

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики**

А.В. Ушаков, Н. А. Вундер (Полинова)

**СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ
УПРАВЛЕНИЯ
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ**

Учебное пособие для университетов



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

УДК 517/519:62.50:681.3

Ушаков А.В., Вундер (Полинова) Н.А. Современная теория управления. Дополнительные главы: Учебное пособие для университетов / Под ред. А. В. Ушакова – СПб.: Университет ИТМО, 2015. 182 с., 43 ил.

Рецензенты: д.т.н., профессор В.Н. Дроздов;
д.т.н., профессор В.Т. Шароватов

В учебном пособии излагаются дополнительные главы современной теории управления, освещающие проблемы, связанные с изучением причин возникновения колебательности процессов в апериодических непрерывных и дискретных системах и смежных проблем их динамики, традиционно не входящие в канонические учебные пособия по современной теории управления. В своей основе учебное пособие ориентировано на подготовку магистров по направлению 27.04.03 – «Системный анализ и управление» по программе «Интеллектуальное управление техническими процессами».

Учебное пособие может быть также рекомендовано магистрам направления 27.04.04 «Управление в технических системах» по программе «Цифровое управление в современной технике» и магистрам направления 15.04.09 «Мехатроника и робототехника» по программе «Интеллектуальные технологии в робототехнике».

Учебное пособие может быть полезно аспирантам, осуществляющих обучение в аспирантуре по специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)» и молодым специалистам, чья практическая деятельность связана с задачами автоматического управления техническими объектами.

В 2009 году Университет ИТМО стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Утверждено к печати Советом факультета компьютерных технологий и управления, протокол № 3 от 11.11.2014.

©Университет ИТМО, 2015.

© Ушаков А.В., Вундер (Полинова) Н. А., 2015.

СОДЕРЖАНИЕ

Используемые обозначения и сокращения.....	6
Предисловие.....	9
Введение.....	12
1. Аperiodическая непрерывная система с матрицей состояния простой структуры.....	16
1.1 Модальное управление как алгоритмическая основа формирования матриц состояния с желаемым алгебраическим спектром собственных чисел.....	16
1.1.1 Модальное управление.....	17
1.1.2 Прямое модальное управление.....	18
1.1.3 Модальное управление средствами обратной связи	22
1.1.3.1 В случае ранга матрицы управления равного размерности вектора состояния.....	23
1.1.3.2 В случае ранга матрицы управления меньшего размерности вектора состояния, но разность матриц состояния ТО и модальной модели принадлежит образу матрицы управления объекта.....	23
1.1.3.3 С использованием матричного уравнения Сильвестра.....	24
1.1.3.4 С использованием формулы Аккермана.....	28
1.1.4 Модальное управление средствами последовательного компенсатора.....	29
1.1.5 Проблема формирования модальной модели.....	30
1.2 Аperiodическая непрерывная система с матрицей состояния простой структуры в произвольном базисе.....	39
1.3 Конструирование матриц простой структуры с желаемыми спектрами собственных чисел и векторов средствами модального управления.....	42
1.4 Канонические формы матриц. Матрицы приведения подобия.....	44
2. Проблема скаляризации векторных процессов.....	55
2.1 Скаляризация векторных процессов с использованием векторных норм.....	55
2.2 Согласование матричных и векторных норм.....	57
2.3 Скаляризация векторных процессов с использованием сингулярного разложения матриц.....	60
3. Колебательность аperiodических систем с матрицей состояния простой структуры по норме вектора свободного движения.....	68

3.1	Геометрическая интерпретация колебательности аperiodических систем в пространстве собственных векторов с матрицей состояния простой структуры.....	68
3.2	Алгебраическая интерпретация колебательности аperiodических систем. Число обусловленности матрицы собственных векторов матрицы состояния системы как количественная мера колебательности.....	75
3.3	Параметрическая чувствительность свойства колебательности аperiodических систем с матрицей состояния простой структуры по норме вектора свободного движения.....	78
4.	Колебательность аperiodических систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел по норме вектора свободного движения.....	87
4.1	Колебательность аperiodических систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в жордановой форме, по норме вектора свободного движения.....	87
4.2	Колебательность аperiodических систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в произвольной форме, по норме вектора свободного движения.....	94
5.	Скаляризация векторных процессов свободного движения аperiodических систем с помощью сингулярного разложения матриц.....	96
5.1	Сингулярное разложение в задаче скаляризации векторов свободного движения стационарных непрерывных систем.....	96
5.2	Исследование тонкой геометрической природы колебательности аperiodических систем на основе динамики левого сингулярного базиса матричной экспоненты.....	99
6.	Колебательность аperiodических дискретных систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел по норме вектора свободного движения.....	102
6.1	Колебательность аperiodических дискретных систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в жордановой форме, по норме вектора свободного движения.....	102
6.2	Колебательность аperiodических дискретных систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в произвольной форме, по норме вектора свободного движения.....	111

7.	Смежные проблемы динамики.....	112
7.1	Исследование аperiodических свойств колебательных непрерывных систем, порождаемой базисом представления их матриц состояния.....	112
7.2	Исследование процессов по норме свободного движения непрерывных систем с кратными комплексно-сопряженными собственными числами.....	118
7.3	Оценка степени близости собственных чисел матрицы состояния аperiodической непрерывной системы к кратной структуре, гарантирующей требуемые величины выбросов в траекториях ее свободного движения.....	128
7.4	Кратные структуры в задачах аппроксимации динамических цепей, содержащих звенья чистого запаздывания.....	137
7.5	Синтез последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием.....	142
7.5.1	Синтез последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием на основе модифицированных полиномиальных динамических модальных моделей.....	143
7.5.2	Синтез последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием на основе компенсатора Смита.....	146
	Заключение.....	148
	Приложение 1 Полиномиальные динамические модальные модели (ПДММ).....	150
	Приложение 2 Доказательства утверждений.....	154
	Приложение 3 Модифицированные чистым запаздыванием ПДММ..	162
	Приложение 4 Международный сертификат направления 27.04.03.....	164
	Литература.....	165
	Из истории кафедры Систем управления и информатики.....	176
	Об авторах.....	182

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

S, X – множество элементов произвольной природы;

$G, G_0, F, GF(p), GF(p^n)$ – алгебраические структуры соответственно группа, подгруппа, поле, простое поле Галуа с характеристикой (модулем) p , расширенное поле Галуа;

$\{X, d\}, X_d$ – метрическое пространство с метрикой $d = d(x, y)$;

A, A – соответственно линейный оператор (ЛО) и матрица ЛО;

X^n – n -мерное линейное пространство над полем F ;

R^n – линейное вещественное пространство;

I – единичная матрица, имеющая на главной диагонали элементы равные единице, а внедиагональные элементы равные нулю;

1_V – единичный вектор, состоящий из элементов равных единице

O – нулевой скаляр, вектор, матрица;

A, A^j, A_k – матрица, j -ая строка, k -ый столбец матрицы A ;

A^T – матрица, полученная транспонированием матрицы A ;

A^* – матрица, сопряженная к матрице A ;

A^{-1} – матрица, обратная к матрице A ;

A^+ – матрица, псевдообратная к матрице A ;

$[A]$ – интервальная матрица, составленная из интервальных скалярных элементов $[A_{ij}]$;

$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ – диагональная матрица с элементами λ_i на диагонали;

$\text{row}\{\alpha_i, i = \overline{1, n}\}$ – матрица–строка с элементами α_i в строке;

$\text{col}\{\alpha_i, i = \overline{1, n}\}$ – матрица–столбец с элементами α_i в столбце;

$\|(\circ)\|$ – норма элемента (\circ) ;

$\|(\circ)\|_P$ – норма элемента (\circ) с весом P ;

$\|(\ast)\|_p$ – p -ичная норма элемента (\ast) ;

$\text{ang}\{x, y\}$ – угол между векторами x и y ;

Δ
 $=$ – равенство по определению;

\forall – для всех;

\exists – существует;

\in – принадлежит;

\notin – не принадлежит;

\max_i – максимум на множестве элементов с индексом i ;
 \cup, \cap – символы объединения и пересечения множеств;
 $\gamma = \arg\{\beta(\gamma)\}$ – значение γ , удовлетворяющее условию $\beta(\gamma)$;
 $det(\circ), tr(\circ), rank(\circ)\{rang(\circ)\}$ – соответственно определитель, след, ранг матрицы (\circ) ;
 $\exp(\circ)$ – матричная экспонента с матричным аргументом (\circ) ;
 $cond\{(\circ)\} = C\{(\circ)\}$ – число обусловленности матрицы (\circ) ;
 $dim(\circ)$ – размерность элемента (\circ) ;
 $deg(\circ)$ – степень полинома (\circ) ;
 $Jm(\circ)$ – образ (\circ) ЛО;
 $Ker(\circ)$ – ядро (\circ) ЛО;
 $\sigma\{\circ\}, \sigma_a\{\circ\}, \sigma_\alpha\{\circ\}$ – соответственно алгебраические спектры собственных значений, коэффициентов характеристического полинома и сингулярных чисел матрицы $\{\circ\}$;
 \otimes – символ кронекеровского произведения векторных и матричных компонентов;
 $contr\{(A, B)\}$ – предикат наличия свойства управляемости пары матриц (A, B) ;
 $observ\{(A, C)\}$ – предикат наличия свойства наблюдаемости пары матриц (A, C) ;
 \vee – логическое "или";
 $\&$ – логическое "и";
 $(\circ):\eta; (\circ)|\eta$ – предикат наличия характеристического свойства η у элемента (\circ) ;
 $rest(rem)\{*/\circ\}$ – остаток от деления $*$ на \circ ;
 $roof(*(\nu))$ – положительнозначное покрытие процесса $*(\nu)$;
SVD – сингулярное разложение матриц;
ВВ – вход–выход;
ВМП – векторно-матричное представление;
ВСВ – вход–состояние–выход;
ИМО(П) – интервальное модельное описание (представление)
МВВ – модель внешнего воздействия;
МВМВ-типа система (по-английски MIMO) – система типа «многомерный вход–многомерный выход»;
ММ – модальная модель;
МПС – метод пространства состояний;

МТЧ–модель траекторной чувствительности;
МУ – модальное управление;
ОВОВ–типа система (по-английски SISO)–система типа «одномерный вход–одномерный выход»;
ОС – обратная связь;
ОУ – объект управления;
ПДМ–полиномиальная динамическая модель;
ПДММ–полиномиальная динамическая модальная модель;
ТО – технический объект;

*Посвящается семидесятилетию
основания кафедры систем
управления и информатики
(автоматики и телемеханики до
2001 года)*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 2014-ом году совместным решением Европейской Сети Аккредитования Инженерного Образования (European Network for Accreditation of Engineering Education (ENAEЕ) и Ассоциации Инженерного Образования России (АИОР) образовательная программа «Интеллектуальные системы управления техническими процессами (Intelligent Control Systems of Technological Processes)» подготовки магистров в Университете ИТМО направления 27.04.03 «Системный анализ и управление», получила европейскую и национальную аккредитацию.

Принятию такого решения во многом способствовали качественные учебно-методические комплексы (УМК) основных дисциплин программы и их добротная библиографическая поддержка учебными пособиями, подготовленными сотрудниками кафедры СУИ за последние годы, такими как: Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность.-СПб.:СПбГИТМО(ТУ), 2002; Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А. Математические основы теории систем: элементы теории и практикум / Под ред. А. В. Ушакова. — СПб.: СПбГУИТМО, 2006; Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Информационное обеспечение алгоритмов динамической юстировки больших телескопов / Под ред. А. В. Ушакова. — СПб.: СПбГУИТМО, 2007; Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории управления: элементы метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В.–СПб.: Балт. гос. техн. ун-т «Военмех» им.Н.Ф.Устинова. 2008; Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: СПбГУИТМО,2009; Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Следящий опто-электронный мониторинг деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения / Под ред. А. В. Ушакова.– СПб.: СПбГУИТМО,2009; Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие.– СПб: СПбГУИТМО, 2011.; Ушаков А., Сударчиков С. Следящий мониторинг деформаций устройств пространственного наблюдения: разработка алгоритмов управления.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.;

Дударенко Н., Ушаков А. Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.; Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.; Ушаков А.В. Прикладная теория информации: элементы теории и практикум: учебное пособие /Под ред. А.В.Ушакова. – СПб.: СПбГУИТМО.2012.; Слита О., Никифоров В., Ушаков А. Управление в условиях неопределенности: неадаптивные и адаптивные алгоритмы.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.; Сержантова М., Ушаков А. Антропокомпоненты в составе сложных динамических систем: // LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.; Лихолетова Е., Ушаков А. Коррекция искажений произвольной кратности двоичных кодов // LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.; Ушаков А.В., Быстров П.С., О.С. Нуйя. Сетевые технологии в процессах управления: Учебное пособие для вузов. / Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: НИУ ИТМО, 2012.; Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении: Учебное пособие для вузов.–СПб.: НИУ ИТМО, 2013.; Ушаков А.В., Быстров П.С., Нуйя (Осипцева) О.С. Цифровое дистанционное управление: сетевые технологии и алгоритмы. - Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.; Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, расширенное и дополненное.– СПб.: НИУ ИТМО , 2014., 15 ил.; Полинова Н.А., Акунов Т.А., Ушаков А.В. Колебательность апериодических систем и смежные проблемы динамики. - Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.

Учебное пособие «Современная теория управления. Дополнительные главы» будет полезным пополнением этой библиографической поддержки. В отличие от канонических учебных пособий по современной теории управления (ТУ) предлагаемое вниманию читателей пособие посвящено проблемам, на которых не заостряется особое внимание. В результате проведенных исследований обнаружилось, что структура собственных векторов и кратность собственных чисел матриц состояния непрерывных и дискретных систем могут наделить свободные движения этих систем заметными выбросами, которые могут привести управляемое технологическое оборудование к функциональному повреждению. При этом вынужденные движения, порождаемые скачкообразными экзогенными воздействиями, таких систем обладают «апериодическими» монотонными свойствами. Как говорят «удивительное рядом». И

такого удивительного в поведении управляемых систем еще очень много. Его изучение ждет Вас.

Авторы хотели выразить особую благодарность рецензентам учебного пособия докторам технических наук, профессору Дроздову Валентину Нилевичу и профессору Шароватову Валерию Тимофеевичу, чьи советы и пожелания позволили заметно улучшить качество учебного пособия.

Конструктивную критику по существу содержания учебного пособия следует направлять авторам по: почтовому адресу 197101, Кронверкский пр.49 Университет ИТМО, телефону кафедры СУИ 5954128 и электронным адресам ushakov-AVG@yandex.ru, polinova_nina@mail.ru.

Работа поддержана Минобрнаука РФ (проект 14.Z50.31.0031).

ВВЕДЕНИЕ

Содержание дополнительных глав современной теории управления основано на результатах научных исследований кафедры Систем управления и информатики (СУИ) Университета ИТМО, проводимых в последние годы по изучению причин появления колебательности процессов апериодических непрерывных и дискретных систем и смежных с этим явлением проблем динамики этих систем. Эти вопросы пока не входят в содержание канонических учебных пособий по теории управления, поэтому желание профессорско-преподавательского корпуса познакомить коллег-магистрантов с новыми результатами в теории управления оказывается естественным. Таким образом, материалы, составившие содержание пособия, относятся к классу «неочевидных проявлений очевидных процессов» в линейных непрерывных и дискретных динамических системах.

В настоящее время в расчетной практике устройств управления линейными техническими объектами получили хорошую алгоритмическую поддержку две базовые парадигмы теории управления. Первая парадигма использует концепцию оптимального управления, алгоритмически опирающегося на решение матричного уравнения Риккати, вторая – концепцию векторного и матричного подобия динамических процессов, приведшую к теории модального управления, алгоритмически опирающегося на решение матричного уравнения Сильвестра.

В последнее время кафедра СУИ наравне с другими научными проблемами сосредоточила часть своих усилий на исследовании возможностей модального управления. В процессе исследований обратили на себя внимание два системных положения, которые, как оказалось, пока не получили достаточно полной теоретической разработки. Первое положение связано с фактором структуры собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы при ее синтезе методом модального управления, второе – с фактором кратности собственных чисел, назначаемых матрице состояния проектируемой системы в рамках алгоритмической методологии модального управления.

Необходимо отметить, что векторные процессы в многомерных динамических системах плохо визуализируются, при этом основная

масса специалистов в области практики использования систем управления в составе технологических ресурсов выросла на классе систем типа «одномерный вход – одномерный выход», процессы в которых являются скалярными, а потому обладают скалярным мышлением и восприятием. Это обстоятельство пользовательского характера требует скаляризации векторных процессов и в многомерных системах. В настоящий момент скаляризация векторных процессов может быть осуществлена или на базе векторных норм, или с использованием сингулярного разложения критериальных матриц, содержательным компонентом которых является матричная экспонента в случае непрерывных систем и степенная функция в случае дискретных. Следует сказать, что отмеченные выше методы скаляризации по своему информационному содержанию различны. Так аппарат нормирования векторных процессов дает оценку только сверху, формируя тем самым их скалярную мажоранту. Аппарат сингулярного разложения дает оценку векторных процессов как сверху, так и снизу, формируя тем самым скалярные мажоранту и миноранту этих процессов.

Выяснилось, что если при синтезе «апериодических» непрерывной или дискретной системы с матрицей состояния с простым вещественным спектром собственных чисел методами модального управления не осуществлять контроль над структурой собственных векторов, то могут возникнуть такие реализационные ситуации, при которых на траекториях свободного движения такой системы по норме вектора состояния возможны появления выбросов чрезмерной величины, определяемой числом обусловленности матрицы собственных векторов. В свою очередь, если при синтезе апериодической непрерывной системы формируется методами модального управления матрица состояния с вещественным спектром кратных собственных чисел, то обнаруживается удивительное свойство кратной структуры этих чисел. Указанное свойство состоит в том, что кратное отрицательное собственное число по модулю равное единице сепарирует спектр так, что для отрицательных собственных чисел по модулю больших единицы при любой их кратности наблюдаются монотонно сходящиеся процессы по норме вектора свободного движения, а для отрицательных собственных чисел по модулю меньших единицы в траекториях по норме вектора свободного движения наблюдаются выбросы, по значению тем большие, чем больше кратность и меньше модуль собственного значения.

Аналогичные явления обнаруживаются и в дискретных системах с кратными собственными числами матрицы состояния.

Отмеченные свойства траекторий «апериодических» непрерывных и дискретных систем по норме вектора состояния свободного движения стали предметом интенсивных исследований авторов и одновременно основным содержанием предлагаемого вниманию читателей учебного пособия. Следует сделать терминологическое замечание, которое связано с тем, что авторы используют термин «апериодический» как для непрерывных, так и дискретных систем. Конечно, это правильно для систем непрерывных, но для дискретных систем с монотонными без перерегулирования переходными характеристиками такого термина пока не введено, поэтому авторы позволили понятие «апериодический» использовать расширительно, для осторожности беря его в кавычки.

В содержание части учебного пособия, которое получило отражение в названии одного из разделов «смежные проблемы динамики», вошли следующие вопросы. Во-первых, это вопросы анализа «апериодичности» колебательных непрерывных систем, имеющих некратный спектр комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы состояния. Во-вторых, исследование процессов по норме свободного движения с кратными комплексно-сопряженными числами, характеризующиеся произвольным значением модуля их отрицательной вещественной части. И наконец, с тем, чтобы у читателя не сложилось ощущения безнадежности в случае кратного спектра отрицательных собственных вещественных чисел, по модулю меньших единицы, авторами предлагается решение задачи оценки степени близости структуры собственных чисел матрицы состояния апериодической системы к кратной, гарантирующей требуемые величины выбросов в траекториях его свободного движения, поддержанное алгоритмическими возможностями метода модального управления. В этот же раздел вошли вопросы, связанные с использованием кратных биномиальных структур в задаче аппроксимации динамических цепочек, содержащих в своем составе звенья запаздывания.

Учебное пособие написано с использованием рубрикации с помощью таких понятий как определение, утверждение, примечание, следствие, алгоритм, гипотеза, концепция.

В используемой терминологии авторы придерживаются принципа терминологической поливариантности. Так синонимами являются:

объект управления, динамический объект, технический объект и управляемый процесс; динамическая система, система управления и система автоматического управления; закон управления, алгоритм управления и алгоритм формирования сигнала управления; устройство формирования сигнала управления, устройство управления и регулятор и т.д.

Научную мысль остановить нельзя, её диалектика применительно к теории и практике динамических систем преподнесет еще много неожиданностей исследователям.

1. АПЕРИОДИЧЕСКАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ СИСТЕМА С МАТРИЦЕЙ СОСТОЯНИЯ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

В настоящем разделе решается задача конструирования апериодических непрерывных линейных систем с матрицей состояния простой структуры на основе использования концепции векторного и матричного подобия динамических процессов, ставшей основой теории модального управления, в общем случае алгоритмически опирающегося на решение матричного уравнения Сильвестра. Сформированные с помощью метода модального управления апериодические непрерывные линейные системы с матрицей состояния простой структуры в дальнейшем станут предметом исследования «удивительных» свойств системы, порождаемых структурой собственных векторов её матрицы состояния.

1.1 Модальное управление как алгоритмическая основа формирования матриц состояния с желаемым алгебраическим спектром собственных чисел

На современном этапе развития теории управления заняла свою содержательную и инструментальную нишу концепция подобия. При решении задач управления под концепцией подобия понимают обеспечение подобия векторных процессов, в основном по состоянию проектируемой системы процессам в некоторой модельной системе, обладающей желаемыми динамическими свойствами в переходном и установившемся режимах. В непараметризованной временем форме концепция векторного подобия сводится к выполнению соотношения

$$\kappa = M \chi, \quad (1.1)$$

где в общем случае размерности векторов κ и χ в зависимости от постановки задачи управления могут не совпадать, поэтому матрица преобразования подобия M в общем случае может быть особой.

В параметризованном временем виде равенство (1.1) достигается в асимптотике так, что

$$\kappa(\nu) = M \chi(\nu) - \theta(\nu), \quad (1.2)$$

при этом

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \theta(\nu) = 0 \quad \forall \chi(0), \kappa(0). \quad (1.3)$$

В (1.2) χ – вектор состояния некоторого модельного (эталонного) динамического процесса, κ – вектор состояния синтезируемой динамической системы, $\dim \kappa = n_\kappa$, $\dim \chi = n_\chi$, M –

$(n_\kappa \times n_\chi)$ – матрица в общем случае особого преобразования подобия; ν принимает смысл непрерывного времени t ($\nu = t$) в непрерывных по времени процессах и смысл дискретного времени k ($\nu = k$), выраженного в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что $t = k \Delta t$ в дискретных по времени процессах, θ – вектор невязки выполнения векторно-матричного подобия.

Тогда, если динамический процесс (объект) оказывается управляемым, то часть ресурса управления должна быть потрачена на обеспечение подобия в форме (1.2) с требуемым темпом и качеством сходимости к подобию в форме (1.1.).

В такой постановке в настоящее время решаются задачи модального управления, задачи слежения за конечномерным задающим воздействием (КЗВ), использующие концепцию обобщенного изодрома (внутренней модели КЗВ), а также задачи динамического наблюдения с целью асимптотического восстановления вектора состояния динамического объекта (объекта управления).

1.1.1. Модальное управление

В первоначальной постановке в 70-е годы прошлого века задача модального управления формулировалась как задача синтеза закона управления, обеспечивающего матрице F состояния системы, образованной объединением исходного динамического объекта и формирователя сигнала управления (регулятора), желаемую структуру собственных чисел (мод) $\sigma\{F\} = \{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$.

Алгоритмически задача обеспечения требуемой структуры собственных чисел матрицы состояния проектируемой системы, доставляющей последней желаемое качество переходных и установившихся процессов решалась путем приведения модельного представления объекта управления (ОУ) к базису Фробениуса. Сложности синтеза модального управления таким способом заметно возрастают при управлении объектами типа «многомерный вход – многомерный выход» (МВМВ-типа). Для преодоления этих трудностей разработчиками использовались достаточно громоздкие конструкции матриц приведения ОУ МВМВ-типа к представлению в базисе Фробениуса. Однако с ростом размерности ОУ заметно ухудшается обусловленность матриц приведения подобия, что влечет за собой проблемы вычислительной устойчивости.

Поиск методов синтеза модального управления, инвариантных относительно базисных представлений, привел к модификации первичной постановки задачи модального управления. В результате модификации задача получила формулировку обеспечения векторного и матричного подобия процессов в синтезируемой системе процессам в некоторой эталонной системе, именуемой модальной моделью. В такой постановке алгоритмическое обеспечение процедуры синтеза модального управления опирается на решение неоднородного матричного уравнения Сильвестра.

1.1.2. Прямое модальное управление

При решении задачи модального управления используются условия векторного подобия, характеризующиеся размерностями векторно-матричных компонентов, удовлетворяющими соотношениям

$$n_{\kappa} = n_{\chi} = n, \dim M = (n \times n). \quad (1.4)$$

В данном параграфе рассматривается задача управления линейным непрерывным динамическим объектом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0), \quad y = Cx, \quad (1.5)$$

в котором $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m; x, u, y$ – соответственно векторы состояния, управления и выхода $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}, C \in R^{m \times n}$ A, B, C – соответственно матрицы состояния, управления и выхода; при этом пара матриц (A, B) – управляемая, пара матриц (A, C) – наблюдаемая.

Для погружения в проблематику прямого модального управления динамическим объектом вида (1.5) введем необходимые определения.

Определение 1.1 (O1.1). Модальной моделью (ММ) будем называть автономную динамическую систему

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), \quad z(t)|_{t=0} = z(0), \quad \eta(t) = Hz(t), \quad (1.6)$$

где $z \in R^n, \eta \in R^r; z, \eta$ – соответственно векторы состояния и выхода $\Gamma \in R^{n \times n}, H \in R^{r \times n}$, Γ, H – соответственно матрицы состояния и выхода, характеризующуюся:

– алгебраическим спектром собственных значений $\sigma\{\Gamma\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I - \Gamma) = 0; i = \overline{1, n}\}$ матрицы Γ , сообщение которого матрице состояния проектируемой системы может доставить последней желаемые динамические свойства в переходном и установившемся режимах;

- отсутствием совпадающих собственных значений матриц Γ и A , то есть выполнением условия $\sigma\{\Gamma\} \cap \sigma\{A\} = \emptyset$;
- полной наблюдаемостью пары матриц (Γ, H) . □

Определение 1.2 (O1.2). Прямым модальным управлением (ПМУ) называется управление динамическим объектом (1.5), осуществляемое в форме

$$u(t) = -Hz(t), \quad (1.7)$$

то есть в виде прямой связи с матрицей H по вектору состояния ММ. □

Поставим задачу поиска условий, накладываемых на начальные состояния объекта (1.5) и ММ (1.6) и их матричные компоненты, при которых достигается векторное подобие процессов $x(t)$ и $z(t)$, записываемое в форме

$$x(t) = Mz(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.8)$$

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение агрегированную динамическую систему с вектором состояния $\tilde{x} = [x^T, z^T]^T$, которая на основании (1.5) – (1.7) имеет следующее векторно-матричное описание

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(t) - BH z(t) \\ 0x(t) + \Gamma z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BH \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что решение системы (1.9) представимо в форме

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t} \tilde{x}(0), \quad x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t), \quad (1.10)$$

где матрицы \tilde{A} и \tilde{C}_x записываются как

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & -BH \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_x = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times n}] \quad (1.11)$$

в силу (1.9) и соотношения $x = Ix + 0z = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times n}] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \tilde{C}_x \tilde{x}$. Для

упрощения вычисления матричной экспоненты $e^{\tilde{A}t}$ с матрицей \tilde{A} вида (1.11) докажем следующее утверждение.

Утверждение 1.1 (У1.1). Если невырожденная матрица M векторного преобразования подобия (1.8) удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \quad (1.12)$$

то матричная экспонента $e^{\tilde{A}t}$ имеет представление

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{At} & Me^{\Gamma t} - e^{At}M \\ 0 & e^{\Gamma t} \end{bmatrix}. \quad \square (1.13)$$

Доказательство. Доказательство утверждение ведется по следующей схеме. Матричное уравнение Сильвестра (1.12) позволяет представить матрицу \tilde{A} вида (1.11) в форме

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & M\Gamma - AM \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Тогда простым перемножением $\tilde{A}^2 = \tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}^3 = \tilde{A}^2\tilde{A}, \dots, \tilde{A}^p = \tilde{A}^{(p-1)}\tilde{A}$ получим для степенной функции \tilde{A}^p , где \tilde{A} имеет вид (1.14), представление

$$\tilde{A}^p = \begin{bmatrix} A^p & M\Gamma^p - A^pM \\ 0 & \Gamma^p \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Так как матричная экспонента построена на степенных матричных функциях \tilde{A}^p от матрицы вида (1.14), то для матричной функции от матрицы $e^{\tilde{A}t}$ получим представление в форме (1.13). ■

Получим теперь аналитические выражения для $z(t) = z(t, z(0))$ и для $x(t)$ под действием прямого модального управления (1.7) $x(t) = x\{t, x(0), u(t) = -Hz(t, z(0))\} = x\{t, x(0), z(0)\}$. Для этих целей воспользуемся (1.10), в которое подставим (1.13), в результате чего получим

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{At} & Me^{\Gamma t} - e^{At}M \\ 0 & e^{\Gamma t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Полученное векторно-матричное соотношение позволяет для $x(t)$ и $z(t)$ записать

$$x(t) = e^{At}x(0) + (Me^{\Gamma t} - e^{At}M)z(0) = e^{At}(x(0) - Mz(0)) + Me^{\Gamma t}z(0), \quad (1.17)$$

$$z(t) = e^{\Gamma t}z(0). \quad (1.18)$$

Если в выражении (1.17) обеспечить выполнение соотношения

$$z(0) = M^{-1}x(0), \quad (1.19)$$

приводящего к выполнению соотношения

$$x(0) - Mz(0) = x(0) - MM^{-1}x(0) = x(0) - x(0) = 0, \quad (1.20)$$

то на основании (1.17), (1.20) и (1.18) можно сделать вывод, что прямое модальное управление доставляет задаче векторное подобие в форме

$$x(t) = Mz(t) \text{ для } \forall t \geq 0, \quad (1.21)$$

при этом динамика процессов в управляемом прямым модальным управлением динамическом объекте (1.5) будет полностью определяться структурой собственных значений матрицы состояния Γ модальной модели (1.6) в силу аналитического представления

$$x(t) = Mz(t) = Me^{\Gamma t} M^{-1} x(0). \quad (1.22)$$

Формирователь сигнала $u(t)$ прямого модального управления в форме (1.7) будет содержать:

1. динамический структурный компонент в виде модальной модели (1.6) так, что ММ становится аппаратной, а не алгоритмической частью системы;
2. устройство измерения вектора $x(0)$ начального состояния объекта;
3. статический структурный элемент в виде матрицы M^{-1} , реализующий управление начальным состоянием ММ в форме $z(0) = M^{-1} x(0)$;
1. статический структурный элемент, обеспечивающий выполнение условия $u(t) = -\eta(t)$.

Завершая рассмотрение возможностей прямого модального управления, то есть управления динамическим объектом с помощью прямой связи по состоянию модальной модели, следует констатировать, что это управление не обладает робастностью (малой чувствительностью) к неточности знания параметров матричных компонентов, погрешностям решения матричного уравнения Сильвестра (1.12), погрешностям процедуры обращения матрицы M , что в итоге приводит к невыполнению условия $x(0) - Mz(0) = 0$, что в случае неустойчивого исходного объекта (1.5) приводит к расходимости процессов в системе с прямым модальным управлением.

Тем не менее, система с ПМУ является хорошей модельной средой для оценки потенциальных затрат на управление как функции выбранной пары матриц (Γ, H) . Действительно, для управления вида (1.7) можно записать

$$u(t) = -Hz(t) = -He^{\Gamma t} z(0),$$

что в свою очередь для нормы $u(t)$ как элемента функционального пространства L_T^2 , где $T = [0, \infty)$, дает представление

$$\|u(t)\|^2 = z^T(0) \int_0^{\infty} e^{\Gamma^T t} H^T H e^{\Gamma t} dt z(0) = z^T(0) W_U z(0),$$

в котором грамиан затрат на управление W_U ищется как решение матричного уравнения Ляпунова

$$\Gamma^T W_U + W_U \Gamma = -H^T H. \quad (1.23)$$

Затраты на управление в форме нормы $\|u(t)\|$ удовлетворяют оценочным неравенствам

$$\alpha_{\min}^{1/2} \{W_U\} \|z(0)\| \leq \|u(t)\| \leq \alpha_{\max}^{1/2} \{W_U\} \|z(0)\|. \quad (1.24)$$

Таким образом, при фиксированной норме $\|z(0)\|$ вектора начального состояния ММ максимальные затраты в силу (1.24) определяются максимальным сингулярным числом $\alpha_{\max} \{W_U\}$, а минимальные – минимальным $\alpha_{\min} \{W_U\}$ грамиана W_U затрат на управление. Полученные соотношения позволяют найти оптимальную в смысле минимальных затрат на управление пару матриц (Γ, H) ММ путем решения оптимизационной задачи

$$(\Gamma, H) = \arg \min_{(\Gamma, H)} \{ \alpha_{\max} \{W_U(\Gamma, H)\} \}.$$

Вторым положительным модельным качеством системы с ПМУ является возможность ранжирования параметрических неопределенностей матричных компонентов задачи при помощи исследования чувствительности к ним траекторий.

К сожалению, применительно к задаче, вынесенной в заголовок раздела, возможности прямого модального управления не могут быть использованы, так как оно не решает задачи формирования алгебраического спектра собственных чисел матрицы состояния системы.

1.1.3. Модальное управление средствами обратной связи

Поставим задачу сконструировать алгоритм формирования сигнала управления $u(t)$ динамическим объектом (1.5), который функционально был бы связан не с вектором $z(t)$ состояния модальной модели, а с вектором состояния $x(t)$ динамического объекта. Иными словами, не с помощью отрицательной прямой связи по вектору $z(t)$, а с помощью отрицательной обратной связи по вектору $x(t)$ с матрицей обратной связи K , в результате чего сигнал управления будет описываться формулой

$$u(t) = u\{t, x(t)\} = -Kx(t). \quad (1.25)$$

Если управление (1.25) подставить в векторно-матричное описание (1.5), то получим модельное представление динамической системы, образованной исходным ДО и обратной связью с матрицей K , имеющее вид

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0), \quad y = Cx, \quad (1.26)$$

$$\text{где } F = A - BK \quad (1.27)$$

От матрицы K требуется, чтобы выполнялось векторное подобие в форме (1.21), и чтобы алгебраические спектры собственных чисел матрицы F состояния системы (1.26) и матрицы Γ состояния модальной модели (1.6) совпадали так, чтобы выполнялось условие $\sigma\{F\} = \sigma\{\Gamma\}$.

Алгоритмическую среду формирования матрицы K свяжем со свойствами матрицы управления B .

1.1.3.1 В случае ранга матрицы управления равного размерности вектора состояния

В этом случае матрица управления B объекта оказывается обратимой, а матрицу F можно задать в форме $F = \Gamma$, что позволяет выражение (1.27) записать в форме $\Gamma = A - BK$. Последнее выражение в силу обратимости матрицы B разрешимо относительно искомой матрицы обратных связей K , для которой можно записать

$$K = B^{-1}(A - \Gamma). \quad (1.28)$$

1.1.3.2 В случае ранга матрицы управления меньшего размерности вектора состояния, но разность матриц состояния объекта и модальной модели принадлежит образу матрицы управления объекта

В этом случае матрица управления B объекта оказывается необратимой, но матрицу F можно задать в форме $F = \Gamma$, что позволяет выражение (1.27) записать в форме $\Gamma = A - BK$. Последнее выражение разрешим относительно матрицы BK в форме $BK = A - \Gamma$. Последнее выражение в силу условия $(A - \Gamma) \in \text{Im}(B)$ принадлежности $(A - \Gamma)$ пространству столбцов матрицы B разрешимо относительно искомой матрицы обратных связей K в форме

$$K = (B^T B)^{-1} B^T (A - \Gamma). \quad (1.29)$$

Формулой (1.29) целесообразно пользоваться, когда матрицы A и Γ заданы в сопровождающих (фробениусовых) формах.

1.1.3.3 С использованием матричного уравнения Сильвестра

Когда не выполняются условия, оговоренные в двух предыдущих случаях, для построения алгоритма формирования матрицы K поступим следующим образом. Введем «рабочую гипотезу» о том, что управление в форме (1.25) обеспечивает выполнение векторного подобия $x(t) = Mz(t), \forall t \geq 0$, тогда становится справедливой альтернативная запись $z(t) = M^{-1}x(t), \forall t \geq 0$, которая позволяет представить соотношение (1.7) в форме

$$u(t) = -Hz(t) = -HM^{-1}x(t). \quad (1.30)$$

Введем обозначение

$$HM^{-1} = K. \quad (1.31)$$

Проверим, решает ли сформулированные задачи сигнал управления (1.25), реализуемый в виде обратной связи с матрицей K вида (1.31). Для этого запишем (1.31) в разрешенной относительно матрицы H форме

$$H = KM. \quad (1.32)$$

Подставим матрицу H вида (1.32) в правую часть матричного уравнения Сильвестра (1.12), тогда получим

$$M\Gamma - AM = -BKM. \quad (1.33)$$

Матричное уравнение (1.33) с введенным ранее обозначением $F = A - BK$ приводит к матричному условию подобия матриц Γ и F

$$M\Gamma = FM. \quad (1.34)$$

В силу того, что алгебраические спектры собственных значений подобных матриц совпадают, т.е. выполняется равенство $\sigma\{\Gamma\} = \sigma\{F\}$, то следует констатировать, что модальное управление, реализуемое средствами отрицательной обратной связи с матрицей K , вычисляемой в форме (1.2), решает одну из задач надления матрицы состояния F проектируемой системы алгебраическим спектром $\sigma\{F\}$, совпадающим со спектром $\sigma\{\Gamma\}$ матрицы Γ состояния модальной модели.

Теперь покажем, что модальное управление в форме (1.30), (1.31) доставляет задаче векторное подобие (1.21).

Утверждение 1.2 (У1.2). Матричное подобие в форме (1.34) порождает векторное подобие в форме (1.21), в котором вектор z является вектором состояния автономной системы с матрицей состояния Γ , а вектор x – вектором состояния автономной системы с матрицей состояния F . □

Доказательство. Воспользуемся свойством матричной функции $f\{(*)\}$ от матрицы $(*)$ сохранять матричное подобие вида (1.34) в форме

$$Mf(\Gamma) = f(F)M. \quad (1.35)$$

Если в качестве матричной функции $f\{(*)\}$ от матрицы $(*)$ используется матричная экспонента, параметризованная временем так, что $f\{(*)\} = e^{(*)t}$, то (1.35) примет вид

$$Me^{\Gamma t} = e^{Ft}M. \quad (1.36)$$

Умножим матричное соотношение (1.36) на вектор $z(0)$ справа, тогда получим векторно-матричное соотношение

$$Me^{\Gamma t}z(0) = e^{Ft}Mz(0). \quad (1.37)$$

Но в (1.37) нетрудно обнаружить две цепочки векторно-матричных равенств, одна из которых в левой части (1.37) принимает вид

$$Me^{\Gamma t}z(0) = Mz(t), \quad (1.38)$$

в свою очередь цепочка векторно-матричных равенств в правой части (1.37) имеет представление

$$e^{Ft}Mz(0) = e^{Ft}x(0) = x(t). \quad (1.39)$$

Следовательно, доказано, что модальное управление в форме отрицательной обратной связи по вектору состояния исходного технического объекта с матрицей K , формируемой в силу (1.31), доставляет образованной системе при условии согласования начальных состояний в форме $z(0) = M^{-1}x(0)$ векторное подобие ее текущего состояния состоянию модальной модели в форме $x(t) = Mz(t)$ для $\forall t \geq 0$. ■

Таким образом, создана алгоритмическая основа для синтеза модального управления, реализуемого в виде отрицательной обратной связи по состоянию исходного непрерывного объекта (1.5). Необходимо напомнить, что, как это отмечалось ранее, модальное управление использует только часть ресурса управления, оставшаяся составляющая этого ресурса расходуется на организацию вынужденного движения в системе с тем, чтобы выход системы $y(t)$ воспроизводил экзогенное задающее воздействие $g(t)$ с ошибкой $\varepsilon(t)$ допустимой нормы. В соответствии с высказанными соображениями приводимый ниже алгоритм формирует управление $u(t)$ в форме $u(t) = u\{t, x(t), g(t)\}$.

Алгоритм 1.1(A1.1)

формирования сигнала управления

$$u(t) = u\{t, x(t), g(t)\} = K_g g(t) - Kx(t)$$

1. Сформировать векторно-матричное описание исходного непрерывного динамического объекта (1.5)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0), \quad y = Cx, \quad (1.40)$$

так, чтобы пара матриц $\{A, B\}$ была управляемой, а пара матриц $\{A, C\}$ – наблюдаемой;

2. Сформировать векторно-матричное описание модальной модели (1.6)

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), \quad z(t)|_{t=0} = z(0), \quad \eta(t) = Hz(t) \quad (1.41)$$

так, чтобы пара матриц $\{\Gamma, H\}$ была наблюдаемой;

$\dim \Gamma = \dim A, \dim H = \dim B^T$; матрицу Γ задать в одном из канонических базисов из условия $\Gamma = \arg \min_{\Gamma} (C\{\Gamma\})$, где $C\{\Gamma\}$ – число

обусловленности матрицы, минимизация которого гарантирует вычислительную устойчивость решения уравнения Сильвестра (1.12); матрицу H при выбранной матрице Γ выбрать из условия

$$H = \left\{ \arg \{ \text{observ}(\Gamma, H) \} \& \arg \min_H \{ \alpha_{\max} \{ W_U(\Gamma, H) \} \} \right\}; \quad (1.42)$$

3. Сформировать алгебраический спектр $\sigma\{A\}$ собственных чисел матрицы A в форме $\sigma\{A\} = \{ \lambda_{Ai} : D_A(\lambda) = \det(\lambda_A I - A) = 0; i = \overline{1, n} \}$, сформировать алгебраический спектр $\sigma\{\Gamma\}$ собственных чисел матрицы Γ в форме $\sigma\{\Gamma\} = \{ \lambda_i : D(\lambda) = \det(\lambda I - \Gamma) = 0; i = \overline{1, n} \}$; проверить сформированные спектры на наличие одинаковых собственных чисел: в случае их отсутствия перейти к п.4 алгоритма, в случае наличия – к п.2 с целью модификации матрицы Γ в рамках наблюдаемых пар $\{\Gamma, H\}$ с тем, чтобы обеспечить условие $\sigma\{\Gamma\} \cap \sigma\{A\} = \emptyset$;

4. Ввести «рабочую гипотезу» о полной измеримости вектора задающего экзогенного воздействия $g(t)$ и вектора состояния $x(t)$ исходного объекта (1.5), (1.40) с тем, чтобы поставить задачу формирования сигнала управления объектом в форме

$$u(t) = u\{t, x(t), g(t)\} = K_g g(t) - Kx(t). \quad (1.43)$$

5. Решить матричное уравнение Сильвестра (1.12) $M\Gamma - AM = -BH$ относительно матрицы M ;

6. Вычислить матрицу K отрицательной обратной связи по вектору $x(t)$ объекта, формирующую модальное управление, в силу соотношения (1.31)

$$K = HM^{-1}; \quad (1.44)$$

7. Подставить управление вида (1.40) в модель объекта (1.5), (1.40) с целью получения векторно-матричного описания системы, образованного объединением исходного объекта и формирователя сигнала управления (1.44) в форме

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(t)|_{t=0} = x(0), y(t) = Cx(t), \varepsilon(t) = g(t) - y(t); \quad (1.45)$$

$$F = A - BK, G = BK_g; \quad (1.46)$$

8. Сформировать передаточную матрицу $\Phi(s)$ отношения «вход – выход» системы (1.45) в форме, использующей (1.46)

$$\Phi(s) = C(sI - F)^{-1}G = C(sI - F)^{-1}BK_g; \quad (1.47)$$

9. Вычислить матрицу K_g прямой связи по экзогенному задающему воздействию $g(t)$ из условия равенства выхода входу $y(t) = g(t)$ в неподвижном положении ($g(t) = g_0 = const$), которое достигается при условии $\Phi(0) = I$ так, что K_g получает представление

$$K_g = arg \left\{ C(sI - F)^{-1} \Big|_{s=0} BK_g = C(-F)^{-1}BK_g = I \right\} = -(CF^{-1}B)^{-1}; \quad (1.48)$$

10. Отказаться от нереалистической гипотезы об измеримости экзогенного задающего воздействия $g(t)$ и заменить ее реалистической гипотезой об измеримости вектора $\varepsilon(t)$ ошибки воспроизведения воздействия $g(t)$ с целью представления сигнала управления (1.43) в форме

$$\begin{aligned} u(t) = u\{t, \varepsilon(t), x(t)\} &= K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t) = K_\varepsilon g(t) - K_\varepsilon y(t) - K_x x(t) = \\ &= K_\varepsilon g(t) - K_\varepsilon Cx(t) - K_x x(t) = K_\varepsilon g(t) - (K_\varepsilon C + K_x)x(t) = K_\varepsilon g(t) - Kx(t), \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\text{где } K_\varepsilon = K_g = -(CF^{-1}B)^{-1}, K_x = K - K_\varepsilon C = HM^{-1} + (CF^{-1}B)^{-1}C; \quad (1.50)$$

11. Если гипотеза о полной измеримости вектора $x(t)$ состояния динамического объекта сохраняется, то построить формирователь сигнала управления, функционирующий в силу соотношения

$$u(t) = u\{t, \varepsilon(t), x(t)\} = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (1.51)$$

и агрегировать его с объектом, образуя тем самым спроектированную методом модального управления систему, характеризующуюся:

- наличием контура единичной отрицательной обратной связи по выходу $y(t)$ объекта в канале формирования вектора ошибки в силу соотношения $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$;
- наличием контура отрицательной обратной связи по вектору состояния $x(t)$ с матрицей связей K_x ;
- наличием прямой связи в канале ошибки с матрицей прямых связей K_ε ;

12. Если гипотеза о полной измеримости вектора $x(t)$ состояния динамического объекта не выполняется, то спроектировать динамический наблюдатель вектора $x(t)$ состояния объекта управления, агрегировать его с алгоритмом (1.51) формирования сигнала управления, построив тем самым систему с динамическим формирователем сигнала управления, и осуществить переход к п.12 настоящего алгоритма.

Этот пункт в силу поставленной задачи в заголовке раздела из алгоритма синтеза модального управления, как инструмента назначения желаемого алгебраического спектра собственных чисел матрицы состояния системы, можно опустить и перейти к п. 13 алгоритма.

13. Провести комплексное компьютерное исследование спроектированной системы управления в среде компьютерного моделирования Simulink программной оболочки Matlab с целью оценки достигнутых показателей качества процессов в переходном и установившемся режимах.

Примечание 1.1 (П1.1). Уравнение Сильвестра (1.12) может быть решено инверсным способом, при котором матрица M конструируется вне уравнения Сильвестра, а уравнение Сильвестра решается относительно матрицы H модальной модели. ■

1.1.3.4 С использованием формулы Аккермана

Материал, связанный с использованием формулы, предложенного американским ученым немецкого происхождения Йоргеном Аккерманом (Jurgen Ackerman) еще в 1970 году приводим без доказательства в виде утверждения, справедливость которого предлагается доказать читателю.

Утверждение 1.3 (У1.3). Закон управления объектом ОВОВ–типа (1.5), (1.40) в форме $u(t) = u\{t, x(t), g(t)\} = K_g g(t) - Kx(t)$ доставляет

матрице $F = A - BK$ состояния системы вида (1.26), (1.45) характеристический полином

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (1.52)$$

с желаемыми корнями (собственными числами матрицы $F = A - BK$) с помощью матрицы K , вычисляемой по формуле Аккермана

$$K = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (n-1)} & 1 \end{bmatrix} \cdot W_y^{-1}(A, B) \cdot D(A), \quad (1.53)$$

где $W_y(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ – матрица управляемости пары матриц (A, B) , $D(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI$. □■

1.1.4 Модальное управление средствами последовательного компенсатора

Используется идея аналитической последовательной компенсации нежелательных полюсов передаточной функции (матрицы) «вход–выход» (ВВ) исходного технического объекта путем их сокращения с нулями передаточной функции (матрицы) ВВ последовательного компенсатора (ПК), наделенного полюсами, которые при замыкании разомкнутой системы, составленной из последовательного соединения ПК и ТО, отрицательной единичной обратной связью порождают передаточную функцию (матрицу) ВВ замкнутой системы, имеющую полином знаменателя резольвенты, совпадающий с желаемым характеристическим полиномом. Следует отметить, что факт сокращения нулей передаточной функции (матрицы) ПК и полюсов передаточной функции (матрицы) ТО приводит к появлению в структуре синтезируемой системы неуправляемых и ненаблюдаемых частей. При этом сформированная передаточная функция (матрица) описывает поведение только полностью управляемой и наблюдаемой части спроектированной системы. При нулевом начальном состоянии и ненулевом экзогенном задающем воздействии наличие неуправляемой и ненаблюдаемой частей в поведении системы не будет проявляться. Но при ненулевом начальном состоянии неуправляемой части в поведении системы по выходу может наличествовать компоненты свободного движения этой части системы. Таким образом, при эксплуатации системы с ПК в составе следует не допускать ситуаций, при которых возможны появления ненулевых начальных состояний.

