МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Т.А. Малышева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

УДК 681.3

Малышева Т.А. Численные методы и компьютерное моделирование. Лабораторный практикум для нелинейных уравнений и их систем: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО; ИХиБТ, 2015. – 37 с.

Изложена методика выполнения лабораторных работ по нахождению различными способами корней нелинейного уравнения и по решению системы нелинейных уравнений. Представлены алгоритмы решения задач средствами Microsoft Excel, в среде программирования Fortran PowerStation, математической библиотеки IMSL. Предназначено для бакалавриата направлений 14.03.01 Ядерная энергетика и теплофизика и 16.03.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения очной и заочной форм обучения.

Рецензент: кандидат техн. наук, проф. А.В. Зайцев

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие служит руководством к лабораторным занятиям по дисциплине «Численные методы и компьютерное моделирование». Приводятся основные сведения по методам решения нелинейных уравнений (метод половинного деления, метод Ньютона): их алгоритмы, блок-схемы, условия применения и программная реализация задач. Для решения системы нелинейных уравнений рассмотрен метод Ньютона как наиболее часто применяемый. Кроме этого изложены способы нахождения корней нелинейного уравнения средствами *Microsoft Excel* и с помощью математической библиотеки IMSL, входящей в состав профессиональных версий Фортрана. На конкретных примерах разобраны алгоритмы численных методов решения поставленных задач.

Студентам рекомендуется внимательно изучить теоретические разделы и осмыслить приведенные программные коды методов перед работой на компьютере. В приложении приведены задания по лабораторным работам.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем использовать приближенный метод, уравнение надо исследовать на наличие корней и уточнить, где эти корни находятся, т.е. найти интервалы изоляции корней. ***Интервалом изоляции корня*** называется отрезок, на котором корень уравнения существует и единственен.

Существуют различные способы исследования функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ состоит в определении экстремумов функции $f(x)$, исследовании ее поведения при $x \to \pm\infty$ и нахождении участков возрастания и убывания функции.

Графический способ – это построение графика функции $f(x)$ и определение числа корней по количеству пересечений графика с осью x.

Табличный способ – это построение таблицы табулирования функции. О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции.

Чтобы не произошла потеря корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения достаточно широким.

НАХОЖДЕНИЕ КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT EXCEL

Задание: уточнить корни нелинейного уравнения $x^3 – 2{,}45x^2 – 5{,}29x + 3{,}87$. Отметим, что у полинома третьей степени имеется не более трех вещественных корней.

1. Для локализации корней построим на рабочем листе *Excel* таблицу табулирования функции, при этом выделим цветом интервалы изоляции корней (отрезок, где функция меняет знак, см. рис. 1, табл. 1).

2. По данным табл. 1 построим график функции и отформатируем элементы диаграммы.

B3 =A3^3-2,45*A3^2-5,29*A3+3,87

Таблица 1

x	y
-3	-29,310
-2,5	-13,843
-2	-3,350
-1,5	2,918
-1	5,710
-0,5	5,778
0	3,870
0,5	0,738
1	-2,870
1,5	-6,203
2	-8,510
2,5	-9,043
3	-7,050
3,5	-1,783
4	7,510
4,5	21,578
5	41,170

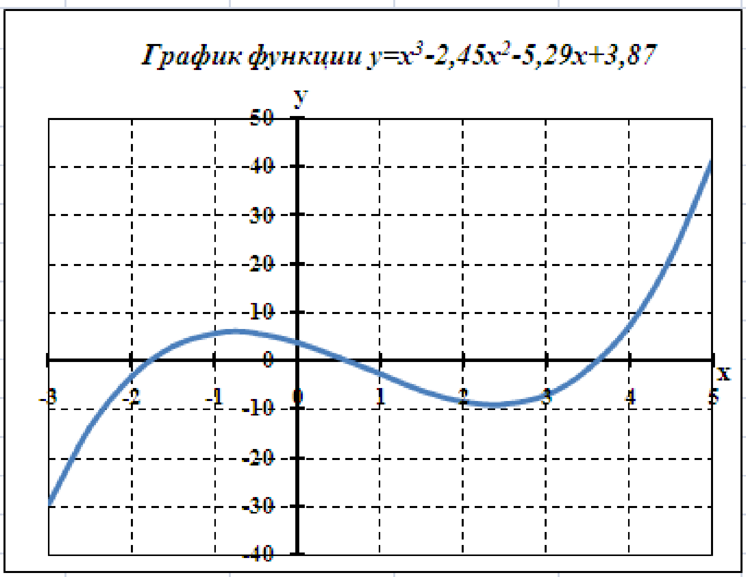


Рис. 1. Локализация корней нелинейного уравнения

3. Зададим относительную погрешность вычислений и предельное число итераций, равными 0,00001 и 100, соответственно, с помощью команды ***Сервис → Параметры → Вычисления*** (или ***Параметры Excel→ Формулы→ Параметры вычислений*** для *Excel*-2007).

4. Сформируем на рабочем листе таблицу, которая будет содержать решение задачи (см. рис. 2, табл. 2). В графу ***«Значение корня»*** введем в качестве начальных приближений к корням любые точки из отрезков локализации корней. Для нашего примера эти значения равны, например, –2,0; 0,5; 3,5. В графе ***«Значение функции»*** запишем формулу, вычисляющую значение левой части уравнения (ее можно скопировать из табл.1).

5. Определим корни нелинейного уравнения методом последовательных приближений с помощью команды ***Сервис → Подбор параметра*** (или ***Данные → Анализ «что-если» → Подбор параметра*** для Excel-2007). Для этого заполним диалоговое окно ***Подбор параметра*** следующим образом:

– в поле ***Установить в ячейке*** введем ссылку на ячейку, в которую введена формула для уравнения в табл. 2;

– в поле ***Значение*** введем **0** (правая часть уравнения);

– в поле ***Изменяя значение ячейки*** запишем ссылку на ячейку, отведенную под переменную (искомый корень уравнения).

Отметим, что вводить ссылки на ячейки удобнее не с клавиатуры, а щелчком по соответствующей ячейке. При этом они автоматически будут превращаться в абсолютные ссылки (в нашем примере C24, B24).

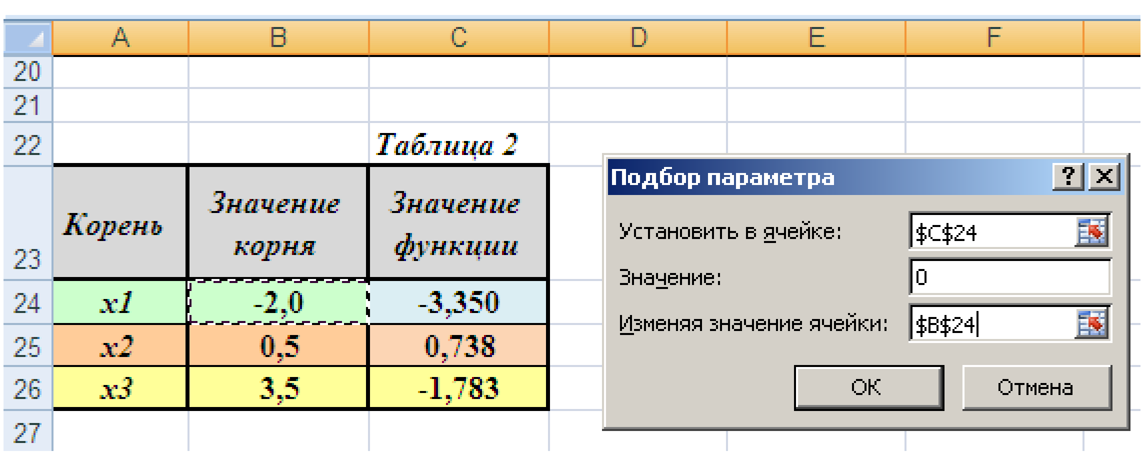


Рис. 2. Уточнение корней нелинейного уравнения средствами *Excel*

После успешного завершения поиска решения в диалоговом окне ***Результат подбора параметра*** (рис. 3) воспроизводится текущее значение функции, которое приблизительно равно нулю. Приближенное значение корня помещается в ячейке B24.

