МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.В. Фролов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

УДК 512.64

Фролов С. В. Линейная алгебра в геометрическом изложении: Учеб. - метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО; ИХиБТ, 2015. – 75 с.

Даны сведения о линейных (векторных) пространствах, линейных операторах и их матрицах, определителях, обратных операторах и матрицах, системах линейных уравнений, собственных числах и векторах оператора, скалярном произведении векторов, приведении симметричной матрицы к диагональному виду (квадратичной формы к сумме квадратов) поворотом базиса, векторном, смешанном и двойном векторном произведениях. Изложение ведётся геометрически – от наглядных представлений к абстрактным понятиям. Предназначено для самостоятельной работы бакалавров направлений 16.03.03, 23.03.03, 15.03.04, 15.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 14.03.01, 38.03.02, 18.03.02 всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Рыков

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

1. Введение

Вспомним, что мы знаем из школьного курса о векторах на плоскости и в пространстве. Во-первых, что такое вектор? Большинство наверняка скажет, что это направленный отрезок. Но это не определение, а способ записи – к сожалению, эти вещи часто путают. На самом деле вектор – это параллельный перенос плоскости (пространства). Для того чтобы задать параллельный перенос, достаточно для одной точки показать, в какую точку она перейдёт, для чего и используют направленный отрезок. Любая другая точка сдвинется на этот же отрезок. В этой интерпретации сложение векторов – это композиция переносов: сначала проведём один перенос потом второй. На рис. 1 показаны известные вам правила сложения векторов «треугольником» – оно непосредственно вытекает из определения, и «параллелограммом», – оно имеет тот плюс, что из него очевидно следует, что сложение векторов (а значит и композиция параллельных переносов) коммутативно: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Умножение вектора на число также интерпретируется в терминах параллельных переносов: умножить вектор на, скажем, два означает два раза провести параллельный перенос, а умножение на минус единицу означает совершить обратный перенос (в другую сторону). Также в школе у вас было понятие проекции вектора на ось (которая, напоминаю, равнялась произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью). Она также интерпретируется в терминах переносов как величина, на которую изменяется координата точки вдоль этой оси при переносе.

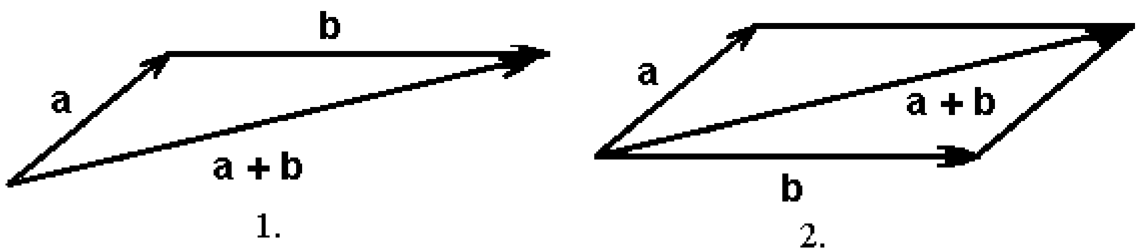

Рисунок 1. Сложение векторов: 1. треугольником 2. параллелограммом.

Однако нам потребуется оперировать векторами в многомерном пространстве, которое невозможно представить наглядно, поэтому необходимы абстрактные определения. При этом мы будем сопоставлять результаты абстракций с наглядными представлениями в случае двух- и трёхмерного случая. У вас может возникнуть вопрос: а зачем нам пространство размерности более трёх, ведь в реальности такого пространства не существует? На самом деле такие пространства очень удобны при описании различных процессов. Например, физики используют так называемое фазовое пространство, координатами в которых являются координаты частицы x, y, z и соответствующие компоненты импульса (скорость, умноженная на массу) p_x, p_y, p_z – всего шесть измерений. Прелесть такого пространства в том, что через каждую его точку проходит только одна траектория движения (помните, что для решения задачи о, например, полёте камня, необходимо знать начальные координаты и начальную скорость?). Если у нас n частиц, то размерность фазового пространства будет равна $6n$. В случае твёрдого тела размерность будет 12: координаты и компоненты импульса центра тяжести, углы и компоненты момента импульса. И так далее. Кстати, если в системе сохраняется энергия (консервативная система), то при движении в фазовом пространстве сохраняется объём (об определении многомерного объёма см. ниже) – теорема Лиувилля (подробнее см. [1], тема 89).

2. Линейное (векторное пространство)

Линейная зависимость и независимость системы векторов

Базис. Размерность

Приведём абстрактное определение линейного (или векторного – это синонимы) пространства. Это множество $\mathbf{E}$, элементы которого называются векторами, на котором определены две операции. Первая операция – сложение векторов, которое сопоставляет паре векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ новый вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Вторая операция – умножение вектора на число, которая сопоставляет паре, состоящей из вектора $\mathbf{a}$ и числа α (оно может быть как действительным, так и комплексным, но здесь мы будет рассматривать только действительный случай) новый вектор $\alpha\mathbf{a}$. При этом операции сложения и умножения на число должны удовлетворять следующим аксиомам линейного пространства:

1. Для любых векторов **a**, **b** и **c** выполнено (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)
2. Существует вектор **0**, такой, что для любого вектора **a** выполнено: **a** + **0** = **a**
3. Для любого вектора **a** существует вектор (–**a**), такой, что выполнено **a** + (–**a**) = **0**
4. Для любых векторов**a** и **b**выполнено **a** + **b** = **b**+ **a**
5. Для любых чисел α и β и вектора **a** выполнено (α + β)**a**= α**a**+ β**a**
6. Для любых векторов **a** и **b** и числа α выполнено α(**a** + **b**) = α**a** + α**b**
7. Для любых чисел α и β и вектора **a** выполнено (αβ)**a** = α(β**a**)
8. Для любого вектора **a** выполнено 1**a** = **a**

Обсудим эти аксиомы. Первая аксиома – это свойство ассоциативности сложения векторов (в школе это, кажется, называли «сочетательное» свойство). Отметим, что для сложения треугольником или параллелограммом это свойство отнюдь не очевидно. А вот с точки зрения параллельных переносов очевидно – и в том и в другом случае производятся переносы **a**, **b** и **c**. Далее существование нулевого вектора (вторая аксиома) и обратного вектора (третья аксиома). Первые три аксиомы говорят о том, что векторное пространство – группа по сложению. Группа – одно из фундаментальнейших понятий современной математики, без теории групп невозможны современные физика, химия, кристаллография и т. д. Четвёртая аксиома – коммутативность сложения («переместительный закон»). Таким образом, векторное пространство – коммутативная группа по сложению. Коммутативные группы называют также абелевыми в честь норвежского математика начала 19 века Нильса Хенрика Абеля, прожившего всего 26 лет, но успевшего внести фундаментальный вклад во многие разделы математики.О теории групп см. подробнее [1] тема 7 (абелевы группы) и 29 (не абелевы). Далее, аксиомы 5-7 – аксиомы дистрибутивности («сочетательное свойство»). Пятая аксиома – дистрибутивность по отношению к сложению чисел и умножению вектора на число, шестая по отношению к сложению векторов и умножению вектора на число, и седьмая по отношению к произведению чисел и умножению вектора на число. Ну и восьмая аксиома – при умножении на единицу вектор не меняется.

Все остальные свойства выводятся из аксиом. Вот три примера (необязательный материал).

Теорема 1. $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Доказательство. $0\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + \mathbf{0} = 0\mathbf{a} + (0\mathbf{a} + (-0\mathbf{a})) = (0\mathbf{a} + 0\mathbf{a}) +$

$+ (-0\mathbf{a}) = (0 + 0)\mathbf{a} + (-0\mathbf{a}) = 0\mathbf{a} + (-0\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Теорема 2. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Доказательство. $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{0} = 1\mathbf{a} + \alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{a}/\alpha) + \alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{a}/\alpha + \mathbf{0}) =$

$= \alpha(\mathbf{a}/\alpha) = \mathbf{a}$.

Теорема 3. $(-1)\mathbf{a} = (-\mathbf{a})$.

Доказательство. $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = (1 + (-1))\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Следующее важное понятие – линейная независимость набора векторов. Набор векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$называется линейно зависимым, если существуетих линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами (хотя бы один коэффициент отличен от нуля), равная нулевому вектору:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_\mathrm{i} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Равносильное определение: набор линейно зависим, если один из векторов можно выразить через линейную комбинацию остальных:

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \mathbf{e}_i \tag{2}$$

Равносильность (1) и (2) доказывается так: если в сумме (1) взять слагаемое с ненулевым коэффициентом, перенести его в правую часть и поделить равенство на этот ненулевой коэффициент (при переносе он, разумеется, поменяет знак), получим соотношение (2). Наоборот, если в (2) перенести $\mathbf{e}_j$ в правую часть, получится равная нулю комбинация, в которой коэффициент при $\mathbf{e}_j$ будет равен минус единице (то есть он ненулевой).

Перечислим несколько очевидных свойств линейной зависимости. Если набор содержит нулевой вектор, то он заведомо линейно зависим. Если некоторая часть набора векторов линейно зависима, то и весь набор зависим.

Рассмотрим несколько примеров. В каком случае два вектора на плоскости линейно зависимы? Если они параллельны. А три вектора? Всегда, поскольку если два из них параллельны, то уже они зависимы, а если нет, то третий вектор можно по ним разложить (с помощью параллелограмма рис. 1). В каком случае три вектора в пространстве линейно зависимы? Если они лежат в одной плоскости. А четыре вектора? Всегда, поскольку если три из них лежат в одной плоскости, то уже они зависимы, а если нет, то четвёртый вектор можно по ним разложить с помощью параллелепипеда.

Следующее важное понятие – базис. Набор векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$называется базисом, если, во первых, он линейно независим, и, во вторых, любой вектор из нашего пространства $\mathbf{x}$можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \qquad (3)$$

Из рассмотренных выше примеров ясно, что базисом на плоскости являются любые два непараллельных вектора, а в пространстве – любые три вектора, не лежащие в одной плоскости. Возникает подозрение, что и в общем случае в любом векторном пространстве любой базис имеет одинаковое количество элементов. Этот факт мы выведем из следующей важной теоремы.

Основная теорема линейной алгебры. Если в линейном пространстве имеется базис из nэлементов, то любой набор из n + 1 вектора будет линейно зависим.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n. Напоминаем, что такое метод индукции. Если нам нужно доказать, что утверждение верно при любом натуральном n, мы доказываем, что оно верно при n = 1 (база индукции), а далее показываем, что если это утверждение верно при nто оно верно при n + 1 (индукционный переход). На самом деле принцип индукции – одна из аксиом натуральных чисел (аксиомы Пеано) – см. приложение 1.

При n = 1 базис состоит из одного вектора $\mathbf{e}_1$ (а пространство представляет собой прямую). Если у нас имеется набор из двух векторов $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, то $\mathbf{g}_1 = g_{11}\mathbf{e}_1 \mathbf{g}_2 = g_{12}\mathbf{e}_1$, причём коэффициенты g_{11}и g_{12} можем считать ненулевыми (иначе один из векторов нулевой и набор линейно зависим в силу этого). Тогда имеем $g_{11}\mathbf{g}_2 – g_{12}\mathbf{g}_1 = 0$.

Теперь индукционный переход. Предположим, что при n наше утверждение верно. Пусть в пространстве имеется базис из $n + 1$ элемента $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$. Нам надо доказать, что набор из $n + 2$ векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{n+2}$ линейно зависим. Считаем, что среди этого набора нет нулевого вектора (иначе он заведомо линейно зависим). Поэтому среди коэффициентов разложения вектора $\mathbf{g}_1$ по базису есть ненулевые коэффициенты. Пусть это коэффициент g_{11}(в противном случае можно просто перенумеровать элементы базиса по другому). Рассмотрим систему векторов:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{g}_2 - \frac{g_{12}}{g_{11}}\mathbf{g}_1; \mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_3 - \frac{g_{13}}{g_{11}}\mathbf{g}_1; \ldots; \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{g}_{n+2} - \frac{g_{12}}{g_{11}}\mathbf{g}_1 \quad (4)$$

Система (4) состоит из $n + 1$ вектора, каждый из которых выражается через вектора $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ (мы как бы «отщепили» базисный вектор $\mathbf{e}_1$ с помощью вектора $\mathbf{g}_1$). Но множество всех линейных комбинаций векторов $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$ (это называется линейная оболочка векторов) образует линейное пространство с базисом из nэлементов (это так называемое подпространство исходного пространства – см. ниже). По индукционному предположению любой набор из $n + 1$ вектора линейно зависим, в том числе вектора$\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n+1}$. Следовательно, существует их линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами равная нулю. Подставляя в неё значения (4), получим линейную комбинацию векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{n+2}$ равную нулю. Теорема доказана.

Следствие из основной теоремы: в любом базисе одинаковое количество элементов. Действительно, если в одном базисе элементов меньше, то другой базис по основной теореме линейно зависим, а значит, не может быть базисом. Таким образом, количество элементов базиса является характеристикой пространства, а не данного конкретного базиса. Это количество называется размерностью пространства и обозначается $\dim\mathbf{E}$ (от английского «dimension»).

Коэффициенты x_i из соотношения (3) называются координатами вектора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Докажем, что они единственны. В самом деле, если бы один и тот же вектор имел два различных разложения по базису, то их разность равнялась бы нулю. Но эта разность является линейной комбинацией векторов базиса, который по определению линейно независим. Отметим, что в разных базисах один и тот же вектор имеет разные координаты (ниже мы рассмотрим вопрос о том, как выразить координаты вектора в одном базисе через координаты в другом). Если базис фиксирован, то вектор удобнее записывать не в виде (3), а в виде вектора-столбца:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Сложение и умножение на число для таких столбцов производится покомпонентно. Базисные вектора в такой записи выглядят так:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Пространство векторов-столбцов называется n-мерным действительным пространством и обозначается R^n (R от слова real).

3. Подпространство. Пересечение, сумма и прямая сумма подпространств

Подпространство – это подмножество векторного пространства, которое само по себе является пространством. Это значит, что сумма векторов, принадлежащих подпространству, также ему принадлежит, а также если вектор, принадлежащий подпространству, умножить на любое число, то результат также будет ему принадлежать.

Какие бывают подпространства? Во-первых, имеются два так называемые несобственные подпространства – множество, состоящее из одного нулевого вектора и всё пространство. Они малоинтересны. Прикинем, какие могут быть собственные подпространства у плоскости. Если подпространство содержит ненулевой вектор, то, умножая его на все возможные числа, получим все вектора, параллельные исходному. Поскольку сумма двух таких векторов тоже параллельна исходному, то это будет подпространство. Будем называть его для краткости прямая (хотя развёрнутое название – множество всех векторов, параллельных заданной прямой). Других собственных подпространств на плоскости нет, так как, добавив к прямой непараллельный ей вектор, мы немедленно получим всю плоскость (любой вектор плоскости можно разложить по двум непараллельным прямым). В трёхмерном пространстве собственные подпространства это прямые и плоскости. В четырёхмерном добавятся трёхмерные гиперплоскости и т. д.

Если в пространстве $\mathbf{E}$ имеются два подпространства $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, то можно рассмотреть их пересечение $\mathbf{F}\cap\mathbf{G}$. Нетрудно понять, что оно тоже будет подпространством. Пересечение двух прямых или плоскости и непараллельной ей прямой будет нулевым подпространством, а вот пересечение двух непараллельных плоскостей будет прямой.

Кроме пересечения можно рассмотреть сумму подпространств. Сумма подпространств $\mathbf{F}+\mathbf{G}$– это множество сумм векторов $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, где первый вектор $\mathbf{f}$ принадлежит $\mathbf{F}$, а второй $\mathbf{g}$ принадлежит $\mathbf{G}$. Сумма двух прямых даст плоскость, сумма плоскости и не принадлежащей ей прямой – трёхмерное пространство. Сумма называется прямой (обозначается $\mathbf{F}\dotplus\mathbf{G}$), если представление каждого элемента суммы в виде $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ единственно.

Теорема о прямой сумме. Сумма подпространств является прямой тогда и только тогда, когда пересечение этих подпространств состоит только из нулевого вектора.

Доказательство. Предположим сумма непрямая. Тогда один и тот же элемент имеет два различных разложения $\mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{f}^* + \mathbf{g}^*$. Переносим слагаемые $\mathbf{f} - \mathbf{f}^* = \mathbf{g}^* - \mathbf{g}$. Этот вектор принадлежит одновременно и $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, то есть он принадлежит их пересечению, и он ненулевой. В обратную сторону: пусть пересечение ненулевое, и $\mathbf{h}$– ненулевой вектор из пересечения. Тогда элемент суммы имеет различные разложения: $\mathbf{f} + \mathbf{g} = (\mathbf{f} + \mathbf{h}) + (\mathbf{g} - \mathbf{h})$.

Как подсчитать размерность суммы? В случае двух прямых и прямой и плоскости размерность суммы равнялась сумме размерностей, но пересечение было нульмерным, в случае двух плоскостей размерность суммы на единицу меньше суммы размерностей, но пересечение было одномерным. Это подводит нас к следующему соотношению.