Итак, исходный технический объект с тройкой матриц (A, B, C) «вход–состояние–выход» (ВСВ) модельного описания может быть задан моделью «вход–выход» (ВВ) в виде передаточной матрицы

$$W_{oy}(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (1.54)$$

Проектируемая система с тройкой матриц (F, G, C) ВСВ – модельного описания может быть задан желаемой моделью ВВ в виде передаточной матрицы

$$\Phi_{жс}(s) = C(sI - F)^{-1}G, \quad (1.55)$$

«задатчиком» которой является модальная модель с тройкой матриц (Γ, L, H) и передаточной матрицей ВВ

$$\Phi_{жс}(s) = H(sI - \Gamma)^{-1}L = C(sI - F)^{-1}G. \quad (1.56)$$

Реализация передаточной матрицы $\Phi_{жс}(s)$ в виде замкнутой структуры с единичной отрицательной обратной связью по вектору выхода возможна, если в прямой цепи включена система с передаточной матрицей $W_{жс}(s)$, определяемой матричным выражением

$$W_{жс}(s) = \Phi_{жс}(s)(I - \Phi_{жс}(s))^{-1}. \quad (1.57)$$

Если желаемая передаточная матрица прямой цепи (1.57) синтезируемой системы с отрицательной единичной обратной связью по выходу реализуется в виде последовательного соединения ПК и ТО, то оказывается справедливой запись $W_{жс}(s) = W_{oy}(s) \cdot W_{нк}(s)$, откуда для передаточной матрицы последовательного компенсатора получаем искомое представление

$$W_{нк}(s) = W_{oy}^{-1}(s) \cdot W_{жс}(s) = W_{oy}^{-1}(s) \cdot \Phi_{жс}(s) \cdot (I - \Phi_{жс}(s))^{-1}. \quad (1.58) \blacksquare$$

1.1.5 Проблема формирования модальной модели

Как следует из параграфов 1.1.1. и 1.1.2, в процедуре синтеза модального управления, реализуемого как в форме прямой связи по состоянию модальной модели, так и в форме обратной связи по состоянию динамического объекта управления, одним из ключевых моментов достижения благоприятного результата является выбор модальной модели.

Базовые требования к модальной модели, задаваемой парой матриц (Γ, H) состоят в том, чтобы:

– матрица Γ имела ту же размерность, что и матрица A исходного объекта (1.5);

- матрица Γ была носителем собственных значений, которые не содержались бы в спектре собственных значений матрицы A , иначе уравнение Сильвестра (1.12) не будет иметь решения;
- матрица H должна образовывать с матрицей Γ наблюдаемую пару, иначе уравнение Сильвестра (1.12) также не будет иметь решения (из тех же формальных соображений требуется управляемость пары матриц (A, B));
- матрица H должна удовлетворять условию $\dim(H) = \dim(B^T)$ с тем, чтобы существовало произведение матриц BH .

Перечисленные требования, предъявляемые к модальной модели таковы, что без их удовлетворения невозможно решить уравнение Сильвестра, а в случае успешного решения вычисленная матрица обратной связи K может не доставить матрице F состояния желаемого спектра собственных чисел.

Дополнительные требования к модальной модели определяются следующими факторами:

- базисом представления матрицы Γ состояния ММ;
- числом обусловленности матрицы Γ ;
- размерностью вектора x состояния ОУ;
- размерностью m вход – выходных отношений ОУ, а следовательно, и проектируемой системы.

Практика синтеза модального управления на основе решения матричного уравнения Сильвестра в программной оболочке Matlab последних версий обнаруживает, что вычислительная устойчивость матричных процедур, которые предусмотрены алгоритмом 1.1 синтеза, гарантируется для систем не выше шестого порядка без принятия специальных мер. В этой связи первые два фактора, определяющие дополнительные требования к модальной модели, хорошо учитываются, если матрица Γ ММ задается в диагональной или блочно-диагональной форме, причем последняя форма предпочтительней первой, так как в случае размещения собственных значений на окружности радиуса ω_0 , число обусловленности матрицы Γ независимо от значения ω_0 будет равно единице: $C\{\Gamma = \Gamma(\omega_0)\} = 1$.

Если размерность n вектора x состояния объекта управления заметно превышает величину $n = 6$, то собственные числа матрицы Γ ММ должны принадлежать структуре, образованной пересечением концентрических окружностей радиуса $\omega_{0l} = (1 + \gamma_{l-1})\omega_0$, где $l = \overline{1, q}$; $\gamma_{l-1} \leq (0.2 \div 0.5)$, $\gamma_0 = 0$; и сектора с раскрывом, равным 2μ , где

μ – параметр, определяющий колебательность процессов в проектируемой системе.

В случае, когда исходный объект управления является объектом МВМВ-типа, матрицу Γ состояния ММ следует формировать в блочно-диагональной форме так, чтобы она имела представление $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_j; j = \overline{1, m}\}$, где m – число входов проектируемой системы. Блочно-диагональная форма матрицы Γ с хорошо обусловленными матричными блоками $\Gamma_j; j = \overline{1, m}$ гарантирует матрице состояния ММ хорошую обусловленность. Более того, матричное уравнение Сильвестра (1.12) в случае блочно-диагональной формы матрицы Γ может быть декомпозировано на m матричных уравнений Сильвестра меньшей размерности. Действительно, уравнение Сильвестра (1.12) в этом случае принимает вид

$$M \cdot \text{diag}\{\Gamma_j; j = \overline{1, m}\} - A \cdot \text{row}\{M_j; j = \overline{1, m}\} = -B \cdot \text{row}\{H_j; j = \overline{1, m}\}, \quad (1.59)$$

которое декомпозировано на m матричных уравнений Сильвестра меньшей размерности вида

$$M_j \Gamma_j - A M_j = -B H_j, \quad j = \overline{1, m}; \quad (1.60)$$

где $\dim M_j = (n \times n_j)$, $\dim \Gamma_j = (n_j \times n_j)$, $\dim H_j = (m \times n_j)$, $\sum_{j=1}^m n_j = n$.

Остановимся на двух случаях использования модального управления и рассмотрим проблемы формирования модальной модели для решения задач этих случаев.

Первый случай – использование модального управления для обеспечения устойчивости проектируемой системы.

Всякая техническая динамическая система, которой является и система управления, должна быть работоспособной. Обязательным условием работоспособности динамической системы является ее устойчивость.

Дадим два определения устойчивости: одно в отрицательной логике, другое – в положительной.

Определение 1.3 (O1.3). Устойчивостью называется такое свойство динамической системы, при отсутствии которого система становится не работоспособной. \square

Определение 1.4 (O1.4). Устойчивостью называется такое свойство динамической системы, при наличии которого начальное отклонения управляемого процесса от желаемого хода с течением времени стремится к нулю. \square

Примечание 1.2 (ПР1.2). Определение 1.4 по существу является определением асимптотической устойчивости. Если же желаемый ход задать некоторой программной траекторией, а стремление с течением времени к нулю заменить стремлением управляемого процесса оказаться в ε -окрестности программной траектории, то получим определение устойчивости по А.М.Ляпунову. ■

Если положить, что желаемый ход управляемого процесса формируется с помощью вынужденной составляющей движения спроектированной системы (1.45), то отклонение от желаемого хода будет определяться свободной составляющей по вектору $x(t)$ состояния и вектору $y(t)$ выхода системы, имеющих представление

$$x(t) = e^{Ft} x(0), y(t) = Cx(t). \quad (1.61)$$

Определение 1.5 (О1.5). Если на траекториях асимптотически сходящихся процессов (1.61) задать требования к качеству этих процессов, то такая асимптотическая устойчивость называется качественной асимптотической устойчивостью. □

Для целей формирования требований к модальной модели в задаче модального управления, средствами которого обеспечивается качественная асимптотическая устойчивость проектируемой динамической системы перейдем в (1.61) к нормам. Для нормы $\|x(t)\|$ вектора состояния $x(t)$ проектируемой динамической системы в силу (1.61) можно записать цепочку из равенств и мажорирующих неравенств

$$\|x(t)\| = \|e^{Ft} x(0)\| \leq \|e^{Ft}\| \|x(0)\| = \|M e^{\Lambda t} M^{-1}\| \|x(0)\| \leq \|M\| \|e^{\Lambda t}\| \|M^{-1}\| \|x(0)\|. \quad (1.62)$$

В (1.62) Λ – диагональная матрица, построенная на собственных значениях матрицы F , что позволяет записать $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Для матричной экспоненты $e^{\Lambda t}$ оказывается справедливым представление $e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}$, в результате чего для нормы $\|e^{\Lambda t}\|$ матричной экспоненты $e^{\Lambda t}$ можно записать

$$\|e^{\Lambda t}\| = e^{-\eta t}, \quad (1.63)$$

где η – степень устойчивости системы с матрицей F , определяемая выражением $\eta = \min_i \{|\text{Re}(\lambda_i)|; i = \overline{1, n}\}$. Иначе говоря, степень устойчивости системы η определяется абсолютным значением вещественной части самого близкого к мнимой оси собственного числа.

В (1.62) произведение норм матриц $\|M\|$ и $\|M^{-1}\|$ образует число обусловленности $C\{M\}$, в силу определения которого можно записать

$$C\{M\} = \|M\| \|M^{-1}\|. \quad (1.64)$$

В итоге (1.62) принимает пользовательский вид

$$\|x(t)\| \leq \|M\| \|e^{\Lambda t}\| \|M^{-1}\| \|x(0)\| = \gamma e^{-\eta t} \|x(0)\|, \quad \gamma = C\{M\}. \quad (1.65)$$

Таким образом, темп сходимости управляемого процесса к желаемому его ходу однозначно определяется степенью устойчивости η . Итак, временной показатель качества сходящихся процессов, который является единым как для процессов по вектору состояния, так и по вектору выхода определен. Второй показатель качества этих процессов – их колебательность, оцениваемая величиной перерегулирования $\sigma\%$ на кривых по выходу системы, которая определяется величиной 2μ раскрытия сектора в левой полуплоскости комплексной плоскости собственных чисел, в котором размещены собственные числа матрицы состояния спроектированной системы. Здесь будет полезной информация, которая сведена в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

n	μ°	0	30	45	60	67.5	75	80
2	$\sigma\%$	0	0	1.3	16	27	43	57
3		0	0	1.4	8	15	26	37
5		0	0	0	3.6	8.3	16.6	25

При формировании модальной модели ее матрица состояния Γ должна обладать спектром $\sigma\{\Gamma\}$ собственных чисел, элементы которого должны удовлетворять условиям

$$\min_i \{ |\operatorname{Re}(\lambda_i)|; i = \overline{1, n} \} \geq \eta; \max_i \{ |Jm(\lambda_i)| / |\operatorname{Re}(\lambda_i)| \} \leq \operatorname{tg}(\mu(\sigma\%)), \quad (1.66)$$

если требования к устойчивости проектируемой системы сопровождаются требованиями к качеству сходящихся процессов по темпу и возможной колебательности.

Второй случай – использование модального управления для надления проектируемой системы широким спектром качественных показателей в переходном и установившемся режимах. При этом установившийся режим может быть порожден полиномиальным или гармоническим конечномерным экзогенным воздействием, а также стохастическим в широком смысле экзогенным воздействием.

В этом случае весьма эффективным оказывается аппарат полиномиальных динамических моделей для формирования ММ в

задаче синтеза модального управления, с помощью которого проектируемой системе сообщаются требуемые свойства

Под полиномиальной динамической моделью (ПДМ) синтезируемой системы понимается модель, матрица состояния которой является сопровождающей матрицей некоторого стандартного полинома $V(s) = s^n + v_1 s^{n-1} + \dots + v_n$. Для погружения в аппарат ПДМ рассмотрим ВМО синтезируемой системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), y(t) = Cx(t), \quad (1.67)$$

Система (15.57) характеризуется передаточной матрицей

$$\Phi(s) = C(sI - F)^{-1}G. \quad (1.68)$$

Сепаратный (ij) -й канал системы, связывающий i -й выход y_i и j -й вход g_j , описывается передаточной функцией

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{\Delta y_i(s)}{g_j(s)} = C^i (sI - F)^{-1} G_j, \quad (1.69)$$

где C^i – i -я строка матрицы выхода C ; G_j – j -й столбец матрицы входа G . Если рассмотреть случай равенства размерностей векторов выхода и входа системы, то в предположении, что каждый ii -й сепаратный канал реализован в виде модели с единичной отрицательной связью по выходу y_i , его можно охарактеризовать передаточными функциями:

$$\Phi_i(s) = \frac{\Delta y_i(s)}{g_j(s)} = \frac{v_{in}}{s^n + v_{i1}s^{n-1} + v_{i2}s^{n-2} + \dots + v_{in-1}s + v_{in}} \quad (1.70)$$

$$W_i(s) = \frac{\Delta y_i(s)}{\varepsilon_i(s)} = \frac{v_{in}}{s(s^{n-1} + v_{i1}s^{n-2} + \dots + v_{in-1})} \quad (1.71)$$

где $\frac{v_{in}}{v_{in-1}} = D_i$ – добротность по скорости ii -го канала;

$$\Phi_{\varepsilon i}(s) = \frac{\Delta \varepsilon_i(s)}{g_j(s)} = \frac{s^n + v_{i1}s^{n-1} + v_{i2}s^{n-2} + \dots + v_{in-1}s}{s^n + v_{i1}s^{n-1} + v_{i2}s^{n-2} + \dots + v_{in-1}s + v_{in}} \quad (1.72)$$

В дальнейшем рассматриваются только модели сепаратных каналов, поэтому для простоты индекс « i » опускается.

Наиболее употребительными полиномами, используемыми при назначении желаемой динамической модели управляемого процесса, являются полином Баттерворта и бином Ньютона, динамические показатели которых приведены в таблицах П1.1 – П1.4 приложения 1.

Коэффициенты этих полиномов параметризованы характеристической частотой ω_0 , так что $v_k = v_{k_0} \omega_0^k$. Это позволяет определить параметризованные частотой ω_0 следующие динамические характеристики полиномиальных динамических моделей при фиксированных значениях перерегулирования σ : время, при котором наблюдается перерегулирование, $t_\sigma = t_\sigma(\omega_0)$; длительность переходного процесса $t_{II} = t_{II}(\omega_0)$; добротность по скорости $D = D(\omega_0)$; полосу пропускания модели $\Delta\omega = \Delta\omega(\omega_0)$ на уровнях: $|1 - M(\omega)| = |1 - |\Phi(j\omega)|| \leq 0.05$ $M(\omega) = |\Phi(j\omega)| \geq 0.707$; $M(\omega) = |\Phi(j\omega)| \geq 0.05$; $\delta(\omega) = |\Phi_e(j\omega)| \leq 0.05$, а также значения частот среза ω_c и запасы устойчивости $\Delta\varphi$ по фазе.

Указанные динамические характеристики ПДМ для перечисленных типов наиболее употребительных стандартных полиномов с первого по пятый порядок $n = (\overline{1, 5})$ приведены в таблицах 1.2, 1.3.

Для случая, когда ПДМ (1.57) возбуждается окрашенным, например, экспоненциально коррелированным, шумом $\xi(t)$ с дисперсией D_ξ , образованным прохождением белого шума $w(t)$ с интенсивностью N через формирующий фильтр первого порядка с полосой пропускания на уровне 0.707 амплитудного спектра $\Delta\omega$ равной Ω

$$\dot{\eta}(t) = \Gamma_\phi \eta(t) + G_\phi w(t), \quad \xi(t) = P_\phi \eta(t), \quad (1.73)$$

где $\Gamma_\phi = -\Omega$, $G_\phi = \Omega$, $P_\phi = 1$, на основе решения матричного уравнения Ляпунова

$$E D_\xi + D_\xi E^T = -LNL^T, \quad (1.74)$$

где E, L – матрицы составной системы, образованной ПДМ и формирующим фильтром

$$\dot{\eta}(t) = E\zeta(t) + Lw(t), \quad y(t) = C_y \zeta(t), \quad \varepsilon = C_\varepsilon \zeta(t), \quad \zeta = \begin{bmatrix} x^T & \eta^T \end{bmatrix}^T, \quad (1.75)$$

имеют вид

$$E = \begin{bmatrix} F & GP_\phi \\ 0 & \Gamma_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & -\Omega \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ G_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad C_y = [C \quad 0], \quad C_\varepsilon = [-C \quad P_\phi],$$

Аналитические выражения для дисперсий D_y выхода $y(t)$ и D_ε ошибки $\varepsilon(t)$, определяемых из матрицы дисперсий состояния составной системы D_ζ можно получить с помощью соотношений:

$$D_y = C_y D_\zeta C_y^T; D_\varepsilon = C_\varepsilon D_\zeta C_\varepsilon^T$$

Полученные результаты для перечисленных выше полиномиальных динамических моделей приведены в таблицах 1.4, 1.5. В таблицах приводятся аналитические выражения для относительных дисперсий $\bar{D}_y = D_y / D_\zeta, \bar{D}_\varepsilon = D_\varepsilon / D_\zeta$ параметризованных относительной характеристической частотой $\bar{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_\phi$, так что $\bar{D}_y = \bar{D}_y(\bar{\omega}_0), \bar{D}_\varepsilon = \bar{D}_\varepsilon(\bar{\omega}_0)$

Модельно с помощью экспоненциально коррелированного шума $\xi(t)$ описывается широкий класс возмущающих воздействий различной физической природы, имеющих близкую к равномерной в эффективном частотном диапазоне Ω_ϕ функцию спектральной плотности.

Если значение Ω_ϕ в полученных аналитических выражениях для дисперсий устремить к бесконечности, то получим случай поведения полиномиальных динамических моделей при входном воздействии типа “белый шум” $w(t)$. Для этого случая в тех же таблицах приведены значения еще одной стохастической характеристики ПДМ – интервал корреляции выхода $y(t)$. Интервал корреляции оценивается на пятипроцентном уровне, т. е. при условиях

$$\tau_k = \min \tau_k; |R_y(\tau)| \leq 0.05 R_y(0), \text{ при } \tau \geq \tau_k$$

Построение корреляционной функции $R_y(\tau)$, а следовательно, оценка τ_k обеспечивается матричным соотношением

$$\begin{aligned} F D_x + D_x F^T &= -G N G^T \\ R_y(\tau) &= C \Phi(\tau) D_x C^T, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где $\Phi(\tau) = e^{F\tau}$ – фундаментальная матрица ПДМ D_x – матрица дисперсий вектора состояния ПДМ.

В модельном плане корреляционная функция $R_y(\tau)$ выхода ПДМ представляет собой весовую функцию системы с матрицей состояния F , выхода C и входа $D_x C^T$. В приводимых таблицах интервал корреляции также параметризован характеристической частотой ω_0 ПДМ. В случае необходимости воспроизведения корреляционной

функции (1.76) следует воспользоваться автономной версией ПДМ $\dot{x}(t) = Fx(t), x(0), y(t) = Cx(t)$, в которой положить $x(0) = D_x C^T$, в результате чего на выходе ПДМ будет наблюдаться $y(t)|_{t=\tau} = R_y(\tau)$.

Если возникает необходимость вычисления матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей вектора состояния и воспроизведения функции $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода, то следует воспользоваться результатами [23, 32, 36, 52], которые позволяют записать

$$S_x(\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \quad (1.77)$$

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T. \quad (1.78)$$

Таким образом, при формировании модальной модели ее матрица состояния Γ должна обладать спектром $\sigma\{\Gamma\}$ собственных значений, элементы которого должны иметь или распределение Баттерворта, или биномиальное распределение Ньютона. Наличие приведенных таблиц позволяет отобразить требования к показателям $\{\pi_\nu; \nu = \overline{1, \rho}\}$ качества процессов проектируемой системы в переходном и установившемся режимах в требование к значению ω_0 характеристической частоты ПДМ. Итоговое значение ω_0 ищется из условия $\omega_0 = \max_{\nu} \{\arg[\pi_\nu(\omega_0)R_\nu \pi_{r\nu}]; \nu = \overline{1, \rho}\}$, где $R_\nu, \pi_{r\nu}$ – соответственно отношение порядка (типа «больше», «меньше»), требуемое значение ν -го показателя качества. Полученное значение ω_0 характеристической частоты кладется в основу построения матрицы состояния модальной модели в форме $\Gamma = \Gamma(\omega_0)$.

Завершая рассмотрение модального управления как инструментария назначения желаемой структуры собственных чисел матрицы состояния проектируемой системы, следует констатировать, что в поставленной в монографии задаче алгоритмические возможности модального управления используются только в той мере, которая необходима для формирования апериодических систем с матрицами состояния простой и кратной структур вещественных собственных чисел.

1.2. Аperiodическая непрерывная система с матрицей состояния простой структуры в произвольном базисе

Исследование проблемы, вынесенной в заголовок параграфа, начнем с определений.

Определение 1.5 (O1.5). Системой управления будем называть функциональное объединение объекта управления (ОУ) и формирователя сигнала управления (ФСУ), которое в составе технологических ресурсов осуществляет воспроизведение требуемого задающего экзогенного воздействия. □

Определение 1.6 (O1.6). Аperiodической непрерывной системой будем называть непрерывную линейную систему, матрица состояния которой обладает вещественным спектром собственных чисел. □

Утверждение 1.4 (У1.4). Матрица M размерности $(n \times n)$ приведения $(n \times n)$ -матрицы F простой структуры к диагональному виду $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$ имеет своими столбцами собственные вектора матрицы F . □

Доказательство. Для доказательства утверждения рассмотрим матричное условие подобия матриц F и Λ , записанное в форме

$$M\Lambda = FM. \quad (1.79)$$

Представим соотношение (1.69) в столбцовой форме

$$M[\Lambda_1 \ \Lambda_2 \ \dots \ \Lambda_i \ \dots \ \Lambda_n] = F[M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i \ \dots \ M_n]. \quad (1.80)$$

Выделим в (1.70) i -е компоненты левой и правой частей, для которых справедлива запись

$$M\Lambda_i = FM_i; i = \overline{1, n}. \quad (1.81)$$

С учетом того, что столбец Λ_i имеет вид $\Lambda_i = \begin{bmatrix} 0_{(i-1) \times 1}^T & \lambda_i & 0_{(n-1) \times 1}^T \end{bmatrix}$, соотношение (1.71) приобретает представление

$$\lambda_i M_i = FM_i; (i = \overline{1, n}). \quad (1.82)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (1.72) задает собственные вектора матрицы F . Утверждение доказано. ■

Положения утверждения 1.3 позволяют предложить алгоритм формирования матрицы с желаемым спектром $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных чисел и спектром собственных векторов $\{\xi_i : F\xi_i = \lambda_i\xi_i; i = \overline{1, n}\}$, которому придадим номер 1.2 и аббревиатуру (A1.2)

Алгоритм 1.2 (А1.2)

1. Задать желаемый алгебраический спектр $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных чисел формируемой матрицы F .

2. Задать желаемый геометрический спектр $\{\xi_i : F\xi_i = \lambda_i\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных векторов формируемой матрицы F .

3. На основании соотношения (1.82) построить матрицу M приведения подобия формируемой матрицы F к диагональному виду Λ в форме

$$M = \text{row}\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, n}\}. \quad (1.83)$$

4. Сформировать на желаемом алгебраическом спектре собственных чисел матрицы F диагональную матрицу Λ в силу соотношения

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}. \quad (1.84)$$

5. С помощью матричного соотношения подобия (1.79), разрешенного относительно матрицы F , сформировать матрицу с желаемыми спектрами собственных чисел и собственных векторов

$$F = M\Lambda M^{-1}. \quad (1.85) \blacksquare$$

Пример 1.1 (ПР1.1). Конструирование матрицы F в соответствии с алгоритмом 1.2.

1. Зададим желаемый алгебраический спектр собственных чисел формируемой матрицы F вида $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -9\}$.

2. Зададим желаемый геометрический спектр собственных векторов формируемой матрицы F вида $\{\xi_1 = [0.707 \ 0.707]^T; \xi_2 = [-0.707 \ 0.707]^T\}$.

3. Конструируем матрицу M приведения подобия формируемой матрицы F к диагональному виду Λ в форме

$$M = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}.$$

4. Формируем на желаемом алгебраическом спектре собственных чисел матрицы F диагональную матрицу Λ вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

5. Формируем матрицу F в силу соотношения (1.85) ■

Утверждение 1.5 (У1.5). Матричная $(n \times n)$ -функция $f((*))$ от $(n \times n)$ -матрицы $(*)$, где $(*)$ принимает смысл матриц Λ и F , сохраняет отношение матричного подобия (1.79) в форме

$$Mf(\Lambda) = f(F)M. \quad \square(1.86)$$

Доказательство утверждения можно найти в [13, 15, 21, 33]. ■

Примечание 1.3 (П1.3). Соотношение (1.76) позволяет для матричной функции $f(F)$ записать $f(F) = Mf(\Lambda)M^{-1}$, где $M = \arg\{M\Lambda = FM\}$ ■

Примечание 1.4 (П1.4). Если алгебраический спектр $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ матрицы F простой и вещественный, то матричная функция $f(\Lambda)$ представима в форме $f(\Lambda) = \text{diag}\{f(\lambda_i); i = \overline{1, n}\}$. ■

Рассмотрим линейную непрерывную автономную систему, задаваемую в произвольном базисе с помощью векторно–матричного соотношения

$$\dot{x}(t) = Fx(t); x(t)|_{t=0} = x(0), \quad (1.87)$$

где x и F имеют тот же смысл и размерности, что и в параграфе 1.1. Решение системы (1.77) имеет вид

$$x(t) = e^{Ft}x(0). \quad (1.88)$$

Для целей дальнейших исследований воспользуемся положениями примечаний (П1.3) и (П1.4), в которых следует полагать $f(A) = e^{At}$ и $f(\Lambda) = e^{\Lambda t}$, для представления (1.78) в форме

$$x(t) = e^{Ft}x(0) = Me^{\Lambda t}M^{-1}x(0) = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}M^{-1}x(0) \quad (1.89)$$

Пример 1.2 (ПР1.2). Рассмотрим систему (1.87) с матрицей состояния F из примера 1.1, имеющей алгебраический спектр $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -9\}$ собственных чисел, тогда решение системы (1.87) в форме (1.79) принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-9t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \left\{ 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-9t} \right\} x(0) = \\ &= \left\{ e^{-2t} 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + e^{-9t} 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} x(0). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Рассмотрим решение (1.90) при векторе $x(0)$ начального состояния системы, принимающего значение собственных векторов матрицы F .

Тогда при $x(0) = \xi_1 = [0.707 \quad 0.707]^T$ для $x(t)$ получим

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left\{ e^{-2t} 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + e^{-9t} 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} = \\
&= \left\{ e^{-2t} \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} + e^{-9t} 0.5 \begin{bmatrix} 0.707 - 0.707 \\ -0.707 + 0.707 \end{bmatrix} \right\} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

при $x(0) = \xi_2 = [-0.707 \quad 0.707]^T$ для $x(t)$ получим

$$x(t) = \left\{ e^{-2t} 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + e^{-9t} 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} = e^{-9t} \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 1.2 подтвердил положение линейной алгебры, которое оформим в виде утверждения.

Утверждение 1.6 (У1.6). Матричная $(n \times n)$ -функция $f((*))$ от $(n \times n)$ -матрицы $(*)$, где $(*)$ принимает смысл матрицы F , сохраняет геометрический спектр $\{\xi_i : F\xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1, n}\}$ матрицы F в форме

$$f(F)\xi_i = f(\lambda_i)\xi_i; i = \overline{1, n}. \quad (1.91) \square$$

Доказательство утверждения можно найти в [13, 15, 21, 33]. \blacksquare

Примечание 1.5(П1.5). Если $f(F) = e^{Ft}$, а вектор $x(0)$ разложен по собственным векторам, так что выполняется равенство $x(0) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \xi_i$, то решение (1.88) системы (1.87) в силу (1.91) может

быть записано

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i e^{\lambda_i t} \xi_i. \quad (1.92) \blacksquare$$

1.3. Конструирование матриц простой структуры с желаемыми спектрами собственных чисел и векторов средствами модального управления

Возможность использования модального управления для конструирования матриц простой структуры с желаемыми спектрами собственных чисел и векторов заложено в положениях утверждения 1.3 и в алгоритме А1.1 синтеза модального управления. Тогда вынесенная в заголовок параграфа задача может быть решена с помощью утверждения.

Утверждение 1.7 (У1.7). Матрице F размерности $(n \times n)$, представимой в форме

$$F = A - BK, \quad (1.93)$$

где A, B, K – матрицы соответственно размерностей $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(r \times n)$, причем пара матриц (A, B) – управляемая, могут быть назначены требуемые алгебраический спектр собственных чисел

$$\{\lambda_i : Jm(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j; i, j = \overline{1, n}; i \neq j; \det(\lambda I - F) = 0\} \quad (1.94)$$

и геометрический спектр собственных векторов

$$\{\xi_i : F\xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1, n}\} \quad (1.95)$$

с помощью решения уравнения Сильвестра (1.12), записанного в форме

$$M\Lambda - AM = -BH, \quad (1.96)$$

где $M = \text{row}\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, n}\}$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$,

относительно матрицы H , если матрицу K сформировать в виде

$$K = HM^{-1}. \quad (1.97) \square$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке (1.97) в (1.93) в результате чего получим

$$F = A - BK = A - BHM^{-1}. \quad (1.98)$$

Если теперь в (1.98) подставить (1.96), то получим матричное соотношение

$$F = A - BHM^{-1} = A + (M\Lambda - AM)M^{-1}. \quad (1.99)$$

Умножим (1.99) справа на матрицу M , тогда получим уравнение подобия $M\Lambda = FM$, содержащее справедливость положений утверждения. ■

Примечание 1.6(П1.6). Ключевым моментом доказанного утверждения является разрешимость уравнения Сильвестра (1.86) относительно матрицы H в форме $H = B^{-1}(AM - M\Lambda)$. Очевидно, что решение в указанной форме возможно только в случае обратимости матрицы B , то есть в случае, когда $\text{rang}(B) = n$. В этом случае существует свобода назначения геометрического спектра матрицы F с произвольными собственными векторами. Если $\text{rang}(B) = r < n$, то число свободно назначаемых собственных векторов матрицы F оказывается равным r . В этом случае меняется постановка задачи, которая содержит требования назначения произвольного алгебраического спектра собственных чисел матрицы F и r собственных векторов. В соответствии с такой постановкой задачи претерпевает изменение запись уравнения Сильвестра (1.86), в которой матричные компоненты получают представления

$$M = [\overline{M} \quad \tilde{M}]; \Lambda = \text{diag}\{\overline{\Lambda}, \tilde{\Lambda}\}, H = [\overline{H} \quad \tilde{H}] \quad (1.100)$$

согласованные по размерности так, что $\dim(\bar{M}) = n \times r$, $\dim(\tilde{M}) = n \times (n - r)$, $\dim(\bar{\Lambda}) = r \times r$, $\dim(\tilde{\Lambda}) = (n - r) \times (n - r)$, $\dim(\bar{H}) = r \times r$, $\dim(\tilde{H}) = r \times (n - r)$. В результате уравнение Сильвестра (1.86) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} \bar{M} & \tilde{M} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} \bar{H} & \tilde{H} \end{bmatrix}. \quad (1.101)$$

Нетрудно видеть, что уравнение Сильвестра (1.91) распадается на два уравнения Сильвестра

$$\bar{M}\bar{\Lambda} - A\bar{M} = -B\bar{H}, \quad (1.102)$$

$$\tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}. \quad (1.103)$$

В уравнении (1.102) матрица \bar{M} строится в форме $\bar{M} = \text{row}\{\bar{M}_j = \xi_j; j = \overline{1, r}\}$, оно решается относительно матрицы \bar{H} . В уравнении (1.103) матрица \tilde{H} задается из условия $\tilde{H} = \text{arg}\{\text{observ}(\tilde{\Lambda}, \tilde{H})\}$, оно решается относительно матрицы \tilde{M} .

Тогда матрица K , доставляющая матрице $F = A - BK$ произвольный алгебраический спектр собственных чисел и r требуемых собственных векторов, определится с помощью формулы (1.97), принимающей вид

$$K = \begin{bmatrix} \bar{H} & \tilde{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M} & \tilde{M} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (1.104)$$

где матрица \bar{H} вычисляется в силу соотношения

$$\bar{H} = (B^T B)^{-1} B^T (A\bar{M} - \bar{M}\bar{\Lambda}). \quad (1.105) \blacksquare$$

1.4. Канонические формы матриц. Матрицы приведения подобия

Рассматриваются подобные матрицы F и \bar{F} , связанные матричным условием подобия (3.1) с матрицей M приведения подобия. Будем полагать, что $(n \times n)$ -матрица F задана в произвольном базисе (имеет произвольную форму), а $(n \times n)$ -матрица \bar{F} задана в каноническом базисе (имеет каноническую форму). В связи со сказанным встают два вопроса. Первый вопрос: как формируются матрицы в канонической форме? Второй вопрос: как формируется матрица M приведения подобия, позволяющая с помощью матричного соотношения

$$\bar{F} = M^{-1} F M \quad (1.106)$$

осуществить переход от матрицы F , заданной в произвольном базисе к матрице \overline{F} , задаваемой в некотором каноническом базисе?

Дадим ответ на первый из поставленных вопросов, то есть построим матрицы ЛО \mathbf{F} в канонических формах.

Определение 1.7 (O1.7). Канонической формой $(n \times n)$ матрицы линейного оператора \mathbf{F} будем называть форму $(n \times n)$ матрицы линейного оператора (ЛО), которая построена в соответствии с некоторым правилом (законом, каноном) с тем, чтобы решить одну из возможных задач: сокращение объема матричных вычислений путем минимизации числа ненулевых элементов матрицы; облегчение анализа структуры пространства ЛО \mathbf{F} , обеспечение вычислительной устойчивости всех матричных процедур путем уменьшения числа обусловленности матрицы ЛО и т.д. \square

К настоящему моменту сконструировано большое число канонических форм задания $(n \times n)$ матрицы линейного оператора \mathbf{F} , ниже рассматриваются только базовые канонические формы.

Базовые канонические формы $(n \times n)$ матрицы линейного оператора \mathbf{F} строятся на двух алгебраических спектрах исходной матрицы F , заданной в произвольном базисе.

Первый алгебраический спектр $\sigma\{F\} = \{\lambda_i : F\xi_i = \lambda_i\xi_i : \det(\lambda_i I - F) = 0 : i = \overline{1, n}\}$ представляет собой спектр собственных значений $\{\lambda_i : i = \overline{1, n}\}$ матрицы F .

Второй алгебраический спектр $\sigma_a\{F\} = \{a_i : \det(\lambda I - F) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n ; i = \overline{1, n}\}$ представляет спектр коэффициентов $\{a_i : i = \overline{1, n}\}$ характеристического полинома $D(\lambda) = \det(\lambda I - F)$ матрицы F .

Рассмотрим канонические представления \overline{F} исходной матрицы F , которые конструируются на алгебраическом спектре собственных значений матриц, для различных случаев его реализации.

1. Диагональная каноническая форма матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_i : \text{Jm}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i, l = \overline{1, n}\}. \quad (1.107)$$

Алгебраический спектр вида (1.96) порождает множество подобных матриц линейного оператора \mathbf{F} , именуемых матрицами простой структуры.

В случае реализации алгебраического спектра $\sigma\{F\}$ в форме (1.107), когда все собственные значения вещественные и простые (различные, не кратные), может быть построена диагональная матрица Λ с элементами λ_i на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы так, что она принимает вид

$$\bar{F} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \quad (1.108)$$

2. Блочно-диагональная каноническая форма матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{F\} = \{m(\lambda_{2i-1, 2i}) \neq 0; \lambda_{2i-1} = \alpha_i + j\beta_i; \lambda_{2i} = \alpha_i - j\beta_i; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i, l = \overline{1, n/2}\} \quad (1.109)$$

В случае реализации алгебраического спектра $\sigma\{F\}$ в форме (1.109), когда все собственные значения комплексно-сопряженные и простые (не кратные), может быть построена блочно-диагональная матрица $\tilde{\Lambda}$ с вещественнозначными матричными блоками $\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы так, что она принимает вид

$$\bar{F} = \tilde{\Lambda} = \text{diag}\left\{\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1, n/2}\right\}. \quad (1.110)$$

3. Комбинированная блочно-диагональная каноническая форма матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений содержит только простые собственные значения, часть которых числом n_R являются вещественными, а другая часть числом $n_c = 2m_c$ – комплексно-сопряженными, при этом выполняется соотношение $n = n_c + n_R$.

Комбинированная блочно-диагональная матрица имеет на своей главной диагонали диагональную матрицу вида (1.108) размерности $(n_R \times n_R)$ и блочно-диагональную матрицу вида (1.110) размерности $(n_c \times n_c)$ так, что она примет вид

$$\bar{F} = \tilde{\Lambda} = \text{diag}\left\{\Lambda_{(n_R \times n_R)}; \tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)}\right\}. \quad (1.111)$$

Матричные блоки на диагонали комбинированной блочно-диагональной матрицы можно менять местами, так что наряду с формой (1.111) матрица \bar{F} может иметь представление

$$\bar{F} = \tilde{\Lambda} = \text{diag}\{\tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)}; \Lambda_{(n_R \times n_R)}\}. \quad (1.112)$$

Так, например, если алгебраический спектр собственных значений матриц ЛО \mathbf{F} имеет реализацию

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \lambda_i : \text{Im}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i, l = \overline{3, n}\}, \quad (1.113)$$

то комбинированное блочно-диагональное представление канонической матрицы \bar{F} принимает вид

$$\bar{F} = \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} & [0_{2 \times (n-2)}] \\ [0_{(n-2) \times 2}] & [\Lambda_{(n-2) \times (n-2)}] \end{bmatrix} \quad (1.114)$$

где $0_{2 \times (n-2)}$, $0_{(n-2) \times 2}$, $\Lambda_{(n-2) \times (n-2)}$ – соответственно нулевые матрицы размерности $2 \times (n-2)$ и $(n-2) \times 2$ и диагональная матрица размерности $(n-2) \times (n-2)$.

1. Жорданова каноническая форма матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{F\} = \left\{ \lambda_k - \text{кратности } \mu_k, k = \overline{1, p}; \sum_{k=1}^p \mu_k = n; \text{Im}(\lambda_k) = 0; \right\}. \quad (1.115)$$

Тогда жорданова каноническая форма матрицы \bar{F} по своей структуре максимально близкая к диагональной форме для случая вещественных кратных собственных значений матриц ЛО \mathbf{F} в соответствии со структурой алгебраического спектра (1.115) примет вид

$$\bar{F} = J = \text{diag} \left\{ J_{kk} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}_{(\mu_k \times \mu_k)} ; k = \overline{1, p} \right\}. \quad (1.116)$$

Жорданова каноническая форма (1.116) представляет собой блочно-диагональную матрицу, составленную из жордановых блоков J_{kk} размерности $(\mu_k \times \mu_k)$, имеющих на своей главной диагонали собственное значение λ_k кратности μ_k , единицы на первой

наддиагонали и нули на остальных позициях блока. Жорданова каноническая форма (1.116) является верхней жордановой формой, наряду с которой может быть построена нижняя жорданова каноническая форма, которая характеризуется тем, что единицы жордановых блока размещаются на первой поддиагонали. Следует заметить, что жорданова каноническая форма может быть построена и для случая матриц ЛО, алгебраический спектр собственных значений которых содержит кратные комплексно-сопряженные элементы, причем возможны как комплекснозначная так и вещественнозначная формы.

Так вещественнозначная версия жордановой канонической формы для случая кратных комплексно-сопряженных собственных значений исходной матрицы принимает вид

$$\bar{F} = \tilde{J} = \text{diag} \left\{ \tilde{J}_{kk} = \begin{bmatrix} \alpha_k & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\beta_k^2 & \alpha_k & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \alpha_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -\beta_k^2 & \alpha_k \end{bmatrix}_{(\mu_k \times \mu_k)} ; k = \overline{1, p} \right\},$$

$$\text{где } \sigma\{\bar{F}\} = \left\{ (\lambda_k = \alpha_k \pm j\beta_k) - \text{кратности } \mu_k, k = \overline{1, p}; \sum_{k=1}^p \mu_k = n/2 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что каноническая форма \tilde{J} при $\beta_k \rightarrow 0$ вырождается в каноническую жорданову форму вида (1.116).

5. Рассмотрим теперь канонические представления \bar{F} исходной матрицы F , которые конструируются на алгебраическом спектре $\sigma_a\{F\}$ коэффициентов характеристического полинома

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{n-i} \quad (1.117)$$

матриц линейного оператора F . Этих представлений два, они совпадают с точностью до транспонирования. Канонические представления имеют вид

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ & -a \end{bmatrix} \quad (1.118)$$

и

$$\bar{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (n-1)} & \\ & -a^T \\ & & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}. \quad (1.119)$$

В канонических формах (1.118) и (1.119) a – n -мерный вектор–строка коэффициентов, записанных в обратном по отношению их размещения в характеристическом полиноме порядке так, что он принимает вид

$$a = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1] = \text{row}\{a_{n+1-i} : i = \overline{1, n}\}, \quad (1.120)$$

$0_{(n-1) \times 1}$; $0_{1 \times (n-1)}$; $I_{(n-1) \times (n-1)}$ – соответственно $(n-1)$ -мерные матрица–столбец и матрица–строка, а также $(n-1) \times (n-1)$ –единичная матрица.

Обе канонические формы (1.118) и (1.119) именуется нормальной, сопровождающей (свой характеристический полином) и фробениусовой канонической формой. С тем, чтобы их различать текстуально форма (1.118) названа строчной нормальной, сопровождающей или фробениусовой, а (1.119) – столбцовой. Для канонической формы (1.118) используется обозначение $\bar{F} = F_F$.

Строчная сопровождающая каноническая форма матрицы ЛО \mathbf{F} имеет в последней строке коэффициенты характеристического полинома, записанные с обратными знаками и в обратном порядке, первую наддиагональ, заполненную единицами, остальные позиции матрицы, заполненные нулями. При использовании этой формы матрицы для модельных представлений динамических объектов она именуется канонической управляемой фробениусовой (сопровождающей) формой.

Столбцовая сопровождающая каноническая форма матрицы ЛО \mathbf{F} имеет в последнем столбце коэффициенты характеристического полинома, записанные с обратными знаками и в обратном порядке, первую поддиагональ, заполненную единицами, остальные позиции матрицы, заполненные нулями. При использовании этой формы матрицы для модельных представлений динамических объектов она именуется канонической наблюдаемой фробениусовой (сопровождающей) формой.

Теперь дадим ответ на второй вопрос, поставленный в начале раздела, то есть построим матрицы приведения подобия произвольной матрицы ЛО \mathbf{F} к каноническим формам.

Приведение матрицы F простой структуры ЛО \mathbf{F} к диагональной форме (1.108) строится на положениях утверждения 1.3 (см. параграф 1.2) и утверждения 1.7.

Утверждение 1.8 (У1.8). Пусть матрица F ЛО \mathbf{F} является матрицей простой структуры, тогда ее каноническая строчная фробениусова форма F_F , имеющая представление (1.118), обладает собственными векторами

$$\xi_i = \arg \{ F_F \xi_i = \lambda_i \xi_i ; i = \overline{1, n} \}, \quad (1.121)$$

которые строятся по схеме Вандермонда так, что они принимают вид

$$\xi_i = \left[1 \quad \lambda_i \quad \lambda_i^2 \quad \dots \quad \lambda_i^{n-1} \right]^T ; i = \overline{1, n}. \quad \square(1.122)$$

Доказательство сформулированного утверждения строится на непосредственной подстановке в (1.121) представлений (1.118) и (1.122), в результате получается следующая цепочка векторно-матричных равенств

$$F_F \xi_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \dots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \dots \\ -\sum_{l=1}^n a_l \lambda_i^{n-l} \end{bmatrix} \quad (1.123)$$

Но в силу характеристического уравнения матриц ЛО \mathbf{F} оказывается справедлива запись

$$\lambda_i^n + \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^{n-i} = 0, \quad (1.124)$$

из которой следует справедливость представления

$$-\sum_{l=1}^n a_l \lambda_i^{n-l} = \lambda_i^n \quad (1.125)$$

подстановка которого в (1.123) приводит последнее к виду

$$F_F \xi_i = \lambda_i \left[1 \quad \lambda_i \quad \lambda_i^2 \quad \dots \quad \lambda_i^{n-1} \right]^T. \quad (1.126)$$

Соотношение (1.115) делает справедливым утверждение 1.7. ■

Доказательство утверждения 1.8. и положения утверждения 1.6 содержат доказательство утверждения 1.8.

Утверждение 1.9 (У1.9). Пусть матрица F_F является канонической строчной фробениусовой формой матриц ЛО \mathbf{F} простой структуры, тогда матрица F_F может быть приведена к канонической диагональной форме (1.97) с помощью матрицы Вандермонда M_B , столбцы которой M_{Bi} ($i = \overline{1, n}$) суть собственные вектора вида (1.111) так, что она принимает вид

$$M_B = \text{row} \left\{ M_{Bi} = \xi_i = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}^T; i = \overline{1, n}. \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} . \quad (1.116) \blacksquare$$

Рассмотрим теперь задачу конструирования матрицы \tilde{M} приведения исходной матрицы F , обладающей комплекснозначным спектром собственных значений (1.98), к канонической блочно-диагональной форме (1.99) в силу матричного соотношения $\tilde{\Lambda} = \tilde{M}^{-1} F \tilde{M}$.

Утверждение 1.10 (У1.10). Пусть $(n \times n)$ -матрица F такова, что алгебраический спектр ее собственных значений составлен из комплексно-сопряженных чисел так, что он имеет вид (1.98). Геометрический спектр собственных векторов этой матрицы составлен из комплексно-сопряженных векторов так, что он имеет вид

$$\{ \xi_{2i-1}; \xi_{2i}; i = \overline{1, n/2} \} = \left\{ \begin{array}{l} \xi_{2i-1} = \xi_{R, 2i-1} + j \xi_{J, 2i-1}; \xi_{2i} = \xi_{R, 2i} - j \xi_{J, 2i}; \\ F \xi_{2i-1} = \lambda_{2i-1} \xi_{2i-1}; F \xi_{2i} = \lambda_{2i} \xi_{2i}; i = \overline{1, n/2}. \end{array} \right\}. \quad (1.117)$$

Тогда матрица

$$\tilde{M} = \text{arg} \left\{ \tilde{\Lambda} = \tilde{M}^{-1} F \tilde{M} = \text{diag} \left\{ \tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1, n/2}; \right\} \right\} =$$

$$= \text{row} \left\{ \left[\tilde{M}_{2i-1}; \tilde{M}_{2i} \right]; i = \overline{1, n/2}; \right\}$$

имеет своими столбцами $\tilde{M}_{2i-1}, \tilde{M}_{2i}$ соответственно вещественный и мнимый компоненты собственных векторов, что записывается в форме

$$\tilde{M}_{2i-1} = \xi_{R, 2i-1}, \tilde{M}_{2i} = \xi_{J, 2i-1}. \quad \square$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в векторно-матричные соотношения для собственных векторов

$$F\xi_{2i-1} = \lambda_{2i-1}\xi_{2i-1}; F\xi_{2i} = \lambda_{2i}\xi_{2i}; i = \overline{1, n/2}$$

представлений собственных значений и векторов в форме

$$\{\lambda_{2i-1} = \alpha_i + j\beta_i; \lambda_{2i} = \alpha_i - j\beta_i; i = \overline{1, n/2}\}$$

$$\xi_{2i-1} = \xi_{R,2i-1} + j\xi_{J,2i-1}; \xi_{2i} = \xi_{R,2i} - j\xi_{J,2i}; i = \overline{1, n/2}.$$

и последующем разделении полученных выражений на вещественный и мнимый компоненты, что в итоге приводит к двум векторно-матричным равенствам

$$(F - \alpha_i I)\xi_{Ri} = -\beta_i \xi_{Ji} ; (F - \alpha_i I)\xi_{Ji} = \beta_i \xi_{Ri}. \quad (1.118)$$

В свою очередь, если записать уравнение подобия $\tilde{M}\tilde{\Lambda} = F\tilde{M}$, в котором выделить блоки соответствующие собственным значениям λ_{2i-1} и λ_{2i} то получим

$$[\tilde{M}_{2i-1} : \tilde{M}_{2i}] \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} = F[\tilde{M}_{2i-1} : \tilde{M}_{2i}]$$

Решение последнего матричного уравнения относительно матриц-столбцов $\tilde{M}_{2i-1}, \tilde{M}_{2i}$ приводит к соотношениям

$$(F - \alpha_i I)\tilde{M}_{2i-1} = -\beta_i \tilde{M}_{2i} ; (F - \alpha_i I)\tilde{M}_{2i} = \beta_i \tilde{M}_{2i-1}.$$

Сравнение последних соотношений с соотношениями (1.118) делает справедливыми положения утверждения. ■

Примечание 1.7 (ПР1.7). Если спектр собственных значений матриц ЛО F является комбинированным так, что он содержит как вещественные некрратные собственные значения, так и комплексно-сопряженные некрратные собственные значения, при этом примера ради имеет реализацию вида (1.102)

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \lambda_i : \text{Im}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq l; i, l = \overline{3, n}\},$$

то исходная матрица F приводима к блочно диагональной канонической форме

вида (1.103) с помощью обобщенной матрицы \tilde{M} , имеющей своими

столбцами собственные вектора, а также их вещественные и мнимые компоненты, согласованные с вещественными и комплекснозначными

собственными значениями. Так в случае, когда исходная матрица F

ЛО F имеет каноническую строчную фробениусову форму F_F , то \tilde{M}

является обобщенной матрицей Вандермонда \tilde{M}_B , имеющей

представление

$$\tilde{M}_B = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_1^0) & \operatorname{Im}(\lambda_1^0) & \lambda_3^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \operatorname{Re}(\lambda_1^1) & \operatorname{Im}(\lambda_1^1) & \lambda_3^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \operatorname{Re}(\lambda_1^2) & \operatorname{Im}(\lambda_1^2) & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Re}(\lambda_1^{n-1}) & \operatorname{Im}(\lambda_1^{n-1}) & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.119) \blacksquare$$

В заключение покажем, что матрица Вандермонда M_B и матрица M собственных векторов произвольной матрицы F простой структуры ЛО \mathbf{F} позволяют приводить матрицу F к канонической строчной фробениусовой форме F_F . Действительно обе матрицы M и M_B решают задачу диагонализации матриц F и F_F в формах

$$\Lambda = M^{-1}FM; \quad \Lambda = M_B^{-1}F_F M_B. \quad (1.120)$$

Приведенные матричные соотношения позволяют составить матричное равенство

$$M_B^{-1}F_F M_B = M^{-1}FM,$$

которое в разрешенном относительно матрицы F_F виде записывается

$$F_F = M_B M^{-1} F M M_B^{-1} = M_F^{-1} F M_F, \quad (1.121)$$

$M_F = M M_B^{-1}$ – матрица приведения произвольной матрицы F простой структуры к матрице F_F , являющейся канонической строчной фробениусовой формой матриц ЛО \mathbf{F} .

