $\lambda_k, k = \overline{1,n}$ характеристического уравнения (8.4) различны и вещественны, тогда система n линейно независимых решений однородного уравнения имеет вид $y_k(t) = e^{\lambda_k t}, k = \overline{1,n}$; свободное движение объекта в этом случае равно

$$y_k = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} . \qquad (8.8)$$

Если среди всех различных корней характеристического уравнения имеются пары комплексно-сопряженных корней $\alpha_k \pm j\beta_k$, тогда каждой паре корней соответствуют два линейно независимых вещественных частных решения $e^{\alpha_n t}\cos\beta_k t$ и $e^{\alpha_n t}\sin\beta_k t$. Каждому вещественному корню s_k уравнения (8.4), имеющему кратность *q,* соответствует ровно *q* линейно независимых частных решений следующего вида $e^{\lambda_k t}$, $te^{\lambda_k t}$..... $t^{q-1}e^{\lambda_k t}$; каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha_k \pm j\beta_k$ кратностью *q* соответствуют ровно *2q* линейно независимых вещественных частных решения однородного уравнения:

$$e^{\alpha_n t}\cos\beta_k t, te^{\alpha_k t}\cos\beta_k t, ..., t^{q-1}e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t;$$

$$e^{\alpha_n t}\sin\beta_k t, te^{\alpha_k t}\cos\beta_k t, ..., t^{q-1}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t. \qquad (8.9)$$

Свободное движение объекта обусловлено только ненулевыми начальными условиями и не зависит от входного сигнала объекта. Второе слагаемое в выражении (8.6) равно:

$$y_в(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(t)d\tau, \qquad (8.10)$$

где $w(t\text{-}\tau)$ – весовая функция объекта, представляющая собой реакцию объекта в момент времени t на воздействие в виде δ–функции, приложенное на его входе в момент времени τ при условии, что до момента приложения воздействия выходной сигнал и все его производные равны нулю, т.е. объект находится в состоянии равновесия. Весовая функция стационарного физически возможного объекта удовлетворяет условию $w(t\text{-}\tau)=0$ при $t<\tau$ и является его исчерпывающей характеристикой во временной области в рамках рассматриваемой модели.

Соотношение (8.10) определяет так называемое *вынужденное движение* объекта, которое представляет собой единственное частное решение уравнения (8.3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Вынужденное движение полностью определяется характером входного сигнала и не зависит от начальных условий. При нулевых начальных условиях полное движение объекта равно его вынужденному движению.

Под *установившимся движением* объекта понимают значение $y(t)$ при $t \to \infty$ что эквивалентно тому, что входной сигнал $u(t)$ приложен к объекту при $t_0 \to -\infty$, т.е. установившееся движение описывается соотношением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} w(\tau)u(t-\tau)d\tau . \qquad (8.11)$$

Исчерпывающей характеристикой линейного непрерывного объекта в частотной области в рамках модели (8.3) является его передаточная функция $W(s)$, равная отношению изображений по Лапласу выходного сигнала к входному, которая может быть получена непосредственно по уравнению движения объекта (8.3) применением к обеим частям преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$D(s)Y(s)=B(s)U(s), \tag{8.12}$$

где $U(s)$, $Y(s)$ – изображения по Лапласу соответственно входного и выходного сигналов; $D(s)=D(p)|_{p=s}$,

$B(s) = B(p)|_{p=s.}$

Из выражения (8.12) следует, что

$$W(s)=Y(s)/U(s)=B(s)/D(s). \tag{8.13}$$

Между весовой и передаточной функциями имеет место взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое преобразованием Лапласа:

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st}dt; \qquad w(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s)e^{st}ds, \tag{8.14}$$

где c – абсцисса сходимости интеграла.

В частности, если все корни характеристического уравнения объекта являются различными, весовая функция определяется по передаточной функции следующим соотношением:

$$w(t-\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}, t\ge\tau\\ 0, t<\tau\end{cases}. \tag{8.15}$$

Задача определения выходного сигнала объекта (8.3) при известном входном сигнале и заданных начальных условиях (8.5) может быть решена по следующей схеме:

1. Определяется общее решение соответствующего (8.3) однородного уравнения $D(p)y(t)=0$:

$$y_k(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(t). \tag{8.16}$$

2. По известным начальным условиям (8.5) составляется система уравнений (8.7), единственным образом определяющая постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$.

3. Найденные значения постоянных подставляются в выражение (8.16) и тем самым определяется свободное движение объекта.

4. С помощью соотношений (8.13) и (8.14), свойств преобразования Лапласа, таблицы оригиналов и их изображений находятся передаточная $W(s)$ и весовая $w(t)$ функции объекта.

5. По найденной весовой функции и известному входному сигналу $u(t)$ определяется вынужденная компонента движения:

$$y_в(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(t)d\tau. \qquad (8.17)$$

6. Находится полное движение объекта путем сложения его свободного и вынужденного движений.

Другим возможным способом решения данной задачи, не связанным с определением весовой функции, является операционный метод: к обеим частям уравнения (8.3) применяется преобразование Лапласа с учетом заданных начальных условий; полученное выражение разрешается относительно изображения выходного сигнала $Y(s)$, по которому с помощью свойств преобразования Лапласа, таблицы оригиналов и их изображений отыскивается искомый оригинал $y(t)$, представляющий собой решение задачи.

Исследование основных характеристик «вход–выход» дискретных моделей непрерывных объектов и характеристик дискретных объектов сводится к анализу соответствующих линеаризованных разностных уравнений, связывающий выборочные (дискретные) значения входного и выходного сигналов объекта. Разностное уравнение стационарной линейной дискретной модели может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} &a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k) = \\ &= b_0 y(k+m) + b_1 y(k+m-1) + \cdots + b_m u(k) \end{aligned}, \qquad (8.18)$$

где $u(k)$, $y(k)$ – выборочные значения входного и выходного сигналов соответственно; $k = 0, 1, 2, ...$ – текущее дискретное время. Считается, что входной сигнал поступает на объект с момента времени $k = 0$, т.е. $u(k) = 0$, при $k < 0$.

Если ввести оператор опережения ξ, определяемый как $\xi y(k) = y(k+1)$, то уравнение (8.18) можно записать в следующем виде

$$D(\xi)y(k) = B(\xi)u(k), \qquad (8.19)$$

где

$$D(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+...+a_n; \qquad B(\xi)=b_0\xi^m+b_1\xi^{m-1}+...+b_m.$$

Многочлен $D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ называется *характеристическим многочленом*, уравнения $D(z) = 0$ – *характеристическим уравнением* дискретной модели (объекта). Степень характеристического многочлена $D(z)$ определяет порядок разностного уравнения (8.19) дискретной модели. Начальные условия, число которых равно порядку уравнения модели, определяются значениями выходного сигнала $y(k)$ в момент времени $k = 0, 1, ..., n-1$:

$$y(0) = y_1^{(0)}, y(1) = y_0^{(1)}, ..., y(n-1) = y_0^{(n-1)}. \qquad (8.20)$$

Уравнения (8.18) и (8.19) могут рассматриваться как рекуррентные соотношения для вычисления текущего значения выходного сигнала по прошлым значениям входа и выхода модели.

Способы получения явных решений уравнения (8.18) дискретной модели полностью аналогичны рассмотренным методам для случая непрерывного времени. Общее решение соответствующего (8.18) однородного уравнения

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + ... + a_n y(k) = 0\,, k = 0, 1, 2,... \qquad (8.21)$$

равно

$$y_c(k) = \sum_{m=1}^{n} c_m y_m(k)\,, \qquad (8.22)$$

где $y_m(k)$, $m = \overline{1,n}$ – система n линейно независимых решений однородного уравнения (фундаментальная система решений): $c_2,....c_n$ – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям (8.20) из системы уравнений (8.8).

Если все корни r_m, $m = \overline{1,n}$ характеристического уравнения $D(r)$=0 различны и вещественны, то система n линейно независимых решений уравнения (8.21) имеет вид $y_m(k) = r_m^k$, $m = \overline{1,n}$; свободное движение (8.22) в этом случае равно

$$y_c(k) = \sum_{m=1}^{n} c_m r_m^k,\ k = 0,1,... \ . \qquad (8.23)$$

Если среди различных корней характеристического уравнения имеются пары комплексно сопряженных корней $\rho_m e^{\pm j\varphi_m} = \rho_m(\cos\varphi_m \pm j\sin\varphi_m)$, соответствующие ей линейно независимые вещественные решения равны $\rho_m^k \cos k\varphi_m$ и $\rho_m^k \sin k\varphi_m$. Каждому вещественному корню r_m характеристического уравнения кратности q соответствует ровно q линейно независимых решения однородного уравнения следующего вида: $r_m^k, kr_m^k,...,k^{q-1}r_m^k$; каждой паре комплексно сопряженных корней $\rho_m e^{\pm j\varphi_m} = \rho_m(\cos\varphi_m \pm j\sin\varphi_m)$ кратности q соответствуют ровно *2q* линейно независимых вещественных решения:

$$\begin{array}{l} \rho_m^k \cos k\varphi_m, k\rho_m^k \cos k\varphi_m,...,k^{q-1}\rho_m^k \cos k\varphi_m; \rho_m^k \sin k\varphi_m \\ k\rho_m^k \sin k\varphi_m,...,k^{q-1}\rho_m^k \cos k\varphi_m \end{array}.$$

В случае простого нулевого корня характеристического уравнения трудностей не возникает, если считать $0^0 = 1$ и $0^k = \delta_{o,k}$, где $\delta_{o,k}$ – символ Кронекера, равный $\delta_{0,k} = \begin{cases} 1,\ k = 0 \\ 0,\ k \neq 0 \end{cases}$.

Найденое таким образом общее решение (8.22) однородного уравнения (8.21) представляет собой *свободное движение* дискретной модели; это движение полностью определяется ненулевыми начальными условиями (8.20) и не зависит от входного сигнала $u(k)$.

Частное решение неоднородного уравнения (8.18) может быть записано в следующем виде:

$$y_в(k) = \sum_{m=0}^{k} \omega(k-m)u(m),\ k = 0,1,..., \tag{8.24}$$

где $\omega(k-m)$ – дискретная весовая функция модели.

Выражение (8.24) является дискретным аналогом интегральной свертки (8.10) и представляет собой *вынужденную* составляющую движения, которая полностью определяется характером входного сигнала и не зависит от начальных условий.

Полное движение дискретной модели складывается из её свободного и вынужденного движений:

$$y(k) = \sum_{m=1}^{n} c_m y_m(k) + \sum_{j=0}^{k} \omega(k-j)u(j). \tag{8.25}$$

Исчерпывающей характеристикой линейной дискретной модели в частотной области (при нулевых начальных условиях) является её дискретная передаточная функция $W(z)$, равная отношению z–изображений выходного сигнала к входному, т.е.

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \tag{8.26}$$

где $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$, $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$ – Z–преобразования входного и выходного сигналов соответственно.

Дискретная передаточная функция $W(z)$ может быть получена непосредственно по разностному уравнению (6.10) и определяется выражением, аналогичным соотношению (6.13):

$$W(z) = \frac{B(z)}{D(z)}. \tag{8.27}$$

Между весовой и передаточной функциями имеет место взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое z–преобразованием:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega(k)z^{-k}; \quad \omega(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^k W(z)\frac{dz}{z},$$

где Г – замкнутый контур, охватывающий все полюсы функции $W(z)$.

В большинстве практических случаев интегрирование функции комплексного аргумента не используется и при отыскании оригиналов используется разложение функции *W(z)* на табличные z – изображение с целью использования таблиц z–изображений и соответствующих им оригиналов.

В заключение сделаем полезное замечание. Передаточная функция, записанная в виде отношения двух полиномов, записанных по отрицательным степеням s^{-1} или z^{-1} соответственно для непрерывных и дискретных систем с единичным свободным членом знаменателя, представляет собой решение графа, к которому может быть применено правило Мейсона не касающихся контуров в инверсной постановке. Суть инверсного использования правила Мейсона состоит в воссоздании класса графов с вложенными (касающимися) контурами минимальной размерности, эквивалентных в смысле решений этих графов в форме передаточной функции отношения «вход–выход». Построенный класс графов образует множество возможных структурных представлений динамических систем, исследуемых с использованием моделей «вход–выход».

Примеры и задачи

8.1.* Найти полное движение объекта $\ddot{y}+9y=u(t)$, где $u(t)$=2cos3t, начальные условия $y(0)=2, \dot{y}(0)=1$; определить весовую и передаточную функцию объекта.

8.2.* Найти полное движение дискретного объекта описываемого уравнением

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2u(k+1)+u(k),$$

где

$$u(k)=\begin{cases} k & \text{при } k \geq 0 \\ 0 & \text{при } k < 0 \end{cases}, \quad y(0)=y(1)=1.$$

8.3. Определить полное движение следующих объектов, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=1, \quad y(0)=\dot{y}(0)=0$.

б) $\ddot{y}+4y=2$, где:

1. $u(t)=\cos 2t, \quad y(0)=\dot{y}(0)=0;$

2. $u(t)=\cos 2t, \quad y(0)=1; \dot{y}(0)=0.$

в) $\ddot{y}-2\dot{y}+5y=u(t)$, где $u(t)=e^{t}\cos 2t,\ y(0)=\dot{y}(0)=0$.

г) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=u(t)$, где $u(t)=te^{t}, y(0)=1; \dot{y}(0)=-2$.

д) $\ddot{y}+2\dot{y}+2y=2\dot{u}+2u$, где $u(t)=t,\ y(0)=0, \dot{y}(0)=1$.

е) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=u(t)$, где $u(t)=e^{2t}, y(0)=\dot{y}(0)=0$.

ж) $\ddot{y}+6\dot{y}+9y=9u$, где $u(t)=e^{3t},\ y(0)=\dot{y}(0)=0$.

8.4. Определить весовые функции следующих непрерывных объектов, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y}-4\dot{y}+5y=u$; б) $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=\dot{u}+2u$;

в) $\ddot{y}+5\dot{y}+6y=\dot{u}+u$.

8.5. Определить полное движение следующих дискретных объектов описываемых уравнениями:

а) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=k(-1)^k$, где
$y(0)=1, y(1)=0.$

б) $y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=u(k+1)+2u(k)$, где

$$u(k)=\begin{cases} k, & k\ge 0 \\ 0, & k<0, y(0)=0, y(1)=1. \end{cases}$$

Решение вариантов задач

Решение задачи 8.1

1. Корни характеристического уравнения $s^2+9=0$ равны: $s_1=j3$, $s_2=-j3$, поэтому общее решение однородного уравнения $\ddot{y}+9y=0$ равно

$$y_c(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t.$$

2. По известным начальным условиям задачи составляем систему уравнений (8.8) относительно постоянных интегрирования c_1 и c_2, которая принимает вид

$$\begin{cases} c_1\cos 0+c_2\sin 0=-2 \\ -3c_1\sin 0+3c_2\cos 0=1 \end{cases}.$$

Отсюда получаем $c_1=-2$, $c_2=1/3$.

3. Определяем свободное движение объекта, которое на основании общего решения однородного уравнения равно $y_c(t)=-2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t$.