Теорема о размерности суммы:

$$\dim\mathbf{F}+\mathbf{G} = \dim\mathbf{F} + \dim\mathbf{G} - \dim\mathbf{F}\cap\mathbf{G}.$$

Доказательство. Обозначим k = dim$\mathbf{F}\cap\mathbf{G}$, l = dim$\mathbf{F}$, m = dim$\mathbf{G}$. Мы должны доказать что dim$\mathbf{F}+\mathbf{G}$ = $l + m - k$. Пусть $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, …,$\mathbf{h}_k$– базис в $\mathbf{F}\cap\mathbf{G}$. Дополним его до базиса в **F,** добавив вектора $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, …, $\mathbf{f}_{l-k}$. Далее, дополним его до базиса в **G,** добавив вектора $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, …, $\mathbf{g}_{m-k}$. Рассмотрим набор $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f}_{l-k}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \ldots, \mathbf{g}_{m-k}\}$. Покажем, что он является базисом в **F**+**G**. Поскольку наборы $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f}_{l-k}\}$ и $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \ldots, \mathbf{g}_{m-k}\}$ являются базисами в **F** и **G** соответственно, любой вектор из **F**+**G** представляется в виде линейной комбинации этого набора. Осталось показать, что этот набор линейно независим. Предположим обратное – есть линейная комбинация этих векторов, равная нулю. Перенесём в другую сторону члены с $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, …, $\mathbf{g}_{m-k}$. В одной стороне будет вектор, принадлежащий **F** (комбинация векторов $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f}_{l-k}\}$), а в другой вектор, не принадлежащий **F** (комбинация векторов $\{\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \ldots, \mathbf{g}_{m-k}\}$). Следовательно, обе части равны нулю. Но это противоречит тому, что $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f}_{l-k}\}$ является базисом. Таким образом, $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f}_{l-k}, \mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \ldots, \mathbf{g}_{m-k}\}$ является базисом в **F**+**G**, и в этом базисе имеется $l + m - k$ элементов. Теорема доказана.

4. Линейные операторы и их запись в виде матриц

Простейшие действия над матрицами

Введём понятие линейного оператора. По сути, оператор – это функция, у которой и аргумент и значение – вектора. Только терминология другая: для чисел мы пишем $y = f(x)$ и говорим, что значение функции в точке x равно y; а для векторов мы пишем $\mathbf{y} = \mathbf{Fx}$ и говорим, что вектор **y** есть результат действия оператора **F** на вектор **x**. Причём операторы мы будем рассматривать только линейные, аналоги простейшей линейной функции $y = ax$, удовлетворяющей функциональному уравнению $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Кстати, вопрос о том, существуют ли у этого уравнения нелинейные решения, является сложнейшим; такие решения могут быть построены только с использованием континуального варианта аксиомы выбора (см. [1], тема 81).

Определение. Оператор **A** называется линейным, если выполнены два условия.

1. Для любых векторов **x** и **y** выполнено $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$
2. Для любого вектора **x** и числа α выполнено $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{Ax}$

Заметим, что из первого свойства следует, что линейный оператор всегда переводит нулевой вектор в нулевой $\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{A0}$.

Как записать оператор? Пусть **A** действует из пространства **E** размерностью n в пространство **F**, размерностью m: **x** принадлежит **E**, **Ax** принадлежит **F** (n и m могут быть одинаковыми, а могут и нет). Пусть фиксированы базисы:$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в пространстве **E** и $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ в пространстве **F**. Распишем действие оператора А на произвольный вектор **x** (3), пользуясь свойствами линейного оператора:

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{A}\mathbf{e}_i$$

Разложим вектора $\mathbf{Ae}_i$ по базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$:

$$\mathbf{Ae}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{f}_j \tag{7}$$

Здесь a_{ji} – некоторые коэффициенты, которые естественно маркировать двумя индексами: j и i. При этом порядок, в котором они стоят, вообще-то может быть любым, но по давней математической традиции первым пишут j, а вторым i. Тогда имеем:

$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right)\mathbf{f}_j \tag{8}$$

Коэффициенты a_{ji} естественно записывать в виде прямоугольной таблицы, которая называется матрицей оператора **A**. Первый индекс a_{ji} – номер строки, второй – номер столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Видно, что количество столбцов матрицы равно размерности пространства, из которого действует оператор, а количество строк – размерности пространства, в которое действует оператор. Опять-таки подчеркнём, что матрица, в отличие от оператора, зависит от выбора базисов в пространствах **E** и **F**. Ниже мы покажем, как меняется матрица оператора при смене базисов.

В терминах матрицы и вектора-столбца правило (8) можно просто проинтерпретировать. Чтобы получить j-тую компоненту вектора **Ax**, нужно взять j-тую строчку матрицы A и последовательно умножать элементы строки на элементы вектора-столбца и результаты сложить:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2+3*0-5*1-7*4 \\ 2*2-4*0+6*1-8*4 \\ 4*2+3*0+2*1+1*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ -22 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Это называется правило строка на столбец. Разумеется, количество элементов в векторе, на который действуют, должно равняться количеству столбцов в матрице, а количество элементов в получившемся векторе равно количеству строчек. Вопрос «на засыпку»: а если бы математики договорились в формуле (7) ставить наоборот сначала i, а потом j, какое правило бы было? Ответ: столбец на столбец.

Заметим, что если мы подействуем матрицей на базисные вектора (6), мы получим вектора – столбцы матрицы. Так что столбцы матрицы – образы базисных векторов. Используя этот факт, попробуем написать матрицу поворота плоскости на угол φ против часовой стрелки – см. рис. 2.

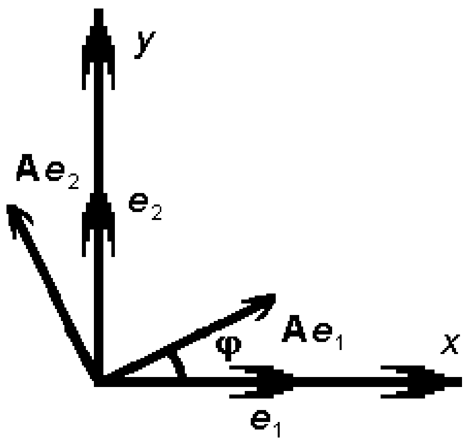

Рисунок 2. Поворот плоскости на угол φ против часовой стрелки.

Образ первого базисного вектора – вектор единичной длины, повёрнутый на угол φ относительно оси x. Его координаты (cosφ,sinφ). Образ второго повёрнут на угол φ относительно оси y. Его координаты (–sinφ, cosφ). Итого получаем матрицу поворота:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ещё пример – единичная матрица. Это матрица тождественного оператора, который каждый вектор переводит в себя: $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$. Взглянув на формулы (6), сразу напишем (разумеется, матрица квадратная):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Операторы, подобно векторам можно складывать и умножать на число: $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha\mathbf{Ax}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx}$. При этом их матрицы умножаются и складываются покомпонентно (разумеется, можно складывать матрицы только одинакового размера!). Таким образом, набор всех матриц размера m на n (m строк n столбцов), который обозначается $\Lambda^{m,n}$, представляет из себя векторное пространство размерности mn (в качестве естественного базиса можно рассмотреть матрицы, у которых один элемент единица, а остальные нули).

5. Композиция операторов и произведение матриц

Коммутатор

Композиция операторов определяется так $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$. То есть мы сначала подействуем на вектор $\mathbf{x}$ оператором $\mathbf{B}$, а на результат подействовать оператором $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{B}$ действует из пространства $\mathbf{E}$ размерностью n в пространство $\mathbf{F}$, размерностью m; а $\mathbf{A}$ действует из пространства $\mathbf{F}$ размерностью m (иначе композиция невозможна) в пространство $\mathbf{G}$, размерностью l:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{F} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{G}$$

Тогда композиция операторов $\mathbf{AB}$ будет линейным оператором, действующим из пространства $\mathbf{E}$ в пространство $\mathbf{G}$.

Пусть во всех пространствах зафиксированы некоторые базисы. Тогда можно записать матрицы операторов $\mathbf{B}$ (размером m на n) и $\mathbf{A}$ (размером l на m). Отметим, что количество столбцов матрицы $\mathbf{A}$ обязательно должно совпадать с количеством строк матрицы $\mathbf{B}$. Как по матрицам операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ построить матрицу оператора $\mathbf{AB}$? Это легко понять: мы помним, что столбцы матрицы – образы базисных векторов. Для того, чтобы получить i-тый столбец матрицы **AB**, нужно взять i-тый столбец матрицы **B** (образ базисного вектора пространства **E** в пространстве **F**), и подействовать на него матрицей **A**. Так что у нас опять получается правило строка на столбец: чтобы найти элемент, стоящий в j-той строчке иi-том столбце матрицы **AB**, нужно взять j-тую строчку матрицы **A** и i-тый столбец матрицы **B** (мы помним, что количество элементов в них одинаково!), перемножить соответствующие элементы и сложить. При этом итоговая матрица будет иметь столько же сточек, как и матрица **A**, и столько же столбцов, как и матрица **B**, как и должно быть. В качестве примера попробуем перемножить две матрицы поворота плоскости – на угол φ и на угол ψ:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Как и следовало ожидать, получилась матрица поворота на угол φ + ψ (кстати, это простейший способ быстро получить формулы для синуса и косинуса суммы, если вы их забыли).

Перечислим свойства композиции операторов (= перемножения матриц):

1) Ассоциативность (**AB**)**C** = **A**(**BC**) – очевидна, поскольку в обеих случаях мы на вектор действуем сперва оператором **C**, потом **B**, потом **A**.
2) Композиция с тождественным оператором не меняетоператор: **AI** = **IA** = **A**.

Пока всё очень напоминает аксиомы группы, однако вопрос о существовании обратной матрицы мы пока отложим. Ниже мы увидим, что обратная матрица существует не всегда.

3) Дистрибутивность: (α_1**A**$_1$ + α_2**A**$_2$)**B** = α_1**A**$_1$**B** + α_2**A**$_2$**B**(и то же по второму сомножителю).

А вот о коммутативности (**AB** = **BA**)умножения матриц не приходится даже говорить. Во первых, произведение в одном порядке может существовать, а в другом нет. Если **A**матрица 2 на 1, а **B**матрица 3 на 2, то **BA**существует (размер 3 на 1), а **AB** нет. Во вторых, произведения в обеих порядках могут существовать, но отличаться размером. Если **A**размером 3 на 2, а **B**размером 2 на 3, то **AB** имеет размер 3 на 3, а **BA**– 2 на 2. Но даже в том случае, когда матрицы **A**и **B** квадратные одинакового размера (только в этом случае **AB** и **BA**будут иметь одинаковый размер) они, вообще говоря, не совпадают. Проиллюстрируем это простым примером:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы легко проинтерпретировать геометрически: матрица **A**,действуя на вектор, меняет знак второй компоненты вектора. Геометрически это означает зеркальное отражение от оси $0x$. Матрица **B** меняет координаты вектора местами. Геометрически это означает отражение от биссектрисы первого координатного угла. Со школы вы должны знать, что зеркальные отражения коммутируют только тогда, когда их оси перпендикулярны. Кстати вышеприведённые матрицы **A**, **B** и **BA** (если последнюю умножить на мнимую единицуi) представляют из себя матрицы Паули, которые используются в квантовой механике для описания частицы с полуцелым спином (например, электрона).

Поскольку квадратную матрицу можно умножать саму на себя, её можно возводить в степень. Следовательно, можно рассматривать многочлен от матричного аргумента (его значение тоже матрица). Попробуйте вычислить следующий многочлен:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + (ad - bc)\mathbf{I} = ? \qquad (10)$$

Правильный ответ – нулевая матрица. Формула (10) – частный случай так называемого тождества Кэли, о котором мы поговорим ниже.

Для квадратных матриц одинакового размера можно ввести коммутатор, который показывает, насколько отличаются **AB** и **BA**: [**A**, **B**]= **AB** – **BA**. Для рассмотренных выше матриц:

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

Перечислим свойства коммутатора:

1) Линейность: $[\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2, \mathbf{B}] = \alpha_1[\mathbf{A}_1,\mathbf{B}] + \alpha_2[\mathbf{A}_2,\mathbf{B}]$ – прямое следствие дистрибутивности умножения.
2) Антисимметричность: $[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$– очевидна.
3) ТождествоЯкоби: $[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}] + [[\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}] + [[\mathbf{C}, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = \mathbf{0}$. Здесь в каждом последующем слагаемом сомножители циклически переставляются, а под **0** понимается матрица, все элементы которой нули. Докажите его сами, расписав все коммутаторы. Должно получиться 12 слагаемых, 6 с плюсом, 6 с минусом, и все они сократятся.

Множество, на котором введена операция, обладающая этими свойствами, называется алгеброй Ли (в честь шведского математика Софуса Ли). Алгебра Ли – одно из фундаментальных понятий математики, мы с нею ниже ещё столкнёмся.

Любая ли матрица может быть коммутатором двух других (необязательный материал)? Для выяснения этого вопроса подсчитаем сумму диагональных элементов коммутатора. Она представляет собой важную характеристику матрицы (ниже увидим почему) и называется следом матрицы (обозначается либо Tr**A**от английского «trace», либо Sp**A** от немецкого «spur»). Отметим, что в формуле (10) коэффициент при первой степени **A** равен взятому с минусом следу матрицы – это неслучайно.

$$(\mathbf{AB})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\,;\,\mathrm{Tr}\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji};$$

$$(\mathbf{BA})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}\,;\,\mathrm{Tr}\mathbf{BA} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}$$

Видно, что получились одинаковые выражения (они различаются только порядком суммирования), так что при вычитании получим $\mathrm{Tr}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$. Так что коммутатор не может быть равен, например, единичной матрице. Можно показать, что любая матрица с нулевым следом может быть представлена в виде коммутатора, но это уже довольно сложная задача (см. [2], задача 980).

А вот в бесконечномерном случае всё не так. Рассмотрим, например, линейное пространство аналитических на каком-нибудь множестве функций. Аналитических – значит представимых в виде сходящегося ряда Тейлора:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$$

Это пространство бесконечномерно, в качестве базиса естественно взять степени x: $\{1, x, x^2, x^3,\dots\}$. Рассмотрим два линейных оператора: оператор умножения на x и оператор дифференцирования d/dx. Подействуем на функцию ихкоммутатором: $[d/dx,\ x]f(x) = d(xf(x))/dx–xdf/dx = f(x) + xdf/dx–xdf/dx = f(x)$. Видно, что мы получили единичный оператор. Можно записать и в виде бесконечных матриц:

$$x=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\dots\\1&0&0&0&\dots\\0&1&0&0&\dots\\0&0&1&0&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix};\ \frac{d}{dx}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots\\0&0&2&0&\dots\\0&0&0&3&\dots\\0&0&0&0&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}$$

$$x\frac{d}{dx}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\dots\\0&1&0&0&\dots\\0&0&2&0&\dots\\0&0&0&3&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix};\ \frac{d}{dx}x=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\dots\\0&2&0&0&\dots\\0&0&3&0&\dots\\0&0&0&4&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}$$

Видно, что при вычитании получим единицы по диагонали.

Рассказывается это здесь потому, что это имеет прямое отношение к квантовой механике. В обычной механике состояние частицы – это точка в фазовом пространстве (координаты и импульс) а наблюдаемая величина (например, энергия) – функция на фазовом пространстве (энергия может быть выражена через координаты и компоненты импульса). В квантовой механике состояние частицы – функция на фазовом пространстве (комплексная пси-функция, квадрат модуля которой имеет смысл плотности вероятности нахождения частицы в данном состоянии), а наблюдаемые величины – операторы на бесконечномерном пространстве таких функций. Собственные числа этих операторов (см. ниже раздел 14) – возможные значения этих величин. В уравнения движения входит коммутатор с оператором энергии. При этом если операторы двух величин коммутируют, то значения этих величин можно одновременно измерить с любой степенью точности. А вот если они не коммутируют, как в рассмотренном выше примере (это операторы координаты xи оператор соответствующей компоненты импульса $p_x = \hbar/i d/dx$, где i – мнимая единица, а $\hbar$– постоянная Планка), то у частицы не существуют одновременно точные значения этих двух величин – произведение неопределённостей этих величин не может быть меньше постоянной Планка $\hbar$. Подробности – в любом учебнике квантовой механики.

6. Определитель (детерминант) – геометрический смысл и вытекающие из него свойства

Для начала рассмотрим матрицу 2х2. Она отображает вектора на плоскости в вектора на плоскости. Если договорится прикладывать вектора к началу координат, то вектор задаётся точкой своего конца. Так что можно сказать, что оператор отображает точки на плоскости в точки на плоскости. Следовательно, он переводит фигуры на плоскости в фигуры на плоскости. Главная характеристика фигуры на плоскости – площадь. Можно задаться вопросом: как меняется площадь фигуры при данном отображении? Отметим, что в силу линейности отображения, площадь любой фигуры меняется в одно и то же количество раз. Действительно, площадь фигуры измеряется замощением её квадратами (с последующим устремлением стороны квадратов к нулю). Если мы изменим размер квадрата, то, в силу линейности, размер его образа изменится в такое же количество раз. Далее, если мы сдвинем квадрат на какой то вектор, то его образ сдвинется на образ этого вектора. Поэтому любой квадрат любого размера, находящийся в любом месте плоскости изменит свою площадь в одно и то же количество раз. Следовательно, площадь любой фигуры меняется в одно и то же количество раз.

Самая простая фигура – единичный квадрат с вершиной в начале координат (см. рис. 3). Единичные вектора перейдут в какие-то вектора, являющиеся столбцами матрицы оператора **A**. Единичный квадрат перейдёт в параллелепипед, опирающийся на вектора-столбцы матрицы **A**. Вспомним школьную формулу для площади параллелограмма: $S = l_1 l_2 \sin\varphi$, где l_1 и l_2 – длины сторон, φ – угол между ними. Пусть φ_1 – угол, образуемый вектором первого столбца матрицы **A** с осью $0x$, φ_2 – вторым. Тогда для площади параллелограмма имеем:

$$S = l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = l_1 l_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) =$$

$$= l_1 l_2 \left(\frac{a_{22}}{l_2}\frac{a_{11}}{l_1} - \frac{a_{12}}{l_2}\frac{a_{21}}{l_1}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (11)$$

Мы использовали формулу синуса разности, а также определение тригонометрических функций: косинус угла, образуемого вектором с осью $0x$ – это отношение его первой компоненты к его длине, а синус – второй компоненты.

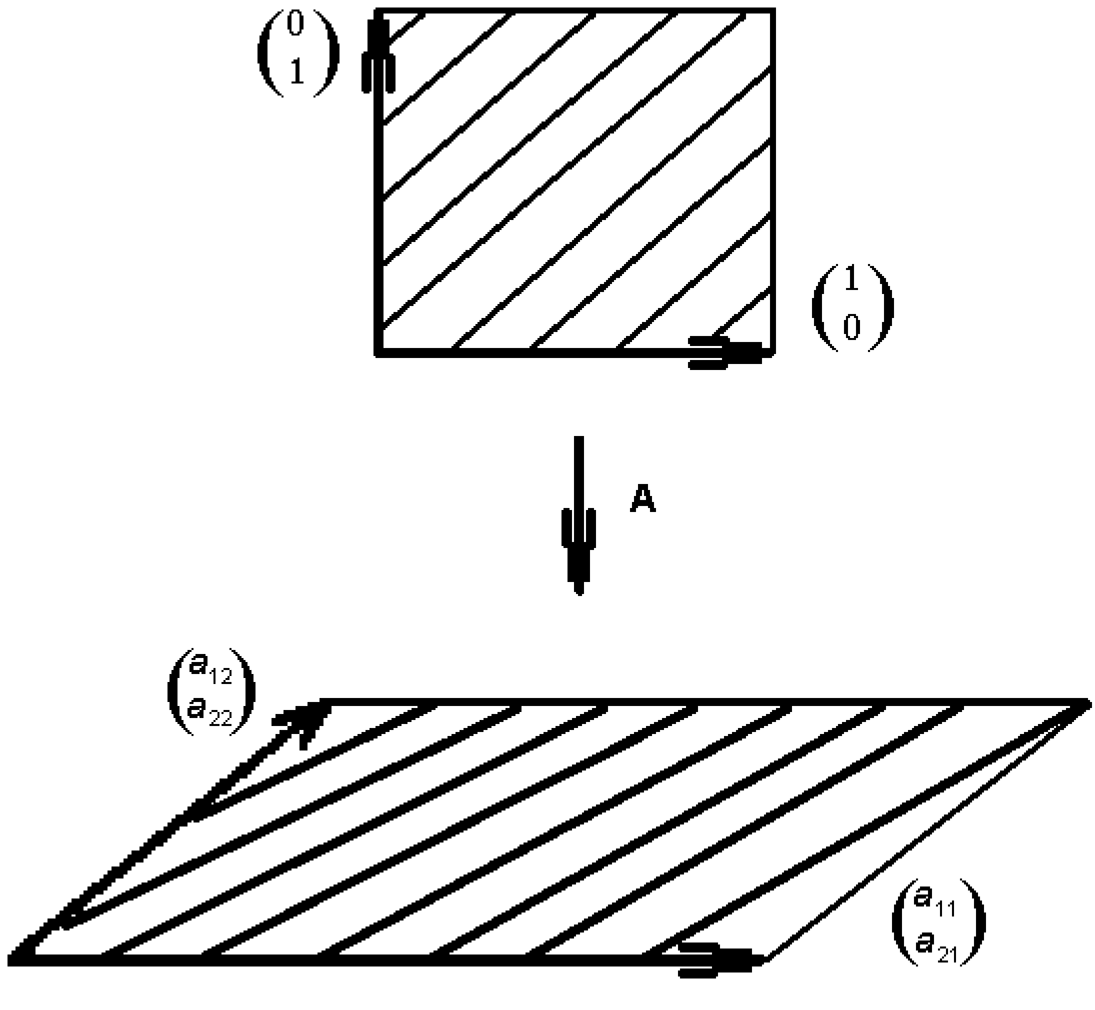

Рисунок 3. Отображение единичного квадрата матрицей 2x2.

Выражение (11) и называется определителем (или детерминантом, если использовать латинский термин) матрицы 2x2 и обозначается det**A**. Он и показывает, во сколько раз меняется площадь при действии соответствующего оператора. Запомнить формулу (11) можно так (см. рис. 4): умножаем крест-накрест, первое произведение с плюсом, второе с минусом. Отметим, что в формуле (10) при единичной матрице стоит определитель – опять-таки, неслучайно.

Однако возникает вопрос: ведь выражение (11)может оказаться отрицательным. Что это означает – ведь площадь отрицательной быть не может? Дело в том, что при проведении выкладки (11) мы считали, что верхний вектор рис. 3 переходит в верхний, а нижний в нижний. Однако, могло ведь получиться наоборот! Тогда надо было бы брать разность $\varphi_1 - \varphi_2$, и знак выражения (11) был бы другим.

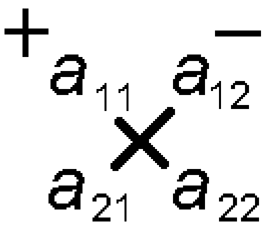

Рисунок 4. Способ запомнить соотношение (11) для определителя матрицы 2x2.

Чтобы сформулировать это точно, введём понятие ориентации базиса. Именно, базис ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) называется положительно ориентированным, если при вращении первого вектора $\mathbf{e}_1$ ко второму $\mathbf{e}_2$ в сторону наименьшего угла, вращение идёт против часовой стрелки, и отрицательно ориентированным, если по часовой. Так вот, если определитель положителен, то при действии оператора ориентации базисов не изменятся (правое останется правым, левое – левым). Если же определитель отрицательный, то ориентация базисов поменяются (правое станет левым, левое правым). Пример – матрица отражения от начала координат:

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = 1$$

Определитель равен единице, поэтому ориентация не меняется (площади тоже). Всё правильно: вас учили, что симметрия относительно точки на плоскости равносильна повороту на 180^0 относительно этой точки. Определитель матрицы поворота (9) также равен 1.

Отметим, что есть и другая система обозначений определителя: detне пишется, а матрица пишется не в круглых скобках, а в прямых вертикальных чертах, наподобие знака модуля.

Переходим к матрицам 3x3. Соответствующий оператор отображает трёхмерное пространство в трёхмерное. Здесь естественно задаться вопросом об изменении объёма. А как определить ориентацию базиса? Для этого можно использовать известное вам из школы (когда проходили магнитное поле контура с током) правило правого винта (буравчика). Именно, базис ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) называется положительно ориентированным, если при вращении первого вектора $\mathbf{e}_1$ ко второму $\mathbf{e}_2$ в сторону наименьшего угла, вектор $\mathbf{e}_3$ направлен по правому винту. Итак, определитель матрицы 3x3 по модулю показывает, во сколько раз меняется объём, а знак показывает, меняется ориентация базиса или нет.

Переходим к общему случаю матриц nxn. Нам необходимо определить n-мерный объём и ориентацию. Объём определяется аксиоматически. Объём в n-мерном пространстве – это некоторая численная характеристика подмножеств $V(\Omega)$, которая обладает следующими свойствами:

1) Неотрицательность: для любого подмножества $V(\Omega) \geq 0$.
2) σ-аддитивность: для любого конечного или счётного набора непересекающихся подмножеств Ω_nимеем $V(\cup\Omega_n) = \Sigma V(\Omega_n)$ (объём объединения равен сумме объёмов частей). Просто аддитивностью называется то же самое, но только для конечных наборов (её недостаточно – см. [1], тема 81).
3) Инвариантность: при параллельном переносе объём не меняется.
4) Нормировка: объём единичного куба равен единице. Под единичным кубом подразумевается совокупность векторов, у которых каждая координата лежит между нулём и единицей.

В случае $n = 1$ получим обычную длину на прямой, при $n = 2$ – площадь, при $n = 3$ – обычный трёхмерный объём. Не будем здесь обсуждать очень тонкий и сложный вопрос о том, любое ли подмножество n-мерного пространства имеет объём – см. [1], тема 81.

Теперь обсудим ориентацию. Отметим такой факт: если мы захотим непрерывно продеформировать один базис в другой так, чтобы он всё время оставался базисом (на учёном языке такие деформации называют гомотопиями, они играют большую роль в топологии), это возможно, только если базисы были одинаково ориентированы. В самом деле, если мы возьмём на плоскости два различно ориентированных базиса, и начнём один деформировать в другой, вектора в какой-то момент обязательно станут параллельны. В пространстве же в аналогичной ситуации вектора станут лежать в одной плоскости. Поэтому знак определителя матрицы nхn определяется так: он положителен, если образ базиса можно непрерывно продеформировать в исходный базис, так, что он будет всё время оставаться базисом, и отрицателен если нет. В приложении 2 рассмотрен вопрос о том, существуют ли в природе фундаментальные отличия правого и левого.

Поговорим теперь о свойствах определителя. Мы будем опираться на наглядный случай двух и трёх измерений.

1) Линейность по столбцам:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\beta\widetilde{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \alpha a_{21}+\beta\widetilde{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{n1}+\beta\widetilde{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \beta\det\begin{pmatrix} \widetilde{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \widetilde{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

И то же самое по любому другому столбцу. Поясним это свойство на примере плоскости. Здесь определитель – это площадь параллелограмма (со знаком плюс или минус). Вспомним, что площадь параллелограмма равна основание на высоту. А высота – это проекция вектора на ось, перпендикулярную основанию. Если вектор представляет собой сумму векторов, то его проекция равняется либо сумме проекций, если оба базиса были одинаково ориентированы, либо разности, если неодинаково. Далее, если один из векторов параллелограмма умножить на число, то его проекция умножится на это же число. А если число будет отрицательно, поменяется ориентация базиса. То же верно и для параллелепипеда (в трёхмерном случае).

2) Антисимметричность по столбцам: при перемене двух столбцов местами меняется знак определителя. Опять же понятно: параллелограмм (параллелепипед) не меняется, а ориентация базиса меняется.
3) Нормировка: определитель единичной матрицы равен единице $\det\mathbf{I} = 1$. Свойство очевидно – единичный оператор ничего не меняет.

   Как мы увидим в следующем пункте, эти три свойства являются определяющими – они однозначно задают определитель. Но мы здесь приведём ещё несколько полезных свойств.
4) Определитель произведения матриц равен произведению определителей $\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$. Свойство понятно – если первая матрица изменила объёмы в debt раз, а вторая в $\det\mathbf{A}$ раз, то если мы подействуем ими обеими, объём изменится в $\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ раз. С ориентацией тоже всё согласовано.
5) Если у матрицы два одинаковых столбца, то её определитель равен нулю. Если мы поменяем местами два одинаковых столбца, матрица не изменится, а определитель должен поменять знак.
6) Если мы прибавим к любому столбцу любой другой умноженный на любое число, определитель не изменится. Действительно, согласно первому свойству, прибавить к столбцу другой, умноженный на число, это всё равно, что прибавить к определителю умноженный на число определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами, а он равен нулю.

7. Определитель (детерминант) – выражение через элементы матрицы и вытекающие из него свойства

Приступаем к выводу формулы для определителя (пока у нас есть лишь формула для определителя матрицы 2x2). Представим первый столбец следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{n1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Согласно свойству линейности, определитель можно представить так:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В первом столбце единица стоит на i_1-м месте, остальные нули. Аналогично можно разложить все остальные столбцы. В результате получим:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \tag{12}$$

В определителе формулы (12) в каждом столбце одна единица, остальные нули. В первом столбце единица стоит на i_1-м месте, во втором на i_2-м месте, и т. д., в последнем на i_n-м месте. Вопрос «на засыпку»: сколько слагаемых в сумме (12)? Ответ: n^n. Действительно, в первой сумме nслагаемых, во второй каждое разбивается на n слагаемых, всего n^2, в третьей n^3, и т. д., в последней n^n.Однако многие из слагаемых обращаются в ноль. Как мы знаем, определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю. Поэтому, если среди чисел i_jнайдутся два одинаковых, соответствующее слагаемое обнуляется. Поэтому в сумме (12) можно выбросить все слагаемые, где хотя бы два i_j совпадают. Итак, у нас n чисел $i_1, i_2, \dots, i_n$, каждое из которых может принимать значение $1, 2, \dots, n$, и все они различны. Это означает, что числа $i_1, i_2, \dots, i_n$ представляют собой числа $1, 2, \dots, n$, только переставленные в другом порядке, а сумма берётся по всем перестановкам. Далее, матрица в формуле (12) посредством перестановки столбцов (а каждая перестановка меняет знак определителя) может быть превращена в единичную матрицу, определитель которой равен единице. Алгоритм такой: находим столбец, в котором единица стоит на первом месте, и переставляем его с первым столбцом, далее на втором и переставляем со вторым и т. д. Если перестановок потребуется чётное число, то определитель равен единице, нечётное – минус единице. Итого получаем искомую формулу для определителя:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \varepsilon(i_1, i_2, \dots, i_n) \quad (13)$$

Здесь $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ – перестановка чисел 1, 2, …, n, а $\varepsilon(i_1, i_2, \dots, i_n)$ – знак перестановки, принимающий значение + 1, если перестановку можно превратить в тождественную (1, 2, …, n) посредством чётного числа инверсий (инверсия – перестановка двух элементов местами), и значение – 1, если нечётного (подробнее о перестановках [1], тема 29). Вопрос «на засыпку»: а сколько слагаемых в сумме (13)? Ответ: $n! = 1\times2\times3\times\dots\times n$.Докажем это по индукции. Перестановок одного предмета существует одна (база индукции). Индукционный переход: пусть перестановок n предметов существует $n!$. Рассмотрим перестановки $(n + 1)$-го предмета. Последний $(n + 1)$-й предмет может стоять на 1, 2, …, $(n + 1)$-м месте. И для каждого расположения $(n + 1)$-го предмета остальные n предметов могут быть переставлены $n!$ способами. Итого получаем для количества перестановок $(n + 1)$-го предмета $(n + 1)n! = (n + 1)!$. Утверждение доказано. Из них ровно половина $n!/2$ имеет знак + 1 и половина – 1.

В таблице 1 перечислены все перестановки трёх элементов (всего их 3! = 6 штук) с их знаками. С её помощью мы можем записать формулу для определителя матрицы 3x3:

Таблица 1. Все перестановки трёх элементов.

Перестановка	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	(1, 3, 2)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)	(3, 2, 1)
Знак	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} +$$

$$+a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \quad (14)$$

Как запомнить соотношение (14)? Для этого существует мнемоническое правило треугольников – см. рис. 5. Произведения элементов главной диагонали и элементов, стоящих в вершинах двух треугольников,одна из сторон которых параллельна главной диагонали, берутся с плюсом. Произведения элементов другой диагонали и аналогичных треугольников берутся с минусом.

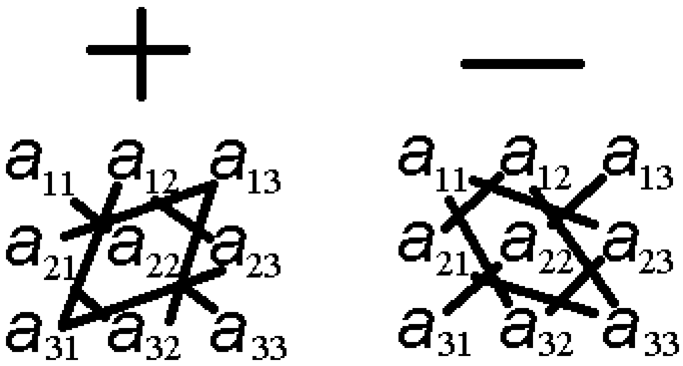

Рисунок 5. Правило треугольника.

Другой вариант правила треугольника представлен на рисунке 6. К матрице приписываются ещё раз два первых столбца и тогда треугольники разворачиваются в прямые.

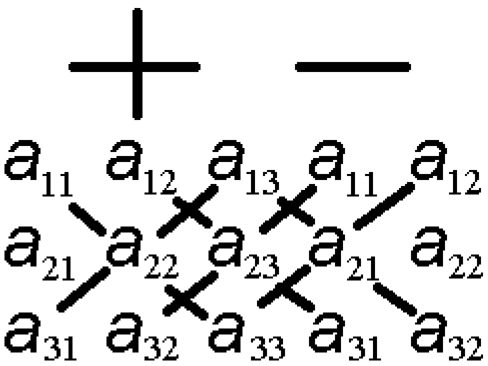

Рисунок 6. Другой вариант правила треугольников.

Например, имеем:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Действительно, в трёхмерном пространстве симметрия относительно точки не может быть сведена к повороту, поскольку меняет ориентацию.

Далее, введём понятие обратной перестановки. Если мы припишем к перестановке (i_1, i_2, …, i_n) тривиальную перестановку (1, 2, …, n) и переставим (i_1, i_2, …, i_n) в порядок (1, 2, …, n), то (1, 2, …, n) превратится в перестановку (j_1, j_2, …, j_n), которая и называется обратной к (i_1, i_2, …, i_n):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Отметим, что знаки у прямой и обратной подстановки очевидно совпадают. Тогда мы можем переписать (13) в виде:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \varepsilon(j_1, j_2, \dots, j_n) \qquad (15)$$

Но (15) – это определитель матрицы, строки которой представляют из себя столбцы исходной (и наоборот). Такая матрица называется транспонированной к исходной и обозначается $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Фактически транспонирование сводится к отражению матрицы относительно главной диагонали:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Только что мы доказали, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Почему это свойство так важно? У нас была куча свойств определителей, связанных со столбцами матрицы. Но при транспонировании они превращаются в строки. Поэтому все эти свойства верны и для строчек.

В завершение рассмотрим вопрос о транспонировании произведения матриц $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$. При перемножении матриц строки первой матрицы **A** умножаются на столбцы второй матрицы **B**. При транспонировании они перейдут в строки матрицы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$и столбцы матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Поэтому $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

8. Разложение определителя по строчке (столбцу)

Мы узнали достаточно много об определителях, однако вычислять умеем пока что только определители матриц 2x2 и 3x3. Для вычисления определителей матриц большего размера используют разложение определителя по строке или столбцу. Посмотрим на формулу (13). Каждое слагаемое представляет собой произведение, в котором имеются ровно по одному элементу из каждой строчки, а также по одному из каждого столбца. Возникает следующая идея: зафиксируем строчку (или столбец) и сгруппируем все элементы суммы (13), содержащие a_{i1}, a_{i2},…,a_{in} и вынесем их за скобку. В скобках стоит сумма произведений, в каждом из которых имеется ровно по одному элементу из каждой строчки и каждого столбца, кроме соответственно i-той строчки и первого столбца, i-той строчки и второго столбца, …, i-той строчки и n-го столбца. Это очень напоминает определитель матрицы с вычеркнутыми строчкой и столбцом.

Несколько определений. Минором элемента a_{ij} (обозначение $\mathbf{M}_{ij}$) называется матрица, получаемая из исходной вычёркиванием i-той строчки и j-того столбца (ниже у нас появится более общее понятие минора). Далее, алгебраическим дополнением элемента a_{ij} (обозначение A_{ij}) называется определитель минора $\mathbf{M}_{ij}$, взятый со знаком плюс или минус, в зависимости от того, чётна или нечётна сумма номера строчки и номера столбца:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det\mathbf{M}_{ij}$$

Замечание об обозначениях: элементы матрицы обозначаются либо маленькими буквами a_{ij}, либо большой буквой взятой в скобки $(\mathbf{A})_{ij}$. Если же стоит большая буква без скобок A_{ij}, то это алгебраическое дополнение.

Теорема. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строчки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Доказательство. Проведём его в два этапа: сначала для элемента последней строчки и столбца, а потом для произвольного элемента.

Первый этап. Соберём в сумме (13) все слагаемые, содержащие a_{nn}. Получим:

$$\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{n-1},n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_{n-1}n-1}a_{nn}\varepsilon(i_1,i_2,\dots,i_{n-1},n) =$$

$$= a_{nn}\left(\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{n-1})} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_{n-1}n-1}a_{nn}\varepsilon(i_1,i_2,\dots,i_{n-1})\right) = a_{nn}A_{nn}$$

Мы использовали тот очевидный факт, что знаки двух перестановок $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, n)$и $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ совпадают, поскольку в первой перестановке последний элемент стоит на своём месте.

Второй этап. Возьмём элемент a_{ij} и начнём переставлять j-тый столбец с $(j + 1)$-м, затем с $(j + 2)$-м, и т. д., пока не окажемся в последнем n-м столбце. Всего будет произведено $n–j$ перестановок. Далее начнём переставлять таким же образом строки, пока, наконец с помощью $n–i$ перестановок не сгоним наш элемент a_{ij} на последнее место. Всего определитель поменял знак $(n–j) + (n–i) = 2n–(i + j)$ раз. Отметим, что его минор при этих операциях не изменится. Поскольку у чисел $2n–(i + j)$ и $i + j$ чётность одинакова, теорема доказана.

На первый взгляд может показаться, что это не очень хороший способ: чтобы вычислить определитель 4x4 нужно подсчитать 4 определителя 3x3. Однако здесь вступает в силу свойство, описанное нами выше. К любой строчке можно прибавить любую другую, умноженную на любое число – определитель от этого не изменится. Идея в том, чтобы с помощью выбранной строчки (столбца) наставить нулей в каком либо столбце (строчке). Если элемент матрицы равен нулю, вычислять его алгебраическое дополнение не надо – оно всё равно на нуль умножится. Поэтому если в какой либо строчке (столбце) все элементы, кроме одного, будут нулевыми, то придётся считать одно единственное алгебраическое дополнение, то есть один определитель на единицу меньшего порядка. Отметим также, что определитель верхнее(нижне) треугольной матрицы, то есть матрицы, у которой под (над) главной диагональю стоят нули, равен произведению диагональных элементов – здесь ничего прибавлять не надо, а последовательно раскладывать по первому (последнему) столбцу.

Рассмотрим пример:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -2 & -1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 2 & 11\\ 3 & -10 & -10 & -10\\ 4 & -5 & -14 & -17\end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix}5 & 2 & 11\\ -10 & -10 & -10\\ -5 & -14 & -17\end{pmatrix} = -10\det\begin{pmatrix}5 & 2 & 11\\ 1 & 1 & 1\\ -5 & -14 & -17\end{pmatrix} =$$

$$= -10\det\begin{pmatrix}5 & -3 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ -5 & -9 & -12\end{pmatrix} = 10\det\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -9 & -12\end{pmatrix} =$$

$$= 10(36 + 54) = 900$$

Здесь мы делали следующее: сперва наставили нулей в первой строчке с помощью первого столбца. Для этого мы вычли из второго, третьего и четвёртого столбца первый, умноженный на соответственно два, три и четыре. После этого мы разложили матрицу по первой строке (1 + 1 = 2 – чётно, поэтому знак не поменялся). Далее в получившейся матрице 3x3 мы вынесли общий множитель из второй строки –10 и наставили нулей во второй строке с помощью первого столбца (вычли из второго и третьего столбца первый). Потом разложили по второй строке (2 + 1 = 3 – нечётно, поэтому знак изменился). Ну и, наконец, подсчитали определитель матрицы 2x2.

Теперь пример посложнее – матрица *n*x*n*:

$$\det\begin{pmatrix}a & b & \dots & b\\ b & a & \dots & b\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b & b & \dots & a\end{pmatrix} = (a + (n-1)b)\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ b & a & \dots & b\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b & b & \dots & a\end{pmatrix} =$$

$$= (a + (n-1)b)\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-b & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a-b\end{pmatrix} =$$

$$= (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Исходная матрица имела по диагонали a а все остальные элементы b. Здесь мы немного схитрили: вначале прибавили к первой строчке все остальные и вынесли получившийся общий множитель. Это дало нам первую строчку из одних единиц. Далее вычитаем из всех строчек первую, умноженную на b. Получаем верхнетреугольную матрицу, определитель которой равен произведению диагональных элементов. Ещё один нетривиальный пример см. [1], тема 1, а также много примеров в [2] (задачи 179 – 334).

В заключение заметим, что, несмотря на всю простоту теории определителей, в ней ещё остались нерешённые вопросы. Так даже такой простой вопрос: каково максимальное значение определителя матрицы nхn, если все её элементы по модулю не превосходят единицу, ещё далеко не решён до конца (см. [1], тема 99).

9. Ядро и образ оператора. Ранг оператора

Теорема о ранге

Пусть оператор **A** действует из пространства **E**, размерностью n, в пространство **F**, размерностью m. Ядром оператора **A** (обозначается Ker**A** от английского «Kernel») называется совокупность векторов, которые этот оператор переводит в нулевой вектор Ker**A** = {**x**: **Ax** = **0**}. Нетрудно заметить, что ядро является подпространством в пространстве **E** (в силу линейности **A**). Далее, образом оператора (обозначается Im**A**, от слова «Image») называется совокупность векторов пространства **F**, в которые переходит при действии **A** какой-либо вектор из **E** (он вовсе не обязательно совпадает со всем пространством **F**!). Опять же нетрудно заметить, что Im**A** является подпространством в пространстве **F**.

Рассмотрим пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Ядром этого оператора является прямая $x_1 = x_2$ (при этом в (16) получится $y_1 = y_2 = 0$), а образом – прямая $y_1 = -y_2$ (именно этому соотношению удовлетворяет вектор (16)).

Рассмотрим вопрос о размерностях наших подпространств. Размерность ядра – это количество размерностей, которые оператор уничтожил (загнал в ноль). Размерность образа, именуемая рангом оператора (обозначается r(**A**) или rank**A**), – это то, сколько размерностей осталось после действия оператора. Резонно предположить, что если мы их сложим, то получим то, сколько размерностей было, то есть размерность пространства **E**.

Теорема.

$$\dim\mathrm{Ker}\mathbf{A} + \mathrm{r}(\mathbf{A}) = \dim\mathbf{E} \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $k = \dim\mathrm{Ker}\mathbf{A}$. Пусть$\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$– базис в Ker**A**. Дополним его до базиса в Евекторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}$. Покажем, что вектора $\mathrm{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_{n-k}$ образуют базис в Im**A**–этим формула будет доказана. Любой вектор из Епредставляется в виде комбинации векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}$, при действии оператора **A**первые kвекторов обнулятся. Поэтому любой вектор из ImA представляется в виде комбинации $\mathrm{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_{n-k}$. Теперь покажем линейную независимость. Если найдётся комбинация этих векторов равная нулю, то аналогичная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}$ должна принадлежать ядру оператора, то есть выражаться через вектора $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$. Но тогда мы получим нулевую комбинацию $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}$, что невозможно, так как это базис в **E**.

Как подсчитать ранг матрицы? Мы знаем, что столбцы матрицы – это образы базисных векторов. Если они все линейно независимы, то ранг будет равен количеству столбцов матрицы (то есть размерности **E**). Но среди них могут оказаться линейно зависимые от остальных – их нужно отбросить. Таким образом, ранг равен максимальному количеству линейно независимых столбцов. Но оказывается, что ранг можно определить и по-другому.

Дадим несколько определений. Во-первых, нам необходимо более общее определение минора (выше об этом упоминалось). Выберем в матрице (она у нас, вообще говоря, прямоугольная) какое-то количество столбцов и такое же количество строк. Элементы, лежащие на пересечении этих строк и столбцов, естественным образом записываются в виде квадратной матрицы. Это и есть минор.

Далее, минор называется невырожденным, если его определитель не равен нулю. Заметим, что определитель равен нулю тогда и только тогда, когда столбцы матрицы линейно зависимы. В самом деле, если столбцы линейно зависимы, то комбинируя столбцы, можем создать нулевой столбец и определитель будет нулевым. Наоборот, если определитель нулевой, то образ оператора не совпадает со всем пространством (объёмы умножаются на ноль), а имеет меньшую размерность. В пространстве, размерности меньше, чем n, любые n векторов обязательно линейно зависимы.

Ну и, наконец, базисным минором называют максимальный по размеру невырожденный минор.

Теорема о ранге. Ранг матрицы равен размеру базисного минора.

Доказательство. Во-первых заметим, что размер базисного минора не может быть больше, чем ранг. Если мы возьмём столбцов матрицы больше, чем её ранг, они будут линейно зависимы. Поэтому опирающийся на эти столбцы минор также будет иметь линейно зависимые столбцы, а значит, будет вырожденным. Теперь надо доказать, что размер базисного минора не может быть меньше ранга. Возьмём линейно независимые столбцы в количестве, равном рангу. Среди них не может быть нулевого вектора. Возьмём первый столбец и выберем строчку, в которой стоит ненулевой элемент (она заведомо есть). Вычитая первый столбец, умноженный на подходящую константу, из других столбцов, добьёмся того, что во всех остальных столбцах в этой строчке будет стоять ноль. Возьмём второй столбец и повторим ту же операцию (строчка заведомо будет другой). И так далее. В силу линейной независимости столбцов нулевого столбца мы ни на каком этапе не получим. В результате мы получим треугольный минор, определитель которого равен произведению диагональных элементов, которые по построению все ненулевые. А поскольку при таких операциях определитель не меняется, то и исходный минор, опирающийся на эти строки будет невырожденным.

Одно из важнейших следствий теоремы о ранге – то, что ранг равен также максимальному линейно независимому количеству строк. В самом деле, транспонируем нашу матрицу. Строки станут столбцами и наоборот. Но мы знаем, что при транспонировании определитель не меняется. Следовательно, базисный минор останется базисным и ранг не изменится. Обращаем внимание на то, что для прямоугольной матрицы столбцы и строки – это вектора из пространств различной размерности, но, тем не менее, максимальные количества линейно независимых строк и столбцов обязательно совпадают.

10. Обратный оператор. Обратная матрица

Пусть оператор **A** действует из пространства **E** размерностью n в пространство **F** размерностью m: $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$. Обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$ действует из **F** в **E**: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Иными словами, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Что необходимо для существования обратного оператора? Во-первых, оператор **A** должен различные вектора переводить в различные. Это достигается тогда и только тогда, когда ядро оператора нулевое, то есть $\dim\mathrm{Ker}\mathbf{A} = 0$. Во-вторых, образ оператора $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ должен совпадать со всем пространством **F**: $\mathrm{Im}\mathbf{A} = \mathbf{F}$, $r(\mathbf{A}) = m$. Вспоминая формулу (16), получим $r(\mathbf{A}) = n$. Итак, мы получили $n = m = r(\mathbf{A})$, то есть **A** – квадратная невырожденная матрица.

Теорема. Элементы обратной матрицы выражаются через алгебраические дополнения:

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det\mathbf{A}} \tag{18}$$

Доказательство. Найдём элемент произведения $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})_{ij} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases}1, i = j\\ 0, i \neq j\end{cases}$$

В самом деле, в случае $i = j$ получим сумму произведений элементов i-того столбца на их алгебраические дополнения (обратите внимание на то, что в выражении (18) индексы в левой и правой частях стоят в разном порядке!), что равно определителю матрицы. В результате определители сокращаются и получается единица. В случае $i \neq j$ элементы j-го столбца умножаются на алгебраические дополнения i-го столбца. Это определитель матрицы, которая получается из исходной заменой элементов i-го столбца на элементы j-го. Но в этой матрице два одинаковых столбца – j-тый и i-тый, определитель такой матрицы равен нулю.

Применяя формулу (18) к матрице 2x2, получим:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{19}$$

Словами: диагональные элементы меняются местами, внедиагональные меняют знак и всё делится на определитель. Однако обратить с помощью (18) хотя бы матрицу 3x3 уже тяжко – придётся посчитать 9 определителей 2x2. На самом деле матрицы обращают посредством метода Гаусса, об этом пойдёт речь ниже.

Свойства обратной матрицы.

1) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det\mathbf{A}$ – очевидно.
2) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Действительно, прямая матрица – сперва **B**, потом **A**; обратная – сперва $\mathbf{A}^{-1}$, потом $\mathbf{B}^{-1}$.
3) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$. Действительно, $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$.

Если мы рассмотрим множество невырожденных матриц nxn, то оно оказывается группой (неабелевой) по умножению. Эта группа называется общей линейной и обозначается GL(n, R) (от слов «general-linear»). Также является группой совокупность матриц с определителем равным единице. Она называется специальной линейной («speciallinear») и обозначается SL(n, R).

11. Системы линейных уравнений

Существование и единственность решения. Формулы Крамера

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{20}$$

Здесь x_1, x_2, …, x_n – неизвестные, a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_1, b_2, …, b_m – правые части. Заметим, что количество уравнений не обязательно совпадает с количеством неизвестных. Уравнение можно записать в векторном виде: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где **A** – матрица коэффициентов системы, **x** – вектор неизвестных, **b** – вектор правых частей. Нас будет интересовать вопрос о существовании и единственности решения системы (20).

1) Единственность решения. Вначале заметим, что решение системы (20) единственно тогда и только тогда, когда однородная система (с нулями в правой части) имеет только нулевое решение. Действительно, если у системы есть два различных решения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{Ax^*} = \mathbf{b}$, то их разность будет решением однородной системы $\mathbf{A}(\mathbf{x}- \mathbf{x^*}) = \mathbf{0}$. Наоборот, если у однородной системы имеется ненулевое решение $\mathbf{Ax_0} = \mathbf{0}$, то наряду с решением $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у системы будет также решение $\mathbf{A}(\mathbf{x}+ \mathbf{x_0}) = \mathbf{b}$. Итак, решение будет единственно, если ядро оператора $\mathbf{A}$ нулевое. Но тогда, согласно формуле (17) ранг оператора $\mathbf{A}$ будет равен размерности $\mathbf{x}$, то есть числу неизвестных. Итак, решение системы (20) будет единственным тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов системы равен числу неизвестных.
2) Существование решения при любой правой части. Для этого образ оператора $\mathbf{A}$ должен совпадать со всем пространством $\mathbf{b}$, то есть ранг оператора (размерность образа) должен быть равен числу уравнений. Итак, решение системы (20) существует при любой правой части если ранг матрицы коэффициентов равен числу уравнений.
3) Единственность и существование при любой правой части. Объединяя результаты первых двух пунктов, получим, что для существования и единственности решения число неизвестных должно равняться числу уравнений (то есть матрица коэффициентов квадратная) и равняться рангу матрицы, то есть матрица должна быть невырожденной (определитель не равен нулю). Но это как раз условие существования обратной матрицы, и решение может быть найдено как $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.Вспоминая выражения для элементов обратной матрицы (18), получаем:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{A}^{-1})_{ij} b_j = \frac{\sum_{j=1}^{m} A_{ji} b_j}{\det\mathbf{A}} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (21)$$

В числителе дроби (21) стоит произведение алгебраических дополнений i-го столбца матрицы коэффициентов системы (20) на элементы вектора правых частей. Но это в аккурат определитель матрицы, которая получится из матрицы коэффициентов, если i-тый столбец в ней заменить на столбец правых частей. Этот определитель обозначается Δ_i (а определитель просто матрицы коэффициентов обозначается Δ). Формулы (21) называются формулами Крамера. Вот пример их применения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}; \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -10; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & -10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} = -25; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = -18; x_1 = -10; x_2 = -25; x_3 = -18$$

4) Существование решения при заданной правой части. Запишем систему (20) по-другому:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Формула (22) гласит, что столбец правых частей выражается через столбцы матрицы и неизвестные являются коэффициентами разложения. То есть, если столбец правых частей линейно зависим от столбцов матрицы, то решение есть, если не зависит, то решения нет. Введём в рассмотрение расширенную матрицу коэффициентов системы – припишем к матрице столбец правых частей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Если решение у системы есть, то последний столбец расширенной матрицы линейно зависит от остальных, а значит его приписывание ранга матрицы не увеличит (ранг равен максимальному количеству линейно независимых столбцов!). Если же решения нет, то последний столбец не зависит от остальных, и его приписывание увеличит ранг матрицы на единицу. Отсюда имеем теорему Кронекера-Капелли: у линейной системы имеется решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.

12. Метод Гаусса: решение систем уравнений, вычисление обратной матрицы, нахождение ранга матрицы

Рассмотрим основной вычислительный алгоритм линейной алгебры – метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Вначале рассмотрим решение систем уравнений. Вначале выбираем неизвестную, которую мы будем исключать и уравнение, с помощью которого мы будем её исключать (разумеется, коэффициент при этой неизвестной в этом уравнении должен быть ненулевой). Затем вычитаем из остальных уравнений это уравнение, умноженное на подходящую константу так, чтобы из всех остальных уравнений эта неизвестная ушла. Получим систему, содержащую на одну неизвестную и одно уравнение меньше. В этой системе делаем то же самое, и т. д., пока у нас не останется всего одно уравнение. Это называется прямой ход метода Гаусса (мы проводили нечто подобное, когда доказывали теорему о ранге). Далее имеем 3 возможности.

1. В оставшемся уравнении одна неизвестная. В этом случае решение системы единственно. Определяем эту неизвестную, подставляем в предыдущее уравнение и находим предыдущую неизвестную, и т. д. Это обратный ход метода Гаусса. В качестве примера рассмотрим систему, которую мы решали выше по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_2 - 5x_3 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + x_3 = 7 \\ -x_3 = 18 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = -25 \\ x_3 = -18 \end{cases}$$

Вначале мы с помощью первого уравнения исключили первую неизвестную из второго и третьего уравнения. Для этого мы ко второму уравнению прибавили первое, а из третьего вычли первое, умноженное на три. Далее мы с помощью второго уравнения исключили из третьего вторую неизвестную, для чего к третьему уравнению прибавили второе, умноженное на четыре. Далее нашли из третьего уравнения третью неизвестную, подставили её во второе уравнение, нашли вторую переменную, подставили вторую и третью неизвестные в первое уравнение и нашли первую неизвестную. Полученный результат проверяем подстановкой.

2. В оставшемся уравнении нет неизвестных. То есть мы получаем невозможное равенство: ноль равен ненулевому числу. Это означает, что у системы решений нет. Пример (действия такие же, как в первом примере):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 = 7 \\ 4x_2 - 8x_3 = -10 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 = 7 \\ 0 = 18 \end{cases}$$

3. В оставшемся уравнении несколько неизвестных. Это означает, что у системы бесконечно много решений. Мы можем выразить из последнего уравнения одну неизвестную через остальные, и, подставляя в оставшиеся уравнения, выразим все неизвестные через них. Пример (действия те же):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_2 - 8x_3 = -4 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 7 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 12 \\ x_2 = 2x_3 - 7 \end{cases}$$

Разберём также следующий полезный пример (необязательный материал). Здесь некоторые коэффициенты будут зависеть от параметров, обозначаемых буквами. Наша задача выяснить, при каких значениях параметров будет единственное решение, много решений и не будет решений:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases} \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (1-a)x_1 + (b-1)x_2 = -1 \\ (1-a)x_1 + (2b-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (1-a)x_1 + (b-1)x_2 = -1 \\ bx_2 = 1 \end{cases}$$

Здесь мы исключили третью неизвестную из второго и третьего уравнения, вычтя из них первое. Затем исключили первую неизвестную, вычтя из третьего уравнения второе. Теперь начинаем рассматривать случаи и подслучаи.

1. $b \neq 0$. Тогда можем найти вторую переменную из третьего уравнениям подставить его во второе:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (1-a)x_1 = -2 - 1/b \\ x_2 = 1/b \end{cases}$$

Теперь рассматриваем подслучаи.

a) $a \neq 1$. Тогда мы можем найти из второго уравнения первую переменную и, подставив в первое уравнение, найти третью переменную:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{-2ab + 2a + 4b - 1}{(1-a)b} \\ x_1 = \dfrac{-2b-1}{(1-a)b} \\ x_2 = 1/b \end{cases}$$

Итак, в этом случае имеем единственное решение.

b) $a = 1$. В этом случае опять будут подслучаи.

1^0. $-2 - 1/b \neq 0$, то есть $b \neq -½$. Тогда опять же решений не будет.

2^0. $b = ½$. В этом случае второе уравнение пропадает и решений будет бесконечно много:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

2. $b = 0$. В этом случае также решений не будет.

Обсудим полученные результаты. Представим себе плоскость параметров a и b. Для всех точек этой плоскости, кроме двух перпендикулярных прямых $a = 1$ и $b = 0$, у системы будет единственное решение. Для всех точек этих прямых, кроме точки $a = 1$, $b = ½$, решений не будет. И только для точки $a = 1$, $b = ½$ решений будет бесконечно много. Говорят, что свойство иметь единственное решение – грубое свойство, (у любой точки, обладающей этим свойством, существует окрестность, состоящая из точек, также обладающих этим свойством), свойство не иметь решений – свойство первой степени негрубости (точки, отвечающие этому свойству образуют множество размерности на единицу меньше, чем всё пространство параметров – это называется множество коразмерности один), а свойство иметь бесконечно много решений – свойство второй степени негрубости (размерность на два меньше – коразмерность два).

Теперь рассмотрим вычисление обратной матрицы. Соотношение $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ можно рассматривать как набор систем уравнений для отдельных столбцов матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Во всех этих системах коэффициенты при неизвестных одинаковы (элементы матрицы **A**), а вот столбцы правых частей разные (различные столбцы матрицы **I**). Поэтому можно решать их всех сразу. Приписываем к матрице **A** матрицу **I** (получаем матрицу nx$2n$), и, оперируя с длинными (длины $2n$) строками (к любой строчке можно прибавлять любую другую, умноженную на любое число, также любую строчку можно умножать на любое число, кроме нуля) добиваемся того, чтобы из матрицы **A** получилась матрица **I**. Тогда рядом автоматически будет стоять матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Метод Гаусса проводится так: вначале добиваемся того, чтобы в первом столбце матрицы **A** на первом местеоказалась единица, а числа под ней нулями. Затем во втором столбце создаём единицу на втором месте и все элементы под ней нулями. И т. д. до последнего столбца в котором единица должна стоять на последнем месте. Это прямой ход метода Гаусса. Затем начинаем наставлять нули над диагональю, сначала в последнем столбце, затем в предпоследнем и т. д. до второго столбца. Пример:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & -19 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Наши действия: вначале вычли из первой строки вторую, чтобы на первом месте стояла единица. За тем из второй строки вычли первую, а к третьей прибавили первую, чтобы создать нули в первом столбце. Далее прибавили ко второй строке третью, чтобы создать единицу во втором столбце второй строки. Далее из третьей строки вычли вторую умноженную на пять, чтобы создать ноль во втором столце третьей строки. Прямой ход закончен, начинаем обратный. Умножаем третью строчку на минус один, чтобы создать единицу в третьем столбце третьей строки. Далее вычитаем из второй строки третью, а из первой – третью, умноженную на три, чтобы создать нули в третьем столбце. Ну и последним вычитаем из первой строки вторую, умноженную на три, чтобы создать ноль во втором столбце первой строчки. Всё, слева стоит единичная матрица, значит справа – обратная. Обязательно проверим результат – перемножим исходную матрицу и полученную обратную – должна получится единичная.

Ну и наконец, для определения ранга матрицы достаточно прогнать только прямой ход метода Гаусса – либо по строчкам, либо по столбцам. Некоторые столбцы (строки) могут обнулится. Сколько останется ненулевых, такой и ранг. Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & -4 & 0 & 7 & 7 \\ 8 & -4 & 5 & 0 & -9 & -9 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь мы вначале наставили нулей в четвёртом столбце с помощью первой строчки. Затем наставили нулей во втором столбце с помощью второй строчки (первую строчку больше не трогаем – она уже заведомо линейно независима от остальных). Затем наставили нулей в пятом столбце с помощью третьей строчки (первую и вторую строчки не трогаем). Ну и наконец, ставим ноль в третьем столбце последней строчки с помощью четвёртой строки. Получилось четыре ненулевые строки (последняя обнулилась). Итого ранг матрицы равен четырём.

В заключение заметим, что метод Гаусса при практическом применении имеет тенденцию очень сильно накапливать ошибки вычислений. Чтобы минимизировать ошибки надо каждый раз обнулять с помощью максимального по модулю числа, но в ряде случаев и это не помогает. Поэтому в современной вычислительной практике (где приходится иметь дело с матрицами с размером, исчисляющимся миллиардами) вместо метода Гаусса для обращения матриц пользуются специальными итерационными алгоритмами, где обратная матрица вычисляется всё точнее и точнее последовательными итерациями некоторого процесса. Простейший пример:

$$\mathbf{B_{n+1}} = \mathbf{B_n}(2\mathbf{I} - \mathbf{AB_n})$$

Видно, что когда $\mathbf{B_n}$ станет равно $\mathbf{A}^{-1}$, члены последовательности перестанут меняться.

13. Изменение координат вектора и матрицы оператора при замене базиса

Рассмотрим вопрос об изменении координат вектора при замене базиса. Пусть в пространстве был базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, и в этом базисе вектор x имел координаты $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Оператор **A** переводит старый базис в новый $\mathbf{Ae_i} = \mathbf{e_i}^*$, в котором тот же вектор x имеет координаты $\{x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n\}$. Имеем:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e_i} = \sum_{j=1}^{n} x^*{}_j \mathbf{e^*{}_j} = \sum_{j=1}^{n} x^*{}_j \mathbf{Ae_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x^*{}_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*{}_j \right) \mathbf{e_i};$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*{}_j$$

где a_{ij} – элементы матрицы оператора **A** в старом базисе. Таким образом, столбец старых координат получается действием матрицы оператора **A** на столбец новых координат. Следовательно, если мы хотим получить новые координаты через старые, необходимо подействовать обратной матрицей $\mathbf{A}^{-1}$. Другими словами, закон преобразования координат обратен закону преобразования базиса.

Теперь пусть оператор действует из пространства **E**, в котором есть старый базис и новый, причём новый получается из старого посредством действия оператора **B**, в пространство **F**, в котором также новый базис получается из старого посредством действия **C**. Матрица нашего оператора в старых базисах **A**. Как найти матрицу этого же оператора в новых базисах$\mathbf{A}^*$? Рассуждаем так: матрица в новых базисах преобразует координаты в новом базисе в координаты в новом базисе. Но можно поступить так: сначала переведём координаты в новом базисе в координаты в старом базисе посредством матрицы **B**, затем подействуем оператором **A**, и затем переведём координаты в старом базисе в координаты в новом базисе подействовав матрицей $\mathbf{C}^{-1}$. Окончательно имеем $\mathbf{A}^* = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$. На рисунке 7 эти рассуждения изображены в виде объекта, именующегося на учёном языке коммутативной диаграммой.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}^* & \xrightarrow{\mathbf{A}^*} & \mathbf{F}^* \\ \downarrow \mathbf{B} & & \uparrow \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{E} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbf{F} \end{array}$$

Рисунок 7. Коммутативная диаграмма

Важный частный случай: когда оператор действует из пространства **E** в него же. Тогда имеем $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$. Матрицы, связанные таким соотношением, называются подобными. Это матрицы одного и того же оператора, но в разных базисах. Поэтому все характеристики оператора у них совпадают, например определители (что, правда, и без того очевидно), а также характеристические многочлены (см. следующий раздел, это уже неочевидно).

В качестве примера рассмотрим поворот системы координат на плоскости. Матрицу **B** мы знаем (формула (9)), матрица $\mathbf{B}^{-1}$– это поворот на угол –φ, поэтому изменятся знаки у синусов. В результате получим $x^* = x\cos\varphi + y\sin\varphi$; $y^* = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Теперь попробуем преобразовать матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin2\varphi & \cos2\varphi \\ \cos2\varphi & -\sin2\varphi \end{pmatrix}$$

Например при $\varphi = \pi/4$ получим матрицу, меняющую знак второй координаты вектора, чего и следовало ожидать – исходная матрица, как мы помним (пункт 5), отражала плоскость относительно биссектрисы первого координатного угла, после поворота на $\pi/4$ она совместится с осью $0x$.

14. Собственные числа и собственные вектора оператора

Критерий приводимости матрицы к диагональному виду

Пусть для оператора $\mathbf{A}$ существует ненулевой вектор $\mathbf{v}$, такой, что действие оператора на него сводится к умножению этого вектора на число $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ (разумеется, для этого оператор должен действовать из пространства в него же, и матрица оператора будет квадратной nхn). Такой вектор (ненулевой) называется собственным вектором, а число – собственным числом оператора. Нетрудно заметить, что собственный вектор определяется с точностью до умножения на константу.

Как искать собственные числа и вектора? Заметим, что определение собственного вектора можно переписать так: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$. Это означает, что ядро оператора $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ ненулевое. Следовательно, из формулы (17) имеем, что ранг этого оператора меньше n, то есть оператор вырожден и определитель матрицы равен нулю $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Из этого уравнения находятся собственные числа, подставляются в уравнение $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ и находятся собственные вектора. Пример см. ниже.

Определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ представляет из себя многочлен n-го порядка, который называется характеристическим многочленом (ХМ) оператора и обозначается $d_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Он является характеристикой оператора, у подобных матриц ХМ совпадают. Нетрудно заметить, что свободный член ХМ представляет из себя определитель матрицы, а коэффициент при (n– 1)-й степени λ равен $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}\mathbf{A}$. У уравнения $d_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ может быть n различных корней: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, каждому отвечает собственный вектор $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Теорема о собственных векторах. Собственные вектора, отвечающие различным собственным числам, линейно независимы.

Доказательство. От противного: предположим, что существует линейная комбинация собственных векторов, равная нулю. Подействуем на это равенство оператором $(\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I})$. Слагаемое с $\mathbf{v}_n$ обнулится, остальные умножаются на ненулевые числа. В результате получим комбинацию собственных векторов без $\mathbf{v}_n$, по-прежнему равную нулю. Таким же способом можно избавиться от $\mathbf{v}_{n-1}$ и т. д. В конце концов получим, что $\mathbf{v}_1$ равен нулю, чего быть не может.

Итак, если у ХМ n различных корней, в пространстве существует базис из собственных векторов. Как выглядит матрица оператора в базисе из собственных векторов? Нетрудно понять, что матрица будет диагональной: по диагонали стоят $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а все остальные элементы равны нулю (напоминаю, что столбцы матрицы – это образы базисных векторов). Итак, матрица приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда у неё имеется базис из собственных векторов. Для этого необязательно, чтобы собственные числа были различны – у единичной матрицы все собственные числа равны единице.

В каком случае базиса из собственных векторов не существует? Во первых, корней у ХМ может не быть. Например, у матрицы поворота (9) у ХМ отрицательный дискриминант $\lambda^2 - 2\cos\varphi\lambda + 1 = 0$; $D = 4\cos^2\varphi - 4$ (кроме случаев $\varphi = 0, \pi$). Правда, если использовать комплексные числа корни будут всегда (см. [3]). Во-вторых, в случае кратных корней ХМ. Количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному числу (так называемая геометрическая кратность собственного числа) может оказаться меньше, чем кратность корня ХМ (алгебраическая кратность). Вот пример, когда алгебраическая кратность равна двум, а геометрическая единице:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0; \lambda_{1,2} = 1;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для таких матриц существует понятие присоединённых собственных чисел и жордановой нормальной формы, но здесь мы это обсуждать не будем – см. приложение 3.

Вспомним формулу (10) пункта 5. Нетрудно заметить, что в ней стоит ХМ матрицы 2x2, и при подстановке в него самой матрицы мы получили нулевую матрицу. Оказывается это верно всегда, $d_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Это называется тождество Кэли. Мы его докажем, но не в общем случае,а в случае, когда у матрицы существует базис из собственных векторов (в общем случае см. приложение 3).

Теорема. Пусть у матрицы А существует базис из собственных векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда $d_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Доказательство. Поскольку у нас есть полный набор собственных чисел, мы можем разложить $d_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I})$. Любой вектор из нашего пространства раскладывается по собственным векторам. Подействуем на него оператором $d_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$. При действии сомножителя ($\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I}$) слагаемое с $\mathbf{v}_n$ обнулится, а прочие умножатся на ненулевые константы. Далее, при действии ($A - \lambda_{n\text{-}1}\mathbf{I}$) обнулится слагаемое с $\mathbf{v}_{n\text{-}1}$ а остальные умножатся на константы. И т. д. В результате обнулятся все слагаемые. Таким образом, действие $d_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ на любой вектор даст ноль. Значит это нулевая матрица.

15. Скалярное произведение – геометрический смысл и формальное определение

До настоящего момента мы рассматривали чистое линейное пространство, без дополнительных структур. Сейчас мы начнём их вводить. Отталкиваемся от понятия проекции вектора, которая равнялась длине вектора, умноженной на косинус угла с вектором-осью. Некоторое неудобство заключается в том, что проекция несимметрична относительно двух векторов. Симметричным было бы произведение длин двух векторов на косинус угла между ними. Оно и называется скалярным произведением:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y}|\mathrm{PR}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathrm{PR}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos(\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}) \qquad (23)$$

Отметим, что скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда вектора перпендикулярны.

Для того, чтобы ввести скалярное произведение на многомерном пространстве поступим так же, как поступали до сих пор. Перечислим свойства геометрического произведения (23), и их положим в основу определения. Итак, свойства скалярного произведения:

1) Положительная определённость: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$. Очевидна.
2) Невырожденность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Также очевидна.
3) Симметричность: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Также очевидна.
4) Линейность: $(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \alpha_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$. Вытекает из аналогичного свойства проекции вектора.

Эти свойства мы положим в основу определения абстрактного скалярного произведения: скалярное произведение – это правило, сопоставляющее двум векторам число так, что выполняются вышеперечисленные свойства. Вектора, скалярное произведение которых равно нулю будем называть ортогональными – аналог перпендикулярности. Аналогичные скалярные произведения вводят и в бесконечномерных пространствах. Например, в пространстве функций, заданных на отрезке в качестве скалярного произведения, можно рассмотреть интеграл по этому отрезку от произведения этих функций (часто в этот интеграл вставляют ещё неотрицательную весовую функцию) – подробнее см. [1], тема 45.

Рассмотрим также абстрактное определение нормы вектора – аналога длины вектора. Нормой называется правило, сопоставляющее вектору **x**число,называемое нормой вектора $|\mathbf{x}|$, так, что выполняются следующие свойства:

1) Положительная определённость: $|\mathbf{x}| \geq 0$ – очевидна.
2) Невырожденность: $|\mathbf{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – очевидна.
3) Однородность $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$ – очевидна.
4) Неравенство треугольника: $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$. Выражает тот факт, что в треугольнике третья сторона не может быть длиннее суммы двух других.

Теорема. В пространстве со скалярным произведением величина $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ обладает всеми свойствами нормы.

Доказательство. Первые два свойства просто совпадают. Третье свойство также несложно: $\sqrt{(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x})} = \sqrt{\alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |\alpha|\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. А вот с последним свойством придётся повозиться. Вначале докажем лемму.

Лемма. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

Доказательство леммы. Рассмотрим следующее выражение:

$$0 \leq (\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}, \alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})\alpha^2 + 2(\mathbf{x},\mathbf{y})\alpha + (\mathbf{y},\mathbf{y})$$

Оно представляет собой квадратный трёхчлен относительно α и всегда неотрицательно. Со школы мы помним, что это возможно только если дискриминант трёхчлена меньше либо равен нулю:

$$D = 4(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \leq 0$$

Это и есть требуемое неравенство.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Имеем:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \leq$$

$$\leq (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})} + (\mathbf{y},\mathbf{y}) = \left(\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})}\right)^2$$

16. Ортогональный и ортонормированный базисы, координаты вектора в них. Ортогональное дополнение и ортогональная сумма подпространств

Пусть в пространстве со скалярным произведением имеется базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Попробуем вычислить скалярное произведение двух векторов, пользуясь свойством линейности:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (24)$$

Видно, что для вычисления скалярного произведения необходимо знать скалярные произведения базисных векторов. Базис, все элементы которого ортогональны $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ при $i \neq j$, называется ортогональным базисом. Для ортогонального базиса формула (24) упрощается:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)$$

Также в ортогональном базисе легко найти координаты вектора:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = x_i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i); x_i = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}$$

Если к тому же произведения базисных векторов на самих себя равны единице (то есть нормы базисных векторов равны единице), то базис называется ортонормированным. Это записывается так: $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, который равен нулю при $i \neq j$ и единице при $i=j$. В ортонормированном базисе всё совсем просто:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \quad (25)$$

Для того, чтобы задать скалярное произведение, достаточно задать ортонормированный базис, а дальше считать по формуле (25). В трёхмерном пространстве ортонормированным базисом является стандартный набор из трёх перпендикулярных векторов единичной длины положительной ориентации (**i**, **j**, **k**).

Опишем процедуру, позволяющую из любого базиса получить ортонормированный (процесс ортогонализации). Итак у нас есть произвольный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Первый вектор нормируем на единицу, из второго вычитаем часть первого и тоже нормируем и т. д.:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}; \mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1}{|\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1|}; \mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 - (\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2}{|\mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 - (\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2|}; \ldots$$

Для нормы вектора получаем знакомое нам выражение (теорема Пифагора):

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} \tag{26}$$

Выражение (26) не единственно возможная норма в пространстве R^n. Можно показать, что следующее выражение обладает всеми свойствами нормы при $\alpha \geq 1$:

$$|\mathbf{x}|_\alpha = (|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha)^{1/\alpha}$$

Стандартная норма (26) получается при $\alpha = 2$. Первые три свойства очевидны, а вот доказать неравенство треугольника довольно непросто – мы не будем этого делать. При $\alpha < 1$ неравенство треугольника не выполняется – нормы векторов {0, 1} и {1, 0} равны единице, а норма их суммы {1, 1} равна $2^{1/\alpha}$, что при $\alpha < 1$ больше 2. При $\alpha \to \infty$ получим следующую норму:

$$|\mathbf{x}|_\infty = \max_i |x_i|$$

Также часто рассматриваются псевдонормы: объект, обладающий всеми свойствами нормы, кроме положительной определённости. Например, в теории относительности вводят пространственно-временной промежуток между событиями:

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Здесь Δt – промежуток времени между событиями, Δx, Δy, Δz - разности координат события, c–скорость света. Если $s^2 > 0$ (временеподобный интервал) или $s^2 = 0$ (светоподобный интервал), то между событиями может существовать причинно-следственная связь; если же $s^2 <$ 0 (пространственноподобный интервал), то такой связи быть не может (нельзя двигаться быстрее света).

Скалярное произведение позволяет искать угол между векторами:

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \tag{27}$$

В качестве примера подсчитаем угол между CH-связями в молекуле метана CH_4. Как мы помним из школьного курса химии, в молекуле метана происходит sp^3-гибридизация электронных орбиталей, и молекула представляет из себя правильный тетраэдр. Таким образом, нам нужно найти угол, под которым из центра тетраэдра видно его ребро. Проще всего сделать это, вписав тетраэдр в куб – см. рис 8. Пусть ребро куба равно двум. Тогда координаты центра куба O будут (1, 1, 1). Координаты вершины 2: (0, 0, 0); координаты же вершины 4:(2, 2, 0). Таким образом вектор O2 {– 1, – 1, –1}; вектор O4 {1, 1, – 1}.

$$\cos\varphi = \frac{(\{-1,-1,-1\},\{1,1,-1\})}{|\{-1,-1,-1\}||\{1,1,-1\}|} = -\frac{1}{3}$$

В градусной мере это примерно $109{,}47^0$. Чуть меньше этот угол между O-H связями в молекуле воды – примерно 105^0. Дело в том, что 6 валентных электронов атома кислорода распределяются так: по два на образование двух связей O-H, и оставшиеся четыре образуют две неподелённые электронные пары. Пары и связи расположены в вершинах тетраэдра (sp^3-гибридизация), но поскольку неподелённые пары имеют заряд – $2e$, а связи имеют заряд – e (два электрона – от водорода и кислорода, и ядро атома водорода), неподелённые пары отталкивают сильнее связи и угол между связями несколько сжимается.

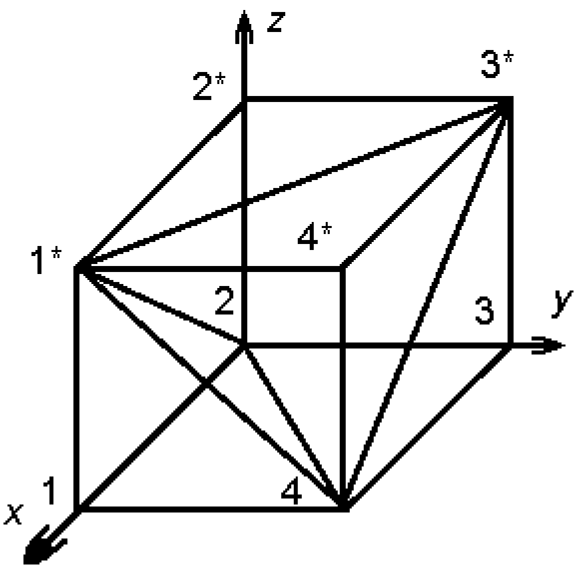

Рисунок 8. Вписанный в куб тетраэдр.

Далее, ортогональное дополнение подпространства **F** в пространстве **E** – это совокупность векторов, перпендикулярных всем векторам из **F**, которое обозначается $\mathbf{F}^{\perp}$. Ортогональное дополнение является подпространством – это очевидно следует из свойств скалярного произведения. Например, ортогональное дополнение плоскости в пространстве – это перпендикулярная ей прямая и наоборот. Ортогональная сумма – это сумма подпространств, которые ортогональны друг другу (каждый вектор первого подпространства перпендикулярен каждому вектору из второго). Естественно, ортогональная сумма является прямой.

17. Сопряжённый оператор и матрица

Самосопряжённые операторы и симметричные матрицы

Ортогональные операторы и матрицы

Оператор **A***, сопряжённый к **A,** определяется следующим образом: для любых векторов **x**, **y** выполнено (**Ax**, **y**) = (**x**, **A*y**). Попробуем прикинуть, как построить матрицу сопряжённого оператора:

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\mathbf{Ax})_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y})_j$$

Видно, что для сопряжения оператора его матрицу нужно просто транспонировать. Оператор называется самосопряжённым если он совпадает со своим сопряжённым **A** = **A***. Матрица самосопряжённого оператора симметрична $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Матрицы наблюдаемых величин в квантовой механике, о которых говорилось в пункте 4, являются именно самосопряжёнными (для оператора умножения на x это очевидно, а для оператора компоненты импульса доказывается интегрированием по частям). Также рассматривают квадратичную форму самосопряжённого оператора:

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + \cdots + a_{nn}{x_n}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots$$

Далее сумма идёт по всем парам индексов. Двойка появилась оттого, что в сумме два слагаемых: $a_{12}x_1x_2$ и $a_{21}x_2x_1$, но в силу симметричности они одинаковы.

Далее введём понятие ортогонального оператора. Оператор называется ортогональным, если он не меняет скалярного произведения: для любых векторов **x**, **y**выполнено (**Ax**, **Ay**) = (**x**, **y**). Для ортогональной матрицы имеем (**Ax**, **Ay**) = (**x**, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$**Ay**) = (**x**, **y**). Отсюда имеем$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, или $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$. Заметим, что произведение ортогональных операторов тоже ортогонально: $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1}$, и обратный ортогональному тоже ортогонален: $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. Поэтому ортогональные матрицы образуют группу по умножению, которая называется ортогональной группой и обозначается O(n, R). Определитель ортогональной матрицы может быть равен ± 1. Совокупность ортогональных матриц с определителем + 1 также образует группу, называемую специальной ортогональной SO(n, R).

Попробуем найти все ортогональные матрицы 2x2. Распишем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

Вспомним, что если сумма квадратов двух чисел равна единице, то всегда можно подобрать такой угол φ, что a = cosφ, c = sinφ. Подставляя это в третье равенство получим d = –$b$ctgφ, далее подставим это во второе уравнениеи получим: $b^2(1 + \mathrm{ctg}^2\varphi) = b^2/\sin^2\varphi = 1$; следовательно, b = ±sinφ; d = –(±cosφ). Если мы возьмём нижние знаки, то получим матрицу поворота на угол φ (9) (определитель + 1), если верхние – поворот с отражением (определитель – 1):

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Это верно и в общем случае: элементы SO(n, R) – это повороты n-мерного пространства, элементы O(n, R) –повороты и отражения.В приложении 4 рассмотрены повороты трёхмерного пространства и описание их в терминах углов Эйлера, которые активно применяются в механике твёрдого тела.

18. Приведение симметричной матрицы к диагональному виду (квадратичной формы к сумме квадратов) ортогональным преобразованием

Теорема. У самосопряжённого оператора существует ортогональный базис из собственных векторов.

Доказательство. Вначале воспользуемся леммой.

Лемма. У самосопряжённого оператора существует действительное собственное число.

Доказывать эту лемму мы здесь не будем – см. приложение 5. Дело в том, что доказательство этой леммы не алгебраическое, а аналитическое (также, как и у основной теоремы алгебры – см. [3]), оно использует многомерный аналог теоремы Вейерштрасса. Итак у нашего оператора **A**, действующего в пространстве **H**, имеется действительное собственное число λ_1 и соответствующий собственный вектор $\mathbf{v_1}$. Этот вектор порождает одномерное собственное подпространство $\mathbf{H_1}$. Рассмотрим его ортогональное дополнение $\mathbf{H_1}^{\perp}$. Это пространство размерности на единицу меньше исходного. Центральный момент доказательства: если вектор **v** принадлежит $\mathbf{H_1}^{\perp}$, то его образ **Av** тоже принадлежит этому пространству. Действительно, если $(\mathbf{v}, \mathbf{v_1}) = 0$, то $(\mathbf{Av}, \mathbf{v_1}) = (\mathbf{v}, \mathbf{Av_1}) = \lambda_1(\mathbf{v}, \mathbf{v_1}) = 0$. Таким образом, мы можем рассматривать оператор **A** как самосопряжённый оператор на пространстве $\mathbf{H_1}^{\perp}$. Согласно лемме у него есть собственное число λ_2 и отвечающий ему собственный вектор $\mathbf{v_2}$. И так далее, пока не будут исчерпаны все размерности. Теорема доказана.

Таким образом, повернув систему координат, мы можем превратить матрицу нашего самосопряжённого оператора в диагональную. Соответствующая квадратичная форма превратится в сумму квадратов (остальные слагаемые обнулятся).

Рассмотрим простой пример – форма $2x_1x_2$. Ему отвечает матрица 2x2, у которой по диагонали нули (квадратов в нашей форме нет), а внедиагональные элементы единицы (двойка располовинивается). Ищем собственные числа и собственные вектора (вектора нормируем на единицу – для этого надо поделить вектор на его длину):

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0; \lambda_{1,2} = \pm 1; \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$x_1 = x_2; \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}; x_1 = -x_2; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

В матричном виде (напоминаем, что для ортогональной матрицы **B** вычисление обратной сводится к транспонированию):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что матрица **B** – матрица поворота на угол π/4. Ну и наконец, в терминах квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\widetilde{x_1} - \widetilde{x_2})/\sqrt{2} \\ (\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2})/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$2x_1x_2 = 2\left((\widetilde{x_1} - \widetilde{x_2})/\sqrt{2}\right)\left((\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2})/\sqrt{2}\right) = \widetilde{x_1}^2 - \widetilde{x_2}^2$$

19. Векторное произведение векторов

Векторное произведение определяется только для векторов трёхмерного пространства. Точнее можно определить его для произвольного *n*-мерного пространства, но он будет представлять собой не скаляр и не вектор, а так называемую полилинейную форму – объект, который мы не будем здесь рассматривать. Поэтому ограничимся трёхмерным случаем. Итак, векторное произведение двух векторов **a** и **b** (обозначается [**a**, **b**], то есть в квадратных скобках, в отличие от скалярного, которое в круглых скобках; существует также система записи, при которой скалярное произведение обозначается с точкой между векторами **a•b**, а векторное с крестиком **a**×**b**) – это вектор, обладающий следующими свойствами:

1. Линейность: $[\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2}, \mathbf{b}] = \alpha_1[\mathbf{a_1}, \mathbf{b}] + \alpha_2[\mathbf{a_2}, \mathbf{b}]$, и то же по второму сомножителю.
2. Антисимметричность: [**a**, **b**] = – [**b**, **a**]
3. На стандартных ортах: [**i**, **j**] = **k**, [**j**, **k**] = **i**, [**k**, **i**] = **j** (пишем **i**, **j**, **k** по кругу и по часовой стрелке произведение двух равно следующему третьему)

Отметим, что из второго свойства следует, что векторное произведение вектора самого на себя равно нулю. Распишем по координатам: $[a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},\ b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}] = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{j}$. Вопрос «на засыпку» – что напоминает это выражение? Ответ: определитель матрицы:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \tag{28}$$

По выражению (28) и вычисляют векторное произведение, раскрывая определитель по первой строке. Алгебраические дополнения элементов первой строки и есть компоненты векторного произведения.

Теорема. Векторное произведение [**a**, **b**]– это вектор:

1. длина которого представляет собой произведение длин сомножителей на синус угла между ними $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b}$(в скалярном произведении, напоминаю, стоял косинус), или площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и**b**;
2. который перпендикулярен обеим сомножителям$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\perp\mathbf{a}, \mathbf{b}$;
3. который образует правую тройку с множителями **a**, **b**, [**a**, **b**].

Доказательство.

1. Распишем по координатам: $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = |\mathbf{a}|^2|[\mathbf{b}|^2\sin^2\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2$. С другой стороны имеем: $|\mathbf{a}|^2|[\mathbf{b}|^2\sin^2\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2|[\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2|[\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2$. Итак необходимо проверить следующее равенство:
$$(a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 = \\ = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 \tag{29}$$
Тождество (29) называется тождеством Лагранжа, оно играет большую роль в доказательстве знаменитой теоремы Лагранжа о том, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем четырёх квадратов натуральных чисел. Докажите тождество (29) самостоятельно – для этого надо просто аккуратно раскрыть все квадраты и скобки, и проверить, что все сомножители сокращаются.

2. Попробуем вычислить скалярное произведение (**a**, [**a**, **b**]). Для этого надо перемножить *x*, *y* и *z* компоненты векторов и сложить их. Но компоненты векторного произведения – это алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы (28). Поэтому, если заменить первую строчку (28) на компоненты вектора **a**, то определитель как раз и даст нам искомое произведение. Но тогда в матрице будет две одинаковых строки – первая и вторая, а определитель такой матрицы равен нулю. Аналогично с вектором **b**.
3. Используем гомотопию, о которой упоминалось в пункте 5. Непрерывно деформируем пару векторов **a**, **b** в вектора **i**, **j**так, чтобы третий вектор всё время был равен их векторному произведению. При этом тройка будет всё время оставаться базисом. Когда первые два вектора превратятся в **i**, **j**, третий вектор превратится в **k**. Поэтому ориентация тройки будет такой же, как и у **i**,**j**,**k**, то есть положительной.

Отметим, что векторное произведение является не вектором, а псевдовектором: его направление зависит от того, какой винт мы договоримся считать правым. Поэтому физические величины, определяемые через векторное произведение (моменты импульса и силы; напряжённость и индукция магнитного поля) также являются псевдовекторами: имеет физический смысл их длина и прямая, вдоль которой они направлены, а вот то, в какую сторону они направлены, физического смысла не имеет (см. приложение 2).

Векторное произведение входит во многие физические законы. Например, закон Био-Савара-Лапласа: магнитное поле **dH**, создаваемое бесконечно малым проводником **dl**:

$$\mathbf{dH} = I\,\frac{[\mathbf{dl}, \mathbf{r}]}{4\pi|\mathbf{r}|^3}$$

Здесь *I* – сила тока; **r**– вектор, идущий из точки нахождения проводника в точку, где ищется напряжённость магнитного поля. Или закон Ампера: сила **dF**, с которой магнитное поле **H**(в вакууме) действует на бесконечно малый проводник **dl**:

$$\mathbf{dF} = \mu_0 I[\mathbf{dl}, \mathbf{H}]$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – в системе СИ так называемая магнитная проницаемость вакуума (в системе СГС она равна единице)

20. Смешанное и двойное векторное произведения

Смешанным произведением трёх векторов **a**, **b** и **c** называется комбинация (**a**, [**b**, **c**]). Мы уже выясняли в предыдущем пункте, что для того, чтобы умножить векторное произведение скалярно на вектор, нужно заменить вектора **i**, **j**, **k** в определителе (28) на компоненты этого вектора:

$$(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = \det\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \qquad (30)$$

Геометрический смысл смешанного произведения: длина векторного произведения равна площади параллелограмма, скалярное произведение есть произведение площади параллелограмма на длину вектора на косинус угла между вектором и перпендикуляром к плоскости параллелограмма, а это есть в точности объём параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**, знак же смешанного произведения зависит от ориентации этого набора векторов (плюс – правая тройка, минус – левая). Собственно, если транспонировать матрицу (30), столбцы матрицы и станут координатами векторов **a**, **b** и **c**, а при транспонировании определитель не меняется.

Смешанное произведение является псевдоскаляром – его знак зависит от того, какой винт мы договорились считать правым.

Свойства смешанного произведения:

1. Линейность по каждому сомножителю
2. Оно не меняется при циклической перестановке сомножителей: (**a**, [**b**, **c**]) = (**c**, [**a**, **b**]) = (**b**, [**c**, **a**]), а при перестановке двух сомножителей меняет знак.

Двойным векторным произведением трёх векторов называется комбинация [**a**, [**b**, **c**]]. Она является истинным вектором – при перемене ориентации знак поменяют оба произведения и в результате знак двойного векторного произведения не изменится.

Для вычисления двойного векторного произведения имеется формула, которую называют «формула бац минус цаб»:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad (31)$$

Для доказательства необходимо расписать обе стороны (31) по координатам, что довольно громоздко. Однако векторное и скалярное произведения не зависят от системы координат. Поэтому можно повернуть систему координат так, чтобы ось $0x$ была направлена по вектору **c**, а затем ещё повернуть вокруг оси $0x$ так, чтобы **b** лежал в плоскости $x0y$. Итак $\mathbf{c} = \{c_x, 0, 0\}$; $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, 0\}$; $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & 0 \\ c_x & 0 & 0 \end{pmatrix} = -b_y c_x \mathbf{k};\ [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & -b_y c_x \end{pmatrix} = -a_y b_y c_x \mathbf{i} + a_x b_y c_x \mathbf{j};\ \mathbf{b}(\boldsymbol{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$$

$$= a_x c_x(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) - (a_x b_x + a_y b_y) c_x \mathbf{i} = -a_y b_y c_x \mathbf{i} + a_x c_x b_y \mathbf{j}$$

Например, попробуем написать выражение для силы $\mathbf{dF}_{12}$, с которой бесконечно малый проводник $\mathbf{dl}_1$ действует на бесконечно малый проводник $\mathbf{dl}_2$ ($\mathbf{r}_{12}$ – вектор, идущий из $\mathbf{dl}_1$ в $\mathbf{dl}_2$):

$$\mathbf{dF}_{12} = \mu_0 I_1 I_2 \frac{[\mathbf{dl}_2 [\mathbf{dl}_1, \mathbf{r}_{12}]]}{4\pi |\mathbf{r}_{12}|^3} = \mu_0 I_1 I_2 \frac{(\mathbf{dl}_2, \mathbf{r}_{12})\mathbf{dl}_1 - (\mathbf{dl}_2, \mathbf{dl}_1)\mathbf{r}_{12}}{4\pi |\mathbf{r}_{12}|^3}$$

С помощью формулы «бац минус цаб» можно доказать что векторное произведение, так же как и коммутатор матриц, удовлетворяет тождеству Якоби (см. раздел 5):

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = 0 \qquad (32)$$

Докажите это сами, расписав двойные произведения в (32) по формуле «бац минус цаб» – получится шесть слагаемых: три с плюсом и три такие же с минусом. Таким образом, векторное произведение, как и коммутатор матриц, обладает свойствами линейности, антисимметричности и тождеством Якоби. Так что трёхмерное пространство с введённым на ним векторным произведением является алгеброй Ли.

Приложение 1. Аксиомы Пеано

В этом приложении мы рассмотрим систему аксиом натуральных чисел – аксиомы Пеано. Система аксиом строится в рамках так называемого «исчисления предикатов первого порядка с равенством». Не будем здесь подробно его описывать (см. любой учебник математической логики), только скажем, что это система в которой строго определены такие понятия как «переменная», «утверждение», «доказательство», «аксиома», «и», «или», «не», «следует», «для любого», «существует», «равно» и пр. Также, опять же, абсолютно строго, заданы правила логического вывода. Так вот, в системе аксиом Пеано имеется один тип переменных – натуральные числа, и одна функция, сопоставляющая любому натуральному числу nдругое натуральное число n' – следующее за ним. Аксиомы следующие.

Аксиома 1. Существует натуральное число 1, такое, что для любого натурального числа nвыполнено $n' \neq 1$.

Аксиома 2. Для любых натуральных n и m из $n' = m'$ следует $n = m$.

Аксиома 3 (индукция) Для любого утверждения с одной свободной переменной $A(n)$ из двух утверждений:

1) верно $A(1)$
2) для любого n из $A(n)$ следует$A(n')$

следует утверждение:

для любогоnверно $A(n)$

Обсудим эти аксиомы. Первая аксиома утверждает, что есть самое первое натуральное число – единица, которое не является последующим ни для какого другого (без этой аксиомы у нас могло бы получиться, например, множество целых чисел). Вторая гласит, что у разных чисел последующие тоже разные – не может быть, чтобы у двух разных чисел было одно и тоже последующее. Ну и, наконец, аксиома индукции. На самом деле, строго говоря, это не аксиома. Это бесконечная схема аксиом, по одной аксиоме на каждое утверждение со свободной переменной $A(n)$, которых бесконечное (счётное) количество. В математической логике строго доказывается, что эту бесконечную схему невозможно свести ни к какому конечному количеству аксиом.

Поясним, что такое утверждение с одной свободной переменной. Рассмотрим утверждение: «для любого n выполнено $m \leq n$». В этом утверждении две переменные: n и m. Но переменная nне свободна – она связана квантором «для любого». А вот переменная m свободна, и поэтому справедливость утверждения зависит от значения m: при $m = 1$ оно справедливо, а при остальных – нет (напоминаю, что речь идёт о натуральных числах!).

Вопрос «на засыпку»: покажите, как с помощью аксиомы индукции доказать единственность единицы. Какое утверждение $A(n)$ нужно использовать? Ответ: это утверждение «или $n = 1$ или существует k,такое что $n = k'$».

В рамках аксиом Пеано можно определить сложение и умножение натуральных чисел. Сложение определяется такими соотношениями: $n + 1 = n'$; $n + m' = (n + m)'$. Умножение: $n\times1 = n$; $n\times m' = n\times m + n$. Из этих определений можно вывести все свойства сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Попробуйте, используя эти определения, строго доказать, что дважды два четыре!

Приложение 2. CPT-теорема и нарушение CP-инвариантности в слабых взаимодействиях

Рассмотрим вопрос: существует ли в природе фундаментальное различие между правым и левым, то есть изменятся ли законы природы при отражении пространства в зеркале? Этот вопрос по-другому ставят так: предположим мы связались с инопланетной цивилизацией, с которой мы можем обмениваться только информацией, но не можем послать материальный объект. Сможем ли мы объяснить им, какой винт мы считаем правым, а какой левым?

Первое, что приходит в голову – магнитное поле. Как вы помните со школы, для того, чтобы определить магнитное поле, создаваемое контуром с током, необходимо применить правило правого винта. Однако определить магнитное поле можно по его действию на контур с током – сила Ампера. Но в законе Ампера тоже фигурировало правило правого винта! Если сменить оба винта на левые, сила взаимодействия контуров с током не изменится. Магнитное поле является не вектором, а псевдовектором: физический смысл имеет его длина и прямая, вдоль которой он направлен, а вот его направление физического смысла не имеет – оно зависит от того, какой винт мы договорились считать правым (или какой полюс магнита северным).

На самом деле все законы классической физики инвариантны относительно отражения в зеркале. Также инвариантны теория относительности, квантовая механика и квантовая электродинамика. А вот на уровне теории слабых взаимодействий появляются отличия. Напоминаем, что в природе существуют четыре фундаментальных взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное (ответственное за связь протонов и нейтронов в атомном ядре, наглядное проявление их силы – мощь ядерного взрыва, где высвобождается энергия именно сильного взаимодействия) и слабое. Слабое взаимодействие отвечает за превращения элементарных частиц, самое классическое из которых – бета-распад: распад нейтрона на протон, электрон и электронное антинейтрино.

В 1955 году В. Паули доказал так называемую CPT-теорему. Она утверждала, что законы природы не изменятся, если одновременно провести три преобразования: C – заменить частицы на античастицы (и наоборот);P – провести зеркальное отражение пространства иT – обратить течение времени (известный вопрос о том, как обратимость во времени законов механики согласуется с термодинамической необратимостью обсуждать здесь не будем – см. [1], тема 82). Требует пояснения термин «теорема» в этом контексте. CPT-теорема – это физическое утверждение об окружающем мире, которое не доказывается как в математике, а проверяется в эксперименте. Дело в том, что Паули показал, что невыполнение CPT-инвариантности означало бы, что наши представления о микромире в самой основе своей неверны. Это совершенно невероятно, поскольку они правильно описывают огромное количество экспериментальных данных.

Однако среди физиков в середине 50-х бытовало представление, что мир по отдельности C, P и T инвариантен. В тогдашней физике элементарных частиц возникла так называемая тау-тэта проблема. В экспериментах на ускорителях наблюдались две элементарных частицы – тау и тэта. Одна из них распадалась на два пи-мезона, вторая – на три. Все остальные их характеристики (масса покоя, время жизни) подозрительно совпадали, причём эти частицы появлялись всегда вместе, причём отношение количества тау к количеству тэта было всегда одинаково. Всё говорило о том, что это одна и та же частица, которая может распадать с ядвумя способами – на два и на три мезона. Но по представлениям того времени это было невозможно.

В начале 1956 года советский физик-теоретик И.С.Шапиро пришёл к выводу, что эту проблему можно решить при условии отказа от Р-инвариантности (тогда распад и на два и на три мезона становится возможным). Испытывая сильные сомнения по поводу того, публиковать эту работу или нет (уж больно необычным выглядело такое решение), он обратился к Л.Д.Ландау. Реакция Ландау была такая: «В принципе это не невозможно, но такой скособоченный мир был бы мне настолько противен, что даже думать об этом не хочется». В результате Шапиро не опубликовал работу, а через несколько месяцев появилась статья американцев Ли и Янга, в которой предлагалась та же идея. Вскоре она была блестяще подтверждена в эксперименте научной группы под руководством Ву (американка китайского происхождения).

Эксперимент Ву был таким: радиоактивный кобальт-60 охлаждался до температуры 0,01 К (методом адиабатического охлаждения – очень непростая вещь!) и помещался в сильное магнитное поле чтобы спины ядер выстроились по магнитному полю. Потом регистрировались электроны бета-распада, вылетающие в направлении магнитного поля и против этого направления. Вторых оказалось доказуемо больше. Оказывается электроны при бета распаде левополяризованы – их спин направлен назад, противоположно скорости. С помощью этого эксперимента мы могли бы объяснить инопланетянам, что такое правый и левый винт. Мы сказали бы: приготовьте всё как описано выше и посмотрите сквозь обмотку электромагнита в ту сторону, куда чаще вылетают электроны. Так вот электроны в обмотке бегут по часовой стрелке. Напоминаю, что направление движения электронов (от минуса к плюсу) противоположно направлению тока (от плюса к минусу) – когда люди договаривались, что считать плюсом, а что минусом, электрон ещё не был открыт и люди не знали, в которую сторону двигаются носители заряда. У инопланетян всё могло быть наоборот, поэтому лучше говорить о направлении движения электронов, а не о направлении тока.

В 1958 году Ли, Янг и Ву получили Нобелевскую премию за эти исследования. Шапиро свою упустил (далеко не единственный случай в советской науке – можно вспомнить первооткрывателей комбинационного рассеяния Л.И. Мандельштама и Г.К. Ландсберга, первооткрывателя химического мутагенеза И.А. Раппопорта и т. д.).

Однако имеется одна тонкость. Всё у нас с инопланетянами получится, если они, подобно нам, состоят из вещества. А вот если они состоят из антивещества, то они получат не тот винт, поскольку позитроны при бета распаде правополяризованы. То есть хотя Р- и С-инвариантности по отдельности не выполняются, комбинированная СР-инвариантность сохраняется. Такуюидею выдвинул Л.Д.Ландау в 1957 году (чтобы мир не был бы таким скособоченным). Ричард Фейнман по этому поводу шутил «Если инопланетянин при встрече протянет вам левую руку – берегитесь, возможно, он состоит из антивещества!»

К сожалению, в 60-х годах выяснилось, что СР-инвариантность тоже нарушается. Есть такая интересная частица K_L^0-каон. Масса покоя порядка 500 МэВ (примерно половина массы протона или нейтрона, или тысяча масс электрона), время жизни порядка 5×10^{-8} секунды. Она является истинно нейтральной, то есть совпадает со своей античастицей (в отличие, например, от нейтрона, который лишь электрически нейтрален, но отличается от антинейтрона, и, при встрече с ним, аннигилирует). Это означает, что эта частица, что изготовленная на ускорителе из материи, что из антиматерии, будет одна и та же. Эта частица может распадаться на π^+ мезон, электрон и электронное антинейтрино или на π^- мезон, позитрон и электронное нейтрино. Так вот вторым способом она распадается чаще. Не намного, всего лишь на 0,3 % чаще, но в массовых опытах эта разница достоверно фиксируется. Теперь мы сможем выяснить, состоят наши инопланетяне из вещества или из антивещества. Надо сказать им: «изготовьте на ускорителе K_L^0-каон и посмотрите, на какой лептон он распадается реже. Мы состоим из них. А вы?».

Так что СР-инвариантность нарушается, а это значит, что и Т-инвариантность тоже нарушается – в микромире есть своя стрела времени. В своё время А.Д.Сахаровым была выдвинута красивая идея о том, что пресловутый Большой Взрыв был моментом СРТотражения: в этот момент время стало течь в другую сторону, пространство зеркально отразилось, и антиматерия сменилась материей.

Приложение 3. Собственное подпространство, присоединённые собственные вектора и жорданова нормальная форма матрицы

Пусть λ_1 – собственное число квадратной матрицы $\mathbf{A}$, действующей на пространстве $\mathbf{E}$. Соответственно оператор $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ вырожденный. Начнём действовать на вектора нашего пространства $\mathbf{E}$ степенями оператора: $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$, $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2$, $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3$, и т. д. При этом ядра этих операторов $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})$, $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2$, $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3$… будут расширяться, но, ввиду конечности размерности пространства, начиная с некоторой степени α, расширяться перестанут и зафиксируются. Обозначим это ядро $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^\alpha = \mathbf{E}_1$, оно называется собственным подпространством оператора $\mathbf{A}$, отвечающим собственному числу λ_1. В соответствии с формулой (17) с этой же степени зафиксируются образы операторов (которые сужаются) $\mathrm{Im}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})$, $\mathrm{Im}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2$, $\mathrm{Im}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3$… обозначим его $\mathrm{Im}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^\alpha = \mathbf{E}_1^*$.

Теорема. Пространство $\mathbf{E}$ представляется в виде прямой суммы инвариантных относительно действия матрицы $\mathbf{A}$ подпространств $\mathbf{E}_1$и $\mathbf{E}_1^*$, и ХМ матрицы $\mathbf{A}$ является произведением ХМ матриц этого оператора на подпространствах $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_1^*$.

Доказательство. Возьмём произвольный вектор v и подействуем на него оператором $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^\alpha$. Результат будет принадлежать $\mathbf{E}_1^*$. Поскольку на $\mathbf{E}_1^*$ оператор $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ невырожденный, существует вектор $\mathbf{v}^*$, принадлежащий $\mathbf{E}_1^*$, такой что $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^\alpha\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^\alpha\mathbf{v}^*$. Очевидным образом вектор $\mathbf{v}-\mathbf{v}^*$ принадлежит $\mathbf{E}_1$ (ибо $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) = 0$). Поскольку пространства $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_1^*$очевидно не пересекаются, сумма прямая. Далее выберем базис в $\mathbf{E}$ так, чтобы часть векторов принадлежала $\mathbf{E}_1$, а остальные принадлежали $\mathbf{E}_1^*$.Тогда матрица оператора $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ в этом базисе выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}-\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{11}-\lambda_1 & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm}-\lambda_1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Каждое ненулевое слагаемое суммы (13) для определителя матрицы (33) содержит произведение слагаемых из аналогичных сумм для матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}-\lambda_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_{11}-\lambda_1 & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm}-\lambda_1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Поэтому определитель матрицы (33) является произведением определителей матриц (34).

Вектора, обнуляющиеся первой степенью $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ это собственные вектора $\mathbf{v}$. Если вектор $\mathbf{v}^{(1)}$ обнуляется второй степенью $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$, то вектор $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}^{(1)}$ обнуляется первой степенью, то есть является собственным вектором $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_1)\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}$, по-другому это можно записать так: $\mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} = \lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}$. Такой вектор $\mathbf{v}^{(1)}$ называется первым присоединённым вектором к собственному вектору $\mathbf{v}$. Далее, если вектор $\mathbf{v}^{(2)}$ обнуляется третьей степенью $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$, то $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)}$ или $\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} = \lambda_1\mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{v}^{(1)}$. Это второй присоединённый вектор. И т. д.

Теорема. Система из собственного вектора $\mathbf{v}$и присоединённых к нему $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(\alpha)}$являются линейно независимой.

Доказательство. Возьмём комбинацию этих векторов, которая равна нулю: $\beta_0\mathbf{v} + \beta_1\mathbf{v}^{(1)} + \dots + \beta_\alpha\mathbf{v}^{(\alpha)} = 0$. Подействуем на неё оператором $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^\alpha$. Все слагаемые, кроме последнего обнулятся, а последнее превратится в $\beta_\alpha\mathbf{v}$. Отсюда $\beta_\alpha = 0$. Далее подействуем оператором $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^{\alpha-1}$ и получим $\beta_{\alpha-1} = 0$. И т. д.

Итак, в собственном подпространстве $\mathbf{E}_1$ существует базис из собственных и присоединённых векторов. Если записать матрицу оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе, каждой цепочке $\mathbf{v}, \mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(\alpha)}$ отвечает так называемая жорданова клетка (изображён случай $\alpha = 3$):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

ХМ матрицы (35) очевидно равен $(\lambda_1 - \lambda)^4$ (матрица верхнетреугольная). Отсюда понятно, что размерность собственного пространства $\mathbf{E}_1$ равна кратности корня ХМ λ_1. Из приведённых рассуждений очевидно следует и тождество Кэли. Следует иметь ввиду, что могут быть любые комбинации собственных и присоединённых векторов. Например, для корня третьей кратности могут быть три линейно независимых собственных вектора, могут быть два линейно независимых собственных вектора и к одному из них первый присоединённый, и может быть один собственный вектор и к нему два присоединённых. Соответствующие жордановы матрицы выглядят так:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Таким образом, если ХМ оператора представляется в виде сомножителей вида $(\lambda_1 - \lambda)^\alpha$ (а в поле комплексных чисел его всегда можно так представить – см. [3]), его матрица может быть выбором базиса приведена к набору жордановых клеток.

Приложение 4. Вращения трёхмерного пространства

Углы Эйлера

Опишем произвольный поворот трёхмерного пространства в виде последовательности трёх последовательных поворотов на так называемые углы Эйлера. Такое описание оказывается чрезвычайно удобным в механике твёрдого тела – в терминах углов Эйлера уравнения вращения выглядят наиболее просто. Тем не менее можно описывать вращения и другими способами – например, с помощью кватернионов (см. [1], тема 28). Итак, пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – исходный ортонормированный и право ориентированный базис. Получившийся после первого поворота базис обозначим $\mathbf{e}_1^{(1)}$, $\mathbf{e}_2^{(1)}$, $\mathbf{e}_3^{(1)}$; после второго $\mathbf{e}_1^{(2)}$, $\mathbf{e}_2^{(2)}$, $\mathbf{e}_3^{(2)}$; и, наконец, после третьего (окончательного) $\mathbf{e}_1^{(3)}$, $\mathbf{e}_2^{(3)}$, $\mathbf{e}_3^{(3)}$. Первый поворот осуществляется вокруг оси $\mathbf{e}_3$ на угол φ так, чтобы вектор $\mathbf{e}_1$ перешёл в вектор $\mathbf{e}_1^{(1)} = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^{(3)}]$. То есть $\cos\varphi = (\mathbf{e}_1,$

$[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^{(3)}]$).Таким образом, вектор $\mathbf{e}_1^{(1)}$становится перпендикулярен вектору $\mathbf{e}_3^{(3)}$. Матрица поворота $\mathbf{A}_\varphi$:

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следующий поворот осуществляется вокруг $\mathbf{e}_1^{(1)}$ так, чтобы совместить $\mathbf{e}_3^{(1)} = \mathbf{e}_3$ с $\mathbf{e}_3^{(3)}$, то есть на угол θ, такой что $\cos\theta = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^{(3)})$. Матрица поворота $\mathbf{A}_\theta$в базисе $(\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)}, \mathbf{e}_3^{(1)})$:

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Если мы хотим записать матрицу $\mathbf{A}_\theta$ в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, то необходимо взять произведение $\mathbf{A}_\varphi\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi^{-1}$. Произведение поворотовв базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi$:

$$\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ну и, наконец, третий поворот вокруг $\mathbf{e}_3^{(2)} = \mathbf{e}_3^{(3)}$ так, чтобы совместить $\mathbf{e}_1^{(2)} = \mathbf{e}_1^{(1)} = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^{(3)}]$ с вектором$\mathbf{e}_1^{(3)}$, то есть на угол ψ такой, что $\cos\psi = (\mathbf{e}_1^{(3)}, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^{(3)}])$. Матрица оператора $\mathbf{A}_\psi$ в базисе $(\mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(2)})$:

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ матрица $\mathbf{A}_\psi$ выглядит как $(\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi)\mathbf{A}_\psi(\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi)^{-1}$. Итоговая матрица поворота $\mathbf{A}_\psi\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi$:

$$\mathbf{A}_\psi\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Любая матрица из SO(3, R) представляется в таком виде.Проверьте сами, что $(\mathbf{A}_\psi\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi)(\mathbf{A}_\psi\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\varphi)^T = \mathbf{I}$.

Приложение 5. Вариационный метод поиска собственных чисел самосопряжённого оператора

В этом приложении мы докажем лемму из раздела 18: у симметричной матрицы всегда существует действительное собственное число. Для этого мы используем многомерный аналог теоремы Вейерштрасса: непрерывная функция, заданная на компактном и связном множестве имеет минимальное и максимальное значения и принимает любое промежуточное значение. Кроме того, мы используем теорему (иногда называемую теорема Гейне-Бореля-Лебега) о том, что в конечномерном пространстве компактность равносильна замкнутости и ограниченности. Рассмотрим квадратичную форму самосопряжённого оператора (**Av**, **v**) как квадратичную (следовательно, непрерывную) функцию на *n*-мерной сфере |**v**| = 1. Эта сфера очевидно замкнута и ограничена, следовательно компактна, также связна. Поэтому найдётся вектор **v***, на котором функция (**Av**, **v**) будет иметь минимум. Покажем, что этот вектор будет собственным вектором, отвечающим минимальному собственному числу λ* = (**Av***, **v***). Доказывать это будем так: пусть вектор **v** (также единичной длины) ортогонален вектору **v***, покажем, что тогда он ортогонален и вектору **Av***. Это будет означать, что вектора **v*** и **Av*** параллельны, а это и значит, что вектор **v*** собственный. Возьмём линейную комбинацию векторов **v** и **v***, такую, чтобы её норма была также равна единице: $\alpha\mathbf{v}* \pm\sqrt{1-\alpha^2}\mathbf{v}$. Распишем неравенство, утверждающее минимальность функции (**Av**, **v**) на векторе **v***:

$$\left(\mathbf{A}\left(\alpha\mathbf{v}* \pm\sqrt{1-\alpha^2}\mathbf{v}\right), \alpha\mathbf{v}* \pm\sqrt{1-\alpha^2}\mathbf{v}\right) = \alpha^2(\mathbf{Av}*, \mathbf{v}*) \pm$$

$$\pm 2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(\mathbf{Av}*, \mathbf{v}) + (1-\alpha^2)(\mathbf{Av}, \mathbf{v}) \geq (\mathbf{Av}*, \mathbf{v}*)$$

Переносим первое слагаемое из левой части направо и сокращаем на $\sqrt{1-\alpha^2}$:

$$\pm 2\alpha(\mathbf{Av}*, \mathbf{v}) + \sqrt{1-\alpha^2}(\mathbf{Av}, \mathbf{v}) \geq \sqrt{1-\alpha^2}(\mathbf{Av}*, \mathbf{v}*)$$

Подставляем α = 1: $\pm 2(\mathbf{Av}*, \mathbf{v}) \geq 0$. Поскольку (**Av***, **v**) и со знаком плюс, и со знаком минус больше либо равно нулю, отсюда следует, что (**Av***, **v**) = 0. Доказательство закончено.

Приведённое доказательство не годится для бесконечномерного случая: единичная сфера не компактна, самосопряжённый оператор умножения на x (см. раздел 4) не имеет собственных чисел, а его квадратичная форма принимает все значения между a и b (функция задана на отрезке $[a, b]$), но самих значений a и b не принимает. Тем не менее вариационным методом широко пользуются. Во многих задачах теории теплопроводности, диффузии, распространения волн приходится искать собственные числа некоторых самосопряжённых дифференциальных операторов на функциональных пространствах (см. [1], тема 62). Обратные к ним операторы (интегральные) компактны – они переводят ограниченное множество в компактное. Поэтому сами операторы имеют бесконечное количество собственных чисел, уходящее на $+\infty$. Главное значение для практики имеет минимальное собственное число λ_1 (оно, например, определяет темп остывания тела). Рассматривается функционал:

$$\lambda_1 = \min_x \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \tag{36}$$

Точное решение часто бывает найти затруднительно, поэтому задачу решают приближённо: выбирают в качестве x какую-нибудь простую функцию с параметрами, а затем минимизируют (36) по этим параметрам (см. [1], темы 45, 62, 70). Полученное приближённое значение будет заведомо больше истинного, но если аппроксимирующая функция подобрана удачно, ошибка может быть невелика (в примере темы 45 из [1] всего полтора процента).

Список литературы

[1] Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш. Высшая математика. Этюды по теории и приложениям. СПб, ГИОРД, 2012 – 612 с. (Имеется в библиотеке, шифр Б27 404)

[2] Фаддеев Д.К., Соминский И.С.Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, ГРФМЛ, 1972 – 304 с. (имеется в djvu-формате на eqworld.ipmnet.ru)

[3] Фролов С.В. Простейшие функции комплексного переменного СПб, ИТМО, 2013 – 42 с. (Имеется в библиотеке, шифр Д 6668)

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

Институт холода и биотехнологий является преемником Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ), который в ходе реорганизации (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 2209 от 17 августа 2011г.) в январе 2012 года был присоединен к Санкт-Петербургскому национальному исследовательскому университету информационных технологий, механики и оптики.

Созданный 31 мая 1931года институт стал крупнейшим образовательным и научным центром, одним их ведущих вузов страны в области холодильной, криогенной техники, технологий и в экономике пищевых производств.

За годы существования вуза сформировались известные во всем мире научные и педагогические школы. В настоящее время фундаментальные и прикладные исследования проводятся по 20 основным научным направлениям: научные основы холодильных машин и термотрансформаторов; повышение эффективности холодильных установок; газодинамика и компрессоростроение; совершенствование процессов, машин и аппаратов криогенной техники; теплофизика; теплофизическое приборостроение; машины, аппараты и системы кондиционирования; хладостойкие стали;

проблемы прочности при низких температурах; твердотельные преобразователи энергии; холодильная обработка и хранение пищевых продуктов; тепломассоперенос в пищевой промышленности; технология молока и молочных продуктов; физико-химические, биохимические и микробиологические основы переработки пищевого сырья; пищевая технология продуктов из растительного сырья; физико-химическая механика и тепло-и массообмен; методы управления технологическими процессами; техника пищевых производств и торговли; промышленная экология; от экологической теории к практике инновационного управления предприятием.

На предприятиях холодильной, пищевых отраслей реализовано около тысячи крупных проектов, разработанных учеными и преподавателями института.

Ежегодно проводятся международные научные конференции, семинары, конференции научно-технического творчества молодежи.

Издаются научно-теоретический журнал «Вестник Международной академии холода» и Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Холодильная техника и кондиционирование», Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств», Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Экономика и экологический менеджмент».

В вузе ведется подготовка кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре.

Действуют два диссертационных совета, которые принимают к защите докторские и кандидатские диссертации.

Вуз является активным участником мирового рынка образовательных и научных услуг.

www.ifmo.ru

ihbt.ifmo.ru

Фролов Сергей Владимирович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г.Смирнова

Титульный редактор
Р.А.Сафарова

Компьютерная верстка
С.В.Фролов

Дизайн обложки
Н.А.Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 26.02.2015. Формат 60 × 84 1/16
Усл. печ. л. 4,42. Печ. л. 4,75. Уч.-изд. л. 4,5
Тираж 150 экз. Заказ № С 3

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9