Теперь остановимся на формировании матрицы T приведения произвольной матрицы F с вещественным спектром кратных собственных значений, определяемой в силу соотношения

$$TJ = FT. \quad (1.122)$$

Простоты ради выкладок будем для начала полагать, что кратность собственного значения удовлетворяет условию $\mu = n$. Формирование матрицы T осуществим на основе следующего утверждения.

Утверждение 1.11 (У1.11). Матрица T приведения подобия матрицы F с вещественным спектром кратных собственных значений кратности равной степени характеристического полинома к жордановой форме, представленная в столбцовой форме

$$T = \operatorname{col}\{T_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (1.123)$$

столбцы которой определяются из условий:

$$\lambda T_1 = FT_1; T_i = (F - \lambda I)T_{i+1}; i = \overline{1, n-1}. \quad \square(1.124)$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановки в векторно-матричные соотношения подобия (1.122) матрицы T , представленной в форме (1.123). В результате этой подстановки получим

$$[T_1 \ T_2 \ T_3 \ \dots \ T_n] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = F[T_1 \ T_2 \ T_3 \ \dots \ T_n],$$

$\lambda T_1 = FT_1, T_1 + \lambda T_2 = FT_2, \dots, T_{n-1} + \lambda T_n = FT_n$, обобщением чего является запись (1.124). ■

2. ПРОБЛЕМА СКАЛЯРИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Системы «одномерный вход – одномерный выход» (ОВОВ), которые доминируют в современной практике управления техническими объектами, приобщила специалистов по методам прикладного управления к скалярным визуализированным представлениям исследуемых процессов, их характеристик и пользовательских показателей. Ситуация существенно изменяется, когда специалистам по методам прикладного управления приходится иметь дело с векторными процессами. Невольно возникает потребность в скаляризации векторных процессов. Скаляризация векторных процессов состоит в переходе от вектора к оценке размера вектора. Оценка размера вектора как индивидуального математического объекта осуществляется с использованием векторных норм. Если вектор получен в результате процедуры отображения одного пространства в другое с помощью линейного оператора (ЛО), то его размер может быть определен с помощью векторной нормы или с использованием сингулярного разложения матрицы ЛО. В случае использования аппарата векторных норм формируется оценка «сверху» размера вектора, т.е. его мажорантная оценка. В случае использования сингулярного разложения матриц ЛО оценка размера вектора осуществляется и «снизу» и «сверху», т.е. в форме минорантной и мажорантной оценок размера вектора.

2.1 Скаляризация векторных процессов с использованием векторных норм

Введем в рассмотрение численную (скалярную) характеристику элементов (векторов) $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ арифметического пространства X^n , именуемую нормой вектора, полагая ниже, что пространство действительное, что позволяет записать $X^n = R^n$.

Определение 2.1 (O2.1). Пусть функция $\varphi(\cdot)$ сопоставляет каждому вектору $x \in R^n$ – линейного вещественного пространства вещественное число $\|x\|$, называемое нормой (размером) этого вектора, если выполняются условия:

- 1) $\varphi(x) = \|x\| > 0$ для $\forall x \neq 0$ и $\varphi(x) = \|x\| = 0$ при $x = 0$;
- 2) $\varphi(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

$$3) \varphi(x + y) = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad \square$$

Универсальной векторной нормой является векторная норма Гельдера, задаваемая выражением:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}; \quad p - \text{целое положительное.}$$

Наиболее употребительными векторными нормами являются нормы при $p = 1, 2$ и ∞ :

$$1. \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| - \text{абсолютная норма вектора;}$$

$$2. \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} - \text{квадратичная, естественная или евклидова}$$

норма вектора;

$$3. \|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{i=1, n} |x_i| - \text{бесконечная или экстремальная}$$

норма вектора.

Приведенные векторные нормы эквивалентны в том смысле, что для норм $\|x\|_\mu$ и $\|x\|_\nu$ существуют положительные числа β_1 и β_2 такие, что выполняются неравенства: $\beta_1 \|x\|_\mu \leq \|x\|_\nu \leq \beta_2 \|x\|_\mu$.

Так для норм $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ выполняются оценочные неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2; \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty; \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Примечание 2.1 (П2.1). Следует сказать, что численное значение векторной нормы с ростом ее индекса p уменьшается. Проиллюстрируем это на примере вычисления нормы с различными индексами вектора $x = [1 \quad -7 \quad 23]^T$. Тогда получим для нормы вектора x с индексом:

$$p = 1, \|x\|_1 = |1| + |-7| + |23| = 1 + 7 + 23 = 31;$$

$$p = 2, \|x\|_2 = \left((1)^2 + (-7)^2 + (23)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{579} = 24.0624;$$

$$p = \infty, \|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_i (|x_i|; i = 1, 2, 3) = \max(|1|, |-7|, |23|) = 23. \quad \blacksquare$$

Таким образом, оказывается справедливой цепочка неравенств $\|x\|_1 > \|x\|_2 > \|x\|_\infty$.

Примечание 2.2 (П2.2). Следует сказать, что норма позволяет задавать поверхности постоянных значений нормы в форме $\|x\|_p = r = \text{const}$, которые представляют собой в зависимости от значения p индекса нормы сферы. Если размерность пространства $n = 2$, то сферы становятся окружностями. На рис.2.1–рис.2.3 приведены окружности вида $\|x\|_p = r$ соответственно для $p = 1, 2, \infty$. ■

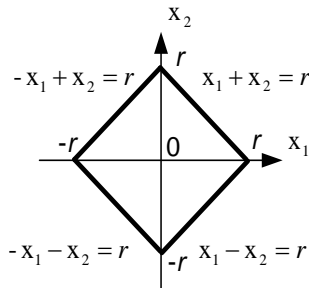


Рис.2.1

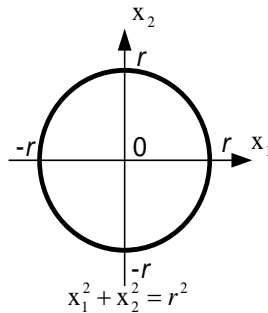


Рис.2.2

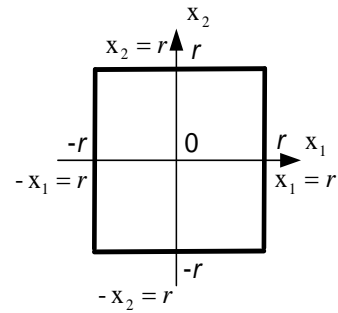


Рис.2.3

2.2 Согласование матричных и векторных норм

Прежде чем решать задачу, вынесенную в заголовок параграфа, рассмотрим способы задания матричных норм. Матричные нормы по своему содержанию опираются на две функции матрицы. Первой функцией матрицы является представление двумерного массива чисел. Вторая функция матрицы состоит в численном представлении линейного оператора.

Поэтому, если матрица рассматривается как двумерный $(n \times m)$ массив чисел, то для задания нормы $(n \times m)$ -матрицы N может быть использована любая векторная норма вектора \tilde{N} размерности $(n \cdot m)$, полученного склеиванием m столбцов размерности n матрицы N . Наиболее употребительной векторной нормой $(n \times m)$ -матрицы N является евклидова (фробениусова) норма матрицы, задаваемая в виде

$$\|N\|_E = \|N\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |N_{ij}|^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.1)$$

Если матрица рассматривается как численное представление линейного оператора, то норма матрицы оценивается по эффекту действия оператора с матрицей N на вектор x в силу линейного алгебраического соотношения (ЛАС)

$$z = Nx, \quad (2.3)$$

задаваемого с помощью максимального значения нормы вектора z . Такие матричные нормы называются операторными или индуцированными и задаются с помощью представления

$$\|N\|_p = \max_x \frac{\|Nx\|_p}{\|x\|_p}. \quad (2.4)$$

Наиболее употребительными операторными нормами являются нормы с индексами $p = 1, 2$ и ∞ .

При $p = 1$ $\|N\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |N_{ij}|; j = \overline{1, m} \right)$, норма $\|N\|_1$ называется столбцовой.

При $p = \infty$ $\|N\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^m |N_{ij}|; i = \overline{1, n} \right)$, норма $\|N\|_\infty$ называется строчной (или бесконечной).

Задание операторной нормы с индексом $p = 2$ матрицы N , которая именуется спектральной нормой матрицы, представим с помощью утверждения.

Утверждение 2.1 (У2.1). Операторная норма с индексом $p = 2$ матрицы N задается соотношением

$$\|N\|_2 = \max_x \frac{\|Nx\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(N) : \alpha_M(N) = |\mu_M^{1/2}| : \det(\mu I - N^T N) = 0. \quad \square(2.5)$$

Доказательство утверждения строится на том факте, что матричная норма с индексом $p = 2$ строится на отношении евклидовых норм двух векторов. Указанное обстоятельство позволяет на основании (2.5) записать следующую цепочку соотношений

$$\left(\|N\|_2 \right)^2 = \max_x \frac{\left(\|Nx\|_2 \right)^2}{\left(\|x\|_2 \right)^2} = \max_x \frac{x^T N^T N x}{x^T x} = \mu. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) позволяет построить мультипликативную структуру

$$x^T N^T N x = \mu x^T x. \quad (2.7)$$

Очевидно, скалярное соотношение (2.7) выполняется, если будет выполняться векторное соотношение

$$N^T N x = \mu x. \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (2.8) представляет собой задачу на собственные вектора и собственные числа матрицы $N^T N$, которые вычисляются из решения характеристического уравнения матрицы $N^T N$

$$\det(\mu I - N^T N) = 0. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.6) удовлетворяется при максимальном собственном значении μ_M матрицы $N^T N$, а следовательно соотношение (2.5) удовлетворяется при $\alpha_M = \mu_M^{1/2}$. ■

Приведенные матричные нормы удовлетворяют оценочным неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} \|N\|_2 &\leq \|N\|_1 \leq \sqrt{n} \|N\|_2; \\ \max_{i,j} |N_{ij}| &\leq \|N\|_2 \sqrt{nm} \max_{i,j} |N_{ij}|; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|N\|_\infty &\leq \|N\|_2 \leq \sqrt{m} \|N\|_\infty; \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \|N\|_\infty &\leq \|N\|_2 \leq \sqrt{n} \|N\|_\infty; \\ \|N\|_2 &\leq (\|N\|_1 \|N\|_\infty)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Факт согласованности матричных и векторных норм задается определением.

Определение 2.2 (O2.2). Нормы $\|z\|_q$, $\|x\|_r$ и норма $\|N\|_p$ соответственно векторов z , x и матрицы N , связанных линейным алгебраическим соотношением (2.3) называются согласованным, если выполняется соотношение

$$\|z\|_q \leq \|N\|_p \|x\|_r. \quad \square(2.11)$$

Наиболее употребительными согласованными нормами являются векторные и матричные нормы, удовлетворяющие соотношениям:

$$q = p = r = 1; \quad (2.12)$$

$$q = p = r = 2. \quad (2.13)$$

Остальные сочетания векторных и матричных норм, удовлетворяющих условию (2.11) согласованности норм, следует искать, опираясь на соотношения (2.1) и (2.10). Заметим, что при выполнении условия (2.13) неравенство (2.11) обладает минимальной достаточностью, то есть оно максимально приближенно к равенству.

2.3 Скаляризация векторных процессов с использованием сингулярного разложения матриц

Сингулярное разложение матриц прочно вошло в практику специалистов по вычислительным процедурам и теории управления. Круг задач решаемых с помощью сингулярного разложения достаточно широк. В проблемно-ориентированном виде интерес представляет возможность использования сингулярного разложения для скаляризации векторных процессов, т.е. для построения оценок размера вектора.

Определение 2.3. Сингулярным разложением $n \times n$ квадратной матрицы N , называется представление ее в форме

$$N = U \Sigma V^T, \quad (2.14)$$

где U – ортогональная $n \times n$ матрица, столбцы U_i ($i = \overline{1, n}$) которой образуют левый сингулярный базис так, что выполняются соотношения

$$U_i^T \times U_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow UU^T = U^T U = I; \quad (2.15)$$

V – ортогональная $n \times n$ матрица, столбцы V_i ($i = \overline{1, n}$) которой образуют правый сингулярный базис так, что выполняются соотношения вида

$$V_i^T \times V_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow VV^T = V^T V = I. \quad (2.16)$$

Σ – диагональная матрица размерности $n \times n$ с сингулярными числами $\alpha_i > 0$ на главной диагонали, так что она принимает вид

$$\Sigma = \text{diag} \{ \alpha_i : i = \overline{1, n} \}. \quad \square$$

Примечание 2.3.(П2.3) В силу соотношений (2.14) и (2.15) становятся справедливыми матричные равенств ■

Утверждение 2.2.(У2.2) Оказываются справедливыми следующие положения:

1. Столбцы U_i матрицы U являются собственными векторами матрицы NN^T так, что выполняется векторно–матричное соотношение

$$NN^T U_i = \mu_i U_i; i = \overline{1, n}; \quad (2.17)$$

где μ_i – собственное значение матрицы NN^T , вычисляемое в силу решения характеристического уравнения

$$\det(\mu I - NN^T) = 0; \quad (2.18)$$

2. Столбцы V_j матрицы V являются собственными векторами матрицы $N^T N$ так, что выполняется векторно–матричное соотношение

$$N^T N V_j = \mu_j V_j; j = \overline{1, n}; \quad (2.19)$$

где μ_j – собственное значение матрицы $N^T N$, вычисляемое в силу решения характеристического уравнения

$$\det(\mu I - N^T N) = 0; \quad (2.20)$$

3. Сингулярные числа α_i матрицы N вычисляются в силу соотношения

$$\alpha_i = |\mu_i^{1/2}|, i = \overline{1, n}. \quad \square(2.21)$$

Доказательство положения 1 утверждения опирается на представление матрицы NN^T с использованием сингулярного разложения (2.15) и свойства (2.16) матрицы V правого сингулярного базиса, в результате чего получим цепочку матричных соотношений

$$NN^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma I \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T. \quad (2.22)$$

Умножение крайних матричных элементов цепочки (2.22) на матрицу U справа с использованием ее свойства (2.15) приводит к матричному соотношению

$$NN^T U = U \Sigma^2. \quad (2.23)$$

Запишем (2.23) в матрично-векторной форме для чего правую матрицу U левой части и правую матрицу Σ^2 правой части представим в столбцовых формах так, что соотношение примет вид

$$NN^T [U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_n] = U [\Sigma_1^2, \Sigma_2^2, \dots, \Sigma_i^2, \dots, \Sigma_n^2]. \quad (2.24)$$

Выделим в левой и правой частях i -е столбцы U_i и Σ_i^2 , для которых в силу (2.24) получим

$$NN^T U_i = U \Sigma_i^2 : i = \overline{1, n}. \quad (2.25)$$

Если учесть, что Σ_i^2 есть i -й столбец диагональной матрицы Σ^2 , то он имеет вид $\Sigma_i^2 = [0_{1 \times (i-1)} \alpha_i^2 0_{1 \times (n-i)}]^T$, подстановка которого в (2.25) приводит в силу соотношения (2.21) $\mu_i = \alpha_i^2$ к выражению (2.17) для вычисления собственного вектора U_i матрицы NN^T . Как следствие векторно-матричное соотношение для вычисления собственного вектора порождает характеристическое уравнение (2.18) для вычисления собственного значения

$$\mu_i = \alpha_i^2. \quad (2.26)$$

Для доказательства положения 2 утверждения 2.2. сформируем матрицу $N^T N$ по той же схеме, что и формирование матрицы NN^T ,

воспользовавшись сингулярным разложением (2.14) и свойством (2.15) матрицы U левого сингулярного базиса, получим цепочку матричных соотношений

$$N^T N = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T. \quad (2.27)$$

Если теперь осуществить выкладки по схеме (2.23)–(2.25) применительно к (2.27) с точностью до замены матрицы U на матрицу V , а столбца U_i на столбец V_j с учетом представления $\Sigma_j^2 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i-1)} & \alpha_j^2 & 0_{1 \times (n-i)} \end{bmatrix}^T$, то получим соотношение (2.19) для вычисления собственного вектора V_j матрицы $N^T N$, в котором $\mu_j = \alpha_j^2$. Как следствие векторно-матричное соотношение для вычисления собственного вектора порождает характеристическое уравнение (2.20) для вычисления собственного значения

$$\mu_j = \alpha_j^2. \quad (2.28)$$

Доказательство положения 3 в форме (2.21) содержится в (2.25) и (2.27). ■

Примечание 2.4. Доказательство утверждения 2.2 содержит положение, в соответствии с которым алгебраические спектры собственных значений матриц NN^T и $N^T N$ совпадают, т.е. выполняется равенство $\sigma(NN^T) = \sigma(N^T N)$, если матрица N квадратная. Если матрица N прямоугольная, то совпадают ненулевые собственные значения матриц NN^T и $N^T N$. ■

Остановимся на свойствах сингулярных чисел матрицы N .

Свойство 2.1. Сингулярные числа матрицы N не отрицательны так, что выполняется неравенство $\alpha_i > 0; i = \overline{1, n}$, при этом спектр $\sigma_\alpha(N) = \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ сингулярных чисел в основных программных оболочках формируется так, что $\alpha_1 = \max_i \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$, $\alpha_n = \min_i \{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$.

Свойство 2.2. Матрицы $N^T N$ и NN^T в силу соотношений (2.17) и (2.19) подобны так, что их характеристические полиномы совпадают $\det(\mu I - NN^T) = \det(\mu I - N^T N)$, (2.29) а также совпадают остальные матричные инварианты этих матриц.

Свойство 2.3. Это свойство изложим в форме утверждения.

Утверждение 2.3. Умножения матрицы N на ортогональную матрицу R справа так, что $\tilde{N} = NR$, и на ортогональную матрицу Q слева так, что $\tilde{N} = QN$, порождают матрицы, которые обладают тем же

спектром сингулярных чисел, что и матрица N , так что выполняются условия

$$\sigma_{\alpha}\{\tilde{N}\} = \sigma_{\alpha}\{NR\} = \sigma_{\alpha}\{N\}; \quad \sigma_{\alpha}\{\tilde{\tilde{N}}\} = \sigma_{\alpha}\{QN\} = \sigma_{\alpha}\{N\}. \quad (2.30) \square$$

Доказательство строится на использовании соотношения (2.25), факте ортогональности матриц $R = \arg\{RR^T = R^T R = I\}$ и $Q = \arg\{QQ^T = Q^T Q = I\}$ и доказательстве совпадения характеристических полиномов матриц $\tilde{N}\tilde{N}^T$, $\tilde{\tilde{N}}^T\tilde{\tilde{N}}$ и NN^T , $N^T N$. Действительно,

$$\det(\tilde{\mu} I - \tilde{N}\tilde{N}^T) = \det(\tilde{\mu} I - NRR^T N^T) = \det(\tilde{\mu} I - NN^T) \quad (2.31)$$

$$\det(\tilde{\mu} I - \tilde{\tilde{N}}^T\tilde{\tilde{N}}) = \det(\tilde{\mu} I - N^T Q^T QN) = \det(\tilde{\mu} I - N^T N) \quad (2.32)$$

что влечет за собой цепочку равенств $\tilde{\mu}_i = \tilde{\tilde{\mu}}_i = \mu_i; i = \overline{1, n}$ и как следствие (2.26). ■

Свойство 2.4. Если матрица N диагональная $N = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, то $\alpha_i = |\lambda_i|$, следовательно $\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i = |\lambda_i|\}$.

Свойство 2.5. Это свойство изложим в форме утверждения.

Утверждение 2.4. Если матрица N симметричная $N = N^T$, и характеризуется спектром собственных значений $\sigma\{N\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, то сингулярные числа α_i этой матрицы, удовлетворяют условию $\alpha_i = |\lambda_i|$, а следовательно $\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i = |\lambda_i|\}$. □

Доказательство. Сформируем характеристический полином для матрицы NN^T , для которого в силу симметрии матрицы N оказывается справедливой цепочка равенств $\det(\mu I - NN^T) = \det(\mu I - N^2) = \det(\mu I - f(N))$. Матричная функция от матрицы $f(N) = N^2$ по свойству алгебраического спектра собственных значений матричной функции от матрицы имеет своими элементами функции от элементов алгебраического спектра исходной матрицы N , так что $\lambda_i(f(N) = N^2 = NN^T) = f(\lambda_i(N)) = \lambda_i^2$. Откуда следует равенство $\alpha_i = |\lambda_i|$. ■

Свойство 2.6. Это свойство также сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 2.5. Сингулярное разложение $N^{-1} = U(N^{-1})\Sigma(N^{-1})V^T(N^{-1})$ матрицы N^{-1} обратной N имеет своими

сингулярными числами $\alpha_i(N^{-1})$, числа обратные сингулярным числам $\alpha_i(N)$ матрицы N , при этом выполняется равенство

$$\alpha_i(N^{-1}) = \alpha_{n-i+1}^{-1}(N), i = \overline{1, n}, \quad (2.33)$$

левым сингулярным базисом $U(N^{-1})$ является правый сингулярный базис матрицы N , так что выполняется равенство $U(N^{-1}) = V(N)$, а правым сингулярным базисом $V(N^{-1})$ левый сингулярный базис матрицы N , так что выполняется равенство $V(N^{-1}) = U(N)$. \square

Доказательство. Согласно (2.14) матрица N представима сингулярным разложением $N = U(N)\Sigma(N)V^T(N)$. Применим к этому выражению процедуру обращения, тогда получим

$$N^{-1} = \{U(N)\Sigma(N)V^T(N)\}^{-1} = \{V^T(N)\}^{-1}\Sigma^{-1}(N)\{U(N)\}^{-1}. \quad (2.34)$$

В силу примечания 2.4 оказывается справедливым равенство

$$\{V^T(N)\}^{-1} = \{V^{-1}(N)\}^{-1} = V(N), \quad \{U(N)\}^{-1} = U^T(N) \quad (2.35)$$

Подстановка (2.34) в (2.33) дает

$$N^{-1} = U(N^{-1})\Sigma(N^{-1})V^T(N^{-1}) = V(N)\Sigma^{-1}(N)U^T(N). \quad (2.36) \blacksquare$$

Свойство 2.7. И это свойство сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 2.6. Спектральная норма $\|N\|_\lambda = \|N\|_2$ матрицы совпадает с максимальным сингулярным числом матрицы N , так что выполняется равенство

$$\|N\|_\lambda = \|N\|_2 = \alpha_1(N) \quad \square(2.37)$$

Доказательство утверждения строится на определении спектральной нормы матрицы N в соответствии с которым

$$\|N\|_\lambda = \|N\|_2 = \max_{\chi} \|N\chi\| / \|\chi\|. \quad (2.38)$$

Если в (2.37) положить, что $\chi \in S_\chi : \|\chi\| = c_\chi = const$ (здесь S_χ – n -мерная сфера), то выполняется равенство

$$\max_{\chi \in S_\chi} \|N\chi\| = \alpha_1(N) \|\chi\| \quad (2.39)$$

Подстановка (2.38) в (2.37) приводит к выполнению соотношения (2.36). \blacksquare

Свойство 2.8. Это свойство сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 2.7. Спектральная норма $\|N^{-1}\|_\lambda = \|N^{-1}\|_2$ матрицы N^{-1} обратной матрице N определяется величиной обратной

минимальному сингулярному числу $\alpha_n(N)$ матрицы N так, что выполняется равенство

$$\|N^{-1}\|_{\lambda} = \|N^{-1}\|_2 = \alpha_n^{-1}(N) \quad (2.40)\square$$

Доказательство утверждения строится на определении спектральной нормы матрицы N^{-1} в соответствии с которым

$$\|N^{-1}\|_{\lambda} = \|N^{-1}\|_2 = \max_{\eta} \|N^{-1}\eta\| / \|\eta\|. \quad (2.41)$$

Если в (2.40) положить, что $\eta \in S_{\eta} : \|\eta\| = c_{\eta} = const$, то выполняется равенство

$$\max_{\eta \in S_{\eta}} \|N^{-1}\eta\| = \alpha_1(N^{-1}) \|\eta\|. \quad (2.42)$$

Если воспользоваться выражением (2.33), то (2.42) можно записать в форме

$$\max_{\eta \in S_{\eta}} \|N^{-1}\eta\| = \alpha_1(N^{-1}) \|\eta\| = \alpha_n^{-1}(N) \|\eta\|. \quad (2.43)$$

Подстановка (2.43) в (2.41) приводит к выполнению соотношения (2.40). ■

Перейдем к геометрической интерпретации содержания сингулярного разложения, для чего сформулируем утверждение

Утверждение 2.8. Матрица N действует на элемент V_j ($j = \overline{1, n}$) правого сингулярного базиса так, что он отображается в линейную оболочку, натянутую на элемент U_j ($j = \overline{1, n}$) левого сингулярного базиса матрицы N , при этом выполняется векторно – матричное равенство

$$NV_j = \alpha_j U_j; \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.44)\square$$

Доказательство утверждения строится на сингулярном разложении (2.14) матрицы N , которое следует умножить справа на матрицу V правого сингулярного базиса, в результате чего получим матричное выражение

$$NV = U\Sigma. \quad (2.45)$$

Запишем правые матрицы левой и правой частей матричного соотношения (2.45) в столбцовых формах, тогда получим

$$N[V_1, V_2, \dots, V_j, \dots, V_m] = U[\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_j, \dots, \Sigma_m]. \quad (2.46)$$

Выделим в левой и правой частях выражения (2.46) j - е столбцы, тогда получим

$$NV_j = U\Sigma_j; \quad (j = \overline{1, m}). \quad (2.47)$$

С учетом вида столбца $\Sigma_j = [0_{1 \times (i-1)} \alpha_j 0_{1 \times (m-i)}]^T$ и матрицы U соотношение (2.47) сводится к (2.44). ■

Рассмотрим линейное отображение общего вида

$$\eta = N\chi. \quad (2.48)$$

отображающее единичную сферу $S_\chi: \|\chi\|=1$ в эллипсоид, максимальная полуось которого, совпадает с вектором $\eta = \alpha_1 U_1$, а минимальная – с вектором $\eta = \alpha_n U_n$. Действительно, разложим вектор χ по элементам правого сингулярного базиса, записав его в форме

$$\chi = \sum_{j=1}^n \gamma_j V_j; \gamma_j = \arg \left\{ \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 = 1 \right\}. \quad (2.49)$$

Тогда подстановка (2.49) в (2.48) с учетом (2.18) приводит к результату

$$\eta = N\chi = \sum_{j=1}^n \gamma_j N V_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j \alpha_j U_j \Rightarrow \begin{cases} \eta = \alpha_1 U_1 \text{ при } \chi = V_1 \\ \eta = \alpha_n U_n \text{ при } \chi = V_n \end{cases}. \quad (2.50)$$

Геометрическая интерпретация соотношения (2.50) приведена на рис. 2.4

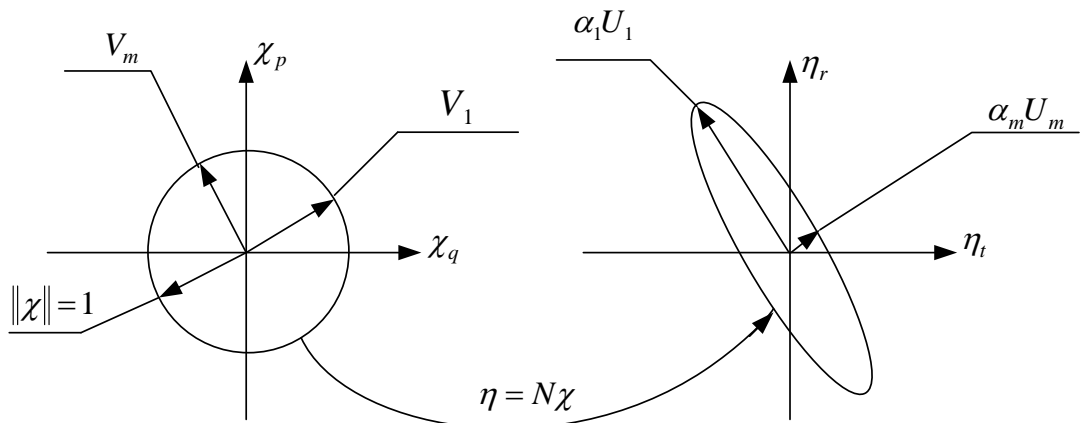


Рис. 2.4. Геометрическая интерпретация выражения (2.50)

Положения, изложенные в параграфе 2.3, а также геометрическая интерпретация сингулярного разложения в форме рис.2.4 позволяют записать для нормы $\|\eta\| = \|N\chi\|$ систему неравенств

$$\alpha_n \|\chi\| \leq \|\eta\| \leq \alpha_1 \|\chi\|. \quad (2.51)$$

Соотношение (2.51) можно представить в относительной форме

$$\alpha_n \leq \|\eta\|/\|\chi\| \leq \alpha_1. \quad (2.52)$$

Выражения (2.51) и (2.52) представляют собой алгоритмическую основу для скаляризации векторных представлений с помощью сингулярного разложения матриц, которое порождает миноранту и мажоранту векторного представления, задаваемые соответственно левыми и правыми частями соотношений (2.51) и (2.52). Очевидно, что если векторное представление задает векторный процесс, параметризованный временем t , так, что (2.48) записывается в форме

$$\eta(t) = N(t)\chi(0); \chi(0) = \chi(t)|_{t=0}, \quad (2.53)$$

то соотношения (2.51), (2.52) принимают вид

$$\alpha_n(t)\|\chi(0)\| \leq \|\eta(t)\| \leq \alpha_1(t)\|\chi(0)\|, \quad \alpha_n(t) \leq \|\eta(t)\|/\|\chi(0)\| \leq \alpha_1(t), \quad (2.54)$$

где $\alpha_n(t)$, $\alpha_1(t)$, являясь соответственно минимальным и максимальным сингулярными числами матрицы $N(t)$ для $\forall t$, порождают динамические миноранту и мажоранту динамического процесса $\eta(t)$.

В заключение заметим, что в англоязычной литературе сингулярное разложение матриц именуется SVD–процедурой. Во всех версиях пакета MATLAB существует функция $SVD(N)$, которая выводит матричные компоненты факторизации (2.14).

3. КОЛЕБАТЕЛЬНОСТЬ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАТРИЦЕЙ СОСТОЯНИЯ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ ПО НОРМЕ ВЕКТОРА СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ

В настоящем разделе приводятся результаты исследований такого системного свойства устойчивых непрерывных динамических процессов как колебательность, проявляющегося в векторных траекториях системы в скаляризованном представлении. Скаляризация векторных процессов осуществляется с использованием согласованных векторных и матричных норм. Причем, основное внимание в разделе уделено такому причинному фактору как структура собственных векторов матрицы состояния системы, обладающей вещественным простым спектром собственных чисел.

3.1 Геометрическая интерпретация колебательности аperiodических систем в пространстве собственных векторов с матрицей состояния простой структуры

Поставим задачу поиска системных причин возможной колебательности процессов по вектору состояния аperiodической системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t); x(0) = x(t)|_{t=0} \quad (3.1)$$

с матрицей F состояния простой структуры, опираясь на формулу (1.82), имеющей вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i e^{\lambda_i t} \xi_i, \quad \|\xi_i\| = 1; i = \overline{1, n} \quad (3.2)$$

на понятийном уровне. При этом здесь и в следующих разделах в соответствии с концепцией авторов, изложенной во введении, колебательность процессов понимается как наличие выброса в них с последующей сходимостью нормы вектора состояния аperiodической системы к нулю.

Сформулируем утверждение, которое докажем, опираясь на геометрические представления.

Утверждение 3.1 (У3.1). Необходимыми условиями наличия колебательности процессов по вектору состояния аperiodической системы (3.1) с матрицей состояния простой структуры являются:

1. наличие хотя бы одной пары $(\xi_l, \xi_j) = \arg\{angl(\xi_l, \xi_j) > \pi/2\}$ собственных векторов, характеризующейся тупым углом между ними в плоскости, натянутой на эти вектора;

2. наличие у собственных чисел λ_l, λ_j , соответствующих собственным векторам ξ_l, ξ_j , свойства, удовлетворяющего условиям $(\lambda_l, \lambda_j) = \arg\{\lambda_l < 0, \lambda_j < 0 \& |\lambda_l| \gg |\lambda_j|\}$.

□

Доказательство утверждения осуществим геометрическим образом, для чего рассмотрим линейную оболочку (плоскость) $L\{\xi_l, \xi_j\}$, натянутую на пару векторов (ξ_l, ξ_j) , образующих тупой угол (см. рис. 3.1).

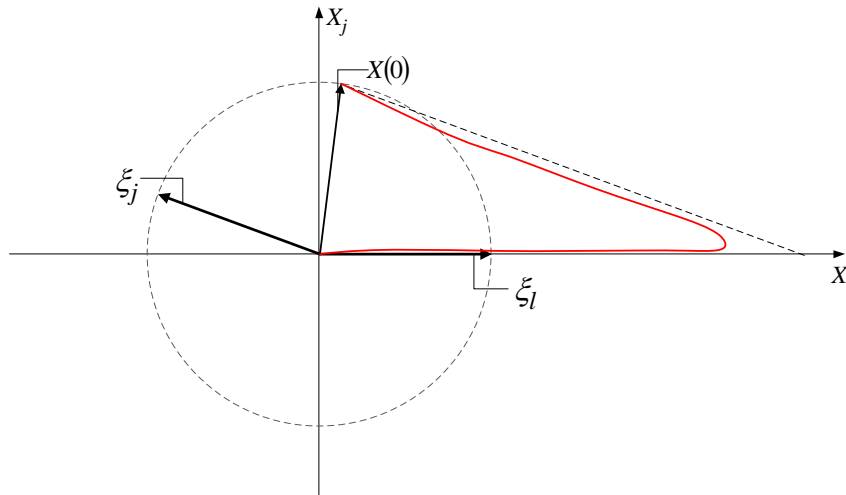


Рис. 3.1

Зададим вектор начального состояния $x(0)$ системы (3.1) в виде вектора, принадлежащего этой оболочке и обладающий единичной нормой так, что он удовлетворяет $x(0) = \arg\{x(0) \in L\{\xi_l, \xi_j\} \& \|x(0)\| = 1\}$.

Очевидно, $x(0)$ представим в форме

$$x(0) = \gamma_j \xi_j + \gamma_l \xi_l. \quad (3.3)$$

Потребуем от $x(0)$, чтобы он был бы биссектрисой угла $angl(\xi_l, \xi_j)$ между векторами ξ_l, ξ_j , что в силу правил суммирования векторов возможно, когда в (3.3) γ_j и γ_l равны друг другу. Более того, в силу $angl(\xi_l, \xi_j) > \pi/2$ выполняется условие

$(\gamma_l, \gamma_j) = \arg\{\gamma_j = \gamma_l \& |\gamma_j| > 1, |\gamma_l| > 1\}$. Рассмотрим движение системы (3.1) $x(t) = x(x(0), t)$, которое в силу (3.2) получит представление

$$x(t) = x(x(0), t) = \gamma_j e^{\lambda_j t} + \gamma_l e^{\lambda_l t}. \quad (3.4)$$

Если в (3.4) учесть условие $(\lambda_l, \lambda_j) = \arg\{\lambda_l < 0, \lambda_j < 0 \ \& \ |\lambda_l| \gg |\lambda_j|\}$, то с момента $t = t_{III} = 3|\lambda_l^{-1}| \approx 0$ будут выполняться асимптотические условия $\gamma_l e^{\lambda_l t} \cong 0; x(t) = x(x(0), t) \cong \gamma_j e^{\lambda_j t}$ так, что для нормы вектора $x(t)$ будет выполняться условие $\|x(t)\| \cong |\gamma_j| e^{\lambda_j t}$. Утверждение доказано. ■

Примечания 3.1(ПЗ.1)

1. Очевидно, что при $angl(\xi_l, \xi_j) = \pi/2$ при любых сочетаниях λ_l, λ_j выбросов в траекториях системы (3.1) по норме не наблюдается.

2. Если $x(0)$ является биссектрисой острого угла $\pi - angl(\xi_l, \xi_j)$ между векторами ξ_l, ξ_j , то в траекториях $\|x(t)\| = \|x(x(0), t)\|$ системы (3.1) выбросов также не наблюдается.

3. Если $x(0)$ принадлежит $angl(\xi_l, \xi_j) > \pi/2$, но не является биссектрисой так, что выполняется одно из двух возможных условий $\{\gamma_l \rightarrow 1, \gamma_j \rightarrow 0\}$ или $\{\gamma_l \rightarrow 0, \gamma_j \rightarrow 1\}$, то при любом сочетании собственных чисел λ_l, λ_j системы (3.1) невозможно появления выбросов в траекториях по норме вектора состояния. □

Проиллюстрируем справедливость положений утверждения 3.1 и примечаний 3.1 к этому утверждению примерами.

Пример 3.1 (ПР3.1)

Задачей первого примера является подтверждение появления выброса в траектории системы, являющегося признаком демпфированной колебательности при условии:

1. наличия хотя бы одной пары $(\xi_l, \xi_j) = \arg\{angl(\xi_l, \xi_j) > \pi/2\}$ собственных векторов, характеризующейся тупым углом между ними в плоскости, натянутой на эти вектора;

2. наличия у собственных чисел λ_l, λ_j , соответствующих собственным векторам ξ_l, ξ_j , свойства, удовлетворяющего условиям $(\lambda_l, \lambda_j) = \arg\{\lambda_l < 0, \lambda_j < 0 \ \& \ |\lambda_l| \gg |\lambda_j|\}$.

Для этого рассмотрим систему (3.1) с вектором состояния второго порядка, характеризующуюся спектром собственных векторов матрицы F вида $\xi_1 = [1 \ 0]^T; \xi_2 = [-0.9987 \ 0.05]^T$, которые удовлетворяют требованиям условия 1 утверждения 3.1, обладая

единичной нормой и образуя тупой и острый углы. Зададим матрицу F алгебраический спектр собственных чисел вида $\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg[\det(\lambda I - F) = 0]: \lambda_1 = -1; \lambda_2 = -50\}$, элементы которого удовлетворяют условию 2 утверждения 3.1.

Для полноты картины сформируем матрицу F , обладающую приведенными геометрическим и алгебраическим спектрами. Для чего воспользуемся модальным разложением (1.75) этой матрицы с учетом того, что матрица диагонализации имеет своими столбцами собственные вектора матрицы. Тогда получим

$$F = M\Lambda M^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9987 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.9987 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 978.726 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}.$$

Зададим в качестве вектора начального состояния $x(0)$ вектор единичной нормы $\|x(0)\| = 1$, принадлежащий биссектрисе угла $\text{angl}(\xi_1, \xi_2)$. В результате он получает представление

$x(0) = [0.0255 \ 0.9997]^T$. Разложим вектор $x(0)$ по собственным векторам матрицы F , в результате чего получаем представление $x(0) = 19.9935\xi_1 + 19.994\xi_2$. Представление (3.4) для свободного движения, сконструированной матрицы F , будет иметь вид

$$x(t) = x(x(0), t) = \exp(Ft)x(0) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t} = 19.9935e^{-t} + 19.994e^{-50t}.$$

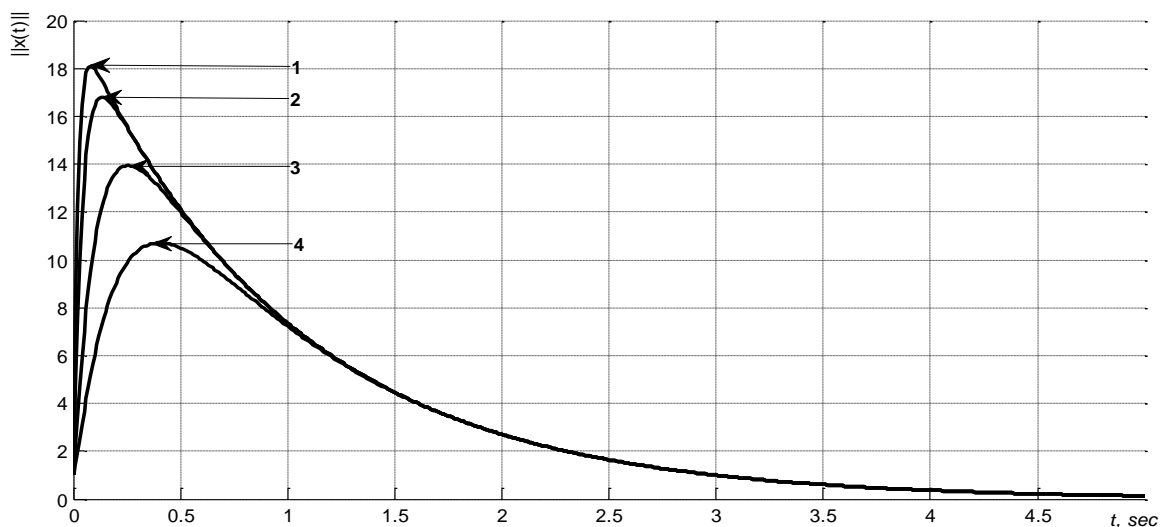
Нетрудно видеть, что составляющая свободного движения $x_{\xi_2}(t) = 19.994\xi_2 e^{-50t}$ в момент $t = \lambda_2^{-1} \ln(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0.05} = 0.0599$ практически

становится нулевой (достигает пятипроцентного значения от начального значения). В этот же момент вторая составляющая свободного движения $x_{\xi_1}(t) = 19.9935\xi_1 e^{-t}$ будет определяться выражением $x_{\xi_1}(t) = 19.9935\xi_1 e^{-0.0599} = 18.8311\xi_1$. Очевидно, в

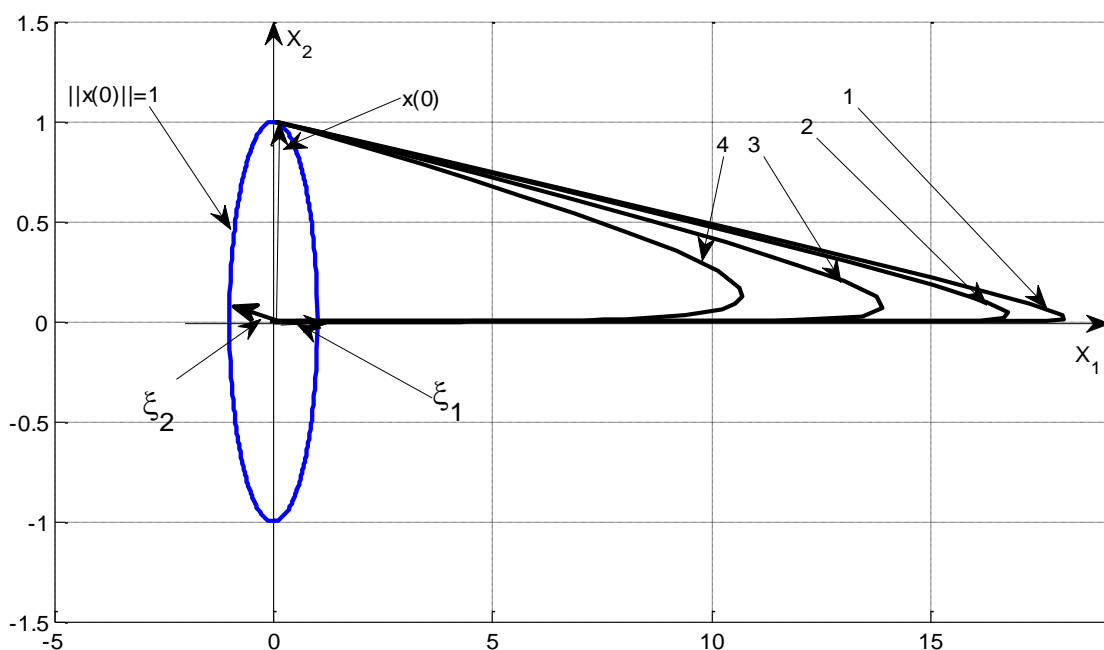
траектории свободного движения сконструированной двумерной системы вида (3.1) будет наблюдаться выброс $\max_t \|x(t)\|$ по норме $\|x(t)\|$ вектора состояния равный $\max_t \|x(t)\| = 17.8324$. Подтвердим этот

результат непосредственным наблюдением за нормой $\|x(t)\|$ свободного движения, вычисляемая в силу соотношения $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$. Полученная кривая представлена на рис. 3.2 (кривая 1). Кривая

подтверждает правильность оценки выброса траекторий свободного движения, полученных на основе геометрической интерпретации.



а



б

Рис.3.2 Кривые процессов $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$

На рис. 3.2.а и б приведены кривые процессов в системе с той же структурой собственных векторов, что и выше, но для полноты картины со спектрами собственных чисел: $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -25\}$ (кривая 2), $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -10\}$ (кривая 3) и $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5\}$ (кривая 4), спектры характеризуются единым максимальным собственным числом $\lambda_M = \lambda_1 = -1$. Причем на рис.

3.2.а приведены процессы по норме, а на рис. 3.2.б для большей геометрической наглядности в фазовом пространстве, натянутом на пару собственных векторов.

