Типовой расчет по высшей математике

Линейная алгебра

3 модуль

Учебно-методическое пособие

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Санкт-Петербург
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Афанасьева С.С., Гортинская Л.В.,

Рыжков А.Е., Трифанов А.И.

Типовой расчет по высшей математике

Линейная алгебра

2 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2014

Афанасьева С.С., Гортинская Л.В., Рыжков А.Е., Трифанов А.И. Типовой расчет „Линейная алгебра“. 3 модуль. Учебно-методическое пособие. -СПб: Университет ИТМО, 2014. ??? с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов первого курса специальности 010400.62 „Прикладная математика и информатика“.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 2.11.2014, протокол №5.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый модуль включает в себя задачи по темам: „Алгебраические операции с матрицами“, „Ядро и образ линейного оператора“, „Тензоры в линейном пространстве. Преобразование координат.“ и "Тензоры в линейном пространстве. Алгебраические операции с тензорами.“.

Каждый студент обязан выполнить четыре задания, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Перед выполнением каждого задания написать полное условие, чертежи и рисунки необходимо исполнить аккуратно, снабдив их необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет. К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая во внимание которые и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

Задание 1. Алгебраические операции с матрицами.

Пример выполнения задания 1

Задача. Даны две квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Вычислить коммутатор матриц $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$;

2. Найти матрицу A^{-1} методом Гаусса. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = E$;

3. Найти матрицу B^{-1} методом присоединенной (союзной) матрицы. Проверить, что $B^{-1} \cdot B = E$;

4. Найти значение полинома $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A.

Решение. 1) Вычислим коммутатор матриц

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -10 \\ -1 & 12 & 29 \\ -4 & -18 & -13 \end{pmatrix}$$

2) Найдем матрицу A^{-1} методом Гаусса.

Для нахождения обратной матрицы методом Гаусса припишем к исходной матрице справа единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований над строками добьемся того, чтобы слева оказалась единичная матрица. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{11}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Таким образом

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{11}{14} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что $AA^{-1} = E$ (при выполнении типового расчета проверка обязательна).

3) Найдем матрицу B^{-1} методом присоединенной (союзной) матрицы.

Напомним, что матрица $\widetilde{B}$ является союзной к матрице B, если ее элементы являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов матрицы B. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся свойством $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}\widetilde{B}^T$. Проверим сначала, что матрица B обратима. Действительно $\det B = 76 \neq 0$. Далее вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы B:

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3; \qquad B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17;$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9; \qquad B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -25;$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15; \qquad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14;$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

Таким образом союзная матрица $\widetilde{B}$ имеет вид $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} -3 & 17 & -9 \\ -25 & 15 & 1 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}$.

Отсюда

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{76} & -\frac{25}{76} & \frac{1}{38} \\ \frac{17}{76} & \frac{15}{76} & \frac{7}{38} \\ -\frac{9}{76} & \frac{1}{76} & \frac{3}{38} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $BB^{-1} = E$ (при выполнении типового расчета проверка обязательна).

4) Найдем значение полинома $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A.

$$f(A) = 2A^2 - 3A + 5E =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -4 & 13 & 18 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 15 \\ -2 & 22 & 24 \\ -7 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Варианты задания 1

Даны две квадратные матрицы A и B.

1. Вычислить коммутатор матриц $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$;
2. Найти матрицу A^{-1} методом Гаусса. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = E$;
3. Найти матрицу B^{-1} методом присоединенной (союзной) матрицы. Проверить, что $B^{-1} \cdot B = E$;
4. Найти значение полинома $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix};$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix};$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$

11. $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix};$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

14. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix};$

15. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix};$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix};$

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};$

18. $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix};$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix};$

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix};$

21. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix};$

22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

23. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -7 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix};$

24. $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 5 & -7 & -2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

25. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \\ -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & 8 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};$

26. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 11 & -5 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

27. $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 11 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix};$

28. $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

29. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -11 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix};$

30. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 5 & 11 & 2 \\ 6 & -1 & 8 \end{pmatrix};$

Задание 2. Ядро и образ линейного оператора

Пример выполнения задания 2

Задача. Автоморфизм $A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^5$ матрицей A. Найти ядро и образ линейного оператора A, указать их размерности.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала ядро оператора A. Согласно определению $\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0\}$, т.е. для нахождения ядра оператора A необходимо найти множество решений системы $Ax = 0$. Для этого сначала с помощью элементарных преобразования над строками приведем матрицу A к трапецивидной форме и найдем ранг матрицы A.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 3, следовательно размерность ядра оператора равна 5-3=2, а пространство решений системы, т.е. ядро оператора A, порождается векторами x_1 и x_2 фундаментальной системы решений линейной однородной системы уравнений, задаваемой матрицей A. Отсюда находим, что $x_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ и $x_2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Найдем образ оператора A. Как показано выше, размерность образа оператора A равна 3. Образ оператора порожден образами базисных векторов, т.е. столбцами матрицы A. Элементарными преобразованиями строк приведем транспонированную матрицу A^T к трапецевидной форме.

$$A^T \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом образ оператора A есть линейная оболочка векторов $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$ и $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Варианты задания 2

Автоморфизм $A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^5$ матрицей A. Найти ядро и образ линейного оператора A, указать их размерности.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ -7 & -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix};$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix};$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix};$

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

10. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; 15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & -3 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; 17. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 18. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

20. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;

21. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

22. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

23. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

26. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

28. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Тензоры в линейном пространстве. Преобразование координат.

Пример выполнения задания 3

Задача. Тензор α_{kl}^{ij} ранга (2,2) задан четырехмерной матрицей второго порядка $A = ||\alpha_{kl}^{ij}||$. Задана матрица перехода T от старого базиса $\{e_i\}_{i=1}^2$ к новому базису $\{\widetilde{e_i}\}_{i=1}^2$.

$$A = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right\|, \qquad T = \left\|\begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$$

1) Вычислить элемент α_{12}^{21} матрицы $A = ||\widetilde{\alpha_{kl}^{ij}}||$ заданного тензора в новом базисе $\{\widetilde{e_i}\}_{i=1}^2$.

2) Вычислить следующие свертки тензора (в старом базисе): α_{ki}^{ij}, α_{kj}^{ij}, α_{ij}^{ij}, α_{ji}^{ij}.

Решение. 1) Согласно определению

$$\alpha_{12}^{21} = \sigma_k^2 \sigma_l^1 \tau_1^m \tau_2^n \alpha_{mn}^{kl},$$

где τ_i^j - элементы матрицы T, а σ_i^j - матрицы T^{-1}. В нашем случае $T^{-1} = \left\|\begin{matrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$. Обозначим через A_{mn} - слой тензора α_{mn}^{kl}, соответствующий фиксированным m и n. Таким образом $A = \left\|\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right\|$. Вычислим сначала тензор $b_{mn} = \sigma_k^2 \sigma_l^1 \alpha_{mn}^{kl} = \left\|\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}\right\|$.

Легко видеть, что $B_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} A_{mn} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, поэтому $\sigma_k^2 \sigma_l^1 \alpha_{mn}^{kl} = \frac{1}{9}\left\|\begin{matrix} 2 & 8 \\ -9 & 19 \end{matrix}\right\|$. Осталось вычислить $\widetilde{\alpha_{kl}^{ij}} = \sigma_k^2 \sigma_l^1 \tau_1^m \tau_2^n \alpha_{mn}^{kl} = \tau_1^m \tau_2^n b_{mn} =$

$\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix} b_{mn} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = -\frac{11}{9}$. Напомним, что по повторяющимся верхнему и нижнему индексам предполагается немое суммирование.

2) Вычислим следующие свертки тензора (в старом базисе): α^{ij}_{ki}, α^{ij}_{kj}, α^{ij}_{ij}, α^{ij}_{ji}.

Вычислим α^{ij}_{ki}. Напомним, что $\alpha^{ij}_{ki} = \sum_{i=1}^{2} \alpha^{ij}_{ki}$, поэтому

$$\alpha^{ij}_{ki} = \begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем остальные свертки. Таким образом

$$\alpha^{ij}_{kj} = \begin{pmatrix}3 & 6\\-1 & 7\end{pmatrix},\ \alpha^{ij}_{ij} = 10,\ \alpha^{ji}_{ij} = 8.$$

Варианты задания 3

Тензор α_{kl}^{ij} ранга (2,2) задан четырехмерной матрицей второго порядка $A = ||\alpha_{kl}^{ij}||$. Задана матрица перехода T от старого базиса $\{e_i\}_{i=1}^{2}$ к новому базису $\{\widetilde{e_i}\}_{i=1}^{2}$.

1) Вычислить элементы α_{12}^{21} матрицы $A = ||\widetilde{\alpha_{kl}^{ij}}||$ заданного тензора в новом базисе $\{\widetilde{e_i}\}_{i=1}^{2}$.

2) Вычислить следующие свертки тензора (в старом базисе): α_{ki}^{ij}, α_{kj}^{ij}, α_{ij}^{ij}, α_{ji}^{ij}.

$$1.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right\|$$

$$2.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 4 & 8 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$3.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 7 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$4.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 2 \\ -5 & -5 & 0 & 4 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$5.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & -4 & 1 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix} \right\|$$

$$6.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 9 \\ \hline 2 & 2 & -8 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|$$

$$7.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 3 \\ \hline 7 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 6 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$8.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 5 & -6 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$9.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -7 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & -1 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{matrix} \right\|$$

$$10.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|$$

$$11.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 2 \\ \hline 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{array} \right\|$$

$$12.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -4 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 4 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -2 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{array} \right\|$$

$$13.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

$$14.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & -6 & -2 & -5 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{array} \right\|$$

$$15.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right\|$$

$$16.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 3 & 4 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

$$17.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 3 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|$$

$$18.\ A = \left\|\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 5 & -1 \\ 9 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 4 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\|, \qquad T = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

$$19.\ A = \left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 2 \\ 7 & 2 & -6 & 0 \\ \hline -7 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 6 \end{array}\right\|, \qquad T = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$20.\ A = \left\|\begin{array}{cc|cc} -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ \hline -2 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 8 & 3 & -3 \end{array}\right\|, \qquad T = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$21.\ A = \left\|\begin{array}{cc|cc} -2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 8 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right\|, \qquad T = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$22.\ A = \left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & -7 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 7 \\ \hline 5 & 3 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right\|, \qquad T = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$23.\ A = \left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 9 & 1 \\ \hline -2 & -8 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right\|, \qquad T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$24.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 7 & 6 & -4 & 0 \\ -8 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -5 & 0 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$25.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -5 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \\ \hline -3 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$26.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 7 & 3 \\ 7 & -6 & -5 & -2 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$27.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 4 & -5 & 9 \\ 7 & 2 & 7 & 8 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{array} \right\|$$

$$28.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & -7 & -4 & -5 \\ \hline 6 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & 6 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right\|$$

$$29.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 6 & 8 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \\ \hline 4 & -4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right\|$$

$$30.\ A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -4 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & -3 & 4 \\ \hline 2 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right\|$$

Задание 4. Тензоры в линейном пространстве. Алгебраические операции с тензорами.

Пример выполнения задания 4

Задача. Тензор α^{ijk} (3 раза контравариантный) задан трехмерной матрицей третьего порядка $A = ||\alpha^{ijk}||$.

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 2 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 & 3 & 7 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

1) Вычислить матрицу транспонированного тензора $\beta^{ijk} = \alpha^{kji}$;
2) Вычислить матрицу полностью симметричного тензора $\alpha^{(ijk)}$;
3) Вычислить матрицу полностью антисимметричного тензора $\alpha^{[ijk]}$;
4) Вычислить матрицу тензора $\alpha^{(i|j|k)}$, симметризованного по индексам i и k;
5) Вычислить матрицу тензора $\alpha^{i[jk]}$, антисимметризованного по индексам j и k.

Решение. 1) Чтобы получить матрицу B тензора β в рассматриваемом базисе необходимо транспонировать каждый слой матрицы A, который получается фиксированием индекса, соответствующего столбцу (второго индекса). Выпишем слой матрицы $A = \{a^{ijk}\}$, соответствующий $j = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Транспонировав его, мы получим соответствующий слой матрицы B. Аналогичным образом поступим с остальными слоями. В результате получим

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 7 & 3 & -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 & -3 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 5 & 3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

2) По определению симметризации имеем $\alpha^{(ijk)} = \frac{1}{6}(\alpha^{ijk} + \alpha^{ikj} + \alpha^{kji} + \alpha^{kij} + \alpha^{jik} + \alpha^{jki})$. Вычислив все соответствующие тензоры, получим, что матрица тензора $\alpha^{(ijk)}$ в рассматриваемом базисе имеет вид:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \frac{10}{3} & 0 & \frac{10}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{3} & 4 & \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & 3 & \frac{5}{3} & 3 & 1 \end{array}\right\|.$$

3) Поскольку тензор $\beta^{ijk} = \alpha^{[ijk]}$ полностью антисимметричен, все его компоненты с повторяющимися индексами равны 0. Для вычисления остальных компонент достаточно вычислить одну из них. Вычислим β^{123}. По определению $\beta^{123} = \dfrac{1}{6}(\alpha^{123} - \alpha^{132} + \alpha^{231} - \alpha^{213} + \alpha^{312} - \alpha^{321}) = -\dfrac{13}{6}$. Остальные отличные от нуля элементы тензора β^{ijk} вычисляются из определения полностью антисимммetричного тензора. В частности, $\beta^{231} = (-1)^{[2;3;1]}\beta^{123}$ (здесь $[2;3;1]$ - число инверсий в перестановке $(2;3;1)$). Поэтому матрица тензора $\alpha^{[ijk]}$ в рассматриваемом базисе имеет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} & 0 & -\frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{6} & 0 & -\frac{13}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

4) Тензор вычисляется симметризацией слоев матрицыЮ соответствующих фиксированному индексу j:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

5) Тензор вычисляется антисимметризацией слоев, отвечающих фиксированному индексу i:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -4 & 0 & 3 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right\|.$$

Варианты задания 4

Тензор α^{ijk} (3 раза контравариантный) задан трехмерной матрицей третьего порядка $A = ||\alpha^{ijk}||$.
1) Вычислить матрицу транспонированного тензора $\beta^{ijk} = \alpha^{kji}$;
2) Вычислить матрицу полностью симметричного тензора $\alpha^{(ijk)}$;
3) Вычислить матрицу полностью антисимметричного тензора $\alpha^{[ijk]}$;
4) Вычислить матрицу тензора $\alpha^{(i|j|k)}$, симметризованного по индексам i и k;
5) Вычислить матрицу тензора $\alpha^{i[jk]}$, антисимметризованного по индексам j и k.

$$1.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 5 & 1 & -2 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 6 & -3 \\ 8 & 4 & -1 & 4 & 1 & 3 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$2.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & -2 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & 3 & -5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$3.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & 4 & 1 & -3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & -4 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & -5 & 3 & 8 & 4 & -1 \end{array} \right\|;$$

$$4.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 5 & -6 & 6 & 5 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 9 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 4 & 5 & 2 & 5 & 6 & -4 \end{array} \right\|;$$

$$5.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 0 & 5 & -2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 3 & -1 & -4 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right\|;$$

$$6.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & 1 & 11 & 6 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 & 3 & -2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right\|;$$

$$7.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 4 & -3 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -4 & 0 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 3 & 2 & -3 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right\|;$$

$$8.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & -1 & -3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 8 & -7 & -6 & 1 & 3 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$9.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & -1 & -3 & 2 & 0 & 5 & 5 & 3 & -7 \\ 8 & -7 & -6 & 4 & -1 & -2 & -1 & 6 & -3 \\ -3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 7 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$10.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & 4 & 3 & 6 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 2 & 4 & -6 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right\|;$$

$$11.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 7 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -4 & 9 & 4 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$12.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 5 & 4 & -6 & 1 & 11 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 9 & 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right\|;$$

$$13.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 6 & 7 & -3 \end{array} \right\|;$$

$$14.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 3 & -2 & -1 & 3 & 7 & 1 \end{array} \right\|;$$

$$15.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 7 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right\|;$$

$$16.\ A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -6 & 7 & 1 & 2 & 8 & -7 & -6 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & -3 & 4 & 2 \end{array} \right\|;$$

17. $A = \left\| \begin{matrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{matrix} \right\|;$

18. $A = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{matrix} \right\|;$

19. $A = \left\| \begin{matrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{matrix} \right\|;$

20. $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|;$

21. $A = \left\| \begin{matrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 9 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{matrix} \right\|;$

22. $A = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 8 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & -5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{matrix} \right\|;$

23. $A = \left\| \begin{matrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -8 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 2 & -4 \\ 4 & -8 & 4 \\ -7 & 3 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 8 & 6 & 9 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{matrix} \right\|;$

24. $A = \left\| \begin{matrix} 9 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -6 & 7 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & 9 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{matrix} \right\|;$

25. $A = \left\| \begin{matrix} 6 & -4 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \\ -2 & 7 & 4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & -6 \\ 7 & 2 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{matrix} \right\|;$

26. $A = \left\| \begin{matrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & 8 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & -2 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{matrix} \right\|;$

27. $A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 5 & 4 & 8 & 5 & 3 & 8 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & -2 & -9 & 6 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & -7 & 4 & 8 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right\|$;

28. $A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 7 & 5 & 9 & 7 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ -4 & -6 & 3 & 5 & 2 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -5 & 0 & 4 & 3 & 0 & -5 & 2 \end{array} \right\|$;

29. $A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 3 & 4 & -2 & 3 & 1 & 0 & -4 & 5 \\ 8 & 7 & -5 & 0 & 6 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & -4 & 3 & 9 & -6 & 5 & 0 \end{array} \right\|$;

30. $A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -1 & 4 & 5 & 2 & 4 & -8 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 0 & 7 & 5 & -4 & 5 & 1 \\ -6 & 5 & 3 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right\|$;

Список литературы

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. – 10-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2005. -304с.

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г., Линейная алгебра. - М.: 2006.

[3] Булдырев В.С., Павлов Б.С., Линейная Алгебра. Функции нескольких вещественных переменных. -Л.: ЛГУ. 1985. -496 с.

[4] Ефимов А.В. и др., Сборник задач по математике для втузов. В 4-ч частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд. Физматлит. 2009. -432с.

[5] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2001. -496с.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г. Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49