МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 536.2

Аналитическое описание процесса нестационарной теплопроводности / Б.А. Вороненко, А.Г. Крысин, В.В. Пеленко, О.А. Цуранов: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 48 с.

Изложены основные понятия, определения и принципы составления дифференциальных уравнений нестационарной теплопроводности. Рассмотрены условия однозначности. Представлена общая схема решения краевых задач методом разделения переменных. Рассмотрены решения конкретных примеров для физических и инженерных процессов.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по образовательным программам направления 15.04.02 Технологические машины и оборудование.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Рыков

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для углублённой проработки разделов теоретического курса «Математическое моделирование в пищевой промышленности» студентами, обучающимися по магистерским программам направления 15.04.02 Технологические машины и оборудование.

Аналитическое описание процессов нестационарной теплопроводности является одной из базовых составляющих курса «Математическое моделирование в пищевой промышленности» и опирается на такие естественно-научные курсы, изучаемые студентами, как математика, физика, гидравлика, термодинамика, процессы и аппараты пищевых производств, теоретическая механика.

Аналитическая теория нестационарной теплопроводности в настоящее время находит широкое применение в разрешении различных технических и технологических проблем. Расчет тепловых аппаратов, работающих при нестационарном тепловом режиме, оценка теплостойкости ограждающих конструкций в условиях переменных тепловых воздействий (теплоизоляция зданий, печей, техники, трубопроводов), нагрев машин, электропроводящих сетей, температурные напряжения в элементах конструкций и оборудования, а также многие другие вопросы связаны с решением задач нестационарной теплопроводности. К этому же кругу проблем относятся исследования кинетики процессов сушки, химических реакций, сорбции и десорбции в связи с тем, что задачи нестационарной диффузии идентичны задачам нестационарной теплопроводности. Сюда же следует отнести целый класс задач, связанных с описанием нестационарных процессов в пищевых продуктах, оборудовании и производствах.

В данном учебно-методическом пособии приведён простейший вывод дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности, дан анализ его физического смысла, рассмотрены условия, которые в совокупности с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности.

Пособие знакомит с методом разделения переменных (методом Фурье) и показывает, как можно решить этим методом некоторые задачи теплопроводности (диффузии), связанные с отраслевыми технологическими процессами, машинами и аппаратами.

1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПРОЦЕССЕ

Математическая теория теплопроводности
Фурье – великая математическая поэма.

У. Томсон (Кельвин)

В соответствии со вторым законом термодинамики самопроизвольный процесс переноса теплоты в пространстве возникает при наличии разности температур и направлен в сторону уменьшения температуры.

Термодинамические процессы сопровождаются переносом теплоты как в рабочем пространстве тепловых установок, так и в элементах конструкций и между элементами конструкций и окружающим пространством. Поскольку теплота является количественной мерой энергии, между большинством тел происходит теплообмен.

Закономерности процесса переноса теплоты рассматриваются теорией теплообмена (теплопередачи). Трудно назвать область техники, где бы в той или иной форме не использовались знания из области науки о теплообмене.

Различают три элементарных вида теплопередачи:

1) теплопроводность (кондукцию);
2) конвекцию (трансляцию);
3) лучистый теплообмен.

Теплопроводностью называется молекулярный перенос теплоты внутри тела, обусловленный тепловым движением микрочастиц (молекул, атомов, электронов) при наличии градиента температуры и происходящий без макроскопических перемещений вещества. При этом частицы из более нагретых зон тела, обладающие большей энергией, сталкиваясь при своём движении с частицами менее нагретых областей, передают им часть своей энергии.

Температура является параметром, характеризующим энергию теплового движения частиц вещества. Следовательно, процесс распространения теплоты и его направление неразрывно связаны с распределением температуры внутри тела. В общем случае температура неодинакова в различных точках тела и зависит от времени: $t = t(x, y, z, \tau)$.

Температурное поле в рассматриваемом пространстве (теле) – совокупность значений температуры в данный момент времени для всех точек пространства (тела), в котором протекает процесс.

Если температура тела зависит от координат и не изменяется с течением времени, то поле называется *стационарным*. При температуре, зависящей от времени, поле называется *нестационарным*.

Если какое-нибудь тело поместить в среду с более высокой температурой, чем температура тела, то в процессе теплообмена между средой и телом последнее будет нагреваться, причем сначала прогреваются поверхностные слои, а затем теплота распространяется к центру тела.

На рис. 1, а приведены зависимости температуры поверхности $t_п$ и центра $t_ц$ тела от времени.

Хотя вид кривой $t = t(\tau)$ зависит от формы, размеров и физических свойств тела и среды, общим будет то, что температура центра тела при нагревании всегда меньше температуры поверхности. По истечении значительного промежутка времени температура всех частей тела выравнивается и становится равной температуре среды (это справедливо для случая, когда объём среды значительно больше объёма тела и её температура во времени практически не меняется). Количество теплоты, получаемое телом в единицу времени в процессе нагревания, также изменяется во времени (рис. 1, б). Площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс, определяет полное количество теплоты, переданной телу за время τ, в результате чего повышается его внутренняя энергия.

При охлаждении тела наблюдаются аналогичные зависимости.

Нестационарный тепловой режим в технике встречается очень часто, однако не всегда его рассчитывают. В большинстве теплообменных аппаратов (например, рекуперативных) нестационарные процессы имеют временный характер, а в основном же эти аппараты работают при стационарном режиме. В машинах и аппаратах общественного питания, регенеративных теплообменниках рабочий процесс протекает при нестационарном режиме. В этих и подобных случаях расчет нестационарной теплопроводности необходим, так как она определяет продолжительность технологического процесса, качество изделия и производительность установки.

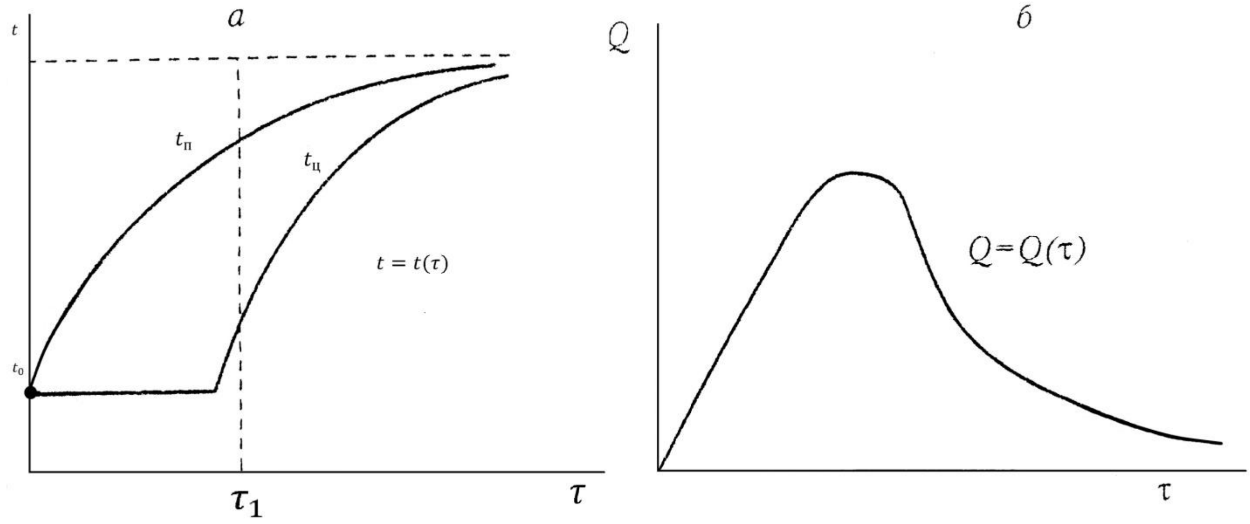

Рис. 1. Характер изменения температуры t и количества переданной теплоты Q во времени при нагревании тела

При нестационарном режиме перераспределение теплоты сопровождается изменением температуры отдельных элементов тела. Изменение температурного поля твердого тела при нестационарной теплопроводности описывается дифференциальным уравнением теплопроводности.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Изучение любого физического явления сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими данное явление. Процесс нагревания твердого тела является сложным физическим процессом, в котором определяющие величины могут существенно изменяться в пространстве и времени, и установить зависимость между этими величинами очень трудно. Однако можно существенно упростить данную зависимость, если ограничиться малым промежутком времени $d\tau$ процесса и из всего пространства тела рассматривать лишь элементарный объем dv, что дает возможность пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс.