Если же задать вектор $x(0)$, удовлетворяющий условию $x(0) = \arg\{\|x(0)\| = 1 \ \& \ \text{angl}(\xi_1, x(0)) = \text{angl}(x(0), \xi_2) = 0.5(\pi - \text{angl}(\xi_1, \xi_2))\}$, то он будет принадлежать биссектрисе острого угла и иметь представление $x(0) = [0.9997 \ -0.0255]^T$. Процессы, порожденные таким вектором начального состояния, приведены на рис 3.3, из которого следует удовлетворение положению 2 примечаний 3.1 ■

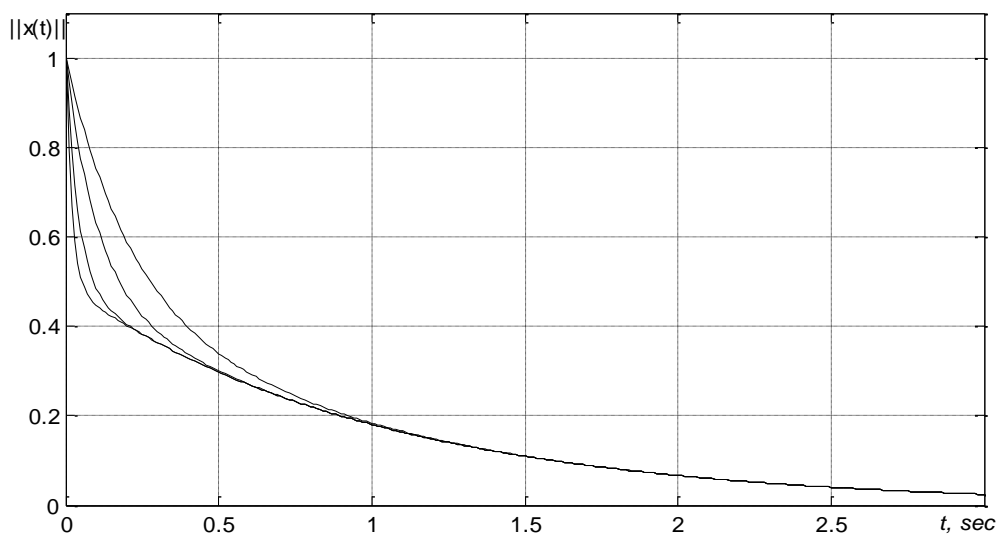


Рис.3.3 Кривые процессов $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$ при различных спектрах собственных чисел матрицы $F : \sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -50; -25; -10; -5\}$

Пример 3.2 (ПР3.2)

Задачей второго примера является подтверждение первого положения примечаний 3.1, состоящего в том, что при $\text{angl}(\xi_i, \xi_j) = \pi/2$ при любых сочетаниях λ_i, λ_j выбросов в траекториях системы (3.1) по норме не наблюдается. В этой связи, поставим задачу сконструировать матрицу F системы (3.1) такую, что алгебраический спектр собственных чисел был бы тем же, что и в примере 3.1, а также, чтобы геометрический спектр собственных векторов единичной нормы был бы ортогональным, а вектор начального состояния примера 3.1 принадлежал бы биссектрисе прямого угла. Этим условия почти полностью удовлетворяет следующая структура собственных векторов $\xi_1 = [0.707 \ 0.707]^T; \xi_2 = [-0.707 \ 0.707]^T$. Тогда матрица F с такими алгебраическим и геометрическим спектрами в силу модального разложения имеет представление

$$F = M\Lambda M^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -25.5 & 24.5 \\ 24.5 & -25.5 \end{bmatrix}.$$

Для подтверждения положения 1 примечаний 3.1 применительно к сконструированной матрице непосредственным наблюдением за нормой $\|x(t)\|$ свободного движения, вычисляемой в силу соотношения $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$ получим кривые, представленные на рис. 3.4.а. По аналогии с рис. 3.2 на рис. 3.2.б приведена фазовая траектория свободного движения $x(t) = \exp(Ft)x(0)$ в пространстве, натянутом на пару собственных векторов.

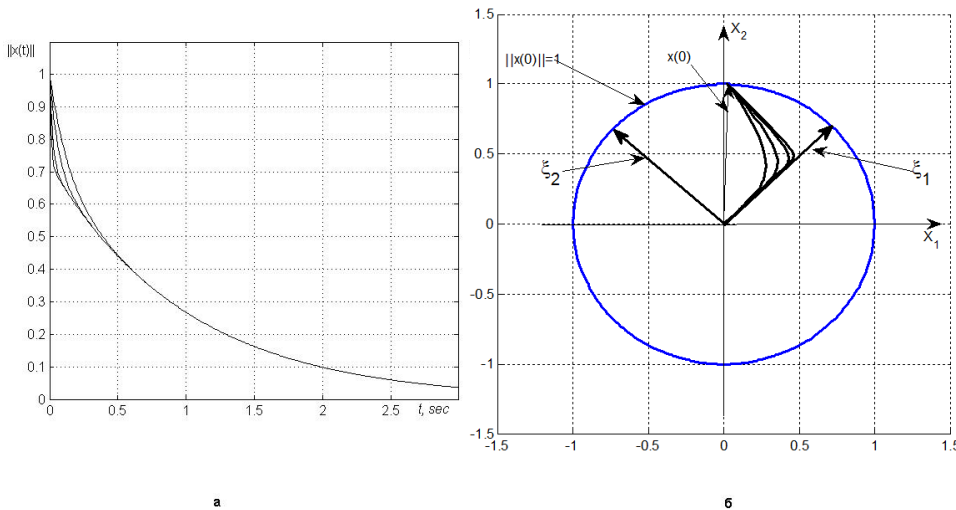


Рис.3.4 Кривые процессов $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$ и $x(t) = \exp(Ft)x(0)$ в фазовом пространстве при различных спектрах собственных чисел матрицы $F : \sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -50; -25; -10; -5\}$

Кривые подтверждают правильность положения 1 примечаний 3.1. ■
Геометрическую интерпретацию результатов на основе представления (3.2) для случая сконструированной матрицы с ортогональной системой собственных векторов предлагается читателю провести самостоятельно.

3.2 Алгебраическая интерпретация колебательности аperiodических систем. Число обусловленности матрицы собственных векторов матрицы состояния системы как количественная мера колебательности

Проблему, вынесенную в заголовок параграфа, начнем с рассмотрения решения системы (3.1), которое принимает вид

$$x(t) = \exp(Ft)x(0). \quad (3.5)$$

Перейдем в выражении (3.5) к соотношениям по векторным и матричным нормам, тогда становится справедливой запись

$$\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\| \leq \|\exp(Ft)\| \cdot \|x(0)\|. \quad (3.6)$$

Напомним, что система (3.1) устойчивая аperiodическая с матрицей F простой структуры так, что её спектр собственных чисел удовлетворяет условиям:

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg(\det(\lambda I - F) = 0); \lambda_i < 0; \text{Im}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j\} \quad (3.7)$$

Так как матрица F простой структуры, то для нее оказывается справедливой модальное представление в форме

$$F = M\Lambda M^{-1}, \quad (3.8)$$

где $M = \text{row}\{M_i; i = \overline{1, n}\}$ матрица собственных векторов матрицы F так, что выполняется соотношение $FM_i = \lambda_i M_i$; $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$.

Известно, что матричная функция $f\{(*)\}$ от матрицы $(*)$ сохраняет модальное представление (3.8) для матричной функции, записываемое в форме $f(F) = Mf(\Lambda)M^{-1}$. Если в качестве матричной функции взять матричную экспоненту $f(F) = \exp(Ft)$, то для нее можно записать

$$\exp(Ft) = M \exp(\Lambda t) M^{-1} = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}. \quad (3.9)$$

Подставим (3.9) в (3.6)

$$\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\| \leq \|\exp(Ft)\| \cdot \|x(0)\| = \|M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}\| \cdot \|x(0)\| \quad (3.10)$$

Продолжим формирование экспоненциального покрытия $\text{roof}\{\|x(t)\|\}$ процессов в автономной системе (3.1) по норме $\|x(t)\|$ её свободного движения, для которого на основании (3.10) сформируем цепочку неравенств

$$\|x(t)\| \leq \|M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}\| \cdot \|x(0)\| \leq \|M\| \cdot \|\text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}\| \cdot \|M^{-1}\| \cdot \|x(0)\| \quad (3.11)$$

Учтем, что мультипликативная конструкция $\|M\| \cdot \|M^{-1}\|$ представляет собой число обусловленности $C\{M\}$ матрицы собственных векторов

матрицы F так, что выполняется равенство $C\{M\} = \|M\| \cdot \|M^{-1}\|$; $\|diag\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}\| = e^{\lambda_M t}$, где λ_M – максимальное собственное число матрицы F , определяющее степень устойчивости η системы (3.1) в форме $\eta = |\lambda_M|$. Изложенное выше позволяет сформировать экспоненциальное покрытие $\text{roof}\{\|x(t)\|\}$ процесса $\|x(t)\|$, степень достаточности которого будет определяться числом обусловленности $C\{M\}$ матрицы собственных векторов матрицы F , которые ищутся с точностью до их нормы. Таким образом, число обусловленности $C\{M\}$ матрицы будет минимальным, если матрица собственных векторов составлена из векторов единичной нормы. Тогда экспоненциальное покрытие $\text{roof}\{\|x(t)\|\}$ процесса $\|x(t)\|$ минимальной достаточности удовлетворяет соотношениям

$$\|x(t)\| \leq \text{roof}\{\|x(t)\|\} = C\{\tilde{M}\} e^{\lambda_M t} \|x(0)\|, \quad (3.12)$$

где матрица \tilde{M} – модифицированная матрица собственных векторов матрицы F , то есть матрица её собственных векторов единичной нормы, вычисляемая в силу соотношения $\tilde{M} = M \cdot diag\{\|M_i\|_2\}^{-1}; i = \overline{1, n}\}$.

Соотношение (3.12) позволяет сделать следующий вывод. Покрытие $\|x(t)\|$ процесса по норме автономной системы, стартующего из точки $\{\|x(0)\|, t = 0\}$, превышает это значение в $C\{\tilde{M}\}$ раз, оставаясь экспоненциальным. Это значит, что покрытие $\text{roof}\{\|x(t)\|\}$ покрывает процесс $\|x(t)\|$, характеризующийся наличием выброса при асимптотическом стремлении к нулю.

Пример 3.3 (ПР3.3)

Рассмотрим две системы вида (3.1) из примеров 3.1 и 3.2 на предмет эффективности использования результата в форме (3.12). Система вида (3.1) из примера 3.1 характеризуется:

матрицей состояния $F1 = \begin{bmatrix} -1 & 978.726 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$, модифицированной матрицей

собственных векторов $\tilde{M}1 = [\tilde{\xi}_{11} \quad \tilde{\xi}_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & -0.9987 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$,

характеризующаяся числом обусловленности $C\{\tilde{M}1\}$, вычисление численного значения которого предоставляется читателю.

Система вида (3.1) из примера 3.2 характеризуется:

матрицей состояния $F2 = \begin{bmatrix} -25.5 & 24.5 \\ 24.5 & -25.5 \end{bmatrix}$, модифицированной матрицей собственных векторов $\tilde{M}2 = [\tilde{\xi}_{21} \quad \tilde{\xi}_{22}] = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$, которая обладает числом обусловленности $C\{\tilde{M}2\} = 1$. Алгебраические спектры собственных чисел матриц $F1$ и $F2$ совпадают так, что они принимают следующий вид $\sigma\{F1\} = \sigma\{F2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -50\}$, при этом системы характеризуются единым параметром $\lambda_M = -1$. Тогда в силу (3.12) покрытия процессов по норме $\text{roof}\{\|x(t)\|\}$ в системах примеров 3.1 и 3.2 принимают соответственно вид $\|x(t)\| \leq 39.973e^{-t}\|x(0)\|$ и $\|x(t)\| \leq e^{-t}\|x(0)\|$. На рисунках 3.5 и 3.6 соответственно приведены кривые рисунков 3.3, 3.4 и их экспоненциальные покрытия.

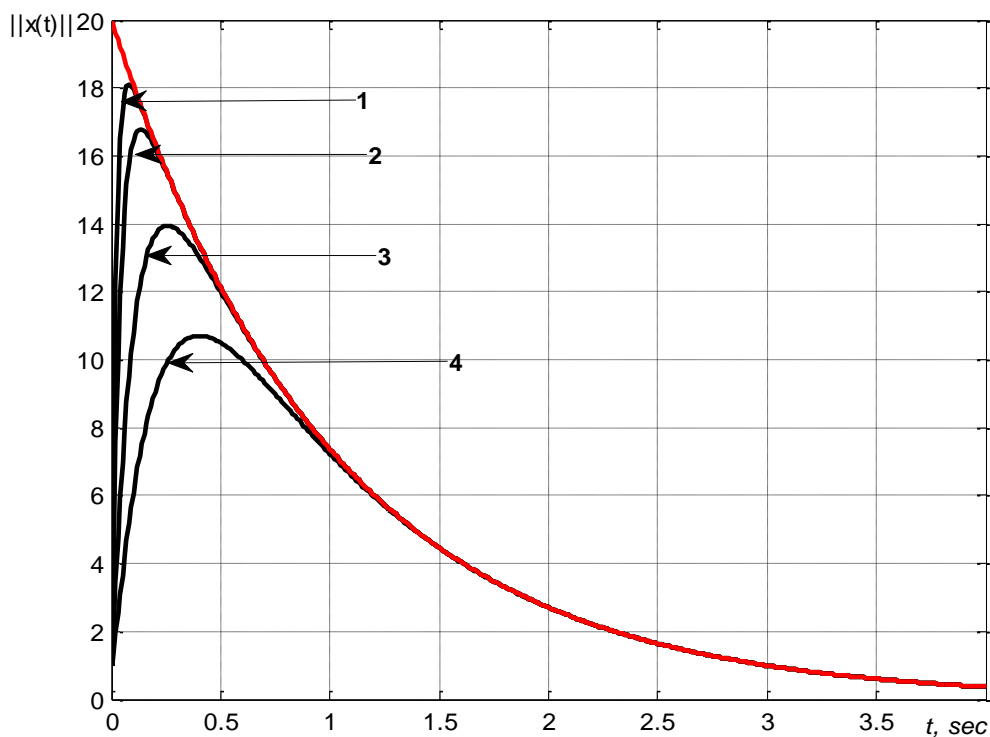


Рис.3.5 Кривые процессов $\|x(t)\| = \|\exp(F1t)x(0)\|$ и их покрытие $\text{roof}\|x(t)\| = C\{\tilde{M}1\}e^{-t}\|x(0)\|$

На рис. 3.5 как и в предыдущем параграфе для полноты картины приведены кривые процессов в системе из примера 3.1 с той же структурой собственных векторов и со спектрами собственных чисел: $\sigma\{F1\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -25\}$ (кривая 2), $\sigma\{F1\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -10\}$ (кривая

3) и $\sigma\{F1\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5\}$ (кривая 4), спектры характеризуются единым максимальным собственным числом $\lambda_M = \lambda_1 = -1$.

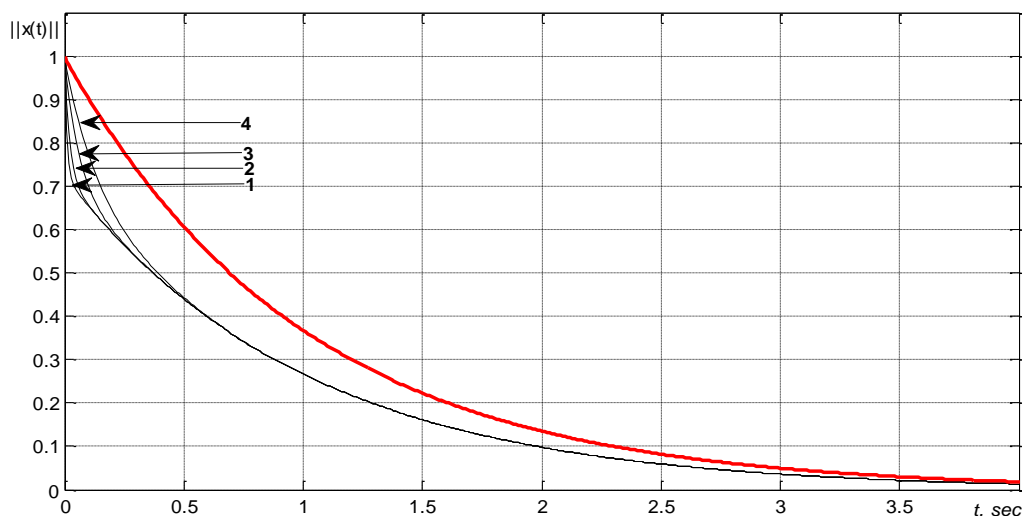


Рис.3.6 Кривые процессов $\|x(t)\| = \|\exp(F 2t)x(0)\|$ и их покрытие $\text{roof}\|x(t)\| = e^{-t}\|x(0)\|$

На рис. 3.6 для полноты картины приведены кривые процессов в системе из примера 3.2 с той же структурой собственных векторов и со спектрами собственных чисел: $\sigma\{F 2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -25\}$ (кривая 2), $\sigma\{F 2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -10\}$ (кривая 3) и $\sigma\{F 2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5\}$ (кривая 4), спектры характеризуются единым максимальным собственным числом $\lambda_M = \lambda_1 = -1$. ■

Следует отметить, что полученные выше покрытия обладают достаточностью оценок, и они инвариантны относительно вектора начального состояния $x(0)$, что подчеркивает конструктивность представления (3.12)

3.3 Робастность свойства колебательности аperiodических систем с матрицей состояния простой структуры по норме вектора свободного движения

Форма (3.12) предоставляет возможность исследовать чувствительность траекторий по норме вектора состояний к вариациям параметров матрицы F состояния системы вида (3.1), тем самым решить задачу робастности свойств колебательности аperiodических систем с матрицей состояния простой структуры.

Постановка задачи исследования параметрической чувствительности траекторий такова. Пусть элементы матрицы F зависят от вектора параметров $q = \text{row}\{q_v; v = \overline{1, p}\}$ так, что справедливо представление $F(q) = \text{col}\{\text{row}[F_{ij}(q_v); j = \overline{1, n}]; i = \overline{1, n}\}$. В зависимости от постановки задачи исследования параметрической чувствительности значение p может удовлетворять неравенству $1 \leq p \leq n^2$. Параметр q_v задается в форме $q_v = q_{v0} + \Delta q_v$, где q_{v0} – номинальное значение параметра, а Δq_v – вариация параметра q_v относительно его номинального значения, тогда вектор параметров q получает представление $q = q_0 + \Delta q$, где $q_0 = \text{row}\{q_{v0}; v = \overline{1, p}\}$ – номинальное значение вектора параметров, а $\Delta q = \text{row}\{\Delta q_v; v = \overline{1, p}\}$ – его вариация. В дальнейшем используется запись $F_{ij}(q_{v0}) = F_{ij}$; $F(q_0) = \text{col}\{\text{row}[F_{ij}(q_{v0}); j = \overline{1, n}]; i = \overline{1, n}\} = F$, а также представление зависимости $F_{ij}(q_v)$ в форме $F_{ij}(q_v) = F_{ij} \cdot (1 + q_v)$, что позволяет положить $q_{v0} = 0$, а $q_v = \Delta q_v$, придавая тем самым вариациям параметров относительный характер, выражаемый в процентах или числах.

Зависимость матрицы состояния от вектора параметров q в форме $F(q)$ порождает зависимость от этого вектора и всех компонентов покрытия (3.12) так, что становится справедливой запись

$$\|x(t, q)\| \leq \text{roof} \{ \|x(t, q)\| \} = C \{ \tilde{M}(q) \} e^{\lambda_M(q)t} \|x(0)\|. \quad (3.13)$$

Введем в рассмотрение v -ю функцию $\theta_v(t)$ чувствительности покрытия (3.13) к вариации v -го компонента вектора параметров q_v , определив её с помощью выражения

$$\begin{aligned} \theta_v(t) &= \frac{\partial}{\partial q_v} \left\{ \text{roof} \{ \|x(t, q)\| \} = C \{ \tilde{M}(q) \} e^{\lambda_M(q)t} \|x(0)\| \right\}_{q=q_0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_v} C \{ \tilde{M}(q) \}_{q=q_0} e^{\lambda_M t} + C \{ \tilde{M} \} e^{\lambda_M t} \frac{\partial \lambda_M}{\partial q_v} \Big|_{q=q_0} t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Основной проблемой вычисления функции чувствительности $\theta_v(t)$ покрытия (3.13) с помощью формулы (3.14) является вычисление производной от числа обусловленности модифицированной матрицы собственных векторов, которое в силу определения задается соотношением $C \{ \tilde{M} \} = \| \tilde{M} \| \cdot \| \tilde{M}^{-1} \|$ так, что значение числа

обусловленности зависит от выбранной матричной нормы. Известно, что если воспользоваться спектральной матричной нормой, то она численно совпадает с максимальным сингулярным числом этой матрицы, а норма обратной матрицы совпадает с величиной обратной минимальному сингулярному числу, что позволяет представить число обусловленности, использующий спектральные матричные нормы матриц, в следующем виде

$$C\{\tilde{M}\} = \|\tilde{M}\| \cdot \|\tilde{M}^{-1}\| = \alpha_M\{\tilde{M}\} \cdot \alpha_m^{-1}\{\tilde{M}\}, \quad (3.15)$$

где $\alpha_M\{\tilde{M}\}, \alpha_m\{\tilde{M}\}$ – соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы \tilde{M} . Если в (3.15) учесть зависимость матрицы \tilde{M} от вектора параметров q , то получим представление

$$C\{\tilde{M}(q)\} = \alpha_M\{\tilde{M}(q)\} \cdot \alpha_m^{-1}\{\tilde{M}(q)\}. \quad (3.16)$$

В полученном виде число обусловленности дифференцируемо по компоненту q_v вектора параметров q в форме

$$\frac{\partial}{\partial q_v} C\{\tilde{M}(q)\}\Big|_{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_v} \alpha_M\{\tilde{M}(q)\}\Big|_{q=q_0} \cdot \alpha_m^{-1}\{\tilde{M}\} - \alpha_M\{\tilde{M}\} \alpha_m^{-2}\{\tilde{M}\} \frac{\partial}{\partial q_v} \alpha_m\{\tilde{M}(q)\}\Big|_{q=q_0} \quad (3.17)$$

Функция параметрической чувствительности $\theta_v(t)$ будет вычислена, если будут вычислены функции чувствительности сингулярных чисел матрицы собственных векторов и функции чувствительности собственного числа матрицы состояния системы (3.1). Известно, что справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial \lambda_M}{\partial q_v}\Big|_{q=q_0} = \left(\tilde{M}^{-1} \frac{\partial F(q)}{\partial q_v}\Big|_{q=q_0} \quad \tilde{M} \right)_{ii}, \quad (3.18)$$

где $i = \arg\{\lambda_i \geq \lambda_j; j = \overline{1, n}\}$;

$$\frac{\partial}{\partial q_v} \alpha_M\{\tilde{M}(q)\}\Big|_{q=q_0} = \left(U^T \frac{\partial \tilde{M}(q)}{\partial q_v}\Big|_{q=q_0} \quad V \right)_{11}; \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_v} \alpha_m\{\tilde{M}(q)\}\Big|_{q=q_0} = \left(U^T \frac{\partial \tilde{M}(q)}{\partial q_v}\Big|_{q=q_0} \quad V \right)_{nn}. \quad (3.20)$$

В выражениях (3.19), (3.20) U и V – соответственно матрицы левого и правого сингулярных базисов сингулярного разложения

$$\tilde{M} = U \left\{ \Sigma = \text{diag}(\alpha_i; i = \overline{1, n}) \right\} V^T. \quad \text{Функция чувствительности} \quad \frac{\partial \tilde{M}(q)}{\partial q_v}$$

матрицы собственных векторов есть матрица, составленная из функций чувствительности собственных векторов

$$\left. \frac{\partial \tilde{M}(q)}{\partial q_v} \right|_{q=q_0} = \text{row} \left\{ \left. \frac{\partial \tilde{M}_i(q)}{\partial q_v} \right|_{q=q_0} ; i = \overline{1, n} \right\}, \quad (3.21)$$

$$\text{где } \left. \frac{\partial \tilde{M}_i(q)}{\partial q_v} \right|_{q=q_0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \gamma_{ik}^v \tilde{M}_k ; \gamma_{ii}^v = 0, \quad (3.22)$$

причем коэффициенты γ_{ik}^v определяются соотношениями

$$\gamma_{ik}^v = \frac{\left(\tilde{M}^{-1} \left. \frac{\partial F(q)}{\partial q_v} \right|_{q=q_0} \tilde{M} \right)_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k} ; k \neq i. \quad (3.23)$$

Для полного приращения $\Delta \text{roof} \{ \|x(t), q_0, \Delta q\| \}$ покрытия (3.12) процессов по норме вектора состояния системы (3.1) можно записать

$$\Delta \text{roof} \{ \|x(t), q_0, \Delta q\| \} = \sum_{v=1}^p \theta_v(t, q_0) \Delta q_v = \theta^T(t, q_0) \cdot \Delta q, \quad (3.24)$$

где $\theta^T(t, q_0) = \text{row} \{ \theta_v(t, q_0); v = \overline{1, p} \}$.

Очевидно, что варьируемое покрытие представляет собой аддитивную композицию (3.12) и (3.24).

Пример 3.4 (ПР3.4)

В качестве примера сформируем вариацию покрытий примера 3.3 для случая вариации диагональных элементов матриц состояния $F1$ и $F2$ так, что они получают представления

$$F1(q) = \begin{bmatrix} -1(1+q_1) & 978.726 \\ 0 & -50(1+q_2) \end{bmatrix}, \quad F2(q) = \begin{bmatrix} -25.5(1+q_1) & 24.5 \\ 24.5 & -25.5(1+q_2) \end{bmatrix},$$

где параметры $q_v = q_{v0} + \Delta q_v$ удовлетворяют условиям $q_{v0} = 0$, $q_v = \Delta q_v$ при этом $|q_v| \leq 0.3; v = 1, 2$. Решение задачи нахождения функций чувствительности покрытия $\theta_v(t)$ для системы с матрицей состояния $F1$ представлено в таблицах 3.1 и 3.2, для системы с матрицей состояния $F2$ - в таблицах 3.3 и 3.4, в которых размещены компоненты функции чувствительности вида (3.14) и полных вариаций покрытий (3.24).

Таблица 3.1

$\theta_{1_1}(t) = \frac{\partial}{\partial q_1} C \{ \tilde{M}1(q) \} \Big _{q=q_0} e^{\lambda_M t} + C \{ \tilde{M}1 \} e^{\lambda_M t} \frac{\partial \lambda_{M1}}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} \quad t = -0.8147e^{-t} - 39.973e^{-t}t$	
$\frac{\partial}{\partial q_1} C \{ \tilde{M}1(q) \} \Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{M1} \{ \tilde{M}1(q) \} \Big _{q=q_0} \cdot \alpha_{m1}^{-1} \{ \tilde{M}1 \} - \alpha_{M1} \{ \tilde{M}1 \} \alpha_{m1}^{-2} \{ \tilde{M}1 \} \frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{m1} \{ \tilde{M}1(q) \} \Big _{q=q_0} =$ $= -0.0144 \cdot (0.0354)^{-1} - 1.4137 \cdot (0.0354)^{-2} \cdot 0.00036 = -0.8147$	
$\frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{M1} \{ \tilde{M}1(q) \} \Big _{q=q_0} =$ $= \left(U1^T \frac{\partial \tilde{M}1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} V1 \right)_{11} =$ $\left(\begin{bmatrix} 0.9997 & 0.025 \\ -0.025 & 0.9997 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.0204 & 0 \\ 0.001 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \right)_{11} =$ $= \left(\begin{bmatrix} -0.0144 & -0.0144 \\ 0.00036 & 0.00036 \end{bmatrix} \right)_{11} = -0.0144$	$\frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{m1} \{ \tilde{M}1(q) \} \Big _{q=q_0} =$ $= \left(U1^T \frac{\partial \tilde{M}1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} V1 \right)_{22} =$ $\left(\begin{bmatrix} -0.0144 & -0.0144 \\ 0.00036044 & 0.00036042 \end{bmatrix} \right)_{22} =$ $= 0.00036$
$\frac{\partial \tilde{M}1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} = \text{row} \left\{ \frac{\partial \tilde{M}1_i(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} ; i = \overline{1,2} \right\} = \begin{bmatrix} -0.0204 & 0 \\ 0.001 & 0 \end{bmatrix}$	
$\frac{\partial \tilde{M}1_1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} = \gamma_{12}^1 \tilde{M}1_2 = 0.0204 \begin{bmatrix} -0.9987 \\ 0.05 \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} -0.0204 \\ 0.001 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial \tilde{M}1_2(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} = \gamma_{21}^1 \tilde{M}1_1 = 0$
$\gamma_{12}^1 = \frac{\left(\tilde{M}1^{-1} \frac{\partial F1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} \tilde{M}1 \right)_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$ $= \frac{\left(\begin{bmatrix} -1 & 0.9987 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)_{12}}{-1 - (-50)} = \frac{0.9987}{49} = 0.0204$	$\gamma_{21}^1 = \frac{\left(\tilde{M}1^{-1} \frac{\partial F1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} \tilde{M}1 \right)_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$ $= \frac{\left(\begin{bmatrix} -1 & 0.9987 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)_{21}}{-50 - (-1)} = 0$
$\frac{\partial \lambda_{M1}}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} = \left(\tilde{M}1^{-1} \frac{\partial F1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} \tilde{M}1 \right)_{ii} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0.9987 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)_{11} = -1$	
$\frac{\partial F1(q)}{\partial q_1} \Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{bmatrix} -1(1+q_1) & 978.726 \\ 0 & -50(1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	

Таблица 3.2

$\theta_{12}(t) = \frac{\partial}{\partial q_2} C \left\{ \tilde{M}1(q) \right\}_{q=q_0} e^{\lambda_{M1} t} + C \left\{ \tilde{M}1 \right\} e^{\lambda_{M1} t} \frac{\partial \lambda_{M1}}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad t = 40.7358 e^{-t}$	
$\frac{\partial}{\partial q_2} C \left\{ \tilde{M}1(q) \right\}_{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{M1} \left\{ \tilde{M}1(q) \right\}_{q=q_0} \cdot \alpha_{m1}^{-1} \left\{ \tilde{M}1 \right\} - \alpha_{M1} \left\{ \tilde{M}1 \right\} \alpha_{m1}^{-2} \left\{ \tilde{M}1 \right\} \frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{m1} \left\{ \tilde{M}1(q) \right\}_{q=q_0} =$ $= 0.7204 \cdot (0.0354)^{-1} - 1.4137 \cdot (0.0354)^{-2} \cdot (-0.018) = 40.7358$	
$\frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{M1} \left\{ \tilde{M}1(q) \right\}_{q=q_0} =$ $= \left(U1^T \frac{\partial \tilde{M}1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad V1 \right)_{11} =$ $= \left(\begin{bmatrix} 0.7204 & 0.7203 \\ -0.018 & -0.018 \end{bmatrix} \right)_{11} = 0.7204$	$\frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{m1} \left\{ \tilde{M}1(q) \right\}_{q=q_0} =$ $= \left(U1^T \frac{\partial \tilde{M}1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad V1 \right)_{22} = -0.018$
$\frac{\partial \tilde{M}1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \text{row} \left\{ \frac{\partial \tilde{M}1_i(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} ; i = \overline{1,2} \right\} = \begin{bmatrix} 1.0178 & 0 \\ -0.051 & 0 \end{bmatrix}$	
$\frac{\partial \tilde{M}1_1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \gamma_{12}^1 \tilde{M}1_2 = -1.0191 \begin{bmatrix} -0.9987 \\ 0.05 \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} 1.0178 \\ -0.051 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial \tilde{M}1_2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \gamma_{21}^1 \tilde{M}1_1 = 0$
$\gamma_{12}^1 = \frac{\left(\tilde{M}1^{-1} \frac{\partial F1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad \tilde{M}1 \right)_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$ $= \frac{\left(\begin{bmatrix} 0 & -49.935 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \right)_{12}}{-1 - (-50)} = \frac{-49.935}{49} = 0 - 1.0191$	$\gamma_{21}^1 = \frac{\left(\tilde{M}1^{-1} \frac{\partial F1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad \tilde{M}1 \right)_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$ $= \frac{\left(\begin{bmatrix} 0 & -49.935 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \right)_{21}}{-50 - (-1)} = 0$
$\frac{\partial \lambda_{M1}}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \left(\tilde{M}1^{-1} \frac{\partial F1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad \tilde{M}1 \right)_{ii} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -49.935 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \right)_{11} = 0$	
$\frac{\partial F1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_2} \begin{bmatrix} -1(1+q_1) & 978.726 \\ 0 & -50(1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$	

Таблица 3.3

$\theta_{21}(t) = \frac{\partial}{\partial q_1} C\{\tilde{M}2(q)\}\Big _{q=q_0} e^{\lambda_{M2}t} + C\{\tilde{M}2\}e^{\lambda_{M2}t} \frac{\partial \lambda_{M2}}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} \quad t = -12.75e^{-t}$	
$\frac{\partial}{\partial q_1} C\{\tilde{M}2(q)\}\Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{M2}\{\tilde{M}2(q)\}\Big _{q=q_0} \cdot \alpha_{m2}^{-1}\{\tilde{M}2\} - \alpha_{M2}\{\tilde{M}2\} \alpha_{m2}^{-2}\{\tilde{M}2\} \frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{m2}\{\tilde{M}2(q)\}\Big _{q=q_0} = 0$	
$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{M2}\{\tilde{M}2(q)\}\Big _{q=q_0} &= \\ &= \left(U2^T \frac{\partial \tilde{M}2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} V2 \right)_{11} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.184 & -0.184 \\ 0.184 & -0.184 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)_{11} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0.2602 \\ -0.2602 & 0 \end{bmatrix} \right)_{11} = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \alpha_{m2}\{\tilde{M}2(q)\}\Big _{q=q_0} &= \\ &= \left(U2^T \frac{\partial \tilde{M}2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} V2 \right)_{22} = 0 \end{aligned}$
$\frac{\partial \tilde{M}2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} = \text{row} \left\{ \frac{\partial \tilde{M}2_i(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} ; i = \overline{1,2} \right\} = \begin{bmatrix} -0.184 & -0.184 \\ 0.184 & -0.184 \end{bmatrix}$	
$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}2_1(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} &= \gamma_{12}^1 \tilde{M}2_2 = 0.2602 \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.184 \\ 0.184 \end{bmatrix} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}2_2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} &= \gamma_{21}^1 M21_1 = -0.2602 \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.184 \\ -0.184 \end{bmatrix} \end{aligned}$
$\begin{aligned} \gamma_{12}^1 &= \frac{\left(\tilde{M}2^{-1} \frac{\partial F2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} \tilde{M}2 \right)_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \\ &= \frac{\left(\begin{bmatrix} -12.75 & 12.75 \\ 12.75 & -12.75 \end{bmatrix} \right)_{12}}{-1 - (-50)} = \frac{12.75}{49} = 0.2602 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \gamma_{21}^1 &= \frac{\left(\tilde{M}2^{-1} \frac{\partial F2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} \tilde{M}2 \right)_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \\ &= \frac{12.75}{-49} = -0.2602 \end{aligned}$
$\frac{\partial \lambda_{M2}}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} = \left(\tilde{M}2^{-1} \frac{\partial F2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} \tilde{M}2 \right)_{ii} = \left(\begin{bmatrix} -12.75 & 12.75 \\ 12.75 & -12.75 \end{bmatrix} \right)_{11} = -12.75$	
$\frac{\partial F2(q)}{\partial q_1}\Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{bmatrix} -25.5(1+q_1) & 24.5 \\ 24.5 & -25.5(1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	

Таблица 3.4

$\theta_{21}(t) = \frac{\partial}{\partial q_2} C \{ \tilde{M} 2(q) \} \Big _{q=q_0} e^{\lambda_{M2} t} + C \{ \tilde{M} 2 \} e^{\lambda_{M2} t} \frac{\partial \lambda_{M2}}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad t = -12.75 e^{-t}$	
$\frac{\partial}{\partial q_2} C \{ \tilde{M} 2(q) \} \Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{M2} \{ \tilde{M} 2(q) \} \Big _{q=q_0} \cdot \alpha_{m2}^{-1} \{ \tilde{M} 2 \} - \alpha_{M2} \{ \tilde{M} 2 \} \alpha_{m2}^{-2} \{ \tilde{M} 2 \} \frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{m2} \{ \tilde{M} 2(q) \} \Big _{q=q_0} = 0$	
$\frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{M2} \{ \tilde{M} 2(q) \} \Big _{q=q_0} =$ $= \left(U 2^T \frac{\partial \tilde{M} 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad V 2 \right)_{11} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -0.2602 \\ 0.2602 & 0 \end{bmatrix} \right)_{11} = 0$	$\frac{\partial}{\partial q_2} \alpha_{m2} \{ \tilde{M} 2(q) \} \Big _{q=q_0} =$ $= \left(U 2^T \frac{\partial \tilde{M} 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad V 2 \right)_{22} = 0$
$\frac{\partial \tilde{M} 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \text{row} \left\{ \frac{\partial \tilde{M} 2_i(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} ; i = \overline{1,2} \right\} = \begin{bmatrix} 0.184 & 0.184 \\ -0.184 & 0.184 \end{bmatrix}$	
$\frac{\partial \tilde{M} 2_1(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \gamma_{12}^1 \tilde{M} 2_2 = -0.2602 \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} 0.184 \\ -0.184 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial \tilde{M} 2_2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \gamma_{21}^1 \tilde{M} 2_1 = 0.2602 \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} 0.184 \\ 0.184 \end{bmatrix}$
$\gamma_{12}^1 = \frac{\left(\tilde{M} 2^{-1} \frac{\partial F 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad \tilde{M} 2 \right)_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$ $= \frac{\left(\begin{bmatrix} -12.75 & -12.75 \\ -12.75 & -12.75 \end{bmatrix} \right)_{12}}{-1 - (-50)} = \frac{-12.75}{49} = -0.2602$	$\gamma_{21}^1 = \frac{\left(\tilde{M} 2^{-1} \frac{\partial F 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad \tilde{M} 2 \right)_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} =$ $= \frac{-12.75}{-49} = 0.2602$
$\frac{\partial \lambda_{M2}}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \left(\tilde{M} 2^{-1} \frac{\partial F 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} \quad \tilde{M} 2 \right)_{ii} = \left(\begin{bmatrix} -12.75 & -12.75 \\ -12.75 & -12.75 \end{bmatrix} \right)_{11} = -12.75$	
$\frac{\partial F 2(q)}{\partial q_2} \Big _{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_2} \begin{bmatrix} -25.5(1+q_1) & 24.5 \\ 24.5 & -25.5(1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25.5 \end{bmatrix}$	

Кривые полных вариаций $\theta_1(t, q_0) = \theta_{1_1}(t)\Delta q_1 + \theta_{1_2}(t)\Delta q_2$, $\theta_2(t, q_0) = \theta_{2_1}(t)\Delta q_1 + \theta_{2_2}(t)\Delta q_2$ для четырех композиций угловых значений вариаций параметров приведены на рисунках 3.7, 3.8

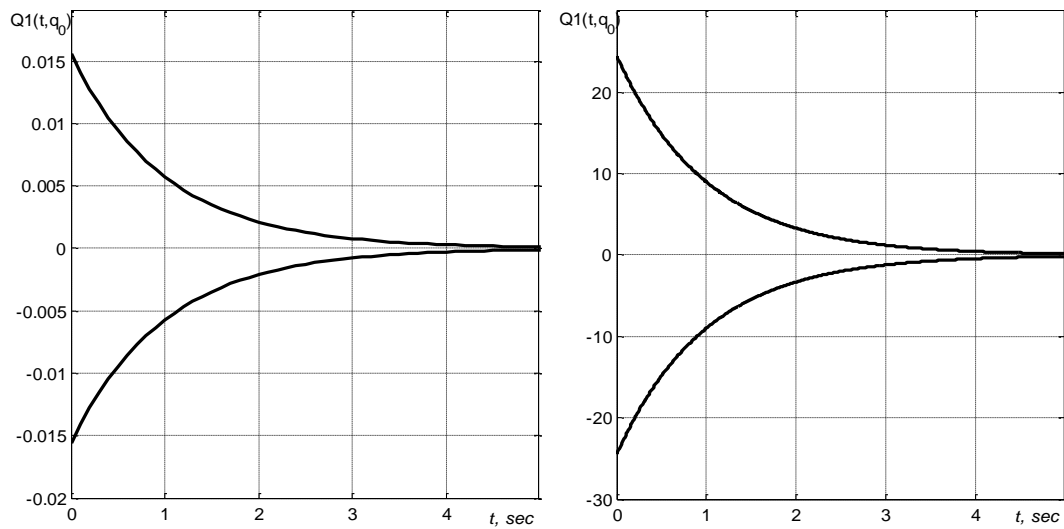


Рис. 3.7. Кривые полных вариаций $\theta_1(t, q_0) = \theta_{1_1}(t)\Delta q_1 + \theta_{1_2}(t)\Delta q_2$ для четырех композиций угловых значений вариаций параметров

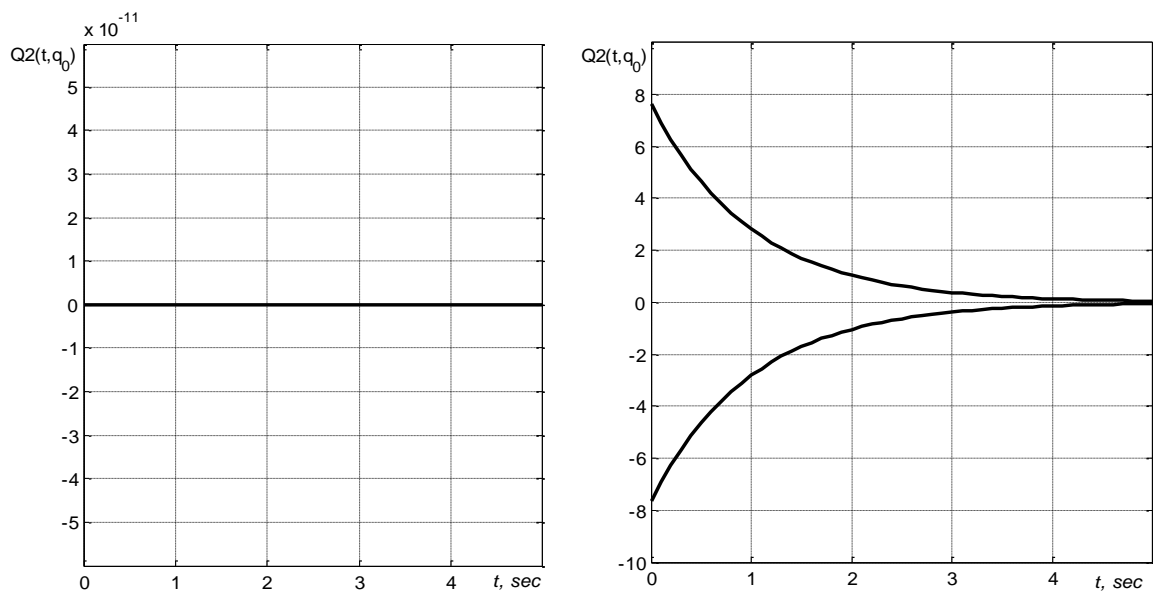


Рис. 3.8. Кривые полных вариаций $\theta_2(t, q_0) = \theta_{2_1}(t)\Delta q_1 + \theta_{2_2}(t)\Delta q_2$ для четырех композиций угловых значений вариаций параметров

4. КОЛЕБАТЕЛЬНОСТЬ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАТРИЦЕЙ СОСТОЯНИЯ КРАТНОЙ СТРУКТУРЫ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПО НОРМЕ ВЕКТОРА СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ

В данном разделе рассматривается устойчивая апериодическая непрерывная система, матрица состояния которой обладает вещественным спектром кратных собственных чисел, кратность которых равна размерности ее вектора состояния. Показывается, что если модуль собственного числа меньше единицы, то в свободном движении системы по норме вектора состояния обнаруживается колебательность, проявляющаяся в наличии выброса на начальном участке траектории, сменяющегося монотонным движением к состоянию покоя. Устанавливается связь величины выброса со значением модуля собственного числа и его кратностью.

4.1 Колебательность апериодических систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в жордановой форме, по норме вектора свободного движения

Рассматривается линейная гурвицева непрерывная многомерная динамическая система, задаваемая в векторно – матричной форме

$$\dot{x}(t) = Fx(t), x(t)|_{t=0} = x(0) \quad (4.1)$$

где $x(0), x(t)$ – вектора соответственно начального и текущего состояний системы; F – ее матрица состояния; $x(0), x(t) \in R^n; F \in R^{n \times n}$. Матрица системы F , заданная в произвольном базисе, такова, что ее характеристический полином $D(\lambda)$ имеет представление

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \left\{ (\lambda - \alpha)^n = \lambda^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i \alpha^i \lambda^{n-i}; \alpha : Jm(\alpha) = 0 \right\}. \quad (4.2)$$

Такая ситуация может возникнуть, когда при синтезе методами модального управления матрица состояния F системы задается во фробениусовой форме, сопровождающей характеристический полином $D(\lambda)$ (4.2), в котором C_n^i число сочетаний из n по i , задается в форме бинома Ньютона. Дополним условие (4.2) наличия в алгебраическом спектре

собственных чисел

$\sigma\{F\} = \{ \lambda_i = \arg[\det(\lambda I - F) = 0] : \lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n} \}$ матрицы F

единственного вещественного элемента кратности $\mu = n = \dim(x)$

условием, накладываемым на дефект характеристической матрицы

$(\lambda I - F)$ матрицы F , который должен принимать единичное значение.

В силу последнего предположения каноническая форма матрицы, построенная на спектре $\sigma\{F\}$ собственных чисел матрицы F будет представлять собой $(n \times n)$ -клетку Жордана $J(\alpha)$

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Следует заметить, что матрица в форме Жордана $J(\alpha)$ порождает автономную динамическую систему вида (4.1), задаваемую в жордановом каноническом базисе

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J(\alpha)\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \quad (4.4)$$

в которой вектор \tilde{x} и матрица $J(\alpha)$ состояния связаны с вектором x и соответственно с матрицей F состояния исходной системы (4.1) векторно-матричными соотношениями

$$x = S\tilde{x}, \quad SJ(\alpha) = FS. \quad (4.5)$$

В (4.5) S – $(n \times n)$ -матрица неособого преобразования подобия, допускающая представление матрицы F в форме

$$F = SJ(\alpha)S^{-1}. \quad (4.6)$$

В свою очередь жорданова матрица $J(\alpha)$ в силу (4.3) может быть представлена в аддитивно декомпозированном виде

$$J(\alpha) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + J(0) = \alpha I + J(0), \quad (4.7)$$

где $J(0)$ – нильпотентная матрица индекса $\nu = n$.

Поставим задачу исследования свободного движения системы (4.4) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (4.4) $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0)) = \exp\{J(\alpha)t\}\tilde{x}(0). \quad (4.8)$$

Скаляризацию векторного процесса (4.8) осуществим на основе мультипликативной коммутруемости матриц αI и $J(0)$ так, что $\alpha I \cdot J(0) = J(0) \cdot \alpha I$ и $\exp\{J(\alpha) \cdot t\} = e^{\alpha t} \exp\{J(0) \cdot t\}$ а также использования согласованных векторных и матричных норм, в результате чего на основе (4.7) получим цепочку соотношений

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{J(\alpha)t\}\tilde{x}(0)\| \leq \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\| = e^{\alpha t} \|\exp\{J(0)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|. \quad (4.9)$$

В (4.9) компонент $\exp\{J(0)t\}$ мультипликативной цепи элементов имеет при $\mu = n$ представление

$$\exp\{J(0)t\} = \exp \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} t \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t & (2)^{-1}t^2 & \dots & [(\mu-1)!]^{-1}t^{\mu-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & [(\mu-2)!]^{-1}t^{\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Из (4.10) видно, что столбцовая норма $\|\exp\{J(0)t\}\|_1$, определяемая последним столбцом матричной экспоненты $\exp\{J(0)t\}$, ее строчная норма $\|\exp\{J(0)t\}\|_\infty$, определяемая первой строкой экспоненты, и оценка спектральной нормы $\|\exp\{J(0)t\}\|_2$, задаваемая мажорирующим неравенством

$$\|\exp\{J(0)t\}\|_2 \leq \left\{ \|\exp\{J(0)t\}\|_1 \cdot \|\exp\{J(0)t\}\|_\infty \right\}^{1/2},$$

совпадают и определяются выражением

$$\|\exp\{J(0)t\}\|_p = 1 + t + (1/2)t^2 + \dots + (1/(\mu-1)!)t^{\mu-1} = \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/k!)t^k, \quad (p=1,2,\infty).$$

Таким образом, норма матричной экспоненты $\|\exp\{J(\alpha)t\}\|$ удовлетворяет соотношению

$$\|\exp\{J(\alpha)t\}\| = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k. \quad (4.11)$$

Для целей дальнейших исследований выделим такое $\tilde{x}(0) = \arg\{\|\tilde{x}(0)\| = 1\}$, для которого выполняется точное равенство

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k. \quad (4.12)$$

Теперь при фиксированной кратности $\mu = n$ собственного числа $\lambda = \alpha$ поставим задачу оценки знака скорости изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$ в момент $t = 0$ как синдрома характера развития процессов в системе в функции от областей значений $\lambda = \alpha$. Дифференцированием по времени выражения (4.12) получим

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| = \frac{d}{dt} \left\{ e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k \right\} \Big|_{t=0} = \left\{ \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!))t^k \right\} \Big|_{t=0} = \alpha + 1. \quad (4.13)$$

Соотношение (4.13) позволяет сепарировать процессы по их качеству в системе (4.4) с матрицей состояния в виде жордановой клетки полной размерности по норме вектора состояния в функции от

значения кратного собственного числа $\lambda = \alpha$. Ясно одно, что при любом отрицательном значении $\lambda = \alpha$ и при любой его кратности процессы в системе (4.4) являются сходящимися, потому что мультипликативный член $e^{\alpha t}$ в выражении (4.12) для $\|\tilde{x}(t)\|$ имеет бесконечное число элементов разложения по степеням t в то время, как член $\sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k$ – конечное. Следовательно, всегда найдется такой

момент времени $t = t^*$, начиная с которого начинает проявляться доминирование экспоненциального сомножителя $e^{\alpha t}$. Теперь рассмотрим следующие ситуации.

Ситуация 1: $\alpha < 0, |\alpha| > 1$, $\left. \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \right|_{t=0} < 0$, процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ сходится к

нулю и мажорируется экспонентой в форме $\|\tilde{x}(t)\| \leq e^{(\alpha+1)t} \|\tilde{x}(0)\|$.

Ситуация 2: $\alpha = -1$, $\left. \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \right|_{t=0} = 0$ начальная скорость нулевая, но

при $t > 0$ в силу (4.13) устанавливается отрицательная скорость, определяемая выражением

$$\left. \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| = \left\{ \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!))t^k \right\} \right|_{\alpha=-1} = -(1/(\mu-1)!) e^{-t} t^{(\mu-1)} \quad (4.14)$$

Скорость изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$ на траекториях системы характеризуется экстремумом, наблюдаемым в момент t_m , определяемым в силу (4.14) соотношениями

$$t_m = \arg \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \|\tilde{x}(t)\| = 0 \right\} = \arg \left\{ \frac{d}{dt} (e^{-t} t^{(\mu-1)}) = 0 \right\} = \mu - 1, \text{ при этом скорость}$$

изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$, будучи отрицательной, равна величине

$$\max_t \left(\frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right) = - \frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)}.$$

Процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ сходится к нулю в силу представления (4.12). Процесс мажорируется экспоненциальной функцией так, что выполняется неравенство $\|\tilde{x}(t)\| \leq \rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\|$,

в котором параметры (ρ, γ) определяются из условия

$$(\rho, \gamma) = \arg \left\{ \min_{\rho, \gamma} \left\| \tilde{x}(t) \right\| - \rho e^{\gamma t} \left\| \tilde{x}(0) \right\| \& \left(\frac{d}{dt} \left(\rho e^{\gamma t} \left\| \tilde{x}(0) \right\| \right) \right) \Big|_{t=(\mu-1)} = - \frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)} \& \rho \geq 1 \right\}.$$

Ситуация 3 (предмет раздела): $\alpha < 0, |\alpha| < 1, \left\{ \frac{d}{dt} \left\| \tilde{x}(t) \right\| \right\} \Big|_{t=0} > 0$. Процесс $\left\| \tilde{x}(t) \right\|$ на начальном отрезке времени расходится, достигая максимума в момент t_M , определяемый соотношениями

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d}{dt} \left\| \tilde{x}(t) \right\| = 0 \right\} = \arg \left\{ (1 + \alpha) \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/k!) t^k + \alpha (1/(\mu-1)!) t^{(\mu-1)} = 0 \right\} \quad (4.15)$$

а далее сходится к нулю. Таким образом, процесс $\left\| \tilde{x}(t) \right\|$ на траекториях свободного движения апериодической системы обнаруживает выброс, численно определяемый величиной $\alpha : (\alpha < 0, |\alpha| < 1)$ кратного собственного числа и значением μ его кратности. Очевидно свойство процесса по норме $\left\| \tilde{x}(t) \right\|$: чем меньше величина $|\alpha| < 1$ и чем больше его кратность μ , тем больше величина его выброса над уровнем $\left\| \tilde{x}(0) \right\|$. Для иллюстрации этого результата произведем вычисление момента t_M с помощью (4.15) и выброса в кривой $\left\| \tilde{x}(t) \right\|$ апериодической системы для момента $t = t_M$ в силу соотношения (4.12) для различных значений $\alpha : (\alpha < 0, |\alpha| < 1)$ и кратностей μ . Результаты вычислений приведены в форме таблиц 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1. Значений моментов выброса в кривой $\left\| \tilde{x}(t) \right\|$

μ	2	3	4	5	10
	α			t_M	
-0.2	4	8.9	13.9	18.8	43.8
-0.02	49	99	149	199	449

Таблица 4.2. Значений выбросов $\max_t (\left\| \tilde{x}(t) \right\|) = \left\| \tilde{x}(t_M) \right\|$ кривой $\left\| \tilde{x}(t) \right\|$

μ	2	3	4	5	10
α	$\max_t (\left\ \tilde{x}(t) \right\) = \left\ \tilde{x}(t_M) \right\ $				
-0.2	2.25	8.35	34.7	151.6	$3.32 \cdot 10^5$
- 0.02	18.8	690.4	$2.86 \cdot 10^4$	$1.25 \cdot 10^6$	$2.72 \cdot 10^{14}$

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ как функции собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности $\mu = n$ проводится на основе соотношения $\|\tilde{x}(t)\| = \|e^{J(\alpha)t}\tilde{x}(0)\| \leq \|e^{J(\alpha)t}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|$ по его мажорирующей части. Результаты моделирования процессов в форме $\|\tilde{x}(t)\|$ для наборов кратностей $\mu = n = 2; 3; 5$ и 10 и значений $\lambda = \alpha = -2; -0.2$ и -0.02 представлены на рисунках, приводимых ниже.

На рис. 4.1 приведены кривые для случая $\lambda = \alpha = -2$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ сходятся монотонно без выбросов (см. ситуацию 1).

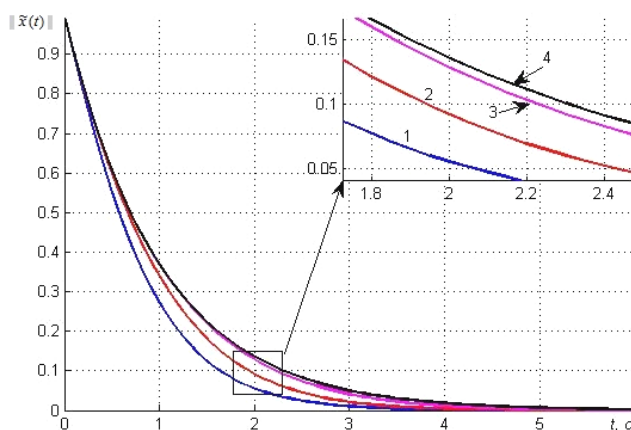


Рис. 4.1. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -2$; и $\mu = n = 2$ (кривая 1); 3 (кривая 2); 5 (кривая 3) и 10 (кривая 4)

На рис. 4.2 приведены 4 кривые для случая $\lambda = \alpha = -0.2$. Процессы по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ обнаруживают выбросы, нарастающие с увеличением $\mu = n$ (см. ситуацию 3).

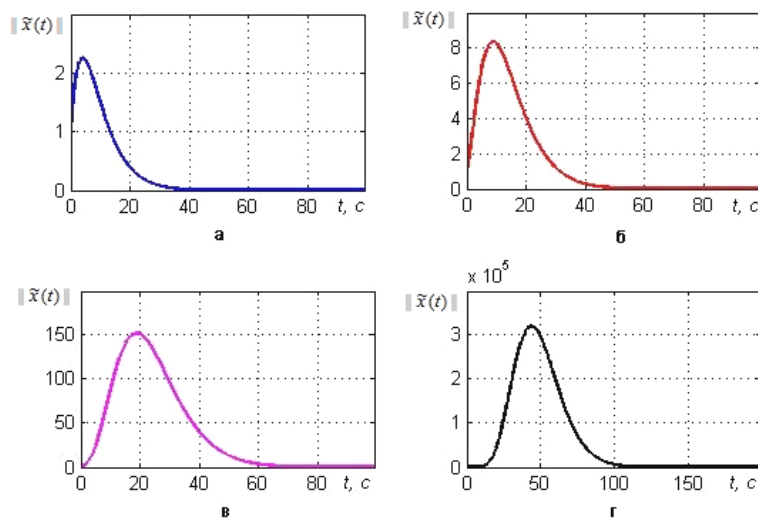


Рис. 4.2. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0.2$; и $\mu = n = 2$ (рис. а); 3 (рис. б); 5 (рис. в) и 10 (рис. г)

На рис. 4.3 приведены 4 кривые для случая $\lambda = \alpha = -0.02$. Процессы по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ имеют заметные выбросы, нарастающие с увеличением $\mu = n$ (см. ситуацию 3).

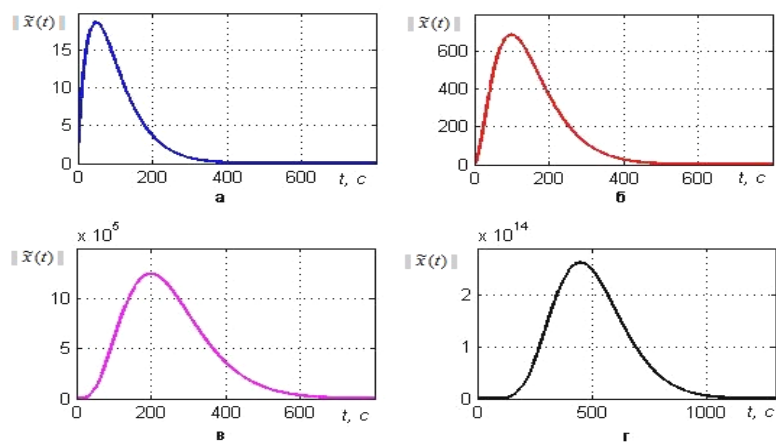


Рис. 4.3. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0.02$; и $\mu = n = 2$ (рис.а); 3(рис.б); 5(рис.в) и 10(рис.г)

На рис. 4.4 приведены кривые постоянных значений $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\| = \text{const}$ на плоскости « $\mu - \lambda$ », иллюстрирующих возможность «обмена» кратности на значение кратного собственного числа в решаемой задаче.

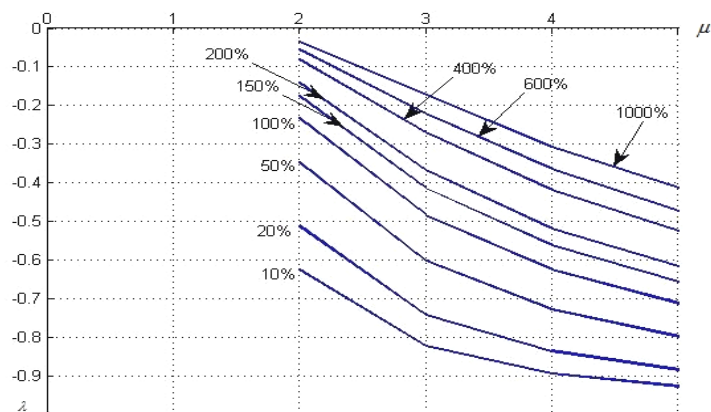


Рис. 4.4. Кривые постоянных значений $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\| = \text{const}$

4.2 Колебательность аperiodических систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в произвольной форме, по норме вектора свободного движения

Вернемся теперь к исходной системе (4.1) с матрицей состояния F , заданной в произвольном базисе, тогда по аналогии с (4.8) с использованием (4.6) можно записать

$$x(t) = x(t, x(0)) = \exp\{Ft\}x(0) = S \exp\{J(\alpha)t\}S^{-1}x(0). \quad (4.16)$$

Если в (4.16) перейти к скаляризованным векторным процессам по норме вектора состояния системы (4.1), то получим с использованием (4.11) цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|S \exp\{J(\alpha)t\}S^{-1}x(0)\| \leq \|S\| \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \|S^{-1}\| \|x(0)\| = \\ &= c\{S\} e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k \|x(0)\|, \end{aligned}$$

где $c\{S\} = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$ – число обусловленности матрицы S , удовлетворяющее условию $1 \leq c\{S\} < \infty$. Значения нормы $\|x(t)\|$ будут в $c\{S\}$ раз превышать значения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$, сохраняя ту же зависимость от модуля $|\alpha|$ собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности μ .

На рис. 4.5 приведены кривые при $\lambda = \alpha = -0.2$ для случая системы (4.1), в которой матрица F задана в сопровождающей строчной форме, и системы (4.4). Процессы по норме $\|x(t)\|$ имеют характер кривых по норме $\|\tilde{x}(t)\|$, но в каждый момент в $c\{S\}$ раз превышают их.

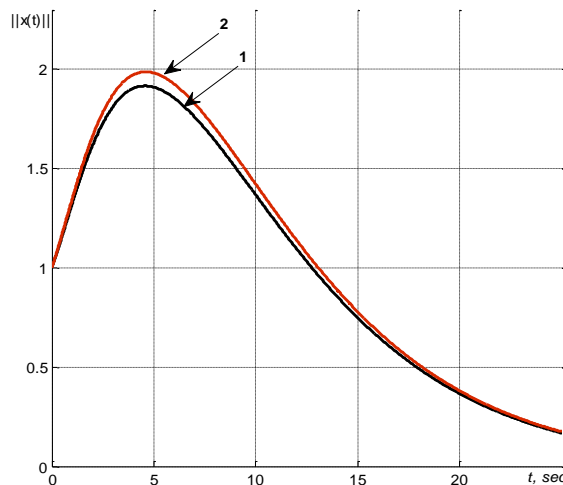


Рисунок 4.5. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ (4. кривая 1) и $\|x(t)\|$ (4. кривая 2) при $\lambda = \alpha = -0.2$; и $\mu = n = 2$

Завершая рассмотрение влияния фактора кратности собственных чисел на качество процессов в аperiodических системах, следует отметить, что если спектр собственных чисел матрицы F имеет

несколько кратных чисел $\sigma\{F\} = \left\{ \lambda_i = \alpha_j : i = \overline{1, \mu_j}; j = \overline{1, q}; \sum_{j=1}^q \mu_j = n \right\}$, то

каноническое представление F в жордановой форме будет содержать q жордановых клеток размерности $(\mu_j \times \mu_j)$ каждая. Тогда для такого случая соотношение (4.9) принимает вид

$$\|\tilde{x}(t)\| = \left\| \text{diag} \left\{ \exp \{ J(\alpha_j) t \}; j = \overline{1, q} \right\} \tilde{x}(0) \right\| \leq e^{\bar{\alpha} t} \left\| \exp \{ J_{(\bar{\mu} \times \bar{\mu})}(0) t \} \right\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|,$$

где $\bar{\alpha} = \max_j \{ \alpha_j : \alpha_j < 0 \ \& \ |\alpha_j| < 1; j = \overline{1, q} \}$; $\bar{\mu} = \max_j \{ \mu_j; j = \overline{1, q} \}$.

Таким образом установлено, что кратность собственных чисел матриц состояния устойчивых аperiodических непрерывных систем как и структура их собственных векторов (см. раздел 3) оказывается важным системным фактором, наделяющим динамические процессы в системе весьма специфическими свойствами, которые могут приводить к нежелательным последствиям разрушительного характера. С тем, чтобы не допустить обнаруженного эффекта кратности собственных чисел при синтезе методами модального управления матрицу состояния F системы следует наделять спектром собственных чисел, не содержащим кратных элементов, а в случае простой структуры не содержать в геометрическом спектре собственных векторов такие пары, которые образуют угол заметно отличающийся от прямого.

5. СКАЛЯРИЗАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ

В настоящем разделе используется сингулярное разложение (SVD) матриц ЛО, для оценки размеров векторов, осуществляемой и «снизу» и «сверху», т.е. в форме их минорант и мажорант. Содержательно настоящий раздел посвящен применительной практике результатов параграфа 2.3 к матрице $N(t)$ в форме матричной экспоненты.

5.1 Сингулярное разложение в задаче скаляризации векторов свободного движения стационарных непрерывных систем

Как и выше рассматривается автономная непрерывная динамическая система вида (3.1), (4.1), имеющая решение в форме

$$x(t) = \exp(Ft)x(0). \quad (5.1)$$

Нетрудно видеть, что (5.1) представляет собой ЛАС вида (2.3), параметризованная непрерывным временем. Если к соотношению (5.1) применить результаты, представленные формулами (2.53) и (2.54), то оказываются справедливыми выражения, полностью решающие задачу скаляризации векторов свободного движения для матриц состояния произвольной структуры в параметризованной временем форме, имеющие вид

$$\alpha_n(\exp(Ft))\|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq \alpha_1(\exp(Ft))\|x(0)\|, \quad (5.2)$$

где $\alpha_n(\exp(Ft)) = \min_i \alpha_i(\exp(Ft))$, $\alpha_1(\exp(Ft)) = \max_i \alpha_i(\exp(Ft))$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матричной экспоненты $\exp(Ft)$. Очевидно, что $\alpha_n(\exp(Ft))\|x(0)\|$ является минорантой для нормы вектора состояния свободного движения системы, а $\alpha_1(\exp(Ft))\|x(0)\|$ – её мажорантой.

Если в (5.2) положить $\|x(0)\| = 1$, то есть проводить эксперимент по исследованию свободного движения $x(t)$, порождаемого вектором начального состояния $x(0)$, принадлежащего единичной сфере, то соотношение (5.2) примет вид

$$\alpha_n(\exp(Ft)) \leq \|x(t)\| \leq \alpha_1(\exp(Ft)). \quad (5.3)$$

При этом минорантой процесса $\|x(t)\|$ будет минимальное сингулярное число $\alpha_n(\exp(Ft))$ матричной экспоненты (5.1), а его мажорантой – максимальное сингулярное число $\alpha_1(\exp(Ft))$ матричной экспоненты.

Пример 5.1 (ПР.5.1)

В качестве примера рассмотрим систему из примера (3.1) с сочетанием собственных чисел $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5$. Кривые миноранты и мажоранты процесса $\|x(t)\|$ свободного движения системы, порождаемого вектором начального состояния, принадлежащего единичной сфере, приведены на рисунке 5.1 ■

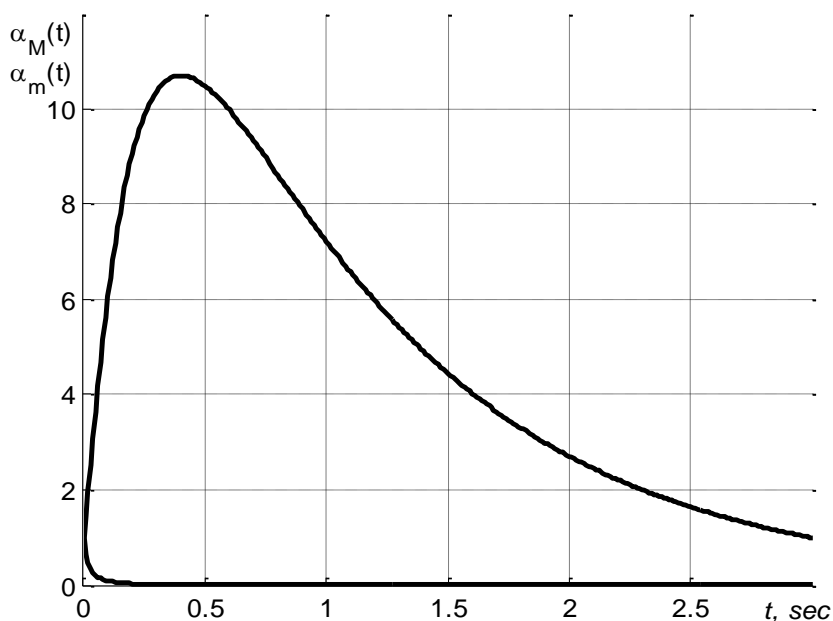


Рис. 5.1

Пример 5.2 (ПР.5.2)

Кривые процессов в системе из примера 5.1 обнаруживают доминирование мажоранты над минорантой, порожденное структурой собственных векторов, что заметно снижает визуализационный эффект. Для его повышения в данном примере взята система с той же структурой собственных векторов, что и в системе примера 5.1, но с парой собственных чисел $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -1.4$. Кривые миноранты и мажоранты процесса $\|x(t)\|$ свободного движения системы, порождаемого вектором начального состояния, принадлежащего единичной сфере, для этого случая приведены на рисунке 5.2 ■

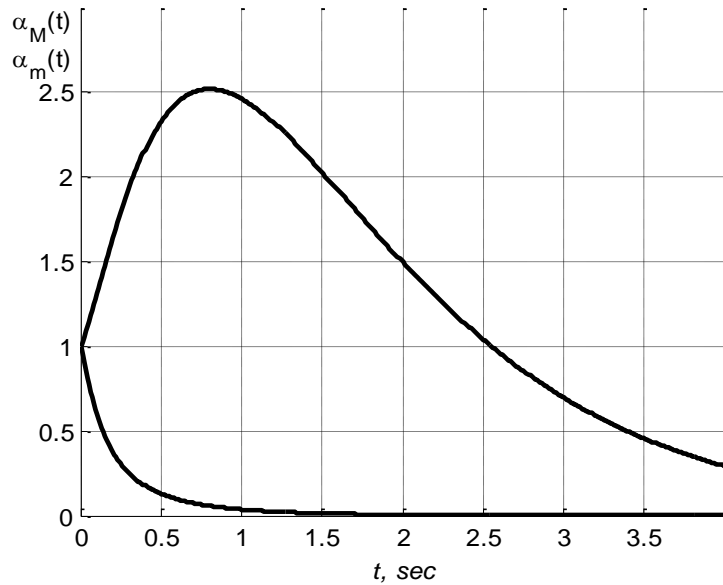


Рис. 5.2

Кривые рис. 5.2 построенные для случая системы с собственными числами её матрицы состояния, отличающимися всего лишь на 40%, еще более убедительно подтверждают, что при синтезе систем управления необходимо контролировать структуру собственных векторов.

Следует ожидать, что сингулярное разложение матричной экспоненты $\exp(Ft)$ для случая, когда F имеет кратные собственные числа, по модулю меньшие единицы, порождающие выбросы в траекториях свободного движения системы вида (4.1), также дает более полную картину процессов системы, чем простое её представление по норме вектора состояния.

Пример 5.3 (ПР.5.3)

В качестве примера рассмотрим систему из примера параграфа 4.2 с кратными собственными числами $\lambda = -0.2$, кратностью $\mu = n = 2$. Кривые миноранты и мажоранты процесса $\|x(t)\|$ свободного движения системы, порождаемого вектором начального состояния, принадлежащего единичной сфере, приведены на рисунке 5.3. ■

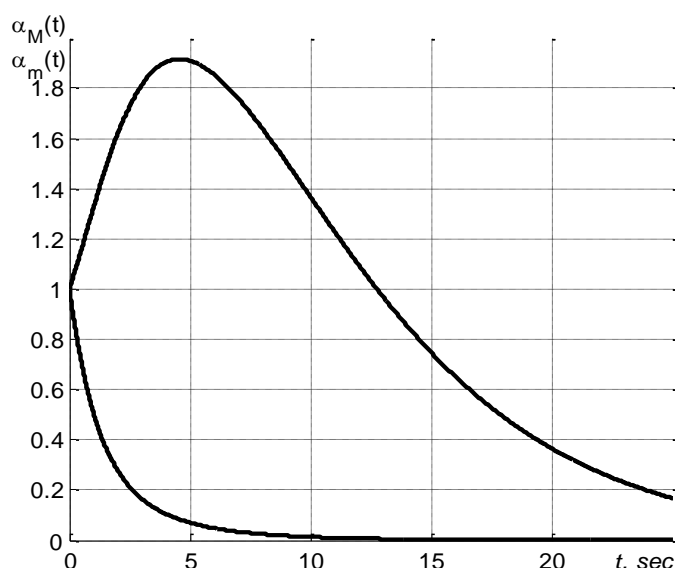


Рис. 5.3

5.2 Исследование тонкой геометрической природы колебательности апериодических систем на основе динамики левого сингулярного базиса матричной экспоненты

Сингулярное разложение матриц линейных операторов в его базовом представлении (2.14) содержит три компонента, два из них V и U – соответственно правый и левый ортонормированные базисы несут геометрическую «нагрузку», а компонент $\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ – диагональная матрица сингулярных чисел несет алгебраическую «нагрузку», состоящую в количественной оценке трансформации сферы в длины осей эллипсоида при линейном отображении сферы с помощью ЛАС вида (2.3). Следует заметить, что задача, которая рассмотрена в параграфе 5.1, в силу своей постановки позволяла ограничиться использованием экстремальных элементов компонента Σ .

В случае, когда ставится задача исследования тонкой геометрической природы колебательности апериодических систем, возникает необходимость обратиться к элементам сингулярного разложения, несущих геометрическую «нагрузку». Отметим, что правый сингулярный базис V несет каузальную «нагрузку», а левый сингулярный базис U несет консекутивную «нагрузку». Очевидно, что пользовательский интерес в поставленной задаче связан с левым сингулярным базисом, потому что его компоненты задают положения осей эллипсоида, получаемого в силу ЛАС вида (2.3). Отметим также, что при любой размерности задачи вида (2.3) она может быть сведена к

двумерной, потому что интерес представляет плоскость, натянутая на компоненты левого сингулярного базиса, задающих оси эллипсоида, соответствующих максимальному и минимальному сингулярным числам. Более того, так как оси эллипсоида связаны отношением ортогональности, то для исследования тонкой геометрической природы колебательности апериодических систем с кратной структурой собственных чисел их матрицы состояния на основе динамики левого сингулярного базиса матричной экспоненты достаточно ограничиться исследованием динамики процесса изменения пространственного положения вектора $U_1(t)$ относительно его реализации $U_1(0)$, где $U_1(t)$ – элемент левого сингулярного базиса U , соответствующий максимальному сингулярному числу матричной экспоненты. При чем в качестве количественной оценки пространственного положения вектора $U_1(t)$ можно взять $\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}$ – угол между векторами $U_1(t)$ и $U_1(0)$.

Высказанные соображения по исследованию тонкой геометрической природы колебательности апериодических систем, порождаемой как структурой собственных векторов, так и кратность собственных чисел, по модулю меньших единицы, проиллюстрируем примерами.

Пример 5.4 (ПР.5.4)

Рассматривается полное сингулярное разложение матричной экспоненты матрицы состояния системы из примера 5.2. На рис. 5.4.а приведены кривые процессов рис. 5.2, а на рис. 5.4.б приведены кривые процессов переменной $\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}$. ■

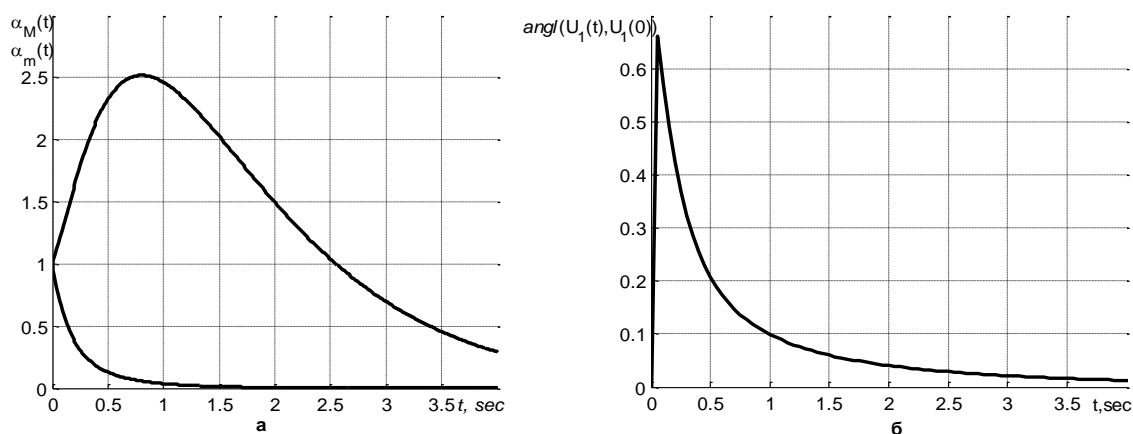


Рис. 5.4

Пример 5.5 (ПР.5.5)

Рассматривается полное сингулярное разложение матричной экспоненты матрицы состояния системы из примера 5.3. На рис. 5.5.а приведены кривые процессов рис. 5.3, а на рис. 5.5.б приведены кривые процессов переменной $\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}$. ■

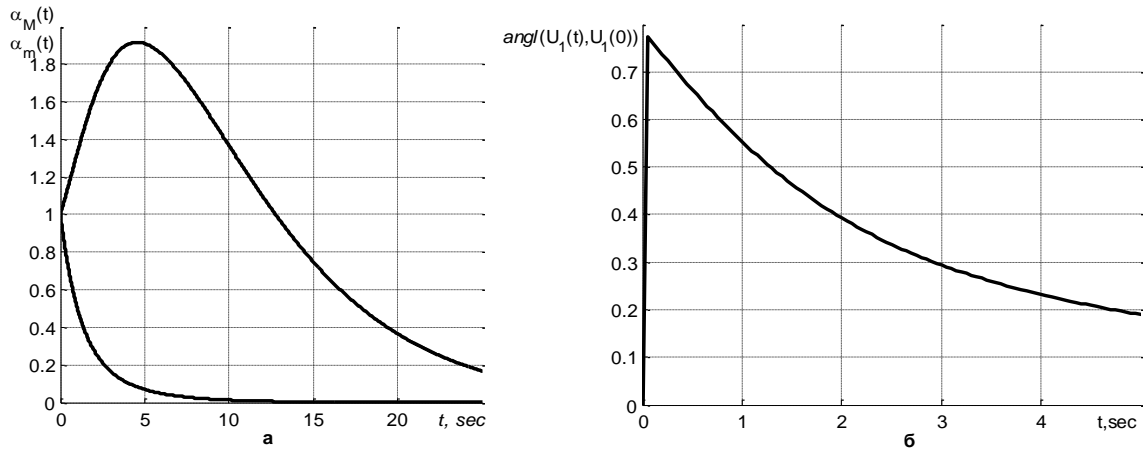


Рис. 5.5

Следует сказать, что независимо от системных причин колебательности апериодических систем максимальная полуось эллипсоида, получаемого при отображении единичной сферы вектора начального состояния с помощью матричной экспоненты, при $t = 0_+$ практически мгновенно поворачивается на угол $\text{angl}\{U_1(0_+), U_1(0)\}$, который с течением времени асимптотически стремится к нулю.

Это свойство сохраняется для собственных чисел λ , удовлетворяющих требованию устойчивости систем, но не удовлетворяющих условиям возникновения выбросов в траекториях свободного движения по норме вектора состояния. На рис.5.6.а и 5.6.б приведены кривые изменения переменной $\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}$ соответственно при кратных собственных числах $\lambda = -1$ и $\lambda = -10$.

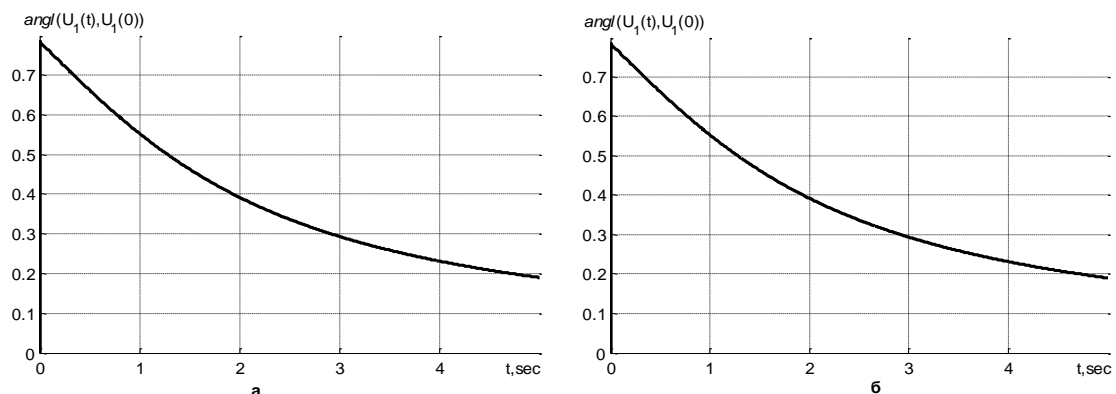


Рис. 5.6

6. КОЛЕБАТЕЛЬНОСТЬ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С МАТРИЦЕЙ СОСТОЯНИЯ КРАТНОЙ СТРУКТУРЫ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПО НОРМЕ ВЕКТОРА СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ

В разделе приводятся результаты исследования отклонений траекторий дискретных систем по норме вектора состояния свободного движения от монотонного развития в случае кратных вещественных положительнозначных собственных чисел их матриц состояния. По аналогии с непрерывными системами, обнаруженные отклонения траекторий от монотонного развития названы колебательностью аперiodических дискретных систем. Обнаружено, что отклонения траекторий от монотонного развития тем больше, чем ближе кратное собственное число к единице и выше его кратность. Получено аналитическое соотношение, позволяющее оценить величину отклонения траекторий, показана возможность «обмена» значения собственного числа на кратность при фиксированной величине выброса.

6.1 Колебательность аперiodических дискретных систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в жордановой форме, по норме вектора свободного движения

Рассмотрим линейную дискретную многомерную динамическую систему, задаваемую в векторно – матричной нормальной форме Коши

$$x(k+1) = Fx(k), x(k)|_{k=0} = x(0), \quad (6.1)$$

где $x(0), x(k)$ – вектора соответственно начального и текущего состояний системы; F – ее матрица состояния; $x(0), x(k) \in R^n$; $F \in R^{n \times n}$. Матрица системы F , заданная в произвольном базисе, такова, что ее характеристический полином $D(\lambda)$ имеет представление

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \left\{ (\lambda - \alpha)^n = \lambda^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i \lambda^{n-i} \alpha^i; \alpha : Jm(\alpha) = 0 \right\}, \quad (6.2)$$

где C_n^i – число сочетаний из n по i .

Дополним условие (6.2) наличия в алгебраическом спектре собственных чисел $\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg[\det(\lambda I - F) = 0]: \lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\}$ матрицы F единственного элемента кратности $\mu = n = \dim(x)$ условием, накладываемым на дефект характеристической матрицы $(\lambda I - F)$ матрицы F , который должен принимать единичное значение.

Тогда каноническая форма матрицы, построенная на спектре $\sigma\{F\}$ собственных чисел матрицы F будет иметь вид $(n \times n)$ -клетки Жордана $J(\alpha)$, имеющую представление

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Следует заметить, что матрица в форме Жордана $J(\alpha)$ порождает автономную динамическую систему вида (6.1), задаваемую в жордановом каноническом базисе

$$\tilde{x}(k+1) = J(\alpha)\tilde{x}(k), \tilde{x}(k)|_{k=0} = \tilde{x}(0), \quad (6.4)$$

в которой вектор \tilde{x} и матрица $J(\alpha)$ состояния связаны с вектором x и соответственно с матрицей F состояния исходной системы (6.1) векторно-матричными соотношениями

$$x = S\tilde{x}, SJ(\alpha) = FS. \quad (6.5)$$

В (6.5) S – $(n \times n)$ -матрица неособого преобразования подобия, допускающая представление матрицы F в форме

$$F = SJ(\alpha)S^{-1}. \quad (6.6)$$

В свою очередь жорданова матрица $J(\alpha)$ в силу (6.3) может быть представлена в аддитивно декомпозированном виде

$$J(\alpha) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + J(0) = \alpha I + J(0), \quad (6.7)$$

где $J(0)$ – нильпотентная матрица индекса $\nu = n$ так, что выполняется условие $(J(0))^\nu = (J(0))^n = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – $(n \times n)$ нулевая матрица. Следует заметить, что в представлении (6.7) слагаемые αI и $J(0)$ обладают свойством мультипликативной коммутативности

$$\alpha I \cdot J(0) = J(0) \cdot \alpha I = \alpha J(0). \quad (6.8)$$

Утверждение 6.1. Степенная матричная аддитивная структура $(Q + R)^p$, в которой Q, R – $(n \times n)$ квадратные матрицы, вычисляется по правилам скалярного бинома Ньютона так, что

$$(Q + R)^p = \sum_{j=0}^p C_p^j Q^{p-j} R^j, \quad (6.9)$$

где C_p^j – число сочетаний из p по j , если матрицы Q и R обладают свойством мультипликативной коммутативности $Q \cdot R = R \cdot Q$. \square

Доказательство утверждения 6.1 приведено в приложении 1. \blacksquare

Решение системы (6.4) с учетом представления (6.7) и положения (6.9) утверждения 6.1. принимает вид

$$\tilde{x}(k) = \tilde{x}(k, \tilde{x}(0)) = (J(\alpha))^k \tilde{x}(0) = (\alpha I + J(0))^k \tilde{x}(0) = \left(\sum_{i=0}^k C_k^i \alpha^{k-i} J^i(0) \right) \tilde{x}(0). \quad (6.10)$$

Утверждение 6.2. Степенная матричная функция $(J(\alpha))^k = \sum_{i=0}^k C_k^i \alpha^{k-i} J^i(0)$ в развернутом виде получает представление

$$(J(\alpha))^k = \alpha^k \begin{bmatrix} 1 & C_k^1 \alpha^{-1} & C_k^2 \alpha^{-2} & \dots & C_k^{(n-1)} \alpha^{-(n-1)} \\ 0 & 1 & C_k^1 \alpha^{-1} & \dots & C_k^{(n-2)} \alpha^{-(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_k^{(n-3)} \alpha^{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.11) \square$$

Доказательство утверждения 6.2 приведено в приложении 2. \blacksquare

Осуществим скаляризацию векторного процесса (6.10) на основе использования согласованных векторных и матричных норм с учетом представления (6.11) степенной матричной функции в форме

$$\|\tilde{x}(k)\| = \|(J(\alpha))^k \tilde{x}(0)\| \leq \|(J(\alpha))^k\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1} = \|(J(\alpha))^k\|. \quad (6.12)$$

Из (6.11) видно, что столбцовая норма $\|(J(\alpha))^k\|_1$, определяемая последним столбцом матрицы $(J(\alpha))^k$, ее строчная норма $\|(J(\alpha))^k\|_\infty$, определяемая первой строкой матрицы, и оценка спектральной нормы $\|(J(\alpha))^k\|_2$, задаваемая мажорирующим неравенством

$\|(J(\alpha))^k\|_2 \leq \left\{ \|(J(\alpha))^k\|_1 \cdot \|(J(\alpha))^k\|_\infty \right\}^{1/2}$, совпадают и определяются выражением

$$\|(J(\alpha))^k\| = \alpha^k \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i}. \quad (6.13)$$

На основе представлений (6.12) и (6.13) мажорантная оценка $roof\|\tilde{x}(k)\|$ нормы вектора $\|\tilde{x}(k)\|$ состояния $\tilde{x}(k)$ свободного движения системы (6.4), порождаемого единичной сферой начальных состояний $\|\tilde{x}(0)\|=1$, удовлетворяет равенству

$$roof\|\tilde{x}(k)\| = \alpha^k \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i}. \quad (6.14)$$

Ясно одно, что при любом положительнозначном собственном числе $\lambda = \alpha < 1$ и при любой его кратности $\mu = n = dim(x)$ в силу выполнения для (6.14) условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (roof\|\tilde{x}(k)\|) = 0 \quad (6.15)$$

процессы в системе (6.4) являются сходящимися. (см. Приложение 1).

Поставим задачи исследования возможности появления отклонения траектории дискретной системы (6.4) по норме ее вектора

состояния свободного движения (6.14) от монотонного развития и оценки величины этого отклонения.

Решение поставленных задач свяжем с исследованием поведения первой правой разности нормы $\|(J(\alpha))^k\|$ матрицы состояния $(J(\alpha))^k$ системы (6.4)

$$\Delta\|(J(\alpha))^k\| = \|(J(\alpha))^{k+1}\| - \|(J(\alpha))^k\|. \quad (6.16)$$

Эти исследования проведем для двух значений дискретного времени k . Первым, из которых является $k=0$ с целью оценки значения параметра α на предмет возможности справедливости неравенства

$$\Delta\|(J(\alpha))^k\|_{k=0} > 0. \quad (6.17)$$

Вторым, из которых является $k = k^*$, удовлетворяющий условию

$$k^* = \arg\left\{\|(J(\alpha))^k\|_{k=k^*} = \max_k \|(J(\alpha))^k\|\right\}. \quad (6.18)$$

В раскрытом виде соотношение (6.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\|(J(\alpha))^0\| &= \|(J(\alpha))^1\| - \|(J(\alpha))^0\| = \alpha^1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1!}{i!(1-i)!} \alpha^{-i} - \\ &- \alpha^0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{0!}{i!(0-i)!} \alpha^{-i} = \alpha + 1 - 1 = \alpha, \end{aligned} \quad (6.19)$$

из которого видно: первое, что исследование оказывается корректно только при $n \geq 2$; второе, что при любых $\alpha : \alpha > 0 \ \& \ |\alpha| < 1$ система в жордановой форме матрицы состояния будет обнаруживать в точке $k=0$ положительность первой правой разности, а потому тенденцию к отклонению от монотонной сходимости траекторий по норме.

Для оценки величины отклонения траектории дискретной системы (6.4) по норме ее вектора состояния свободного движения от монотонного развития проведем исследование поведения первой разности (6.16) в точке $k = k^*$, определяемой (6.18). Очевидно, что здесь возможно два случая. Первый случай характеризуется переходом первой правой разности (6.16) на траектории системы в точке $k = k^*$

через ноль от положительного значения к отрицательному без разрыва. Второй случай характеризуется переходом первой правой разности на траектории системы в точке $k = k^*$ с разрывом первого рода от положительного значения к отрицательному. Первому случаю соответствует траектория с гладким экстремумом «плоского» типа так, что в точках $k = k^*$ и $k = k^* + 1$ значения нормы вектора состояния оказываются равными. Второму случаю соответствует траектория с «острым» экстремумом так, что в точке $k = k^*$ знак первой разности нормы вектора состояния изменяется с положительного на отрицательный скачком.

Для первого случая справедливо выполнение соотношения

$$\Delta \left\| (J(\alpha))^k \right\|_{k=k^*} = 0. \quad (6.20)$$

Будем искать связь размерности n системы (и кратности собственного числа), момента $k = k^*$ и положительнозначного собственного числа $\lambda = \alpha < 1$, для которых выполняется условие (6.20). Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 6.3. Условие $k^* = \arg \left\{ \Delta \left\| (J(\alpha))^k \right\|_{k=k^*} = 0 \right\}$

выполняется в случае удовлетворения соотношения

$$\alpha^n \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i} - C_k^{(n-1)} = 0. \quad (6.22) \square$$

Доказательство утверждения 6.3 приведено в приложении 2. ■

Нетрудно видеть, что, начиная с момента $k = k^*$, удовлетворяющего условию (6.22) в системе (6.4) устанавливается монотонно сходящееся движение по норме вектора состояния.

Выражение (6.22) позволяет зафиксировать значение, при котором имеет место плоский экстремум и сепарировать значение, при котором имеет место острый экстремум. Например, если в (6.22) зафиксировать n и значения k и $k+1$, то (6.22) даст значение $\alpha(n, k)$ и $\alpha(n, k+1)$, при которых в моменты k и $k+1$ наблюдаются экстремумы плоского вида. Для значений $\alpha(n)$ удовлетворяющих неравенствам

$\alpha(n, k) < \alpha(n) < \alpha(n, k + 1)$ получаем континуум решений, характеризующихся в точке k экстремумом острого типа.

Проведем компьютерное исследование полученных результатов. При этом, ключевым моментом в организации компьютерного исследования является соотношение (6.19), из которого следует, что при $n \geq 2$ и при любых $\alpha : \alpha > 0 \ \& \ |\alpha| < 1$ система в жордановой форме матрицы состояния будет обнаруживать в точке $k = 0$ положительность первой правой разности, а потому тенденцию к отклонению от монотонной сходимости траекторий по норме. Справедливо предположить, что эта траектория достигает в момент $k = k^*$ экстремума, после которого в силу условия $|\alpha| < 1$ переходит в режим монотонной сходимости к нулю. Таким образом, основной задачей компьютерного исследования является наблюдение этого экстремума с установлением его локализации k^* на оси дискретного времени k и зависимости величины экстремума $\|\tilde{x}(k)\|_{k=k^*} = \|\tilde{x}(k^*)\|$ от значения собственного числа $\lambda = \alpha$ и кратности $\mu = n$. При этом задача должна решаться как для случая «плоского», так и «острого» экстремума.

Решение задачи локализации «плоского» экстремума на оси дискретного времени $k = k^*$ как функции величины $\lambda = \alpha$ и $\mu = n$ представлено в таблице. Таблица построена на основании решения уравнения (6.22), базирующегося на условии равенства нулю первой правой разности в точке $k = k^*$. Полнота решения поставленной перед экспериментом задачи хорошо просматривается, если таблицей пользоваться следующим образом. Задать пару $\{k = k^*, \mu = n\}$ и определить по таблице значение $\lambda = \alpha^*$, при котором в момент $k = k^*$ наблюдается «плоский» экстремум.

Таблица 6.1

$n \backslash k^*$	1	2	4	6	8	10	20	40	60	80	100	
2	0,618	0,732	0,828	0,873	0,899	0,916	0,954	0,976	0,984	0,988	0,99	
3	–	0,466	0,661	0,748	0,799	0,833	0,909	0,952	0,968	0,976	0,98	
4	–	–	0,495	0,625	0,701	0,751	0,864	0,929	0,952	0,963	0,971	

5	-	-	0,325	0,504	0,604	0,669	0,819	0,905	0,936	0,951	0,961	α^*
6	-	-	-	0,383	0,508	0,589	0,774	0,881	0,919	0,939	0,951	

В промежутках между соседними значениями $\lambda = \alpha^*$ для фиксированной пары $\{k = k^*, \mu = n\}$ будут наблюдаться «острые» экстремумы.

На рисунке (рис. 6.1) приведены кривые процессов $\|\tilde{x}(k)\|$ трех троек $\{k = k^*, \mu = n, \lambda = \alpha^*\}$ параметров системы (6.4): $\{k^* = 2, n = 3, \alpha^* = 0.466\}$ (кривая 1), $\{k^* = 4, n = 3, \alpha^* = 0.661\}$ (кривая 2) и $\{k^* = 6, n = 3, \alpha^* = 0.748\}$ (кривая 3), характеризующиеся плоским экстремумом.

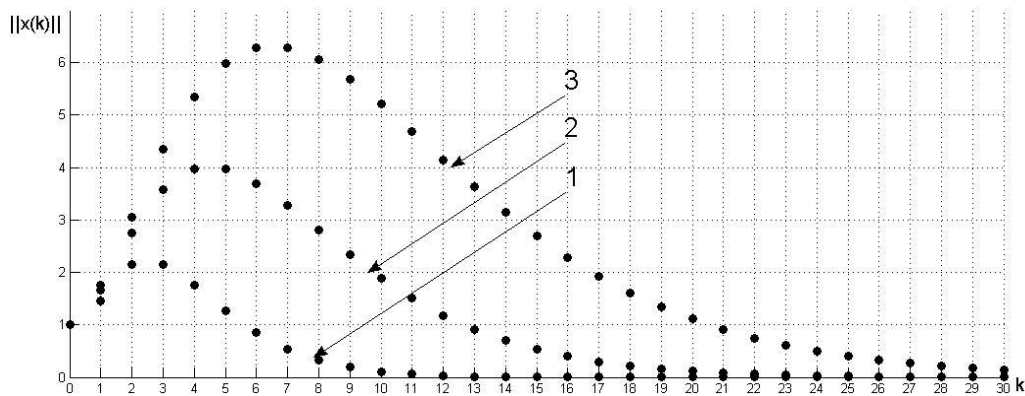


Рис. 6.1. Кривые процессов $\|\tilde{x}(k)\|$ системы (6.4)

На рисунке (рис. 6.2) приведены кривые процессов $\|\tilde{x}(k)\|$ для трех троек $\{k = k^*, \mu = n, \lambda = \alpha^*\}$ параметров системы (6.4): $\{k^* = 2, n = 3, \alpha^* = 0.4\}$ (кривая 1), $\{k^* = 4, n = 3, \alpha^* = 0.62\}$ (кривая 2) и $\{k^* = 6, n = 3, \alpha^* = 0.73\}$ (кривая 3), характеризующиеся «острым» экстремумом.

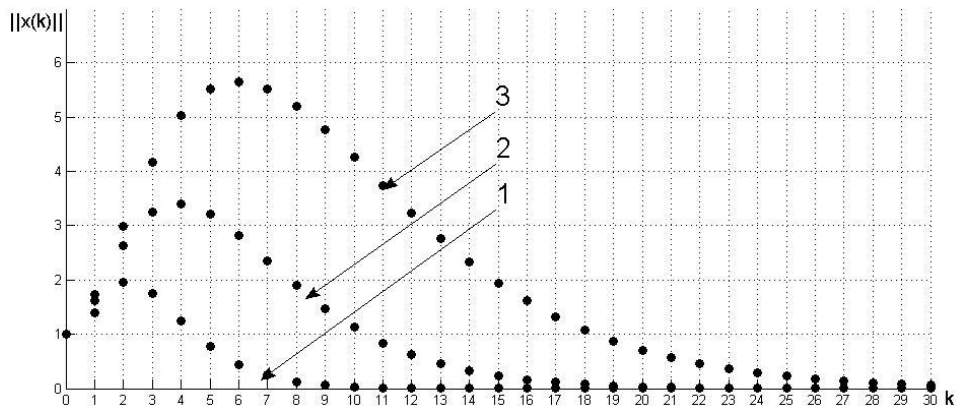


Рис. 6.2. Кривые процессов $\|\tilde{x}(k)\|$ системы (6.4)

Нетрудно видеть, что кривые как для случая плоского так и для случая острого обнаруживают тенденцию роста значения экстремума при увеличении всех элементов тройки $\{k = k^*, \mu = n, \lambda = \alpha^*\}$. Это означает, что возможен обмен всех компонентов друг на друга в классе кривых, характеризующихся фиксированным значением экстремума.

На рисунке (рис. 6.3) приведены кривые для постоянных величин $\max_k(\|\tilde{x}(k)\|) = \|\tilde{x}(k^*)\| = \gamma \|\tilde{x}(0)\|$ для значений $\gamma = 2$ (кривая 1); $\gamma = 5$ (кривая 2); $\gamma = 10$ (кривая 3).

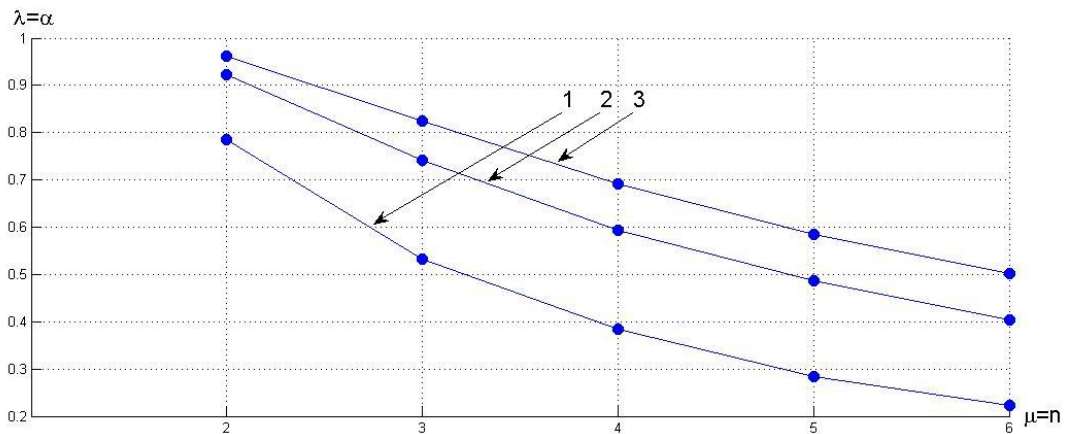


Рис. 6.3. Кривые для величин $\max_k(\|\tilde{x}(k)\|) = \text{const}$

6.2 Колебательность аperiodических дискретных систем с матрицей состояния кратной структуры собственных чисел, заданной в произвольной форме, по норме вектора свободного движения

На рисунке (рис 6.4) приведены кривые нормы $\|x(k)\|$ (кривая 1) и нормы $\|\tilde{x}(k)\|$ (кривая 2) для фиксированной тройки $\{k^* = 4, n = 3, \alpha^* = 0.661\}$ процессов в системах (6.1) и (6.4) соответственно. Из сравнения кривых видно, что кривая 1 мажорирует кривую 2, причем величина превышения кривой 1 над кривой 2 определяется числом обусловленности $C(S)$ матрицы неособого преобразования подобия S . Действительно, явное решение системы (6.1) имеет с учетом (6.6) вид $x(k) = F^k x(0) = SJ^k(\alpha)S^{-1}x(0)$, переход в котором к нормам дает цепь соотношений $\|x(k)\| \leq \|S\| \cdot \|J^k(\alpha)\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \|x(0)\| = C(S) \cdot \|J^k(\alpha)\| \cdot \|x(0)\|$.

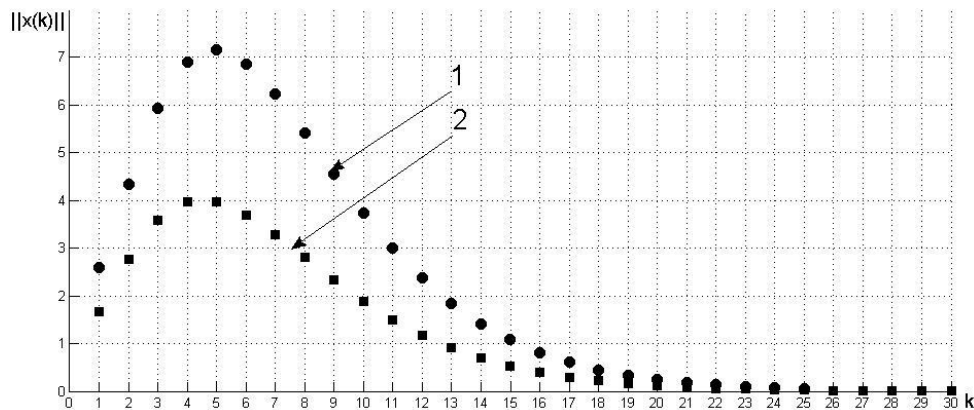


Рис. 6.4. Кривые процессов $\|x(k)\|$ (кривая 1) и $\|\tilde{x}(k)\|$ (кривая 2)

7. СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В настоящем разделе рассмотрены вопросы напрямую не относящиеся к проблеме исследования колебательности аperiodических систем, но они тематически хорошо с ней сопряжены.

7.1 Исследование аperiodических свойств колебательных систем, порождаемой базисом представления их матриц состояния

Проблема, вынесенная в заголовок данного параграфа, порождена общим духом парадоксальности, заложенным в содержании учебного пособия. Действительно, если авторам удалось обнаружить колебательность аperiodических систем, порождаемой двумя системными факторами: кратностью собственных чисел матриц состояния и структурой их собственных векторов, то встает естественный вопрос: нельзя ли обнаружить аperiodических свойств в процессах колебательных систем, то есть систем, матрица состояния которых обладает спектром комплексно-сопряженных собственных чисел.

Начнем решение поставленной задачи с рассмотрения простейшей колебательной системы размерности $n = 2$. Для этого случая система вида (3.1)

$$\dot{x}(t) = Fx(t); x(0) = x(t)|_{t=0} \quad (7.1)$$

будет обладать матрицей F , характеризующейся спектром собственных чисел $\sigma\{F\}$, удовлетворяющим условию

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0 : \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \alpha < 0\}. \quad (7.2)$$

Рассмотрим свободное движение колебательной системы (7.1) $x(t) = \exp(Ft)x(0)$, порождаемое единичной сферой вектора начальных состояний, по норме вектора состояния, тогда оказывается справедливой цепочка соотношений

$$\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\| \leq \|\exp(Ft)\| \cdot \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1} = \|\exp(Ft)\|. \quad (7.3)$$

Каноническая форма $\tilde{\Lambda}$ блочно-диагонального вида исходной матрицы F $\tilde{\Lambda} = \text{col}\{\alpha \ \beta; [-\beta \ \alpha]\}$ допускает аддитивное представление

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\Lambda}_\alpha + \tilde{\Lambda}_\beta. \quad (7.4)$$

В (7.4) матричные компоненты $\tilde{\Lambda}_\alpha = col\{\alpha \ 0; [0 \ \alpha]\}$ и $\tilde{\Lambda}_\beta = col\{0 \ \beta; [-\beta \ 0]\}$ обладают мультипликативной коммутативностью так, что выполняется матричное равенство

$$\tilde{\Lambda}_\alpha \cdot \tilde{\Lambda}_\beta = \tilde{\Lambda}_\beta \cdot \tilde{\Lambda}_\alpha. \quad (7.5)$$

Известно, что для матриц, записываемых в аддитивной форме, компоненты которой мультипликативно коммутативны, справедливо представление матричной экспоненты в следующей форме

$$\begin{aligned} \exp(\tilde{\Lambda}t) &= \exp\{(\tilde{\Lambda}_\alpha + \tilde{\Lambda}_\beta)t\} = \exp(\tilde{\Lambda}_\alpha t) \cdot \exp(\tilde{\Lambda}_\beta t) = \\ &= \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Если в выражении (7.6) перейти к нормам, то в силу того, что $\exp(\tilde{\Lambda}t)$ представима в виде произведения диагональной матрицы с равными компонентами на ортогональную матрицу, которая как сомножитель обладает свойством не менять нормы умножаемой матрицы справа или слева, то становится справедливой запись

$$\|\exp(\tilde{\Lambda}t)\| = \left\| \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \right\| = \|e^{\alpha t} \mathbf{I}\| = e^{\alpha t}. \quad (7.7)$$

Запишем условие подобия для матриц $\tilde{\Lambda}$ и матрицы F в форме $F = \tilde{M}\tilde{\Lambda}\tilde{M}^{-1}$, которое справедливо и для матричных функций от матриц так, что выполняется равенство

$$\exp(Ft) = \tilde{M} \exp(\tilde{\Lambda}t) \tilde{M}^{-1}. \quad (7.8)$$

Подставим соотношение (7.8) в (7.3), в результате чего с учетом (7.7) получим цепочку соотношений

$$\|x(t)\| \leq \|\exp(Ft)\| = \|\tilde{M} \exp(\tilde{\Lambda}t) \tilde{M}^{-1}\| \leq \|\tilde{M}\| \cdot \|\exp(\tilde{\Lambda}t)\| \cdot \|\tilde{M}^{-1}\| \leq C \{\tilde{M}\} e^{\alpha t}. \quad (7.9)$$

Нетрудно понять, что (7.9) является ключевым соотношением в проблеме обнаружения аperiodических свойств колебательных систем. Если число обусловленности матрицы \tilde{M} приведения подобия равно единице, то в процессе по норме в колебательной системе будут сходиться по экспоненте, определяемой вещественной частью её собственного числа, обнаруживая тем самым их аperiodические свойства. Если число обусловленности матрицы \tilde{M} больше единицы, то следует ожидать нарушение монотонного характера в сходимости процессов по норме в колебательной системе, проявляющееся в появлении локальных выбросов с интервалами Δt определяемыми величиной $\Delta t = 2\pi/\beta$.

Пример 7.1 (ПР7.1)

Для иллюстрации аperiodических свойств колебательных систем рассмотрим систему (7.1) с матрицей состояния F вида

$$F = \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} -3 & 6\pi \\ -6\pi & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{имеющей спектр собственных чисел}$$

$\sigma\{F\} = \{\lambda_{1,2} = -3 \pm j6\pi\}$. Параметры собственных чисел назначены так,

чтобы за время сходимости вещественной составляющей экспоненты укладывалось три периода колебательной составляющей. На рис. 7.1

приведены две кривые процессов $\|\exp(Ft)\| \cdot \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}$ и

$C\{\tilde{M}\}e^{\alpha t} \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}$, которые совпадают и которые своим видом

демонстрируют аperiodический (экспоненциальный) характер движения в колебательной системы. ■

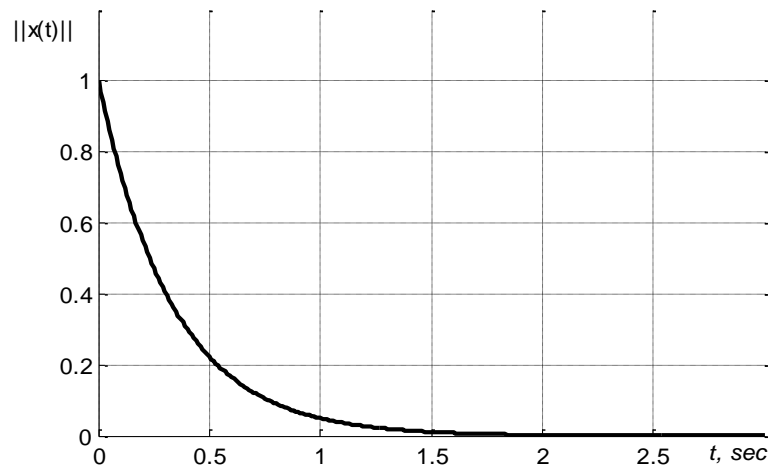


Рис. 7.1

Пример 7.2 (ПР7.2)

Для иллюстрации отклонения от «аperiodичности» процессов в колебательных системах рассмотрим систему (7.1) с матрицей состояния F с тем же алгебраическим спектром собственных чисел, заданной в сопровождающей свой характеристический полином форме

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(9 + (6\pi)^2\right) & -6 \end{bmatrix}. \quad \text{Известно, что матрица } \tilde{M}, \text{ приводящая}$$

матрицу F , заданную в сопровождающей форме, к блочно-диагональному виду, является обобщенной матрицей Вандермонда \tilde{M}_B , которая для рассматриваемого случая принимает вид

$\tilde{M} = \tilde{M}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$. На рис. 7.2 приведены две кривые процессов $\|\exp(Ft)\| \cdot \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}$ и $C\{\tilde{M}\}e^{\alpha t} \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}$. ■

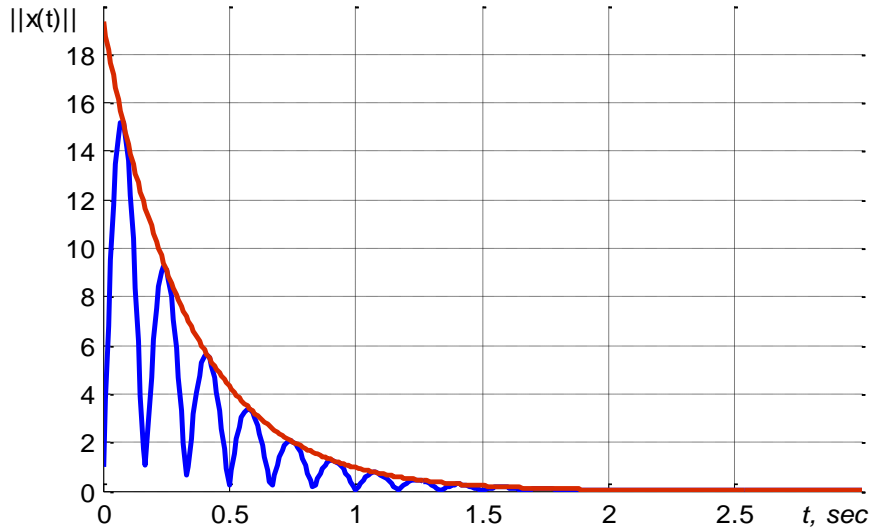


Рис. 7.2

Нетрудно видеть, что монотонная «апериодичность» (экспоненциальность) процессов по норме $\|\exp(Ft)\| \cdot \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}$ в колебательной системе, заданной в сопровождающей форме нарушена, при этом покрытие этих процессов $C\{\tilde{M}\}e^{\alpha t} \|x(0)\|_{\|x(0)\|=1}$ подтверждает что, число обусловленности $C\{\tilde{M}\}$ матрицы \tilde{M} является корректным синдромом как близости процессов по норме в колебательной системе к «апериодичности», так и удаленности этих процессов от монотонной «апериодичности» в соответствии с правилами «чем меньше число обусловленности $C\{\tilde{M}\}$, тем ближе» и «чем больше число обусловленности $C\{\tilde{M}\}$, тем удаленнее».

Перенесем теперь полученные результаты на случай произвольного, но четного значения размерности системы. Очевидно, для этого случая оказывается справедливой цепочка соотношений (7.9) с точностью до небольших модификаций так, что (7.9) принимает вид $\|x(t)\| \leq \|\exp(Ft)\| = \|\tilde{M} \exp(\tilde{\Lambda}t) \tilde{M}^{-1}\| \leq \|\tilde{M}\| \cdot \|\exp(\tilde{\Lambda}t)\| \cdot \|\tilde{M}^{-1}\| \leq C\{\tilde{M}\}e^{\alpha_M t}$, (7.10)

где: матрица F имеет алгебраический спектр собственных чисел $\sigma\{F\} = \{\lambda_{2i-1,2i} = \alpha_i \pm j\beta_i, \alpha_i < 0; i = \overline{1, n/2}\}$, матрица $\tilde{\Lambda}$ имеет представление

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \tilde{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1, n/2} \right\}, \quad \text{матричная экспонента } \exp(\tilde{\Lambda}t)$$

задается в форме

$$\exp(\tilde{\Lambda}t) = \text{diag} \left\{ \exp(\tilde{\Lambda}_i t) = e^{\alpha_i t} \begin{bmatrix} \cos(\beta_i t) & \sin(\beta_i t) \\ -\sin(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{bmatrix}; i = \overline{1, n/2} \right\},$$

$\alpha_M = \max_i \{\alpha_i : \alpha_i < 0; i = \overline{1, n/2}\}$, при этом матрица \tilde{M} ищется из условия $\tilde{M} = \arg\{\tilde{M}\tilde{\Lambda} = F\tilde{M}\}$.

Примечание 7.1 (П7.1)

Завершая исследование условий наличия апериодических свойств колебательных систем невольно задаешься вопросом «Куда уходит колебательность?» или более точно «В чем проявляется колебательность колебательных систем при внешней апериодичности?» или еще точнее «Как обнаружить колебательность при её внешней необнаруживаемости?». Полагаем, что как и в предыдущем разделе ответ на этот вопрос надо искать с использованием «полного» сингулярного разложения матричной экспоненты.

Оказывается, что, как и в случае параграфа 5.2, высказанные выше сомнения приводят к задаче исследования тонкой геометрической природы апериодичности колебательных систем, решение которой должно обнаружить её «скрытую колебательность». Для этого необходимо обратиться к элементам сингулярного разложения, несущих геометрическую «нагрузку». Как отмечено ранее, правый сингулярный базис V несет каузальную «нагрузку», а левый сингулярный базис U несет консекутивную «нагрузку». Очевидно, что пользовательский интерес в поставленной задаче связан с левым сингулярным базисом, потому что его компоненты задают положения осей эллипсоида, получаемого в силу ЛАС вида (2.3). Отметим также, что при любой размерности задачи вида (2.3) она может быть сведена к двумерной, потому что интерес представляет плоскость, натянутая на компоненты левого сингулярного базиса, задающих оси эллипсоида, соответствующих максимальному и минимальному сингулярным числам. Более того, так как оси эллипсоида связаны отношением ортогональности, то для исследования тонкой геометрической природы

скрытой колебательности «скалярно аperiodических» систем с комплексно–сопряженной структурой некрatных собственных чисел их матрицы состояния на основе динамики левого сингулярного базиса матричной экспоненты. Нетрудно видеть, что в решаемой задаче достаточно ограничиться исследованием динамики процесса изменения пространственного положения вектора $U_1(t)$ относительно его реализации $U_1(0)$, где $U_1(t)$ – элемент левого сингулярного базиса U , соответствующий максимальному сингулярному числу матричной экспоненты. При чем в качестве количественной оценки пространственного положения вектора $U_1(t)$ можно взять $\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}$ – угол между векторами $U_1(t)$ и $U_1(0)$.

Визуализация динамики процесса изменения пространственного положения вектора $U_1(t)$ осуществляется путем графического представления двух функций времени с учетом того, что $U_1(0) = [1 \ 0]^T$:

$$\cos\{\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}\} = (U_1(t), U_1(0)) = U_{11}(t), \quad (7.11)$$

$$\sin\{\text{angl}\{U_1(t), U_1(0)\}\} = \sin\{\arccos(U_{11}(t))\} = U_{12}(t). \quad (7.12)$$

На рисунке 7.3 приведены кривые процессов (7.11) и (7.12) для первого компонента левого сингулярного базиса сингулярного разложения матричной экспоненты $\exp(Ft) = U(t)\Sigma(t)V^T(t)$ для матрицы F состояния системы из примера 7.1.

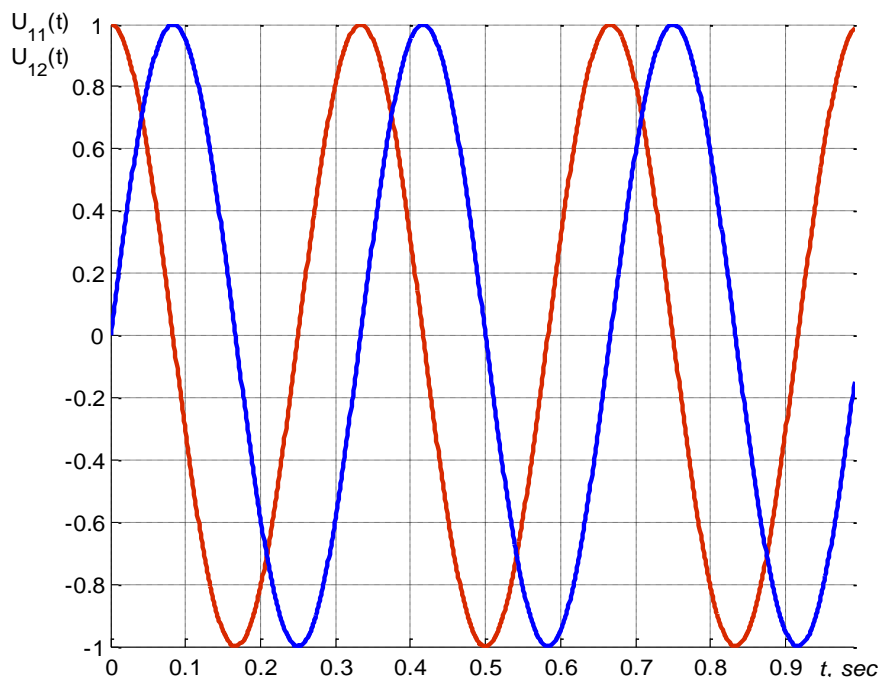


Рис.7.3

Приведенные кривые процессов (7.11) и (7.12) хорошо обнаруживают «не обнаруживаемую колебательность». Более того, обнаруживается, что элементы левого сингулярного базиса совершают вращательное движение с круговой скоростью $\omega = 6\pi$. ■

7.2 Исследование процессов по норме свободного движения систем с кратными комплексно-сопряженными собственными числами

Как и ранее ставится задача исследования свободного движения устойчивой линейной непрерывной многомерной динамической системы по норме вектора состояния с целью изучения влияния на это поведение кратности собственных чисел ее матрицы состояния и значения их модуля. В данном параграфе поставленная задача решается для случая комплексно–сопряженных кратных собственных чисел. Более того, предполагается, что кратность собственного числа равна размерности вектора состояния. Обнаруживается, что величина выброса растет с уменьшением модуля вещественной части собственных чисел, с увеличением их кратности и модуля мнимой части.

Решение поставленной задачи начнем с рассмотрения линейной гурвицевой непрерывной многомерной динамической системы вида (4.1), задаваемой в векторно – матричной форме

$$\dot{x}(t) = Fx(t); x(0) = x(t)|_{t=0} \quad (7.13)$$

где векторно–матричные компоненты имеют тот же смысл, что и в (4.1). Матрица системы F , заданная в произвольном базисе, такова, что ее алгебраический спектр $\sigma\{F\}$ собственных чисел удовлетворяет условию

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_{2i-1;2i} = \arg[\det(\lambda I - F) = 0]: \lambda_{2i-1;2i} = \alpha \pm j\beta; i = \overline{1, n/2}\}. \quad (7.14)$$

Из (7.14) следует, что матрица F имеет единственную пару комплексно–сопряженных собственных чисел кратности $\mu = n/2$, где $n = \dim(x)$. Дополним (7.14) условием, накладываемым на геометрический спектр собственных подпространств в виде значения дефекта характеристической матрицы матрицы F , записываемым в форме $\text{def}(\lambda I - F) = 2$. Тогда каноническая форма матрицы, построенная на спектре $\sigma\{F\}$ собственных чисел матрицы F будет представлять собой $(n \times n)$ –«квазижорданову» клетку $\tilde{J}(\alpha, \beta)$. При

конструировании «квазитордановой» клетки $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ потребуем выполнения условия

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \{\tilde{J}(\alpha, \beta)\} = J(\alpha). \quad (7.15)$$

Для конструирования «квазитордановой» клетки $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ воспользуемся структурным представлением системы

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J(\alpha)\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \quad (7.16)$$

которое приведено на рисунке 7.4.

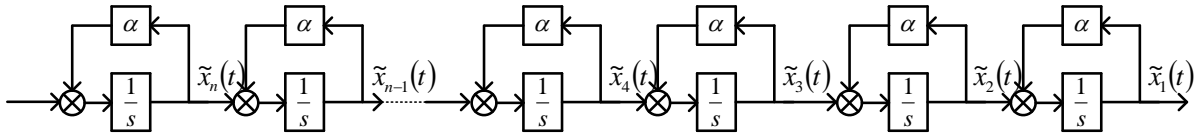


Рис. 7.4

Нетрудно видеть, что условиям (7.14) и (7.15) будет удовлетворять система

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{J}(\alpha, \beta)\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \quad (7.17)$$

структурное представление которой получается из структурной схемы рис. 7.4, в котором пары интеграторов, примыкающих друг к другу, охвачены обратной связью с коэффициентом передачи « $-\beta^2$ » так, что получается схема, приведенная на рис. 7.5

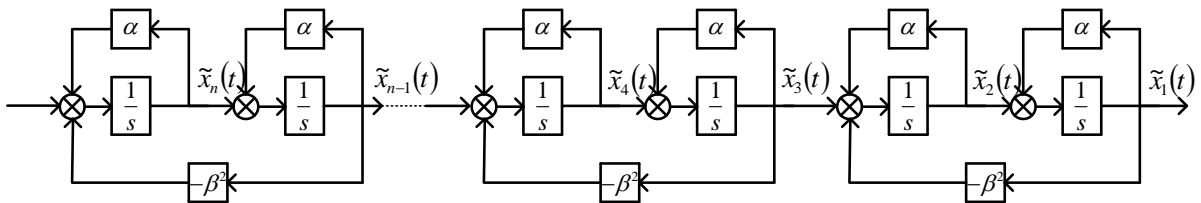


Рис. 7.5

Если учесть, что на непосредственном входе i -го интегратора наблюдается переменная $\dot{\tilde{x}}_i(t)$, то со структурной реализации рисунок 7.5 системы (7.17) может быть «списана» матрица $\tilde{J}(\alpha, \beta)$, которая получает представление

$$\tilde{J}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Нетрудно видеть, что «квазижордановая» матрица $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ вида (7.18) допускает аддитивную декомпозицию в виде

$$\tilde{J}(\alpha, \beta) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha I + \tilde{J}(0, \beta); \quad (7.19)$$

Поставим задачу исследования свободного движения системы (7.17) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (7.17) $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ с использованием аддитивного представления (7.19) и учетом того, что его компоненты являются мультипликативно коммутативными, приобретает вид

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0)) = \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\tilde{x}(0) = e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\tilde{x}(0) \quad (7.20)$$

Скаляризацию векторного процесса (7.20) осуществим на основе использования согласованных векторных и матричных норм, в результате чего получим цепочку соотношений

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\tilde{x}(0)\| = e^{\alpha t} \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\tilde{x}(0)\| \leq e^{\alpha t} \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|. \quad (7.21)$$

Заметим, что в отличие от случая вещественных кратных собственных чисел, рассмотренного в разделе 4, для которого матричная экспонента $\exp\{J(0)t\}$ имеет прозрачную алгоритмическую основу для формирования ее представления, матричная экспонента $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$ таким свойством не обладает. Поэтому в дальнейшем матричную экспоненту $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$ вычислим для достаточно репрезентативной системной ситуации, характеризующейся $n = 6, \mu = n/2 = 3$. В итоге

получим цепочку равенств на основе вычисления обратного преобразования Лапласа от резолвенты $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\} = L^{-1}\{(sI - \tilde{J}(0, \beta))^{-1}\} =$

$$= \text{row} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \cos(\beta t) \\ -\beta \sin(\beta t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ \cos(\beta t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{t \sin(\beta t)}{2\beta} \\ (\sin(\beta t) + (\beta t) \cos(\beta t)) \\ 2\beta \\ \cos(\beta t) \\ -\beta \sin(\beta t) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{(\sin(\beta t) - (\beta t) \cos(\beta t))}{2\beta^3} \\ \frac{t \sin(\beta t)}{2\beta} \\ \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ \cos(\beta t) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{c} \frac{t(\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)}{8\beta^3} \\ \frac{((1 + (\beta t)^2) \sin \beta t - \beta t \cos \beta t)}{8\beta^3} \\ \frac{t \sin \beta t}{2\beta} \\ \frac{(\sin \beta t + \beta t \cos \beta t)}{2\beta} \\ \cos(\beta t) \\ -\beta \sin(\beta t) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{((3 - (\beta t)^2) \sin \beta t - 3\beta t \cos \beta t)}{8\beta^5} \\ \frac{t(\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)}{8\beta^3} \\ \frac{(\sin(\beta t) - (\beta t) \cos(\beta t))}{2\beta^3} \\ \frac{t \sin \beta t}{2\beta} \\ \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ \cos(\beta t) \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (7.22)$$

Из (7.22) видно, что столбцовая норма $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_1$, определяемая последним столбцом матричной экспоненты $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$, ее строчная норма $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_\infty$, определяемая первой строкой экспоненты, и оценка спектральной нормы $\|\exp\{J(0)t\}\|_2$, задаваемая мажорирующим неравенством

$$\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_2 \leq \left\{ \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_1 \cdot \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_\infty \right\}^{1/2},$$

совпадают и вычисляются как норма вектора

$$v(\alpha, \beta, t) = \left[\begin{array}{l} \frac{(3 - (\beta t)^2) \sin \beta t - 3\beta t \cos \beta t}{8\beta^5}, \frac{t(\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)}{8\beta^3}, \\ \frac{\sin \beta t - \beta t \cos \beta t}{2\beta^3}, \frac{t \sin \beta t}{2\beta}, \frac{\sin \beta t}{\beta}, \cos \beta t \end{array} \right]^T. \quad (7.23)$$

Следует заметить, что требование (7.15) к «квазижордановой» форме $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ канонического вещественнозначного представления матрицы состояния с кратными комплексно-сопряженными собственными числами выполняется и для нормы матричной экспоненты в форме нормы вектора (7.23). Действительно, при $\beta \rightarrow 0$ с использованием «замечательного предела» $\lim_{\beta \rightarrow 0} (\sin \beta / \beta) = 1$ и правила Лопиталья

доказываются следующие предельные сходимости:

$$1. \lim_{\beta \rightarrow 0} (\cos(\beta t)) = 1;$$

$$2. \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\beta} \sin(\beta t) \right) = t \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = t;$$

$$3. \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\beta} t \sin(\beta t) \right) = \frac{t^2}{2} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = \frac{t^2}{2};$$

$$4. \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\beta^3} (\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t)) \right) = \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t \cos(\beta t) - t \cos(\beta t) + \beta t^2 \sin(\beta t)}{3\beta^2} =$$

$$= \frac{t^3}{6} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = \frac{t^3}{3!};$$

$$5. \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{t}{8\beta^3} (\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t)) \right) = \frac{t}{8} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t \cos(\beta t) - t \cos(\beta t) + \beta t^2 \sin(\beta t)}{3\beta^2} =$$

$$= \frac{t^4}{24} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = \frac{t^4}{4!};$$

$$6. \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{t}{8\beta^5} ((3 - \beta^2 t^2) \sin(\beta t) - 3\beta t \cos(\beta t)) \right) = \frac{t^2}{40} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta \sin(\beta t) - \beta^2 t \cos(\beta t)}{\beta^4} =$$

$$= \frac{t^2}{160} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t) + \beta^2 t^2 \sin(\beta t)}{\beta^3} = \frac{t^4}{480} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{3 \sin(\beta t) + \beta t \cos(\beta t)}{\beta} = \frac{t^5}{5!}.$$

Таким образом, оказываются справедливыми предельные переходы

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\| \exp(\tilde{J}(0, \beta)) t \right\|_p = \left\| \exp(J(0) t) \right\|_p, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\| \exp(\tilde{J}(\alpha, \beta)) t \right\|_p = \left\| \exp(J(\alpha) t) \right\|_p.$$

В разделе 4 показано, что для случая вещественных кратных собственных чисел матрицы $J(\alpha)$ гурвицевой системы такой, что $\lambda = \alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$ кратности μ , в сходящихся траекториях свободного движения по норме вектора состояния обнаруживаются выбросы, величина которых тем больше, чем больше кратность μ и меньше модуль $|\alpha| < 1$. Ниже ставятся и решаются две задачи. Первая задача состоит в оценке влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ при сохранении условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$ на величину выбросов в траекториях системы (7.17) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$. Вторая – в оценке возможности появления выбросов в траекториях системы (7.17) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ при условии $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| \geq 1\}$ и влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ на величину этих выбросов.

Результаты решения первой задачи в форме $\|\tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1}$, вычисленной в силу соотношения (7.21), на примере системной ситуации, характеризующейся $n = 6$, $\mu = n/2 = 3$, $\lambda = \alpha \pm j\beta$: $\alpha = -0.2$ и β - var, сведены в таблицу 7.1.

Таблица 7.1.

	$\lambda = \alpha \pm j\beta; n = 6; \mu = 3$						
α	$\alpha = -0.2$						
β	0.01	0.1	0.25	0.5	1	1.25	1.375
$\max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ _{\ \tilde{x}(0)\ =1}$	150	110	42	10.6	3.9	9.2	17.8
$t_M = \arg \max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ $	20	17	10.5	7	7.5	9.2	9.25
β	1.5	1.75	2	3	3.5	5	10
$\max_t \ x(t, x(0))\ _{\ x(0)\ =1}$	30	86	220	3700	11000	$13 \cdot 10^4$	$17 \cdot 10^6$
$t_M = \arg \max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ $	9.3	9.35	9.4	9.56	9.6	9.72	9.93

Вторую задачу, состоящую в оценке возможности появления выбросов в траекториях системы (7.17) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ при условии $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| > 1\}$ и влияния значения β

мнимой части на величину выбросов, начнем с графической иллюстрации известных рекомендаций по секторному ограничению локализации комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы состояния ячейки системы (7.17), представленной на рис.7.5, в виде двух последовательно соединенных интеграторов, охваченной отрицательной обратной связью с коэффициентом « $-\beta^2$ », гарантирующей отсутствие перерегулирования в переходных процессах. Эта иллюстрация приведена на рисунке 7.7.

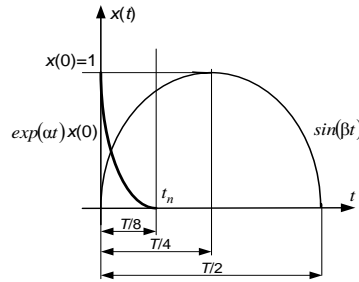


Рис. 7.7. Графическая иллюстрация свободных движений, порождаемых вещественным α и мнимым β компонентами собственного числа

$$\lambda = \alpha \pm j\beta$$

Свяжем траектории, порождаемые вещественной частью α и мнимой частью β соотношением $t_n = \gamma T/2 = \gamma \pi/\beta = 3/\alpha$. Откуда получаем, что при $\beta \leq \gamma(\pi/3)\alpha$ будут отсутствовать перерегулирования, если γ составит величину, удовлетворяющую условию $\gamma < 0.25$, в противном случае перерегулирование, а, следовательно, и выброс в кривой процессов по норме вектора свободного движения будет иметь место. Выделенная i -я ($i = \overline{1, n/2}$) двумерная ячейка задается моделью

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(t) &= [\dot{\tilde{x}}_{2i-1}(t), \dot{\tilde{x}}_{2i}(t)]^T = \text{col}\{[\alpha, 1], [-\beta^2, \alpha]\}[\tilde{x}_{2i-1}(t), \tilde{x}_{2i}(t)]^T, \\ \tilde{x}_i(0) &= [\tilde{x}_{2i-1}(0), \tilde{x}_{2i}(0)]^T. \end{aligned}$$

Движение в ячейке описывается выражением $\tilde{x}_i(t) = \exp(\alpha t) \text{col}\{[\cos(\beta t), (1/\beta)\sin(\beta t)], [(-\beta)\sin(\beta t), \cos(\beta t)]\} \tilde{x}_i(0)$, для которого по норме $\|\tilde{x}_i(t)\|$ при $\|\tilde{x}_i(0)\|=1$ оказывается справедливым покрытие $\text{roof}\{\|\tilde{x}_i(t)\|\} = \exp(\alpha t) \|\text{col}\{[1, (1/\beta)], [(-\beta), 1]\}\|$.

Одновременно при $\beta > |\gamma(\pi/3)\alpha|$ оказывается справедливым непрерывное мажорирующее покрытие процессов, задаваемых нормой вектора (7.23), использующего как и выше замены $\cos(\beta t)$ на 1, $\sin(\beta t)$ на 1 так, что это покрытие может быть задано в виде нормы вектора

$$\hat{v}(\alpha, \beta, t) = \left[\left(\frac{(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t}{8\beta^5} \right), \left(\frac{t(1 - \beta t)}{8\beta^3} \right), \left(\frac{1 - \beta t}{2\beta^3} \right), \left(\frac{t}{2\beta} \right), \left(\frac{1}{\beta} \right), 1 \right]^T.$$

Исследования нормы вектора $\hat{v}(\alpha, \beta, t)$ как функции времени обнаруживают доминирование в ее значении первого члена этого вектора. Это позволяет построить аналитическое представление покрытия (roof) процесса $\| \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\} \|$ в форме эвклидовой нормы вектора $\tilde{v}(\alpha, \beta, t) = \left[\left((3 - (\beta t)^2) - 3\beta t \right) / (8\beta^5), 0, 0, 0, 0, 0 \right]$, которое принимает вид $roof \left\{ \| \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\} \| \right\} = \left\{ \left[\left((3 - (\beta t)^2) - 3\beta t \right) / (8\beta^5) \right]^2 \right\}^{1/2}$. Последнее

выражение делает справедливым представление покрытия процесса $\| \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\} \|$ в форме

$$roof \left\{ \| \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\} \| \right\} = e^{\alpha t} \left\{ \left[\left((3 - (\beta t)^2) - 3\beta t \right) / (8\beta^5) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (7.24)$$

Форма (7.24) не содержит разрывно дифференцируемых функций типа модульных в случае использования абсолютной векторной нормы, что позволяет применять ее для исследования на экстремумы нормы матричной экспоненты $\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\} = e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$. Действительно, вычисление $t_M = \arg \max_t \left\{ \| \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\} \| \right\}$ из условия

$\frac{d}{dt} \left\{ roof \left\{ \| \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\} \| \right\} \right\} = 0$ порождает алгебраическое уравнение для

вычисления t_M

$$t_M^4 + \frac{6\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} t_M^3 + \frac{3\alpha + 9\beta}{\alpha\beta^2} t_M^2 + \frac{3\beta - 18\alpha}{\alpha\beta^3} t_M + \frac{9(\alpha - \beta)}{\alpha\beta^4} = 0. \quad (7.25)$$

Результаты вычислений t_M с помощью (7.25) приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.2.

	β				
α	2	3	5	10	20
-0.2	9.4	9.56	9.72	9.86	9.93
-2		0.913	0.88	0.9	0.938
-8				0.236	0.22
	t_M				

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ как функции собственного кратного комплексно-сопряженного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ проводилось на примере системы (7.17), характеризующейся размерностью $n=6$ и кратностью $\lambda = \alpha \pm j\beta$ равной $\mu = n/2=3$. Визуализация результатов исследования осуществлено для трех системных ситуаций .

Первая системная ситуация порождена необходимостью оценки влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ при сохранении условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$ на величину выбросов в траекториях системы (7.17) по норме вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))$. Результаты визуализации этой ситуации для

$\alpha = -0.2$ при $\beta = 0.01$ (рис.а), $\beta = 1$ (рис.б), $\beta = 2$ (рис.в), $\beta = 5$ (рис.г) приведены на рис.7.7. Приведенные кривые полностью соответствуют данным таблицы 7.1 и характеризуются резким ростом величины выбросов с ростом значения мнимой части β в области $\beta > 1$.

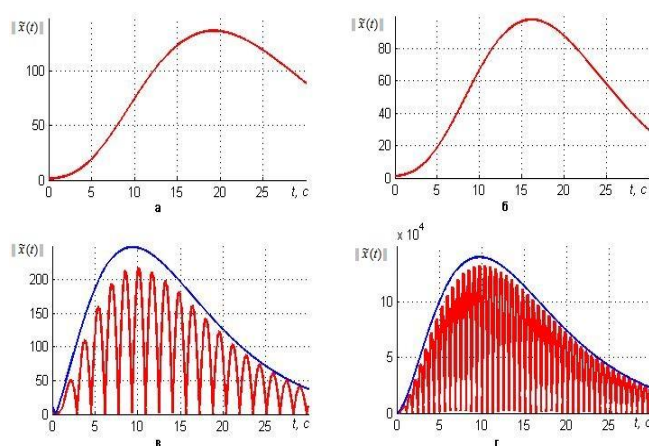


Рис.7.7.Кривые $\|\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1}$ и их покрытий при

$$\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\} \text{ и } \beta = \text{var}$$

Вторая системная ситуация порождена необходимостью оценки возможности появления выбросов в траекториях системы (7.17) по норме вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))$ при условии $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| \geq 1\}$ и влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ на величину и характер этих выбросов. Исследование этой системной ситуации авторы сочли целесообразным начать с рассмотрения тех же проблем для i -й ($i = \overline{1, n/2}$) двумерной ячейки с вектором состояния $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = [\tilde{x}_{2i-1}(t), \tilde{x}_{2i}(t)]^T$. Результаты

визуализации этой ситуации для $\alpha = -8$ при $\beta = 1$ (рис.а), $\beta = 5$ (рис.б), $\beta = 20$ (рис.в), $\beta = 50$ (рис.г) приведены на рис.7.8.

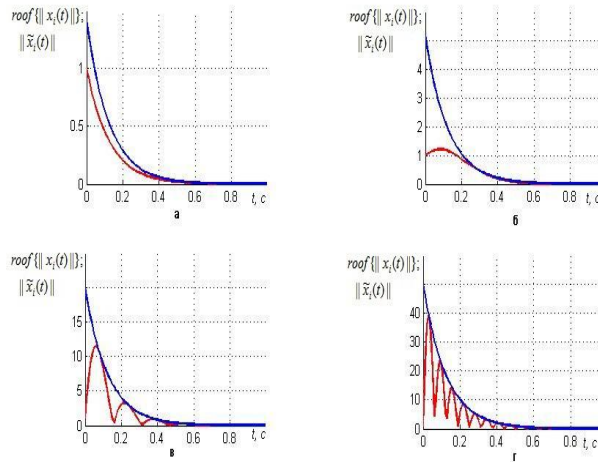


Рис.7.8.Кривые $\|\tilde{x}_i(t, \tilde{x}_i(0))\|_{\|\tilde{x}_i(0)\|=1}$ и их покрытий при $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| > 1\}, \beta = \text{var}$

Слабая демпфированность комплексно-сопряженных собственных чисел проявляется выбросами в траекториях свободного движения по норме вектора состояния уже на примере «двумерной ячейки». Следует ожидать, что в случае кратных комплексно-сопряженных собственных чисел этот эффект многократно усилится, не смотря на выполнение условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| > 1\}$. Результаты визуализации этой ситуации для $\alpha = -8$ при $\beta = 1$ (рис.а), $\beta = 3$ (рис.б), $\beta = 20$ (рис.в), $\beta = 50$ (рис.г) приведены на рис.7.9.

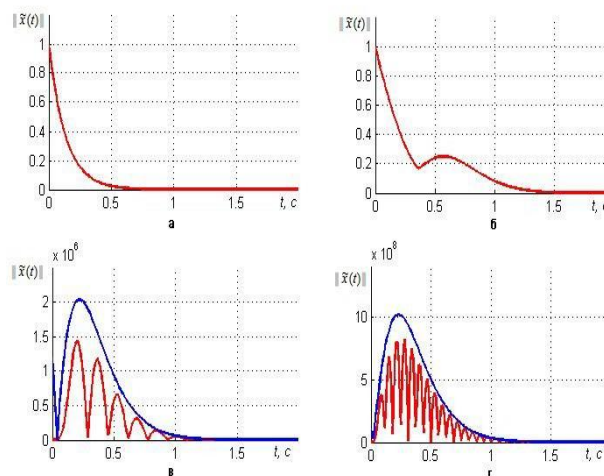


Рис.7.9.Кривые $\|\tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1}$ и их покрытия при $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \ \& \ |\alpha| > 1\}$ и $\beta = \text{var}$

Приведенные кривые при сходимости их к нулю с течением времени обнаруживают наличие заметных выбросов, величина которых растет по мере роста значения мнимой части β .

7.3 Оценка степени близости собственных чисел матрицы состояния апериодической системы к кратной структуре, гарантирующей требуемые величины выбросов в траекториях ее свободного движения

В разделе 4 и параграфе 7.2 показано, что возможная величина выброса в траекториях свободного движения устойчивой непрерывной системы по норме вектора состояния при кратных вещественных и комплексно–сопряженных собственных числах растет с уменьшением модуля собственных чисел и с увеличением их кратности столь стремительно, что это обстоятельство может породить ситуацию, требующую особого внимания разработчика. С целью минимизации величины выброса предлагается модифицировать кратную структуру собственных чисел, преобразовав ее в простую. Модификация структуры собственных чисел осуществляется на примере апериодической системы с целью преобразования ее в простую так, что модифицированная структура оказывается состоящей из исходного собственного числа и чисел, сдвинутых по вещественной оси комплексной плоскости влево на фиксированную величину относительно соседнего, причем каждое из них имеет единичную кратность.

В общей системной постановке решаемая задача является частным случаем достижения в каком-то смысле наилучшего размещения собственных чисел. Эта задача разрабатывается специалистами по теории управления вот уже более тридцати лет и имеет достаточно обширную библиографию. Отличительной особенностью решаемой авторами задачи является то, что предлагаемая ими модификация кратного размещения собственных чисел позволяет сформировать оценку степени близости простой структуры собственных чисел к кратной. Более того, она может быть задана в относительной форме, при которой гарантируется снижение указанных выше выбросов траектории свободного движения, а потому может рассматриваться как дополнительный функционал качества при синтезе апериодических систем.

Задача решается в два этапа. На первом этапе используется представление матрицы состояния системы в «квазижордановой» форме, которая совпадает с жордановой по построению, но имеет на главной диагонали собственные числа, отстоящие друг от друга на фиксированную величину. Эта величина в относительном представлении используется авторами в качестве оценки степени близости простой структуры собственных чисел к кратной. На втором этапе исследования переносятся на систему с матрицей состояния произвольной формы в классе подобных «квазижордановой» представлений.

Алгоритмически задача модификации структуры собственных чисел с целью преобразования ее в простую может быть решена как задача синтеза модального управления, базирующегося на матричном формализме уравнения Сильвестра.

Рассматривается линейная гурвицева непрерывная многомерная динамическая система вида (7.13), задаваемая в векторно-матричной форме

$$\dot{x}(t) = Fx(t), x(t)|_{t=0} = x(0) \quad (7.26)$$

где векторно-матричные компоненты имеют тот же смысл, что в (4.1) и (7.13). Матрица системы F , заданная в произвольном базисе, обладает $\sigma\{F\}$ спектром собственных чисел $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, имеющим вид

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \lambda + \Delta\lambda \cdot (i - 1) = \lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}; \delta = ?\}; \delta = \frac{|\Delta\lambda|}{|\lambda|} \quad (7.27)$$

В представлении (7.27) фактически заложена содержательная часть постановки задачи, состоящей в оценке величины δ модификации кратной структуры собственных чисел в простую, осуществляемой в соответствии с правилом

$$\{\lambda_i = \lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\}. \quad (7.28)$$

Реализуя заявленную во введении двухэтапную процедуру решения задачи, перейдем от системы (7.26) с матрицей состояния F , заданной в произвольной форме к системе с матрицей состояния, заданной в «квазижордановой» форме, имеющей вид

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\}\tilde{x}(t); \tilde{x}(0). \quad (7.29)$$

В (7.29) матрица состояния, построенная на спектре $\sigma\{F\}$ (7.27) собственных чисел матрицы F будет представлять собой $(n \times n)$ -«квазижорданову» клетку $\tilde{J}(\alpha)$, имеющую представление

$$\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda \cdot (1 + \delta) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(1 + \delta \cdot (n - 1)) \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Заметим, что векторные и матричные компоненты системы (7.26) и системы (7.29) связаны векторно–матричными соотношениями подобия в форме

$$x = S\tilde{x}, \quad S\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\} = FS, \quad (7.31)$$

где S – $(n \times n)$ –матрица неособого преобразования подобия.

Теперь поставим задачу исследования свободного движения системы (7.29) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (7.29) $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0)) = \exp\{\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\}t\}\tilde{x}(0). \quad (7.32)$$

В силу структуры (7.30) матрицы $\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\}$ её можно представить в форме

$$\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\} = \Lambda + \tilde{J}\{\lambda\delta \cdot (i - 1)\}; \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i = \lambda; i = \overline{1, n}\}. \quad (7.33)$$

Тогда для матричной экспоненты в (7.32) в силу мультипликативной коммутативности аддитивных компонентов становится справедливой запись

$$\exp(\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1))\}t) = \exp(\Lambda t) \exp(\tilde{J}\{\lambda\delta \cdot (i - 1)\}t) = e^{\lambda t} \exp(\tilde{J}\{\lambda\delta \cdot (i - 1)\}t). \quad (7.34)$$

Скаляризацию векторного процесса (7.32) осуществим на основе использования согласованных векторных и матричных норм с учетом представления (7.34), в результате чего получим цепочку соотношений

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{\tilde{J}\{\lambda(1 + \delta \cdot (i - 1)); i = \overline{1, n}\}t\}\tilde{x}(0)\| \leq e^{\lambda t} \|\exp\{\tilde{J}\{\lambda\delta \cdot (i - 1); i = \overline{1, n}\}t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|. \quad (7.35)$$

В (7.35) для получения аналитического представления компонента $\exp\{\tilde{J}\{\lambda\delta \cdot (i - 1); i = \overline{1, n}\}t\}$ построим базу индукции для нарастающей размерности $n = \dim(x)$ вектора состояния системы (7.29) по схеме:

$$\tilde{J}(*, n) \Rightarrow (sI - \tilde{J}(*, n)) \Rightarrow (sI - \tilde{J}(*, n))^{-1} \Rightarrow \exp\{\tilde{J}(*, n)t\} = L^{-1}\{(sI - \tilde{J}(*, n))^{-1}\}, \quad (7.36)$$

где s – переменная преобразования Лапласа, $\tilde{J}(*, n) = \tilde{J}\{\lambda\delta \cdot (i - 1); i = \overline{1, n}\}$, $L^{-1}\{\circ(s)\}$ – обратное преобразование Лапласа от функции $\circ(s)$. Следуя схеме (7.36), получим итоговые результаты как функции размерности n в виде:

$$1. \text{ при } n = 2: \exp(\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,2}\}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta} - 1) \\ 0 & e^{\lambda\delta} \end{bmatrix}; \quad (7.37)$$

2. при $n = 3$:

$$\exp(\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,3}\}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta} - 1) & \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta} - 1)\right)^2 \\ 0 & e^{\lambda\delta} & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{2\lambda\delta} - e^{\lambda\delta}) \\ 0 & 0 & e^{2\lambda\delta} \end{bmatrix}; \quad (7.38)$$

3. при $n = 4$

$$\exp(\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,4}\}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{\lambda\delta} - 1) & \frac{1}{2!(\lambda\delta)^2}(e^{\lambda\delta} - 1)^2 & \frac{1}{3!(\lambda\delta)^3}(e^{\lambda\delta} - 1)^3 \\ 0 & e^{\lambda\delta} & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{2\lambda\delta} - e^{\lambda\delta}) & \frac{1}{2\lambda\delta}(e^{3\lambda\delta} - e^{\lambda\delta}) \\ 0 & 0 & e^{2\lambda\delta} & \frac{1}{\lambda\delta}(e^{3\lambda\delta} - e^{2\lambda\delta}) \\ 0 & 0 & 0 & e^{3\lambda\delta} \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

Выражения (7.37), (7.38), (7.39) образуют базу индукции, которая хорошо просматривается для строчной (бесконечной) нормы $\|\exp\{\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,n}\}t\}\|_{\infty}$, записываемой в форме суммы членов первой строки матричной экспоненты

$$\|\exp\{\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,n}\}t\}\|_{\infty} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{e^{\lambda\delta} - 1}{\lambda\delta} \right)^i. \quad (7.40)$$

В связи с обнаруженным свойством (7.40) бесконечной нормы матричной экспоненты $\|\exp\{\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,n}\}t\}\|_{\infty}$, состоящим в компактном аналитическом её представлении, все дальнейшие исследования поставленной задачи авторы строят на её использовании, а потому нижний индекс « ∞ » в обозначении нормы опускается. Нетрудно видеть, что представление (7.40) удовлетворяет предельному переходу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\exp\{\tilde{\mathcal{J}}\{\lambda\delta \cdot (i-1); i = \overline{1,n}\}t\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{e^{\lambda\delta} - 1}{\lambda\delta} \right)^i = \exp\left(\frac{e^{\lambda\delta} - 1}{\lambda\delta} \right). \quad (7.41)$$

Заметим, что если в (7.41) осуществить предельный переход по δ в форме $\delta \rightarrow 0$, что соответствует конвергенции простой и кратной структур матриц состояния систем (7.26) и (7.29), то для строчной нормы матричной экспоненты получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \exp \left\{ \tilde{J} \left\{ \lambda \delta \cdot (i-1); i = \overline{1, n} \right\} t \right\} \right\| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i = e^t. \quad (7.42)$$

Полученное соотношение как сомножитель в структуре нормы матричной экспоненты для случая кратных вещественных собственных чисел $\lambda_i : \lambda_i < 0 \ \& \ \left| \lambda_i = \lambda; i = \overline{1, n} \right| < 1$ порождает выброс в свободном движении системы (4.1).

Нетрудно видеть, что в качестве критерия наличия выброса в траекториях свободного движения системы по норме может быть принята величина $t_M \geq 0$, удовлетворяющая условию

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d \|\tilde{x}(t)\|}{dt} = 0 \right\}. \quad (7.43)$$

Если решение ищется в экспресс-постановке установления факта наличия выброса в траекториях свободного движения по норме в системе с простой структурой собственных чисел, характеризующиеся назначенной величиной δ степени её близости к кратной, то оно может быть построено на использовании мажорирующего покрытия процессов (7.35), формируемого с учетом представления (7.41) при условии $\|\tilde{x}(0)\| = 1$ в виде

$$\text{roof} \left\{ \|\tilde{x}(t)\| \right\} = \text{roof} \left\{ \exp \left\{ \tilde{J} \left(\lambda \cdot (1 + \delta \cdot (i-1)); i = \overline{1, n} \right) \right\} \right\} = e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta} - 1}{\lambda \delta} \right). \quad (7.44)$$

Задачу контроля выполнения условия (7.43) разобьем на две.

Первая задача имеет целью оценить условия, при которых в точке $t = 0$ скорость изменения покрытия оказывается нулевой, так что выполняется условие

$$\left. \frac{d}{dt} \left\{ e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta} - 1}{\lambda \delta} \right) \right\} \right|_{t=0} = 0. \quad (7.45)$$

Выполнение операции дифференцирования в (7.45) по времени приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta} - 1}{\lambda \delta} \right) \right\} = e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta} - 1}{\lambda \delta} \right) (\lambda + e^{\lambda \delta}). \quad (7.46)$$

При $t = 0$ и с учетом условия (7.46) получаем цепочку соотношений

$$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1. \quad (7.47)$$

Таким образом независимо от величины δ оценки степени близости простой структуры собственных чисел к кратной, осуществляемой по

схеме $\lambda_i = \lambda \cdot (1 + (i-1) \cdot \delta; i = \overline{1, n})$, нулевая скорость в точке $t = 0$ имеет место только при условии $\lambda = -1$. При $\lambda < 0 \ \& \ |\lambda| > 1$ эта скорость будет отрицательной, при $\lambda < 0 \ \& \ |\lambda| < 1$ эта скорость будет положительной, т.е. будет наблюдаться рост нормы вектора состояния системы с течением времени, сменяющийся со временем монотонным ее спаданием к нулю.

Вторая задача имеет целью вычисление момента $t_M > 0$, удовлетворяющего условию наличия экстремума в траектории по норме. Её экспресс-оценку можно сформировать на основе покрытия процессов (7.44), приводящему к соотношению

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d}{dt} \left\{ e^{\lambda t} \exp \left(\frac{e^{\lambda \delta} - 1}{\lambda \delta} \right) \right\} = 0 \right\}. \quad (7.48)$$

Если в (7.48) учесть (7.46), то получим цепочку соотношений

$$t_M = \arg(\lambda + e^{\lambda \delta} = 0) = \frac{1}{\lambda \delta} \ln(-\lambda). \quad (7.49)$$

Решение задачи точной фиксации момента $t_M > 0$ удовлетворяющего условию наличия экстремума по норме в траекториях свободного движения в системе с простой структурой собственных чисел, характеризующиеся назначенной величиной δ степени её близости к кратной, может быть построено на использовании точного представления процессов по норме $\|\tilde{x}(t)\|$, формируемого с учетом представления (7.40) при условии $\|\tilde{x}(0)\| = 1$ в виде

$$\|\tilde{x}(t)\| = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{e^{\lambda \delta} - 1}{\lambda \delta} \right)^i. \quad (7.50)$$

Значения величин t_M для двух версий собственного числа λ и трех реализаций размерности n системы в функции от величины δ – оценки степени близости простой структуры собственных чисел к кратной, вычисленные с использованием представлений (7.49) и (7.50), сведены в таблицу 7.3.

Таблица 7.3

Вычисление по формуле			(7.50)		(7.49)	
n	δ	λ	-0.2	-0.02	-0.2	-0.02
2	10^{-6}	t_M	4	49	$8 \cdot 10^6$	$1956 \cdot 10^5$
	0.1		3.78	47.67	80.47	1956
	1		2.55	33.67	8.05	195.6
	10		0.65	11.08	0.8	19.56
	100		0.08	1.76	0.08	1.96
	1000		0.008	0.196	0.008	0.196
5	0		18.83	198.98	$8 \cdot 10^6$	$1956 \cdot 10^5$
	0.1		15.6	167.22	80.47	1956
	1		7.45	79.41	8.05	195.6
	10		0.8	17.13	0.8	19.56
	100		0.08	1.96	0.08	1.96
	1000		0.008	0.196	0.008	0.196
10	0		43.79	448.98	$8 \cdot 10^6$	$1956 \cdot 10^5$
	0.1		30.66	319.89	80.47	1956
	1		7.98	113.94	8.05	195.6
	10		0.8	19.39	0.8	19.56
	100		0.08	1.96	0.08	1.96
	1000		0.008	0.196	0.008	0.196

Соотношения (7.49) и (7.50) являются решением первого этапа поставленной задачи, в которой используется представление матрицы состояния системы в «квазижордановой» форме. Они позволяют разработчику путем назначения величины δ добиваться требуемого значения величины выброса, наблюдаемого в точке $t = t_M$, на уровне, удовлетворяющем неравенству $\|\tilde{x}(t_M)\| \leq (1 + \Delta)\|\tilde{x}(0)\|$, где величина Δ задается априори. Значения нормы $\|\tilde{x}(t_M)\| = (1 + \Delta)\|\tilde{x}(0)\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1} = (1 + \Delta)$ для двух версий собственного числа λ и трех реализаций размерности n системы с оценкой Δ в функции от величины δ – оценки степени близости простой структуры собственных чисел к кратной, вычисленные с использованием представлений (7.44) и (7.50), сведены в таблицу 7.4.

Таблица 7.4

по формуле		(7.50)				(7.44)			
λ		-0.2		-0.02		-0.2		-0.02	
n	δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ	$\ \tilde{x}(t_M)\ $	Δ
2	10^{-6}	2.25	1.25	18.77	17.77	$4.91 \cdot 10^{1733059}$		$4.5 \cdot 10^{21280419}$	
	0.1	2.18	1.18	17.91	17.91	$2.41 \cdot 10^{10}$		$7.5 \cdot 10^{195}$	
	1	1.8	0.8	13	12	10.92	9.92	$3.81 \cdot 10^{19}$	
	10	1.2	0.2	4.37	3.37	1.27	0.27	90.81	89.81
	100	1.02	0.02	1.43	0.43	1.02	0.02	1.57	0.57
	1000	1.002	0.002	1.05	0.05	1.002	0.002	1.05	0.05
5	10^{-6}	151.55	150.55	$1.25 \cdot 10^6$		$4.91 \cdot 10^{1733059}$		$4.5 \cdot 10^{21280419}$	
	0.1	81.65	80.65	$0.617 \cdot 10^6$		$2.41 \cdot 10^{10}$		$7.5 \cdot 10^{195}$	
	1	7.24	7.24	$2.36 \cdot 10^4$		10.92	9.92	$3.81 \cdot 10^{19}$	
	10	1.27	0.27	42.04	41.04	1.27	0.27	90.81	89.81
	100	1.02	0.02	1.57	0.57	1.02	0.02	1.57	0.57
	1000	1.002	0.002	1.05	0.05	1.002	0.002	1.05	0.05
10	10^{-6}	$3.21 \cdot 10^5$		$2.63 \cdot 10^{14}$		$4.91 \cdot 10^{1733059}$		$4.5 \cdot 10^{21280419}$	
	0,1	$1.66 \cdot 10^4$		$1.10 \cdot 10^{13}$		$2.41 \cdot 10^{10}$		$7.5 \cdot 10^{195}$	
	1	10.83	9.83	$2.59 \cdot 10^8$		10.92	9.92	$3.81 \cdot 10^{19}$	
	10	1.27	0.27	88.24	87.24	1.27	0.27	90.81	89.81
	100	1.02	0.02	1.57	0.57	1.02	0.02	1.57	0.57
	1000	1.002	0.002	1.05	0.05	1.002	0.002	1.05	0.05

Из приведенных таблиц видно, что вычисления по формулам (7.44) и (7.49) с использованием покрытия процессов по норме с уменьшением порядка n заметно увеличивается достаточность полученных оценок, а с увеличением значения δ –оценки степени близости простой структуры собственных чисел к кратной уменьшается.

Решение задачи на втором этапе предпринятых исследований состоит в переносе полученных результатов на систему (7.26) с матрицей состояния системы F , заданной в произвольной форме в классе подобных «квазижордановой» представлений (7.31). Как и в разделе 4 следует ожидать, что значения $\|x(t)\|$ будут в $c\{S\}$ раз превышать значения $\|\tilde{x}(t)\| \forall t$, сохраняя ту же зависимость от величин

λ и δ , и порядка системы n , где $c\{S\} = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$ – число обусловленности матрицы S , удовлетворяющей (7.31).

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ как функции собственного числа λ , размерности системы n и величины δ – оценки степени близости простой структуры собственных чисел к кратной проводилось с целью графической визуализации результатов, приведенных в таблицах 7.3 и 7.4. Но в отличие от таблиц 7.3 и 7.4 в связи с обнаруженной достаточностью оценок характеристик по норме свободного движения системы (7.29), полученных с помощью соотношений (7.44) и (7.49), визуализируются только результаты, полученные в соответствии с соотношением (7.50). Более того, на формируемых кривых процессов по норме фиксировалась величина $\Delta = \left\{ \|\tilde{x}(t_M)\| - \|\tilde{x}(0)\| \right\}_{\|\tilde{x}(0)\|=1}$.

Моделирование процессов в форме $\|\tilde{x}(t)\|$ (7.50) проводилось для значений $\lambda = -0.2$ и $\lambda = -0.02$, $n = 2; 5$ и 10 и $\Delta = 9; 1; 0.5; 0.2; 0.1; 0.05$, результаты которого представлены на рисунках приводимых ниже. Выбор значений λ и n при моделировании сделан так, чтобы сохранить сравнимость результатов, полученных в данном параграфе, с результатами, приводимыми в разделе 4. Следует заметить, что кривая процессов по норме для случая $\lambda = -0.2$, $n = 2$ и $\Delta = 9$ отсутствует, потому что он в линейном масштабе не заметен на фоне первых двух

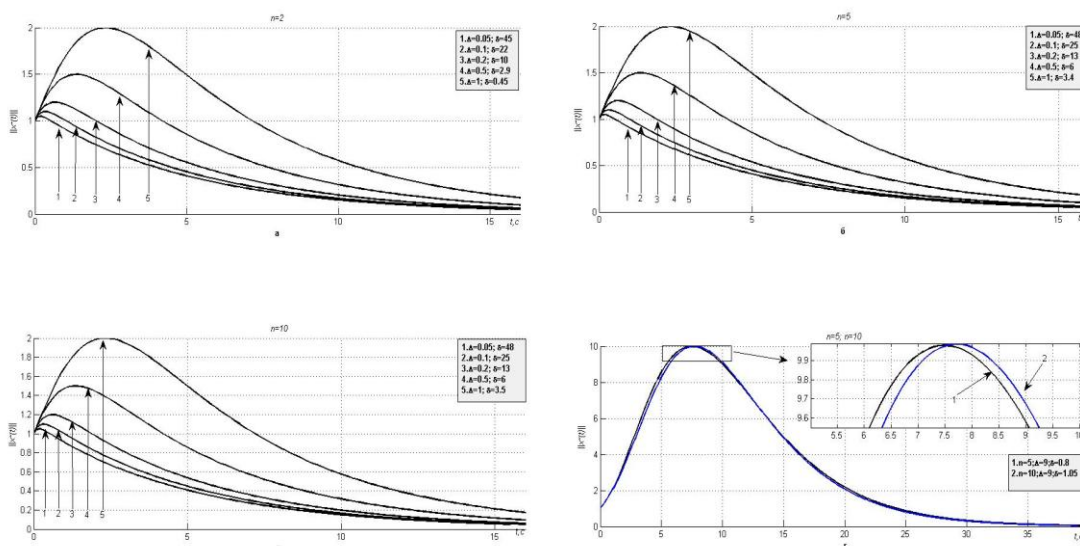


Рис. 7.10. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = -0.2$

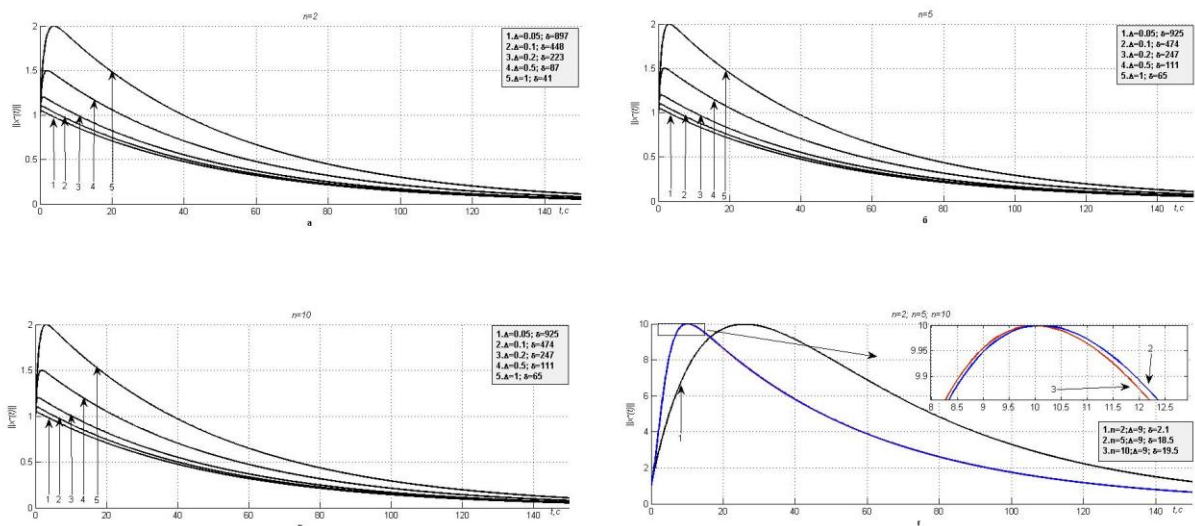


Рис. 7.11. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = -0.02$.

Приведенные кривые обнаруживают независимо от порядка системы при значениях Δ , приближающихся к нулю, доминирование первых двух собственных чисел матрицы (7.30) состояния системы (7.29), что оказывается справедливым и для системы (7.26) с точностью до мультипликативного члена $c\{S\} = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$

7.4 Кратные структуры в задачах аппроксимации динамических цепей, содержащих звенья чистого запаздывания

Звеном чистого запаздывания называется динамическое звено, характеризующееся тем, что его выходной сигнал $y(t)$ повторяет входной $g(t)$ с задержкой на величину τ так, что выполняется соотношение $y(t) = g(t - \tau)$. Звено чистого запаздывания (ЗЧЗ) как структурный элемент динамической системы характеризуется соответственно передаточной $W_{чз}(s)$ и переходной функциями $h_{чз}(t)$, имеющими вид

$$W_{чз}(s) = \exp(-\tau s), \quad h_{чз}(t) = 1(t - \tau).$$

Нетрудно видеть, что приведенные аналитические описания звена чистого запаздывания не представимы аппаратными средствами метода пространства состояния для непрерывных систем. В этой связи встает задача аппроксимации ЗЧЗ или шире динамических цепей, в состав которых оно входит, аппаратными средствами МПС.

Решение этой проблемы начнем с рассмотрения дискретной системы (рис. 7.12) в виде последовательной цепочки элементов

задержки числом равным ν так, что она при интервале дискретности Δt осуществляет задержку сигнала на величину

$$\tau = (\Delta t) \cdot \nu. \quad (7.51)$$

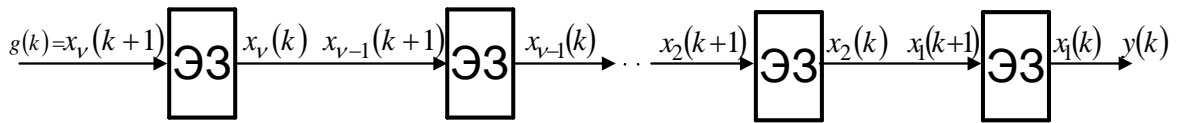


Рис. 7.12

Очевидно, дискретная система (рис. 7.12) описывается системой рекуррентных уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_\nu(k+1) &= g(k) \\ x_{\nu-1}(k+1) &= x_\nu(k) \\ \vdots \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned} \right\}. \quad (7.52)$$

Запишем систему (7.52) в эквивалентной форме

$$\left. \begin{aligned} x_\nu(k+1) - x_\nu(k) &= g(k) - x_\nu(k) \\ x_{\nu-1}(k+1) - x_{\nu-1}(k) &= x_\nu(k) - x_{\nu-1}(k) \\ \vdots \\ x_2(k+1) - x_2(k) &= x_3(k) - x_2(k) \\ x_1(k+1) - x_1(k) &= x_2(k) - x_1(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned} \right\}. \quad (7.53)$$

Продолжим преобразование исходной записи для чего левую и правую части уравнения (7.53) поделим на интервал дискретности Δt

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_\nu(k+1) - x_\nu(k)}{\Delta t} &= \frac{g(k)}{\Delta t} - \frac{x_\nu(k)}{\Delta t} \\ \frac{x_{\nu-1}(k+1) - x_{\nu-1}(k)}{\Delta t} &= \frac{x_\nu(k)}{\Delta t} - \frac{x_{\nu-1}(k)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{\Delta t} &= \frac{x_3(k)}{\Delta t} - \frac{x_2(k)}{\Delta t} \\ \frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{\Delta t} &= \frac{x_2(k)}{\Delta t} - \frac{x_1(k)}{\Delta t} \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned} \right\}. \quad (7.54)$$

Учтем, что дискретное время k , выраженное в числе интервалов дискретности длительностью Δt , связано с непрерывным временем t

соотношением $t = k \cdot (\Delta t)$, а $(k + 1)\Delta t = t + \Delta t$. Если теперь воспользоваться приближенным представлением производной

$$\dot{x}_j(t) = \frac{dx_j(t)}{dt} \cong \frac{x_j(t + \Delta t) - x_j(t)}{\Delta t}, \quad (7.55)$$

то система (7.54) получит представление

$$\left. \begin{aligned} (\Delta t)\dot{x}_v(t) + x_v(t) &= g(t) \\ (\Delta t)\dot{x}_{v-1}(t) + x_{v-1}(t) &= x_v(t) \\ \vdots & \\ (\Delta t)\dot{x}_2(t) + x_2(t) &= x_3(t) \\ (\Delta t)\dot{x}_1(t) + x_1(t) &= x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \right\}. \quad (7.56)$$

Если систему (7.56) записать в операторной форме, то получим

$$\left. \begin{aligned} ((\Delta t)p + 1)x_v(t) &= g(t) \\ ((\Delta t)p + 1)x_{v-1}(t) &= x_v(t) \\ \vdots & \\ ((\Delta t)p + 1)x_2(t) &= x_3(t) \\ ((\Delta t)p + 1)x_1(t) &= x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \right\}. \quad (7.57)$$

Система (7.57) позволяет записать для выходной переменной $y(t)$ звена задержки на величину $\tau = (\Delta t) \cdot \nu$

$$y(t) = \frac{1}{((\Delta t)p + 1)^\nu} g(t) \cong g(t - \tau). \quad (7.58)$$

Соотношение (7.58) является алгоритмической основой для решения задачи аппроксимации динамических цепей, содержащих звенья чистого запаздывания, биномиальными кратными структурами. Причем динамическое звено с передаточной функцией

$$W_{Aчз}(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^\nu} \quad (7.59)$$

будем именовать биномиальным аппроксимантом динамических последовательных цепей, содержащих звенья чистого запаздывания. Усилим аргументацию возможности использования (7.59) в поставленной задаче аппроксимации ЗЧЗ контролем предельных свойств аппроксиманта и самого ЗЧЗ. Предельные свойства аппроксиманта (7.59) $\lim_{s \rightarrow \infty} (1/(Ts + 1)^\nu) = 0$; $\lim_{s \rightarrow 0} (1/(Ts + 1)^\nu) = 1$ совпадают с предельными свойствами оригинала $W_{чз}(s) = e^{-\tau s}$. Это настраивает на

целесообразность использования аппроксиманта (7.59) и исследование его аппроксимирующих свойств. Результаты этих исследований на основе переходных функциях $h_{Aчз}(t)$ аппроксиманта (7.59) в виде значений задержки $\tau = \arg\{h_{Aчз}(t)=0.05\}$ и длительности переходного процесса $t_n = \arg\{h_{Aчз}(t)=0.95\}$, а также отношения t_n/τ , как функций $\tau = \tau(T, \nu)$ $t_n = t_n(T, \nu)$ постоянной времени T и порядка ν сведены в таблицу 7.5.

Таблица 7.5

ν	1	2	3	4	5	6	10	20	40
τ	0.0513 T	0.35 T	0.82 T	1.36 T	1.95 T	2.6 T	5.4 T	13.25 T	30.15 T
t_n	3 T	4.75 T	6.3 T	7.76 T	9.16 T	10.52 T	15.71 T	27.9 T	51 T
t_n/τ	58.48 T	13.57 T	7.68 T	5.7 T	4.7 T	4.04 T	2.91 T	2.1 T	1.69 T

На рис.7.13 приведены кривые откликов на единичное внешнее воздействие аппроксиманта (7.59), которые стали экспериментальной основой для получения данных таблицы 7.5 в силу правил $\tau = \arg\{h_{Aчз}(t)=0.05\}$ и $t_n = \arg\{h_{Aчз}(t)=0.95\}$.

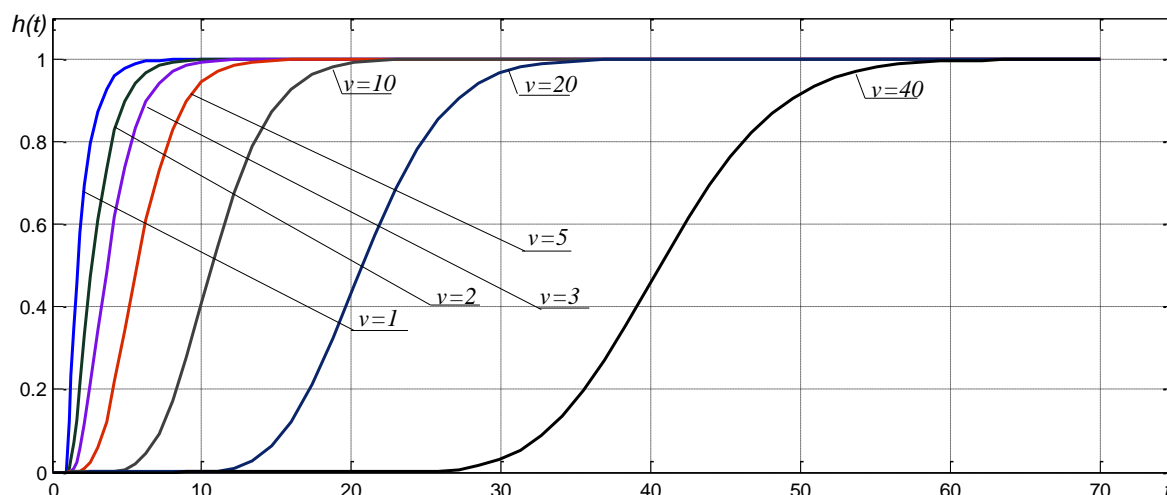


Рис.7.13 Кривые откликов аппроксиманта с БПФ $W_{Aчз}(s) = (Ts + 1)^{-\nu}$

Переформулируем задачу, поставив ее как проблему аппроксимации элементов функционального пространства. Такая постановка задачи предполагает рассмотрение отклика динамической цепи (ДЦ), составленной из последовательного соединения ЗЧЗ и апериодического звена первого порядка с постоянной времени T_a на единичный скачек. На базе таких откликов сконструируем функциональное пространство (ФП) $L^P(T_{fn})$, где T_{fn} – интервал времени, на котором формируется ФП, задаваемый в форме

$T_{\phi n} = \{t : 0 \leq t \leq \tau + 5T_a\}$; p – индекс нормы $\|\varphi(t)\|_p$ элемента $\varphi(t)$ функционального пространства $L^p(T_{\phi n})$, удовлетворяющий условию

$$p = \arg \left\{ \|\varphi(t)\|_p = \left(\int_0^{T_{\phi}} (\|\varphi(t)\|)^p dt \right)^{1/p} \right\} \quad p = 1, 2, \infty. \text{ Норма } \|\varphi(t)\|_p \text{ с индексом}$$

$p = \infty$ в силу предельного перехода $p \rightarrow \infty$ получает представление $\|\varphi(t)\|_{\infty} = \max_{t \in T_{\phi n}} |\varphi(t)|$.

Тогда задача будет решена с помощью аппроксиманта, сформированного в виде последовательного соединения аппроксиманта с передаточной функцией (7.59) и аperiodического звена первого порядка с постоянной времени T_a . Параметры аппроксиманта $\{\nu, T\}$ определяются в результате процедуры минимизации нормы $\|e(t)\|_{\infty}$ невязки откликов на единичное ступенчатое воздействие $g(t) = 1(t)$ динамической цепи $h_{\partial y}(t)$ и аппроксиманта $\hat{h}(t)$, что представимо в форме

$$\{\nu, T\} = \arg \min_{\nu, T} \left\{ \|e(t)\|_{\infty} = \|h_{\partial y}(t) - \hat{h}(t)\|_{\infty} \right\}, \quad (7.60)$$

$$h_{\partial y}(t) = h\{t, \Phi_{\partial y}(s) = e^{-\tau s} (T_a s + 1)^{-1}\}, \hat{h}(t) = h\{t, \Phi_A(s) = (Ts + 1)^{-\nu} (T_a s + 1)^{-1}\}.$$

В таблице 7.6 приведены результаты оценки параметров $\{\nu, T\}$ аппроксиманта для случая оригинала с передаточной функцией $\Phi_{\partial y}(s) = e^{-s} (s + 1)^{-1}$. Нетрудно видеть, что приведенные результаты, полученные для значений $T_a = 1c$ и $\tau = 1c$, могут быть пересчитаны с использованием теоремы об изменении масштаба для любых сочетаний значений T и τ

Таблица 7.6

1	Параметры БПФ ДЗ $(Ts + 1)^{-\nu}$							
2	ν	2	3	4	5	6	7	8
3	$T(c)$	0.65	0.4	0.29	0.23	0.19	0.16	0.14
4	$\ e(t)\ = \min_{T, \nu} \ h_{\partial y}(t) - \hat{h}(t)\ _{p=\infty}$	0.15	0.13	0.113	0.105	0.095	0.09	0.085
1								
2	9	10	12	15	18	22	26	27
3	0.12	0.11	0.091	0.072	0.059	0.048	0.0405	0.039
4	0.082	0.078	0.07	0.064	0.062	0.056	0.0515	0.05

На рис. 7.14 приведены кривые откликов $h_{\text{отц}}(t)$ и $\hat{h}(t)$, а также кривая их невязки $e(t) = h_{\text{отц}}(t) - \hat{h}(t)$, характеризующаяся значением нормы $\|e(t)\|_{\infty} = 0,05$, которое достигается в силу таблицы 7.6 при параметрах аппроксиманта $\nu=27$ и $T = 0.039\text{с}$.

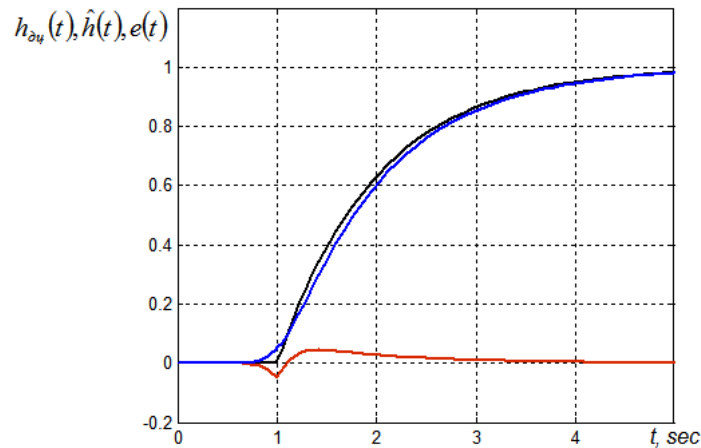


Рис.7.14

Рис. 7.15 визуализирует информацию, содержащуюся в таблице 7.6.

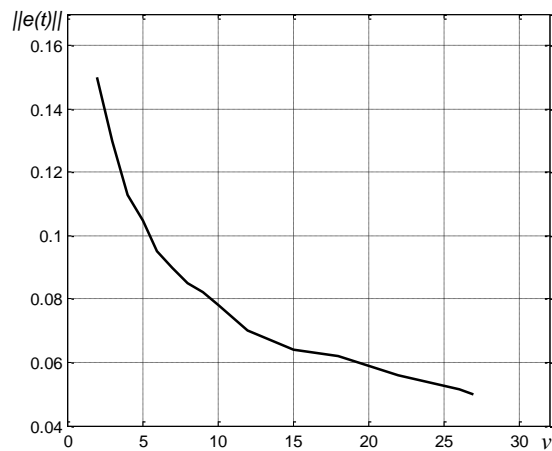


Рис.7.15

7.5 Синтез последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием

В данном разделе рассматривается возможность использования идеи аналитической последовательной компенсации нежелательных полюсов передаточной функции (матрицы) «вход–выход» (ВВ) исходного технического объекта путем их сокращения с нулями

передаточной функции (матрицы) W_B последовательного компенсатора (ПК), наделенного полюсами, которые при замыкании разомкнутой системы, составленной из последовательного соединения ПК и ТО, отрицательной единичной обратной связью порождают передаточную функцию (матрицу) W_B замкнутой системы, имеющую полином знаменателя резолвенты, совпадающий с желаемым характеристическим полиномом. Реализация идею последовательной компенсации усложнена фактором наличия в составе технического объекта звена чистого запаздывания, которое встроено в ТО в виде последовательного структурного компонента. Ниже предлагаются варианты решения этой задачи. Исследования ограничиваются случаем ОВОВ-структурной реализаций ТО и синтезируемой системы.

7.5.1 Синтез последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием на основе модифицированных полиномиальных динамических модальных моделей

В решении задачи, вынесенной в заголовок параграфа, выделим две части. Первая состоит в том, что в некоторых задачах управления техническими объектами по условиям их эксплуатации является недопустимым наличие перерегулирования в кривой переходного процесса. Отсутствие перерегулирования гарантируется при аналитическом методе синтеза системы выбором ПДММ с характеристическим полиномом, имеющим биномиальное распределение Ньютона его корней. Фактор наличия в прямой цепи проектируемой системы звена чистого запаздывания с ПФ $W_{чз}(s) = e^{-\tau s}$ в виде мультипликативного структурного компонента приводит к тому, что передаточная ТО принимает вид

$$\tilde{W}_{ТО}(s) = e^{-\tau s} W_{ТО}(s). \quad (7.61)$$

В свою очередь с учетом фактора присутствия ЗЧЗ в составе прямой цепи ТО при реализации желаемого ПДММ с помощью последовательного компенсатора сохраняет его и в желаемой передаточной функции прямой цепи так, что она принимает вид

$$W_{\text{ж}}(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} W_{\text{ж}}(s, \omega_0). \quad (7.62)$$

В (7.62) $W_{\text{ж}}(s, \omega_0)$ удовлетворяет условию

$$W_{\text{ж}}(s, \omega_0) = \frac{\Phi_{\text{ж}}(s, \omega_0)}{1 - \Phi_{\text{ж}}(s, \omega_0)} = \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \omega_0^i s^{n-i}} = \frac{v_n \omega_0^n}{N(s, \omega_0)}, \quad (7.63)$$

Введение в состав прямой цепи системы последовательного компенсатора, не обладающего свойством компенсировать чистое запаздывание, на основании (7.61)–(7.62) порождает соотношение

$$e^{-\tau s} W_{\text{то}}(s) W_{\text{пк}}(s, \omega_0) = e^{-\tau s} W_{\text{ж}}(s, \omega_0). \quad (7.64)$$

Из (7.64) следует, что

$$W_{\text{пк}}(s, \omega_0) = W_{\text{ж}}(s, \omega_0) W_{\text{то}}^{-1}(s). \quad (7.65)$$

Встает проблема выяснить, при каких ограничениях на значения параметров $\{\tau, \omega_0\}$ можно использовать ПК с передаточной функцией (7.65) при условии гарантии минимального значения перерегулирования, которое может породить некомпенсированное чистое запаздывание.

Для ответа на поставленный вопрос надо исследовать свойства системы, ПФ прямой цепи которой определяется выражениями (7.62),

(7.63). Свойства передаточных функций $W_{\text{ж}}(s, \omega_0) = \frac{v_n \omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$ для ПФ

$\Phi_{\text{ж}}(s, \omega_0)$ с типовыми распределениями корней ХП хорошо изучены, сомножитель $W_{\text{чз}}(s) = e^{-\tau s}$ оказывает воздействие только на фазовую частотную характеристику, а потому меняет запас устойчивости, уменьшая его на величину $\Delta\Delta\phi = -\tau\omega_c$, где ω_c частота среза частотной характеристики $W_{\text{ж}}(j\omega, \omega_0)$, жестко связанная с характеристической частотой ω_0 ПДММ. Уменьшение запаса устойчивости в первую очередь проявляется в появлении перерегулирования кривой переходной характеристики ПДММ с биномиальным распределением корней ХП и его увеличение при других распределениях.. Уровень перерегулирования $\sigma \leq 5\%$ на паре $\{\tau, \omega_0\}$ положим в основу оценки границы их значений, допускающих обеспечение $\sigma \leq 5\%$. Весь объем информации необходимый для решения задачи в случае ПДММ с биномиальным распределением корней ХП для размерностей $n = \overline{1,5}$, представлен в таблице 7.7.

Таблица 7.7

n	$W_{ж}(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{v_n \omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	$(\Delta\varphi)^0$	$(\Delta\Delta\varphi) = -\tau\omega_c$ (рад)	$\sigma\%$	$\tau\omega_0$
1	$N(s, \omega_0) = s$	1	90	-0.511	5	0.511
2	$N(s, \omega_0) = (s + 2\omega_0)s$	0.486	76.35	-0.256	5	0.527
3	$N(s, \omega_0) = (s^2 + 3\omega_0 s + 3\omega_0^2)s$	0.326	71.25	-0.17	5	0.52
4	$N(s, \omega_0) = \left(\begin{array}{l} s^3 + 4\omega_0 s^2 + \\ + 6\omega_0^2 s + 4\omega_0^3 \end{array} \right) s$	0.248	68.58	-0.128	5	0.517
5	$N(s, \omega_0) = \left(\begin{array}{l} s^4 + 5\omega_0 s^3 + \\ + 10\omega_0^2 s^2 + \\ + 10\omega_0^3 s + 5\omega_0^4 \end{array} \right) s$	0.2	66.94	-0.104	5	0.52

Таким образом, алгоритм синтеза последовательного компенсатора для случая наличия запаздывания состоит из пунктов:

1. По данным в виде набора $\{n, \sigma \leq 5\%, \tau\}$ параметров и таблицы 7.7 оценить допустимое значение характеристической частоты ω_0 ;
2. Если в силу параметров ПДММ, приведенных в таблице П1.2, полученное значение характеристической частоты удовлетворяет техническим требованиям, то осуществить синтез ПК по схеме соотношения (7.65).

Решение второй части задачи, которая носит общий характер, потребовало построить банк модифицированных сомножителем $W_{чз}(s) = e^{-\tau s}$ передаточных функций прямой цепи вида (7.62), в которой сомножитель $W_{ж}(s, \omega_0)$ в замкнутом виде порождает ПДММ с распределением корней его знаменателя Баттерворта или Ньютона. Характеристики модифицированных ПДММ параметризованы постоянной запаздывания τ , которая приводит к уменьшению запаса устойчивости по фазе на величину $\Delta\Delta\varphi = -\tau\omega_c$, влекущую за собой приращение перерегулирования на величину $\Delta\sigma\%$. Параметры модифицированных ПДММ вычислены для приращений перерегулирований из ряда $\{\Delta\sigma = 0\%; \Delta\sigma = 5\%; \Delta\sigma = 10\%; \Delta\sigma = 15\%; \Delta\sigma = 20\%;\}$.

Параметры модифицированных ПДММ приведены в приложении 3 и размещены в таблицах П3.1 и П3.2.

Алгоритм синтеза последовательного компенсатора для общего случая задачи при наличии запаздывания состоит из пунктов:

1. По данным в виде набора $\{n, \sigma\%, \tau$ и допустимого $\Delta\sigma\%$ из приведенного ряда} параметров и таблиц ПЗ.1 или ПЗ.2 в зависимости от типа ПДММ оценить допустимое значение характеристической частоты ω_0 ;
2. Если в силу параметров ПДММ, приведенных в таблицах ПЗ.1 или ПЗ.2, полученное значение характеристической частоты удовлетворяет техническим требованиям, то осуществить синтез ПК по схеме соотношения (7.65). В противном случае совершить переход к п. 3 алгоритма.
3. Нарастить значение перерегулирования на величину $\Delta\sigma = 5\%$ и повторить алгоритм, начиная с п. 1.

7.5.2 Синтез последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием на основе компенсатора Смита

Решение задачи, вынесенной в заголовок параграфа начнем с доказательства утверждения

Утверждение 7.1(У7.1). Включение последовательного компенсатора с передаточной функцией $W_{ПК}(s, \omega_0)$ в замкнутую единичной обратной связью систему, в прямой ветви которой включен ТО с передаточной функцией $\tilde{W}_{ТО}(s) = e^{-\tau s} W_{ТО}(s)$, по схеме Смита позволяет реализовать передаточную функцию «вход–выход» системы

$$\Phi_{ж}(s, \omega_0, \tau) = \frac{W_{ПК}(s) W_{ТО}(s) e^{-\tau s}}{1 + W_{ПК}(s) W_{ТО}(s)}. \quad (7.66) \square$$

Доказательство. Структурное представление включения последовательного компенсатора с передаточной функцией $W_{ПК}(s) = W_{ПК}(s, \omega_0)$ в замкнутую единичной обратной связью систему, в прямой ветви которой включен ТО с передаточной функцией $\tilde{W}_{ТО}(s) = e^{-\tau s} W_{ТО}(s)$, по схеме Смита приведено на рис. 7.16

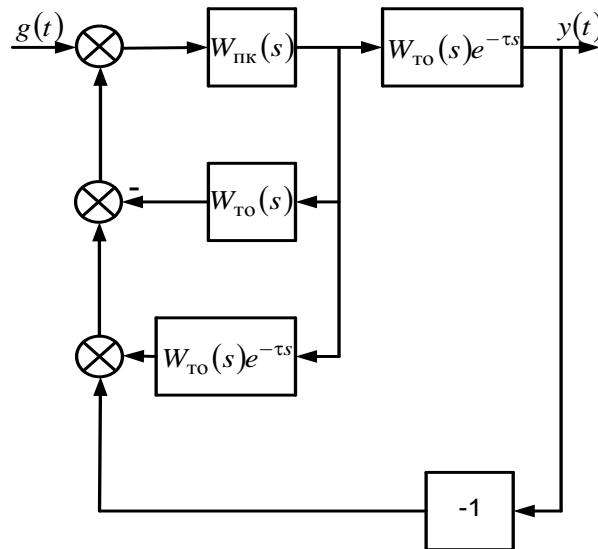


Рис.7.16

Применяя правило Мейсона не касающихся контуров к структурной схеме рис.7.16, для передаточной функции « вход – выход» получим

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{W_{ПК}(s)W_{ТО}(s)e^{-\tau s}}{1 + W_{ПК}(s)W_{ТО}(s)e^{-\tau s} - W_{ПК}(s)W_{ТО}(s)e^{-\tau s} + W_{ПК}(s)W_{ТО}(s)} = \frac{W_{ПК}(s)W_{ТО}(s)e^{-\tau s}}{1 + W_{ПК}(s)W_{ТО}(s)}.$$

Утверждение доказано. ■

Схема Смита является эффективным способом вывода звена чистого запаздывания за пределы замкнутого контура, его влияние проявляется только в увеличении длительности переходного процесса на величину запаздывания и не сказывается на величине перерегулирования. Но использование схемы Смита требует осторожности, потому что она, как все схемы аддитивной сигнальной компенсации, не является робастной и требует для своей корректной реализации точного знания передаточной функции технического объекта и величины запаздывания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Читатель, ознакомившийся с предложенным учебным пособием, очевидно, заметил, что предметом исследований в нем оказались проблемы, которые обычно принято характеризовать словами «удивительное рядом». Действительно, обнаружилось, что в апериодических системах, то есть системах с вещественным спектром отрицательных собственных чисел, но со структурой собственных векторов, близкой к коллинеарности, порождающей модальную матрицу с большим значением числа обусловленности, при определенных реализациях вектора начального состояния возможны существенные отклонения (выбросы) траекторий по норме вектора состояния от монотонного их развития, не нарушающие в целом асимптотической сходимости.

Более того, установлено, что, если апериодические системы обладают собственными числами по модулю меньшими единицы, образующие кратную структуру, то на траекториях системы по норме вектора состояния также наблюдаются заметные отклонения (выбросы) траекторий по норме вектора состояния от монотонного их развития, не нарушающие асимптотической сходимости.

Установлено, что в случае, если кратные собственные числа матрицы состояния автономной непрерывной системы оказываются комплексно–сопряженными, то при слабой их демпфированности отклонения траекторий по норме состояния от монотонного развития наблюдаются даже при отрицательной вещественной части по модулю большей единицы.

Наличие выбросов в траекториях обнаружено и у автономных дискретных систем, причем выбросы тем больше чем больше кратность собственных число матрицы состояния автономной дискретной системы и чем собственное число ближе к единичному значению.

Таким образом, как кратность собственных чисел матриц состояния устойчивых апериодических непрерывных систем, так и структура их собственных векторов оказывается важным системным фактором, наделяющим

динамические процессы в системе весьма специфическими свойствами, которые могут приводить к нежелательным последствиям разрушительного характера.

Интересные результаты представлены в учебном пособии о проявлении кратности собственных чисел в отношении « вход-выход».

Уважаемый читатель, постарайтесь учебное пособие прочитать до конца, Вы найдете в нем много интересного и неожиданного.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 ПДММ

Таблица П1.1 ПДММ с распределением мод Баттерворта

Порядок n	Аналитическое выражение полинома $D(s, \omega_0)$	$\sigma, \%$	$t_\sigma \omega_0$	$t_\Pi \omega_0$	D/ω_0	$(\Delta\varphi)^0$	$\omega_c \omega_0^{-1}$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$			
								$M \geq 0.707$	$M \geq 0.05$	$ 1-M \leq 0.05$	$\delta \leq 0.05$
1	$s + \omega_0$		-	3	1	90	1	1	20	0.32	0.051
2	$s^2 + 1.414\omega_0 s + \omega_0^2$	5	3.8	4.5	0.7	65.53	0.6436	1	4.134	0.523	0.035
3	$s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3$	9	4.95	6.25	0.5	60.49	0.4963	1	2.604	0.618	0.0257
4	$s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4$	11	5.55	7	0.385	59.84	0.3934	1	02.11	0.701	0.02
5	$s^5 + 3.24\omega_0 s^4 + 5.24\omega_0^2 s^3 + 5.24\omega_0^3 s^2 + 3.24\omega_0^4 s + \omega_0^5$	13	6.3	8	0.31	60.05	0.3189	1	1.782	0.774	0.017

Таблица П1.2 ПДММ с биномиальным распределением мод Ньютона

Порядок n	Аналитическое выражение полинома $D(s, \omega_0)$	$\sigma, \%$	$t_\sigma \omega_0$	$t_\Pi \omega_0$	D/ω_0	$(\Delta\varphi)^0$	$\omega_c \omega_0^{-1}$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$			
								$M \geq 0.707$	$M \geq 0.05$	$ 1-M \leq 0.05$	$\delta \leq 0.05$
1	$s + \omega_0$	0	-	3	1	90	1	1	20	0.32	0.051
2	$s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$	0	-	4.8	0.5	76.35	0.486	0.65	5.04	0.252	0.024
3	$s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3$	0	-	6	0.333	71.25	0.326	0.5	2.782	0.17	0.017
4	$s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 +$ $+ 4\omega_0^3 s + \omega_0^4$	0	-	7.8	0.25	68.58	0.248	0.44	2.0	0.144	0.0135
5	$s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 +$ $+ 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5$	0	-	9	0.2	66.94	0.2	0.4	1.54	0.128	0.0107

Таблица П1.3 ПДММ с распределением мод Баттерворта

Порядок n	Интервал корреляции τ_κ	Дисперсия	Аналитическое выражение относительных дисперсий
1	$\frac{3}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
		\bar{D}_ε	$\frac{1}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
2	$\frac{3}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^2 + 0.707\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^2 + 1.414\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{2.121\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^2 + 1.414\bar{\omega}_0 + 1}$
3	$\frac{5.6}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^3 + 1.333\bar{\omega}_0^2 + 0.667\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^3 + 2\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{3.333\bar{\omega}_0^2 + 2.667\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^3 + 2\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
4	$\frac{5.89}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^4 + 1.967\bar{\omega}_0^3 + 1.714\bar{\omega}_0^2 + 0.659\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^4 + 2.6\bar{\omega}_0^3 + 3.4\bar{\omega}_0^2 + 2.6\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{4.567\bar{\omega}_0^3 + 5.114\bar{\omega}_0^2 + 3.259\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^4 + 2.6\bar{\omega}_0^3 + 3.4\bar{\omega}_0^2 + 2.6\bar{\omega}_0 + 1}$
5	$\frac{5.94}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^5 + 2.586\bar{\omega}_0^4 + 3.139\bar{\omega}_0^3 + 2.093\bar{\omega}_0^2 + 0.646\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^5 + 3.24\bar{\omega}_0^4 + 5.24\bar{\omega}_0^3 + 5.24\bar{\omega}_0^2 + 3.24\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{5.826\bar{\omega}_0^4 + 8.379\bar{\omega}_0^3 + 7.333\bar{\omega}_0^2 + 3.886\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^5 + 3.24\bar{\omega}_0^4 + 5.24\bar{\omega}_0^3 + 5.24\bar{\omega}_0^2 + 3.24\bar{\omega}_0 + 1}$

Таблица П 1.4 ПДММ с биномиальным распределением мод Ньютона

Порядок n	Интервал корреляции τ_κ	Дисперсия	Аналитическое выражение относительных дисперсий
1	$\frac{3}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
		\bar{D}_ε	$\frac{1}{(1 + \bar{\omega}_0)}$
2	$\frac{3.6}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^2 + 0.5\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{2.5\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^2 + 2\bar{\omega}_0 + 1}$
3	$\frac{5.85}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^3 + 1.125\bar{\omega}_0^2 + 0.375\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^3 + 3\bar{\omega}_0^2 + 3\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{4.125\bar{\omega}_0^2 + 3.375\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^3 + 3\bar{\omega}_0^2 + 3\bar{\omega}_0 + 1}$
4	$\frac{6.25}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^4 + 1.813\bar{\omega}_0^3 + 1.125\bar{\omega}_0^2 + 0.313\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^4 + 4\bar{\omega}_0^3 + 6\bar{\omega}_0^2 + 4\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{5.813\bar{\omega}_0^3 + 7.25\bar{\omega}_0^2 + 4.313\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^4 + 4\bar{\omega}_0^3 + 6\bar{\omega}_0^2 + 4\bar{\omega}_0 + 1}$
5	$\frac{7.44}{\omega_0}$	\bar{D}_y	$\frac{\bar{\omega}_0^5 + 2.539\bar{\omega}_0^4 + 2.695\bar{\omega}_0^3 + 1.367\bar{\omega}_0^2 + 0.273\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_0^5 + 5\bar{\omega}_0^4 + 10\bar{\omega}_0^3 + 10\bar{\omega}_0^2 + 5\bar{\omega}_0 + 1}$
		\bar{D}_ε	$\frac{7.539\bar{\omega}_0^4 + 12.7\bar{\omega}_0^3 + 11.367\bar{\omega}_0^2 + 5.273\bar{\omega}_0 + 1}{\bar{\omega}_0^5 + 5\bar{\omega}_0^4 + 10\bar{\omega}_0^3 + 10\bar{\omega}_0^2 + 5\bar{\omega}_0 + 1}$

Доказательства утверждений

Доказательство утверждения 6.1

Для доказательства утверждения 6.1 построим базу индукции.

$$(Q + R)^1 = Q + R = \sum_{j=0}^1 C_1^j Q^{1-j} R^j;$$

$$\begin{aligned} (Q + R)^2 &= (Q + R) \cdot (Q + R) = Q^2 + RQ + QR + R^2 \Big|_{QR=RQ} = \\ &= Q^2 + 2QR + R^2 = \sum_{j=0}^2 C_2^j Q^{2-j} R^j \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} (Q + R)^3 &= (Q + R)^2 (Q + R) = (Q^2 + RQ + QR + R^2) \cdot (Q + R) = \\ &= Q^3 + RQ^2 + QRQ + R^2Q + Q^2R + RQR + QR^2 + R^3 \Big|_{QR=RQ} = \\ &= Q^3 + 3Q^2R + 3QR^2 + R^3 = \sum_{j=0}^3 C_3^j Q^{3-j} R^j. \end{aligned}$$

База индукции построена, тогда становится справедливым представление (6.9).

Доказательство утверждения 6.2

Для доказательства утверждения 6.2 построим базу индукции представления степенной функции $(J(\alpha))^k = \sum_{i=0}^k C_k^i \alpha^{k-i} J^i(0)$, начиная с размерности системы $n = 2$.

Для $n = 2$ будем иметь:

при $k = 0$ $(J(\alpha))^0 = I$;

при $k = 1$ $(J(\alpha))^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

при $k = 2$

$$(J(\alpha))^2 = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

при $k = 3$

$$\begin{aligned} (J(\alpha))^3 &= \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & 3\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Для $n = 2$ база индукции построена, она дает представление

$$(J(\alpha))^k = \alpha^k \begin{bmatrix} 1 & k\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha^k \begin{bmatrix} C_k^0 & C_k^1 \alpha^{-1} \\ 0 & C_k^0 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 3$ будем иметь:

при $k = 0$ $(J(\alpha))^0 = I;$

при $k = 1$ $(J(\alpha))^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

при $k = 2$

$$\begin{aligned} (J(\alpha))^2 &= \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha^{-1} & \alpha^{-2} \\ 0 & 1 & 2\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

при $k = 3$

$$\begin{aligned} (J(\alpha))^3 &= \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & 3\alpha^{-1} & \alpha^{-2} \\ 0 & 1 & 3\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

при $k = 4$

$$\begin{aligned} (J(\alpha))^4 &= \alpha^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\alpha^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6\alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 \\ 0 & \alpha^4 & 4\alpha^3 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{bmatrix} = \alpha^4 \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha^{-1} & 6\alpha^{-2} \\ 0 & 1 & 4\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Для $n = 3$ база индукции построена, она дает представление

$$(J(\alpha))^k = \alpha^k \begin{bmatrix} C_k^0 & C_k^1 \alpha^{-1} & C_k^2 \alpha^{-2} \\ 0 & C_k^0 & C_k^1 \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & C_k^0 \end{bmatrix}.$$

Для $n = 4$ будем иметь:

$$\text{при } k = 0 \quad (J(\alpha))^0 = I;$$

$$\text{при } k=1 \quad (J(\alpha))^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

при $k=2$

$$\begin{aligned} (J(\alpha))^2 &= \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha^{-1} & \alpha^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha^{-1} & \alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

при $k=3$

$$\begin{aligned} (J(\alpha))^3 &= \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} = \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 & 3\alpha^{-1} & 3\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & 1 & 3\alpha^{-1} & 3\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 3\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

при $k=4$

$$\begin{aligned}
(J(\alpha))^4 &= \alpha^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\alpha^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6\alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ 4\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & 4\alpha \\ 0 & \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^4 & 4\alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \end{bmatrix} = \\
&= \alpha^4 \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha^{-1} & 6\alpha^{-2} & 4\alpha^{-3} \\ 0 & 1 & 4\alpha^{-1} & 6\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 4\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

;

Для $n = 4$ база индукции построена, она дает представление

$$(J(\alpha))^k = \alpha^k \begin{bmatrix} C_k^0 & C_k^1 \alpha^{-1} & C_k^2 \alpha^{-2} & C_k^3 \alpha^{-3} \\ 0 & C_k^0 & C_k^1 \alpha^{-1} & C_k^2 \alpha^{-2} \\ 0 & 0 & C_k^0 & C_k^1 \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & C_k^0 \end{bmatrix}.$$

Итак, база индукции по n и k построена. Она делает справедливым представление (6.11)

Доказательство справедливости условия (6.15)

Для доказательства справедливости условия (6.15) запишем правую часть выражения (6.14) в векторной форме так, что оно принимает вид

$$\alpha^k \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i} = \alpha^k \begin{bmatrix} C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{-1} \\ \vdots \\ \alpha^{-(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{П2.1})$$

Если в правой части (П2.1) перейти к нормам, то становится справедливой цепочка неравенств

$$\alpha^k \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i} \leq \gamma \alpha^k \left\| \begin{bmatrix} C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^{n-1} \end{bmatrix} \right\| < \gamma \alpha^k C_k^{n-1}, \quad (\text{П2.2})$$

где $\gamma = \left\| \begin{bmatrix} 1 & \alpha^{-1} & \dots & \alpha^{-(n-1)} \end{bmatrix} \right\|$.

Из (П2.2) видно, что справедливость условия (6.15) гарантируется предельным стремлением к нулю его компонента $\alpha^k C_k^{n-1}$ при стремлении k к бесконечности. Действительно, исследование этого предельного перехода позволяет записать

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha^k C_k^{n-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{C_k^{n-1}}{(\alpha^{-1})^k} \right). \quad (\text{П2.3})$$

В свою очередь для компонента C_k^{n-1} по определению равно

$$\begin{aligned} C_k^{n-1} &= \frac{k!}{(n-1)!(k-(n-1))!} = \\ &= \frac{(k-(n-1))!(k-(n-2))(k-(n-3)) \dots (k-(n-n))}{(n-1)!(k-(n-1))!} = \\ &= \frac{(k-(n-2))(k-(n-3)) \dots k}{(n-1)!}. \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Нетрудно видеть, что соотношение (П2.4) удовлетворяет неравенству

$$C_k^{n-1} \leq \beta \cdot k^{n-1}, \quad (\text{П2.5})$$

где β – независимая от переменной k константа $\beta = 1/(n-1)!$.

Соотношение (П2.5) позволяет для (П2.3) записать мажорирующее неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha^k C_k^{n-1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{C_k^{n-1}}{(\alpha^{-1})^k} \right) \leq \beta \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^{n-1}}{(\alpha^{-1})^k} \right). \quad (\text{П2.6})$$

Нетрудно видеть, что мажорирующий предел в (П2.6) относится к категории пределов с неопределенностью типа ∞/∞ , для раскрытия которой применим к мажорирующему пределу $(n-1)$ – раз правило Лопиталья

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^{n-1}}{(\alpha^{-1})^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)!}{(\ln(\alpha^{-1}))^{n-1} (\alpha^{-1})^k} \right) = \frac{(n-1)!}{(\ln(\alpha^{-1}))^{n-1}} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \Big|_{\alpha < 1} = 0. \quad (\text{П2.7})$$

Справедливость условия (6.15) доказана.

Доказательство утверждения 6.3

$$\Delta \left\| (J(\alpha))^k \right\| = 0; \quad \left\| (J(\alpha))^{k+1} \right\| - \left\| (J(\alpha))^k \right\| = 0$$

$$\alpha^{k+1} \sum_{i=0}^{n-1} C_{k+1}^i \alpha^{-i} - \alpha^k \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i} = 0$$

$$\begin{aligned} & \alpha^{k+1} C_{k+1}^0 + \alpha^k C_{k+1}^1 + \dots + \alpha^{k+1-i} C_{k+1}^i + \dots + \alpha^{k+1-(n-1)} C_{k+1}^{n-1} - \\ & \alpha^k C_k^0 - \alpha^{k-1} C_k^1 - \dots - \alpha^{k-i} C_k^i - \dots - \alpha^{k-(n-1)} C_k^{n-1} = 0 \quad \Big| : \alpha^{k-(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha^n C_{k+1}^0 + \alpha^{n-1} C_{k+1}^1 + \dots + \alpha^{n-i} C_{k+1}^i + \dots + \alpha^1 C_{k+1}^{n-1} - \\ & - \alpha^{n-1} C_k^0 - \alpha^{n-2} C_k^1 - \dots - \alpha^{n-1-i} C_k^i - \dots - C_k^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha^n C_{k+1}^0 + \alpha^{n-1} (C_{k+1}^1 - C_k^0) + \dots + \alpha^{n-i} (C_{k+1}^i - C_k^{i-1}) + \dots \\ & + \alpha^1 (C_{k+1}^{n-1} - C_k^{n-2}) - C_k^{(n-1)} = 0 \end{aligned}$$

Вычислим $(C_{k+1}^i - C_k^{i-1})$:

$$\begin{aligned}
(C_{k+1}^i - C_k^{i-1}) &= \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} - \frac{(k)!}{(i-1)!(k-(i-1))!} = \\
&= \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} - \frac{(k)!}{(i-1)!(k+1-i)!} = \frac{(k+1)! - (k)!i}{i!(k+1-i)!} = \\
&= \frac{(k)!(k+1-i)}{i!(k+1-i)!} = \frac{(k)!}{i!(k+1-i-1)!} = \frac{(k)!}{i!(k-i)!} = C_k^i.
\end{aligned}$$

Подставим полученный результат в уравнение

$$\alpha^n C_{k+1}^0 + \alpha^{n-1} C_k^1 + \dots + \alpha^{n-i} C_k^i + \dots + \alpha^1 C_k^{n-1} - C_k^{(n-1)} = 0$$

$$\alpha^n C_{k+1}^0 + \alpha^{n-1} C_k^1 + \dots + \alpha^{n-i} C_k^i + \dots + \alpha^1 C_k^{n-1} - C_k^{(n-1)} = 0$$

$$\alpha^n \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \alpha^{-i} - C_k^{(n-1)} = 0. \quad \blacksquare$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Модифицированные чистым запаздыванием ПДММ

Динамические показатели ПДММ с передаточной функцией прямой цепи $W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$, $N(s, \omega_0) : D(s, \omega_0) = N(s, \omega_0) + \omega_0^n$,

$D(s, \omega_0)$ - ХП с распределением Баттерворта его корней

Таблица ПЗ.1

n	$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	σ_0	$(\Delta\varphi)^0$ (pad)	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	$t_{II}\omega_0$	$\sigma = \sigma_0 + 5\%$		$\sigma = \sigma_0 + 10\%$		$\sigma = \sigma_0 + 15\%$		$\sigma = \sigma_0 + 20\%$	
						$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)
1	$N(s, \omega_0) = s$	-	90 (1.57)	1	3	1.67	-29.36 (-0.515)	1.65	-33.117 (-0.581)	1.66	-36.423 (-0.639)	1.69	-39.558 (-0.694)
2	$N(s, \omega_0) = (s + 1.414\omega_0)s$	5	65.53 (1.14)	0.6436	4.5	5.53	-8.034 (-0.141)	5.82	-12.95 (-0.227)	6.01	-17.022 (-0.2986)	8.76	-20.69 (-0.363)
3	$N(s, \omega_0) = (s^2 + 2\omega_0s + 2\omega_0^2)s$	9	60.49 (1.06)	0.4963	6	6.67	-4.922 (-0.086)	7.06	-8.656 (-0.152)	10.45	-12.1643 (-0.2134)	11.22	-15.5 (-0.272)
4	$N(s, \omega_0) = \left(s^3 + 2.6\omega_0s^2 + \right. \\ \left. + 3.4\omega_0^2s + 2.6\omega_0^3 \right) s$	11	59.84 (1.04)	0.3934	6.87	7.53	-3.408 (-0.0598)	10.5 2	-6.79 (-0.119)	12	-10.091 (-0.177)	13.08	-13.32 (-0.2337)
5	$N(s, \omega_0) = \left(s^4 + 3.24\omega_0s^3 + \right. \\ \left. + 5.24\omega_0^2s^2 + \right. \\ \left. + 5.24\omega_0^3s + 3.24\omega_0^4 \right) s$	13	60.05 (1.05)	0.3189	7.65	8.6	-3.745 (-0.0657)	9.5	-7.235 (-0.1269)	14.22	-10.688 (-0.1875)	15.87	-14.087 (-0.2471)

Динамические показатели ПДММ с передаточной функцией прямой цепи $W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$, $N(s, \omega_0): D(s, \omega_0) = N(s, \omega_0) + \omega_0^n$,

$D(s, \omega_0)$ - ХП с биномиальным распределением Ньютона его корней

Таблица ПЗ.2

n	$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	σ_0	$(\Delta\varphi)^0$ (pad)	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	$t_{II}\omega_0$	$\sigma = \sigma_0 + 5\%$		$\sigma = \sigma_0 + 10\%$		$\sigma = \sigma_0 + 15\%$		$\sigma = \sigma_0 + 20\%$	
						$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)
1	$N(s, \omega_0) = s$	0	90 (1.57)	1	3	1.67	-29.36 (-0.515)	1.65	-33.117 (-0.581)	1.66	-36.423 (-0.639)	1.69	-39.558 (-0.694)
2	$N(s, \omega_0) = (s + 2\omega_0)s$	0	76.35 (1.33)	0.486	4.74	3.6	-14.654 (-0.257)	3.5	-19.364 (-0.34)	3.51	-23.214 (-0.407)	3.55	-26.677 (-0.468)
3	$N(s, \omega_0) = (s^2 + 3\omega_0s + 3\omega_0^2)s$	0	71.25 (1.24)	0.326	6.3	5.27	-9.644 (-0.1692)	5.17	-13.974 (-0.245)	5.19	-17.671 (-0.31)	5.26	-21.053 (-0.3674)
4	$N(s, \omega_0) = \left(s^3 + 4\omega_0s^2 + \right. \\ \left. + 6\omega_0^2s + 4\omega_0^3 \right) s$	0	68.58 (1.197)	0.248	7.75	6.82	-7.308 (-0.1282)	6.74	-11.309 (-0.198)	6.78	-14.829 (-0.26)	6.89	-18.122 (-0.318)
5	$N(s, \omega_0) = \left(s^4 + 5\omega_0s^3 + \right. \\ \left. + 10\omega_0^2s^2 + 10\omega_0^3s + 5\omega_0^4 \right) s$	0	66.94 (1.17)	0.2	9.15	8.3	-5.94 (-0.104)	8.25	-9.6672 (-0.1696)	8.33	-13.042 (-0.229)	8.47	-16.245 (-0.285)

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Модифицированные чистым запаздыванием ПДММ

Динамические показатели ПДММ с передаточной функцией прямой цепи $W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$, $N(s, \omega_0) : D(s, \omega_0) = N(s, \omega_0) + \omega_0^n$,

$D(s, \omega_0)$ - ХП с распределением Баттерворта его корней

Таблица ПЗ.1

n	$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	σ_0	$(\Delta\varphi)^0$ (pad)	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	$t_{II}\omega_0$	$\sigma = \sigma_0 + 5\%$		$\sigma = \sigma_0 + 10\%$		$\sigma = \sigma_0 + 15\%$		$\sigma = \sigma_0 + 20\%$	
						$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)
1	$N(s, \omega_0) = s$	-	90 (1.57)	1	3	1.67	-29.36 (-0.515)	1.65	-33.117 (-0.581)	1.66	-36.423 (-0.639)	1.69	-39.558 (-0.694)
2	$N(s, \omega_0) = (s + 1.414\omega_0)s$	5	65.53 (1.14)	0.6436	4.5	5.53	-8.034 (-0.141)	5.82	-12.95 (-0.227)	6.01	-17.022 (-0.2986)	8.76	-20.69 (-0.363)
3	$N(s, \omega_0) = (s^2 + 2\omega_0s + 2\omega_0^2)s$	9	60.49 (1.06)	0.4963	6	6.67	-4.922 (-0.086)	7.06	-8.656 (-0.152)	10.45	-12.1643 (-0.2134)	11.22	-15.5 (-0.272)
4	$N(s, \omega_0) = \left(s^3 + 2.6\omega_0s^2 + \right. \\ \left. + 3.4\omega_0^2s + 2.6\omega_0^3 \right) s$	11	59.84 (1.04)	0.3934	6.87	7.53	-3.408 (-0.0598)	10.5 2	-6.79 (-0.119)	12	-10.091 (-0.177)	13.08	-13.32 (-0.2337)
5	$N(s, \omega_0) = \left(s^4 + 3.24\omega_0s^3 + \right. \\ \left. + 5.24\omega_0^2s^2 + \right. \\ \left. + 5.24\omega_0^3s + 3.24\omega_0^4 \right) s$	13	60.05 (1.05)	0.3189	7.65	8.6	-3.745 (-0.0657)	9.5	-7.235 (-0.1269)	14.22	-10.688 (-0.1875)	15.87	-14.087 (-0.2471)

Динамические показатели ПДММ с передаточной функцией прямой цепи $W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$, $N(s, \omega_0): D(s, \omega_0) = N(s, \omega_0) + \omega_0^n$,

$D(s, \omega_0)$ - ХП с биномиальным распределением Ньютона его корней

Таблица ПЗ.2

n	$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	σ_0	$(\Delta\varphi)^0$ (pad)	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	$t_{II}\omega_0$	$\sigma = \sigma_0 + 5\%$		$\sigma = \sigma_0 + 10\%$		$\sigma = \sigma_0 + 15\%$		$\sigma = \sigma_0 + 20\%$	
						$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)	$t_{II}\omega_0$	$(\Delta\varphi_D)^0 =$ $= -\tau\omega_c$ (pad)
1	$N(s, \omega_0) = s$	0	90 (1.57)	1	3	1.67	-29.36 (-0.515)	1.65	-33.117 (-0.581)	1.66	-36.423 (-0.639)	1.69	-39.558 (-0.694)
2	$N(s, \omega_0) = (s + 2\omega_0)s$	0	76.35 (1.33)	0.486	4.74	3.6	-14.654 (-0.257)	3.5	-19.364 (-0.34)	3.51	-23.214 (-0.407)	3.55	-26.677 (-0.468)
3	$N(s, \omega_0) = (s^2 + 3\omega_0s + 3\omega_0^2)s$	0	71.25 (1.24)	0.326	6.3	5.27	-9.644 (-0.1692)	5.17	-13.974 (-0.245)	5.19	-17.671 (-0.31)	5.26	-21.053 (-0.3674)
4	$N(s, \omega_0) = \left(s^3 + 4\omega_0s^2 + \right. \\ \left. + 6\omega_0^2s + 4\omega_0^3 \right) s$	0	68.58 (1.197)	0.248	7.75	6.82	-7.308 (-0.1282)	6.74	-11.309 (-0.198)	6.78	-14.829 (-0.26)	6.89	-18.122 (-0.318)
5	$N(s, \omega_0) = \left(s^4 + 5\omega_0s^3 + \right. \\ \left. + 10\omega_0^2s^2 + 10\omega_0^3s + 5\omega_0^4 \right) s$	0	66.94 (1.17)	0.2	9.15	8.3	-5.94 (-0.104)	8.25	-9.6672 (-0.1696)	8.33	-13.042 (-0.229)	8.47	-16.245 (-0.285)

Международный сертификат направления 27.04.03



ЛИТЕРАТУРА

1. Акунова А., Акунов Т.А., Ушаков А.В. Оценка колебательности управляемых процессов в многомерных системах с помощью числа обусловленности решения матричного уравнения Ляпунова // Автоматика и телемеханика, 1994, №4.
2. Акунов Т. А., Ушаков А. В. Анализ чувствительности эллипсоидных оценок многомерных процессов управления //Изв. вузов СССР. Приборостроение, 1991, № 8.
3. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование процессов в непрерывных системах с кратными комплексно–сопряженными собственными числами их матриц состояния // Научно – технический вестник ИТМО. ISSN 2226–1494. 2013.№4(86).С.25–33
4. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Степень близости простой и кратной структур собственных чисел: минимизация выброса траекторий свободного движения апериодической системы // Научно – технический вестник ИТМО. ISSN 2226–1494. 2014.№2 (90).С.39–46
5. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование колебательности процессов в апериодических непрерывных системах, порождаемой фактором кратности собственных чисел // Научно – технический вестник ИТМО. 2013.№3(85).С.55–61
6. Акунов Т.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Назначение структуры собственных векторов, доставляющих динамической системе модальную робастность с минимальными затратами на управление // Мехатроника, автоматизация, управление, 2008. № 1.

7. Акунова А., Баячорова Б.Ж., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Математические основы теории информационных систем в управлении / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Салам, 2003.
8. Алишеров С., Ушаков А. В. Алгебраическое обоснование выбора газовых лазеров для локационных измерительных систем //Автометрия, 1990, № 5.
9. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- 10.Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1968.
- 11.Бочков А.Л., Дударенко Н. А., Ушаков А.В.Синтез многомерных функционально вырожденных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т.51, № 1. С.25-29.
- 12.Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. / Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
- 13.Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
- 14.Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
- 15.Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
- 16.Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
- 17.Гудвин Г.К., Греббе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.
- 18.Дорф Р., Бишоп Р.. Современные системы управления. Пер. с англ. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
- 19.Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В. Достаточные алгебраические условия обобщенной синхронизируемости многоканальных динамических объектов // Мехатроника, автоматизация, управление, 2009. № 5.

20. Дударенко Н., Ушаков А. Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения.– Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.– 232с.
21. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, расширенное и дополненное.– СПб.: НИУ ИТМО , 2014. 292 с., 15 ил.
22. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Технология количественной оценки склонности сложных систем многомерного управления к вырождению // Автометрия. 2010. Т.46, №2. С.20-26.
23. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление./ Пер. с англ. под ред. А.Н. Ширяева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.
24. Заде Л, Дезоер Ч. Теория линейных систем/ Пер. с англ. М.: Наука, 1970.
25. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975.
26. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением КА. Изв. РАН. ТиСУ, 2013, № 2, с .148–162.
27. Р. Н. Измайлов, “Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах с многомерными входами и выходами”, Автомат. и телемех., 1988, № 1, 52–60
28. Р. Н. Измайлов, «Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами”, Автомат. и телемех., 1987, № 8, 56–62

29. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. / Под редакцией Д.К. Фаддеева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
30. Калмыков С.А., Шокин Б.Л., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
31. Калужнин А.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
32. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. – М: Мир, 1977.
33. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
34. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Алгебраические и матричные методы в теории линейных ММО-систем. Вестник ИГЭУ, 2005, № 5, с. 196–240.
35. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков; Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
36. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков. / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
37. Н. А. Полинова, научный руководитель А.В.Ушаков Анализ колебательности апериодических систем и апериодичности колебательных // Аннотированный сборник научно-исследовательских выпускных квалификационных работ бакалавров НИУ ИТМО / Главный редактор проректор по НР д.т.н., профессор В.О.Никифоров.– СПб.: НИУ ИТМО, 2013.– с.22–26/ ISBN 978–5–7577–0449-4
38. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств". М.: УРСС, 2014. 560 с

39. Портер У. Современные основания общей теории систем / Пер. с англ. М.: Наука, 1971. 555с.
40. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.
41. Слита О., Никифоров В., Ушаков А. Управление в условиях неопределенности: неадаптивные и адаптивные алгоритмы.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.– 283с.
42. Слита О.В., Ушаков А.В. Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 3. С.19-27.
43. Слита О.В., Ушаков А.В. Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход // Известия РАН. Теория и системы управления, 2008, №4. с.18-27.
44. Слита О.В., Ушаков А.В.. Обобщенное изодромное управление объектом с параметрическими неопределенностями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 4. С. 7-12.
45. Г. В. Смирнов, “Слабая асимптотическая устойчивость дифференциальных включений. I”, Автомат. и телемех., 1990, № 7, 57–64
46. Г. В. Смирнов, “Слабая асимптотическая устойчивость дифференциальных включений. II”, Автомат. и телемех., 1990, № 8, 56–63
47. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987.

48. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применение/ Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 454 с.
49. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраические проблемы собственных значений/ Пер. с англ. М.: Наука, Физматлит. 1970. 564 с.
50. Уонем М. Линейные многомерные системы: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
51. Ушаков А. В. Модальное управление в линейной задаче функционального регулирования многомерного объекта //Автоматика, 1990, №1.
52. Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний.— Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.—418с.
53. Ушаков А., Сударчиков С. Следящий мониторинг деформаций устройств пространственного наблюдения: разработка алгоритмов управления.— Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.—236с.
54. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях. //Автоматика и телемеханика. 1992. №10. С. 72-82.
55. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление// Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. №3. С. 8-16.
56. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 656 с.
57. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования. // АиТ, 1948, N 4, С.253-279.
58. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости семейства систем линейных дифференциальных уравнений// Диф. уравн. 1978. Т.14. №11.С. 2086-2088.
59. Харитонов В.Л. Устойчивость вложенных семейств полиномов. // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 170-178.

60. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428с.
61. T.A. Akunov and A.V. Ushakov Synthesis of Systems of Guaranteed Stability // Journal of Computer and Sciences International. Vol. 42. No4, 2003. p.p. 503 – 511.
62. Taalaybek Akunov, Natalya Dudarenko, Nina Polinova, Anatoly Ushakov FACTOR MULTIPLICITY of the STATE MATRIX in the SYSTEM DYNAMICS. Recent Advances in Applied Mathematics and Theoretical Mathematics // Proceedings of the 18th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (AMATH'13), Budapest, Hungary, December 10-12, 2013. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series. 20.
63. Alexandridis A.T., Galanos G.D. Optimal pole placement for linear multi input controllable system // IEEE transactions on Circuit and System. December 1987. V. CAS-34. N 12. P. 1602–1604.
64. B. D. O. Anderson and J. B. Moore. Linear Optimal Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
65. B. D. O. Anderson. Solution of quadratic matrix equations. Electronics Letters, 2 (10): 371–372, October 1966.
66. R. H. Bartels and G. W. Stewart, Algorithm 432: The solution of the matrix equation $AX + XB = C$, Communications of the ACM, 8 (1972), pp. 820–826.
67. Bauer L., Keller H.B. and Reiss E.L. Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation. SIAM Review. 1975. V. 17. No. 1. P. 101-122.
68. Bhattacharyya S.P., de Souza E. Pole Assignment via Sylvester's Equation // System & Control Letters. 1982. V. 1 (4). P. 261–263.
69. J. V. Burke, A. S. Lewis, and M. L. Overton, Optimal Stability and Eigenvalue Multiplicity // Foundations of Computational Mathematics. 2001 1: P. 205–225

70. Choi K.K. and Haug E.J. Optimization of structures with repeated eigenvalues. In: Optimization of Distributed Parameter Structures (Haug E.J. and Cea J., eds.). Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Nordhoff, 1981. P. 219-277.
71. Chu E.K. Pole assignment for second-order systems. Mechanical Systems and Signal Processing. 2002. V. 16. Iss. 1. P. 39–59.
72. Crossley T. R., Porter B. Eigenvalue and eigenvector sensitivity in linear systems theory. – Int. J. Control, 1969, vol. 10, N 2, pp. 163-170.
73. J. W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997. 419 p.
74. Natalia A. Dudarenko, Olga V. Slita, Anatoliy V. Ushakov ALGEBRIC CONDITIONS of GENERALIZED MODAL CONTROL. //Transactions of 7th IFAC Symposium on Robust Control Design. Aalborg, Denmark, June 20–22, 2012 ROCOND'12, p.p. 150–155
75. G.H. Golub, J.H. Wilkinson ILL-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form SIAM Rev., 18 (1976), pp. 578–619
76. Naimul Hasan. Design and Analysis of Pole-Placement Controller for Interconnected Power Systems // International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering. August 2012. V. 2. Iss. 8. P. 213–217.
77. Nicholas J. Higham (2014) Functions of Matrices. In: Leslie Hogben, (eds). Handbook of Linear Algebra. CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 17.1-17.5.
78. N. J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, SIAM, Philadelphia, second ed., 2002.

79. T. Ivanov, B. D. O. Anderson, P.-A. Absil, and M. Gevers. New relations between norms of system transfer functions. *Systems and Control Letters*, 60: 151–155, 2011.
80. Kagstrom B. and Ruhe A. An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1980. V. 6. No. 3. P. 398-419.
81. Kagstrom B. and Ruhe A. ALGORITHM 560: JNF, An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix F2[. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1980. V. 6. No. 3. P. 437-443.
82. Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P. Robust pole assignment in singular control systems // *Lin. Alg.&Appl.* 1985. V. 121. P. 9–37.
83. W. Kerner, Large-scale complex eigenvalue problems , *J. Comput. Phys.*, 53 (1989), pp. 1–85
84. V. N. Kublanovskaja, On a method of solving the complete eigenvalue problem for a degenerate matrix, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4 (1968), pp. 1–14. Originally appeared in *Ž. Vyčisl. Math. Math. Fiz*, 6:611–629, 1966.
85. Lancaster P. and Tismenetsky M. *The Theory of Matrices*. Orlando: Academic Press, 1985.
86. Mailybaev A.A. Computation of multiple eigenvalues and generalized eigenvectors for matrices dependent on parameters. // *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2006. V. 13. P. 419-436.
87. C. B. Moler and C. F. Van Loan, “Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later,” *SIAM Review*, Vol. 45, No. 1, 2003, pp. 3-49.
88. Patel R.V., Laub A.J. and Van Dooren P.M. *Numerical Linear Algebra Techniques for Systems and Control*. New York: IEEE Press, 1994.

89. Robust Control: The Parameter Space Approach / Ed. by J. Ackermann. London: Springer-Verlag, 2002. 483 p.
90. de la Sen M. ON pole placement controllers for linear time-delay systems with commensurate points delays // Mathematical Problems in Engineering. 2005. V. 2005. N 1. P. 123–140
91. Seyranian A.P. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues. Mech. Struct. Mach. 1993. V. 21. No. 2. P. 261-284.
92. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. Interaction of eigenvalues in multi-parameter problems. J. Sound Vibration. 2003. V. 267. P. 1047-1064.
93. Seyranian A.P., Lund E. and Olhoff N. Multiple eigenvalues in structural optimization problems. Struct. Optimization. 1994. V. 8. P. 207-227.
94. O.V. Slita, A.V. Ushakov. Sufficient Algebraic Conditions of Parametric Invariance of the Output of Linear Stationary Systems in the First Approximation // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2010, vol. 40, No 6, p.p. 847-853
95. O.V. Slita and A.V. Ushakov Providing the Invariance of the Continuous System Output with Respect of Exogeneous Signal and Endogeneous Parametric Disturbances: an Algebraic Approach // Journal of Computer and Sciences International. Vol.47.No4, 2008.p.p.518 – 527.
96. Olga V. Slita, Artem Yu. Tsventarniy, Anatoliy V. Ushakov DESIGN of MODAL CONTROL PROVIDING GUARANTEED STABILITY MARGIN to CONTINUOUS SYSTEMS // Transactions of 7th IFAC Symposium on Robust Control Design. Aalborg, Denmark, June 20–22, 2012 ROCOND'12, p.p. 145–149
97. G. W. Stewart, Matrix Algorithms I: Basic Decompositions, SIAM, Philadelphia, 1998.

98. H.J. Sussman, P.V. Kokotovic, The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 36 (1991), pp. 461–476
99. Valasek M., Olgac N. Efficient pole placement technique for linear time-variant SISO systems // *IEEE Proceedings: Control Theory and Applications*. 1995. V. 142. N 5. P. 451–458.
100. Van Loan C.F. *Introduction to Scientific Computing, A Matrix-Vector Approach Using MATLAB*, Prentice Hall, 2000.
101. Wilkinson J.H. Sensitivity of eigenvalues. *Utilitas Mathematica*. 1984. V. 25. P. 5-76.
102. Wilkinson J.H. Sensitivity of eigenvalues II. *Utilitas Mathematica*. 1986. V. 30. P. 243-286.
103. Zhang L., Wang X.T. Partial eigenvalue assignment for high order system by multi-input control // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2014. V. 42. Iss.1-2. P. 129–136.
Дополнено при подготовке СТУ ДГ(остальное искать в тексте)
104. Smith O.J.M. A controller to overcome dead time // *ISA.*–1959/-vol.6.–p.p.291-296.



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

ИЗ ИСТОРИИ КАФЕДРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ (АТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ до 2001 года)

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года автоматике и телемеханики) была образована в 1945 году как подразделение основанного в тот же год факультета Электроприборостроения ЛИТМО и именовалась кафедрой Электроприборостроения (№80). Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и первого декана факультета Электроприборостроения профессора Марка Львовича Цуккермана. Профессор М.Л. Цуккерман в 1913–м году закончил электромеханический факультет Санкт-Петербургского политехнического института им. Петра Великого, в двадцатые годы организовал в Ленинграде отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области систем телеизмерений. С 1933–го по 1935–й год профессор М.Л. Цуккерман руководит кафедрой «Автоматизации и телемеханизации» ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина). В 1935–м году профессор М.Л. Цуккерман вплоть до начала Великой отечественной войны находится в научной командировке в Европе.

В отличие от существовавших к тому моменту кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина), на кафедру автоматике и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и

телеизмерений. Осенью 1945 года кафедра провела первый набор студентов по специальности электроприборостроение. В 1947-м году кафедра претерпевает первое изменение своего названия, после которого называется кафедрой Автоматики и телемеханики (№80 вплоть до XX-го съезда КПСС). Первый выпуск инженеров-электромехаников по специальности «приборы автоматики и телемеханики» состоялся уже в 1948 году и составил 17 человек. По временной хронологии это событие совпало в выходом в свет на английском языке известной книги Норберта Винера "Кибернетика или наука об управлении и связи в машинах, живых организмах и обществах", в которой дается обоснование кибернетического подхода, выдвигающего на передний план информационное содержание природных, социальных и технических процессов и рассматривающего проблемы автоматического управления с точки зрения преобразования, передачи и использования информации. Советская научная общественность познакомится с этой книгой в переводе на русский язык только в 1958-м году.

Профессор М.Л. Цуккерман руководил кафедрой с 1945 по 1959 год. К своей работе кафедра приступила, имея преподавательский состав, включавший профессора Д.И. Зорина, доцентов Е.А. Танского и Р.И. Юргенсона и заведующего лабораторией А.А. Мезерина. В пятидесятые годы в преподавательский состав кафедры вошли профессор А.А. Кампе-Немм, доцент Г.А. Тацитов, а также старшие преподаватели В.А. Борисов, В.Г. Новиков и В.В. Соколов. К концу пятидесятых годов преподавательский состав пополнился выпускниками ЛИТМО доцентом Н.М. Яковлевым, старшими преподавателями Л.Т. Никифоровой, Н.М. Перевозчиковым, Ю.Б. Ганту и ассистентом А.М. Шпаковым, а также доцентом Б.А. Арефьевым.

В 1955 году при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 года по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана, выпускник кафедры Автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) 1936 года, доцент Евфимий Аполлонович Танский. За время его руководства профессорско-преподавательский состав пополнился старшим преподавателем Л.Л. Бориной, доцентами А.И. Новоселовым и И.П. Пальтовым, пришедшими из промышленности и высших военных учебных заведений, а также выпускниками кафедры,

успешно закончившими обучение в ее аспирантуре, доцентами В.Н. Дроздовым, А.В. Ушаковым, В.А. Власенко, и ассистентом И.Н. Богоявленской. В этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты Б.А. Арэфьев и Р.И. Юргенсон. В научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико–механического приборостроения, что привело к длительному научно – техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса "Газета-2".

С 1970 по 1990 год кафедрой руководил известный в стране специалист в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктор технических наук, профессор Юрий Алексеевич Сабинин. В эти годы заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам "Теория автоматического регулирования и следящие системы", "Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы", "Элементы автоматики" и "Телемеханика" были добавлены дисциплины: "Теоретические основы кибернетики", "Локальные системы управления", "САПР систем управления" и другие. Коллектив преподавателей пополнился новым отрядом выпускников ее аспирантуры: доцентами Ю.Л. Тихоновым, В.В. Лаврентьевым, В.В. Григорьевым, В.В. Хабаловым, Л.С. Громовой, В.И. Бойковым, С.В. Быстровым, А.Б. Бушуевым, А.Н. Коровьяковым, И.В. Мирошником, Ю.П. Котельниковым, Г.И. Болтуновым, старшим преподавателем И.П. Салмыгиным. Из промышленности и других подразделений института пришли на кафедру доценты И.Ю. Рогинский, П.В. Николаев, И.П. Болтунов. Приобрела устойчивый характер система подготовки кадров высшей квалификации. В период с 1970–го по 1990–й защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты И.П. Пальтов, В.В. Григорьев и В.Н. Дроздов. Более 40 человек успешно завершили обучение в аспирантуре.

Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; с задачами автоматизации обработки снимков в пузырьковых камерах; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных

аппаратов. Новый облик теории управления 1970 годов, внедрение метода пространства состояний и вычислительной техники, повышение математического уровня научных исследований нашли отражение в научных разработках кафедры, многочисленных трудах и монографиях. В эти годы интенсивно разрабатываются проблемы теории многомерных динамических систем, качественная теория устойчивости, методы согласованного и многорежимного управления, положено начало теоретическим работам в области робототехники. Научное руководство перечисленными работами осуществляли профессор кафедры Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В. Ушаков, В.В. Григорьев и И.В. Мирошник .

С 1990 года по 1995-й год кафедра переживает «смутное время» на уровне руководства ею, но не на уровне интеллектуальной обстановке в ее коллективе. Известно высказывание ректора НИУ ИТМО: «Интересно, на кафедре автоматики нет номинального заведующего вот уже столько лет и ни одного скандала». Лучшего комплимента кафедре не придумаешь. С 1990 года по 1992-й обязанности заведующего кафедрой исполнял профессор В.В.Григорьев, в 1992-м году в результате проведенного конкурса заведующим кафедрой автоматики и телемеханики становится профессор Таганрогского радиотехнического института Анатолий Аркадьевич Колесников, известный специалист в области синергетики. К сожалению, по причинам личного характера он так и не покинул Таганрог и не приступил к руководству кафедрой автоматики и телемеханики ЛИТМО. В 1994-м году его заведование руководством института приостанавливается, объявляется новый конкурс, в результате которого с 1995-го года по 2010-й кафедрой руководил ее воспитанник доктор технических наук, профессор Валерий Владимирович Григорьев, по инициативе которого в 2001-м году кафедра получила название кафедры «Систем управления и информатики». В эти годы профессорско-преподавательский состав пополнился профессором Е.Ф. Очиным (1993-1996 годы), а также выпускниками аспирантуры ИТМО В.В. Черноусовым, А.П. Баевым, В.О. Никифоровым, М.С. Чежиным, А.В. Ляминым, А.А. Бобцовым и К.А. Сергеевым. Продолжала эффективно работать система подготовки кадров высшей квалификации, диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук защитили И.В. Мирошник, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков, А.И. Скалон, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов.

Помимо традиционной подготовки инженеров-электриков была начата подготовка бакалавров по направлению "Управление и автоматизация". С введением локальной сети и подключением к Интернет проведена модернизация компьютерного класса и учебных лабораторий. Научно-исследовательская работа ведется по целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и

Администрации Санкт-Петербурга. Завершилось формирование научной школы кафедры и ее основных направлений, возглавляемых профессорами В.В. Григорьевым, А.В. Ушаковым, И.В. Мирошником, В.О. Никифоровым и доцентом В.И. Бойковым. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивных систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 году образована научная лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 года существенно расширились международные контакты кафедры, участие в международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. Профессора кафедры Григорьев В.В., Мирошник И.В., Ушаков А.В., а позднее и Никифоров В.О. становятся действительными членами (академиками) Международной Академии нелинейных наук.

В феврале 2010 года заведующим кафедрой Систем управления и информатики был избран выпускник кафедры 1996-го года декан факультета компьютерных технологий и управления, доктор технических наук, профессор Алексей Алексеевич Бобцов, А.А. Бобцов является также председателем Совета молодых ученых и специалистов при Правительстве Санкт-Петербурга, действительным членом академии Навигации и управления движением и членом научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации.

В последние годы профессорско-преподавательский состав кафедры пополнился молодыми кадрами: доцентами Кремлевым А.С., Чепинским С.А. (выпуска кафедры 2002-го года), Дударенко Н.А., Нуйей (Осипцевой) О.С., Николаевым Н.А., Слитой О.В. (выпуска кафедры 2003-го года), Герасимовым Д.Н. (выпуска кафедры 2005-го года), Арановским С.В., Блинниковым А.А. (выпуска кафедры 2006-го года), Сержантовой (Поляковой) М.В. (выпуска кафедры 2007-го года), Пыркиным А.А. (выпуска кафедры 2008-го года), Колюбиным С.А. (выпуска кафедры 2010-го года), Капитоновым А.А. и Шаветовым С.В. (выпуска каф К участие в подготовке магистров подключились профессора из Санкт-петербургских университетов Фрадков А.Л., Андриевский Б.Р., Тертычный В.Ю. и Фуртат И.Б.

Продолжает эффективно работать система подготовки кадров высшей научной квалификации, диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук защитил в 2013-м году выпускник кафедры 1998-го года Мельников В.Г.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области автоматических систем и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI-го столетия. На

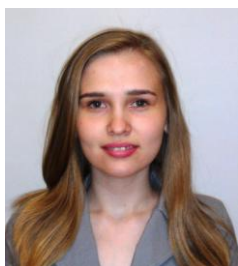
кафедре функционируют четыре научно-исследовательские группы: «Технической кибернетики» (основатель профессор И.В. Мирошник, научный руководитель профессор А.А. Бобцов), «Автоматизированного оптоэлектронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели профессор Ю.А. Сабинин и доцент П.В. Николаев, научные руководители – доцент В.И. Бойков и профессор А.В. Ушаков) и «Технической информатики и телемеханики (основатель профессор М.Л. Цуккерман, научный руководитель профессор А.В. Ушаков), «Интеллектуальной робототехники» (основатель и научный руководитель профессор А.А.Бобцов). Усилиями ученых кафедры на кафедре создана научная школа « Управление в условиях системных неопределенностей», при кафедре вот уже второе десятилетие проводятся ежегодные «Крещенские научные чтения», имеющие статус городского семинара по теории управления.

Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и трудах международных конференций. Сотрудниками кафедры опубликовано более 120 монографий и учебников, 250 методических и учебных пособий, 3500 статей, из них более 380 в журналах академий наук, около 300 статей и докладов в зарубежных научных изданиях. Ученые кафедры являются авторами более 600 изобретений, постоянно принимают участие в работе российских и зарубежных семинаров, конференций и конгрессов. Кафедра поддерживает контакты с 20 техническими зарубежными университетами.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов. Кафедра активно готовится к своему семидесятилетию, которое будет иметь место осенью 2015-го года.

ОБ АВТОРАХ

ВУНДЕР (ПОЛИНОВА) НИНА АЛЕКСАНДРОВНА



Родилась в 1992-м году, в 2009-м году закончила школу «с отличием», получив серебряную медаль. На основе конкурсной ЕГЭ системы получила приглашение пяти университетов РФ, из коих осознано выбрала Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики, и оптики «Университет ИТМО».

В 2013-м году по результатам защиты выпускной квалификационной работы (ВКР) получила академическую степень бакалавра техники и технологии, удостоившись диплома «с отличием». Автор ВКР стала лауреатом конкурса бакалаврских выпускных квалификационных работ Университета ИТМО. В 2015-м году закончила «с отличием» магистратуру Университета ИТМО по направлению «Системный анализ и управление», получив академическую степень магистра техники и технологий на основе защиты магистерской диссертации на тему «Фактор кратности собственных чисел: вопросы теории и приложения в задачах управления». В настоящее время – аспирант Университета ИТМО. Н. А. Вундер (Полинова) – автор монографии, учебного пособия, 15-ти научных печатных публикаций.

УШАКОВ АНАТОЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ



Родился в 1937-м году, в 1954-м году закончил мужскую среднюю школу, в 1960 – м году закончил «с отличием» СПбГУИТМО (б.ЛИТМО) по специальности 0606 – «Автоматика и телемеханика» с квалификацией инженер – электромеханик. Научный путь: аспирант–кандидат технических наук–доцент кафедры автоматике и телемеханики–доктор технических наук и профессор. В настоящее время –

профессор кафедры систем управления и информатики Университета ИТМО. А.В. Ушаков – автор 36 монографий, учебных пособий, препринтов и брошюр, более 350 научных печатных публикаций. Под научным руководством А.В. Ушакова подготовлено 26 кандидатов наук и два доктора наук. Круг научных интересов включает матричный формализм метода пространства состояния, эллипсоидные оценки качества процессов в многомерных системах, модальная робастность, управление в условиях неопределенности, системы с интервальными параметрами, проблемы вырождения сложных динамических систем, обобщенное модальное управление, двоичные динамические системы, решение задач помехозащиты методами двоичного наблюдения и двоичными рекуррентными процедурами, цифровое дистанционное управление, сложные системы с антропокомпонентами.

Ушаков Анатолий Владимирович
Вундер (Полинова) Нина Александровна

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Дополнительные главы

Учебное пособие для университетов

В авторской редакции

Компьютерная верстка и дизайн

А.В. Ушаков,
Н.А. Вундер (Полинова)

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. редакционно-издательским отделом

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД №00408 от 05.11.99.

Подписано к печати 27.02.2015.

Отпечатано на ризографе

Тираж 500 экз.

Заказ №1515

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО