

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ



К.Н. Войнов

**ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ТЕОРИИ И НА ПРАКТИКЕ**

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2014

УДК 531.8

Войнов К.Н. Имитационное моделирование в теории и на практике: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 67 с.

Изложены основы теории моделирования и даны практические примеры. Приведены основные положения, схемы и формулы для расчётов, а также компьютерные программы.

Предназначено для студентов бакалавриата направлений 141200, 190600, 220700, 151000, 140700 всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Арет

**Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом
Института холода и биотехнологий**



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий механики и оптики, 2014

© Войнов К.Н., 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ИМИТАЦИИ.....	8
ВАРИАНТЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ.....	11
АНАЛИЗ ИЗНОСА ПАР ТРЕНИЯ	22
НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И РАСЧЁТЫ.....	29
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	48
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	54
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	63

ВВЕДЕНИЕ

Поиск конкретных путей повышения производительности труда при механической обработке деталей/заготовок привёл в конечном итоге к созданию гибких производственных систем со специальным оборудованием (станками), тактовыми столами, роботами, накопителями и др.

Применение гибких модулей, встроенных в систему или в автоматическую линию цеха, позволяет осуществлять многономенклатурную обработку изделий в условиях малолюдной и безлюдной технологий.

При разработке современных роботов и нового оборудования приходится решать большое число важных и сложных задач, например таких, как программное обеспечение диагностики, активного контроля, надёжности функционирования и др.

В последнее время начал широко внедряться метод имитационного моделирования, основанный главным образом на классических принципах теории вероятностей и математической статистики, позволяющий «проигрывать» различные производственные ситуации.

При проектировании роботизированных комплексов и гибких производственных систем на различных стадиях технологической подготовки производства перед проектировщиками встаёт сложная проблема оценки влияния принимаемых решений на важнейшие показатели функционирования технических систем.

При этом отметим, что если на ранних предпроектных этапах создания техники достаточно обоснованное применение укрупнённых методов оценки, то на стадиях детального анализа и синтеза необходимы весьма точные методы, базирующиеся на моделировании процессов работы системы. Последние связаны с широким спектром возможных альтернативных решений, затраты на использование которых обычно весьма велики.

В частности, в гибких производственных системах (ГПС) понятие технологического процесса расширяется за счёт включения в учёт вспомогательных и обслуживающих операций, которые вместе с основными операциями становятся цикловыми. Это обстоятельство требует точного количественного анализа влияния указанных составляющих технологических процессов совместно с другими факторами общей структуры системы (временными, надёжностно-стоимостными параметрами, ограничениями погрузочно-разгрузочных средств, воз-

возможностями транспортно-накопительной системы, а также систем обеспечения оснасткой и инструментом) на производительность и стабильность работы современной техники.

Имитационное моделирование оказывается для таких случаев практически единственным эффективным инструментом для анализа сложных современных производственных систем, которые всё шире начинают внедряться на заводах, в депо и на предприятиях самых различных профилей и назначения.

Рассмотрим модели, методы и принципы моделирования производственных систем.

Известно, что *модель* – это физическая или абстрактная система, адекватно представляющая собой объект исследования.

Физические модели образуются из совокупности материальных объектов. Для их построения используются различные свойства, причём природа применяемых в модели материальных элементов не обязательно та же, что и в исследуемом объекте. Типичным примером физической модели является макет.

Абстрактная модель – это описание объекта исследования на некотором языке (например, программирования). Абстрактность модели проявляется в том, что её компонентами являются понятия (математические описания, чертежи, схемы, алгоритмы).

Основное условие для возможности корректного перехода от исследования объекта к исследованию модели и дальнейшего перенесения его результатов на сам объект исследования – это требование адекватности принятой модели и реального объекта. Адекватность предполагает воспроизведение моделью с необходимой полнотой всех основных свойств самого объекта.

Моделирование – это процесс представления объекта исследования адекватной ему моделью и проведения с ней экспериментов для получения требуемой информации об объекте наблюдения. При этом модель выступает и как средство, и как объект исследования, а моделирование является косвенным методом выявления свойств и анализа поведения объекта, прямой эксперимент с которым трудно выполнить, экономически невыгоден или даже вообще невозможен.

Моделирование объекта может быть осуществлено на базе аналитических, численных и имитационных методов. Аналитические методы состоят в преобразовании символьной информации, записанной на языке систематического анализа. При использовании ана-

литических методов строится математическая модель объекта, представляющая его физические свойства в виде математических схем и соотношений. Математическая модель обычно строится на основе стандартных понятий, символики и методов конкретной теории, например теории массового обслуживания.

Численные методы по сравнению с аналитическими позволяют решать значительно более широкий круг задач. Они основываются на построении конечной последовательности действий над числами, приводящей к получению требуемых результатов с допустимой погрешностью (обычно считается, что инженерная погрешность не должна превышать 3–5 %). При этом математические операции и отношения заменяются соответствующими операциями над числами. В результате получают таблицы или графики соответствующих зависимостей, раскрывающих свойства объекта.

Для исследования сложных объектов (например, роботизированных комплексов, гибких производственных систем, трибологических объектов и др.) построение математических моделей часто оказывается невозможным из-за необходимости принятия существенных допущений и ограничений, а анализ созданных моделей даже численными методами – нерезультативным ввиду неустойчивости погрешностей аппроксимации и округлений.

В таких случаях широкое применение находят модели, представляющие собой содержательное описание объектов исследования в форме алгоритмов, в которых отражаются как структура исследуемого объекта, что достигается отождествлением его элементов с соответствующими элементами алгоритмов, так и процессы функционирования объекта во времени, представляемые в логико-математической форме. Модели такого типа называются имитационными или алгоритмическими. Свойственная имитационным моделям реалистичность основывается на использовании для их построения всех имеющихся представлений об объекте исследования как теоретического, так и эвристического характера.

Пояснение. *Эвристика* (переводится как «отыскиваю», «открываю» что-то новое) – отрасль знания, изучающая творческое мышление человека; алгоритм решения задачи, не имеющий строгого обоснования, но тем не менее это метод, дающий в большинстве практически случаев её приемлемое решение.

Процесс функционирования робота или ГПС – процесс выполнения совокупности технологических и вспомогательных устройств различных работ или процедур, которые исследуются в основном во временном аспекте с учётом точности исполнения команд, надёжности функционирования и стоимостных показателей. Достаточно часто, так как описываемые процессы носят случайный характер, при построении имитационных моделей применяют метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), а сама процедура построения и анализа имитационных моделей является статистическим моделированием. Позитивным свойством при этом является универсальность, гарантирующая возможность анализа систем любой степени сложности и с любой степенью детализации процессов. Негативным моментом оказывается трудоёмкость процесса моделирования, то есть надо выполнять большое количество операций над числами, хотя обычно получается частный характер конечных результатов исследования, не раскрывающий общей закономерности или зависимости.

Таким образом, имитационная модель есть описание объекта наблюдения на некотором языке. Составными частями модели являются описания элементов, образующих систему, структурная взаимосвязь элементов, а также свойства среды, в которой функционирует исследуемая система. Вся эта информация носит логико-математический характер и представляется в виде совокупности алгоритмов, на основе которых строится программа для электронной вычислительной машине.

Как правило, в общем случае при проведении имитационного моделирования выделяют следующие этапы.

1. Создание концептуальной модели, описывающей причинно-следственные связи, присущие исследуемому объекту и наиболее существенные в рамках конкретной задачи. Цель этого этапа – определение общего замысла построения модели в соответствии с поставленной задачей. Одновременно выдвигаются рабочие гипотезы, уточняются сделанные допущения, определяется общая методика проведения анализа, делается выбор программных и технических средств.

2. Разработка имитационной модели, которая имеет целью создание программы для ЭВМ путём составления алгоритмического описания концептуальной схемы расчёта. Алгоритмическое описание заключается в детальном определении параметров, характеристик,

критериев эффективности, а также в логико-математическом представлении принятой модели. Необходимый элемент выполняемых на этом этапе работ – тщательный анализ адекватности выбранных расчётных схем.

3. Моделирование на компьютере (или ЭВМ). Цель данного этапа – сбор на модели статистических данных о поведении исследуемой системы, а также их математическая обработка. При этом особое внимание должно уделяться корректности принятия закона распределения. Для этого используются такие известные критерии и приёмы, как критерии Мизеса, Пирсона, Колмогорова, числа Вестергарда, коэффициент вариации, проверка устойчивости закона распределения для возможности экстраполяции получаемых выводов о надёжности работы системы и др. Кроме того, как показала практика, в особо ответственных случаях для очень дорогих и важных по своему назначению систем целесообразно использовать проверку закона распределения наработок/отказов по трём критериям. При этом, если два закона подтверждают один и тот же предполагаемый к использованию, то именно он оказывается наиболее подходящим, то есть верным законом.

Ввиду достаточной сложности определения числовых оценок возможной работы объекта при создании имитационной модели используется метод её последовательного уточнения, основанный на циклическом повторении отдельных этапов.

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ИМИТАЦИИ

Программное обеспечение имитации производственных систем, в частности ГПС и роботов, в основном развивается в двух направлениях: разработка специализированных языков программирования, имитационного моделирования и целых имитационных систем, или «имитаторов». Во всех случаях основой является математическое описание объекта или производственного процесса. При разработке языков (например, СИМУЛА, GPSS, GASP, SIMSCRIPT и др.) используют более универсальные модели, которые имеют широкий спектр практических приложений.

Методическую основу языков имитационного моделирования составляют представления об объекте исследования как о системе с дискретными событиями. При этом модель строится таким образом, чтобы поведение системы воспроизводилось в виде последователь-

ности её состояний во времени. Всякое фиксируемое изменение положения или состояния системы называется событием. Событие, вызываемое в реальной системе изменением параметров последней в течение некоторого временного интервала, в самой модели считается происходящим мгновенно. При этом фиксируются лишь те события, которые действительно существенны для анализа поведения объекта исследования.

Языки имитационного моделирования предоставляют в распоряжение пользователей следующее: 1) методологию предварительного анализа системы и возможность создания формализованного описания её состояний; 2) методологию проведения имитации, то есть воспроизведения функционирования системы на модели; 3) общую методологию статистического эксперимента.

Вместе с тем имитационные языки, даже современного уровня, редко используются как инструмент проектировщика системы. Они скорее служат средством, упрощающим разработку имитаторов. Для идентификации внутренней модели реальному объекту нужно только ввести исходные данные в той форме, которая регламентирована для данного имитатора. Пожалуй, наиболее распространены имитаторы с интерактивным вводом данных в виде предлагаемой формы документов, типа «ПОДСИМ», «АСИМПТОТА» и другие, которые позволяют значительно облегчить труд исследователей и проектировщиков, так как представляют собой инструмент оперативного анализа, оценки, выбора и оптимизации вариантов возможных структур и стратегий управления. Вариант применения системы «АСИМПТОТА» для моделирования ГПС показан на рис. 1.

Требуемые для моделирования исходные данные заносятся в специальные таблицы, описывающие оборудование, перечень об обрабатываемых/транспортируемых деталях, необходимых усилиях, точности позиционирования и ориентации во времени и в пространстве.

В частности, приведённая система для гибкого производства рассчитывает коэффициенты работы оборудования и загрузки транспортных средств, количество ячеек склада при различных вариантах закрепления, длительность межоперационного пролёживания изделий, объём выпуска за планируемый интервал времени, длительность циклов.

1. Контроль и анализ информации об оборудовании
2. Контроль и анализ информации о деталях
3. Режим работы с транспортом
4. Введение корректировок
5. Проведение расчётов загрузок оборудования и транспорта
6. Генерация имитационной модели в соответствии с заданными режимами

Рис. 1. Общая блок-схема этапов работы системы «АСИМПТОТА»

В начале программы, описывающей имитационную модель, в вычислительную машину должны быть либо вставлены соответствующие управляющие карты, либо произведена необходимая запись информации в блок памяти. Все предварительные расчёты, связанные с оптимизацией процессов обработки, транспортирования, смены инструментов, обычно производят на ЭВМ. Задачи линейного и динамического программирования, экономические расчёты, поиск седловых точек оптимизации и другие характеристики решают в основном с использованием дифференциальных или систем линейных уравнений, основ теории вероятностей и алгебры логики.

Рассмотрим фрагменты применения операторного языка GPSS, для которого с помощью оператора GENERATE в модели осуществляется запуск деталей на обработку с расчётной периодичностью. Оператор QUEUE осуществляет передачу деталей в накопитель с заданным номером, а оператор DEPART – съём детали с накопителя. В свою очередь, операторы SEIZE и RELEASE соответственно предназначены для транспортировки деталей от накопителя к обрабатывающему станку и освобождения последнего в моменты,

когда длительность обработки деталей закончена. Необходимая задержка моделируется с помощью оператора ADVANCE.

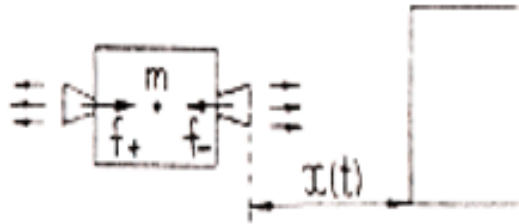
В результате имитационного моделирования для обрабатываемого изделия рассчитывают длительность пребывания детали на накопителе, коэффициент загрузки оборудования, требуемую ёмкость накопителя. На основании результатов серии экспериментов строят зависимости, позволяющие принимать эффективные проектные решения для робототехники и гибких производственных систем.

ВАРИАНТЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ

Первоначально необходимо определить цель исследования и отметить, какие внешние воздействия будут рассматриваться в качестве причин динамического изменения состояния объекта и какая конечная физическая переменная величина будет следствием, итоговым результатом. Воздействие на объект называют входной величиной, а получаемый результат – выходной величиной. Кроме того, целесообразно отметить, какие возможные промежуточные переменные должны быть рассмотрены при изучении преобразования первопричин–входов и от каких факторов/параметров зависят эти преобразования.

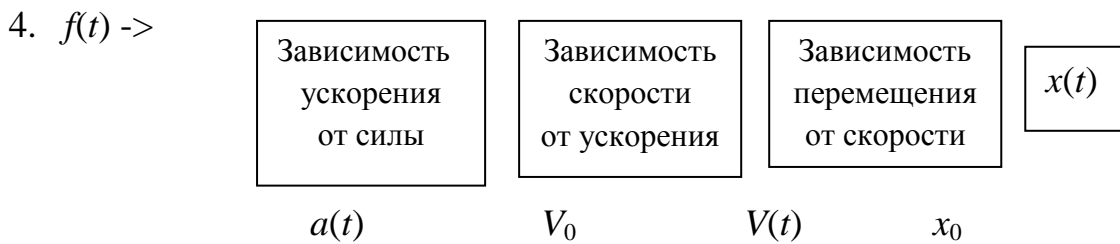
Сделаем ряд пояснений по движению материальной точки массой m , на которую действует сила f , что характерно для огромного количества механических систем. Исследуемой частью робота может, например, быть узел манипулятора, который должен выдвинуться и «замереть» в определённой точке позиционирования. При этом пусть двигатель разгоняет систему с силой f_+ либо тормозит движение при подходе к заданной точке с силой f_- . Величина перемещения схвата робота зависит от скорости $v(t)$, а последняя – от ускорения системы $a(t)$. Преобразование величины тяги в ускорение определяется массой m объекта, которая в общем случае может также являться функцией времени $m(t)$. Представим одномерное движение точки на рис. 2.

Блоки 4 приведённой схемы представляют те зависимости, которые подлежат математическому описанию и изучению. Левая часть из блоков – это закон Ньютона, связывающий ускорение $a(t)$ от силы $f(t)$ и массы m . Средняя и правая части представляют собой зависимости скорости от ускорения и перемещения от скорости.



$$f(t) \rightarrow m \rightarrow V(t); x(t)$$

1. $f(t) \rightarrow x(t)$
2. $f(t) \frac{a(t); V(t)}{m(t)} \rightarrow x(t)$
3. $f(t) \rightarrow a(t) \rightarrow V(t) \rightarrow x(t)$



6. $d^2x/dt^2 = (1/m)f(t)$

Рис. 2. Пример изображения и описания одномерного движения материальной точки

Таким образом, можно в пятом блоке записать следующие уравнения и представить структурную блок-схему (рис. 3):

$$a(t) = (1/m)f(t) - \text{закон Ньютона};$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau - \text{накопление скорости};$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau - \text{накопление перемещения}.$$

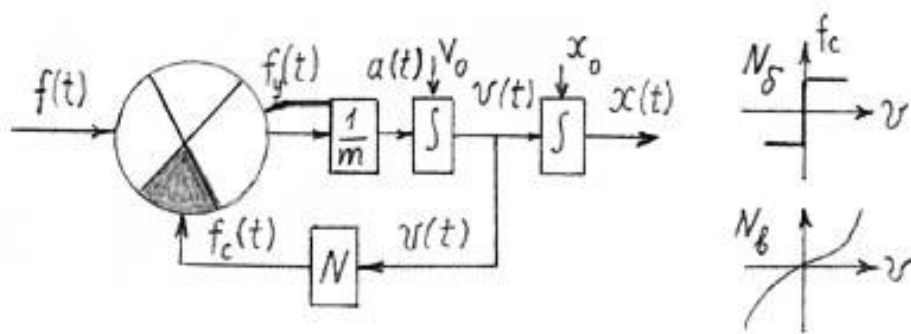


Рис. 3. Принципиальная расчётная структурная блок-схема:
 $f_c(t)$ – сила сопротивления движению, зависящая от скорости $v(t)$,
а ускоряющая сила $f_y(t)$ равна разности сил тяги $f(t)$ и сопротивления $f_c(t)$

Кроме того, можно также записать, что

$$d^2x / dt^2 = (1/m)\{f(t) - f_c[v(t)]\}.$$

Аналитическая модель 6 представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, которым описываем движение материальной точки массой m под действием силы $f(t)$ с начальными условиями при $t = 0$: $v(0) = v_0$; $x(0) = x_0$. В общем случае зависимость силы сопротивления от скорости является нелинейной (см. блок $f_c = N(v)$). Кроме того, нелинейность $N_б$ для перемещения схвата робота соответствует «сухому» трению, а $N_в$ – гидравлическому сопротивлению, пропорциональному квадрату скорости.

Следовательно, можно также сформулировать цель моделирования как изучение алгоритмов выбора управляющей силы в зависимости от координаты и скорости движущегося объекта, обеспечивающих решение задачи за минимальное время.

Здесь важно отметить существенный трибологический аспект работы механической системы.

Дело в том, что по мере совершенствования технологии изготовления и ремонта деталей, образующих пары трения, специалисты постоянно пытаются получить поверхности сопряжений (направляющие, шарниры и пр.) с идеально гладким профилем. При разумном использовании по объёму смазочного материала в зоне трения детали действительно начинают скользить «как по маслу». Это приводит к тому, что автоматика не срабатывает должным образом с фиксацией момента точного позиционирования системы. Наблюдается процесс «промахивания», когда систему нужно возвращать на некоторое расстояние назад. Но и при обратном движении возможно также проскакивание требуемой точки останова схвата или конкретного элемента конструкции манипулятора.

Таким образом, начинается «дёргание» всей системы с попыткой обеспечения нужной позиции. Такого типа процесс может быть многократным, что очень негативно влияет на надёжность работы робота или иной механической системы. Поэтому возникает проблема оптимизации шероховатости поверхностей трения, которая бы не приводила к усложнению системы управления по чёткой фиксации пространственного положения конкретного подвижного элемента. В определённом смысле здесь можно использовать термин о «равновесной шероховатости», которая, не вызывая существенного увеличения сил и коэффициентов трения, а также износа, позволяла бы эффективно и с первого раза добиваться занятия подвижным элементом манипулятора или схватом робота нужного пространственного положения. Но беда в том, что такая равновесная шероховатость не является стабильным параметром (как и коэффициент трения).

Частичным решением описанной проблемы может быть использование в парах трения деталей разных марок, различающихся между собой также по твёрдости, шероховатости и химическому строению. Напомним ещё, что не следует стремиться получить после изготовления детали, рабочие поверхности которых были бы идеально гладкими. Форма шероховатости при одних и тех же значениях Ra не должна иметь остроугольного (треугольного или пирамидального) вида. Обычно более предпочтительно, чтобы она имела бы куполообразный пологий вид, как кривая Гаусса при больших значениях величины среднего квадратичного отклонения или дисперсии.

Наличие структурной математической модели позволяет по ней записать аналитические соотношения для продолжения теоретического исследования системы. Для этого компьютер должен предлагать разработчику набор модулей микропрограмм, которые реализуют математические преобразования входных переменных в выходные. Одновременно следует стремиться к минимизации состава команд, ограничиваясь лишь теми, которые естественным образом оказываются предельно ясными при технологическом построении моделей предметных объектов, в том числе и математических (рис. 4).

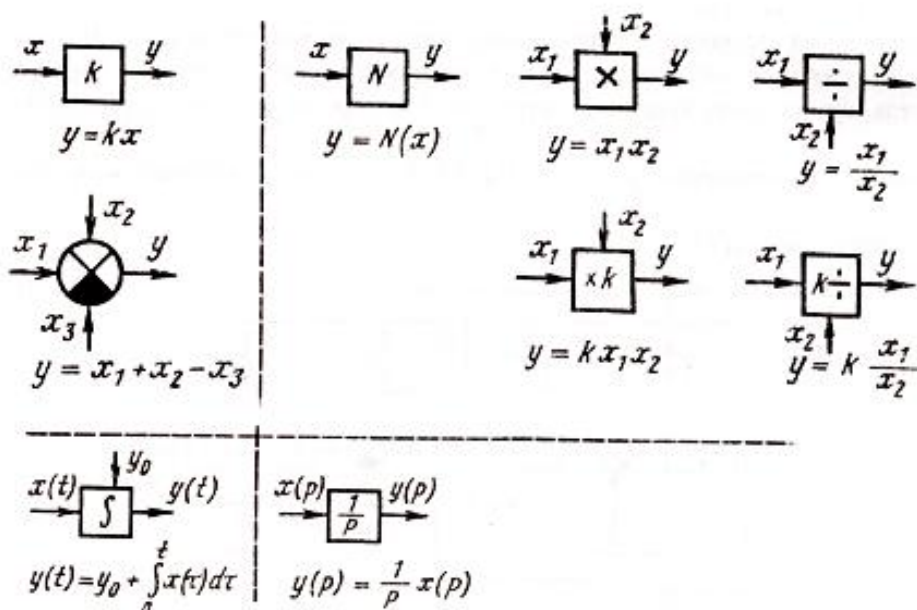


Рис. 4. Элементарные преобразователи структурных математических моделей

В частности, усилитель k представляет линейное преобразование причины $x(t)$ в следствие $y(t) = kx(t)$, математически описывающее линейные физические процессы/зависимости типа преобразования силы в ускорение, тока через резистор в падение на нём напряжения и др.

Нелинейность типа $y = N(x)$ в общем виде представляет и описывает физические зависимости переменной–следствия $y(t)$ от одной переменной–причины $x(t)$. Примерами могут также служить зависимость силы сопротивления от скорости, мощности, от температуры, вибрации и т. д. Блок перемножения $y = x_1 x_2$ представляет собой структурно-физические зависимости одной переменной–следствия от произведения двух переменных величин – типа, скажем, законов Ампера и Фарадея. Существуют также физические зависимости, для

математического представления которых требуется преобразователь типа «деление» ($y = x_1 / x_2$) одной из переменных причин $x_1(t)$ на вторую $x_2(t)$.

Наконец, сумматор (кружок с зачернённым сектором) $y(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)$ отражает принцип суперпозиции, то есть когда переменная—следствие $y(t)$ равна алгебраической сумме одинаковых с ней по физической природе переменных—причин $x_i(t)$.

Все эти преобразователи безынерционны, то есть они мгновенно преобразуют входные переменные—причины в выходную—следствие.

Если заменить обозначение интеграла в соответствующих блоках модели оператором $1/p$, то по такой модели достаточно легко записать передаточную функцию.

Развитие процессов во времени определяется происходящим в объектах накоплением скорости, перемещения, температуры и пр. Математически элементарный процесс накопления представляет интегратор-преобразователь, зависимость выходной переменной которого $y(t)$ от входной $x(t)$ описывается следующим выражением:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t x(\tau) d\tau ,$$

где $y_0 = y(0)$ есть начальное значение переменной $y(t)$ при $t = 0$.

На практике часто приходится осуществлять моделирование как линейных, так и нелинейных систем (рис. 5).

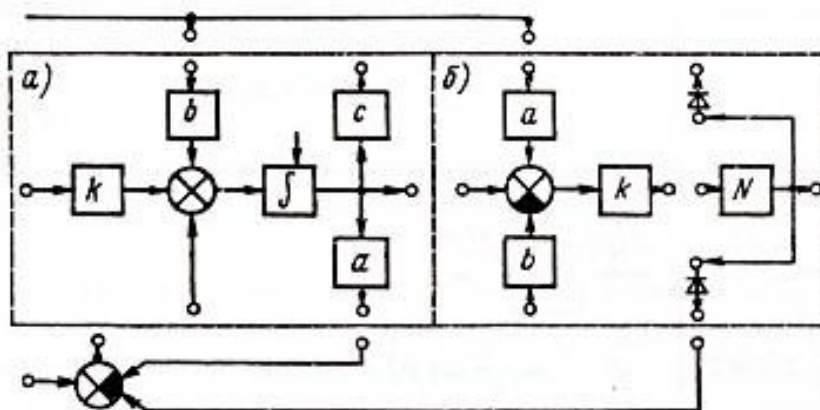


Рис. 5. Схема типового соединения элементарных преобразователей в модуле при моделировании:
а – линейных систем; б – нелинейных зависимостей

Если рассматривать каждый преобразователь «словом», то конкретную структуру можно считать неким «словосочетанием», позволяющим создавать описания реально происходящих в системе процессов. Такого типа представления уменьшают возможную информационную избыточность, улучшают использование операционных усилителей и повышают точность и устойчивость моделей для широкого диапазона изменения их параметров.

Аналогичная картина наблюдается и для моделей нелинейных систем, в которых функциональные нелинейные преобразователи также сочетаются с усилителями и сумматорами. Натурные эксперименты состоят в непосредственном изучении статических и динамических характеристик и процессов объектов. При этом статика отражает характер установившегося состояния выходной переменной, а динамика показывает процессы перехода из одного состояния в другое либо реакцию выходной переменной на изменение входных характеристик. Поэтому входную переменную, используемую для достижения цели, называют управляющей, а те независимые переменные, которые препятствуют достижению конечной цели управления, называют возмущающими (или возмущениями). Однако не следует забывать, что в отдельных случаях экономически нецелесообразно из-за дороговизны выполнять натурный эксперимент в масштабе 1:1. Поэтому математическая модель позволяет при её адекватности исполнения по отношению к реальному функционированию объекта быстрее и намного дешевле получить интересующий исследователя или разработчика результат.

Зависимость выходной переменной от управления в установившемся режиме называют регулировочной или градуировочной характеристикой, а от возмущения – нагрузочной, внешней или статической характеристикой по возмущению.

Последний фрагмент, на который хотелось бы обратить внимание читателя, связан опять-таки с трибологией подвижных сопряжений, то есть с вопросами и проблемами, касающимися трения, изнашивания, влияния шероховатости, наличия или отсутствия смазочного материала и пр. Соответствующий график влияния практически «сухого» трения показан на рис. 6.

Основными составляющими момента от сил сухого трения $M_{с.тр}$ являются момент от сил трения покоя $M_{тр.0}$ и момент от сил трения движения (скольжения) $M_{с.тр.дв}$. Момент от сил трения покоя

характеризует нечувствительность рулевого привода и в данной работе рассматривается как параметр. Момент от сил трения движения представляет собой монотонно убывающую вогнутую положительную функцию от угловой скорости вращения $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)$, характеризуемую своим максимальным значением

$$M_{с.тр.дв.} \rightarrow M_{тр.ост.} \text{ при } \left|\frac{d\beta}{dt}\right| \rightarrow 0,$$

минимальным значением

$$M_{с.тр.дв.} \rightarrow M_{тр.min} \text{ при } \left|\frac{d\beta}{dt}\right| \rightarrow \infty,$$

максимально отрицательным наклоном (параметр k'). При этом $M_{тр.0} \geq M_{тр.ост.} \geq M_{тр.min} \geq 0$.

Геометрическая интерпретация «сухого» трения показана на рис. 7, где $\dot{\beta} \equiv \frac{d\beta}{dt}$.

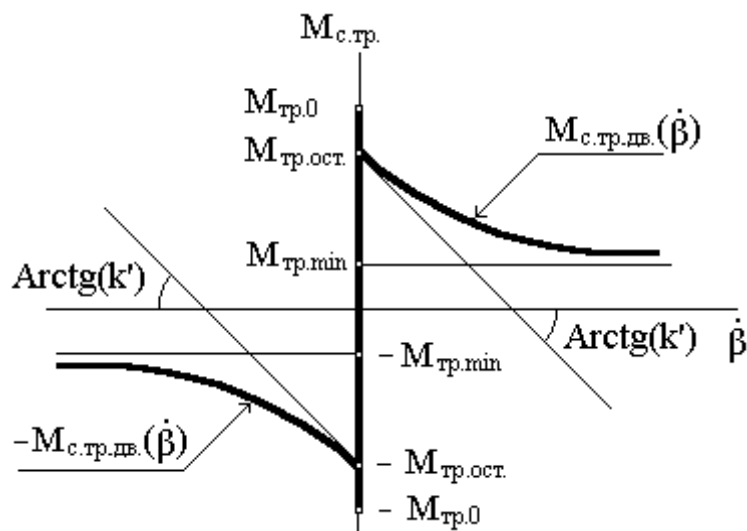


Рис. 6. Принятый закон практически «сухого» трения

Аналитической записью закона «сухого» трения может послужить следующее описание:

$$|M_{с.тр.}| < M_{тр.0}, \quad \text{если } \frac{d\beta}{dt} = 0;$$

$$M_{с.тр.} = M_{с.тр.дв.} \text{Sign}\left(\frac{d\beta}{dt}\right), \quad \text{если } \frac{d\beta}{dt} \neq 0.$$

Аналитической записью учитываемого в модели внешнего трения будет следующее описание, которое подробно исследует в своих работах профессор В.Н. Шамберов:

$$|M_{вн.тр.}| < M_{тр.0}, \quad \text{если } \frac{d\beta}{dt} = 0;$$

$$M_{вн.тр.} = M_{тр.дв.}, \quad \text{если } \frac{d\beta}{dt} \neq 0,$$

где

$$M_{тр.дв.} = k_T \frac{d\beta}{dt} + M_{с.тр.дв.} \text{Sign}\left(\frac{d\beta}{dt}\right).$$

В зависимости от значений коэффициентов k_T и k' характеристика внешнего трения движения $M_{тр.дв.}$ может иметь принципиально различный вид. Так, при $k_T < k'$ характеристика при малых значениях скорости $\frac{d\beta}{dt}$ имеет отрицательный наклон, при $k_T > k'$ характеристика при всех значениях скорости $\frac{d\beta}{dt}$ имеет положительный наклон (геометрическая интерпретация характеристики внешнего трения показана на рис. 7 и 8, где $\dot{\beta} \equiv \frac{d\beta}{dt}$).

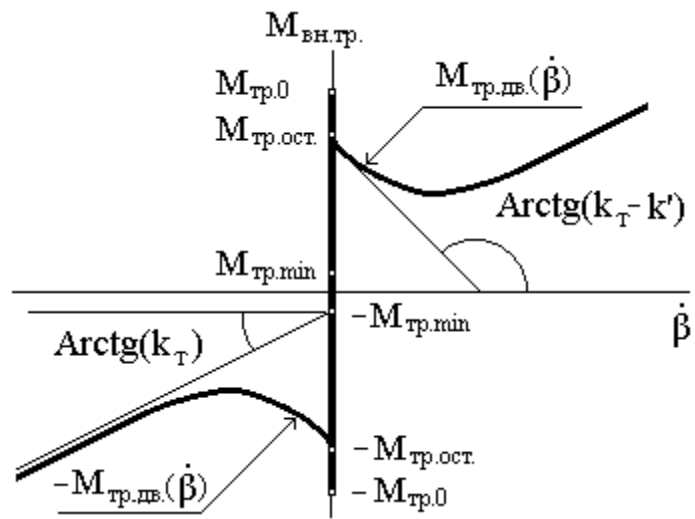


Рис. 7. Характеристика внешнего трения при $k_T < k'$

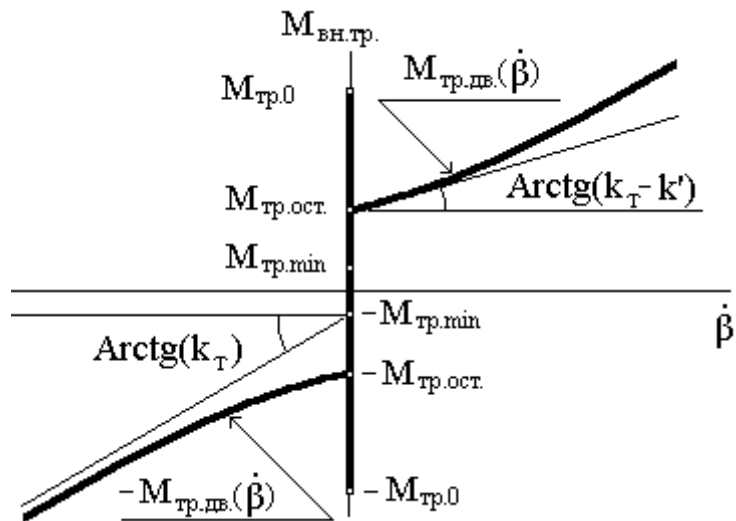


Рис. 8. Характеристика внешнего трения при $k_T > k'$

Объединяя соответствующие уравнения в единое описание, получим следующую математическую модель привода механической системы с электродвигателем:

$$1) \quad L \frac{di}{dt} = -Ri - c_e \frac{d\theta}{dt} + U;$$

$$2) \quad J_{\text{э.пр.}} \frac{d^2\theta}{dt^2} = c_m i - c_y (\theta - \beta);$$

$$3-a) \quad J_p \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \text{ если } \frac{d\beta}{dt} = 0 \text{ и } |c_y(\theta - \beta)| < M_{\text{тр.0}};$$

$$3-b) \quad J_p \frac{d^2\beta}{dt^2} = -M_{\text{тр.ост.}} \text{Sign}(c_y(\theta - \beta)) + c_y(\theta - \beta),$$

если $\frac{d\beta}{dt} = 0$ и $|c_y(\theta - \beta)| \geq M_{\text{тр.0}};$

$$3-в) \quad J_p \frac{d^2\beta}{dt^2} = -k \frac{d\beta}{dt} - M_{\text{с.тр.ск.}} \left(\frac{d\beta}{dt} \right) \text{Sign} \left(\frac{d\beta}{dt} \right) + c_y(\theta - \beta),$$

если $\frac{d\beta}{dt} \neq 0.$

Переменными состояниями модели являются: i – ток якоря; $\frac{d\theta}{dt}$ – угловая скорость вращения сектора; θ – угол поворота сектора; $\frac{d\beta}{dt}$ – угловая скорость вращения задающего механизма; β – угол поворота механизма.

Параметрами модели являются: $J_{\text{э.пр.}}$ – приведённый к валу электродвигателя момент инерции ротора, редуктора и сектора ($\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$); L – суммарная индуктивность электродвигателя; R – суммарное активное сопротивление электродвигателя; c_e – скоростной коэффициент электродвигателя; c_m – коэффициент пропорциональности электродвигателя; J_p – приведённый момент инерции механизма; k_T – коэффициент, характеризующий вязкое трение в уст-

ройстве; c_y – жёсткость упругой связи сектора с механизмом поворота; $M_{тр.0}$ – момент от сил трения покоя; $M_{тр.ост.}$ – максимальное значение момента от сил трения движения; k' – коэффициент, характеризующий максимальный отрицательный наклон характеристики «сухого трения» движения.

Подобные модели позволяют также выявить устойчивость работы системы, возникновение или отсутствие автоколебательных процессов, заедание/заклинивание соединений, изначально выполненных как подвижные направляющие или шарниры.

В заключение поясним причину взятия термина «сухое трение» в кавычки. Дело в том, что полностью сухое трение будет только в строго определённых условиях, когда влажность окружающей среды равна нулю, чего в естественных условиях практически почти никогда не бывает.

АНАЛИЗ ИЗНОСА ПАР ТРЕНИЯ

В данной части представлен один из возможных алгоритмов решения задачи, связанной с обработкой статистических данных, полученных при анализе износа детали – манжеты робота. Эксперимент проводился на стенде с возвратно-поступательным движением. Измерялся линейный износ Y по мере наработки X через каждые 4 дня испытаний (табл. 1). В качестве контртела был выбран стальной образец из Ст3.

Таблица 1

Исходные данные об износе детали

Y 0,50	0,05	0,10	0,05	0,24	0,26	0,30	0,32	0,33	0,40	0,48
X 44	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Эти же значения, но только представленные с нарастающим итогом, записаны в табл. 2 и изображены графически на рис. 9. Расположение точек даёт основание предположить, что зависимость износа от времени наработки нелинейная и может быть описана полиномом.

Данные об износе, представленные нарастающим итогом

y_i	x_i	$x_i y_i$	$(x_i)^2$	$(x_i)^2 y_i$	$(x_i)^3$	$(x_i)^4$
0,05	4	0,20	16	0,80	64	256
0,15	8	1,20	64	9,60	512	4096
0,20	12	2,40	144	28,80	1728	20736
0,44	16	7,04	256	112,64	4096	65536
0,70	20	14,00	400	280,00	8000	160000
1,00	24	24,00	576	576,00	13824	331776
1,32	28	36,96	784	1034,88	21952	614656
1,65	32	52,60	1024	1689,60	32768	1048576
2,05	36	73,80	1296	2656,80	46656	1679616
2,53	40	101,20	1600	4048,00	64000	2560000
3,03	44	133,32	1936	5866,08	85184	3748096
$\Sigma=13,12$	264	446,72	8096	16303,20	278784	10233344

Рассмотрим регрессионную модель вида

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2. \quad (1)$$

Оценки параметров β_0 , β_1 , β_2 получим по методу наименьших квадратов:

$$Q(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_i^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2))^2 \rightarrow \min.$$

Из условий минимума функции $Q(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ следует, что оценки величин, стоящих в круглых скобках, есть решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} \beta_0 n + \beta_1 \Sigma x_i + \beta_2 \Sigma x_i^2 &= \Sigma y_i; \\ \beta_0 \Sigma x_i + \beta_1 \Sigma x_i^2 + \beta_2 \Sigma x_i^3 &= \Sigma x_i y_i; \\ \beta_0 \Sigma x_i^2 + \beta_1 \Sigma x_i^3 + \beta_2 \Sigma x_i^4 &= \Sigma x_i^2 y_i. \end{aligned} \quad (2)$$

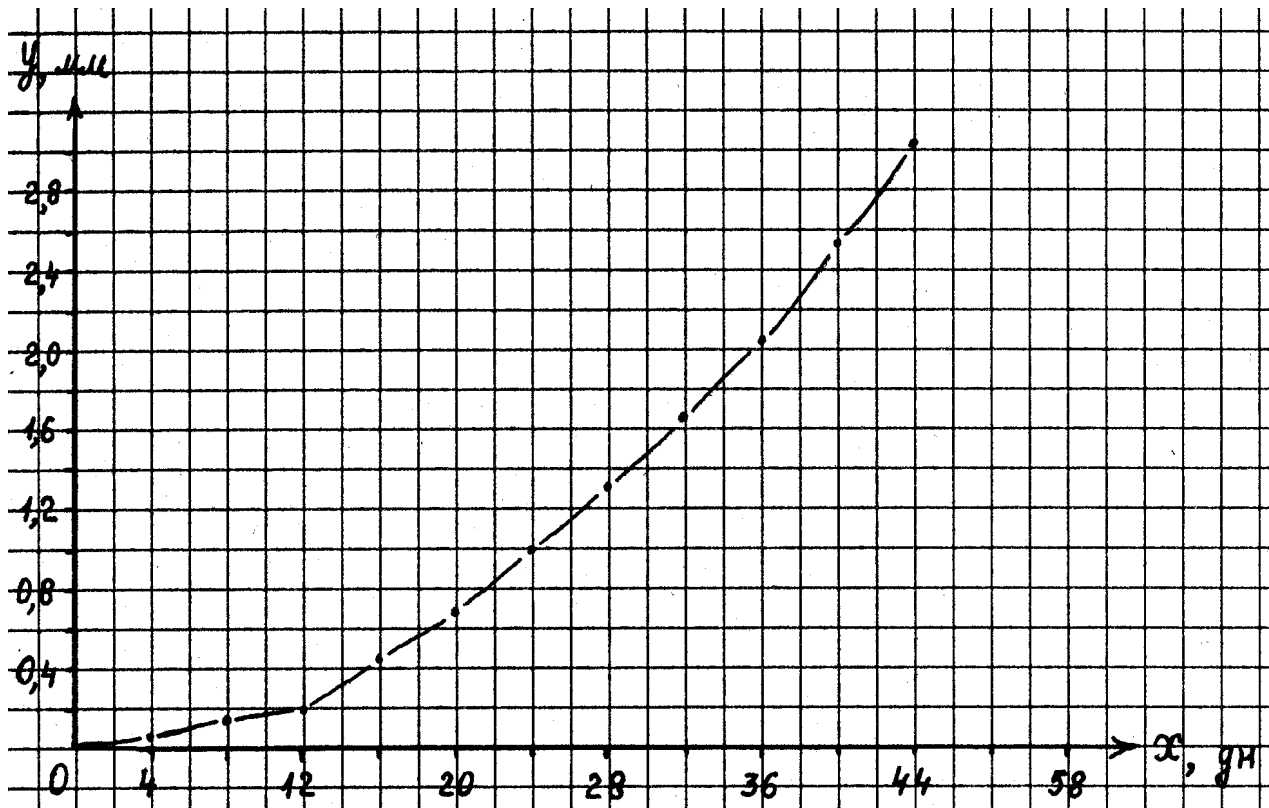


Рис. 9. Кривая износа, построенная с учётом нарастания его величины по мере увеличения времени наработки

Система уравнений (2) может быть записана в матричном виде:

$$(A^T A) \beta = \bar{A} Y, \quad (3)$$

где $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^T$ – вектор параметров; $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – вектор наблюдений, здесь n – число наблюдений ($n = 11$).

Регрессионная матрица размера 11×3 будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$A^T A$ – квадратная матрица размера 3×3 . Решение системы при условии, что детерминант $\det(A^T A) \neq 0$ для определения вектора оценок параметров модели имеет вид

$$\tilde{\beta} = (A^T A)^{-1} A^T Y. \quad (4)$$

Данные для определения коэффициентов системы (2) сведены в табл. 2. Система (2) с числовыми коэффициентами представлена ниже:

$$\begin{aligned} 11\beta_0 + 264\beta_1 + 8096\beta_2 &= 13,12; \\ 264\beta_0 + 8096\beta_1 + 278784\beta_2 &= 446,72; \\ 8096\beta_0 + 278784\beta_1 + 10233344\beta_2 &= 16303,2. \end{aligned} \quad (5)$$

Записанную систему легко преобразовать в следующую систему:

$$\begin{aligned} \beta_0 + 24\beta_1 + 736\beta_2 &= 1,19 \\ \beta_0 + 30,67\beta_1 + 1056\beta_2 &= 1,69; \\ \beta_0 + 34,43\beta_1 + 1264\beta_2 &= 2,01; \end{aligned} \quad (5')$$

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 = -0.029224 \\ \tilde{\beta}_1 = 0.007929 \\ \tilde{\beta}_2 = 0.001398 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Решая последнюю систему, получаем вектор оценок параметров.

Таким образом, получена регрессионная модель износа вида

$$\tilde{y} = -0,029224 + 0,007929x + 0,001398x^2, \quad (7)$$

график которой фактически показан на рис. 9 (также в табл. 3).

Таблица 3

Реальные данные об износе и значения, соответствующие регрессионной модели с учётом цикла наработки в днях

y_i	0,05	0,15	0,20	0,44	0,70	1,00	1,32
\tilde{y}	0,03	0,124	0,26	0,455	0,69	0,967	1,29

Окончание табл. 3

y_i	1,65	2,05	2,53	3,03	?	?
\tilde{y}	1,66	2,07	2,525	3,026	3,57	4,16

Знаки вопроса поставлены для оценки прогноза в дальнейшем возможном процессе изнашивания детали.

Проверим значимость модели (7). Для этого первоначально определим величины изнашивания детали в принятой модели.

В частности, среднее значение величин износа y , равное $\Sigma y_i / n$, будет 1,19; значение $\Sigma y_i^2 = 25,9978$, а величина $\tilde{\beta}^T A^T Y = 25,91789$.

Остаточная сумма квадратов Q_e , а также другие величины могут быть вычислены по формулам

$$Q_R = \tilde{\beta}^T A^T Y - n\bar{y}^2 = 25,91789 - 11 \cdot (1,19)^2 = 10,3408$$

$$Q_y = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 25,9978 - 11 \cdot (1,19)^2 = 10,4207$$

$$Q_e = Q_y - Q_R = 0,0799$$

$$Q_e = \sum (y_i - \bar{y}_i)^2;$$

$$Q_y = \sum (y_i - \bar{y})^2; \quad Q_R = \sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2; \quad Q_y = Q_R + Q_e$$

Значения износа, полученные при продолжении опытов, то есть при наработках за 48 дней и 52 дня, фактически оказались равными 3,61 и 4,14 мм, что даёт высокую сходимость результатов.

Проверим гипотезу $H_0: \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$. Если эта гипотеза верна, то модель (7) незначима.

Рассмотрим статистику вида $F = (Q_R (11 - 3)) / ((3 - 1)Q_e)$, подчиняющуюся распределению Фишера с (3-1) и (11-3) степенями свободы.

Тогда, подставляя числовые значения в приведённую формулу, получаем, что $F = 517,687$.

Так как квантиль распределения Фишера при уровне значимости 0,95 и числе степеней свободы (2;8), взятая из математического справочника, $F_{0,95; (2;8)} = 4,46$ и много меньше, чем $F = 517,687$, то гипотеза о незначимости модели (7) отклоняется.

Определим коэффициент детерминации R^2 :

$$R^2 = Q_R / Q_y = 10,3408 / 10,4207 = 0,9923,$$

или $R = 0,9962$.

Найденная величина R оценивает коэффициент корреляции между опытными данными y_i и вычисленными величинами, которые предсказывает модель (7).

Качество аппроксимации, которое обеспечивает регрессионная модель (7), определяется остаточной дисперсией вида

$$S^2 = Q_e / (n - 3) = 0,0799 / (11 - 3) = 0,009988;$$

$$S \approx 0,1.$$

В целях вычисления границ доверительных интервалов для параметров модели (7) потребуется оценить ковариационную матрицу K параметров:

$$K = S^2 (A^T A)^{-1}, \quad (8)$$

диагональные элементы $S^2 a_{ii}$ которой участвуют в формировании доверительных интервалов:

$$\bar{\beta}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-3} s \sqrt{a_{ii}}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (9)$$

где $t_{1-\alpha/2; (11-3)}$ – квантиль распределения Стьюдента при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы (11-3).

Оценка ковариационной матрицы приведена ниже.

Кроме того, вычислим границы доверительных интервалов для параметров имитационной модели (7).

В частности, для:

$$\beta_0: -0,03 \pm 2,3 * 0,1 * \sqrt{1,206} \rightarrow (-0,249; +0,189);$$

$$\beta_1: 0,008 \pm 2,3 * 0,1 * \sqrt{0,011} \rightarrow (-0,016; +0,028);$$

$$\beta_2: 0,0014 \pm 2,3 * 0,1 * \sqrt{(5 * 10^{-6})} \rightarrow (0,001; 0,0018).$$

$$K = 0.009988 \begin{pmatrix} 11 & 264 & 8096 \\ 264 & 8096 & 278784 \\ 8096 & 278784 & 10233344 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= 0.009988 \begin{pmatrix} 1.206 & -0.105 & 0.011 \\ -0.105 & 0.011 & 0.0007 \\ 0.002 & 0.0007 & 5 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Доверительный интервал для дисперсии ошибок измерений определяется выражением

$$\frac{(11 - 3)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;(11-3)}} < \sigma^2 < \frac{(11 - 3)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;(11-3)}} ,$$

где χ^2 – квантиль χ^2 - распределения при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $(11-3)$;

$$\chi^2_{0,975; 8} = 17,5; \quad \chi^2_{0,025; 8} = 2,18.$$

Таким образом, искомый доверительный интервал имеет следующий вид:

$$(8 \cdot 0,01 / 17,5) < \sigma^2 < (8 \cdot 0,01 / 2,18) \rightarrow 0,0046 < \sigma^2 < 0,0367.$$

Итак, задача решена.

Не следует пугаться приведённых формул. Уважаемому читателю достаточно по приведённому алгоритму подставить свои статистические данные, чтобы сделать оценку надёжности конкретного «своего» уплотнения или манжеты либо иного элемента холодильного оборудования.

В настоящее время нами проведены успешные работы по созданию манжеты с увеличенным сроком эксплуатации, которая по мере износа может автоматически, полуавтоматически или вручную поджиматься с заданным усилием к вращающемуся или перемещающемуся валу. Результаты опытов оказались весьма положительными. При этом обеспечивается такое поджатие в сопряжении «манжета–вал», которое препятствует образованию течи, но одновременно не увеличивает чрезмерно силы трения в зоне подвижного сопряжения.

Опыты были проведены для ситуации, когда в качестве удерживаемой манжетой среды являлась техническая вода. Уплотняемый вал был расположен вертикально в цилиндрическом резервуаре и приводился с торца вала во вращение электрическим двигателем.

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И РАСЧЁТЫ

Так как промышленные роботы достаточно широко используются в металлообработке заготовок и деталей, в частности для подачи в станки с числовым программным управлением (ЧПУ) и для съёма со станков готовой продукции, то в этом разделе отразим некоторые важные положения, связанные с точностью позиционирования/настройки. Это относится и к наладке элементов гибких производственных систем (ГПС).

В частности, работы по наладке фрезерных, а также сверлильных и расточных станков с ЧПУ включают в себя: наладку режущего инструмента, его установку в шпинделе станка, ввод коррекций на размеры инструмента и режимы обработки в устройство числового программного управления (УЧПУ), ориентирование и установку приспособлений и заготовок. В корректоры систем ЧПУ может вводиться величина фактической длины инструмента или разницы между фактической длиной и заранее заданной. Для измерения или настройки собранный инструмент закрепляют в шпинделе прибора. Плоскость торца шпинделя является нулевой плоскостью отсчёта. Измерительное средство прибора совмещают с главной режущей кромкой или устанавливают на необходимую длину.

При измерении и настройке возникают различные случайные погрешности, которые обуславливают точность работы приборов. Предельная погрешность измерения или настройки инструмента по длине $\Delta_{дл}$ рассчитывается по формуле

$$\Delta_{дл} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где Δ_1 – погрешность установки оправки в шпинделе прибора и станка (случайная погрешность, зависящая от точности изготовления конического хвостовика вспомогательного инструмента); Δ_2 – погрешность перемещения и остановки измерительных средств прибора (систематическая погрешность данного прибора, характеризующая его точность); Δ_3 – погрешность совмещения измерительных средств с главной режущей кромкой инструмента (случайная погрешность, зависящая от квалификации наладчика, условий работы и конструкции прибора).

Если известно положение оси шпинделя прибора относительно начала отсчёта, то инструмент и измерительное средство совмещают с режущей кромкой по диаметру. Для этого инструмент и шпиндель

прибора следует повернуть на 360° . Тогда точность измерения $\Delta_{\text{окр}}$ следует рассчитывать по приведённой выше формуле, но прибавив ещё Δ_4 – погрешность вращения шпинделя прибора, то есть систематическую погрешность, характеризующую его точность.

Наконец, если требуется дополнительно устанавливать эталонную оправку, по которой и определяется положение оси, тогда следует прибавить в расчёт ещё один член Δ_5 – погрешность установки эталонной оправки в шпинделе прибора, что определяет систематическую погрешность, характеризующую точность оправки.

При установке деталей в приспособлении перед началом обработки нужно определить положение его исполнительных поверхностей в системе координат станка. Положение опорно-установочных элементов приспособления на станке определяют при размерной настройке.

На станках с ЧПУ обычно различают три системы координат:

- начало отсчёта (ноль) станка, то есть точка с нулевыми значениями положения рабочих органов; перемещение по трём перпендикулярным направлениям представляет собой координатную систему станка;

- начало отсчёта (ноль) детали есть начало системы её координат, от которой задаются размеры и относительное положение поверхностей детали;

- исходная, или нулевая, точка обработки является началом программы обработки; от неё начинается запрограммированное перемещение инструмента. Координаты её задаются относительно координатной системы детали.

Возвращаясь к работе промышленных роботов, обслуживающих рабочие места на производстве (например, станки), отметим, что необходимо выполнить динамические расчёты электродвигателей промышленных роботов (ПР). Такие расчёты связаны с уточнением параметров и моделированием динамики двигателя. Для этого совместно решаются дифференциальные уравнения действующих моментов и изменяющихся электрических параметров двигателя и привода. При этом главными областями работы системы являются участки разгона и торможения. От характера и стабильности переходных процессов на этих участках зависят динамическая нагрузка и колебания в степени подвижности робота, что в итоге определяет быстродействие и точность позиционирования.

Так, для двигателей постоянного тока дифференциальные уравнения, описывающие указанные переходные процессы, в наиболее общем случае имеют следующий вид:

$$J_{п.д} d^2\varphi_d/dt^2 = M_d(\varphi_m, U_y, T_m) - M_{п.с.};$$

$$dU_y/dt = f(U, E, U_y, \varphi_m, T_y);$$

$$E = f(\varphi_m, d\varphi_d/dt).$$

Первое уравнение связывает момент двигателя M_d , приведённый момент сил инерции $J_{п.д} d^2\varphi_d/dt^2$ и момент сил сопротивления $M_{п.с.}$. Кроме того, следует иметь в виду, что момент двигателя является функцией следующих электрических параметров: φ_m, U_y, T_m – магнитного потока, напряжения в цепи якоря и электрохимической постоянной времени.

Второе уравнение определяет изменение напряжения якоря U_y в зависимости от следующих параметров: U, E, T_y – напряжения питания, противоЭДС и электрохимической постоянной времени двигателя.

Наконец, третье уравнение связывает изменение противоЭДС в зависимости от магнитного потока и скорости.

Совместное интегрирование приведённых уравнений даёт возможность получить характер изменения скорости $d\varphi_d/dt = \omega_d$, ускорения $d^2\varphi_d/dt^2$ – ускорения и движущего момента $M_d(t)$, что позволяет уточнить рабочие параметры выбираемого для промышленного робота двигателя.

Шаговые силовые электрические двигатели используются в малых ПР для переносных степеней подвижности, а также в средних промышленных роботах для движения кисти захватного устройства (ЗУ), или схвата.

Электрогидравлические приводы с шаговыми серводвигателями применяют для переносных степеней подвижности в средних и тяжёлых ПР.

Шаговые электродвигатели обеспечивают большой диапазон регулирования и содержат приводы с разомкнутой системой управления, то есть без датчиков обратной связи. К недостаткам шаговых двигателей относится наличие угловых (статических) погрешностей, зависящих от нагрузки, а также возникновение колебаний при от-

работке угловых шагов и малая выходная мощность. Однако такие двигатели используются как в позиционных, так и в контурных режимах работы роботов.

Параметры шагового двигателя, работающего вместе с гидросилителем, выбирают путём решения уравнения моментов, действующих на ведущем выходном валу привода.

Длина пути, проходимого рабочим органом,

$$L = \Delta l i f_{\text{ш.д}},$$

где Δl – путь, эквивалентный одному шагу двигателя, мм; i – передаточное отношение всего привода; $f_{\text{ш.д}}$ – частота управляющих импульсов шагового двигателя, Гц.

Наконец, при выборе электрического двигателя с гидросилителем и редуктором последовательность расчётов должна быть следующей:

– проверяют значение элементарного линейного перемещения руки ПР: $\Delta l = v_{\text{max}}/f_{\text{ш.д max}}$, где v_{max} – принятая максимальная скорость руки робота, мм/с; при этом найденное значение сравнивают с допустимой погрешностью позиционирования руки робота;

– определяют частоту вращения ведущего вала (выходного вала редуктора), которая в шариковинтовой передаче $n_{\text{Вш}} = v_{\text{max}}/(60t_{\text{в}})$, где $t_{\text{в}}$ – шаг винта, мм;

– вычисляют число шагов при одном обороте шагового двигателя: $k_{\text{ш}} = 360^\circ/\varphi_{\text{ш}}$, где $\varphi_{\text{ш}}$ – угловой шаг выбранного двигателя;

– рассчитывают частоту вращения шагового двигателя: $n_{\text{ш.д}} = f_{\text{ш.д}}/k_{\text{ш}}$;

– вычисляют требуемое передаточное число редуктора: $i_{\text{ред}} = n_{\text{ш.д}}/n_{\text{Вш}}$.

В итоге тип шагового двигателя и тип гидросилителя (в комплекте с шаговым электродвигателем) выбирают по специальным каталогам (например, под ред. Ю.Г. Козырева, Я.А. Шифрина. Современные промышленные роботы, 1984).

При выборе варианта гидросилителя его необходимый движущий момент $M_{\text{дГУ}}$ определяют по формуле

$$M_{\text{дГУ}} = M_{\text{Вш}} k_{\text{ГУ}},$$

где $k_{\text{ГУ}}$ – коэффициент запаса (принимается в пределах от 2,0 до 2,5);

$$M_{\text{Вщ}} = (M_{\text{и}} + M_{\text{с}}) / i_{\text{м}},$$

здесь $M_{\text{и}}$ и $M_{\text{с}}$ – моменты сил инерции и сил сопротивления на ведомом валу без учёта КПД; $i_{\text{м}}$ – передаточное число зубчатого или винтового механизма.

Гидравлические двигатели промышленных роботов, которые в основном применяются для средних и крупных ПР и имеют повышенную грузоподъёмность, обладают малой инерционностью подвижных частей и обеспечивают высокое быстродействие $v = 0,8 \dots 1,2$ м/с.

Торможение и реверс в гидродвигателях происходят достаточно быстро, причём используемое масло в гидросистемах реализует давление до 20 МПа. Отсутствие сжимаемости масла, а также большое допустимое давление обеспечивают гидродвигателям хорошие динамические точностные и массогабаритные характеристики, в частности лучшие по сравнению с характеристиками пневмоприводов.

Блок питания для гидродвигателей содержит гидронасос, дроссели, фильтры, регуляторы давления. Гидродвигатели применяются в системах с позиционными или контурными циклами движения. Обычно к недостаткам гидродвигателей в их эксплуатации относят возможные утечки масла и необходимость времени прогрева системы питания.

Гидродвигатели с цилиндрами двустороннего действия применяются для поступательного горизонтального и вертикального перемещения руки промышленных роботов. Причём выдвижение и подъём руки, как правило, производятся без промежуточных передач. Поворот руки робота осуществляется от гидроцилиндров с зубчатореечными механизмами.

В пневматических приводах промышленных роботов обычно используются два способа торможения – с помощью демпфирующих устройств или путём дросселирования. В первом случае торможение происходит на небольшом конечном участке движения поршня (в частности, при подходе к точке позиционирования). Как правило, плавность торможения достигается рациональным подбором параметров демпфера, например конических щелей, через которые перетекает рабочая жидкость – масло, а также геометрических параметров самого дросселя.

При дросселировании торможение и разгон происходят на большей части рабочего хода, чем и обеспечивается требуемый закон изменения скорости и ускорения в течение всего цикла движения. При этом тормозной золотник срабатывает по пути движения штока, изменяя в этом режиме площадь сечения выхлопного канала. Это изменяет величину давления, что и определяет требуемый закон движения поршня.

Пневматические двигатели обычно используются в малых или средних ПР, а также для зажима деталей/заготовок в захватных устройствах.

На практике пневматические двигатели имеют достаточно высокое быстродействие ($v = 1,0 \dots 1,5$ м/с и более). Однако регулирование их закона перемещений, а следовательно, и места позиционирования, затруднены из-за сжимаемости воздуха и наличия переходных процессов. Пневмодвигатели в ПР применяются в цикловом режиме эксплуатации. Часто используется работа по фиксированным упорам для обеспечения требуемого конечного положения ведомого звена. Чтобы предотвратить отскоки при ударе об упор, используют демпферы и давление сжатого воздуха от 0,3 до 1,0 МПа. Для поворота руки ПР пневмоцилиндры соединяют с ведомым звеном зубчатой реечной передачей, а для обеспечения движений руки робота в горизонтальной или вертикальной плоскостях промежуточные передачи обычно не используются.

К основным параметрам пневмодвигателя относят следующие: эффективную площадь поршня в рабочей F_1 и выхлопной F_2 полостях; рабочий ход поршня; текущую координату x ; v , a – скорость и ускорение поршня; массу исполнительного устройства (например, руки ПР); давление воздуха в рабочей p_1 и выхлопной p_2 полостях; диаметры поршня D и штока d ; эффективные площади сечений трубопроводов на входе f_1 и выходе f_2 ; движущую силу P_d и силу нагрузки P_n .

Диаметр поршня горизонтально расположенного цилиндра определяют по формуле

$$D = B\sqrt{(P_n / [k_1 p_c(1 - k_2)])};$$

а для вертикально расположенного цилиндра имеем

$$D = B\sqrt{((P_n \pm G) / [k_1 p_c(1 - k_2)])},$$

где p_c – давление воздуха в сети, МПа; P_n – нагрузка, Н; G – вес исполнительного устройства, Н; k_1 – параметр, определяющий отношение нагрузки и движущего усилия на штоке (выбирается с учётом зависимости скорости v и давления p_c), причём средние значения $k_1 = 0,4 \dots 0,5$; k_2 – коэффициент, учитывающий трение в цилиндре, выбираемый в зависимости от нагрузки $P_n = 6 \cdot 10^2 \dots 6 \cdot 10^4$ Н равным $0,50 \dots 0,05$; $B = 11,3$ – постоянный коэффициент; $\pm G$ – знаки, стоящие перед этой буквой, зависят от направления движения поршня: при опускании берётся знак «+», а при подъёме знак «-».

Длину цилиндра выбирают в зависимости от хода поршня. Для цилиндров двустороннего действия рекомендуется, чтобы $L = (8 \dots 10)D$.

Габаритные и присоединительные размеры следует выбирать, руководствуясь специальными каталогами (например, под ред. Ю.Г. Козырева и Я.А. Шифрина, Современные промышленные роботы, М., Машиностроение, 1984), причём при большой длине штока его следует рассчитывать и на устойчивость.

В заключение этой части приведём числовой пример анализа работы робота с позиции точности позиционирования.

Допустим имитируем, что робот (его схват) должен выдвигаться на 500 мм с величиной дисперсии $\sigma^2 = 0,64$. Проконтролировав 100 выдвигений, допустим, что среднее арифметическое значение x_0 оказалось равным 508 мм или 50,8 см. Проанализируем: либо это случайность, либо схват манипулятора начал выдвигаться на большее расстояние, чем допустимо по техническим требованиям.

Первоначально необходимо узнать, в каких пределах может меняться величина x_0 по некоторым случайным причинам с вероятностью, например, 0,95.

Если x – среднее арифметическое длин n выдвигений схвата, то есть $x_* = (1/n)\sum x_i = \sum(x_i / n)$, где знак суммы определяется значениями от $i = 1$ до n . Здесь x_* – случайная величина в выборке, причём по теореме Ляпунова она распределена по закону, близкому к нормальному с математическим ожиданием $M(x_*)$ и средним квадратичным отклонением $\sigma(x_*)$.

Если область распределения некоторой величины ζ не указана, тогда $M(\zeta) = \int x p(x) dx$ (границы интеграла от $-\infty$ до $+\infty$).

Тогда для нормального закона распределения можно записать, что вероятность

$$P(\alpha \leq x_* \leq \beta) \approx \Phi((\beta - M(x_*)) / \sigma(x_*)) - \Phi((\alpha - M(x_*)) / \sigma(x*)).$$

Обозначим номинальный размер выдвижения схвата через x_0 , тогда можно записать, что:

$$P(\alpha \leq x_* \leq \beta) \approx \Phi((\beta - x_0)\sqrt{n} / \sigma) - \Phi((\alpha - x_0)\sqrt{n} / \sigma),$$

а дисперсия $D(x_0) = \sigma^2 / n$; откуда $\sigma(x_0) = \sigma / \sqrt{n}$.

Теперь рассмотрим вероятность события:

$$P(x_0 - \varepsilon \leq x_* \leq x_0 + \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n} / \sigma).$$

В нашем случае $x_0 = 50$ (см), $n = 100$, $\sigma = \sqrt{0,64} = 0,8$, тогда

$$P(50 - \varepsilon \leq x_* \leq 50 + \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{100} / 0,8) = 2\Phi(12,5\varepsilon).$$

Далее определим доверительный интервал случайного размера перемещения схвата x_* с достоверностью 0,95, то есть имеем

$$P(50 - \varepsilon \leq x_* \leq 50 + \varepsilon) \approx 2\Phi(12,5\varepsilon) = 0,95.$$

Откуда находим, что $\Phi(12,5\varepsilon) = 0,475$. Из справочных математических таблиц учебников находим, что $\Phi(x)$, равному 0,475, соответствует $x = 1,96$, то есть $12,5\varepsilon = 1,96$, откуда $\varepsilon = 0,16$ (см).

Следовательно, с достоверностью 0,95, то есть с гарантией в 95 %, случайное перемещение x_* должно попасть в следующий промежуток: $[50 - 0,16; 50 + 0,16]$, то есть от 49,84 до 50,16, а номинальное значение было, как было указано, $x_0 = 50,8$ (см), что выходит за полученный интервал. Таким образом, можно сделать вывод, что с вероятностью 0,95 работа по позиционированию не является пригодной.

Примечание о сути теоремы Ляпунова. Если случайная величина ζ есть сумма большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которой на всю сумму мало, то величина ζ имеет распределение, близкое к нормальному.

Не будем также забывать, что при имитационном моделировании возможного появления отказов постепенного типа из-за развития износа пар трения следует учитывать, что влияние образующегося в эксплуатации износа на надёжность работы механической системы будет происходить с некоторым запаздыванием до тех пор, пока не будет выработан ресурс, соответствующий установленному предельному допуску на изнашивание. Покажем это с использо-

ванием экспоненциального (показательного) закона и с решением в компьютерной оболочке MathCad (рис. 10).

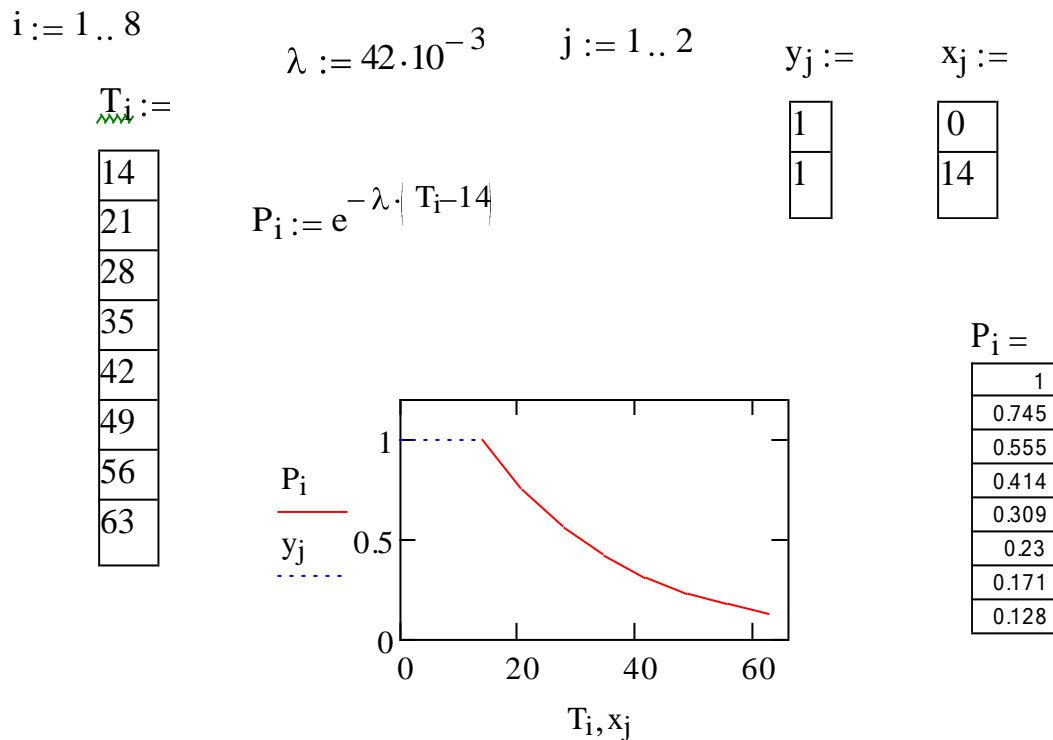


Рис. 10. Характер изменения величины вероятности безотказной работы при экспоненциальном законе распределения постепенных отказов

Известно, что для данного закона величина вероятности безотказной работы $P(\tau > T) = 1$ при $T < t_0$ либо равна $\exp(-\lambda(T - t_0))$ при $T \geq t_0$, где t_0 – наработка, при которой износный отказ не возникает (например, дни); λ – интенсивность отказов (отказы/день).

Полагая, что только после наработки $T = 14$ дней эксплуатации могут появляться первые отказы, легко составить приведённую для расчёта программу. Примеры других компьютерных программ можно посмотреть в публикации автора «Трибология и робототехника: в вопросах и ответах» (СПб.: ПГУПС, 2007. – 134 с.).

Теперь рассмотрим вариант позиционной задачи в кинематике работа-манипулятора (случай прямой задачи моделирования). Пусть для локальной системы координат некоторой точки i -го звена нижний индекс будет обозначать номер звена, а верхний – номер системы координат. При этом при вычитании единицы из верхнего индекса имеем искомые координаты этой точки в системе $(i - 1)$ -го

звена. Связь между координатами точки, измеренными в разных системах, можно представить в следующем виде:

$$x_i^{(i-1)} = \tau_{11}x_i^{(i)} + \tau_{12}y_i^{(i)} + \tau_{13}z_i^{(i)} + l_x,$$

$$y_i^{(i-1)} = \tau_{21}x_i^{(i)} + \tau_{22}y_i^{(i)} + \tau_{23}z_i^{(i)} + l_y,$$

$$z_i^{(i-1)} = \tau_{31}x_i^{(i)} + \tau_{32}y_i^{(i)} + \tau_{33}z_i^{(i)} + l_z.$$

где τ_{ij} – элементы, определяющие относительный поворот координатных систем; l_x, l_y, l_z – элементы, определяющие их сдвиг.

Предыдущее выражение можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(i-1)} \\ y_i^{(i-1)} \\ z_i^{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(i)} \\ y_i^{(i)} \\ z_i^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix},$$

где, в свою очередь, можно записать как матрицу поворота системы, так и вектор сдвига, то есть как координаты начала положения $X_i Y_i Z_i$ в системе координат $X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$:

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} - \text{матрица поворота,} \quad \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} - \text{вектор сдвига}$$

Так как наиболее удобно использовать в расчётах первую систему, ибо во второй системе поворот системы координат и её сдвиг заданы разными матрицами, то можно добавить в первую систему в качестве четвёртого уравнения тривиальное тождество ($1 = 1$).

$$x_i^{(i-1)} = \tau_{11}x_i^{(i)} + \tau_{12}y_i^{(i)} + \tau_{13}z_i^{(i)} + l_x,$$

$$y_i^{(i-1)} = \tau_{21}x_i^{(i)} + \tau_{22}y_i^{(i)} + \tau_{23}z_i^{(i)} + l_y,$$

$$z_i^{(i-1)} = \tau_{31}x_i^{(i)} + \tau_{32}y_i^{(i)} + \tau_{33}z_i^{(i)} + l_z,$$

$$1 = 0 + 0 + 0 + 1.$$

Тогда запись в матричной форме будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(i-1)} \\ y_i^{(i-1)} \\ z_i^{(i-1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & l_x \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & l_y \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(i)} \\ y_i^{(i)} \\ z_i^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

В этом случае все преобразования координат будут задаваться одной матрицей размера 4×4 . Как известно, построенные подобным образом координаты называются однородными.

В итоге обе предыдущие системы задают нам преобразование декартовых координат в общем виде. При расстановке систем координат на звеньях механизма манипулятора следует использовать специальные системы связанных координат. При преобразовании таких координат матрицу преобразования можно записать в явном виде, заменив общую матрицу перехода на конкретную, задающую преобразование связанных систем координат:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(i-1)} \\ y_i^{(i-1)} \\ z_i^{(i-1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cos\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cos\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & S_i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(i)} \\ y_i^{(i)} \\ z_i^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Теперь обозначим

$$R_i^{i-1} = \begin{bmatrix} x_i^{(i-1)} \\ y_i^{(i-1)} \\ z_i^{(i-1)} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cos\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cos\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & S_i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_i^i = \begin{bmatrix} x_i^{(i)} \\ y_i^{(i)} \\ z_i^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix},$$

где T_i – матрица перехода от i -й к $(i-1)$ -й связанной системе координат, что задаёт рассмотренное выше преобразование координат в виде поворота на угол θ_i (для вращательных пар), двух сдвигов S_i (для поступательных пар), a_i (для переноса системы на эту величину вдоль оси X_1) и поворота на угол α_i ; R_i^{i-1} , R_i^i – векторы координат точки в системе координат $(i-1)$ -го и i -го звеньев.

В этих обозначениях переход от i -й к $(i-1)$ -й связанной системе координат можно записать так:

$$R_i^{i-1} = T_i R_i^i.$$

Из четырёх параметров, определяющих преобразование связанных координат θ_i , S_i , a_i и α_i , в процессе движения могут изменяться только величины θ_i , S_i (рис. 11).

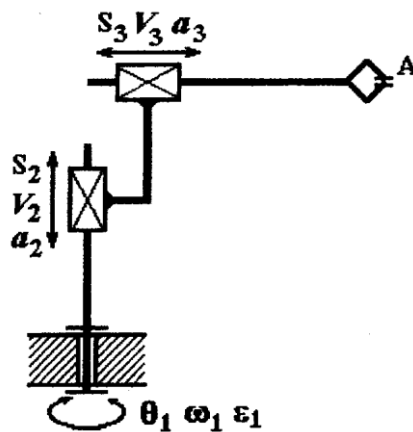


Рис. 11. Возможный вариант механизма манипулятора (схема)

Если рассматривать только механизмы с кинематическими парами 5-го класса, то для каждой конкретной пары связанных между собой систем координат переменным может быть лишь один параметр: θ_i – для вращательных пар и S_i – для поступательных.

Для изображённого механизма переменными будут:

Матрица перехода	Переменный параметр
T_1	θ_1
T_2	S_2
T_3	S_3

Итак, последними приведёнными формулами были заданы преобразования двух соседних связанных систем координат.

На рис. 12 показана иная схема механизма, в котором присутствуют вращательные пары.

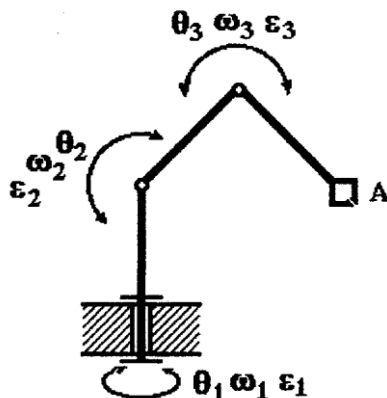


Рис. 12. Схема механизма с вращательными парами; во всех матрицах перехода переменными будут только θ_i

Если при моделировании процесса расчётчика интересуют координаты ранее выбранной точки, но в системе координат $(i - 2)$ -го звена, то они могут быть вычислены аналогично (через координаты точки в системе $(i - 1)$ -го звена):

$$R_i^{i-2} = T_{i-1} R_i^{i-1} = T_{i-1} T_i R_i^i.$$

Распространяя этот процесс далее, получим, что координаты любой произвольной точки механизма $x_i^{(i)}$, $y_i^{(i)}$, $z_i^{(i)}$, известные в первоначальной («своей» локальной системе координат), могут быть рассчитаны в системе координат любого другого звена с меньшим номером. В частности, как

$$R_i^{i-k} = T_{i-k+1} T_{i-k+2} \dots T_i R_i^i.$$

Если требуется вычислить значение координат точки A механизма в неподвижной системе координат $X_0 Y_0 Z_0$, определив при этом положение схвата/захвата манипулятора относительно стойки (неподвижного звена) при известных значениях исходных параметров (см. рис. 11 и рис. 12), то можно записать следующее:

$$R_A^0 = T_1 T_2 T_3 R_A^3.$$

Наконец, в общем случае, когда механизм манипулятора состоит из n звеньев, итоговая запись будет такая:

$$R_A^0 = \prod_{i=1}^n T_i R_A^n.$$

При известных значениях θ_i , S_i , a_i и α_i все матрицы T_i будут числовыми, а координаты R_A^n известны. Следовательно, процесс вычисления и описания координат R_A^0 сводится к обычному перемножению матриц справа налево.

Напомним также, что обратная задача возникает в расчётах в тех случаях, когда необходимо обеспечить движение схвата/захвата манипулятора (точка A) по заданной траектории. В таком варианте для каждого момента времени известны координаты точки A , её скорость и ускорение. Искомыми являются параметры относительного движения звеньев, которые обеспечивают требуемое движение точки A механизма робота-манипулятора.

В идентификации математического имитационного моделирования с натурным экспериментом (или с натурной физической моделью) следует обращать особое внимание на следующие положения.

Натурный эксперимент состоит в изучении статических и динамических свойств объекта, представляемых соответствующими рабочими характеристиками. Первые отражают зависимость стабильного значения выходной переменной, или «выхода», от входных, а динамические – процессы перехода из одного установившегося состояния в другое, или реакцию выходной переменной на изменение входных. Такие ситуации могут быть описаны с помощью графов перехода [22] и соответствующих расчётов [23]. Входную переменную, используемую для реализации основной цели управления, обычно называют *управляющей* (или просто *управлением*). Независимые переменные, препятствующие в той или иной мере достижению цели управления, называют *возмущающими* (или кратко *возмущениями*). Зависимость выходной переменной от управления в установившемся режиме называют *регулирующей* или *градуировочной* характеристикой, а от возмущения – *нагрузочной, внешней* или *статической характеристикой по возмущению*.

На практике статические характеристики записывают, задавая ряд последовательных значений одной из переменных и удерживая остальные параметры неизменными, что позволяет получить график вида $y = y(x)$ и записать соответствующее уравнение процесса. Несколько примеров анализа и моделирования сигналов, включая получение итоговых графиков процессов на экране электронного индикатора (ЭИ), показаны на рис. 13.

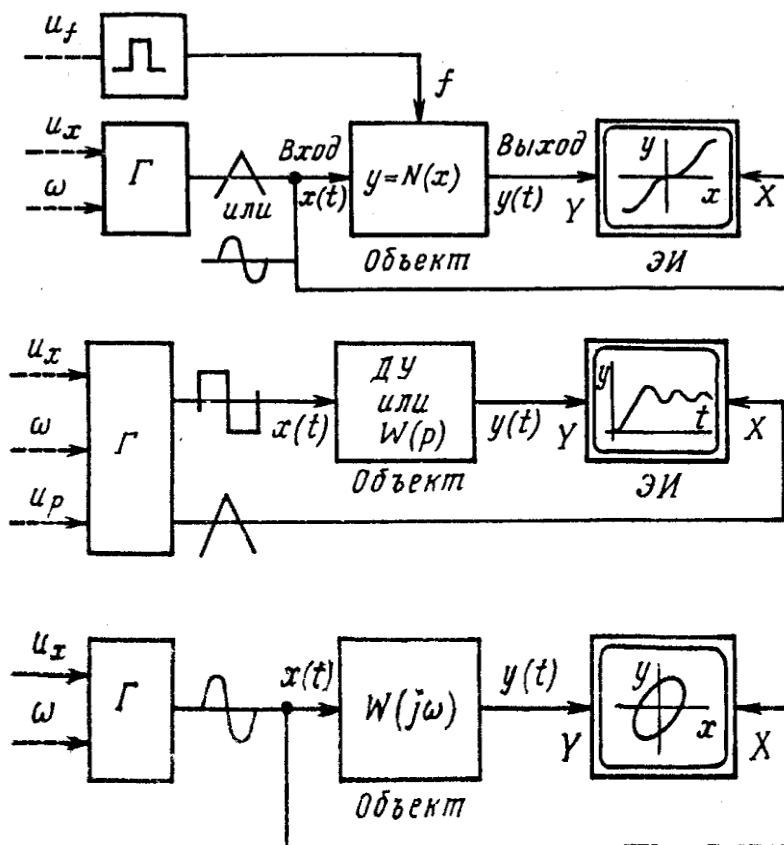


Рис. 13. Варианты трансформации сигналов:

Γ – генератор сигнала; $y(t)$ – реакция объекта исследования на исходные воздействия на систему/объект; $u(f)$ – одна из варьируемых входных переменных (аналогично и частота ω); $W(p)$ – передаточная функция звена; f – сигнал воздействия; ДУ – дифференцирующее устройство; $x(t)$ – входной сигнал

Стремление быстро получить графики статических характеристик для инерционных объектов приводит к погрешностям, связанным с отклонениями условий натурального эксперимента от математического определения статической характеристики. В случае

наличия непрерывного треугольного или синусоидального входного сигнала $x(t)$ выходная переменная $y(t)$ объекта из-за его инерционности отстаёт от значения, которое бы установилось при $t \rightarrow \infty$ для зафиксированного значения $x(t)$. Это приводит к появлению дополнительной динамической погрешности при измерениях статической характеристики. Данную погрешность можно уменьшить, если правильно выбрать частоту генератора. При этом уменьшение должно идти до такой величины, которая будет меньше наперёд заданной.

Пример получения графика затухающего процесса показан на рис. 14.

$$n := 0..30$$

$$v(n) := \frac{(-1)^n}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow -\ln(2)$$

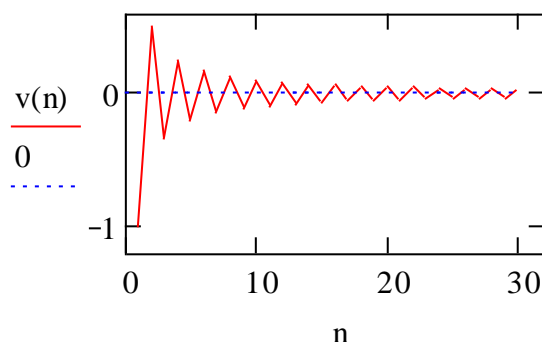


Рис. 14. Вариант представления затухания процесса колебания

Динамические свойства объектов во временной области представляют переходной и импульсной переходной (весовой) характеристиками. Математически их можно определить как реакцию выходной переменной $y(t)$ при нулевых начальных условиях на воздействие типа единичной ступеньки в первом и типа единичной δ -функции во втором случае. Эти определения позволяют достаточно хорошо приблизить имитационную математическую модель к условиям натурального физического эксперимента.

Для автоматизации измерений частотных характеристик широко используют характериографы, в которых низкочастотный сигнал программирует частоту высокочастотного генератора синусоидаль-

ного сигнала, поданного на вход объекта. Сигнал с его выхода детектируют и используют для отклонения луча индикатора по вертикали, развёртывая изображение низкочастотным сигналом.

При имитационном моделировании динамики функционирования объекта в общем случае можно выполнить представление в виде блок-схемы, показанной на рис. 15 (по типу рис. 13).

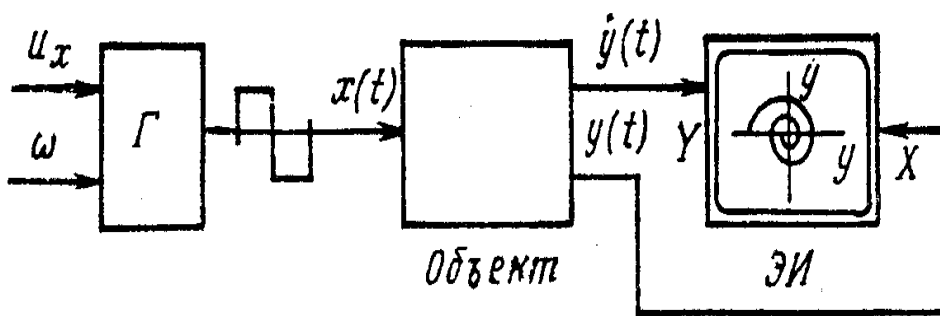


Рис. 15. Пример возможного исследования динамической характеристики объекта с фазовым портретом в блоке ЭИ

В работе [25] показан пример математической модели с трением (рис. 16) и фазовые портреты (рис. 17 и рис. 18) при разных значениях параметров: k – коэффициент, характеризующий вязкое трение в системе; параметр

$$k' = -\{d[f(\dot{y})]/d\dot{y}\} \text{ при } |\dot{y}| \rightarrow 0.$$

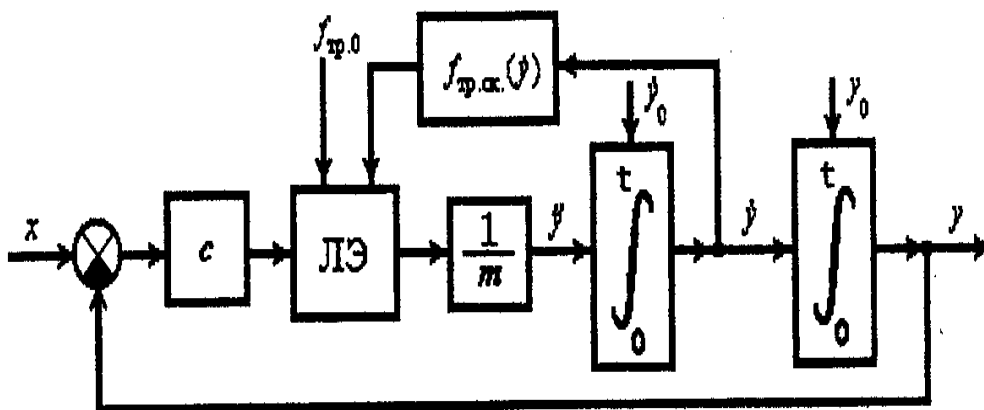


Рис. 16. Структура математической модели логического элемента (ЛЭ) с трением:

$f_{тр.0}$ – сила трения покоя (с индексом ск – для скольжения); m – масса подвижного элемента; c – коэффициент, характеризующий силу упругого внешнего воздействия; x – перемещение (внешнее воздействие); y – перемещение центра масс элемента (отклик системы на внешнее воздействие)

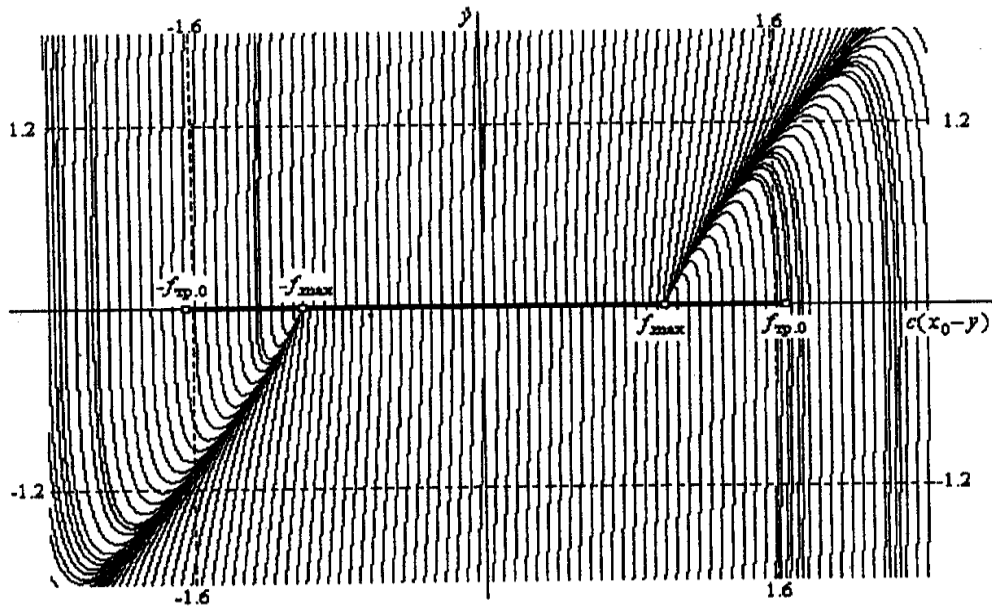


Рис. 17. Фазовый портрет элемента с трением при соотношении, когда $k > k'$

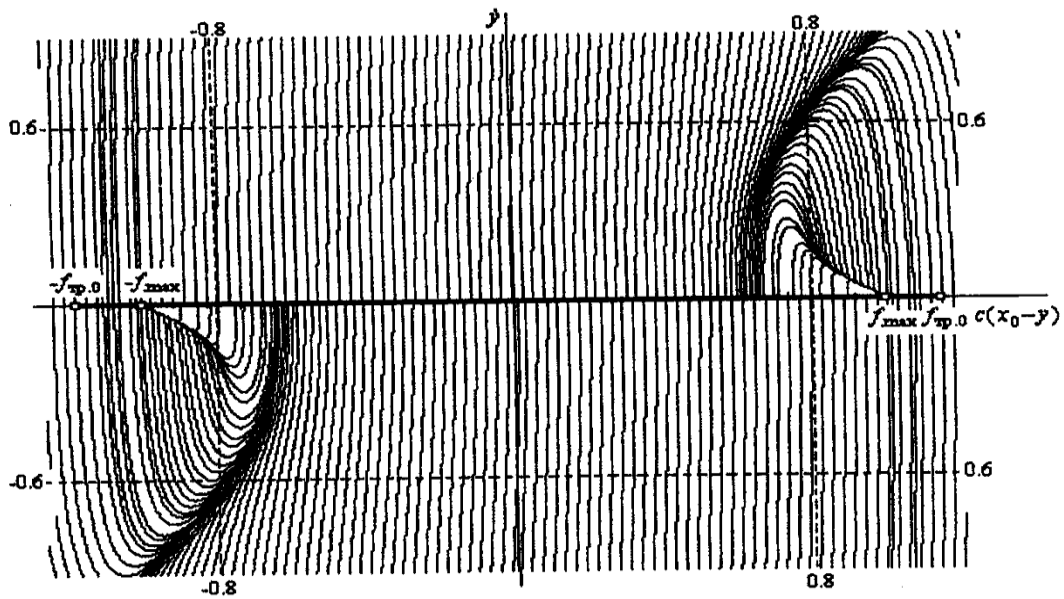


Рис. 18. Фазовый портрет элемента с трением при соотношении, когда $k < k'$

На рис. 19 приведен алгоритм функционирования логического элемента; на рис. 20 – суммарное трение скольжения.

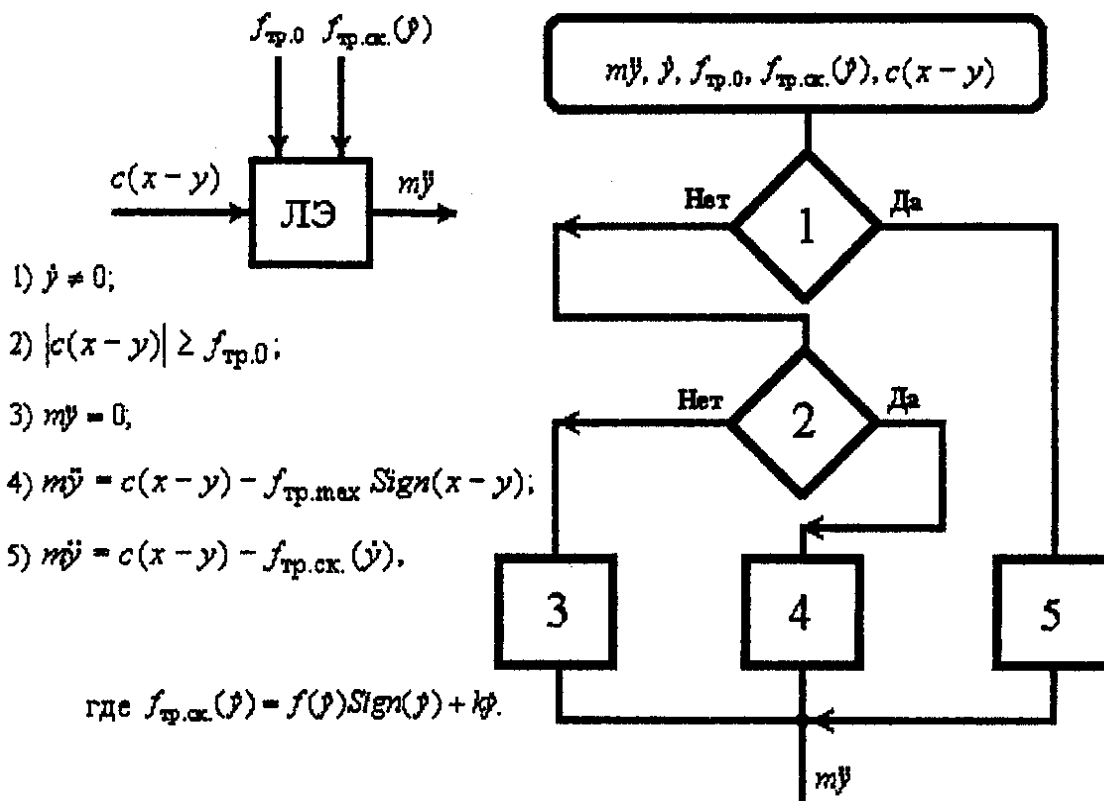


Рис. 19. Алгоритм функционирования логического элемента:
sign означает знак (+ или -)

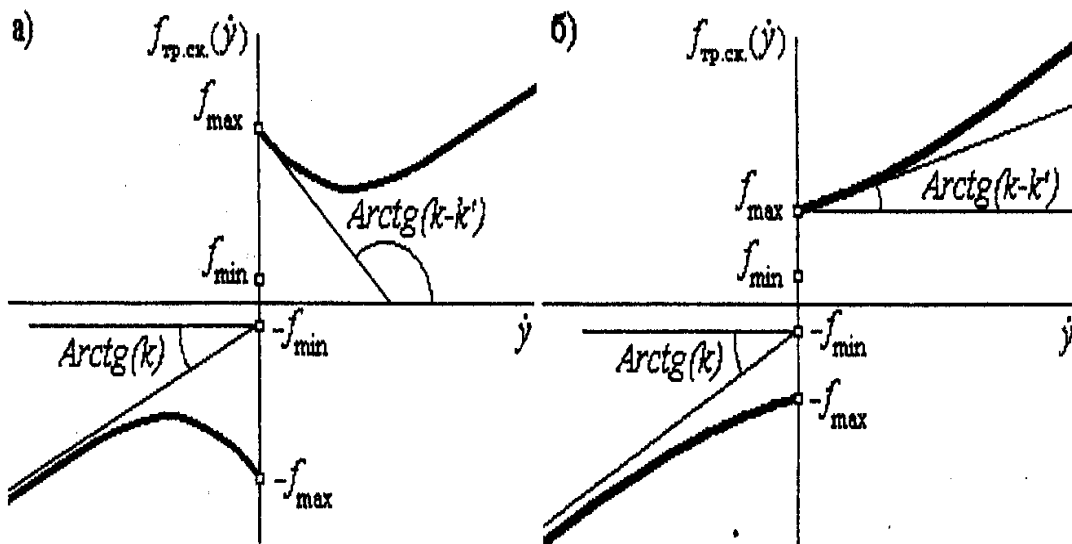


Рис. 20. Суммарное трение скольжения при:
а) $-k < k'$; б) $-k > k'$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Элементы векторной алгебры

Произвольный вектор \bar{R} может быть представлен в виде произведения его модуля R и единичного вектора \bar{e} , называемого ортом:

$$\bar{R} = R \cdot \bar{e}$$

Скалярное произведение двух векторов

$$\bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2 = R_{1X}R_{2X} + R_{1Y}R_{2Y} + R_{1Z}R_{2Z} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

где

$$R_{ix} = x_i R_{iy} = y_i R_{iz} = z_i \quad (i = 1, 2) -$$

проекции векторов на оси координат.

С другой стороны, имеем

$$\bar{R}_1 \bar{R}_2 = R_1 R_2 \cos \alpha,$$

где угол α – угол между векторами.

Векторное произведение двух векторов

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \bar{i}(y_1z_2 - y_2z_1) - \bar{j}(x_1z_2 - x_2z_1) + \bar{k}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Модуль векторного произведения

$$|\bar{R}_1 \times \bar{R}_2| = R_1 R_2 \sin \alpha.$$

Двойное векторное произведение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) &= \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}), \\ (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{c} \cdot \bar{b}) \end{aligned}$$

то есть векторное произведение не коммутативно.

Последнюю формулу можно использовать при разложении некоторого вектора на две составляющие, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна заданному начальному вектору. Тогда, положив, что $\bar{c} = \bar{a}$, получим

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{a}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{a}) - \bar{a}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a}^2 \cdot \bar{b} - \bar{a}(\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

Откуда можно найти следующее значение:

$$\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a^2} \bar{a} + \frac{1}{a^2} \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}).$$

Векторно-скалярное произведение трёх векторов:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \pm V;$$

где V – объём параллелепипеда, построенного на этих векторах. Если три вектора образуют левую систему координат, то берётся знак плюс, а если правую – знак минус.

Элементы матричной алгебры

Матрицей называется упорядоченное множество элементов, которые, как правило, для удобства располагают в виде прямоугольной таблицы и нумеруют двумя индексами: первый – номер строки, а второй – номер столбца:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной. Например, так выглядят матрицы-столбцы и матрицы-строки:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad C = [c_1 c_2 \dots c_n].$$

Причём в таких случаях второй индекс можно опускать.

Сложение матриц одинаковых размерностей осуществляется поэлементно:

$$C = A + D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + d_{11} & a_{12} + d_{12} \\ a_{21} + d_{21} & a_{22} + d_{22} \end{bmatrix}$$

Перемножение матриц делают по схеме «строка x столбец»:

$$C = AD = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} + a_{12}d_{21} & a_{11}d_{12} + a_{12}d_{22} \\ a_{21}d_{11} + a_{22}d_{21} & a_{21}d_{12} + a_{22}d_{22} \end{bmatrix}$$

При этом перемножение матриц возможно осуществлять только в том случае, если число столбцов в левой матрице равно числу строк в правой матрице:

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{bmatrix}$$

Произведение матриц не коммутативно, то есть в общем случае $\mathbf{AD} \neq \mathbf{DA}$.

Кроме того, произведение может даже не существовать (например, \mathbf{AB} – существует, а \mathbf{BA} – не существует). С другой стороны, произведение матриц ассоциативно, то есть $(\mathbf{AD})\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{DF})$.

Сложение и умножение матриц дистрибутивно: $\mathbf{A}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{AC} + \mathbf{AD}$.

Матрица вида A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A , если выполняется следующее условие:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E};$$

где записана единичная матрица вида

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A^T называется **транспонированной**, если она получена из матрицы A путём замены строк на её столбцы:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица A называется **ортогональной**, если её произведение на транспонированную матрицу равно единичной матрице:

$$AA^T = A^T A = E.$$

Следовательно, у ортогональных матриц обратная совпадает с транспонированной: $A^T = A^{-1}$.

Кроме того, умножение любой матрицы слева на транспонированную в результате даёт квадратную матрицу. Транспонированной по отношению к матрице-столбцу является матрица-строка:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}; \quad R^T = [r_1 \ r_2 \ r_3]$$

Свойства транспонирования:

$$(A + B)^T = A^T + B^T; \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T; \quad (AB)^T = B^T + A^T.$$

Эти соотношения показывают, что при транспонировании произведения матриц можно транспонировать каждую матрицу, а затем их перемножить в обратном порядке.

Понятие **след матрицы** определено только для квадратных матриц. Следом матрицы $n \times n$ называется сумма её диагональных элементов:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Свойства следа для двух квадратных матриц одного порядка:

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B),$$

$$Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A),$$

$$Tr(A B) = Tr(B A),$$

$$Tr(A B - B A) = 0.$$

Далее сделаем несколько пояснений о дифференцировании и интегрировании матриц.

Если элементы матрицы дифференцируемые функции, то их дифференцирование или интегрирование производится покомпонентно, то есть эти операции выполняются по каждому элементу матрицы.

Скалярное произведение векторов в матричной записи. При заданной системе координат вектор характеризуется своими проекциями на соответствующие оси. В целом такие проекции представляют собой набор чисел. Расположение их в виде колонки позволяет сформировать матрицу-столбец.

Допустим, что два вектора представлены в координатной форме:

$$\vec{a} = A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix},$$

а скалярное произведение этих векторов будет таким:

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Тогда в матричном виде можно записать следующим образом:

$$A^T B = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

или

$$B^T A = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Вместе с тем возможны и иные формы записи скалярного произведения векторов, если использовать матричные операции:

$$Tr(AB^T) = Tr \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$Tr(B^T A) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Блочные матрицы. Горизонтальными и вертикальными прямыми любую матрицу можно разбить на блоки. Каждый блок – это матрица меньшей размерности. Матрицу-блок можно обозначить буквой. Введя буквенные обозначения для всех блоков матрицы и заменив ими соответствующие блоки, можно получить так называемую блочную матрицу.

Например:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

где

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix};$$

$$A_{21} = [a_{41} \ a_{42} \ a_{43}]; \quad A_{22} = [a_{44}].$$

Формально эти блоки эквивалентны элементам обычной матрицы. Поэтому блочные матрицы также можно перемножать и складывать по известным правилам матричной алгебры.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом разделе приводятся полезные для запоминания слова и выражения на английском языке, которые в большей или меньшей степени связаны с изложенным материалом.

<p>Abidance by rules – соблюдение правил</p> <p>Handling abilities – технологические свойства</p> <p>Rotate about axis – вращаться относительно оси</p> <p>The above – вышеупомянутое</p> <p>From the very beginning = Ab ovo – с самого начала</p> <p>At any rate – во всяком случае</p> <p>Inevitable result – неизбежный результат</p> <p>Delinquency – упущение, проступок</p> <p>Comment – замечание, отзыв</p> <p>Actual load – полезная нагрузка</p> <p>Addition – дополнение, увеличение</p> <p>Adequate definition – точное определение</p> <p>You are about right – вы почти правы</p>	<p>Ability – способность, свойство, характеристика, показатель</p> <p>Resolving ability – разрешающая способность</p> <p>Above mentioned – вышеупомянутый</p> <p>Above measure – излишне, чрезмерно</p> <p>In case of need – в случае необходимости</p> <p>Projection – прогноз, проект</p> <p>Reasoning – рассуждение</p> <p>Assert – доказывать, заявлять</p> <p>These are our sentiments / opinions – вот наши мнения</p> <p>Actual speed – фактическая скорость</p> <p>Adjustment – (у)регулирование</p> <p>By all accounts – по общим отзывам</p> <p>The actual position – фактическое состояние/положение</p>
---	--

<p>In actual fact – в действительности</p> <p>In addition to – вдобавок, кроме того</p> <p>Robot – робот, автомат</p> <p>Robotics – робототехника</p> <p>Programmable robot – программируемый робот</p> <p>Biped robot – двуногий робот</p> <p>Robotize – роботизировать</p> <p>Applied robotics – прикладная робототехника</p> <p>Data manipulator – блок обработки данных</p> <p>Method – методика, классификация, технология</p> <p>Ad hoc – специальный</p> <p>Convince – убеждать</p> <p>Satisfactory – удовлетворительный</p> <p>Research technique – методика исследований</p> <p>Researcher – научный работник</p> <p>Science – наука, теория</p> <p>Scilicet – то есть, а именно</p>	<p>Ad lib – экспромт, сколько угодно, свободно</p> <p>In the abstract – теоретически, абстрактно</p> <p>Robotize – автоматизировать</p> <p>Manipulation robot – манипулятор</p> <p>Smart robot – интеллектуальный робот</p> <p>Walking robot – шагающий робот</p> <p>Robotization – роботизация</p> <p>Manipulate – управлять, воздействовать, влиять</p> <p>Manner – метод, способ</p> <p>Method of analysis – метод анализа / расчёта</p> <p>Complicate – усложнять</p> <p>Recently – недавно</p> <p>Research – изучение, исследование</p> <p>Research of operations – исследование операций</p> <p>Applied research – прикладные исследования</p>
--	---

<p>Milling machine – фрезерный станок</p> <p>Thanks to = owing to = because of – благодаря (<i>чему-то</i>)</p> <p>Stale – изнашивать(ся)</p> <p>Wastage – изнашивание</p> <p>Roughness = unevenness – шероховатость</p> <p>Friction – трение</p> <p>It confirmed our position – это подтвердило нашу позицию</p> <p>Draught = sketch = drawing – чертёж</p> <p>Equation – уравнение</p> <p>Space robotics – космическая робототехника</p> <p>Wheeled robot – колёсный робот</p> <p>Wall-mounted robot – настенный робот</p> <p>Voice-activated robot – робот, управляемый голосом</p> <p>Variable-sequence robot – робот с изменяемой последовательностью движений</p> <p>Two-handed robot – двурукий робот</p>	<p>Computer science – информатика, вычислительная техника</p> <p>Lathe – токарный станок</p> <p>Boring machine – сверлильный станок</p> <p>In the making – в процессе становления</p> <p>Wear = wear and tear = deterioration – износ</p> <p>Rough = uneven – шероховатый</p> <p>Surface – поверхность</p> <p>Coefficient of friction – коэффициент трения</p> <p>Graph = chart – график</p> <p>Model – модель</p> <p>Inequality = disparity – неравенство</p> <p>Industrial robotics – промышленная робототехника</p> <p>Robo-truck – робокар</p> <p>Work-performing robot – реальный робот (не модель как имитатор)</p> <p>Welding robot – сварочный робот</p>
---	---

Tool changer robot – робот для смены инструмента	Vehicle robot – транспортный робот
Teachable robot – обучающийся робот	Universal robot – универсальный робот
Term robot – терминальный робот (стоит на входе или выходе автоматической линии)	Undersea robot – подводный робот
Super-intelligent robot – сверхразумный робот	Biped robot – двуногий робот
Stacker crane robot – роботизированный кран-штабелёр	Transport robot – транспортный робот
Spray-finishing [spray-painting] robot – окрасочный робот	Third-generation robot – робот третьего поколения
Special robot – специальный робот	Technological robot – технологический робот
Spare robot – специальный робот	Task robot – специализированный робот
Soft wired robot – гибко (пере)программируемый робот	Supervisor robot – робот-диспетчер
Servo robot – робот с сервоуправлением	Stationary robot – стационарный (неподвижный) робот
Sensory interactive robot – робот с сенсорным управлением	Stand-alone robot – автономный (изолированный) робот
Senseless robot = insensate robot – неочувствленный робот	Spot-welding robot – робот для точечной сварки
Self-repairing robot – саморемонтирующийся робот	Spherical coordinate robot – робот, работающий в полярной [сферической] системе координат

<p>Self-mobile [self-moving] robot – самоходный робот</p> <p>Selecting robot = assembly robot – робот-сборщик (сборочный робот)</p> <p>Rigid robot – жёсткий робот</p> <p>Flexible robot – гибкого модуля робот, универсальный</p> <p>Reprogrammable robot – перепрограммируемый робот</p> <p>Redundant robot – робот с избыточной кинематической схемой</p> <p>Prototype robot – экспериментальный робот</p> <p>Prosthetic robot – роботизированный протез</p> <p>Production-line robot – робот автоматической линии</p> <p>Jointed-arm robot – робот с шарнирной рукой</p> <p>Interactive robot – интерактивный робот</p> <p>Intelligent robot = artificial intelligence robot – интеллектуальный робот</p>	<p>Space robot – космический робот</p> <p>Single-purpose robot – специальный робот</p> <p>Sequence robot – робот последовательного действия</p> <p>Sensor-based [sensor-controlled] robot – робот, управляемый от датчиков (очувствленный робот)</p> <p>Self-reproduction robot – самовоспроизводящийся робот</p> <p>Self-learning robot – самообучающийся робот</p> <p>Rotary robot – робот поворотной конструкции</p> <p>Retail robot – торговый робот</p> <p>Remote-controlled robot – дистанционно управляемый робот</p> <p>Rectangular coordinate [rectilinear coordinate] robot = Cartesian coordinate robot – робот, работающий в прямоугольной (декартовой) системе координат</p> <p>Programmed on-line robot – робот с управляющей цеховой программой</p>
---	---

<p>Industrial robot – промышленный робот</p> <p>Independently operated robot – автономный робот</p> <p>Home [household] robot – бытовой робот</p> <p>Free-standing robot – автономный робот</p> <p>Forging robot – робот-кузнец</p> <p>Floor-mounted robot – напольный робот</p> <p>Fixed-sequence robot – робот с фиксированной последовательностью движений</p> <p>Eye-in-hand robot – робот с «глазом на руке или в руке»</p> <p>Electric robot – робот с электроприводом</p> <p>Distribution robot – распределительный/раздаточный робот</p> <p>Direct-drive robot – робот с непосредственным приводом</p> <p>Continuous-path robot – робот с непрерывной траекторией движения (с контурной системой управления)</p>	<p>Process(ing) robot – технологический робот</p> <p>Inverted robot – обращённый робот (с подвижным рабочим столом и стационарным манипулятором)</p> <p>Integrated robot – интегральный робот</p> <p>In-house robot – робот собственного изготовления</p> <p>Information robot – робот-информатор</p> <p>Immobile robot = fixed robot – неподвижный/стационарный робот</p> <p>Gantry(-mounted) [gantry-type] robot – порталный робот</p> <p>Free-range robot – свободно перемещающийся робот</p> <p>Fixed-stop – цикловой робот, работающий по упорам</p> <p>Finishing robot – робот для отделочных операций</p> <p>Exploration robot – робот-исследователь</p> <p>Domestic robot – бытовой робот</p>
--	---

<p>Complex robot – комбинированный робот</p> <p>Articulated(-arm) robot – робот с шарнирными сочленениями (шарнирный робот)</p> <p>Arm-on-the-post type robot – робот консольного типа</p> <p>Air-driven robot – робот с пневматическим приводом</p> <p>Advanced robot – совершенный робот</p> <p>Interpolation – интерполяция</p> <p>Vector – вектор</p> <p>Product (math) – произведение</p> <p>Derivative / derived – производный</p> <p>Power – степень</p> <p>Modulus – модуль</p> <p>Integral – интеграл</p> <p>Endlessness / infinity – бесконечность</p> <p>Mean / mark / designate / reveal / emphasize – обозначать</p> <p>Conventional signs – условные обозначения</p>	<p>Dispensing robot – робот для нанесения герметизирующих покрытий</p> <p>Dedicated robot – специализированный робот</p> <p>Cylindrical coordinate robot – робот, работающий в цилиндрической системе координат</p> <p>Commercial robot – серийно выпускаемый робот</p> <p>Built-in robot – встроенный (в оборудование) робот</p> <p>Auxiliary robot – робот для выполнения вспомогательных операций</p> <p>All electric drive robot – полностью электромеханический робот</p> <p>Adaptive robot – адаптивный робот</p> <p>Robot of revolute configuration – робот с вращающейся системой координат</p> <p>Matrix / die / mould – матрица</p> <p>Scalar – скаляр</p> <p>Derivative – производная</p>
---	--

<p>Confirm / corroborate / bear out – подтверждать</p> <p>Correspond / conform – соответствовать</p> <p>Answer the purpose – соответствовать цели</p> <p>Accordance / conformity / correspondence – соответствие</p> <p>Bring into line with – привести в соответствие с</p> <p>Make it a condition / stipulate – ставить условием</p> <p>Other things being equal – при прочих равных условиях</p> <p>In vain – зря</p> <p>Without fail – обязательно</p> <p>Projection – проекция</p> <p>Squared – в квадрате</p> <p>Just / equitable / justified / fair / true / correct – справедливый</p> <p>In (all) fairness / by rights – говоря по справедливости</p> <p>Exactly / precisely / punctually – точно</p> <p>Precision / exactness / accuracy / punctuality – точность</p>	<p>Column – столбец</p> <p>Raise to the third power – возвести в третью степень</p> <p>Strive (to) / try (to) – стремиться (к)</p> <p>Block – блок</p> <p>Endlessly – до бесконечности</p> <p>Marking / designation / sign / symbol – обозначение</p> <p>Confirmation / corroboration – подтверждение</p> <p>Verification – проверка</p> <p>Verify – проверя(и)ть, подтверждать, подтвердить</p> <p>Meet the requirements – соответствовать требованиям</p> <p>Correspond to the facts – соответствовать действительности</p> <p>In accordance (with) – в соответствии</p> <p>Condition / clause / term / stipulation / proviso – условие</p> <p>On condition that / provided that / providing – при условии, что</p> <p>Formal proof – формальное доказательство</p>
--	--

<p>Calculate to within – вычислять с точностью до</p> <p>Explanatory / elucidatory – пояснительный</p> <p>Approximately / roughly – приблизительно</p> <p>Exactly / precisely / accurately / to the letter – в точности</p> <p>Explanation / elucidation – пояснение</p> <p>Elucidate / explain – пояснять</p> <p>Remind (of) – напомнить</p>	<p>Bring in / introduce / acquaint with the facts of – вводить в курс</p> <p>Square – квадрат, возвести в квадрат</p> <p>Set / give – задать, задавать</p> <p>Justice / equity / fairness / correctness / truth – справедливость</p> <p>Reminding / reminder – напоминание</p>
--	---

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 640 с.
2. *Управляющие системы промышленных роботов / Под общ. ред. Е.П. Попова.* – М.: Машиностроение, 1985. – 271 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980. – 975 с.
4. *Зенкевич С.Л., Ющенко А.С.* Управление роботами: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 400 с.
5. *Лавров В.Ю.* Механика роботов-манипуляторов и её реализация программой CaDMan: Учеб. пособие. – СПб.: БГТУ 2007. – 132 с.
6. *Лавров В.Ю.* Компьютерное управление мехатронными системами: Учеб. пособие. – СПб.: БГТУ, 2003. – 136 с.
7. *Коловский М.З., Слоущ А.В.* Основы динамики промышленных роботов. – М.: Наука, 1998. – 240 с.
8. Механика промышленных роботов: В 3 кн. / Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. – М.: Высш. шк., 1988. – 214 с.
9. *Шахинпур М.* Курс робототехники. – М.: Мир, 1990. – 527 с.
10. *Архангельский А.Я.* Программирование в C++ Builder5. – М.: ЗАО «Издательство БИНОМ», 2002. – 1152 с.
11. *Дулько О.Л.* В помощь оператору ГПС: Справ. книга. – Лениздат, 1990. – 238 с.
12. *Челпанов И.Б.* Устройство промышленных роботов. – СПб.: Политехника, 2001. – 203 с.
13. Промышленные роботы / Под ред. Б.И. Черпакова. – М.: Высш. шк., 1990. – № 5. – 94 с.
14. Робототехнические комплексы /Под ред. Б.И. Черпакова – М.: Высш. шк., 1989. – № 6. – 96 с.
15. *Алексаков Г.Н., Гаврилин В.В., Фёдоров В.А.* Структурные модели динамических процессов: Метод. рекомендации по работе с персональным аналоговым компьютером АВК-6. – М.: Инженерный центр МИФИ, 1989. – 63 с.
16. Эффективные решения технологических задач / Под ред. Ю.А. Державца, К.Н. Войнова, Г.Н. Кобылкиной. – СПб.: ПИМаш, 1996. – 95 с.

17. Вопросы технологии и надёжности работы систем: Сб. науч. тр. / Под общ. ред. К.Н. Войнова, Ю.М. Зубарева. – СПб.: ПИМаш, 2000. – 51 с.

18. *Войнов К.Н., Валетов В.А.* Гибкие производственные системы: Метод. указания для самостоятельной работы студентов спец. 0501. – Л.: ПИМаш, 1988. – 27 с.

19. *Войнов К.Н., Рыбакова Н.Н.* Гибкие производственные системы: Метод. указания к курсу лекций и практическим занятиям по ГПС и САПР ТП для студентов спец. 1201. – Л.: ПИМаш, 1990. – 31 с.

20. *Воробьёв Е.И., Шехвиц Э.И.* Проектирование промышленных роботов. – М.: Машиностроение, 1993. – 144 с.

21. *Логашев В.Г.* Технологические основы гибких автоматических производств. – Л.: Машиностроение, 1985. – 176 с.

22. Трибология: Междунар. энцикл. Т. I / Под общ. ред. проф. К.Н. Войнова. – СПб.–Краснодар: ПГУПС, изд-во «АНИМА», ISBN 978-5-9902064-2-7, 2010. – 176 с.

23. XIII Международная научная конференция «Трибология и надёжность» / Под общ. ред. проф. К.Н. Войнова. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, БГТУ («Военмех»); ISBN 978-5-7577-0437-1. – 266 с.

24. Трибология: Междунар. энцикл. Т. VI / Под общ. ред. проф. К.Н. Войнова. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, БГТУ «Военмех», ИFToMM; изд-во «Нестор-История», ISBN 978-5-906108-03-6, 2010. – 404 с.

25. *Шамберов В.Н.* Учёт сухого трения в математических моделях управляющих элементов машин и механизмов // Сб. науч. тр. «Трибология и надёжность» VIII Международной конференции «Трибология и надёжность» / Под общ. ред. проф. К.Н. Войнова. – СПб.: ПГУПС, 2008. – С. 52–65.

26. *Григорьев А.Ю.* Повышение надёжности работы лепестковых клапанов поршневых машин // Сб. науч. тр. «Трибология и надёжность» XIII Международной конференции «Трибология и надёжность» / Под общ. ред. проф. К.Н. Войнова. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, БГТУ («Военмех»), ИFToMM, 2013. – С. 103–110.

Войнов Кирилл Николаевич

**ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ТЕОРИИ И НА ПРАКТИКЕ**

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
А.М. Елисеев, Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 19.12.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 3,96. Печ. л. 4,25. Уч.-изд. л. 4,0
Тираж 170 экз. Заказ № С 75

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