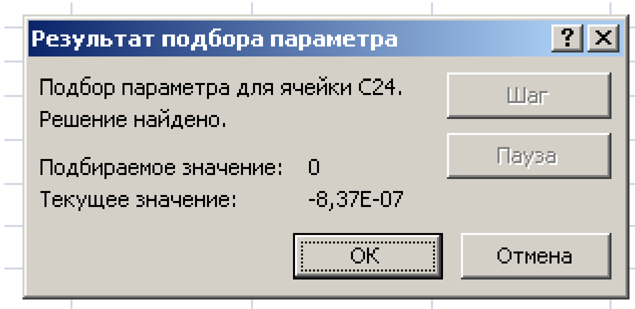


Рис. 3. Диалоговое окно «Результат подбора параметра»

6. Аналогично найдем два оставшихся корня. Они равны приблизительно 0,60419 и 3,61678. В конечном итоге в табл. 2 будут отражаться уточненные корни уравнения и их значения функции (см. рис. 4). Обратите внимание на форматирование ячеек с числовыми данными.

	A	B	C
22			***Таблица 2***
23	***Корень***	***Значение корня***	***Значение функции***
24	***x1***	**-1,77097**	**-8,37E-07**
25	***x2***	**0,60419**	**8,94E-10**
26	***x3***	**3,61678**	**1,28E-09**

Рис. 4. Уточненные корни уравнения

ПРИБЛИЖЕННЫЕ (ИТЕРАЦИОННЫЕ) МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод половинного деления

Этот метод иначе называют методом деления отрезка пополам, методом бисекций или методом дихотомии. Он один из простейших и наиболее надежных методов нахождения корней уравнения.

Идея метода заключается в следующем. Начальный интервал изоляции корня $[a_0, b_0]$ делим пополам, т.е. находим середину отрезка: $x_0=(a_0+b_0)/2$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка ($[a_0, x_0]$ или $[x_0, b_0]$), на концах которого функция имеет разные знаки. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1=(a_1+b_1)/2$. и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше заданной точности: $|b_n - a_n| \le \varepsilon$ или $\left| f(x_i) \right| \le \varepsilon$.

Рабочая формула метода: $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$.

Рассмотренный метод является методом прямого поиска. В нем для нахождения корня используется нахождение значения функции в различных точках интервала $[a, b]$. На рис. 5 представлена графическая иллюстрация метода.

<u>Задание</u>: уточнить крайний правый корень нелинейного уравнения $x^3–2{,}45x^2–5{,}29x+3{,}87=0$ методом половинного деления с погрешностью $\varepsilon=10^{-2}$. Вычисления оформить в виде таблицы (см. табл. 3).

Таблица 3

Уточнение корня уравнения методом половинного деления

№ шага	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\|a–b\|$
1	3	4	3,5	–7,050	7,510	–1,783	1
2	3,5	4	3,75	–1,783	7,510	2,314	0,5
3	3,5	3,75	3,625	–1,783	2,314	0,134	0,25
4	3,5	3,625	3,5625	–1,783	0,134	–0,856	0,125
5	3,5625	3,625	3,59375	–0,856	0,134	–0,369	0,0625
6	3,59375	3,625	3,60938	–0,369	0,134	–0,1197	0,03125
7	3,60938	3,625	3,61719	–0,1197	0,134	0,0066	0,01522
8	3,60938	3,61719	3,61328	–0,1197	0,0066	–0,0567	0,00781

В результате расчета приближенное значение корня: $x = 3{,}61328$ при точности $\varepsilon = 10^{-2}$.

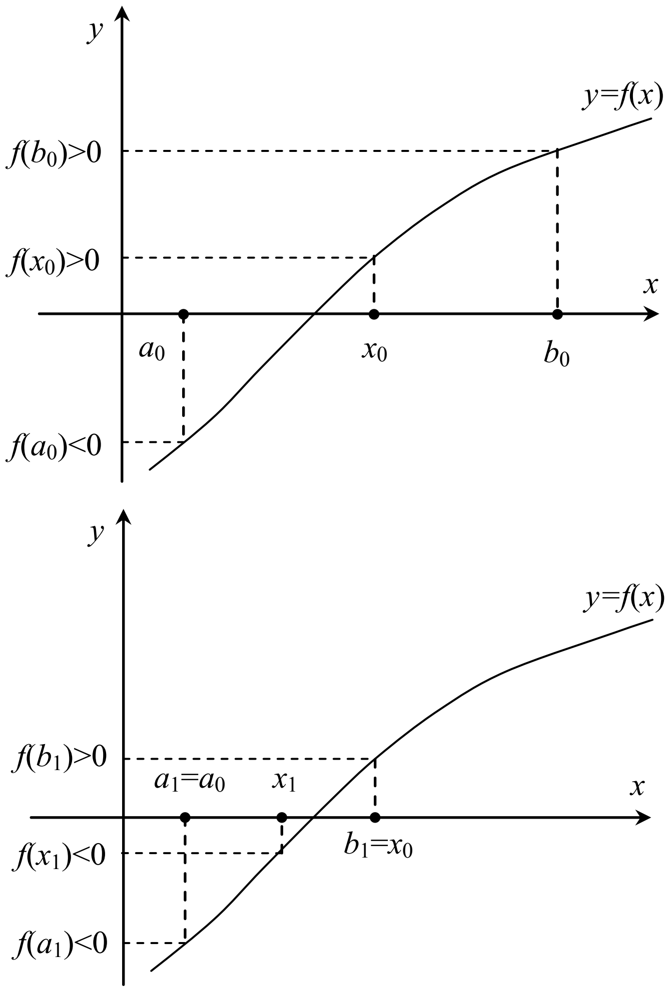


Рис. 5. Графическая иллюстрация метода половинного деления

Метод половинного деления довольно медленный, однако он всегда сходится, т.е. при его использовании решение получается всегда, причем с заданной точностью. Требуемое обычно большее число итераций по сравнению с некоторыми другими методами не является препятствием к применению этого метода, если каждое вычисление значения функции $f(x)$ несложно.

Блок-схема метода приведена на рис. 6.

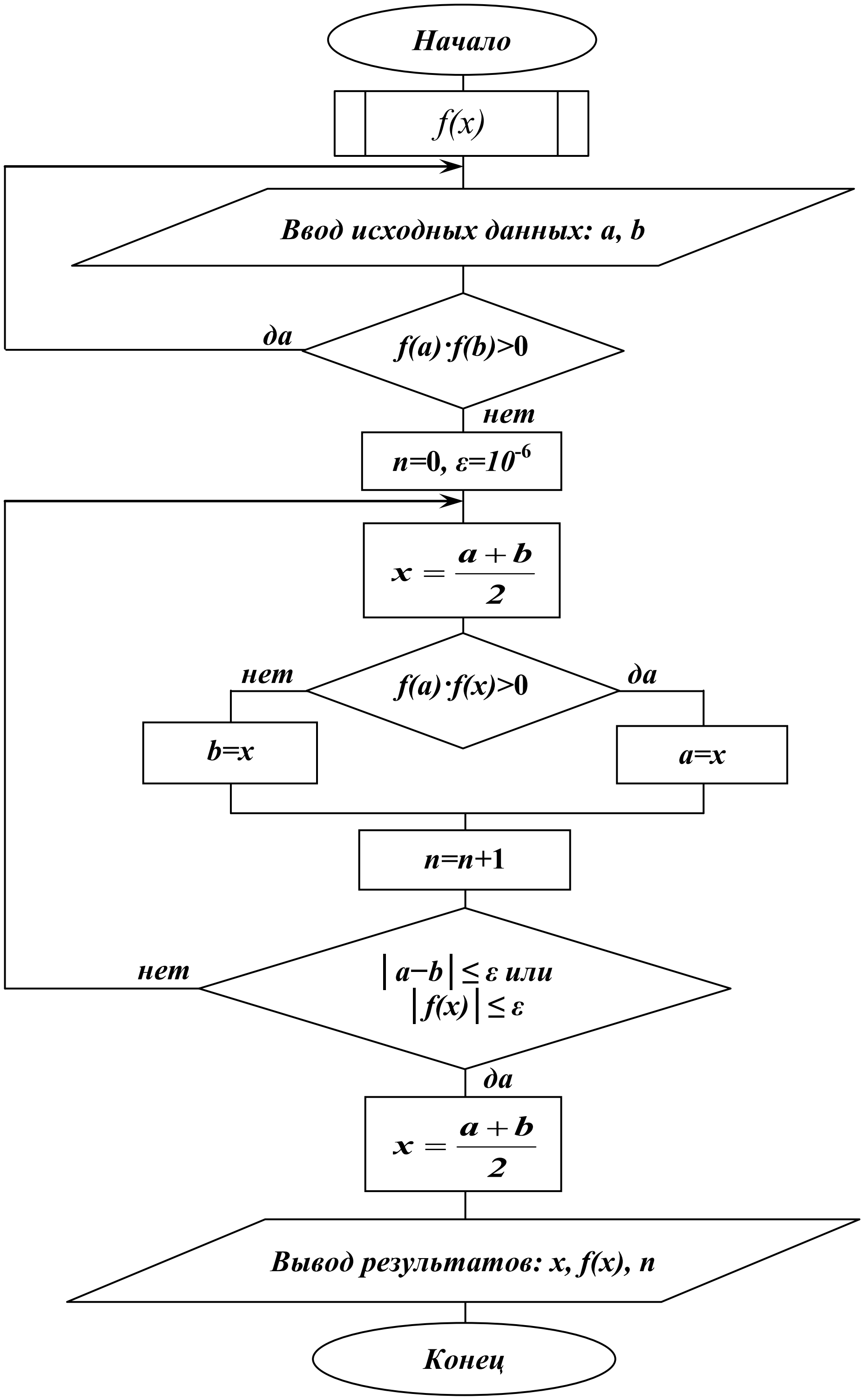


Рис. 6. Блок-схема метода половинного деления

Задание: написать и отладить программный код, реализующий метод половинного деления (см. рис. 7). Проанализировать полученные результаты (*x* – найденный корень уравнения, *f*(*x*) – значение функции в корне, *n* – количество итераций).

```
program mpd
real:: a,b,x,eps=1e-6
integer n
do
print*,'Введите интервал изоляции корня'
read*,a,b
if(f(a)*f(b)<0) then
exit
else
print*,'На этом отрезке нет корня, повторите ввод!'
end if
enddo
n=0
do
x=(a+b)/2
if(f(a)*f(x)>0) then
a=x
else
b=x
end if
n=n+1
if (abs(a-b)<=eps .or. abs(f(x))<=eps ) exit
enddo
x=(a+b)/2
print*, x ,f(x),n
end

function f(x)
f=x**3-2.45*x**2-5.29*x+3.87
end
```

Рис. 7. Программный код метода половинного деления

Метод Ньютона (метод касательных)

Метод Ньютона относится к градиентным методам, в которых для нахождения корня используется значение производной. Метод Ньютона основан на замене исходной функции *f*(*x*) на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью *x* дает приближение корня (см. рис. 8).

Геометрическая интерпретация такова: участок кривой $y = f(x)$ при $x \in [x_k, x_{k+1}]$, если $x_k < x_{k+1}$, или $x \in [x_{k+1}, x_k]$, если $x_{k+1} < x_k$, заменяется отрезком касательной, проведённой из точки x_k.

Уравнение касательной имеет вид: $y = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)$. Найдем точку пересечения касательной с осью $y = 0$: $0 = f(x_k) + +(x_{k+1} - x_k)f'(x_k)$, которую обозначим x_{k+1}. Откуда рабочая формула метода:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разница между текущим и последующим приближениями к корню не станет меньше заданной точности: $|x_k - x_{k+1}| \le \varepsilon$. Для окончания итерационного процесса также может быть использовано условие: $|f(x_k)| \le \varepsilon$.

В методе Ньютона на каждой итерации объем вычислений больший, чем в других методах, т.к. приходится вычислять не только значения функции, но и ее производной. Однако этот метод имеет квадратичную скорость сходимости.

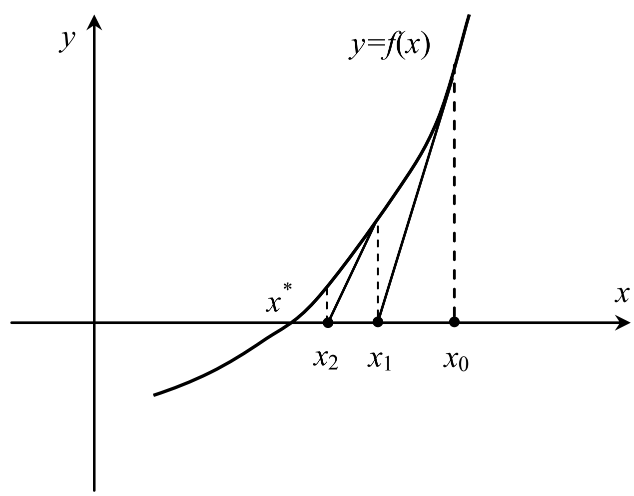


Рис. 8. Графическая иллюстрация метода Ньютона

<u>Задание</u>: уточнить крайний левый корень нелинейного уравнения $x^3 – 2{,}45x^2 – 5{,}29x + 3{,}87 = 0$ методом Ньютона с погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Вычисления оформить в виде таблицы (см. табл. 4).

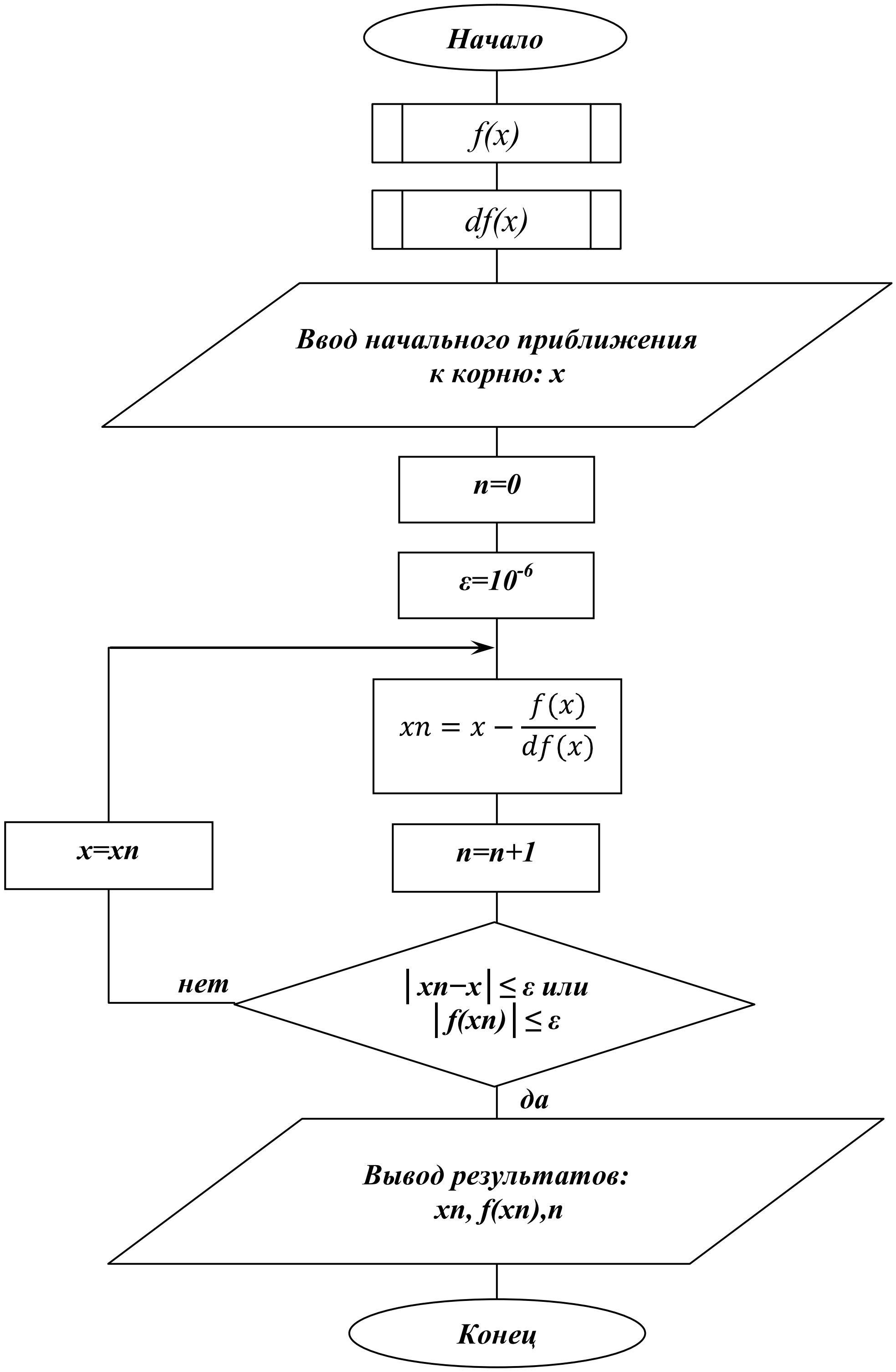


Рис. 9. Блок-схема метода Ньютона

Выбор начального приближения определяется следующим образом. Если известен интервал изоляции корня уравнения, в котором $f''(x)$ не меняет знак, то в качестве начального приближения берут тот конец интервала изоляции, для которого знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают. Крайний левый корень принадлежит интервалу [–2,–1] (см. рис. 1). Убедимся, что $f''(x)$ не меняет знака на этом отрезке: $f''(x)$=6x–4,9; $f''(x)$<0 при x<0, т.е. $f''(x)$<0 на интервале [–2,–1]. Так как $f(-2)=-3{,}35<0$, то в качестве начального приближения выбираем $x_0=-2$.

Таблица 4

Уточнение корня уравнения методом Ньютона

№ итерации	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_k - x_{k+1} \rvert$
1	–2	–3,350	16,510	–1,7971	0,202
2	–1,7971	–0,339	13,204	–1,7714	0,026
3	–1,7714	–0,0052	12,803	–1,7709	0,0004

Как видно из табл. 4, решение задачи найдено за три шага вычислений, т.е. процесс сошелся уже на третьей итерации. В качестве корня можно взять значение: $x = -1{,}7714$.

Блок-схема метода приведена на рис. 9.

Задание: написать и отладить программный код, реализующий метод Ньютона (см. рис. 10). Сравнить полученные результаты с предыдущей программой.

```
program kas
real:: x,xn,eps=1e-6
integer n
print*,'Введите начальное приближение к корню'
read*,x
n=0
do
xn=x-f(x)/df(x)
n=n+1
if (abs(xn-x)<=eps .or. abs(f(xn))<=eps ) exit
x=xn
enddo
print*, xn ,f(xn),n
end

function f(x)
f=x**3-2.45*x**2-5.29*x+3.87
end
function df(x)
df=3*x**2-4.9*x-5.29
end
```

Рис. 10. Программный код метода Ньютона

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЦЕДУРАМИ IMSL

Математическая библиотека IMSL, входящая в состав профессиональных версий Фортрана, позволяет быстро получить решение необходимой задачи. Алгоритмы решения записаны в виде процедур, которые формируют библиотечные модули. Доступ к библиотечным модулям выполняется посредством использования оператора *use*. Для нахождения корней нелинейного уравнения используется модуль с именем *msimslms*.

Для поиска вещественных корней на заданном отрезке IMSL применяет гибридный алгоритм, включающий метод бисекций, метод секущих и обратную квадратичную интерполяцию. На каждом шаге для вычисления очередного приближения выбирается наиболее подходящий метод. Рассмотрим программы, позволяющие решить поставленную задачу.

Подпрограмма ZBREN

Назначение: выполняет поиск вещественного корня на заданном интервале.

Вызов подпрограммы:

CALL ZBREN(*f, errabs, errrel, a, b, maxfn*)

Параметры подпрограммы: Пользовательская функция: *f*
Входные: *errabs, errrel*
Входные/выходные: *a, b, maxfn*

f − вещественная внешняя функция одного вещественного аргумента, корень которой требуется найти; имеет вид $f(x)$. Функция должна обладать атрибутом EXTERNAL.

errabs − первый критерий завершения вычислений. Корень принимается, если $|\,f(x)\,| \le errabs$,

errrel − второй критерий завершения вычислений. Корень принимается, если $|x^k - x^{k+1}| \le errrel$, где x^k – текущее приближение к корню, x^{k+1} – последующее приближение к корню, *a* и *b* − начало и конец интервала изоляции корня, причем $f(a)$ и $f(b)$ должны иметь разный знак. На выходе и *a,* и *b* отличны от начальных значений, причем *b* содержит приближенное значение корня функции *f*,

maxfn − на входе задает максимально допустимое число итераций, на выходе содержит число выполненных итераций.

На рис. 11 представлена программа нахождения корней нелинейного уравнения с помощью библиотечного модуля ZBREN.

<u>Пояснения к программе</u>: программа анализирует введенные значения a и b. Если интервал содержит корень, то управление передается на стандартную процедуру. Если введен неверный интервал, то ввод нужно будет повторить. Если же (что маловероятно) в качестве a или b ввели искомый корень уравнения (т.е. $f(a)\cdot f(b)=0$), то будут выводиться значения функции на концах интервала. Для нахождения всех трех корней заданного уравнения необходимо запустить программу на выполнение трижды.

```
program  nlu1
use msimslms
external f
real :: a,b,errabs=1E-06,errrel=1E-06
integer :: maxfn=100
do
print*, 'Введите интервал  изоляции корня'
read*, a, b
if (f(a)*f(b)<0) then
exit
else if (f(a)*f(b)>0) then
print*,'Этот интервал не содержит корень'
else
print*,'a или b есть корень уравнения'
print*, f(a),f(b)
stop
endif
enddo
call zbren (f,errabs,errrel,a,b,maxfn)
print*,'Корень уравнения=',b
print*,'Значение  функции в корне уравнения =',f(b)
print*,'Число выполненных итераций=',maxfn
end

function f(x)
real f,x
f=x**3-2.45*x**2-5.29*x+3.87
end
```

Рис. 11. Программа нахождения корней нелинейного уравнения с помощью библиотечного модуля ZBREN

Следующая программа позволяет получить одновременно нужное количество корней.

<u>Подпрограмма ZREAL</u>

<u>Назначение</u>: выполняет поиск вещественных корней.

<u>Вызов подпрограммы</u>: **CALL ZREAL (*f, errabs, errrel, eps, eta, nroot, itmax, xguess, x, info*)**

<u>Параметры подпрограммы</u>: Пользовательская функция: *f*

Входные: *errabs, errrel, eps, eta, nroot, itmax, xguess*

Входные/выходные: *x, info*

f, errabs, errrel – см. выше,

eps, eta – критерии локализации кратных корней,

nroot – число корней, которые должна найти **ZREAL**,

itmax – максимально допустимое число итераций на один корень,

xguess – одномерный массив размерностью *nroot*, содержащий начальные приближения корней,

x – одномерный массив размерностью *nroot*, содержащий вычисленные корни,

info – целочисленный одномерный массив размерностью *nroot*. Элемент *info*(*j*) содержит число итераций, использованных при поиске *j* – корня. Если процесс поиска *j* – корня не сошелся за *itmax* итераций, *info* (*j*) будет равен *itmax* + 1.

На рис. 12 представлена программа нахождения корней нелинейного уравнения с помощью библиотечного модуля ZREAL.

<u>Пояснения к программе</u>: в качестве фактических параметров использованы собственные имена (см. табл. 5), что никак не отражается на результатах работы программы. Ввод начальных приближений осуществляется с клавиатуры, в качестве которых можно выбрать любые точки из отрезков локализации корней, либо по графику (см. рис. 1).

Вывод результатов организован в файл с именем res (см. рис. 13). Сначала статус этого файл определен как «new» в операторе OPEN, при повторном запуске программы его необходимо изменить на «old». При этом использован форматированный вывод, который обеспечивает вывод результатов с помощью дескрипторов преобразования в удобном для нас виде.

```
program  nlu2
use msimslms
external f
integer, parameter:: n=3
real :: eps1=1E-06,eps2=1E-06,eps3=1E-06,eps4=1E-06
real :: x(n),  x0(n)
integer :: it(n),  itmax = 100
open(7,file='res',status='new')
print*, 'Введите начальные приближения корней '
read*, (x0(i),i=1,n)
call  zreal (f,eps1,eps2,eps3,eps4,n,itmax,x0,x,it)
write(7,2)
2 format ('Корень',8X,'Функция',5X,'Итерации')
do i=1,n
write(7,1) x(i),f(x(i)),it(i)
1 format (F8.5,5X,E10.3,5X,I3)
end do
end

function f(x)
real f,x
f=x**3-2.45*x**2-5.29*x+3.87
end
```

Рис. 12. Программа нахождения корней нелинейного уравнения с помощью библиотечного модуля ZREAL

Таблица 5

Соответствие формальных и фактических параметров для процедуры ZREAL в программе nlu2

Наименование параметра	Формальный параметр	Фактический параметр
Пользовательская функция	f	f
Погрешность вычисления	errabs	eps1
Погрешность вычисления	errrel	eps2
Погрешность вычисления	eps	eps3
Погрешность вычисления	eta	eps4
Количество корней	nroot	n
Максимально допустимое число итераций	itmax	itmax
Начальные приближения корней	xguess	x0
Вычисленные значения корней	x	x
Выполненное число итераций	info	it

```
Корень          Функция      Итерации
-1.77097        -.159E-06       7
  .60419        -.170E-06       4
 3.61678         .783E-06       4
```

Рис. 13. Результаты работы программы nlu2 (содержимое файла res)

Порядок выполнения лабораторной работы № 1

1. На рабочем листе *Excel* сформировать таблицу табулирования функции, построить график и уточнить корни заданного уравнения (см. стр. 4–5).

2. Написать и отладить программы методов половинного деления и Ньютона в среде программирования *Microsoft Development Studio* (см. рис. 7, рис. 10).

3. Выполнить программу и сравнить полученные результаты с результатами листа *Excel*.

4. Получить результаты работы программы математической библиотеки ZREAL (рис. 12).

5. Создать отчет, который должен содержать следующее:

5.1. Титульный лист,

5.2. Цель работы,

5.3. Рабочий лист *Excel* (см. рис. 1, рис. 2),

5.4. Уточнение одного из корней методом половинного деления (выполнить 5 итераций, см. табл. 3),

5.5. Текст программы и результаты работы программы метода половинного деления,

5.6. Уточнение одного из корней методом Ньютона (выполнить 3 итерации, см. табл. 4),

5.7. Текст программы и результаты работы программы метода Ньютона,

5.8. Текст программы ZREAL и результаты работы программы,

5.9. Выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT EXCEL

Задание: Требуется найти решение системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y - 3x^2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Пара (x, y) является решением системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением следующего уравнения с двумя неизвестными:

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 + (y - 3x^2)^2 = 0 \qquad (2)$$

Т.е. вместо системы (1) будем решать равносильное ей уравнение (2). Отметим, что решение системы уравнений (1) являются точки пересечения окружности радиусом, равным 2, и параболы $y = 3x^2$. Следовательно, уравнение (2) имеет не более двух различных решений (см. рис. 14). Построим таблицу табулирования уравнения (2) на рабочем листе *Excel*. Для этого по графику определим интервалы, содержащие корни уравнения (2). Например, выберем интервал [–1, 1] для x и интервал [0, 3] для y. Результаты табуляции приведены на рис. 15.

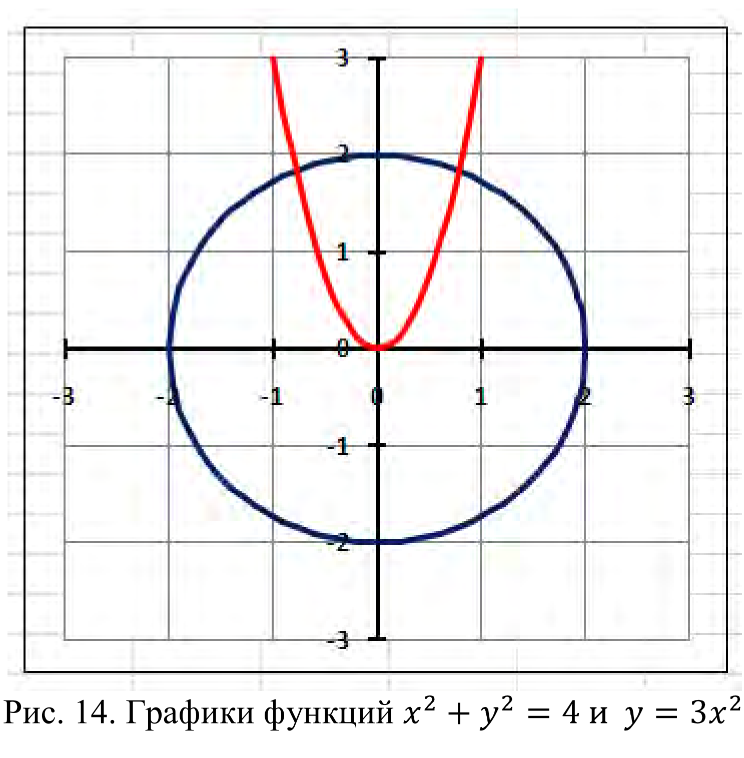


Рис. 14. Графики функций $x^2 + y^2 = 4$ и $y = 3x^2$

В ячейки B3:B13 введены значения x, в ячейки C2:I2 – значения y. В ячейку C3 введена формула, вычисляющая правую часть уравнения (2) при значениях x и y из ячеек B3 и C2, соответственно. Скопируем эту формулу на диапазон ячеек C3:I13. Для правильного вычисления значений функции (2) необходимо использовать в формуле абсолютную адресацию (для значений x фиксируем имя столбца, для значений y – номер строки).

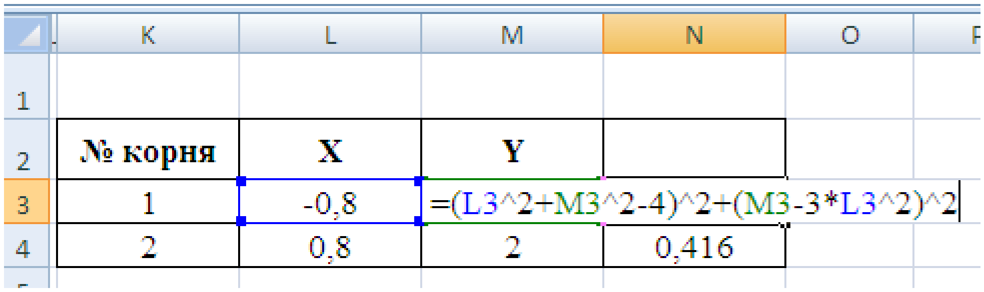
Так как мы ищем нули функций (1), то в таблице выделим два значения, наиболее приближенные к нулю. За начальные приближения к корням разумно выбрать следующие пары значений (–0,8; 2) и (0,8; 2).

C3 fx =($B3^2+C$2^2-4)^2+(C$2-3*$B3^2)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$(x^2+y^2-4)^2+(y-3x^2)^2$		Y						
2			0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
3		-1	18	13,8125	8	2,8125	2	10,8125	36
4		-0,8	14,976	11,6885	6,416	1,4085	0,416	8,6885	32,976
5		-0,6	14,416	11,8285	6,976	2,1085	0,976	8,8285	32,416
6		-0,4	14,976	12,8885	8,336	3,5685	2,336	9,8885	32,976
7		-0,2	15,696	13,9085	9,536	4,8285	3,536	10,9085	33,696
8	X	0	16	14,3125	10	5,3125	4	11,3125	34
9		0,2	15,696	13,9085	9,536	4,8285	3,536	10,9085	33,696
10		0,4	14,976	12,8885	8,336	3,5685	2,336	9,8885	32,976
11		0,6	14,416	11,8285	6,976	2,1085	0,976	8,8285	32,416
12		0,8	14,976	11,6885	6,416	1,4085	0,416	8,6885	32,976
13		1	18	13,8125	8	2,8125	2	10,8125	36

Рис. 15. Таблица табулирования функции $(x^2 + y^2 - 4)^2 + (y - 3x^2)^2 = 0$

Построим новую таблицу (см. рис. 16), где будут отражаться результаты вычислений. Введем начальные приближения корней, например, в ячейки L3:M4. В ячейки N3, N4 введем формулу для уравнения (2), ее можно скопировать из предыдущей таблицы, изменив адресацию ячеек.



№ корня	X	Y	
1	-0,8	=(L3^2+M3^2-4)^2+(M3-3*L3^2)^2	
2	0,8	2	0,416

Рис. 16. Таблица начальных приближений

Зададим относительную погрешность вычислений и предельное число итераций, равными 0,00001 и 100, соответственно, с помощью команды ***Сервис → Параметры → Вычисления*** (или ***Параметры Excel → Формулы → Параметры вычислений*** для *Excel*-2007).

Далее уточним значения корней с помощью команды ***Сервис→Поиск решения*** (***Данные→Поиск решения*** для Excel-2007). В диалоговом окне ***Поиск решения*** в поле ***Установить целевую ячейку*** вводим ссылку на ячейку N3. Обратите внимание, если ввод адреса ячейки осуществляется с помощью левой кнопки мыши, то в поле команды отражается абсолютная ссылка, т.е. N3. В группе ***Равной*** установим переключатель в положение ***Значению***, в поле ввода которого отобразим **0.** В поле ***Изменяя ячейки*** вводим ссылки на ячейки с будущими ответами (см. рис. 17, 18).

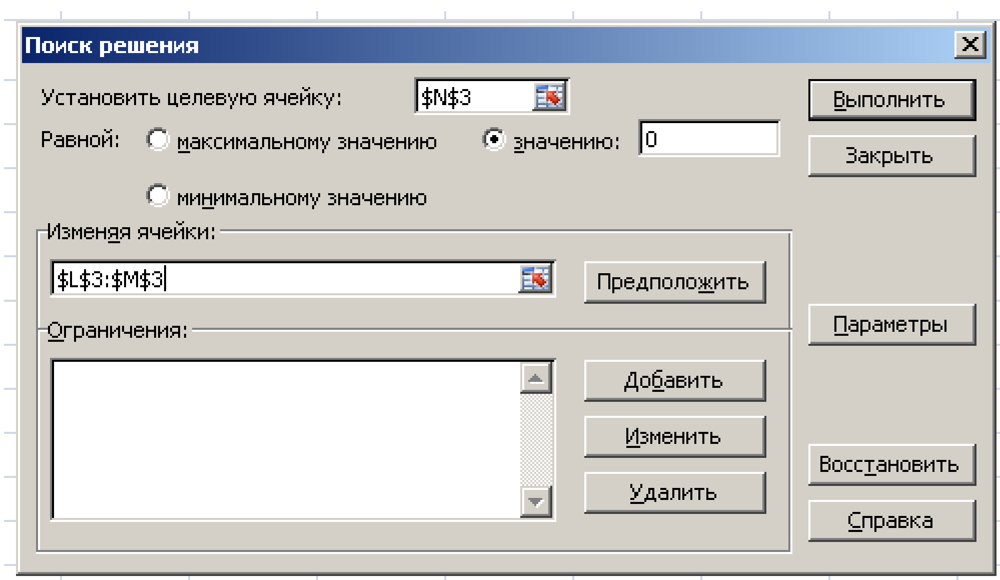


Рис. 17. Диалоговое окно «Поиск решения»

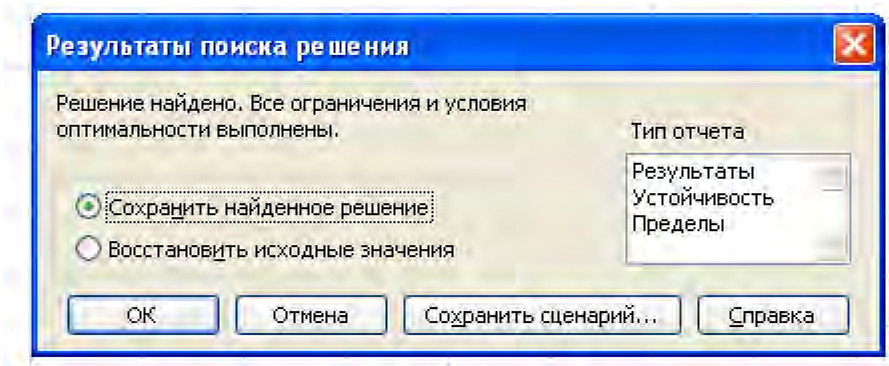


Рис. 18. Результаты поиска решения

После выполнения команды решение помещается в ячейки L3 и M3. В данном случае это будут значения –1,2687312 и 1,1791222. В ячейке N3 вычисляется значение правой части уравнения (2) при этих значениях неизвестных. Так как средство поиска находит решение приближенно, то в ячейке N3 в общем случае будет число, отличное от нуля, но достаточно близкое к нему. Аналогично находится второе решение, используя начальное приближение (0,8; 2). Решение задачи приведено на рис. 19.

L3 f_x -0,783100150074277

№ корня	X	Y	F(X,Y)
1	-0,78310	1,840147	5,447E-07
2	0,78310	1,840147	5,476E-07

Рис. 19. Таблица результатов

ПРИБЛИЖЕННЫЕ (ИТЕРАЦИОННЫЕ) МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть для вычисления неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ требуется решить систему нелинейных уравнений:

$$
\begin{cases}
F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\
F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0
\end{cases}
\qquad (3)
$$

В отличие от систем линейных уравнений не существует прямых методов решения нелинейных систем общего вида. Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно. Например, для случая двух уравнений иногда удается выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного уравнения относительно одного неизвестного.

Для решения систем нелинейных уравнений обычно используют итерационные методы (простой итерации, метод Ньютона).

Метод Ньютона

Метод Ньютона обладает гораздо более быстрой сходимостью, чем метод простой итерации. К основе метода лежит использование разложения функций $F_i\ x_1, x_2, \dots, x_n$ в окрестности некоторой фиксированной точки в ряд Тейлора, причем члены, содержащие вторые (и более высоких порядков) производные, отбрасываются. Пусть начальные приближения неизвестных системы (3) получены и равны соответственно $a_1, a_2, \dots, a_n$. Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, благодаря которым решение системы запишется в виде

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1\ ,\ x_2 = a_2 + \Delta x_2\ , \dots, x_n = a_n + \Delta x_n \qquad (4)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (3) с учетом (4) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:

$$
\begin{cases}
F_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \approx F_1(a_1,a_2,\dots,a_n) + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n \\
F_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \approx F_2(a_1,a_2,\dots,a_n) + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}\Delta x_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_n(x_1,x_2,\dots,x_n) \approx F_n(a_1,a_2,\dots,a_n) + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n
\end{cases}
\tag{5}
$$

Поскольку в соответствии с (3) левые части этих выражений должны обращаться в нуль, то приравняем к нулю и правые части. Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_1 \\
\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_n
\end{cases}
\tag{6}
$$

Значения $F_1, F_2, \dots, F_n$ и их производные вычисляются при $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$. Определителем системы (6) является *якобиан*:

$$
J = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \dots\dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \dots\dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\
\dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} \dots\dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
\tag{7}
$$

Таким образом, итерационный процесс решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона состоит в определении приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ к значениям неизвестных на каждой итерации. Счет прекращается, если все приращения становятся малыми по абсолютной величине: $\max|\Delta x_i \le \varepsilon|$. В методе Ньютона также важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Требуется построить последовательность $\{x_i, y_i\}$, которая при определенных условиях сходится к решению системы. Пусть задано начальное приближение $\{x_0, y_0\}$ (его можно определить графическим методом). Тогда очередное приближение:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \end{cases}$$

Разложим функцию в окрестности некоторой фиксированной точки по формуле Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + R = 0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = g(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + R = 0 \end{cases}$$

Пренебрегая остаточным членом, получаем:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -f(x_0,y_0)\right) \\ \left(\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -g(x_0,y_0)\right) \end{cases}$$

Введем матрицу Якоби:

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Тогда вместо системы нелинейных уравнений будем решать систему линейных уравнений относительно $\Delta x, \Delta y$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

А далее вычислять на каждой итерации:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \text{ и } y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\,,$$

где x_i – текущее приближение к корню, x_{i+1} – последующее приближение, $\Delta x_i\,, \Delta y_i$ – приращения к очередным приближениям.

Процесс вычисления заканчивается при выполнении следующих условий:

$$\left|x_{i+1}-x_i\right| \le \varepsilon,\ \ \left|y_{i+1}-y_i\right| \le \varepsilon.$$

<u>Рассмотрим пример:</u> Найти решение системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=3x^2 \end{cases} \to \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ -3x^2+y=0 \end{cases}$$

Как отмечено ранее, система имеет не более двух различных решений. Построим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial g}{\partial x}=-6x \quad \frac{\partial g}{\partial y}=1$$

Тогда будем решать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases} \qquad (8)$$

Определим начальные приближения (см. рис. 14): $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Подставим эти значения в систему уравнений (8). Тогда система (8) на первой итерации будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2\Delta x + 4\Delta y = -1 \\ -6\Delta x + \Delta y = 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Решать эту систему относительно неизвестных $\Delta x,\ \Delta y$ можно любым известным способом. Получаем $\Delta x = -0{,}192$ и $\Delta y = -0{,}154$. Тогда $x_1 = x_0 + \Delta x = 1 - 0{,}192 = 0{,}808$ и $y_1 = y_0 + \Delta y = 2 - 0{,}154 = 1{,}846$. Новые приближения x_1, y_1 подставляем в систему (8) и, решая ее заново, найдем сначала Δx и Δy, а затем значения $x_2 = x_1 + \Delta x$, $y_2 = y_1 + \Delta y$ и т.д.

Блок-схема метода Ньютона представлена рис. 20, программный код – на рис. 21.

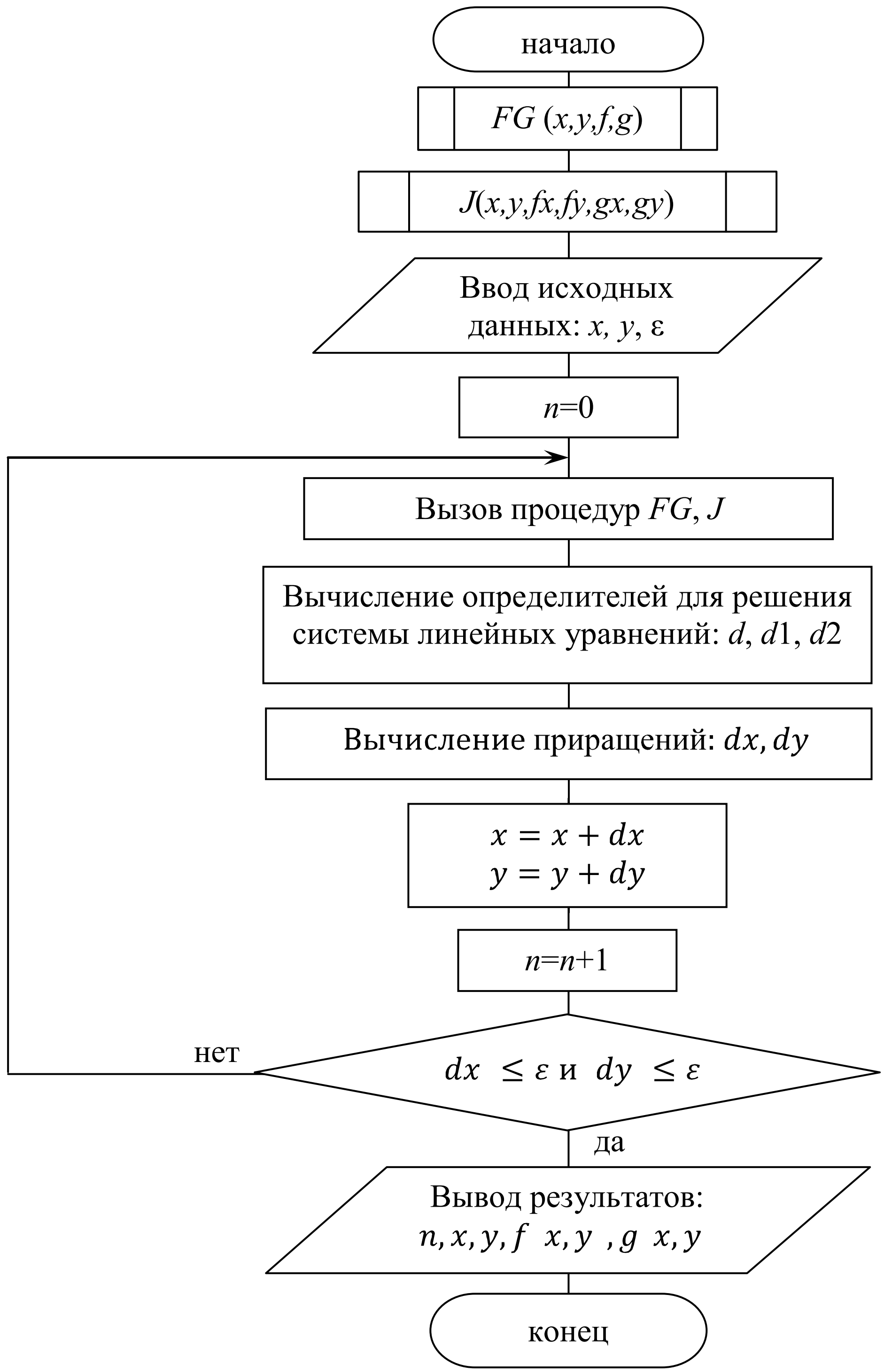


Рис. 20. Укрупненная блок-схема метода Ньютона
для решения системы нелинейных уравнений 2 порядка

```
program snu
real x,y,f,g,fx,fy,gx,gy,d,d1,d2,dx,dy
real:: eps=1E-6
print*,'vvedite x0 i y0'
read*,x,y
n=0
do
call FG (x,y,f,g)
call J (x,y,fx,fy,gx,gy)
d=fx*gy-fy*gx
d1=-f*gy+fy*g
d2=-fx*g+f*gx
dx=d1/d; dy=d2/d
n=n+1
x=x+dx; y=y+dy
if (abs(dx)<=eps.and.abs(dy)<=eps) EXIT
end do
call FG (x,y,f,g)
print 2, n,x,y,f,g
2 format (3x,'n=',i2,4x,'x=',f8.5,4x,'y=',f8.5&
/3x,'f(x,y)=',e10.3,4x,'g(x,y)=',e10.3)
end

subroutine FG (x,y,f,g)
real f,x,y,g
f=x**2+y**2-4
g=y-3*x**2
end

subroutine J (x,y,fx,fy,gx,gy)
real x,y,fx,fy,gx,gy
fx=2*x
fy=2*y
gx=-6*x
gy=1
end
```

Рис. 21. Программа решения системы нелинейных уравнений 2 порядка методом Ньютона

Пояснения к программе:

1. Значения функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ вычисляются в процедуре: *Subroutine FG* (*x, y, f, g*), где: *x*, *y* – очередные приближения к корню, *f*, *g* – значения функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Входными параметрами являются *x*, *y*, выходными – *f*, *g*.

Для нашего примера: *f*=*x***2+*y***2–4, *g*=*y*–3**x***2

2. Значения производных функций вычисляются в процедуре: *Subroutine J*(*x, y, fx, fy, gx, gy*), где: *x*, *y* – очередные приближения к корню, *fx* – $\partial f(x, y)/\partial x$, *fy* – $\partial f(x, y)/\partial y$, *gx* – $\partial g(x, y)/\partial x$, *gy* – $\partial g(x, y)/\partial y$.

Входными параметрами являются x, y, выходными – *fx, fy, gx, gy*.

Для нашего примера: *fx*=2*x, *fy*=2*y, *gx*=–6*x, *gy*=1

3. Значения приращений $\Delta x\ (dx), \Delta y(dy)$ вычисляются через определители системы (d, $d1$, $d2$).

Порядок выполнения лабораторной работы № 2

1. На рабочем листе *Excel* сформировать таблицу табулирования функции, построить график и уточнить корни заданной системы нелинейных уравнений (см. стр. 22–26).
2. Написать и отладить программу метода Ньютона в среде программирования *Microsoft Development Studio* (см. рис. 21).
3. Выполнить программу и сравнить полученные результаты с результатами листа *Excel*.
4. Создать отчет, который должен содержать следующее:
   - 4.1. Титульный лист,
   - 4.2. Цель работы,
   - 4.3. Рабочий лист *Excel* с графиком функций, таблицей табулирования функции и уточненными значениями корней,
   - 4.4. Уточнение одного из корней методом Ньютона (вычислить x_2 и y_2, задавая x_0 и y_0),
   - 4.5. Текст программы и результаты работы программы Ньютона,
   - 4.6. Выводы.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Варианты заданий для лабораторной работы № 1

№ варианта	Функция	a	b
1	$2,74x^3 - 1,93x^2 - 15,28x - 3,72$	–3	4
2	$-1,38x^3 - 5,42x^2 + 2,57x + 10,95$	–5	3
3	$x^3 + 2,84x^2 - 5,606x - 14,766$	–4	3
4	$x^3 - 1,89x^2 - 2x + 1,76$	–3	4
5	$-2,7x^3 - 1,48x^2 + 19,23x + 6,35$	–4	4
6	$2x^3 + 3,41x^2 - 23,74x + 2,95$	–5	4
7	$x^3 + 2,28x^2 - 1,934x - 3,907$	–4	2
8	$3x^3 + 1,7x^2 - 15,42x + 6,89$	–4	3
9	$-1,8x^3 - 2,94x^2 + 10,37x + 5,38$	–5	4
10	$x^3 - 3,125x^2 - 3,5x + 2,458$	–3	5
11	$4,45x^3 + 7,81x^2 - 9,62x - 8,17$	–4	3
12	$x^3 - 4,5x^2 - 9,21x - 0,383$	–3	7
13	$x^3 + 4,81x^2 - 17,37x + 5,38$	–8	3
14	$2,3x^3 + 5,75x^2 - 7,41x - 10,6$	–4	3
15	$-2,4x^3 + 1,27x^2 + 8,63x + 2,31$	–2	3
16	$1,8x^3 - 2,47x^2 - 5,53x + 1,539$	–3	3
17	$x^3 - 3,78x^2 + 1,25x + 3,49$	–2	4
18	$-x^3 + 5,67x^2 - 7,12x + 1,34$	–1	5
19	$x^3 - 2,92x^2 + 1,435x + 0,791$	–1	3
20	$x^3 - 2,56x^2 - 1,325x + 4,395$	–2	3
21	$1,62x^3 - 8,15x^2 + 4,39x + 4,29$	–2	5
22	$2,335x^3 + 3,98x^2 - 4,52x - 3,11$	–4	2
23	$-1,85x^3 - 4,75x^2 - 2,53x + 0,49$	–3	2
24	$-1,78x^3 - 5,05x^2 + 3,64x + 1,37$	–5	2
25	$-2,75x^3 - 4,53x^2 + 17,87x - 1,94$	–4	3
26	$-3,64x^3 + 2,12x^2 + 10,73x + 1,49$	–3	3
27	$x^3 + 1,41x^2 - 5,472x - 7,38$	–4	3
28	$x^3 - 0,12x^2 - 1,475x + 0,192$	–2	2
29	$x^3 - 0,77x^2 - 1,251x + 0,43$	–2	2
30	$x^3 - 0,78x^2 - 0,826x + 0,145$	–2	2

Приложение 2

Варианты заданий для лабораторной работы № 2

№ варианта	Система	№ варианта	Система
1	$\begin{cases} 2x^2+5y^2=1 \\ y=-x^2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x^2+2y^2=2 \\ y=x^2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x^2+5y^2=3 \\ x=-y^2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x^2+6y^2=4 \\ x=y^2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x^2+2y^2=5 \\ x=-y^2 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x^2+y^2=6 \\ x=2y^2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x^2+4y^2=7 \\ y=-2x^2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x^2+3y^2=8 \\ y=2x^2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x^2+3y^2=9 \\ x=-2y^2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 4x^2+y^2=10 \\ x=2y^2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x^2+5y^2=11 \\ y=2x^2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 2x^2+4y^2=12 \\ y=-4x^2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x^2+3y^2=13 \\ y=-3x^2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 4x^2+2y^2=14 \\ y=3x^2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 5x^2+y^2=15 \\ x=-3y^2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x^2+6y^2=16 \\ x=3y^2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x^2+5y^2=17 \\ x=-3y^2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x^2+4y^2=18 \\ x=-2y^2 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 4x^2+3y^2=19 \\ y=-4x^2 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 5x^2+2y^2=20 \\ y=4x^2 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 6x^2+y^2=21 \\ x=-4y^2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x^2+7y^2=22 \\ x=4y^2 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x^2+6y^2=23 \\ xy=0,4 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x^2+5y^2=24 \\ xy=-0,4 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 4x^2+4y^2=25 \\ y=-5x^2 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 7x^2+10y^2=26 \\ xy=-0,8 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x^2+3y^2=27 \\ xy=0,8 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 4x^2+9y^2=28 \\ x=6y^2 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 9x^2+5y^2=29 \\ y=-4x^2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 3x^2+2y^2=30 \\ y=4x^2 \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы: Учеб. пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4397.
2. **Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.** Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4397.
3. **Демидович Б.Н., Марон И.А.** Основы вычислительной математики: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2009.
4. **Кудашов В.Н.** Введение в численные методы: Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2011.
5. **Турчак Л.И., Плотников П.В.** Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2003.
6. **Бартеньев О.В.** FORTRAN современный. – М.: Диалог–МИФИ, 2005.
7. **Сулейманов Р.Р.** Компьютерное моделирование математических задач. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4397.
8. **Кудашов В.Н., Малышева Т.А.** Фортран-90. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2007.
9. **Волков Е.А.** Численные методы: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2008. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid= 25&pl1_id=54.
10. **Бартеньев О.В.** Фортран для профессионалов. Математическая библиотека ISML. Ч. 2. – М.: Диалог–МИФИ, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.. 3
НАХОЖДЕНИЕ КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT EXCEL 4
ПРИБЛИЖЕННЫЕ (ИТЕРАЦИОННЫЕ) МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 7
Метод половинного деления 7
Метод Ньютона (метод касательных).. 10
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЦЕДУРАМИ IMSL ... 14
Подпрограмма ZBREN 14
Порядок выполнения лабораторной работы № 1 18
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT EXCEL 19
ПРИБЛИЖЕННЫЕ (ИТЕРАЦИОННЫЕ) МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.. 22
Метод Ньютона 23
Порядок выполнения лабораторной работы № 2 30
ПРИЛОЖЕНИЯ 31
Приложение 1 31
Приложение 2 32
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 33

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

Институт холода и биотехнологий является преемником Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ), который в ходе реорганизации (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 2209 от 17 августа 2011г.) в январе 2012 года был присоединен к Санкт-Петербургскому национальному исследовательскому университету информационных технологий, механики и оптики.

Созданный 31 мая 1931года институт стал крупнейшим образовательным и научным центром, одним их ведущих вузов страны в области холодильной, криогенной техники, технологий и в экономике пищевых производств.

За годы существования вуза сформировались известные во всем мире научные и педагогические школы. В настоящее время фундаментальные и прикладные исследования проводятся по 20 основным научным направлениям: научные основы холодильных машин и термотрансформаторов; повышение эффективности холодильных установок; газодинамика и компрессоростроение; совершенствование процессов, машин и аппаратов криогенной техники; теплофизика; теплофизическое приборостроение;

машины, аппараты и системы кондиционирования; хладостойкие стали; проблемы прочности при низких температурах; твердотельные преобразователи энергии; холодильная обработка и хранение пищевых продуктов; тепломассоперенос в пищевой промышленности; технология молока и молочных продуктов; физико-химические, биохимические и микробиологические основы переработки пищевого сырья; пищевая технология продуктов из растительного сырья; физико-химическая механика и тепло-и массообмен; методы управления технологическими процессами; техника пищевых производств и торговли; промышленная экология; от экологической теории к практике инновационного управления предприятием.

На предприятиях холодильной, пищевых отраслей реализовано около тысячи крупных проектов, разработанных учеными и преподавателями института.

Ежегодно проводятся международные научные конференции, семинары, конференции научно-технического творчества молодежи.

Издаются научно-теоретический журнал «Вестник Международной академии холода» и Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Холодильная техника и кондиционирование», Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств», Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Экономика и экологический менеджмент».

В вузе ведется подготовка кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре.

Действуют два диссертационных совета, которые принимают к защите докторские и кандидатские диссертации.

Вуз является активным участником мирового рынка образовательных и научных услуг.

www.ifmo.ru

ihbt.ifmo.ru

Малышева Татьяна Алексеевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Р.А. Сафарова

Компьютерная верстка
Д.Е. Мышковский

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 01.04.2015. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,33. Печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,13
Тираж 50 экз. Заказ № С 27

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9