4. Поскольку для данной задачи $D(p)=p^2+9, B(p)=1$, то передаточная функция объекта согласно выражению (8.13) равна $W(s)=\frac{1}{s^2+9}$. Весовая функция объекта определяется по найденной передаточной функции соотношением (8.15) и равна

$$\omega(t-\tau)=\frac{1}{3}\sin 3(t-\tau)1(t-\tau)$$

5. Вынужденная компонента движения в соответствии (8.10) определяется соотношением

$$y_в(t)=\int_0^t \frac{1}{3}\sin 3(t-\tau)2\cos 3\tau d\tau=\frac{1}{3}t\sin 3t.$$

6. Полное движение объекта, удовлетворяющее заданным условиям, равно

$$y(t)=\frac{1}{3}(t+1)\sin 3t-2\cos 3t.$$

Решение задачи 8.2

1. Корни характеристического уравнения объекта $z^2+3z-2=0$ равны $z_1=-1,\ \ z_2=-2$, поэтому общее решение соответствующего дискретному объекту однородного уравнения имеет вид $y_c(k)=c_1(-1)^k+c_2(-2)^k$.

2. Постоянные c_1 и c_2 определяются по заданным начальным условиям с помощью системы уравнений:

3. Подстановкой c_1 и c_2 в общее решение определяем свободное движение

$$y_c(k)=3(-1)^k-2(-2)^k.$$

4. Поскольку $D(\xi)=\xi^2+3\xi+2$ и $\mathrm{B}(\xi)=2\xi+1$, то дискретная передаточная функция объекта, согласно (8.27), равна $W(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+3z+2}$.

Дискретная весовая функция объекта определяется по найденной передаточной функции с помощью обратного *z*-преобразования

$$\omega(k)=Z^{-1}\left\{\frac{2z+1}{z^2+3z+2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{-1}{z+1}+\frac{3}{z+2}\right\}.$$

По таблицам *z*–преобразований находим

$Z^{-1}\left\{\dfrac{1}{z+a}\right\}=(-a)^{k-1}\cdot 1(k-1)$, что окончательно позволяет записать:

$$\omega(m)=1(m-1)[3(-2)^{m-1}+(-1)^m].$$

5. Вынужденное движение объекта определяется по формуле (8.24)

$$y_{\text{в}}(k)=\sum_{m=0}^{k}\omega(k-m)u(m)=\sum_{m=0}^{k}1(k-m-1)[3(-2)^{k-m+1}+(-1)^{k-m}]m.$$

6. Полное движение дискретного объекта равно

$$y(k)=3(-1)^k-2(-2)^k+\sum_{m=0}^{k}1(k-m-1)\Big[3(-2)^{k-m=1}+(-1)^{k-m}\Big]m.$$

9. ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейным матричным уравнением относительно $(n \times m)$ – матрицы M называется уравнение вида

$$R_1MS_1 + R_2MS_2 + ... + R_kMS_k = U, \qquad (9.1)$$

где $R_i - (\nu \times n)$ – матрицы $(i = \overline{1,k})$, $S_j - (m \times \mu)$ – матрицы $(j = \overline{1,k})$, $U - (\nu \times \mu)$ – матрица.

В большинстве практических случаев $\nu = \mu = m = n$. Ниже в основном рассматривается этот случай.

Общий способ решения линейных матричных уравнений (ЛМУ) вида (9.1) основан на приведении уравнения (9.1) к векторно-матричному уравнению

$$T\overline{M} = \overline{U} \qquad (9.2)$$

с использованием кронекеровского произведения матриц, так что

$$T = R_1 \otimes S_1^T + R_2 \otimes S_2^T + ... + R_k \otimes S_k^T, \qquad (9.3)$$

где $\otimes$ – символ кронекеровского произведения матриц, векторы $\overline{M}$ и $\overline{U}$ имеют структуру

$$\overline{M} = \left[M_1^T, M_2^T, ..., M_n^T\right]^T, \ \overline{U} = \left[U_1^T, U_2^T, ..., U_n^T\right]^T, \qquad (9.4)$$

M_i, U_i – i-й столбец соответственно матриц M и U, $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Векторно-матричное уравнение (9.2) с матрицей (9.3) и векторами (9.4) становится уравнением размерности n^2. Решение уравнения (9.2) находится стандартным способом в форме

$$\overline{M} = T^{-1}\overline{U}. \qquad (9.5)$$

Из полученного столбца далее формируется матрица

$$M = \left[M_1 \vdots M_2 \vdots \ \dots \vdots M_n\right].$$

В прикладных задачах управления уравнение (9.1) чаще принимает вид

$$MS+RM=U. \qquad (9.6)$$

Такое уравнение появляется всякий раз, когда на траекториях системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0), \quad \{\dot{x}(t) \overset{\Delta}{=} \frac{dx(t)}{dt}\} \qquad (9.7)$$

изучается поведение функции состояния в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Px \quad (P > 0)$$

с наперед заданным способом измерения скорости ее изменения как функции состояния

$$\dot{V}(x) = x^T Qx \quad (Q \geq 0).$$

Матрицы P и Q не независимы, и на траекториях устойчивой системы (9.7) должны удовлетворять матричному уравнению вида (9.6)

$$F^T P + PF = -Q\,, \tag{9.8}$$

которое именуется *уравнением Ляпунова*.

Такие же уравнения появляются, когда для объекта управления (ОУ), описываемого векторно-матричными уравнениями

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + Bu(t), \qquad y(t) = Cx(t)\,, \tag{9.9}$$

где $\mathrm{A} - (n \times n)$ – матрица состояния ОУ, $B - (n \times r)$– матрица управления, $C - (m \times n)$ – матрица выхода, $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^r$ – вектор управления, $y \in R^m$ – вектор выхода; ищется закон управления по состоянию ОУ в виде линейной обратной связи с матрицей K $u(t) = -Kx(t)$ или строится специальное техническое устройство для оценки состояния ОУ по результатам измерения выхода объекта, реализующего векторно-матричное соотношение $x_e(t) = Mx(t)$, где $x_e(t)$ – оценка вектора $x(t)$ состояния ОУ.

В первом случае выражение (4.6) принимает вид

$$M\Gamma - \mathrm{A}M = -BH\,, \tag{9.10}$$

где (*Г*, *Н*) полностью наблюдаемая пара матриц, задающая эталонную модель поведения ОУ с желаемыми свойствами в произвольном, удобном для вычислений базисе.

Во втором случае (9.6) принимает вид

$$MA - \Gamma M = HC\,, \tag{9.11}$$

где (*Г*, *Н*) полностью управляемая пара матриц, задающая желаемую динамику оценивающего устройства (оценщика, наблюдателя). Уравнения (9.10) и (9.11) называются *уравнениями Сильвестра.* Причем уравнения (9.10), (9.11) в силу наличия правой части являются неоднородными.

Подобное уравнение, но уже однородное, появляется при решении задачи преобразования базиса в эквивалентных формах

$$x = M\bar{x},\;\; \bar{x} = M^{-1}x\,,$$

где *x* вектор состояния в исходном базисе, $\bar{x}$ – в базисе приведения, *М* – матрица преобразования базисов. В этом случае уравнение принимает вид

$$M\bar{A} - AM = 0\,. \tag{9.12}$$

Условием единственности решения матричного уравнения (9.6) при $U \neq 0$ является отсутствие пересечения спектров собственных значений матриц *S* и –*R* , т.е. $\sigma\{S\} \cap \sigma\{-R\} = 0$. Напротив, условием нетривиальной разрешимости уравнения (9.6) при $U = 0$ является совпадение спектров собственных значений матриц *S* и *R*, т.е. выполнения равенства $\sigma\{S\} = \sigma\{-R\}$.

Рассмотрим способы решения матричного уравнения (9.6).

1[й] способ (покоординатный или поэлементный)

При этом способе решения уравнения (9.6) строятся n^2 скалярных соотношений вида

$$M^i S_j + R^i M_j = U_{ij}, \qquad (9.13)$$

где $M^i, R^i - i$-е строки матрицы M и R, $S_j, M_j - j$-е столбцы матриц S и M, $U_{ij} - (i, j)$-ый элемент матрицы U. В результате приведения подобных членов получается система, содержащая n^2 условий для n^2 неизвестных M_{ij} матрицы M, которая решается стандартными методами линейной алгебры.

2[й] способ (с использованием кронекеровского произведения матриц).

Уравнение (4.6) легко приводится к уравнению вида (9.2), где матрица T принимает вид

$$T = I \otimes S^T + R \otimes I. \qquad (9.14)$$

3[й] способ (с использованием итеративной процедуры)

Рассмотрим матрицу $Z(t)$, определяемую решением дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Z}(t) = RZ + ZS - U, \quad Z(0). \qquad (9.15)$$

Прямой подстановкой в выражение (9.15) нетрудно убедиться, что решение уравнения имеет вид

$$Z(t) = e^{Rt} Z(0) e^{St} - \int_0^t e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau.$$

Если $\lim\limits_{t\to\infty} e^{Rt} Z(0) e^{St} = 0$, то очевидно, что

$$M = \lim_{t\to\infty} Z(t) = -\int_0^\infty e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau. \qquad (9.16)$$

Построим суммарное приближение интегрального выражения (9.16) в виде

$$\int_0^\infty e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau = \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{\infty} e^{Rhk} U e^{Shk}. \qquad (9.17)$$

Если для матричных экспонент использовать аппроксимацию Е. Девисона:

$$e^{Rh} = \Gamma_R = [12I - 6hR + h^2 R^2]^{-1} [12I + 6hR + h^2 R^2]$$

$$e^{Sh} = \Gamma_S = [12I - 6hS + h^2 S^2]^{-1} [12I + 6hS + h^2 S^2],$$

то получим

$$e^{Rhk} = \Gamma_R^K, \; e^{Shk} = \Gamma_S^k.$$

Для суммарного представления интеграла можно записать

$$\int_0^\infty e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau = \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} h\Gamma_R^k U \Gamma_S^k .$$

Введем в рассмотрение частичную сумму

$$M(N) = -\sum_{k=0}^{N} h\Gamma_R^k U\Gamma_S^k = -h[U + \Gamma_R U\Gamma_S + \ldots + \Gamma_R^N U\Gamma_S^N].$$

На базе частичной суммы нетрудно построить рекуррентную процедуру

$$M(N+1) = M(N) - \Gamma_R^{N+1}(hU)\Gamma_S^{N+1}, \quad M(0) = -hU . \tag{9.18}$$

Тогда искомая матрица M найдется в результате предельного перехода

$$M = \lim_{N \to \infty} M(N)$$

Алгоритм решения уравнения (9.6) принимает следующий вид:

1) выбор шага дискретизации h из условия

$$h \le \frac{\alpha}{|\lambda_{\max}|}, \ \lambda_{\max} = \max_{i,j}(\lambda_i, \lambda_j),$$

где λ_i – собственные значения матрицы R; λ_j – собственные значения матрицы S; α – константа;

2) вычисление матриц Γ_R, Γ_S;

3) вычисление матрицы $M(0) = -hU$;

4) для шагов рекуррентной процедуры $N = 1,2,\ldots$ вычисление матрицы

$$M(N+1) = M(N) - \Gamma_R[\Gamma_R^N(hU)\Gamma_S^N]\Gamma_S;$$

5) правило останова рекуррентной процедуры

$$\|\Delta(N)\| = \|M(N+1) - M(N)\| \le \varepsilon ,$$

где ε рекомендуется выбирать в пределах от 10^{-7} до 10^{-5}; в качестве правила останова можно использовать условие

$$|tr\Delta(N)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ii}(N)\right| \le \varepsilon .$$

<u>4^й способ (решение частного вида уравнения (4.6) в форме (4.12))</u>

Рассмотрим случай, когда матрица $\overline{A}$ представима в диагональной форме $\overline{A} = diag\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$, где λ_i – собственные значения матрицы A, определяемые из решения характеристического уравнения

$$\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0 . \tag{9.19}$$

Запишем уравнение (9.12) в столбцовой форме

$$[M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} = A[M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n], \quad (9.20)$$

где $M_i - i$-й столбец искомой матрицы M, $i = \overline{1,n}$. Полученная столбцовая форма уравнения (9.12) позволяет для каждого столбца M_i записать

$$AM_i = \lambda_i M_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (9.21)$$

Из выражения (4.21) следует, что M_i– собственный вектор матрицы A, соответствующий i-му собственному значению λ_i этой матрицы. Таким образом, искомая матрица $M = [M_1 \quad M_2 \quad \cdots \quad M_n]$ – матрица *модального преобразования* построена на собственных векторах матрицы A. Из сказанного становится ясно, что решение матричного уравнения (9.12) не единственное, так что матрица $\widetilde{M}$ вида

$$\widetilde{M} = M\, diag\{\alpha_i; \alpha_i \in R, i = \overline{1,n}\}$$

также является решением уравнения (9.20), а, следовательно, и (9.12).

Пусть матрица A не диагонализируема, тогда матрица $\overline{A}$ в уравнении (9.12) представима в жордановой форме

$$\overline{A} = diag\{J_k, k = \overline{1,l}\} \qquad (9.22)$$

где $J_k = J\{\lambda_k\}$ – k-я жорданова клетка, λ_k $\left(k = \overline{1,l}\right)$ имеет кратность ν_k, так что $\sum\limits_{k=1}^{l} \nu_k = n$.

С учетом структуры жордановых клеток J_k из уравнения (9.22) получаем

$$AM_1 = \lambda_1 M_1,$$

$$AM_2 = \lambda_2 M_2 + M_1,$$

$$\vdots$$

$$AM_{i+1} = \lambda_j M_{i+1} + M_i, \ j = \overline{1,l}\ ;\ i = \overline{1,n-1}.$$

Таким образом, матрица M в случае, когда матрица $\overline{A}$ имеет жорданову форму, ищется с помощью рекуррентной процедуры

$$AM_1 = \lambda_1 M_1, AM_{i+1} = \lambda_j M_{i+1} + M_i, \ j = \overline{1,l}\ ;\ i = \overline{1,n-1}.$$

<u>5[й] способ (решение частного вида уравнения (9.6) в форме (9.10))</u>

Рассмотрим случай, когда матрица Г задается в диагональной форме $\Gamma = diag\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$. В этом случае столбцовая форма уравнения (4.10) $M\Gamma - AM = BH$ принимает вид

$$[M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} = A[M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n] = , \qquad (9.23)$$

$$= B[H_1 \quad H_2 \quad \dots \quad H_n]$$

где H_i – i-ый столбец матрицы H $(i=\overline{1,n})$.В силу представления уравнения (9.10) в форме (9.23) можно записать

$$\lambda_i M_i - AM_i = BH_i$$

или

$$M_i = (\lambda_n I - A)^{-1} BH_i, i = \overline{1,n}.$$

Тогда искомая матрица M примет вид

$$M = [(\lambda_1 I - A)^{-1} BH_1 \vdots (\lambda_2 I - A)^{-1} BH_2 \vdots \dots \vdots (\lambda_n I - A)^{-1} BH_n]. \qquad (9.24)$$

Из выражения (9.24) видно, что условие существования матрицы M сводиться к условию существования матрицы $(\lambda_i I - A)^{-1}$, что выполняется, если $\lambda_i \notin \sigma\{A\}$, где λ_i – собственное значение матрицы $Г$.