Полученная таким образом зависимость будет общим дифференциальным уравнением теплопроводности. Решая затем это уравнение, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всего тела и всего времени процесса.

Выведем уравнение теплопроводности упрощенным методом. Для этого примем следующие допущения:

– тело однородно и изотропно (физические свойства тела по всем направлениям одинаковы);

– физические параметры (теплофизические коэффициенты) постоянны, т. е. не зависят от координат и времени;

– деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, мала по сравнению с самим объемом;

– температурное поле одномерно (теплота распространяется в одном направлении, например в направлении оси x);

– внутренние источники теплоты в теле отсутствуют.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии: количество теплоты dQ, введённое в элементарный объем dv извне за время $d\tau$ вследствие теплопроводности, равно изменению внутренней энергии dU, содержащейся в элементарном объеме, за время $d\tau$:

$$dQ = dU. \tag{1}$$

Выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными соответствующим координатным осям (рис. 2). Объем этого параллелепипеда, следовательно, равен $dv = dxdydz$.

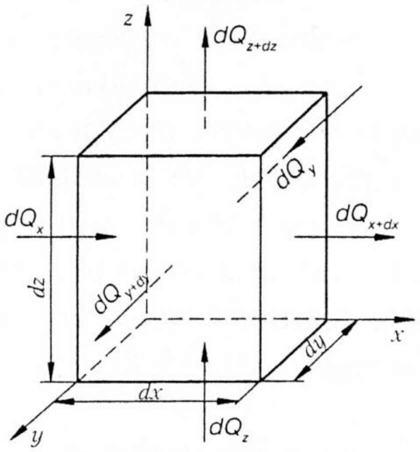

Рис. 2. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Количество теплоты, подведенное к грани $dydz$ в направлении оси Ox за время $d\tau$, равно $dQ_x = q_x dydzd\tau$, где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани.

Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox, составляет $dQ_{x+dx} =$ $= q_{x+dx}\, dydzd\tau$. Тогда разность между количеством теплоты, подведенным к параллелепипеду, и количеством теплоты, отведенным от него за время $d\tau$ в направлении оси Ox, равно

$$dQ = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x dydzd\tau - q_{x+dx} dydzd\tau. \tag{2}$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной в рассматриваемом интервале dx, и если ее разложить в ряд Тейлора и ограничиться двумя первыми членами ряда, то можно написать для неизвестной функции q_{x+dx} приближенное равенство

$$q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx,$$

которое тем точнее, чем меньше dx.

Тогда из равенства (2) получим

$$dQ = -\frac{\partial q_x}{\partial x} d\upsilon d\tau. \tag{3}$$

Если рассматривать внутреннюю энергию единицы объёма тела $U = U(t, \upsilon)$, то

$$dU = C_\upsilon \frac{\partial t}{\partial \tau} d\upsilon d\tau = c_\upsilon \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\upsilon d\tau, \tag{4}$$

где C_υ – изохорная теплоемкость единицы объема, Дж/(м$^3 \cdot K$); c_υ – изохорная теплоемкость единицы массы вещества (удельная теплоемкость), Дж/(кг·К); ρ – плотность вещества.

После подстановки полученных выражений (3) и (4) в уравнение (1) будем иметь

$$c_\upsilon \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}. \tag{5}$$

Учитывая закон Фурье стационарной теплопроводности

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x},$$

получим

$$c_\upsilon \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

или

$$c_\upsilon \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \tag{6}$$

что и является дифференциальным уравнением нестационарной теплопроводности тела для одномерного потока теплоты.

Обозначив $\dfrac{\lambda}{c_\upsilon \rho} = a$, получим это уравнение в виде

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \tag{7}$$

В общем случае вектор q можно разложить на три составляющие по координатным осям. Тогда, рассуждая аналогичным образом, можно найти количество теплоты, подведенное к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей Oy и Oz, и окончательно получить *дифференциальное уравнение теплопроводности (уравнение Фурье)* в виде

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) = a\nabla^2 t, \tag{8}$$

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – выражение оператора Лапласа в декартовой системе координат.

Дифференциальное уравнение в частных производных (УЧП) (8) является дифференциальным уравнением сохранения энергии для изохорного процесса переноса теплоты, или уравнением нестационарной теплопроводности. Оно устанавливает связь между времен-

ным и пространственным изменением температуры в любой точке твердого тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Коэффициент пропорциональности a в уравнении (8), а также в его частном варианте – одномерном уравнении (7), называется *коэффициентом температуропроводности* и является физическим параметром вещества. Он существенен для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры. Если коэффициент теплопроводности λ характеризует способность тел проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности a является мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (8) следует, что скорость изменения температуры во времени $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ в теле тем больше, чем больше a. Поэтому при прочих равных условиях выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности. Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества: металлы обладают меньшей тепловой инерционностью в сравнении с жидкостями и газами, поэтому они имеют большие коэффициенты температуропроводности, чем жидкости и газы.

При стационарной теплопроводности $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ уравнение (8) принимает вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0. \qquad (9)$$

С помощью уравнения (8) можно решить задачу о тепловом состоянии тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Решение данной задачи можно представить как произведение решений для каждой из неограниченных пластин, толщина которых равна соответствующим измерениям параллелепипеда.

При решении задач теплопроводности для тел сферической формы, когда температура является только функцией времени τ и расстояния r от центра (симметричная задача), уравнение теплопроводности (8) примет следующий вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right). \tag{10}$$

Для решения задачи о тепловом состоянии тел цилиндрической формы уравнение (8) выглядит так:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right). \tag{11}$$

С помощью уравнений (10) и (11), содержащих две независимые переменные r и τ, определяют температурные поля шара или цилиндра. Но задачи по-прежнему являются одномерными, подобными задаче об охлаждении (нагреве) пластины.

Уравнения (7), (10) и (11) удобно записать в виде одного, введя для этого величину Г, называемую *постоянной формы,* которая для неограниченной пластины равна нулю, для бесконечного цилиндра – единице, для шара – двум:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\Gamma}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right). \tag{12}$$

Учитывая аналогию, существующую в математическом описании механизмов переноса, в форме (8) можно записать уравнение нестационарного переноса массы вещества (диффузии):

$$\frac{\partial c(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = D\nabla^2 c(x,y,z,\tau), \tag{8'}$$

где c – концентрация вещества, D – коэффициент молекулярной диффузии.

Уравнение, описывающее нестационарное распределение электрического потенциала φ по проводнику, обладающему объёмным удельным сопротивлением $\rho_\upsilon\left(\frac{\text{Ом}\cdot\text{м}}{\text{м}^3}\right)$ и электроемкостью C (Кл/В), записывается в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{1}{C\rho_{\upsilon}}\nabla^2\varphi. \qquad (8'')$$

Строгий вывод уравнений (8′) и (8″) подтверждает тождественность этих уравнений уравнению теплопроводности (8) с математической точки зрения. Данные и подобные уравнения, описывающие различные нестационарные случаи явлений переноса, называются *уравнениями теплопроводности (диффузии)*.

3. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Уравнение (6) устанавливает наиболее общую связь между входящими в него переменными, так как при его выводе не принимались во внимание какие-либо конкретные условия процесса. Дифференциальные уравнения выражают связь между изменением температуры в данной точке во времени и ее распределением в пространстве вокруг этой точки.

Коэффициент температуропроводности a является физической константой вещества и характеризует реакцию тела на перераспределение теплоты, т. е. его теплоинерционные свойства: тепловой поток растет с увеличением λ и уменьшается при возрастании объемной теплоемкости $c_{\upsilon}\rho$.

Вторую производную уравнения (7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right). \qquad (13)$$

Отсюда следует, что она определяет интенсивность изменения градиента температуры по направлению оси x и, следовательно, интенсивность изменения потока теплоты в данном направлении. Это характерно для нестационарной теплопроводности.

Для решения задачи о распространении теплоты в твердом теле применительно к конкретному случаю необходимо располагать дополнительными условиями, характеризующими свойства рассматриваемого явления и не содержащимися в исходном дифференциальном уравнении.

Условия, которые в совокупности с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, т. е. однозначно определяют единичное явление, называются *условиями однозначности, или краевыми условиями.*

Условия однозначности содержат сведения, которые задаются по условию конкретной задачи, а именно:

– геометрические свойства системы (тела);

– физические свойства (физические константы тел рассматриваемой системы);

– временные (начальные) условия, характеризующие состояние системы в начальный момент времени;

– граничные условия, учитывающие условия взаимодействия системы с окружающей средой.

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

Физическими условиями однозначности задаются физические параметры тела (λ, c, ρ и др.) и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом (при $\tau = 0$):

$$t = t(x, y, z, 0) = f(x, y, z). \qquad (14)$$

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие (при $\tau = 0$) упрощается:

$$t = t_0 = \text{const}.$$

Обычно реальные тела рассматривают как тела основной геометрической формы:

– *неограниченная (бесконечная) пластина*, под которой понимают такую пластину, ширина и длина которой бесконечно велики по сравнению с толщиной, т. е. неограниченная пластина представляет собой тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями. Изменение температуры происходит только в одном направлении x, перпендикулярном этим плоскостям, в двух других направлениях y и z

температура неизменна. Таким образом, в уравнении (8) $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$.

Следовательно:

– изотермические поверхности представляют собой плоскости, параллельные плоскости *yz*, тогда задача является одномерной;

– изотермы внутри шара представляют собой концентрические сферы, т. е. температура при термической обработке тела (нагревании или охлаждении) зависит только от радиуса-вектора и времени τ (симметричная задача);

– если теплообмен между поверхностью *неограниченного (бесконечного) цилиндра* и окружающими телами происходит одинаково по всей поверхности, то температура цилиндра будет зависеть только от времени и радиуса (симметричная задача).

Граничные условия

Граничные условия могут быть заданы различными способами.

Граничные условия первого рода. *Задается распределение температуры поверхности тела как функция времени*. В простейшем случае температура остается постоянной во всем процессе теплообмена: $t_п$ = const. Это может быть осуществлено, например, при искусственном поддержании постоянной температуры.

Граничное условие второго рода. *Условие состоит в задании распределения плотности теплового потока на границах тела* и её изменения во времени: $q_п = f(\tau)$. В частном случае $q_п = \text{const}$. Такой случай теплообмена имеет место при нагревании тел в высокотемпературных печах, где передача тепла в основном происходит при помощи излучения по закону Стефана–Больцмана, когда температура тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей.

Граничное условие третьего рода. В граничных условиях третьего рода $-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_п + \alpha \Delta t = 0$ *задаются температура окружающей среды* t_c *и закон теплообмена между поверхностью тела и окружа-*

ющей средой – по уравнению конвекции Ньютона $q = \alpha(t_п - t_с)$. Это отражает в первом приближении сложный лучистый и конвективный теплообмен, в котором доля лучистого потока теплоты является преобладающей. Разность температур $\Delta t = t_п - t_с$ должна быть достаточно малой. Задача упрощается, если температура окружающей среды и коэффициент теплоотдачи α постоянны. Если теплообмен между телом и окружающей средой с постоянной температурой происходит при $\frac{\alpha}{\lambda} \to \infty$, то в таком случае граничное условие третьего рода превращается в граничное условие первого рода в простейшем его виде.

Если $\frac{\alpha}{\lambda} \to 0$, т. е. теплообмен происходит с бесконечно малым коэффициентом теплообмена, то граничное условие третьего рода превращается в частный случай граничного условия второго рода $\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_п = 0$, означающего отсутствие потока теплоты через поверхность тела. Такое условие называется *теплоизоляцией*.

Граничное условие четвертого рода. Граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену поверхности тела с окружающей средой по закону теплопроводности Фурье или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова (идеальный, совершенный тепловой контакт). При обтекании твердого тела потоком жидкости (или газа) передача тепла от жидкости (газа) к поверхности тела в непосредственной близости к поверхности тела (ламинарный пограничный слой или ламинарный подслой) происходит по закону теплопроводности (молекулярный перенос тепла), т. е. имеет место теплообмен, соответствующий граничному условию четвертого рода (*равенство температур поверхности тела t_n и обтекающего его слоя жидкости (газа)*) t_c:

$$T_п(\tau) = t_с(\tau).$$

Помимо равенства температур имеет место также равенство потоков тепла, направленных по нормали $\vec{n}$ к изометрической поверхности:

$$-\lambda_{с}\left(\frac{\partial t_{с}}{\partial n}\right)_{n}=-\lambda\left(\frac{\partial t_{п}}{\partial n}\right)_{n}.$$

В случае нестационарного температурного поля $\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\neq 0\right)$необходимо при точной формулировке задачи теплопроводности применять граничные условия четвертого рода.

Дифференциальное уравнение теплопроводности совместно с начальными и граничными условиями (*краевая задача* теплопроводности) полностью определяют задачу, т. е. зная геометрическую форму тела, начальные и граничные условия, можно дифференциальное уравнение решить до конца и, следовательно, найти поле температур в теле, – функцию распределения температуры в любой момент времени $t(x, y, z, \tau)$.

Функция $t(x, y, z, \tau)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (при ее подстановке вместо t в дифференциальное уравнение теплопроводности последнее должно обращаться в тождество), а также начальному и граничным условиям.

В курсе математической физики доказывается теорема единственности решения, из которой следует, что если некоторая функция $t(x, y, z, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности, начальным и граничным условиям, то она является *единственным решением* данной задачи.

Ввиду сложности изучаемых явлений решить аналитически дифференциальные уравнения в частных производных современными математическими методами чаще всего бывает очень трудно, а иногда и невозможно. Однако существует много методов решения, пригодных для практического использования.

При решении ряда технических задач используются численные, приближенные, а также экспериментальные методы решения задач нестационарной теплопроводности, основанные на аналогии между теплопроводностью и движением вязкой жидкости (метод гидротепловой аналогии), между тепловыми и электрическими явлениями (метод электротепловой аналогии). Преимущество данных методов состоит в том, что их можно применять для тел любой формы и при любых граничных условиях. Решения нестационарных задач для разнообразных условий можно найти в специальной литературе.

4. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Пристальное, глубокое изучение
природы есть источник самых
плодотворных открытий математики
Фурье Ж.Б.Ж.

В предыдущем разделе было выведено дифференциальное уравнение теплопроводности, которое устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами тела для бесконечно малого объема. Это уравнение является линейным, однородным дифференциальным уравнением второго порядка с частными производными.

Исследованию и методам решения классического уравнения (7) в математической физике, как указывалось выше, посвящено большое количество работ.

Рассмотрим задачу, относящуюся к процессам, в которых тело стремится к тепловому равновесию, например охлаждение нагретого до положительной температуры стержня, помещенного в воду температурой, равной 0 °С. Для получения аналитического решения данной задачи применим *метод разделения переменных* – один из старейших методов решения смешанных краевых задач (с граничными условиями первого, второго и третьего рода).

Метод разделения переменных был создан во времена Фурье (обычно он называется *методом Фурье*) и в настоящее время является наиболее применяемым. Он может быть использован при выполнении следующих условий:

1) уравнение является линейным и однородным (не обязательно с постоянными коэффициентами);

2) граничные условия для одномерного уравнения заданы в виде

$$\alpha \frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} + \beta t(0,\tau) = 0; \tag{15}$$

$$\gamma \frac{\partial t(\ell,\tau)}{\partial x} + \delta t(\ell,\tau) = 0, \tag{16}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – константы (граничные условия, заданные в таком виде, называются *линейными однородными граничными условиями*), ℓ – толщина *неограниченной* пластины или длина стержня.

Рассмотрим применение метода Фурье для решения частной задачи на охлаждение тела определённой геометрической формы.

Требуется найти решение уравнения теплопроводности для тонкого (это значит, что температура всех точек в каждом поперечном сечении тела одинакова) однородного теплопроводящего стержня

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ \tau > 0, \tag{17}$$

удовлетворяющее граничным условиям первого рода и начальному условию

$$t(x,0) = \varphi(x) > 0, \tag{18}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную, обращающуюся в ноль при $x = 0$ и $x = \ell$ (рис. 3):

$$t(0,\tau) = 0, \tag{19}$$

$$t(\ell,\tau) = 0, \tag{20}$$

т. е. рассматривается идеально тонкий с теплоизолированной боковой поверхностью стержень конечной длины ℓ, расположенный вдоль оси абсцисс, на концах которого с абсциссами 0 и ℓ поддерживается постоянная нулевая температура $t = 0$ (тепловой сток); $t(x, 0) = \varphi(x)$ – начальная температура.

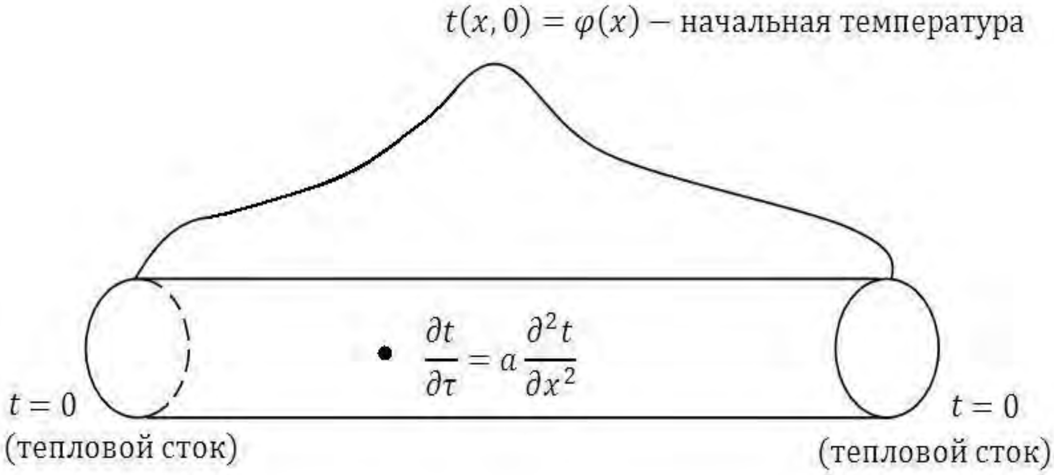

Рис. 3. Схематическое изображение задачи теплопроводности

Замечание. С математической точки зрения задача теплопроводности для тонкого стержня тождественна задаче для *неограниченной* пластины).

Очевидно, что стационарная температура, т. е. $t(x,\ \tau)$ при τ, стремящемся к ∞, равна нулю.

Рассмотрим физический смысл поставленной задачи. Итак, имеется стержень конечной длины, концы которого поддерживаются при постоянной, равной нулю, температуре (на самом деле концы могут поддерживаться при любой температуре, значение которой принимается за начало отсчета). Цель – найти распределение температуры $t(x,\ \tau)$ в последующие моменты времени.

Для простейшего уравнения (7) с частными производными разделение переменных – это поиск решений вида

$$t(x,\ \tau) = X(x)\ T(\tau), \qquad (21)$$

где $X(x)$ – функция, зависящая только от переменной x, а $T(\tau)$ – функция, зависящая только от τ. Данное решение является простейшим, поскольку температура $t(x,\ \tau)$, представленная в таком виде, будет сохранять «форму» профиля в различные моменты времени τ (рис. 4).

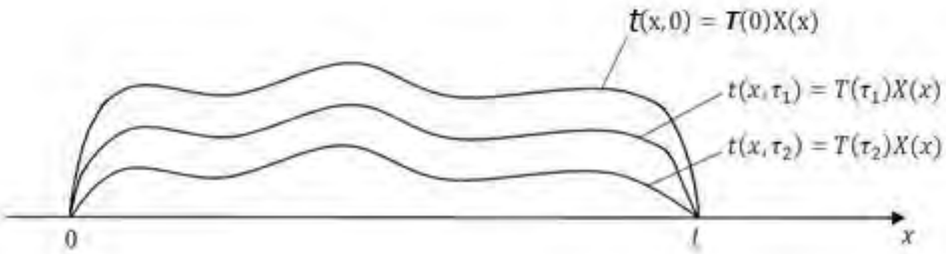

Рис. 4. График функции $X(x)T(\tau)$ в разные моменты времени τ

Общая идея заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения с частными производными, которые удовлетворяют граничным условиям. Эти простейшие функции $t_n(x,\ \tau) = X_n(x)T_n(\tau)$, называемые *фундаментальными решениями*, являются как бы элементарными кирпичиками, из которых строится решение поставленной задачи. Решение задачи $t(x,\ \tau)$ находится в виде такой линейной комбинации фундаментальных решений $X_n(x)T_n(\tau)$, что результирующая сумма $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(\tau)$ удовлетворяет начальным условиям. Поскольку эта сумма удовлетворяет уравнению и граничным условиям, она является решением исходной задачи. Рассмотрим эти выкладки подробно.

Будем искать решение краевой задачи (17)–(20) в виде $t = t(x, \tau) = X(x)T(\tau)$. Подставим данное выражение в уравнение (17). В результате получаем

$$X(x)T'(\tau) = aX''(x)T(\tau). \tag{22}$$

Теперь выполним операцию, присущую данному методу: разделим обе части формулы (22) на $aX(x)T(\tau)$, в результате чего получим

$$\frac{T'(\tau)}{aT(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{23}$$

В полученном выражении *переменные разделены*, т. е. левая часть уравнения зависит только от τ, а правая часть – только от x. Так как x и τ *не зависят один от другого*, каждая часть этого уравнения должна быть постоянной величиной. Обозначим данную константу ε и перепишем соотношение (23):

$$\frac{T'(\tau)}{aT(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mathrm{const} = \varepsilon.$$

Нетривиальное решение (т. е. отличное от нуля) для функции $X(x)T(\varepsilon)$ получается не при всех значениях ε, а только при $\varepsilon < 0$. Так как ε пока произвольная постоянная по численному значению, то полагаем $\varepsilon = -k^2$.

Подставляя это значение для ε, получаем:

$$T'(\tau) + ak^2 T(\tau) = 0; \tag{24}$$

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0. \tag{25}$$

Соотношения (24) и (25) справедливы для всех x на отрезке $[0, l]$ и всех $\tau > 0$ с учетом того, что X и T не равны тождественно нулю.

Постоянная k определяется из граничных условий. Из физических соображений следует, что для тепловых процессов, стремящихся к тепловому равновесию, $-k^2$ может быть только отрицательным числом.

Заметим, что мы существенно упростили исходное уравнение с частными производными второго порядка, превратив его в два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые легко интегрируются.

Решением уравнения (24) является функция $T(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau}$, а решением уравнения (25) – функция $X(x) = C_2\sin(kx) + C_3\cos(kx)$, где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Подставляя выражения для $T(\tau)$ и $X(x)$ в уравнение (21), получим частное решение:

$$t(x,\tau) = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)]e^{-ak^2\tau} \tag{26}$$

(постоянная C_1 вошла в C_2 и C_3).

Выражение (26) удовлетворяет исходному уравнению (17) при любых значениях C_2, C_3, k.

Чтобы выражение (26) было решением поставленной задачи, его нужно подчинить начальному и граничным условиям.

Подставим решение (26) в граничные условия (19) и (20). В результате получаем

$$t(0,\tau) = C_3 e^{-ak^2\tau} = 0, \tag{27}$$

откуда следует, что $C_3 = 0$;

$$t(l,\tau) = [C_2 \sin(kl) + C_3 \cos(kl)]e^{-ak^2\tau} = 0, \tag{28}$$

откуда следует $C_2 \sin(kl) = 0$; $C_2 \neq 0$, иначе имеем тривиальное решение.

Второе граничное условие накладывает ограничение на возможные значения константы k, а именно: kl должно быть корнем уравнения $\sin(kl) = 0$. Другими словами, чтобы удовлетворить $t(l,\tau) = 0$, необходимо потребовать выполнения соотношений

$$kl = \mu_n = n\pi, \tag{29}$$

где $n \in N$.

Числа $k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) называются *собственными* (*характеристическими* или *фундаментальными числами* задачи), а соответствующие им функции $\sin\frac{n\pi x}{l}$ – *собственными функциями задачи.*

Само уравнение $\sin\mu_n = 0$ называется *характеристическим.*

Итак, мы располагаем бесконечным набором функций

$$t_n(x,\tau) = C_n e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a\tau} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению с частными производными и граничным условиям (функции t_n и t_{-n} отличаются только знаком).

Полученные функции и являются теми «кирпичиками», из которых будет построено решение поставленной задачи. Данное решение представляет собой сумму фундаментальных решений:

$$t(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi^2}{l}\right)a\tau} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{30}$$

Теперь необходимо подобрать такие значения коэффициентов C_n, что функция будет удовлетворять начальному условию

$$t(x,0) = \varphi(x). \tag{31}$$

Подстановка суммы в начальное условие приводит к соотношению

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{32}$$

Данное уравнение вызывает вопрос: можно ли начальную функцию $\varphi(x)$ разложить в ряд по элементарным функциям вида

$$C_1 \sin\frac{\pi x}{l} + C_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + C_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + ... \qquad (33)$$

Положительный ответ на этот вопрос дал французский математик Жозеф Фурье. Оказалось, что для достаточно хороших функций такое разложение возможно. Ряд в формуле (32) называется *рядом Фурье*.

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье требуют, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла *условиям Дирихле*: функция в определенном интервале должна быть:

– однозначной, конечной и интегрируемой;

– иметь конечное число максимумов и минимумов;

– иметь конечное число точек разрыва непрерывности, в этом случае коэффициенты Фурье a_n и b_n общего ряда Фурье

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

находятся по *формулам Эйлера:*

$$a_n + \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Данные интегралы легко вычисляются.

Таким образом, после вычисления по формулам Эйлера коэффициентов Фурье C_n в выражении (32) получим окончательное решение поставленной задачи в виде

$$t(x,\tau) = \sum_{n-1}^{\infty}\sin\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)e^{\mu^2\frac{a\tau}{l^2}}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\mu_n \frac{x}{l}\right)dx, \qquad (34)$$

где $\mu_n = \pi n$.

Полученное решение (34) удовлетворяет всем условиям исходной задачи. Выполнение граничных условий очевидно. Для проверки выполнимости начального условия рассмотрим частный случай (20), а именно, пусть начальная температура тела – постоянная величина t_0:

$$t(x, 0) = t_0 = \text{const}. \qquad (20')$$

После вычисления интеграла в решении (34), в котором теперь $\varphi(x) = t_0$, окончательно получим

$$t(x,\tau) = 2t_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-(n\pi)^2 \frac{a\tau}{l^2}}. \qquad (35)$$

Из теории рядов известны следующие значения тригонометрических рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \; [0 < x < 2\pi];$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\sin(kx)}{k} = \frac{x}{2} \; [-\pi < x < \pi].$$

Из уравнения (35) при использовании полученных значений следует выполнение условия (20′).

5. ОХЛАЖДЕНИЕ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим задачу об охлаждении однородной пластины толщиной $l = 2R$ с начальным распределением температуры по толщине неограниченной пластины в виде некоторой функции $f(x)$. В начальный момент времени ограничивающие поверхности мгновенно охлаждаются до некоторой температуры среды t_c, которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения. Требуется найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени, т. е. температурное поле.

Поместим начало координат в середину пластины, здесь R – половина толщины пластины.

Условия задачи математически может быть сформулировано следующим образом.

Требуется решить дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, \quad -R < x < R) \tag{36}$$

при начальном условии

$$t(x, 0) = f(x) \tag{37}$$

и граничных условиях первого рода

$$t(+R,\tau) = t_\text{c} = \text{const}; \tag{38}$$

$$t(-R,\tau) = t_\text{c} = \text{const}. \tag{39}$$

Предположим, что функция $f(x)$ четная, т. е. $f(x) = f(–x)$, тогда

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x} = 0.$$

Для этого случая граничные условия можно написать так:

$$t(R,\tau) = t_\text{c}; \tag{38′}$$

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} = 0. \tag{39′}$$

Последнее условие соблюдается вследствие симметричности температурного поля. Условия (38′) – (39′) – смешанные граничные условия – первого и второго рода.

Задача (36)–(38), (39′) может быть приведена к более простой задаче – с нулевыми значениями температуры на обеих поверхностях пластины – с помощью подстановки

$$t(x,\tau) - t_\text{c} = t - t_\text{c} = \upsilon(x,\tau) = \upsilon. \tag{40}$$

Тогда вместо формул (36)–(38), (39′) будем иметь

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}; \tag{41}$$

$$\upsilon(x,0) = t(x,0) - t_{\text{с}} = f(x) - t_{\text{с}} = \varphi(x); \tag{42}$$

$$\upsilon(R,\tau) = 0; \tag{43}$$

$$\frac{\partial \upsilon(0,\tau)}{\partial x} = 0. \tag{44}$$

Частное решение дифференциального уравнения (41) можно написать, воспользовавшись результатом разобранного выше метода разделения переменных – решением уравнения (25):

$$\upsilon(x,\tau) = [A\sin(kx) + B\cos(kx)]e^{-ak^2\tau}. \tag{45}$$

Из условия симметрии следует $A = 0$, а именно:

$$\frac{\partial \upsilon(0,\tau)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}[kA\cos(kx) - kB\sin(kx)]\, e^{-ak^2\tau} = kAe^{-ak^2\tau} = 0,$$

откуда $A = 0$, так как $e^{-ak^2\tau}$ на протяжении всего процесса охлаждения $(0 < \tau < \infty)$ не равно нулю. Этот результат следует и из анализа условий охлаждения: распределение температуры должно быть симметричным относительно оси ординат (оси температур), следовательно, должно описываться четной функцией, т. е. в соотношении (45) должна быть только четная функция $\cos(kx)$.

Таким образом,

$$\upsilon(x,\tau) = B\cos(kx)\, e^{-ak^2\tau}. \tag{46}$$

Удовлетворим соотношение (46) граничному условию (43):

$$\upsilon(R,\tau) = B\cos(kR)\, e^{-ak^2\tau} = 0,$$

откуда следует:

$$\cos(kR) = 0,\ k_n R = (2n-1)\frac{\pi}{2},\ k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2R}, \qquad (47)$$

т. е. значений k существует бесчисленное множество.

Следовательно, общее решение будет суммой всех частных решений:

$$\upsilon(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) e^{-k_n^2 a\tau}. \qquad (48)$$

Сумма частных распределений температуры для любого заданного времени должна описывать действительное распределение температуры. Поэтому постоянные B_n в каждом частном решении будут иметь свои собственные значения. Следовательно, наложение косинусоид должно дать действительную кривую распределения температуры, в том числе и ее начальное распределение.

Тогда, при $\tau = 0$ получим заданную функцию $\varphi(x)$, которая будет представлена в виде ряда Фурье:

$$\upsilon(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x), \qquad (49)$$

в котором коэффициенты определяются по соотношению

$$B_n = \frac{2}{R}\int_0^R \upsilon(x,0)\cos(k_n x)dx = \frac{2}{R}\int_0^R \varphi(x)\cos(k_n x)dx. \qquad (50)$$

Решение исходной краевой задачи (36)–(39) получим, заменив по формуле (40) $t(x, \tau)$ на выражение

$$t(x,\tau) = \upsilon(x,\tau) + t_{\text{с}}, \qquad (51)$$

а функцию $\varphi(x)$ в формуле (50) – по соотношению (42).

Тогда окончательное решение будет иметь следующий вид:

$$t(x,\tau)=t_{\text{c}}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{2R}\right)e^{-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\frac{a\tau}{R^2}},\qquad(52)$$

где

$$B_n=\frac{2}{R}\int_0^R(f(x)-t_{\text{c}})\cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{2R}\right)dx.$$

В решении (52) зависимость температуры от координаты x представлена периодической функцией $\cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{R}\right)$, а зависимость от времени охлаждения определяется экспоненциальным множителем в каждом из членов бесконечного ряда.

Замечание. Решение (52) является решением исходной краевой задачи (36)–(39) и одновременно решением задачи нахождения температурного поля в неограниченной пластине толщиной $l=R$ $(0<x<l)$, когда одна ее поверхность имеет тепловую изоляцию (при $x=0$ поток тепла отсутствует, так как $\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x}=0$ – условие (39′), а противоположная поверхность $x = l$ поддерживается при температуре t_{c}. В начальный момент времени задано некоторое распределение температуры в виде функции $f(x)$, причем в этом случае функция $f(x)$ может быть любой, лишь бы она удовлетворяла условиям Дирихле.

Если начальное распределение температуры равномерное, т. е. $f(x) = t(x, 0) = t_0 = \text{const}$, то после вычисления интеграла

$$B_n=\frac{2}{R}\int_0^R\varphi(x)\cos(k_nx)dx=\frac{2}{R}\int_0^R[f(x)-t_{\text{c}}]\cos\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)dx=$$
$$=\frac{2}{R}\int_0^R(t_0-t_{\text{c}})\cos\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)dx$$

решение (52) можно написать в безразмерном виде:

$$\theta(X,\text{Fo})=\frac{t(x,\tau)-t_{\text{c}}}{t_0-t_{\text{c}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n}(-1)^{n+1}\cos(\mu_nX)e^{-\mu_n\text{Fo}},\qquad(53)$$

где θ = θ(X, Fo) – безразмерная (относительная избыточная) температура, причем 0 < θ < 1; $\mu_n = k_n R = (2n-1)\dfrac{\pi}{2}$ – характеристические числа; $X = \dfrac{x}{R}$ – безразмерная (относительная) координата; $\mathrm{Fo} = \dfrac{a\tau}{R^2}$ – число (критерий) Фурье (критерий гомохронности – безразмерное время – для процессов теплопроводности).

Некоторые выводы из анализа решения

1. Из анализа решения уравнения (53) следует, что относительная избыточная температура является функцией относительной координаты и числа Фурье: θ = θ(X, Fo).

Следовательно, процесс охлаждения состоит из процесса постоянного выравнивания температуры по толщине пластины (температура на ограничивающих поверхностях все время одинакова и равна t_c), скорость протекания которого определяется коэффициентом температуропроводности.

Такой процесс теплообмена называется *внутренним процессом,* а сама задача – *внутренней задачей.*

Распределение температуры в различное время приведено на рис. 5.

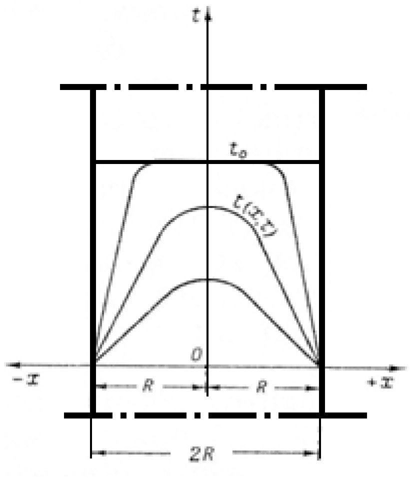

Рис. 5. Распределение температуры в неограниченной пластине (внутренняя симметричная задача)

Решение уравнения (53) представляет собой сходящийся ряд, т. е. алгебраическую сумму косинусов с постепенно затухающими амплитудами, определяемыми выражением $\frac{2}{\mu_n}(-1)^{n+1} e^{-\mu_n^2 \text{Fo}}$. Быстрота сходимости зависит, прежде всего, от величины Fo. Для достаточно больших Fo ряд сходится быстро, и для вычисления θ достаточно ограничиться одним–двумя членами ряда.

Пример

Пусть имеется пластина толщиной $2R = 0{,}2$ м, $t_0 = 35$ °С , $t_c = 5$ °С. При этом коэффициент температуропроводности $a = 1{,}4 \cdot 10^{-7}$ м^2/с. Необходимо найти температуру в центре пластины ($x = 0$) через 10 часов после начала охлаждения.

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 3600}{10^{-2}} = 0{,}5\,.$$

Значение числа Fo достаточно велико, поэтому можно ограничиться только первым членом ряда:

$$\theta = \frac{4}{\pi} \cos 0 \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4} \cdot 0{,}5} \approx 0{,}37\,.$$

Так как $\theta = \dfrac{t(x,\tau) - t_c}{t_0 - t_c}$ и $t = t$ (0;3600), то $\dfrac{t-5}{35-5} = 0{,}37$, откуда $t = 16{,}1$ ° С.

2. На практике приходится решать обратную задачу: находить продолжительность охлаждения τ, т. е. время, через которое в определенной точке пластины будет достигнута необходимая температура. Данную задачу легко решить в том случае, если в уравнении (53) можно ограничиться первым членом, а остальные отбросить из-за их малой величины. Вычисления показывают, что это возможно при Fo > 0,4.

Из соотношения (53) (при $n = 1$)

$$\theta = \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2R} e^{-\frac{\pi^2 \text{Fo}}{4}}\,. \tag{54}$$

После преобразований находим Fo как явную функцию θ и X:

$$\text{Fo} = \frac{4}{\pi^2}\left(\ln\frac{4}{\pi} + \ln\cos\left(\frac{\pi x}{2R}\right) - \ln\theta\right), \tag{55}$$

откуда искомое время

$$\tau = \frac{4R^2}{a\pi^2}\ln\left(\frac{4}{\pi\theta}\cos\left(\frac{\pi x}{2R}\right)\right). \tag{56}$$

3. При практических расчетах процесса термической обработки тела (его охлаждения или нагрева) необходимо знать среднюю температуру $\bar{t}(\tau)$ по всему объему тела V.

Если температура тела $t(x, y, z, \tau)$ известна как функция координат и времени, то средняя (интегральная) или среднеобъемная температура $\bar{t}$ по всему объему тела вычисляется по известной из курса математического анализа теореме о среднем:

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{V}\int t(x, y, z, \tau)\,dV. \tag{57}$$

Для неограниченной пластины толщиной $2R$ из формулы (57) получаем

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} t(x, \tau)\,dx, \tag{58}$$

а при симметричном распределении температур

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{R}\int_{0}^{R} t(x, \tau)\,dx. \tag{59}$$

Для средней относительной температуры из формулы (58) имеем

$$\bar{\theta}(\mathrm{Fo}) = \int_0^1 \theta(X, \mathrm{Fo})\, dX\,. \tag{60}$$

Подставляя в последнюю формулу вместо θ его значение (53) и учитывая, что

$$\int_0^1 \cos(\mu_n X)\, dX = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\dfrac{\pi}{2}},$$

получим

$$\frac{\bar{t}(\tau) - \tau_\mathrm{c}}{t_0 - t_\mathrm{c}} = \bar{\theta}(\mathrm{Fo}) = \bar{\theta} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}\mathrm{Fo}}\,. \tag{61}$$

Члены данного ряда убывают быстрее, чем члены ряда (53). Вычисления показывают, что уже при Fo > 0,1 можно ограничиться только одним членом ряда. В таком случае

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(\mathrm{Fo}) = \frac{\bar{t}(\tau) - t_\mathrm{c}}{t_0 - t_\mathrm{c}} = \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}}, \tag{62}$$

а решение обратной задачи на нахождение времени достижения телом необходимой заданной среднеобъемной температуры дает искомое значение

$$\tau = \frac{4R^2}{a\pi^2} \ln \frac{8}{\pi^2 \bar{\theta}}\,. \tag{63}$$

4. Зависимость между средней безразмерной температурой $\bar{\theta}$ и безразмерным временем Fo в виде формулы (61) дает возможность находить скорость нагревания (охлаждения) тела:

$$-\frac{d\theta}{d\mathrm{Fo}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}\mathrm{Fo}}\,. \tag{64}$$

При $n = 1$

$$-\frac{d\theta}{d\mathrm{Fo}} = 2e^{-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}} \ (\mathrm{Fo} > 1). \tag{65}$$

Сравнивая формулы (65) и (62), видим, что при Fo > 1

$$-\frac{d\theta}{d\mathrm{Fo}} = \frac{\pi^2 \bar{\theta}}{4}. \tag{66}$$

Так как $\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{R^2}$, скорость нагревания (охлаждения) $\frac{d\bar{\theta}}{d\tau}$ будет прямо пропорциональна коэффициенту температуропроводности и обратно пропорциональна квадрату половины толщины пластины.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОГО РАСХОДА ТЕПЛОТЫ

Существует несколько способов определения количества тепла, отдаваемого телом при его охлаждении. Один из них основан на предварительном определении среднеобъемной температуры.

Если за время τ температура элемента объемом $d\upsilon$ изменится от t_0 до t, то этот элемент при охлаждении отдает количество тепла, равное $c\gamma(t_0 - t)d\upsilon$, где c – удельная теплоемкость тела; γ – плотность.

Общее же количество тепла ΔQ_v, отдаваемого телом некоторого конечного объема υ, можно определить по формуле

$$\Delta Q_v = c\gamma\int_{\nu}(t_0 - \bar{t})\,dV, \tag{67}$$

что при введении средней интегральной температуры по формуле (57) дает величину

$$\Delta Q_v = c\gamma V(t_0 - \bar{t}), \text{ Дж.} \tag{68}$$

Удельный расход теплоты (расход теплоты на единицу объема, Дж/м^3) равен

$$\Delta Q_{\nu\text{уд}} = c\gamma(t_0 - \bar{t}). \tag{69}$$

Пример

Определить количество теплоты, отданное пластиной объемом 1 м^3 при охлаждении, продолжающемся в течение 10 ч, если R = 0,1 м; a =1 ,4·10^{-7} м^2/с; t_0 = 40 °С; $t_с$ = 5 °С; γ =10^3 кг/м^3; c = 3,84·10^3 Дж/(кг·К).

Вычислим число Фурье:

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 3600}{10^{-2}} = 0{,}5\,.$$

Так как Fo > 0,1, то найдем среднеобъемную температуру по формуле (64):

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - \tau_{\text{с}}}{t_0 - t_{\text{с}}} = \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\text{Fo}} = 0{,}236\,,$$

откуда $\bar{t} = 13{,}3\ ^\circ\text{C}$.

По формуле (68) находим искомый расход теплоты:

$$\Delta Q_{\upsilon} = 3{,}84 \cdot 10^3\,\text{Дж/(кг} \cdot \text{К)} \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3 \cdot 1\,\text{м}^3\,(40\ ^\circ\text{C} - 13{,}3\ ^\circ\text{C}) = 0{,}1\ \text{МДж}.$$

7. СУШКА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть дана неограниченная пластина толщиной $2R$ и начальным содержанием влаги, равным C_0, равномерно распределенным в пластине. Пластина нагревается с обеих сторон одинаково, т. е. подвергается сушке с обеих поверхностей при постоянной скорости (плотности потока массы влаги $q_{\text{с}}$ кг/(м^2·с)). Поместим начало координат в середину пластины, тогда R – половина толщины пластины. Ось абсцисс (Ox) перпендикулярна поверхности пластины, ось ординат (Oy) – ось концентрации влаги. Требуется найти распределение влаги по толщине пластины в любой момент времени.

Решение поставленной физической задачи сводится математически к решению одномерного дифференциального уравнения диффузии (массо- и влагопроводности)

$$\frac{C(x,\tau)}{\partial\tau} = D\frac{\partial^2 C(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (-R < x < R,\ \tau > 0) \tag{70}$$

при начальном условии

$$C(x, 0) = C_0 = \mathrm{const} \tag{71}$$

и граничных условиях второго рода

$$-D\frac{\partial C(-R,\tau)}{\partial x} + q_{\text{с}} = 0; \tag{72}$$

$$D\frac{\partial C(R,\tau)}{\partial x} + q_{\text{с}} = 0, \tag{73}$$

где C – концентрация влаги, кг/м^3; D – коэффициент молекулярной диффузии, м^2/с.

Для решения задачи введем новую переменную q, определяемую соотношением

$$q = q(x,\tau) = D\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x}. \tag{74}$$

Продифференцируем уравнение (70) по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial C}{\partial\tau}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right]. \tag{75}$$

Тогда уравнение (75) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial C}{\partial x}\right] = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial C}{\partial x}\right]$$

или, учитывая подстановку соотношения (74),

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \tag{70'}$$

т. е. получили обычное дифференциальное уравнение диффузии для одномерной задачи, в котором вместо переменной C стоит переменная q.

Начальные и граничные условия для краевой задачи с новой переменной имеют следующий вид:

$$q(x, 0) = 0; \tag{71'}$$

$$q(-R, \tau) = q_c; \tag{72'}$$

$$q(R, \tau) = -q_c. \tag{73'}$$

Таким образом, нами получена задача (70')–(73') на «нагревание» неограниченной пластины с нулевой начальной «температурой», когда ограничивающие её поверхности поддерживаются при «температурах» соответственно q_c и $-q_c$.

Вместо переменной q введем новую переменную t по соотношению

$$t(x, \tau) = q(x, t) + \frac{x}{R}q_c,\ \ q_c = \text{const} > 0. \tag{76}$$

Тогда уравнение (70') и условия (71')–(73') для новой переменной $t(x, \tau)$ будут следующими:

$$\frac{\partial \tau(x,\tau)}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \tag{70''}$$

$$t(x, 0) = \frac{x}{R}q_c = f(x); \tag{71''}$$

$$t(-R, \tau) = 0; \tag{72''}$$

$$t(R, \tau) = 0. \qquad (73'')$$

Таким образом, пришли к простейшей краевой задаче: найти в области $[R < x < R, \tau < \infty]$ решение однородного уравнения (70''), удовлетворяющее начальному условию (71'') и однородным краевым (граничным) условиям (72'') и (73'').

Снова воспользуемся методом разделения переменных Фурье.

Будем искать частные решения уравнения (70'') в виде

$$t(x, \tau) = T(\tau)X(x). \qquad (77)$$

Подставляя (77) в соотношение (70''), имеем

$$X(x)T'(\tau) = DT(\tau)X''(x), \text{ или } \frac{T'(\tau)}{DT(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2, \qquad (78)$$

откуда получаем два уравнения:

$$\mathrm{T}'(\tau) + Dk^2T(\tau) = 0; \qquad (24')$$

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0. \qquad (25')$$

Чтобы получить нетривиальные решения $t(x, \tau)$ вида (77), удовлетворяющие условиям вида (72'') и (73''), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (25'), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(-R) = 0, \quad X(R) = 0.$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ приходим к задаче о собственных значениях:

$$X''(x) + k^2X(x) = 0, \quad X(-R) = 0, \quad X(R)=0. \qquad (79)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (79) имеет общее решение, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2:

$$X(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx). \qquad (80)$$

Подставляя в формулу (80) однородные граничные условия (79), получим

$$C_1\cos(kR) - C_2\sin(kR) = 0;$$

$$C_1\cos(kR) + C\sin(kR) = 0,$$

откуда следует, что $C_1 = 0$.

Так как $C_2 \neq 0$ (иначе $X(x) \equiv 0$ – тривиальное решение), то

$$\sin(kR) = 0, \qquad (81)$$

и

$$k = \frac{n\pi}{R}, \qquad (82)$$

где n – любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (79) возможны лишь при значениях

$$k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2.$$

Приведенным собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{R},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя.

Так как положительные и отрицательные значения n, равные по абсолютной величине, дают собственные значения $k_{-n} = k_n$, а собственные функции отличаются лишь постоянным множителем, то достаточно для n брать только целые положительные значения.

При $k = k_n$ общее решение уравнения (24') имеет вид:

$$T_n(\tau) = C_n e^{-Dk_n^2\tau},$$

где C_n – произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$t_n(x, \tau) = X_n(x)T_n(\tau) = C_n e^{-Dk_n^2 \tau \sin\frac{n\pi x}{R}}$$

удовлетворяют уравнению (70") и граничным условиям (72") и (73") при любых C_n.

Ввиду линейности и однородности уравнения (70") любая конечная сумма решений также будет решением. То же справедливо и для ряда

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{R} e^{-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 D\tau}. \qquad (83)$$

Остается определить постоянные C_n так, чтобы удовлетворялось начальное условие (71"). Требуя выполнения данного условия, получим

$$t(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{R}. \qquad (84)$$

Данный ряд представляет собой разложение заданной функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(-R, R)$. Поэтому коэффициенты определяются по известной второй формуле из (33):

$$C_n = \frac{2}{R}\int_0^R f(x)\sin\frac{n\pi x}{R}dx.$$

Вычисление этого интеграла по частям при $f(x) = \frac{x}{R}q_{\text{с}}$ дает

$$C_n = \frac{2q_{\text{с}}}{n\pi R}(-1)^{n+1},$$

откуда получаем решение

$$t(x,\ \tau) = q_{\text{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{R} e^{-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 D\tau}, \tag{85}$$

или, введя характеристические числа $\mu_n = n\pi$,

$$t(x,\ \tau) = q_{\text{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n} \sin\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \mathrm{e}^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{R^2}}. \tag{85'}$$

Перейдем от $t(x,\ \tau)$ к предыдущей переменной $q(x, \tau)$ по принятому соотношению (76):

$$q(x, \tau) = q_{\text{c}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n=1} \frac{2}{\mu_n} \sin\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{R^2} - \frac{x}{R}} \right]. \tag{86}$$

Концентрационное поле найдем из формулы (74):

$$C(x,\tau) = \frac{1}{D} \int q(x,\tau) dx \,| + \varphi(\tau) + A, \tag{87}$$

где $\varphi(\tau)$ – некоторая функция от времени; A – постоянная. Подставляя формулу (86) в выражение (87) и интегрируя его, получим:

$$C(x, \tau) = \frac{q_c R}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} (-1)^n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{DR}{R^2}} - \frac{q_c x^2}{2DR} + \varphi(\tau) + A. \tag{88}$$

Чтобы определить $\varphi(\tau)$ и A, воспользуемся следующим соотношением:

$$q_{\text{c}} = R \frac{d\bar{c}(\tau)}{d\tau}, \tag{89}$$

где $\bar{c}(\tau)$ – средняя концентрация неограниченной пластины, определяемая по формуле

$$\overline{C}(\tau)=\frac{1}{R}\int_0^R C(x,\tau)dx. \qquad (90)$$

Соотношение (90) можно написать, решив уравнение (89) с разделяющимися переменными и учтя начальное условие (71):

$$\overline{C}(\tau)=\frac{q_c}{R}\tau+C_0. \qquad (91)$$

Найдем $\overline{C}(\tau)$ из соотношения (88):

$$\overline{C}(\tau)=-\frac{q_c R}{6D}+\varphi(\tau)+A, \qquad (92)$$

так как интеграл от суммы по x в пределах от 0 до R равен нулю ($\sin\mu_n=0$). Сравнивая формулы (91) и (92), находим:

$$\varphi(\tau)=\frac{q_c}{R}\tau, \qquad A=C_0+\frac{q_c R}{6D}.$$

Окончательное решение задачи (70)–(73) примет вид:

$$C(x,\tau)-C_0=\frac{q_c R}{D}\left[\frac{D\tau}{R^2}+\frac{1}{6}-\frac{x^2}{2R^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n^2}(-1)^n\cos\left(\mu_n\frac{x}{R}\right)e^{-\mu_n^2\frac{D\tau}{R^2}}\right]. \qquad (93)$$

С возрастанием τ сумма ряда уменьшается и распределение концентрации (влагосодержания) приближенно характеризуется при достаточно большом τ параболической зависимостью C от x по толщине пластины. Для любого процесса сушки величина C не может быть отрицательной, поэтому формула (93) справедлива для значений τ, не превосходящих определенной границы.

Введем некоторые обозначения:

$\theta(R,\mathrm{Fi})=\dfrac{C(x,\tau)-C_0}{C_p-C_n}$ – безразмерная (относительная) концентрация (влагосодержание);

$C_{\text{р}}$ – равновесная концентрация (влагосодержание);

$X = \dfrac{x}{R}$ – безразмерная координата;

$\text{Fi} = \dfrac{D\tau}{R^2}$ – критерий (число) Фика;

$\text{Ki}_{\text{с}} = \dfrac{q_{\text{с}} R}{D(C_{\text{р}} - C_0)}$ – концентрационный критерий (число) Кирпичева.

Теперь решение уравнения (93) можно написать в безразмерном виде:

$$\theta(X, \text{Fi}) = \text{Ki}_{\text{с}} \left[\text{Fi} + \frac{1}{6}(1 - 3X^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} (-1)^n \cos(\mu_n x) e^{-\mu_n^2 \text{Fi}} \right]. \quad (94)$$

Таким образом, относительное влагосодержание будет функцией $\text{Ki}_{\text{с}}$, Fi, X, т. е.

$$\theta = \theta(\text{Ki}_{\text{с}}, \text{Fi}, X). \quad (95)$$

Как уже отмечалось, с увеличением времени, а точнее критерия Fi в данном случае, члены ряда в соотношении (94) быстро уменьшаются и при некотором значении $\text{Fi} > \text{Fi}_1$ становятся ничтожно малыми по сравнению с двумя первыми членами, так что всеми последующими членами ряда можно пренебречь. Начиная с этого момента времени, влагосодержание в любой точке пластины будет линейной функцией времени, а распределение влагосодержания по толщине пластины описывается законом параболы, т. е. наблюдается квазистационарный режим для поля влагосодержаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решение многих задач естествознания и техники сводится к нахождению неизвестных функций, описывающих рассматриваемые явления или процессы, когда известны соотношения, связывающие между собой эти функции и их производные. Такие соотношения называются дифференциальными уравнениями. Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности, которое устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами элементарного объема. Такое уравнение характеризует протекание физического явления или процесса в любой момент времени. В данном учебно-методическом пособии дифференциальное уравнение теплопроводности получено упрощенным методом на основе закона сохранения энергии и основного закона теплопроводности (первого закона Фурье). Оно записано для тел основной геометрической формы – неограниченной пластины, бесконечного цилиндра и сферы.

2. Приведены условия, которые в совокупности с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, т. е. однозначно определяют единичное явление, – *условия однозначности,* или *краевые условия.*

3. Рассмотрен метод разделения переменных (метод Фурье) – один из старейших методов решения смешанных краевых задач (с граничными условиями первого, второго и третьего рода). Показано эффективное применение данного метода для решения задач на нагрев, охлаждение и сушку твердых однородных изотропных тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев Г.В., Вороненко Б.А., Лукин Н.И.** Математические методы в пищевой инженерии: Учеб. пособие. – СПб.: Изд.-во «Лань», 2012. – 176 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

2. **Алямовский И.Г., Гейнц Р.Г., Юшкевич П.П. и др.** Аналитическое исследование технологических процессов обработки мяса холодом. – М.: ЦНИИиТЭИ, 1970. – 183 с.

3. **Батунер Л.М., Позин М.Е.** Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824 с.

4. **Гуляев В.А., Вороненко Б.А., Пеленко В.В. и др**. Теплотехника: Учеб. для вузов. – СПб.: Изд.-во «РАПП», 2008. – 352 с.

5. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М**. Уравнения в частных производных математической физики: Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М.: Высш. шк., 1970. – 720 с.

6. **Кудашов В.Н., Рыков В.А., Тестов Ю.Н.** Элементы математической физики. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2006. – 35 с.

7. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.

8. **Фарлоу С.** Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.

9. **Шарма Дж. Н., Сингх К.** Уравнения частных производных для инженеров. – М.: Техносфера, 2002. – 320 с.

СОДЕРЖАНИЕ

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

Институт холода и биотехнологий является преемником Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ), который в ходе реорганизации (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 2209 от 17 августа 2011г.) в январе 2012 года был присоединен к Санкт-Петербургскому национальному исследовательскому университету информационных технологий, механики и оптики.

Созданный 31 мая 1931года институт стал крупнейшим образовательным и научным центром, одним их ведущих вузов страны в области холодильной, криогенной техники, технологий и в экономике пищевых производств.

В институте обучается более 6500 студентов и аспирантов. Коллектив преподавателей и сотрудников составляет около 900 человек, из них 82 доктора наук, профессора; реализуется более 40 образовательных программ.

Действуют 6 факультетов:

- холодильной техники;
- пищевой инженерии и автоматизации;

- пищевых технологий;
- криогенной техники и кондиционирования;
- экономики и экологического менеджмента;
- заочного обучения.

За годы существования вуза сформировались известные во всем мире научные и педагогические школы. В настоящее время фундаментальные и прикладные исследования проводятся по 20 основным научным направлениям: научные основы холодильных машин и термотрансформаторов; повышение эффективности холодильных установок; газодинамика и компрессоростроение; совершенствование процессов, машин и аппаратов криогенной техники; теплофизика; теплофизическое приборостроение; машины, аппараты и системы кондиционирования; хладостойкие стали; проблемы прочности при низких температурах; твердотельные преобразователи энергии; холодильная обработка и хранение пищевых продуктов; тепломассоперенос в пищевой промышленности; технология молока и молочных продуктов; физико-химические, биохимические и микробиологические основы переработки пищевого сырья; пищевая технология продуктов из растительного сырья; физико-химическая механика и тепло-и массообмен; методы управления технологическими процессами; техника пищевых производств и торговли; промышленная экология; от экологической теории к практике инновационного управления предприятием.

В институте создан информационно-технологический комплекс, включающий в себя технопарк, инжиниринговый центр, проектно-конструкторское бюро, центр компетенции «Холодильщик», научно-образовательную лабораторию инновационных технологий. На предприятиях холодильной, пищевых отраслей реализовано около тысячи крупных проектов, разработанных учеными и преподавателями института.

Ежегодно проводятся международные научные конференции, семинары, конференции научно-технического творчества молодежи.

Издаются журнал «Вестник Международной академии холода» и электронные научные журналы «Холодильная техника и кондиционирование», «Процессы и аппараты пищевых производств», «Экономика и экологический менеджмент».

В вузе ведется подготовка кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по 11 специальностям.

Действуют два диссертационных совета, которые принимают к защите докторские и кандидатские диссертации.

Вуз является активным участником мирового рынка образовательных и научных услуг.

www.ihbt.edu.ru

Вороненко Борух Авсеевич
Крысин Анатолий Григорьевич
Пеленко Валерий Викторович
Цуранов Олег Алексеевич

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Редактор
Т.В. Белянкина

Компьютерная верстка
Д.Е. Мышковский

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 30.12.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,79. Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,81
Тираж 50 экз. Заказ № С 85

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Санкт-Петербургский национальный исследователь-
ский университет
информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
Институт холода и биотехнологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9