Пусть теперь матрица $Г$ не диагонализируема, тогда ее можно записать в канонической жордановой форме: $Г = diag\{J_k\}$, где $J_k = J\{\lambda_k\}$ – k-ая жорданова клетка, $\lambda_k (k=\overline{1,e})$ имеет кратность ν_k так, что $\sum_{k=1}^{\ell} \nu_k = n$. Тогда подобно предыдущему случаю для отыскания матрицы M будем иметь рекуррентную процедуру

$$M_1 = (\lambda_1 I - A)^{-1} BH_1, M_{i+1} = (\lambda_j I - A)^{-1}(BH_{i+1} - M_i), j = \overline{1,k}; i = \overline{1,n-1}$$

6[й] способ (решение частного вида уравнения (9.6) в форме (9.11))

Рассмотрим сначала случай, когда матрица $Г$ имеет диагональную форму, т.е. $Г = diag\{\lambda_i,\ i=\overline{1,n}\}$. В этом случае уравнение (9.11) $MA - ГM = HC$ в строчной форме принимает вид

$$\begin{bmatrix} M^1 \\ M^2 \\ \vdots \\ M^n \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \vdots \\ H^n \end{bmatrix} C, \qquad (9.25)$$

где $M^i - i$-я строка матрицы M $(i=\overline{1,n})$, $H^i - i$-я строка матрицы H $(i=\overline{1,n})$. Из матричного соотношения (9.25) можно записать

$$M^i(A - \lambda_i I) = H^i C,$$

откуда для M^i получим

$$M^i = H^i C(A - \lambda_i I)^{-1}. \qquad (9.26)$$

В итоге искомая матрица M принимает вид

$$M = \begin{bmatrix} H^1 C(A - \lambda_1 I)^{-1} \\ H^2 C(A - \lambda_2 I)^{-1} \\ \vdots \\ H^n C(A - \lambda_n I)^{-1} \end{bmatrix}.$$

В случае, когда матрица Γ имеет каноническую жорданову форму $\Gamma = diag\{J_k, k = \overline{1,l}\}$, где $J_k = J\{\lambda_k\}$, $\lambda_k\ (k = \overline{1,l})$, имеет кратность ν_k так, что $\sum_{k=1}^{l} \nu_k = n$. Аналогично рассмотренному случаю получим рекуррентную процедуру, записанную в силу строчной структуры представления исходного уравнения (9.11) в обратном порядке:

$$M^n \mathrm{A} - \lambda_\ell M^n = H^n C$$

$$M^{n-1} \mathrm{A} - \lambda_{\ell-1} M^{n-1} = H^{n-1} C + M^n,$$

$$\vdots$$

$$M^{n-i} \mathrm{A} - \lambda_j M^{n-i} = H^{n-i} C + M^{n-i+1}.$$

В итоге для элементов матрицы M имеем

$$M^n = H^n C(A - \lambda_\ell I)^{-1}$$

$$M^{n-i} = (H^{n-i} C + M^{n-i+1})(A - \lambda_j I)^{-1};\ i = 1, n-1;\ j = \overline{1,l}.$$

Рассмотренные способы решения матричного уравнения Сильвестра не исчерпывают весь банк способов, с некоторыми из них можно ознакомиться в приводимой литературе. При этом необходимо отметить проблему вычислительной устойчивости рассмотренных матричных уравнений, которую можно проконтролировать с помощью $C\{MУ\}$ – числа обусловленности «матричного уравнения», вычисляемого на примере матричного уравнения общего вида

$$PQ + QR = S \qquad (9.27)$$

относительно матрицы Q в силу соотношения

$$C\{MУ\} = \max_{i,j}\{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\}\left[\min_{i,j}\{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\}\right]^{-1}. \qquad (9.28)$$

Примеры и задачи

9.1.* Определить, разрешимо ли матричное уравнение $MS + RM = U$ относительно матрицы M, если матрицы S, R и U принимают значения

$$U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix};\ -R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix}.$$

9.2. Определить, разрешимы ли матричные уравнения вида $MS+RM=U$ относительно матрицы M, а в случае разрешимости решить первым способом при:

а) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 10 & 7\end{bmatrix};$

б) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 0 & -5\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}0 & 10\\ -1 & 7\end{bmatrix};$

в) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -5\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 7 & -1\end{bmatrix};$

г) $U=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};$

д) $U=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 10\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & 9\end{bmatrix};\ R=\begin{bmatrix}4 & 0{,}707\\ 0{,}707 & 3\end{bmatrix}.$

9.3. Решить матричное уравнение $MS+RM=U$, используя кронекеровское произведение матриц и приведение уравнения к векторно – матричному виду для матриц S,R и U из примеров а) - д) задачи 9.2.

9.4. Используя матричное уравнение (4.12), найти матрицы модального преобразования M, приводящие к диагональному виду следующие матрицы.

а) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix};$ б) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix};$ в) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & -2\end{bmatrix};$

г) $\begin{bmatrix}-5 & 2 & -5\\ -2 & -1 & -8\\ 2 & -3 & -2\end{bmatrix};$ д) $\begin{bmatrix}6 & 3 & 8\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix};$ е) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix};$

ж) $\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ 4 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix};$ з) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & -6 & -4\\ -1 & 4 & 7\end{bmatrix};$ и) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 3\\ -4 & 2 & -1\end{bmatrix}.$

9.5. Путем перестановки произвольных столбцов матрицы преобразования M убедиться, что в диагональных матрицах, подобных матрицам а)$\div$и) задачи 9.4, происходит согласованная с перестановкой столбцов перестановка собственных чисел на диагонали.

9.6. Найти матрицу преобразования подобия M для следующих пар подобных матриц:

а) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & 81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix};$ б) $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{bmatrix};$ г) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{bmatrix}$

д) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{bmatrix};$

е) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{bmatrix};$

ж) $\begin{bmatrix} 6 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

9.7. Используя формулу (9.24) для матрицы M, решить матричное уравнение (9.6) частного вида (9.10), где матрица Γ – диагональная матрица для следующих композиций спектра $\sigma\{\Gamma\}$ матрицы Γ и значений матриц A, B, H:

а) $\sigma\{\Gamma\} = \{2, -5\}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix};$

б) $\sigma\{\Gamma\} = \{-3, -4\}$, $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix};$

в) $\sigma\{\Gamma\} = \{-1, -2, -6\}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$

г) $\sigma\{\Gamma\} = \{-2, -4, -6\}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

д) $\sigma\{\Gamma\} = \{-1, -3, -5\}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

e) $\sigma\{\varGamma\} = \{-3, -7, -11\}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение вариантов задач

Решение задачи 9.1. Как указывалось в теоретической части, уравнение (9.6) при нулевой правой части имеет нетривиальное решение $M \neq 0$ в случае, если спектры матрицы S и $-R$ совпадают, т.е. $\sigma\{S\} = \sigma\{-R\}$. Таким образом, первым шагом решения задачи является установление факта совпадения спектров матриц S и $-R$. Характеристические уравнения матриц S и $-R$ принимают вид

$$\det(\lambda I - S) = \det\left[\begin{array}{c:c} \lambda + 5 & 0 \\ \hdashline -4 & \lambda + 2 \end{array}\right] = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0,$$

$$\det(\lambda I + R) = \det\left[\begin{array}{c:c} \lambda & -1 \\ \hdashline 10 & \lambda + 7 \end{array}\right] = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Из приведенных характеристических уравнений матриц S и $-R$ видно, что они идентичны, а, следовательно, спектры матриц совпадают. Таким образом, уравнение $MS + RM = 0$ имеет нетривиальное решение. Найдем матрицу M, используя первый, поэлементный способ. Уравнение $MS + RM = 0$ в поэлементной форме запишется:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы и сложив их поэлементно, получим матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} -5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} & -2m_{12} - m_{22} \\ 2m_{21} + 10m_{11} + 4m_{22} & 10m_{12} + 5m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если две матрицы равны, то равны их элементы с одинаковыми индексами, в силу чего для элементов матриц M получим систему скалярных соотношений

$$-5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} = 0, \quad -2m_{12} - m_{22} = 0;$$

$$2m_{21} + 10m_{11} + 4m_{22} = 0, \; 10m_{12} + 5m_{22} = 0.$$

Очевидно, что число линейно независимых условий в полученной системе только два. Воспользуемся первыми двумя соотношениями:

$$-5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} = 0; \quad -2m_{12} - m_{22} = 0.$$

Система уравнений относительно элементов матрицы M оказалось недоопределенной, так как содержит два уравнения относительно четырех неизвестных. Зададим два недостающих условия, положив, к примеру, $m_{11}=1, m_{12}=1$. Матрица M в результате принимает вид

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матрица M^{-1}, обратная M, равняется $M^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Покажем, что матрицы S и R, связанные друг с другом матричным уравнением (9.12), при известных матрицах M и M^{-1} могут быть найдены друг из друга с помощью отношений подобия:

$$S=-M^{-1}RM,\ R=-MSM^{-1}.$$

Действительно,

$$-M^{-1}RM=-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}=S$$

и, наоборот,

$$-MSM^{-1}=-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}=R.$$

В заключение заметим, что произвольность назначения двух элементов матрицы M не сказалось на выполнении соотношения подобия, т.е. на связи матрицы S и R. Положим теперь $m_{11}=3$ и $m_{12}=5$, в этом случае матрицы M и M^{-1} принимают вид

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & -3/55 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения подобия матриц S и $-R$, для последних получаем

$$-M^{-1}RM=-\begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & -3/55 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}=S,$$

$$-MSM^{-1}=-\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & -3/55 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}=R.$$

10. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА В. КОТЕЛЬНИКОВА–К. ШЕННОНА

Проблема дискретного представления сигналов как элементов функционального пространства $x(t) \in L^2(T)$ имеет две *постановочные версии*.

В первой постановочной версии, именуемой *прямой задачей* дискретного представления сигналов, ставится задача сопоставления произвольного сигнала $X(t)$ с ограниченной энергией, т.е. $x(t) \in L^2(T)$ его дискретному численному представлению. Эта задача сводится к нахождению отображения пространства $L^2(T)$ в пространство $R^n(C^n)$, где n выбирается из соображений обеспечения допустимой погрешности представления.

Прямой подход к решению такой задачи состоит в выборе некоторого n-мерного подпространства $L^2(T)$, натянутого на систему линейно независимых функций, именуемых *базисными функциями* и образующих *функциональный базис*.

Если $\varphi_i(t), (i = \overline{1,n})$ – система *линейно независимых функций* в $L^2(T)$, то для $t \in T$ условие

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t) = 0 \tag{10.1}$$

выполняется почти всюду тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0, (i = \overline{1,n})$. Введем в рассмотрение линейное подпространство L^n, натянутое на базисные функции $\varphi_i(t)$, т.е. $L^n = L\{\varphi_1(t)\}$. Тогда, если $x(t) \in L^n$, то он представим в виде линейной комбинации

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t),\ t \in T = \{t : t_0 \le t \le t_k\}, \tag{10.2}$$

при этом набор коэффициентов $\alpha_i\,(i = \overline{1,n})$ образует вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T \in R^n(C^n).$

Напомним, что $L^2(T)$ есть пространство со *скалярным произведением*, определяемым выражением

$$(x, y) \underline{\underline{\Delta}} \int_T x(t) y^*(t) dt\,. \tag{10.3}$$

Тогда искомое представление сигнала $x(t)$ в $R^n(C^n)$ в виде вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ найдется из векторно-матричного соотношения, полученного из (10.2)–(10.3):

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_2) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_1,\varphi_n) & (\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x,\varphi_1) \\ (x,\varphi_2) \\ \vdots \\ (x,\varphi_n) \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

или в свернутой форме:

$$G\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = G^{-1}\beta, \tag{10.5}$$

где

$$\beta = col\{(x,\varphi_i); i = \overline{1,n}\}; \tag{10.6}$$

$$G = row\{col\lfloor(\varphi_i,\varphi_j); i = \overline{1,n}\rfloor; j = \overline{1,n}\}. \tag{10.7}$$

Матрица G, определенная в форме (10.7) называется *матрицей Грама.* Она может быть использована для оценки линейной зависимости системы функций $(\varphi_i,\varphi_j,\ i,j=\overline{1,n})$. Критерием линейной независимости функций φ_i и φ_j является положительность определителя матрицы Грама

$$\det G = \det\{(\varphi_i,\varphi_j);\quad i,j=\overline{1,n}\} > 0.$$

Если $x(t) \notin L^n$, то для любого вектора $x(t) \in L^2(T)$ существует единственный вектор $\hat{x} \in L^n$, задаваемый представлением

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}(x,\theta_i)\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(t), \tag{10.8}$$

причем такой, что:

вектор разности (невязка) $\eta = x - \hat{x}$ ортогонален всем векторам из L^n, в силу чего выполняется неравенство:

$\|\eta\| = \| x - \hat{x} \| < \|x - \tilde{x}\|$, где $\tilde{x}$ – любой, но такой, что $\tilde{x} \neq \hat{x}$, вектор из L^n.

Очевидно, справедливо $\hat{x}$ именовать ортогональной проекцией $x \in L^2(T)$ на $L^n, \eta = x - \hat{x}$ – вектором невязки, представляющим собой погрешность приближения x вектором $\hat{x}$.

Нетрудно видеть, что погрешность η представления элемента $x(t)$ в форме его проекции $\hat{x}(t)$ может быть охарактеризована ее абсолютной оценкой Δ_η и относительной оценкой δ_η, соответственно задаваемых выражениями

$$\Delta_\eta = \|\eta = x - \hat{x}\|;\ \delta_\eta = \Delta_\eta / \|x\|.$$

Вернемся к выражению (8.8), в нем $\theta_i(i=\overline{1,n})$ – элементы взаимных базисных функций, которые представимы в виде линейной комбинации $\{\varphi_i\}$ так, что

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} \varphi_j(t), \quad (10.9)$$

причем

$$(\varphi_i, \theta_k) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}^{*} (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \quad (10.10)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

В матричной форме соотношение (10.10) записывается следующим образом:

$$\Gamma^{*} G = I \Rightarrow \Gamma = [G^{-1}]^{*}. \quad (10.11)$$

Тогда с использованием взаимного базиса $\{\theta_i, i = \overline{1,n}\}$ для α_i можно записать

$$\alpha_i = (x, \theta_i), i = \overline{1,n}. \quad (10.12)$$

Очевидно, как и в случае конечномерных линейных пространств, в качестве базиса предпочтительнее использовать систему *ортонормированных функций*.

Систем ортонормированных базисных функций достаточно много. Ниже приводится наиболее употребительные из них.

1. *Комплексные гармонические функции (базис Фурье)*

Пусть $L^2(T): T = \left\{t : -T/2 \le t \le T/2\right\}$; тогда $\hat{x}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{j\omega_k t}$,

где $\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\omega_k t} dt; \varphi_k = e^{j\omega_k t}, \omega_k = k\omega, \omega = 2\pi/T$.

2. *Полиномы Лежандра*

$$T = \{t : -1 \le t \le 1\}$$

$$\varphi_0(t) = 1/\sqrt{2}; \varphi_1(t) = \sqrt{3/2}\, t;\ \varphi_2(t) = \sqrt{5/2}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right);$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{7/2}\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right);\ \varphi_4(t) = \sqrt{9/2}\left(\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}\right);$$

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} P_n(t),$$

$P_n(t)$ – полином Лежандра, определяемый выражением $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$, или в рекуррентной форме:

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(t).$$

3. *Полиномы Чебышева*

$T = \{t : -1 \le t \le 1\}$. В отличие от приведенных выше систем базисных функций полиномы Чебышева образуют систему ортонормированных функций с неединичным весом $(w \ne 1)$, т.е.

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\omega = \delta_{ij},$$

где

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\omega \underline{\underline{\Delta}} \int_T w(t)\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt, \quad w(t) > 0.$$

Полиномы Чебышева характеризуются весом $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, сами же функции $\varphi_n(t)$ строятся с помощью рекуррентной процедуры:

$$\varphi_n(t) = 2^n (2\pi)^{-1/2} T_n(t), \quad n = 0,1,2...,$$

где $T_n(t)$ – полином Чебышева n-го порядка, определяемый соотношениями

$$T_0(t) = 1; \qquad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos t), n \ge 1.$$

4. *Функции Лагерра*

$$T = \{t : 0 \le t < \infty\}; \quad w(t) = e^{-t};$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t), \quad n = 0,1,2,...$$

где $L_n(t)$ – полином Лагерра, определяемый соотношением

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t});$$

или рекуррентно:

$$L_n(t) = (2n-1-t)L_{n-1}(t) - (n-1)^2 L_{n-2}(t).$$

5. *Функции Эрмита*

$$T = \{t : -\infty < t < \infty\}, \qquad w(t) = e^{-t^2},$$

$$\varphi_n(t) = (2^n n! \pi^{1/2})^{-1/2} H_n(t), \quad n = 0,1,2,...,$$

где $H_n(t)$– полином Эрмита, определяемый соотношением

$$H_n(t) = (-1^n) e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}),$$

или рекуррентно с помощью процедуры:

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t).$$

6. *Функции Уолша*

$$T = \{t : 0 \le t \le 1\}, \quad \omega(t) = 1.$$

Для задания функции Уолша используют два *индекса*, т.е. базисная функция $\varphi_n(t)$ записывается в форме $\varphi_n^k(t)$ с двумя индексами (n и k). Функции $\varphi_n^k(t)$ определяются соотношениями:

$$\varphi_0(t) = 1; \quad 0 \le t \le 1;$$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 1/2 \\ -1; & 1/2 < t \le 1; \end{cases}$$

$$\varphi_2^1(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t < 1/4; \quad 3/4 < t < 1; \\ -1; & 1/2 < t < 3/4; \end{cases}$$

$$\varphi_2^2(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t < 1/4; \quad 1/2 < t < 3/4; \\ -1; & 1/4 < t < 1/2; \quad 3/4 < t \le 1 \end{cases}$$

…………………………………………………

$$\varphi_{m+1}^{(2k-1)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); \quad 0 \le t < 1/2; \\ (-1)^{k+1}\varphi_m^{(k)}(2t-1); \\ 1/2 < t \le 1; \end{cases}$$ ■

$$\varphi_{m+1}^{(2k)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); & 0 \le t < 1/2; \\ (-1)^k \varphi_m^{(k)}(2t-1); & 1/2 < t \le 1; \end{cases}$$

Во второй постановочной версии, именуемой *обратной задачей* дискретного представления сигналов рассматривается непрерывный сигнал $x(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле (ограниченность, кусочная непрерывность, наличие конечного числа разрывов первого рода и отсутствие разрывов второго рода). Сигнал $X(t)$ имеет ограниченный частотный Фурье-спектр $X(j\omega)$ в том смысле, что

$X(j\omega) \ne 0$ при $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$;

$X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$,

где $X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = \mathsf{F}\{X(t)\}$.

Построим дискретное представление сигнала $x(t)$ в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{10.13}$$

в котором $\alpha_k = x(k\Delta t)$ – отсчеты непрерывной функции $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$.

Возникают естественные вопросы:

1. С каким интервалом дискретности Δt следует снимать отсчеты $x(k\Delta t)$?
2. Каковыми должны быть базисные функции $\varphi_k(t)$ в

представлении (10.13) с тем, чтобы невязка $\widetilde{x}(t)$

$$\widetilde{x}(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \qquad (10.14)$$

этого представления обладала нормой $\|\widetilde{x}(t)\|$ сколь угодно близкой к нулю?

На эти вопросы отвечает

Теорема В. Котельникова–К. Шеннона (ТКШ).

Пусть непрерывный сигнал $X(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле так, что к нему может быть применено преобразование Фурье, и при этом обладает ограниченным частотным спектром $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$.

Тогда дискретное представление сигнала (10.13) обладает нулевой невязкой (10.14), если

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_m};\ \varphi_k(t) = \frac{\sin[\omega_m(t - \Delta tk)]}{\omega_m(t - \Delta tk)}; \alpha_k = x(k\Delta t). \qquad (10.15)$$

Доказательство.

В силу преобразуемости по Фурье для сигнала $x(t)$ оказываются справедливыми интегральные преобразования Фурье

$$F\ \{X(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt.$$

Учтем ограниченность спектра $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$, тогда для обратного интеграла Фурье получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega) e^{j\omega t} dt. \qquad (10.16)$$

Но $X(j\omega)$ в силу ограниченности спектра предствим бесконечным рядом по частоте, записываемым в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=\infty}^{\infty} C_k e^{j\Delta_k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega}, \qquad (10.17)$$

где $\Delta_k = k\Delta = k\dfrac{2\pi}{2\omega_m} = k\dfrac{\pi}{\omega_m}$.

Введем обозначение $\dfrac{\pi}{\omega_m} = \Delta t$, тогда становится справедливой запись ряда (10.17) в форме

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\Delta t\omega}, \tag{10.18}$$

при этом коэффициенты ряда C_k вычисляются в силу соотношения

$$x(t)=\frac{1}{2\omega_m}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}X(j\omega)e^{-jk\omega\Delta t}d\omega. \tag{10.19}$$

Сравнивая представления (10.16) и (10.19) нетрудно установить для моментов времени $t=k\Delta t$ выполнение равенства

$$C_k=\frac{\pi}{\omega_m}x(-k\Delta t). \tag{10.20}$$

Подставим выражение (10.20) в ряд Фурье (10.18)

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\Delta t\omega}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_m}X(-k\Delta t)e^{jk\Delta t\omega}.$$

Если спектральную функцию $X(j\omega)$ исходного сигнала $x(t)$ полученного выше вида подставить в обратный интеграл Фурье (10.16), то для сигнала $x(t)$ получим представление

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\omega_m}X(-k\Delta t)e^{jk\Delta t\omega}e^{j\omega t}d\omega.$$

Произведем в полученном выражении замену $k=-k$, тогда получим представление

$$x(t)=\frac{1}{2\omega_m}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)e^{j\omega(t-k\Delta t)}d\omega=\frac{1}{2\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\int_{-\omega_m}^{\omega_m}e^{j\omega(t-k\Delta t)}d\omega.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m}e^{j\omega(t-k\Delta t)}d\omega=\frac{1}{j(t-k\Delta t)}e^{j(t-k\Delta t)\omega}\Big|_{-\omega_m}^{\omega_m}=$$

$$=\frac{1}{j(t-k\Delta t)}\left\{e^{j(t-k\Delta t)\omega_m}-e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m}\right\}=$$

$$=\frac{2}{(t-k\Delta t)}\frac{e^{j(t-k\Delta t)\omega_m}-e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m}}{2j}=2\frac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}.$$

Подставим полученное представление интеграла в выражение для оригинала $x(t)$, тогда будем иметь

$$x(t)=\frac{1}{2\omega_m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\,2\,\frac{sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)}=$$

$$= \sum_{k}^{\infty} x(k\Delta t)\ \frac{sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k\ ,$$

$$где \alpha_k = x(k\Delta t); \varphi_k(t) = \frac{sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}; \Delta t = \frac{\pi}{\omega_m}.$$ ■

Примечание 10.1(ПР10.1).

Базисная функция $\varphi_k(t) = \dfrac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}$ называется функцией *отсчета*, она обладает свойствами:

1. при $t = k\Delta t$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ в силу первого замечательного предела обладает максимумом, равным единице;

2. в моменты времени t кратные Δt, так что $t = \pm l(\Delta t)$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ принимает нулевое значение;

3. на бесконечно большом интервале времени функции отсчета с различными индексами $\varphi_\nu(t)$ и $\varphi_\mu(t)$ ортогональны, так что система базисных функций $\varphi_k(t) = \dfrac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}$ является системой ортогональных базисных функций.

Примеры и задачи

10.1.*Построить конечномерную систему базисных функций $\left\{\varphi_i(t); i = \overline{1,n};\ t \in T\right\}$ по следующим данным:

$T = [0,1]; n = 3;\quad \psi_1(t) = 1;\quad \psi_2(t) = t,\quad \psi_3(t) = t^2.$

Определить $C_{ij}\ (i, j = \overline{1,3})$, при которых функции $\varphi_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}\psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис.

10.2. Построить конечномерные системы базисных функций $\left\{\varphi_i(t), i = \overline{1,n}; t \in T\right\}$ по следующим данным:

$T = [0,1];\quad n = 3;\quad \psi_1(t) = 1;\quad \psi_2(t) = t;\quad \psi_3(t) = t^2.$

Определить $C_{ij}(i, j = \overline{1,n})$, при которых функции $\varphi_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}\psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис.

10.3. Решить задачу 10.2 для функций:

$\psi_1(t) = 1;\quad \psi_2(t) = e^{-t};\quad \psi_3(t) = e^{-2t}.$

10.4. Решить задачу 10.2 для функций:

$\psi_1(t) = 1;\quad \psi_2(t) = e^{t};\quad \psi_3(t) = e^{2t}.$

10.5. Дано $T=[-1,1]$; $n=3$; $\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=t$; $\psi_3(t)=t^2$. Определить $C_{ij}\,(i,j=\overline{1,n})$, при которых функции $\varphi_i(t)=\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}\psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис. Проверить полученную систему функций на ортонормированность.

10.6. Решить задачу 10.5 для

$\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=e^{-t}$; $\psi_3(t)=e^{-2t}$.

10.7. Решить задачу 10.5. для

$\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=e^{t}$; $\psi_3(t)=e^{2t}$.

10.8. Дано $T=[0,1]$; $n=3$. Определить, образуют ли базисные системы следующие наборы функций:

а) $\varphi_1(t)=-1/3$; $\varphi_2(t)=1+2t$; $\varphi_3(t)=2-\sqrt{2}t+5t^2$;

б) $\varphi_1(t)=3$; $\varphi_2(t)=1-3e^{-t}$; $\varphi_3(t)=1+e^{-t}+e^{-2t}$;

в) $\varphi_1(t)=10$; $\varphi_2(t)=2-e^{t}$; $\varphi_3(t)=1+2e^{t}-4t^{2t}$.

10.9. Определить, образуют ли ортонормированные функции $\varphi_i(t)$ примера 10.2 также ортонормированный базис на интервале $T=[0\,,2]$.

10.10. Определить, образуют ли ортонормированные функции $\varphi_i(t)$ примера 10.5 и примера 10.6 ортонормированный базис на интервале $T=[-2\,,2]$.

10.11. Дан интервал $T=[0,1]$; $n=3$; система функций: $\varphi_1(t)=1$; $\varphi_2(t)=t$; $\varphi_3(t)=t^2$. Построить на функциях $\psi_i(t)$ ортонормированный базис с весом $w(t)=e^{-t}$.

10.12. Конечномерное представление сигналов $x(t)\in L^2(T)$. Дано $T=[0,\infty]$; $x(t)\in L^2(T)$; $x(t)=1$ при $0\le t\le 1$, $x(t)=0$ при $1<t<\infty$, а также система линейно-независимых функций: $\{\psi_i(t)\}=\{e^{-t},e^{-2t},e^{-3t}\}$.

Требуется найти:

а) конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^3$ сигнала $x\in L^2(T)$, где L^3 – подпространство, натянутое на $\psi_i(t)$;

б) конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^3$ сигнала $x\in L^2(T)$, где L^3 – подпространство, натянутое на $\varphi_i(t)$; систему ортонормированных функций, построенных на $\psi_i(t)$:

в) ошибку конечномерного представления $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|$;

Решить задачу 10.2 для L^3, натянутого на систему линейно-независимых функций: $\{\psi_i(t)\} = \{1,\ t,\ t^2\};\ \ i = \overline{1,3}$.

10.13. Дано $T = [-1,\ 1];\quad x(t) \in L^2(T):\quad x(t) = -1$ при $-1 \le t \le 0,\quad x(t) = 0$ при $0 < t \le 1$. Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^3$ сигнала $x(t)$ и оценить норму ошибку представления $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$, где L^3 натянуто на:

а) первые три базисные функции Фурье;
б) первые три базисные функции Лежандра;
в) первые три базисные функции Чебышева.

10.14. Дано $T = [-1,\ 1];\quad x(t) \in L^2(T);\quad x(t) = 1$ при $t \in T$ и $x(t) = 0$ при $t \notin T$. Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала $x(t)$ и норму ошибки представления $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$, натянутого на базисные функции Фурье для случаев: 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n = 5$; 4) $n = 10$.

10.15. Решить задачу 10.14 для случая базисных функций Лежандра.

10.16. На основе решения задачи 10.14 и 10.15 построить графические зависимости $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\| = f(n)$, где n – размерность пространства L^n для $n = 1, 2, 5, 10$.

10.17. Дано $T = [0, \infty),\quad x(t) \in L^2(T)$, $x(t) = \begin{cases} 2\ \text{при}\ 0 \le t < 1, \\ 1\ \text{при}\ 1 \le t < 2, \\ 0\ \text{при}\ 2 \le t < \infty. \end{cases}$.

Найти конечномерное представление сигнала $\hat{x}(t) \in L^n$, где L^n натянуто на базисные функции Лагерра для:
а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

10.18. Дано $T = [0, \infty),\quad x(t) \in L^2(T)\ x(t) = \begin{cases} 2\ \text{при}\ 0 \le t < 2 \\ 0\ \text{при}\ 2 \le t < \infty \end{cases}$.

Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала $x(t)$, где L^n натянуто на базисные функции Лагерра для:
а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

10.19. Решить задачу 10.18 для $x(t) \in L^2(T)$:

$$x(t)=\begin{cases}1 \ \textit{при} \ 0\le t\le 1\\ 0 \ \textit{при} \ 2\le t<\infty\end{cases}$$

10.20. Для задач 10.17, 10.18 и 10.19 построить зависимости $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|$ как функции числа членов представления n, где $n=1,\,2,\,5,\,10.$

10.21. Дано $T=[0,1]$, $x(t)\in L^2(T)$, $x(t)=\begin{cases}-1 \ \textit{при} \ 0\le t<1/3\\ 0 \ \textit{при} \ 1/3\le t<2/3\\ 1 \ \textit{при} \ 2/3\le t<1\end{cases}$

Найти конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^n$ сигнала $x(t)$ и норму ошибки представления $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|$, натянутого на базисные функции Уолша для:

а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=5$; г) $n=10$.

Решение вариантов задач

Решение задачи 10.1. Чтобы построить ортонормированный базис на линейно-независимых базисных функциях $\psi_1(t)=1,\psi_2(t)=t,\psi_3(t)=t^2$ для $T=[0,1]$, воспользуемся алгоритмом ортогонализации Грамма–Шмидта. В соответствии с этим алгоритмом получаем систему ортонормированных функций:

$$v_1(t)=\psi_1(t);\varphi_1(t)=\{\|v_1(t)\|\}^{-1}v_1(t);$$

$$v_2(t)=\psi_2(t)-(\varphi_1,\psi_2)\varphi_1(t);\varphi_2(t)=\{\|v_2(t)\|\}^{-1}v_2(t);$$

$$v_3(t)=\psi_3(t)-(\varphi_1,\psi_3)\varphi_1(t)-(\varphi_2,\psi_3)\varphi_2(t);\varphi_3(t)=\{\|v_3(t)\|\}^{-1}v_3(t).$$

В итоге получаем:

1. $v_1(t)=\psi_1(t)=1;\quad \|v_1(t)\|=1;\quad \varphi_1(t)=\psi_1(t)=1.$

2. $(\varphi_1,\psi_2)=\int\limits_T\varphi_1(t)\psi_2(t)\,dt=\int\limits_0^1 t\,dt=1/2;$

$$v_2(t)=t-1/2;\qquad \|v_2(t)\|=\left[\int\limits_T v_2^2(t)\,dt\right]^{1/2}=\left[\int\limits_0^1(t^2-t+1/4)\,dt\right]^{1/2}=\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\varphi_2(t)=\{\|v_2(t)\|\}^{-1}v_2(t)=2\sqrt{3}(t-1/2).$$

3. $(\varphi_1,\psi_3)=\int\limits_T \varphi_1(t)\psi_3(t)\,dt=\int\limits_0^1 t^2 dt=1/3$;

$(\varphi_2,\psi_3)=\int\limits_T \varphi_2(t)\psi_3(t)\,dt=\int\limits_0^1 2\sqrt{3}(t^3-\frac{1}{2}t^2)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{6}$;

$v_3(t)=t^2-t+1/6$; $\quad \|v_3(t)\|=\left[\int\limits_0^1 (t^2-t+1/6)^2\,dt\right]^{1/2}=0{,}255$;

$\varphi_3(t)=\left\{\|v_3(t)\|\right\}^{-1}v_3(t)=0{,}6536-3{,}922\,t+3{,}922\,t^2$.

Проверим на ортогональность пары построенных функций $(\varphi_1\varphi_2),(\varphi_1,\varphi_3),(\varphi_2,\varphi_3)$:

$(\varphi_1,\varphi_2)=\int\limits_0^1 2\sqrt{3}(t-1/2)dt=2\sqrt{3}(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t)\Big|_0^1=0;$

$(\varphi_1,\varphi_3)=\int\limits_0^1 (0{,}6536-3{,}922t+3{,}922t^2)dt=0;$

$(\varphi_2,\varphi_3)=\int\limits_0^1 2\sqrt{3}(t-1/2)(0{,}6536-3{,}922t+3{,}922t^2)dt=0.$

В итоге решения задачи получена система ортонормированных на $T=[0,1]$ функций:

$\varphi_1(t)=1;\ \varphi_2(t)=2\sqrt{3}(t-1/2);\ \varphi_3(t)=0{,}6536-3{,}922t+3{,}922t^2.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акунова А., Баячорова Б.Ж., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Математические основы теории информационных систем в управлении / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Салам, 2003.
2. Акунова А., Акунов Т.А., Ушаков А.В. Оценка колебательности управляемых процессов в многомерных системах с помощью числа обусловленности решения матричного уравнения Ляпунова // Автоматика и телемеханика, 1994, №4.
3. Алгебраические методы в теории устройств дискретной автоматики и телемеханики: Труды лаборатории телемеханики СПбГИТМО(ТУ). / Под ред. А.В. Ушакова. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2001.
4. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
5. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. – СПб: Наука, 2001.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
8. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
9. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983.
10. Деч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и z–преобразования. – М.: Наука, 1971.
11. Дьяконов В.П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя. – М.: Солон-Пресс, 2002.
12. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975.
13. Калужнин А.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
14. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
15. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985.
16. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков; Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
17. Матричные уравнения в исследовании дискретных процессов над бесконечными и конечными полями / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О., Оморов, А.В. Ушаков./ Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1993.

18. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков. / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
19. Мороз А.И. Курс теории систем. – М.: Высшая школа,1987.
20. Никифоров В.О. ,Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
21. Никифорова Л.Т., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Теоретические основы кибернетики. Учебное пособие. – Л.: ЛИТМО, 1984.
22. Основы математического моделирования с примерами на языке MATLAB. Изд.2-е, доп.: Учебное пособие/ Д.Л. Егоренков, А.Л. Фрадков, В.Ю. Харламов; Под ред. А.Л.Фрадкова; БГТУ. СПб; 1996.
23. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ/ В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.
24. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем./ Учебник. Минск: Дизайн ПРО. 2004.
25. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. Радио, 1974.
26. Van Loan C.F. Introduction to Scientific Computing, A Matrix-Vector Approach Using MATLAB, Prentice Hall, 2000.
27. http:/www.mathworks.com

ПРИЛОЖЕНИЕ. Сведения о пакете MATLAB 6.5

В краткой форме приводится описание команд новейшей версии 6.5 системы MATLAB, появившейся с конца 2000 года и ставшей мировым лидером среди систем компьютерной математики. Полное описание системы составляет более 500 страниц. Система характеризуется высочайшей степенью визуализации результатов работы и служит мощной операционной средой для применения многочисленных пакетов расширения по новейшим направлениям науки и техники. В настоящее время MATLAB фактически стал международным стандартом учебного программного обеспечения для решения вычислительных задач в областях линейной алгебры, теории управления, теории систем, обработки сигналов и других. Популярности системы способствует ее мощное расширение Simulink, предоставляющее удобные и простые средства, в том числе визуальное объектно-ориентированное программирование, для моделирования линейных и нелинейных динамических систем, а также множество других пакетов расширения систем. К расширению системы были привлечены крупнейшие научные школы мира в области математики, программирования и естествознания.

Система MATLAB создана таким образом, что любые вычисления можно выполнять в режиме прямых вычислений, так и с помощью написания подпрограмм в виде М-файлов. Центральным понятием всех математических систем является математическое выражение, которое задает то, что должно быть вычислено в численном (или в символьном) виде. Математические выражения строятся на основе чисел, констант, переменных, операторов, функций и разных спецзнаков. MATLAB предоставляет пользователю обширный набор готовых средств, большая часть которых – это расширения пакета в виде М-файлов.

Ввиду популярности у пользователей использования средств визуализации решения математических задач, в версии 6.5 приведены обширные средства визуализации, в том числе и анимационной, включая использование средств символьной математики. Новые средства дескрипторной или описательной графики позволяют создавать полноценные объекты высокого разрешения, как геометрического, так и цветового, поддерживаемые объектно-ориентированным программированием. Применение дескрипторной графики позволяет реализовать элементы визуально-ориентированного программирования.

Система MATLAB имеет обширную техническую документацию (более 5000 страниц текста) и развитую справочную систему. С последними новостями по разработке системы можно ознакомиться на сайте корпорации Math Works www.mathworks.com, а также посетив сайт официального дилера корпорации Math Works в России www.softline.ru. Консультации можно получить на сайтах www.matlab.ru и www.exponenta.ru.

Вызов демонстрационных примеров можно произвести, исполнив команду

>> help demos

С помощью команды

>>lookfor ключевое слово

можно произвести поиск М-функций по ключевым словам.

Система MATLAB имеет интерактивную систему помощи, которая реализуется в командном режиме работы с помощью команды

>> help имя

Для запуска справочной системы следует использовать одноименную команду меню Help – MATLAB Help. При этом запустится браузер справочной системы.

Ниже приводится перечень команд с кратким описанием результата ее выполнения.

Команды общего назначения

Управляющие команды и функции

addpath	Добавление каталога к пути поиска файлов MATLAB'а
doc	Просмотр HTML документации в справочном окне
genpath	генерация пути
help	Показ справки по М-файлу для функций MATLAB в командном окне
helpbrowser	Показ справки для доступа ко всем справкам Mathworks в Интернете
helpdesk	Отображение окна просмотра справки
helpwin	Обеспечение доступа к помощи по М-файлу для всех функций
lasterr	Последнее сообщение об ошибках
lastwarn	Последнее предупреждающее сообщение
license	Лицензия
lookfor	Поиск указанного ключевого слова во всех записях
partialpath	Управление частичным путем
path	Управление путем поиска файлов каталога MATLAB
pathtool	Открытие GUI для просмотра и изменения пути MATLAB'а
profile	Запуск профилировщика М-файла, утилита для отладки и оптимизации кода
profreport	Создание отчета по конфигурации
rehash	Обновление функций и кэш файловой системы
rmpath	Удаление каталога из пути поиска файлов MATLAB'а

support	Открытие веб-страницы службы технической поддержки MathWorks
type	Печать на экран текста файла
ver	Информация о версии MATLAB, Simulink и пакетов расширения
version	Номер версии MATLAB'а
web	Вывод окна просмотра справки в файле или сети Интернет
what	Перечисление М-файлов в текущем каталоге
whatsnew	Отображение README файлов для MATLAB и пакетов расширения
which	Отображение расположения файлов и функций

Управление переменными и рабочим пространством

clear	Удаление элементов из рабочего пространства
disp	Отображение текста или массива
length	Длина вектора
load	Загрузка переменных из диска
memory	Справка об ограничениях по памяти
mlock	Запрет на очистки М-файла
munlock	Разрешение на очистку М-файла
openvar	Открытая переменная рабочего пространства для графического редактирования
pack	Объединение памяти рабочего пространства
save	Сохранение переменных рабочего пространства на диске
saveas	Сохранение рисунка или модели с использованием указанного формата
size	Размерность массива
who, whos	Перечисление переменных рабочего пространства
workspace	Отображение окна просмотра рабочего пространства, GUI для управления рабочим пространством

Управление командным окном

clc	Очистка командного окна
echo	Вывод на экран во время выполнения М-файла
format	Управление форматом вывода данных
home	Передвижение курсора к верхнему левому углу командного окна
more	Управление выводом командного окна

Работа с файлами и вычислительной средой

beep	Производство звука «гудка»
cd	Смена рабочего каталога
checkin	Регистрация файла в системе управления

checkout Освобождение файла из системы управления
cmopts Получение имени системы управления и файла проекта PVCS
copyfile Копирование файла
customverctrl Обеспечить доступ к указанной системе управления
delete Удаление файлов или графических объектов
diary Сохранение сеанса в виде файла на диске
dir Отображение содержимого текущего каталога
dos Выполнение команды DOS и возврат результата
edit Редактирование М-файла
fileparts Получение сведений о файле
filebrowser Просмотр в окне файлов текущего каталога
fullfile Построение полного имени файла
info Получение информации о всех Readme файлах и пакетах расширения
inmem Информация о доступных функциях
ls Просмотр каталога на UNIX
matlabroot Корневая директория инсталляции MATLAB
mkdir Создание нового каталога
open Открытие файлов по расширению
pwd Содержимое текущего каталога
tempdir Название временного каталога системы
tempname Уникальное имя для временного файла
undocheckout Отмена предыдущей отладки от системы управления
unix Выполнение команды UNIX и возврат результата
! Выполнение команды операционной системы

Начало работы и выход из MATLAB
finish Завершение работы М-файла
exit Завершение работы с пакетом MATLAB
matlabrc Запуск М-файла
quit Окончание работы с MATLAB
startup Запуск работы М-файла

Функции MATLAB

Функции обработки звука
Общие функции для звука
Lin2mu Преобразование линейного звукового сигнала в сигнал по mu-закону
Mu2lin Преобразование звукового сигнала по mu-закону в линейный
Sound Преобразование вектора в звук
Soundsc Масштабирование данных и воспроизведение в виде звука

Звуковые функции, определенные как SPARCstation
Auread Чтение звукового файла NeXT/SUN (.au)
Auwrite Запись звукового файла NeXT/SUN (.au)

Звуковые Функции
Wavplay Воспроизведение записанного звука
wavread Чтение звукового файла (.wav)
wavrecord Запись звука с использованием звукового устройство ввода
wavwrite Запись звукового файла (.wav)

Функции ввода–вывода файла
Открытие файла и закрытие
fclose Закрытие одного или более открытых файлов
fopen Открытие файла, или получение информации об открытых файлах

Неотформатированный ввод–вывод
fread Чтение из файла данных в двоичном формате
fwrite Запись данных в двоичном формате в файл

Отформатированный ввод–вывод
fgetl Возврат следующей строки файла без признака конца
fgets Возврат следующей строки с признаком конца
fprintf Запись отформатированных данных в файл
fscanf Чтение отформатированных данных из файла
Позиционирование файла
feof Тест на наличие конца файла
ferror Запрос MATLAB об ошибках при вводе или выводе файла
frewind Перемотка открытого файла
fseek Установка индикатора положения файла
ftell Получение индикатора положения файла

Преобразование строк
sprintf Запись отформатированных данных в строку
sscanf Чтение строки при управлении форматом
Специализированный ввод–вывод файла
dlmread Чтение разграниченного ASCII файла в матрицу
dlmwrite Запись матрицы в разграниченный ASCII файл
hdf Интерфейс HDF
imfinfo Информация о графическом файле
imread Чтение изображения из графического файла

imwrite Запись изображения в графический файл
strread Чтение отформатированных данных из строки
textread Чтение отформатированных данных из текстового файла
wk1read Чтение матрицы из файла Lotus123 WK1
wk1write Запись матрицы в файл Lotus123 WK1

Функции MATLAB:

Математика

Элементарные матрицы и матричные преобразования

Элементарные матрицы и массивы

blkdiag Построение блочно-диагональной матрицы из входных аргументов
eye Построение единичной матрицы
linspace Генерация линейно распределенных векторов
logspace Генерация логарифмически распределенных векторов
numel Число элементов в матрице или массиве
ones Создание массива единиц
rand Создание однородно распределенных случайных чисел и массивов
randn Создание нормально распределенных случайных чисел и массивов
zeros Создание массива нолей
: (двоеточие) Регулярно распределенный вектор

Специальные переменные и константы

ans Переменная, хранящая результат последней операции
computer Идентифицирует компьютер, на котором выполняется MATLAB
eps Относительная точность с плавающей запятой
i Мнимая единица
Inf Бесконечность
inputname Ввести имя аргумента
j Мнимая единица
NaN Указание на нечисловой характер данных (Not-a-Number).
nargin, nargout Число аргументов функций
nargoutchk Число параметров вывода
pi Отношение длины окружности к ее диаметру,
realmax Самое большое положительное значение с плавающей запятой

realmin Самое малое положительное значение с плавающей запятой

varargin,
varargout Пропуск или возврат числа аргументов

Time and Dates

Календарь Календарь

clock Текущее время в виде числового вектора

cputime Фактическая продолжительность работы центрального процессора

date Текущая дата

datenum Информация о дате

datestr Строковое представление даты

datevec Компоненты даты

eomday Конец месяца

etime Прошедшее время

now Текущая дата и время

tic, toc Таймер секундомера

weekdayдень День недели

Матричные преобразования

cat Объединение массивов

diag Конструирование диагональных матриц, определение диагональных элементов матрицы

fliplr Зеркальное отражение матрицы слева направо

flipud Зеркальное отражение матрицы сверху - вниз

repmat Тиражирование и расположение мозаикой массивов

reshape Восстановление формы массивов

Rot90 Поворот матрицы на 90 градусов

tril Нижняя треугольная часть матрицы

triu Верхняя треугольная часть матрицы

: (двоеточие) Индекс в массиве, перегруппировка массивов

Векторные функции

cross Прямое произведение векторов

dot Скалярное произведение векторов

intersect Пересечение векторов

ismember Выявление членов, принадлежащих множеству

setdiff Определение различия двух векторов

setxor Определение членов, не являющихся общими для двух векторов

union Объединение двух векторов

unique Уникальные элементы вектора

Специализированные матрицы

compan	Матрица в форме, сопровождающей свой характеристический полином
gallery	Проверочная матрица
hadamard	Матрица Адамара–Колмогорова
hankel	Матрица Ганкеля
hilb	Гильбертова матрица
invhilb	Обращение гильбертовой матрицы
magic	Магический квадрат
pascal	Матрица Паскаля
toeplitz	Тоеплизитова матрица
wilkinson	Проверочная матрица Уилкинсона для собственных значений

Элементарные математические функции

abs	Абсолютное значение, модуль
acos, acosh	Обратный косинус и обратный гиперболический косинус
acot, acoth	Арккотангенс и обратный гиперболический котангенс
acsc, acsch	Арккосеканс и обратный гиперболический косеканс
angle	Фазовый угол
asec, asech	Арксеканс и обратный гиперболический секанс
asin, asinh	Арксинус и обратный гиперболический синус
atan, atanh	Арктангенс и обратный гиперболический тангенс
Atan2	Арктангенс
complex	Создание комплексных чисел из реальных и мнимых компонентов
conj	Комплексное сопряжение
cos, cosh	Косинус и гиперболический косинус
cot, coth	Котангенс и гиперболический котангенс
csc, csch	Котангенс и гиперболический котангенс
exp	Экспонента
fix	Округление до нуля
floor	Округление до минус бесконечности
gcd	Самый большой общий делитель
imag	Мнимая часть комплексного числа
lcm	Наименьший общий множитель
log	Натуральный логарифм
Log2	Логарифм по основанию 2
Log10	Десятичный логарифм
mod	Модуль (остаток после деления)
nchoosek	Биномиальный коэффициент или все комбинации
real	Вещественная часть комплексного числа
rem.	Остаток после деления

round Округление до целого
sec, sech Секанс и гиперболический секанс
sign Знаковая функция
sin, sinh Синус и гиперболический синус
sqrt Квадратный корень
tan, tanh Тангенс и гиперболический тангенс

Специализированные математические функции
Airy Функция Эйри
besselh Функция Бесселя третьего вида (Ганкеля)
besseli, besselk Модифицированные функции Бесселя
besselj, bessely Функция Бесселя
beta, betainc,
betaln Beta-функции
ellipj Овальные функции Якоби
ellipke Полные эллиптические интегралы первого и второго порядка
erf, erfc,
erfcx, erfinv Функции ошибок
expint Интегральная показательная функция
factorial Вычисление факториала
gamma, gammainc,
gammaln Гамма-функции
legendre Присоединенная функция Лежандра
Pow2 Показательная степень 2
rat, rats Рациональное приближение дроби
Преобразование системы координат
Cart2pol Преобразование декартовых координат в полярные или цилиндрические
Cart2sph Преобразование декартовых координат к сферическим
Pol2cart Преобразование полярных или цилиндрических координат к декартовым
Sph2cart Преобразование сферических координат к декартовым

Матричные функции – линейная алгебра
Матричный анализ
cond Число обусловленности
condeig Число обусловленности для собственных значений
det Матричный детерминант
norm Векторные и матричные нормы
null Нуль-пространство матрицы
orth Ортонормированный базис матрицы
rank Ранг матрицы

rcond Величина, обратная числу обусловленности матрицы по первой норме
rref, rrefmovie Приведение матрицы к треугольному виду
subspace Угол между двумя подпространствами
trace Сумма диагональных элементов (след матрицы)

Линейные уравнения
chol Разложение Холецкого
inv Матричное обращение
lscov Решение МНК при известном коэффициенте ковариации
lu LU-разложение матрицы
lsqnonneg Метод неотрицательный наименьших квадратов
minres Метод минимальных остатков
pinv Псевдообращение матрицы по методу Moore-Penrose
qr Ортогональное–треугольное QR-разложение матрицы
symmlq Симметрический LQ-метод
Собственные значения и сингулярные значения
balance Улучшение точности вычисления собственных чисел
Cdf2rdf Преобразование комплекснозначной диагональной формы к вещественнозначной блочно-диагональной
eig Собственные числа и векторы
gsvd Обобщенное сингулярное разложение матрицы
hess Хессенбергова форма матрицы
poly Характеристический полином с указанными корнями
qz QZ-разложение для обобщенных собственных чисел
Rsf2csf Преобразование реальной формы Шура в комплексную
schur Разложение Шура
svd SVD-разложение

Матричные функции
expm Матричная экспонента
funm Оценка матричной функции
logm Матричный логарифм
sqrtm Матричный квадратный корень

Функции низкого уровня
qrdelete Удаление столбца из QR-разложения
qrinsert Вставка столбца в QR-разложении

Анализ данных и Фурье-преобразование
Основные операции
cumprod Куммулятивное произведение
cumsum Куммулятивная сумма

cumtrapz	Куммулятивное трапециедальное интегрирование
factor	Главные факторы
inpolygon	Обнаружение точки внутри полигона
max	Определение максимальных элементов массивов
mean	Среднее значение массивов
median	Медианное значение массивов
min	Минимальный элемент массива
perms	Все возможные перестановки
polyarea	Область многоугольника
prod	Произведение элементов массива
rectint	Площадь пересечения прямоугольников
sort	Сортировка элементов в порядке возрастания
sortrows	Сортировка элементов строки в порядке возрастания
std	Стандартное отклонение
sum	Сумма элементов массива
trapz	Вычисление интеграла по формуле трапеций
var	Дисперсия

Конечные разности

Del2	Дискретный лапласиан
diff	Разность и приближение производной
gradient	Числовой градиент

Корреляция

corrcoef	Коэффициент корреляции
cov	Матрица ковариаций

Фильтрация и свертка

conv	Свертка и умножение полиномов
Conv2	Двумерная свертка
deconv	Свертка и разделение полиномиала
filter	Фильтрация данных с бесконечным ответом импульса (IIR) или конечным ответом импульса (FIR)
Filter2	Двумерная цифровая фильтрация

Фурье-преобразование

abs	Абсолютное значение (модуль)
angle	Фазовый угол
cplxpair	Сортировка комплексных чисел по комплексно сопряженным парам
fft	Одномерный быстрое преобразование Фурье
Fft2	Двумерное быстрое преобразование Фурье

fftshift Сдвиг DC компоненты быстрого преобразования Фурье к центру спектра
ifft Обратное одномерное быстрое преобразование Фурье
Ifft2 Обратное двумерное быстрое преобразование Фурье
ifftn Обратное многомерное быстрое преобразование Фурье
ifftshift Обратное быстрое преобразование Фурье со сдвигом
Nextpow2 Определение ближайшей степени двух
unwrap Коррекция фазовых углов

Полиномиал и интерполяционные функции
Полиномиалы
conv Конволюция и перемножение полиномов
deconv Деконволюция и разделение полиномов
poly Полином с указанными корнями
polyder Производная полиномиала
polyeig Полином для собственных чисел
polyfit Полиномиальная аппроксимация кривой
polyint Аналитическое полиномиальное интегрирование
polyval Оценка полиномиала
polyvalm Матричная оценка полиномиала
residue Преобразование дробного расширения и коэффициентов полинома
roots Корни полинома

Интерполяция данных
convhull Выпуклая оболочка
convhulln Многомерная выпуклая оболочка
delaunay Триангуляция Делоне
Delaunay3 Трехмерная триангуляция Делоне
delaunayn Многомерная триангуляция Делоне
dsearch Триангуляции Делоне для ближайшей точки
dsearchn Многомерная триангуляция Делоне для ближайшей точки
Griddata3 Подготовка гиперповерхности для визуализации трехмерных данных
griddatan Подготовка гиперповерхности для визуализации при размерности ≥ 2
Interp1 Одномерная интерполяция табличных данных
Interp2 Двухмерная интерполяция табличных данных
Interp3 Трехмерная интерполяция табличных данных
interpft Одномерная интерполяция данных с использованием метода FFT
interpn Многомерная интерполяция табличных данных
meshgrid Генерация матриц для трехмерной печати

ndgrid Генерация массивов для многомерных функций и интерполяции
pchip Эрмитова кубическая полиномиальная интерполяция
ppval Кусочно-полиноммиальная аппроксимация
spline Кубическая сплайн-интерполяция данных
tsearch Поиск приложения треугольника Делоне
tsearchn Многомерный симплексный поиск
voronoi Диаграмма Вороного
voronoin Многомерные диаграммы Вороного

Функционалы – нелинейные численные методы
вvp4c Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)
bvpget Определение структуры параметров BVP
bvpinit Формированеие начальных условий для bvp4c
bvpset Создание/изменение структуры параметров BVP
bvpval Оценка решения, вычисленного с помощью bvp4c
dblquad Численная оценка двойных интегралов
fminbnd Минимизация функции одной переменной
fminsearch Минимизация функции нескольких переменных
fzero Нахождение ноля функции одной переменной
Ode45, ode23,
Ode113, ode15s, ode23s, ode23t,
Ode23tb Решение проблемы ОДУ
odeget Извлечение параметров структуры ОДУ
odeset Создание/изменение структуры параметров ОДУ
optimget Получение значений параметров структурной оптимизации
optimset Создание или редактирование параметров оптимизации
pdepe Решение проблемы начально-граничных значений
pdeval Оценка решения, вычисленного с помощью pdepe
quad Вычисление интегралов с помощью адаптивной квадратуры Симпсона
quadl Вычисление интегралов с помощью адаптивной квадратуры Лобатто
vectorize Векторизация выражения

Функции разреженных матриц
Элементарные разреженные матрицы
spdiags Извлечение и создание разреженной полосы и диагональной матрицы
speye Разреженная единичная матрица
sprand Разреженная однородно распределенная случайная матрица
sprandn Разреженная нормально распределенная случайная матрица

sprandsym	Разреженная симметрическая случайная матрица

Преобразование от полного к разреженному виду

find	Определение индексов и значений элементов, отличных от нуля
full	Преобразование разреженной матрицы до полной матрицы
sparse	Создание разреженной матрицы
spconvert	Импорт матрицы из разреженной матрицы внешнего формата

Работа с ненулевыми входами разреженных матриц

nnz	Число матричных элементов отличных от нуля
nonzeros	Матричные элементы отличные от нуля
nzmax	Количество ячеек памяти для ненулевых элементов
spalloc	Распределение пространства для разреженной матрицы
spfun	Применение функции к ненулевым элементам разреженной матрицы
spones	Замена единицами ненулевых элементов разреженной матрицы

Визуализация разреженных матриц

spy	Визуализация образца разреженности

Алгоритмы упорядочения

colmmd	Разреженный столбец с перестановкой минимальной степени
colperm	Перестановка разреженного столбца, основанная на ненулевом счете
dmperm	Разложение Dulmage–Mendelsohn
randperm	Случайная перестановка
symamd	Симметричная приблизительная перестановка минимальной степени
symmmd	Разреженное симметричное минимальное упорядочение
symrcm	Разреженное обратное упорядочение Катхилла–Макки

Норма, число обусловленности и ранг

condest	Оценка числа обусловленности матрицы по первой норме с использованием метода Хейджера в модификации Хаема
normest	Оценка второй нормы матрицы

Разреженные системы линейных уравнений

bicg	Двусопряженный метод градиентов
bicgstab	Метод сопряженных градиентов
cgs	Метод квадратов сопряженных градиентов
cholinc	Неполное разложение Холецкого

cholupdate Модификация ранга 1 в разложении Холецкого
gmres Обобщенный метод минимальных остатков
lsqr LSQR реализация сопряженных градиентов на нормальных уравнениях
luinc Неполное LU-разложение матриц
pcg Метод сопряженных градиентов с предварительной обработкой данных
qmr Метод квазиминимальных остатков
qr Ортогональное-треугольное QR-разложение
qrdelete Удаление столбца в QR-разложении
qrinsert Добавление столбца в QR-разложении
qrupdate Уточнение 1 в QR-разложении

Собственные значения и сингулярные числа разреженных матриц
eigs Собственные значения и собственные векторы разреженных матриц
svds Сингулярное разложение разреженных матриц

Разное
spparms Установка параметров подпрограмм для разреженных матриц

Графика

Печать и визуализация данных
Графики и графы
bar Вертикальная столбцовая диаграмма
barh Столбцовая диаграмма с горизонтальными столбцами
hist Графические гистограммы
histc Вычисление гистограммы
hold on (off) Включение режима продолжения (отмены) графических построений
loglog Печать графика с логарифмическими масштабами двух осей
pie Построение круговой диаграммы
plot Построение графика по элементам векторов или матриц
polar Построение графика в полярной системе координат
semilogx Построение графика с логарифмическим масштабом оси абцисс
semilogy Построение графика с логарифмическим масштабом оси ординат
subplot Разбиение графического окна

Трехмерная печать

Bar3	Вертикальная трехмерная гистограмма
Bar3h	Горизонтальная трехмерная гистограмма
Comet3	Трехмерный график кометы
cylinder	Построение цилиндра в виде трехмерной фигуры
Fill3	Построение окрашенных в заданный цвет плоских многоугольников
Plot3	Построение линий и точек в трехмерном пространстве
Quiver3	Трехмерный график полей градиента
slice	График сечения функции трех переменных
sphere	Построение сферы в виде трехмерной фигуры
stem3	Графическое изображение дискретных данных
waterfall	График трехмерных слоеных поверхностей в виде тонких пластинок

Графическая аннотация и сетки

clabel	Маркировка контурных графиков
datetick	Отформатированные метки импульса сигнала времени
grid	Построение сетки для двух- и трехмерных графиков
gtext	Размещение многострочной надписи из массива строковых переменных
legend	Пояснение в виде отрезков линий со справочными надписями внутри или около графика
plotyy	Графическая печать с размещением меток Y слева направо
title	Заголовки для двух- и трехмерных графиков
xlabel	Маркировка осей X для двух- и трехмерных графиков
ylabel	Маркировка осей Y для двух- и трехмерных графиков
zlabel	Маркировка осей Z для трехмерных графиков

Поверхностные, сетчатые и контурные графические изображения

contour	Контурная печать графика
contourc	Вычисление контура
contourf	Окрашенный контурный график
hidden	Управление показом невидимых линий
meshc	Комбинация mesh/contourplot
mesh	Трехмерная сетчатая поверхность с заданной или функциональной окраской
peaks	Матричный образ поверхности с рядом пиков и впадин
surf	Трехмерный теневой поверхностный график
surface	Создание поверхностного объекта низкого уровня
surfc	Комбинация команд surf/contourplot
surfl	Трехмерная теневая поверхность с освещением

trimesh Построение объемных фигур в виде каркаса (без окраски и отображения плоскостей)
trisurf График с закраской треугольных областей, задающих трехмерную фигуру

Визуализация объема
coneplot Визуализация с помощью конусов
contourslice Вывод контура в плоскости сечения объема
curl Вычисление волновой и угловой скорости векторного поля
divergence Вычисление дивергенции векторного поля
flow Создание массивов представления струи
interpstreamspeed Интерполяция вихревых потоков
isocaps Вычисление геометрии поверхности равного уровня
isocolors Вычисление цвета поверхности равного уровня
isonormals Вычисление нормали поверхности равного уровня вихревого поля
isosurface Извлечение поверхности равного уровня вихревого поля
reducepatch Уменьшение числа полигонов
reducevolume Уменьшение количества элементов в наборе данных
shrinkfaces Уменьшение размера полигона
slice Вывод «пластинчатой» поверхности
Smooth3 Сглаживание трехмерных данных
Stream2 Вычисление 2-мерных данных потока
Stream3 Вычисление трехмерных данных потока
streamline Вывод линии потока от 2-или трехмерных векторных данных
streamparticles Вывод движения частицы потока
streamribbon Визуализация потока в ленточной форме
streamslice Вывод раздельных линий потока
streamtube Вывод потока «трубки»
Surf2patch Преобразование поверхностных данных в данные полигона
subvolume Извлечение подмножества данных объема
volumebounds Определение координатных и цветовых пределов
Создание области
griddata Генерирование сетки и данных для поверхности
meshgrid Создание X и Y массивов для трехмерных графиков

Специализированное построение графиков
area Печать области
box Построение прямоугольника вокруг рисунка
comet График движения в форме «кометы»
compass График с указанием направления
errorbar Печать графика с областями ошибки

ezcontour	Контурная печать
ezcontourf	Контурная печать с заполнением
ezmesh	Трехмерная петля
ezmeshc	График петли/контура
ezplot	График функции
Ezplot3	Трехмерный параметрический график кривой
ezpolar	Полярный координатный график
ezsurf	Трехмерный цветной график поверхности
ezsurfc	График поверхности в сочетании с контурным представлением
feather	График с эффектом «пера»
fill	Вывод заполненных двухмерных многоугольников
fplot	График функции
pareto	График «pareto»
Pie3	Трехмерная круговая диаграмма
plotmatrix	Печать графической матрицы
pcolor	Псевдоцветной график с эффектом «шахматной доски»
rose	Угловая гистограмма
quiver	Построение графика градиента
ribbon	График в ленточной форме
stairs	Ступенчатый график
scatter	Рассеивание графика
Scatter3	Рассеивание трехмерного графика
stem	Вывод дискретных данных
convhull	Выпуклый корпус
delaunay	Триангуляция Делонэ
dsearch	Триангуляция Делонэ для ближней точки
inpolygon	Положение точки внутри области многоугольника
polyarea	Область многоугольника
tsearch	Поиск описывающего треугольника Делонэ
voronoi	Диаграмма Вороного

Управление видом представления

camdolly	Изменение положения камеры и объекта
camlookat	Показа определенных объектов
camorbit	Вращение камерой
campan	Вращение объекта вокруг камеры
campos	Установление камеры
camproj	Установление типа проектирования
camroll	Вращение камеры вокруг оси просмотра
camtarget	Установление объекта просмотра
camup	Установление вектора камеры
camva	Установление угла просмотра

camzoom	Изменение масштаба изображения
daspect	Установление коэффициента сжатия данных
pbaspect	Установление графического коэффициента сжатия блока
view	Спецификация трехмерной точки зрения
viewmtx	Генерация матрицы преобразования обзора
xlim	Установка текущих пределов оси X
ylim	Установка текущих пределов оси Y
zlim	Установка текущих пределов оси Z

Освещение

camlight	Создание или размещение источника света
light	Функция создания освещения
lighting	Режим освещения
lightangle	Установка освещения в сферических координатах
material	Режим отражательной способности материи

Прозрачность

alpha	Установка или запрос функции прозрачности для объектов в текущих координатах
alphamap	Определение рисунока альфа-карты
alim	Установка или запрос пределов альфа-осей

Цветовые операции

brighten	Осветление или затемнение карты цветов
caxis	Псевдоцветное масштабирование оси
colorbar	Показ шкалы цветов
colordef	Установка цветового значения по умолчанию
colormap	Установка справочник цветов (список карт цветов)
graymon	Установка настроек графики по умолчанию для черно-белого монитора
Hsv2rgb	Преобразование HSV (оттенок–насыщенность–значение) в RGB (красному–зеленому–синему)
Rgb2hsv	Преобразование RGB в HSV
rgbplot	Вывод карты цветов
shading	Режим затенения
spinmap	Вращение карты цветов
surfnorm	Трехмерные поверхностные нормали
whitebg	Изменение фона для графиков

Карты цветов

autumn	Оттенки красной и желтой карты цветов
bone	Полутоновый с оттенком синей карты цветов
contrast	Создание серой карты цветов для усиления контрастности изображения

cool Оттенки сине-сиреневой карты цветов
copper Линейный медный тон карты цветов
flag Чередующаяся красная, белая, синяя и черная карта цветов
gray Линейная полутоновая карта цветов
hot RGB (черно–красно–желто–белая) карта цветов
hsv HSV (оттенок–насыщенность–значение) карта цветов
jet Вариант HSV
lines Карта цветов цвета линии
prism Карта цветов призмы
spring Оттенки сиренево-желтой карты цветов
summer Оттенки зелено-желтой карты цветов
winter Оттенки сине-зеленой карты цветов

Печать
orient Ориентация бумаги печатной копии
pagesetupdlg Диалоговое окно установки положения страницы
print Печать или сохранение графика в файле
printdlg Диалоговое окно печати
printopt Конфигурация по умолчанию локального принтера
saveas Сохранение рисунка в графическом файле

Управление рисунками, общие положения
allchild Нахождение всех детей указанных объектов
copyobj Создание копии графического объекта и его детей
findall Определение всех графических объектов (включая скрытые маркеры)
findobj Поиск объектов с указанными значениями реквизитов
gcbo Определение выполняемого объекта
get Определение свойства объекта
rotate Вращение объектов вокруг указанных начала координат и в требуемом направлении
ishandle Параметры графических объектов
set Установление свойства объекта

Работа с прикладными данными
getappdata Получение значений прикладных данных
isappdata Определение существования прикладных данных
rmappdata Удаление прикладных данных
setappdata Определение прикладных данных

Управление рисунками, создание объектов
axes Создание объекта «Ось»
figure Создание окна «Рисунок»

image Создание двухмерного изображения (двухмерной матрицы)
light Создание объекта освещения
line Создание объекта линии (ломаных линий в пространстве)
patch Создание объекта «полигон» (многоугольника)
rectangle Создание объекта «прямоугольник»
surface Создание поверхности (четырехугольника)
text Создание текстового объекта (символьной последовательности)
uicontextmenu Создание контекстного меню (всплывающей подсказки)

Управление рисунками, окна рисунков
capture Экранный сбор данных текущего рисунка
clc Очистка окна
clf Очистка рисунка
close Закрытие указанного окна
closereq Функция запроса на закрытие
gcf Определение текущего маркера
newplot Графическая преамбула М-файла для реквизита NextPlot
refresh Обновление рисунка
saveas Сохранение рисунка или модели в желаемом выходном формате

Управление рисунками, оси
axis Масштабирование осей
cla Очистка осей
gca Текущий маркер осей

Манипуляция объектами
reset Восстановление оси или рисунка
Rotate3d Вращение трехмерного графика в интерактивном режиме
Selectmoveresize Выбор, перемещение и изменение объектов в интерактивном режиме

Диалоговый пользовательский ввод
ginput Графический ввод от мыши или от курсора
zoom Изменение масштаба на двухмерном графике

Работа с областями
dragrect Перетаскивание XOR прямоугольников с помощью мыши
drawnow Завершение любого незавершенного рисунка
rbbox Блок «каучуковая повязка»

Программирование и типы данных

Операторы и специальные символы

+	Плюс
-	Минус
*	Матричное умножение
.*	Умножение массива
^	Матричная степень
. ^	степень массива
kron	Кронекеровское произведение
\	Наклонная черта влево или левое разделение
/	Наклонная черта вправо или правое разделение
./и.	Деление массива, правое и левое
:	Двоеточие
()	Круглые скобки
[]	Квадратные скобки
{}	Фигурные скобки
.	Десятичная точка
...	Продолжение строки
,	Разделитель
;	Точка с запятой
%	Комментарий
!	Знак восклицания
“	Цитата
=	Присвоение
==	Равенство
< >	Операторы отношения
	Логическое «и»
|	Логическое «или»
~	Логическое «отрицание»
xor	Логическое «исключение или»

Логические функции

all	Проверка всех элементов на отличие от нуля
any	Проверка на наличие ненулевого элемента
exist	Проверка существования переменной или файла
find	Определение индексов и значений элементов, отличных от нуля
is*	Обнаружение состояния
isa	Обнаружить объект данного класса
iskeyword	Проверка, является ли строка ключевым словом matlab
isvarname	Проверка, является ли строка достоверным названием переменной
logical	Преобразование числовых значений в логические

mislocked Проверка, не может ли быть очищен М-файл

Конструкции языка и отладка

matlab как язык программирования

builtin	Выполнение встроенной функции
eval	Интерпретация строки, содержащей выражение matlab
evalc	Оценка выражения matlab со сбором данных
evalin	Оценка выражения в рабочем пространстве
feval	Вычисление дескрипторной функции
function	Функция М-файла
global	Определение глобальных переменных
nargchk	Проверка числа входных параметров
persistent	Определение постоянной переменной
script	Сценарий М-файла

Управление потоками

break	Завершение выполнения «цикла» или «во время цикла»
case	Переключатель
catch	Отмена вывода сообщений об ошибках
continue	Передача управления в следующую итерацию цикла в операторах for, while
else	Условный оператор
elseif	Условный оператор
end	Окончание цикла для операторов for, while, switch, try и if
for	Повтор выполнения операторов определенное число раз
if	Условное выполнение операторов
otherwise	Заданная по умолчанию часть оператора
return	Возвращение управления функции
switch	Переключатель среди нескольких случаев, основанных на выражении
try	Начало вывода сообщений об ошибках
warning	Вывод предупреждающего сообщения
while	Повтор операторов неопределенное число раз

Диалоговый ввод

input	Запрос на пользовательский ввод
keyboard	Передача управления клавиатуре во время выполнения М-файла
menu	Генерация меню выборов для пользовательского ввода
pause	Приостановка работы ЭВМ

Объектно-ориентированное программирование

class Создание объекта или класса возвращения
double Преобразование к значению с удвоенной точностью
inferiorto Отношения нижнего класса
inline Создание встроенного объекта
Int8, int16, int32 Преобразование к целому числу со знаком
isa Обнаружение объекта данного класса
loadobj Расширение функции загрузки для пользовательских объектов
saveobj Сохранение фильтра на объекты
single Приведение к одинарной точности
superiorto Превосходящие отношения класса
Uint8, uint16, uint32 Преобразование к целому числу без знака

Отладка

dbclear Очистка контрольных точек
dbcont Продолжение выполнения
dbdown Изменение локального контекста рабочего пространства
dbmex Допуск MEX – отладки файла
dbquit Выход из режима отладки
dbstack Стек обращения к функции вывода
dbstatus Перечисление всех контрольных точек
dbstep Выполнение одной или более строк от контрольной точки
dbstop Установление контрольных точек в М-файле
dbtype Список М-файлов с номерами строк
dbup Изменение локального контекста рабочего пространства

Функциональные маркеры

Function_handle Тип данных matlab, который является маркером для функции
functions Информация о функциональном маркере
Func2str Создание строки имени функции от функционального маркера
Str2func Создание функционального маркера от строки имени функции

Функции строки символов

Общие

abs Абсолютное значение (модуль)
eval Интерпретация строк, содержащих выражения matlab
real Вещественная часть комплексного числа
strings Обработка строки matlab

Преобразование строк

Func2str	Создание строки имени функции от функционального маркера
Str2func	Создание функционального маркера от строки имени функции

Манипуляции со строками

deblank	Полоса операций с конца строки
findstr	Определение строки в пределах другой
lower	Преобразование строки к нижнему регистру
strcat	Конкатенация строки
strcmp	Сравнение строк
strcmpi	Сравнение строк без учета регистра
strjust	Выравнивание символьного массива
strmatch	Нахождение возможных пар для строк
strncmp	Сравнение первых *n* символов строк
strncmpi	Сравнение первых *n* символы строк без учета регистра
strrep	Поиск и замена строки
strtok	Первый символ в строке
strvcat	Вертикальная конкатенация строк
symvar	Определение символьных переменных в выражении
texlabel	Преобразование в формат TeX из символьной строки
upper	Преобразование строки к верхнему регистру

Преобразование строк

char	Создание символьного массива
Int2str	Преобразование целого числа в строку
Mat2str	Преобразование матрицы в строку
Num2str	Преобразование числа в строку
sprintf	Запись отформатированных данных в строку
sscanf	Чтение строки под форматным управлением
Str2double	Преобразование строки к значению с удвоенной точностью
Str2mat	Преобразование строки в матрицу
Str2num	Преобразование строки в число

Преобразование системы счисления

Bin2dec	Преобразование двоичного числа в десятичное
Dec2bin	Преобразование десятичного числа в двоичное
Dec2hex	Преобразование десятичного числа в шестнадцатеричное
Hex2dec	Преобразование шестнадцатеричного числа в десятичное
Hex2num	Преобразование шестнадцатеричного числа в число с двойной точностью

Создание GUI

Графические интерфейсы пользователя

Диалоговые окна

dialog Создание диалогового окна
errordlg Создание диалогового окна ошибки
helpdlg Диалоговое окно подсказки
inputdlg Создание диалогового окна ввода
listdlg Создание диалогового окна выбора из списка
msgbox Создание диалогового окна сообщения
pagedlg Диалоговое окно размещения страницы
printdlg Диалоговое окно печати
questdlg Создание диалогового окна вопроса
uigetfile Диалоговое окно для восстановления имени файла для чтения
uiputfile Диалоговое окно для восстановления имени файла для письма
uisetcolor Диалоговое окно для установления спецификаций цвета
uisetfont Установление шрифта интерактивном режиме
warndlg Создание предупреждающего диалогового окна

Развертывание интерфейса пользователя

guidata Сохранение или восстановление прикладных данных
guihandles Создание структуры маркеров
movegui Перемещение экранного рисунка GUI
openfig Открытие рисунка GUI

Развитие интерфейса пользователя

guide Открытие редактора размещения GUI
inspect Подручное меню

Внешние интерфейсы

Интерфейс matlab для Java

class Создание объекта или класса объекта
import Добавление пакета или класса к текущему списку импорта в Java
isa Определение объекта данного класса
isjava Проверка, является ли объект объектом Java
javaArray Создание массива Java
javaMethod Вызов метода Java
javaObject Создание объекта Java
methods Название метода

methodsview Отображение информации о всех методах

Ввод–вывод последовательного порта

Создание объекта последовательного порта

serial Создание объекта последовательного порта

Запись и чтение данных

fgetl Чтение одной строки текста от устройства и отвержение терминатора

fgets Чтение одной линии текста от устройства и включение терминатора

fprintf Запись текста на устройство

fread Чтение двоичных данных от устройства

fscanf Чтение данных от устройства и форматирование как текста

fwrite Запись двоичных данных на устройство

readasync Асинхронное чтение данных от устройства

stopasync Остановка асинхронного чтения и записи операций

Конфигурирование и возврат свойств

get Возврат свойства объекта последовательного порта

set Конфигурация или показ свойств объекта последовательного порта

Изменение состояния

fclose Разъединение объекта последовательного порта от устройства

fopen Соединение объекта последовательного порта к устройству

record Запись данных и информации об операциях в файл

Универсальные функции

clear Удаление объекта последовательного порта из рабочего пространства matlab

delete Удаление объекта последовательного порта из памяти

disp Вывод информации об объекте последовательного порта

instraction Вывод информации о событии по мере ее наступления

instrfind Возврат объекта последовательного порта из памяти в рабочее пространство matlab

isvalid Определение достоверности объекта последовательного порта

length Длина массива объекта последовательного порта

ИЗ ИСТОРИИ КАФЕДРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ и ИНФОРМАТИКИ (б. до 2001-го года кафедры автоматики и телемеханики)

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года кафедра автоматики и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО), организована в 1945-м году одновременно с основанием факультета ***электроприборостроения***, со временем переименованного в ***радиотехнический*.** Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и одновременно первого декана факультета ***электроприборостроения*** профессора Марка Львовича ЦУККЕРМАНА. На кафедру автоматики и телемеханики ИТМО, в отличие от существовавших к тому времени кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина (ныне СПбГПУ) и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) (ныне СПбГЭТУ («ЛЭТИ»)), была возложена задача по подготовке специалистов в области автоматизации и телемеханизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности.

Профессор Цуккерман М.Л. в 1913-м году закончил электромеханическое отделение Санкт-Петербургского государственного политехнического института им. Петра Великого. В 20-е годы XX в. он организовал в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург) отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области телеизмерения. Научные интересы профессора Цуккермана М.Л. и персонала новой кафедры на многие годы определили основные направления ее научной, учебной и методической деятельности, проблемным куратором которой профессор Цуккерман М.Л. оставался вплоть до своей кончины в 1959-м году. К моменту прихода в ЛИТМО профессор Цуккерман М.Л. имел богатый опыт преподавания в высших учебных заведениях страны. Так с 1933-го года до начала Великой отечественной войны он заведовал кафедрой *автоматизации и телемеханизации* промышленности в ЛЭТИ им. В.И.Ульянова (Ленина).

ТАНСКИЙ Евфимий Аполлонович – ученик профессора Цуккермана М.Л., кандидат технических наук, доцент, заведовал кафедрой с 1959-го года по1970-й год; выпускник кафедры автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. Ульянова (Ленина) 1936-го года, известный специалист в области систем стабилизации скорости и фазирования в задачах управления многодвигательными комплексами, а также маломощных прецизионных следящих систем.

САБИНИН Юрий Алексеевич – заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук, профессор, заведовал кафедрой с 1970-го по 1990-й год; выпускник ЛПИ им. М.И.Калинина 1938-го года, известный специалист в области электропривода, фотоэлектрических следящих систем, робототехники и адаптивной оптики.

ГРИГОРЬЕВ Валерий Владимирович – доктор технических наук, профессор, заведует кафедрой с 1995-го года; выпускник кафедры автоматики и телемеханики ЛИТМО 1969-го года, известный специалист в области теории качественной устойчивости, синтеза цифровых регуляторов, управления подвижными объектами, систем пространственного слежения, робототехники.

ВЕДУЩИЕ ученые и преподаватели кафедры – доктора технических наук, профессоры: Зорин Д.И. (1945–1956г.г.), Кампе–Нэмм А.А. (1945–1954г.г.), Юргенсон Р.И. (1945–1958г.г.), Арефьев Б.А. (1958–1977г.г.), Пальтов И.П. (1964–1980г.г.), Дроздов В.Н. (1962–1989г.г.), Ушаков А.В. (с 1960г.), Мирошник И.В. (1972–2005г.г.), Никифоров В.О. (с 1990г.); кандидаты технических наук, доценты: Тацитов Г.А. (1947–1973г.г.), Яковлев Н.М. (1951–1986г.г.), Болтунов И.П. (с 1957г.), Николаев П.В. (1971–1996г.г.), Власенко В.А. (с 1963г.), Лаврентьев В.В. (1964–1996г.г.), Хабалов В.В. (1972–2004г.г.), Бушуев А.Б. (с 1975г.), Черноусов В.В. (1975–2005г.г.), Бойков В.И. (с 1976г.), Коровьяков А.Н. (с 1976г.), Котельников Ю.П. (с 1978г.), Болтунов Г.И. (с 1980г.), Быстров С.В. (с 1980г.), Чежин М.С. (с 1982г.), Бобцов А.А. (с 1996г.), Сергеев К.А. (с 2002г.), Кремлев А.С. (с 2005г.), Лукьянова Г.В. (с 2005г.); старшие преподаватели: Борисов В.А. (1945–1969г.г.), Соколов В.В. (1947–1973г.г.), Новиков В.Г. (1945–1977г.г.), Ганту Ю.Б. (1958–1982г.г.), Никифорова Л.Т. (1953–1991г.г.), Перевозчиков Н.М. (1953–1992г.г.), Салмыгин И.П. (с 1977г.); кандидат технических наук, ассистент Дударенко Н.А. (с 2006г.); заведующие лабораториями кафедры: Мезерин А.А. (1945–1964г.г.), Семенов А.С. (1977–1992г.г.), Рукуйжа Е.В. (с 1992г.); инженер-программист Л.В. Кожевникова (с 1986г.), помощник зав. кафедрой Л.В. Шапкина (с 2004г.).

Четыре этапа развития кафедры Систем управления и информатики (СУИ) (до 2001-го года кафедры Автоматики и телемеханики) со дня ее основания, связанные с именами ее руководителей, – это четыре этапа формирования научной мысли ее коллектива.

Научная школа кафедры СУИ начала формироваться в 60–70-х годах при содействии профессоров кафедры Пальтова И.П., Сабинина Ю.А. и доцента Танского Е.А. усилиями коллег новой возрастной и научной мировоззренческой формации в лице доцента Лаврентьева В.В., профессоров Дроздова В.Н., Ушакова А.В., Григорьева В.В. и Мирошника И.В., организоваших в 1970-м году постоянно действующий научный семинар «Современные проблемы теории управления». В настоящее время кафедра объединяет тесно сотрудничающие между собой научные коллективы, возглавляемые профессорами В.В. Григорьевым, Ушаковым А.В., Никифоровым В.О., Бобцовым А.А., доцентами Бойковым В.И. и Быстровым С.В. Системная методология научной школы кафедры опирается на возможности методов Ляпунова, оптимизации и матричного формализма, заложенного в уравнениях Ляпунова, Сильвестра и Риккати, а также методов современной теории нелинейных систем, модального, робастного и адаптивного управления; области научных интересов кафедры охватывают как классические, так и новые направления теории управления: теория качественной устойчивости теория многомерных непрерывных и дискретных систем (SVD-approach), аналитический синтез регуляторов; нелинейные и адаптивные системы управления пространственным движением, интеллектуальная робототехника; робастность, интервальность, нечеткость, структурная и информационная избыточность в задачах управления, измерения и наблюдения, теория и методы проектирования многомерных систем с модальными и эллипсоидными показателями качества гарантированной стабильности над бесконечными полями и гарантированной информационной надежности над полями Галуа, теория и практика двоичных динамических систем дискретной автоматики.

Научные результаты кафедры СУИ имеют богатую национальную и зарубежную библиографию. Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и в трудах международных конференций. Ученые кафедры опубликовали более 100 монографий и учебников, приблизительно 200 методических и учебных пособий, около 2400 статей из них более 270 в журналах академий наук, около 150 статей и докладов в зарубежных англоязычных изданиях, ученые кафедры являются авторами более 550 изобретений; приняли участие в работе более 480 национальных и зарубежных научных конференций. Кафедра поддерживает научные контакты с 20 техническими зарубежными университетами. Четыре члена кафедры профессора Григорьев В.В., Мирошник И.В., Никифоров В.О., Ушаков А.В. являются действительными членами (академиками) международной академии нелинейных наук.

Основные научные разработки кафедры представлены следующими временными периодами.

1945–1959г.г. – Системы автоматизации комплексных измерений параметров кораблей, телеметрии и регистрации при мореходных испытаниях, а также системы стабилизации и фазирования скоростей двигателей в составе многодвигательных комплексов (научные руководители – профессор Цуккерман М.Л., доценты Танский Е.А., Яковлев Н.М.; заказчик – МОП).

1959–1970г.г. – фотоэлектрические прецизионные измерительные следящие системы для нужд ракетной техники (комплекс ПОР), автоматизированная система обработки снимков в пузырьковых камерах (комплекс ПУОС), системы стабилизации и фазирования для фототелеграфной аппаратуры (комплекс «Газета–2») (научные руководители – профессор Пальтов И.П., доценты Танский Е.А., Яковлев Н.М.; заказчик–ЛОМО, НИИЭТУ).

1970–1980г.г. – серия магнитных усилителей для двигателей типа ДИД–ДГ, системы лазерного наведения высокостабильных фазовых светодальномеров, высокоточные системы астрогидирования в режиме счета фотонов, система управления комплексом вытяжки оптического волокна, цифровые регуляторы на базе микроЭВМ, контурные робототехнические комплексы, системы управления посадкой (научные руководители – профессора Пальтов И.П., Сабинин Ю.А., доценты Николаев П.В., Яковлев Н.М.; заказчик – ЛОМО, ГОИ им. С.И. Вавилова, ВНИИРА, НПО «Дальняя связь», ЦНИИРТК).

1980–1990г.г. – НИР на кафедре ведется в соответствии с программами «Оптимум», «МИР», «Излучение», «Интенсификация–90», во исполнение которых разработаны системы микропроцессорного управления многодвигательными приводами; системы адаптивной оптики для многоэлементных главных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров, приводов микроперемещений для систем адаптивной оптики, а также автоматизированный светодальномерный лазерный профилометрический комплекс для предэксплуатационной юстировки больших полноповоротных радиотелескопов; системы управления судовождением судов ледовой проводки и робототехники; системы управления посадочными комплексами летательных аппаратов на стационарное и подвижное основания (научные руководители – профессора – Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В.Ушаков, В.В.Григорьев, И.В.Мирошник и доцент П.В. Николаев; заказчик – ГОИ, ЛОМО, НПО «Электросила», ПО «Кировский завод», ЦНИИ РТК, ОКБ МЭИ, ВНИИРА).

С 1990г. основные разработки составили: системы управления лазерными локационными станциями слежения; АСУТП многокаскадных сеточных фотоэлектронных умножителей; САПР САУ; адаптивные робототехнические комплексы и транспортные тележки; системы контурного управления и прецизионной интерполяции для сложных поверхностей; системы согласованного управления многодвигательными агрегатами; устройства на базе пьезоэлектрических, электрострикционных и магнитострикционных двигателей; прецизионные устройства измерения микроперемещений, высокоточные системы оптического контроля формы отражающей поверхности на базе микроконтроллеров; фотоэлектрические измерительные системы с аналоговыми анализаторами и анализаторами на регулярных ППЗ–структурах ; аппаратура контроля деформаций металлоконструкций больших полноповоротных радиотелескопов РТФ–32 , РТФ–64 с диаметром раскрыва главного рефлектора соответственно 32 и 64 метра; устройства дискретной автоматики (УДА) гарантированной информационной надежности для средств управления стрелочным хозяйством Санкт-Петербургского метрополитена; система автоматики комплекса приготовления удобрения (научные руководители – профессора Григорьев В.В. , Мирошник И.В., Сабинин Ю.А., Ушаков А.В.; доценты – Бойков В.И., Николаев П.В.), НИР выполняются по международным, федеральным и региональным комплексным целевым программам «Университеты России», Министерства образования РФ, грантов РФФИ, «Интеграция», развития и поддержки Санкт-Петербургского УНЦ «Проблемы машиностроения», «Излучение», на основе НТП базового финансирования института, «Телемеханика–2000», на основе сотрудничества с НИИТМ, АОЗТ «Технокон» и АО «Экопрод», а также в инициативном порядке).

В настоящее время на кафедре функционируют три научно-исследовательские лаборатории: «технической кибернетики» (основатель – профессор Мирошник И.В., научный руководитель – профессор Бобцов А.А.), «автоматизированного оптико–электронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели – профессор Сабинин Ю.А. и доцент Николаев П.В., научные руководители – доцент Бойков В.И. и профессор Ушаков А.В.) и «технической информатики и телемеханики» (основатель – профессор Цуккерман М.Л., научный руководитель профессор Ушаков А.В.).

На кафедру автоматики и телемеханики ЛИТМО при ее основании в 1945г. была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной и оборонной промышленности. Первый выпуск инженеров на кафедре состоялся в 1948-м году и составил 17 человек, выпускники кафедры получили диплом инженера-электромеханика по специальности 0606 – приборы автоматики и телемеханических устройств. С 1980-го года выпускникам кафедры присваивается квалификация инженера–электрика по специальности автоматика и телемеханика, с 1990-го года – по специальности 2101 – автоматика и управление в технических системах, а с 1994-го года – по специальности 220201 – управление и информатика в технических системах. С момента основания кафедра выпустила более 5000 инженеров. С 1990-го года кафедра дополнительно готовит бакалавров техники и технологии по направлению 5502 – автоматизация и управление, в настоящее время началась подготовка магистров по тому же направлению.

Начиная с 50-х годов, на кафедре функционирует аспирантура и докторантура, более 180 их выпускников получили степень кандидата наук, а 25 – ученую степень доктора наук, причем 15 из них защитили диссертации за последние десять лет. В настоящее время в аспирантуре кафедры обучается 20 человек, а в докторантуре – двое.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики (б. автоматики и телемеханики) представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов.