МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Ю. Григорьев, Д.П.Малявко, К.А. Григорьев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Динамика материальной точки

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

УДК 531(075)

Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Григорьев К.А. Теоретическая механика. Динамика материальной точки: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО; ИХиБТ, 2015. – 66 с.

Содержит материал для самостоятельного изучения по разделу курса «Теоретическая механика», посвященному движению материальных тел под действием приложенных к ним сил, – «Динамика материальной точки».

Предназначено для студентов направлений 16.03.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения, 14.03.01 Ядерная энергетика и теплофизика, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технических машин и комплексов, 15.03.02 Технические машины и оборудование, 15.03.01 Автоматизация технологических процессов и производств.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Арет

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«Динамика» – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Покой – частный случай движения, поэтому статика – это частный случай динамики.

Кинематика исследует движение материальных тел с чисто геометрической точки зрения, следовательно, кинематику можно считать геометрическим введением в динамику.

Динамика делится на динамику материальной точки и на динамику системы материальных точек.

I. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Аксиомы динамики (законы динамики)

1. Материальная точка, на которую не действуют внешние силы, находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Или:

Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет своё состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

2. Действующая на материальную точку сила вызывает пропорциональное ей ускорение (рис. 1).

Данную аксиому можно записать формулой

$$\overline{F} = m\overline{W}, \tag{1}$$

где $\overline{F}$ – вектор силы; $\overline{W}$ – вектор ускорения; m – коэффициент пропорциональности, называется *инерционной массой точки.*

Инерционная масса m определяет способность тела сопротивляться изменению характера движения. Соотношение (1), устанавливающее связь между силой $\overline{F}$, массой m и ускорением $\overline{W}$, является важнейшим в классической механике и называется *основным уравнением динамики* (1-я форма).

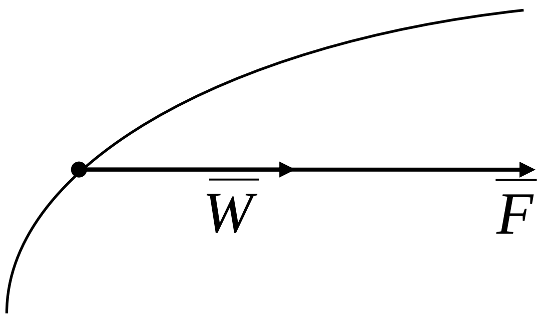

Рис. 1

Пример: материальная точка свободно падает вблизи поверхности планеты Земля (рис. 2). Согласно всемирному закону тяготения, сила притяжения двух тел друг к другу определяется формулой

$$F = \wp \frac{mM}{R^2}, \tag{2}$$

где m – масса материальной точки; M – масса планеты Земля; R – расстояние между материальной точкой и центром планеты; $\wp$ – универсальная гравитационная постоянная.

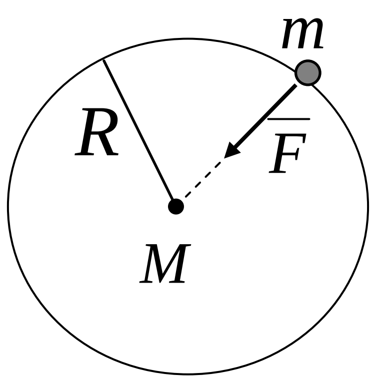

Рис. 2

Однако, согласно основному закону динамики, $\overline{F} = m\overline{W}$, следовательно, ускорение свободного падения

$$g = W = \frac{\wp M}{R^2}. \tag{3}$$

Отсюда видим, что ускорение свободного падения g не зависит от массы падающего тела.

Планета Земля представляет собой сфероид, сплюснутый с полюсов, поэтому в зависимости от <u>широты</u> пункта земного шара величина R будет различной. Это приводит к зависимости ускорения свободного падения от широты рассматриваемого пункта планеты. Крайние значения g на полюсе и на экваторе (на уровне моря) соответственно равны $\approx$ 9,83 м/с^2 и 9,78 м/с^2. Следовательно, одно и то же тело в разных точках земной поверхности будет иметь различный вес. Однако в данной точке поверхности Земли вес тел пропорционален их массе:

$$P_1 = m_1 g\ ; \qquad P_2 = m_2\, g\,, \quad \text{откуда} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}\ . \tag{4}$$

Таким образом, рычажные весы, используемые для определения веса тел, можно использовать и для определения массы тел.

3. *Несколько одновременно действующих на материальную точку сил (рис. 3) сообщают точке такое ускорение, какое бы сообщила ей одна сила, равная их геометрической сумме, т. е.* если на материальную точку действует система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, то $m\overline{W} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i$,

где $\overline{F} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i$ – равнодействующая системы сил.

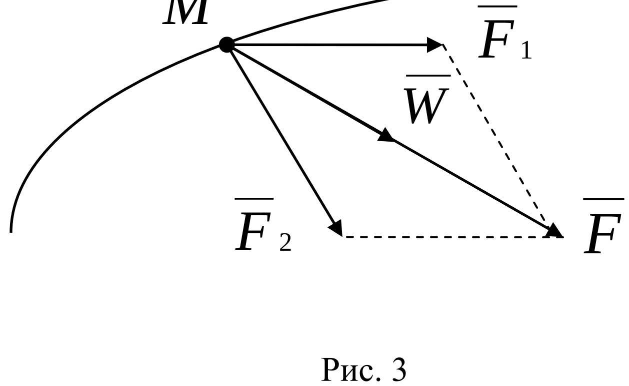

Рис. 3

Пример (см. рис. 3): на материальную точку M действуют две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, в этом случае её вектор ускорения движения $\overline{W}$ будет направлен по диагонали параллелограмма со сторонами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, т. е. туда же, куда действует равнодействующая сила $\overline{F}$.

4. *Движущиеся материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, равными по модулю, действующими вдоль одной прямой в противоположенные стороны.*

Так, например, на рис. 4 $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$.

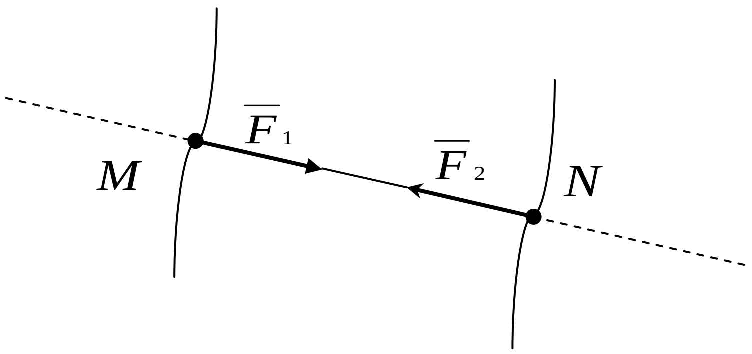

Рис. 4

Аксиомы динамики были впервые сформулированы английским учёным Исааком Ньютоном применительно к <u>инерциальным</u> системам отсчёта, т. е. к системам отсчёта, движущимся равномерно и прямолинейно.

2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка M массой m движется под действием произвольной системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, равнодействующая которой $\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$. Тогда основной закон динамики для этой точки выглядит следующим образом:

$$m\overline{W} = \overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i . \quad (5)$$

Введём в пространстве произвольную декартовую систему координат $Oxyz$ с ортами осей $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Тогда координаты положения точки M (рис. 5) являются функциями времени (*см. Кинематика, координатный способ задания движения материальной точки)*, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

являются переменными координатами точки M, зависящими от времени.

Также из кинематики мы знаем, что вектор ускорения материальной точки $\overline{W}$ при координатном способе задания движения определяется следующим выражением:

$$\overline{W} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}. \tag{7}$$

Вектор силы $\overline{F}_i$ через свои проекции на оси координат запишется в следующем виде:

$$\overline{F}_i = X_i \cdot \bar{i} + Y_i \cdot \bar{j} + Z_i \cdot \bar{k}, \tag{8}$$

где X_i, Y_i, Z_i – проекции вектора силы $\overline{F}_i$ на оси координат Ox, Oy, Oz соответственно, а вектор равнодействующей силы через свои проекции запишется в виде

$$\overline{F} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}. \tag{9}$$

Вспоминая теорему о проекции геометрической суммы на ось, получаем, что

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{10}$$

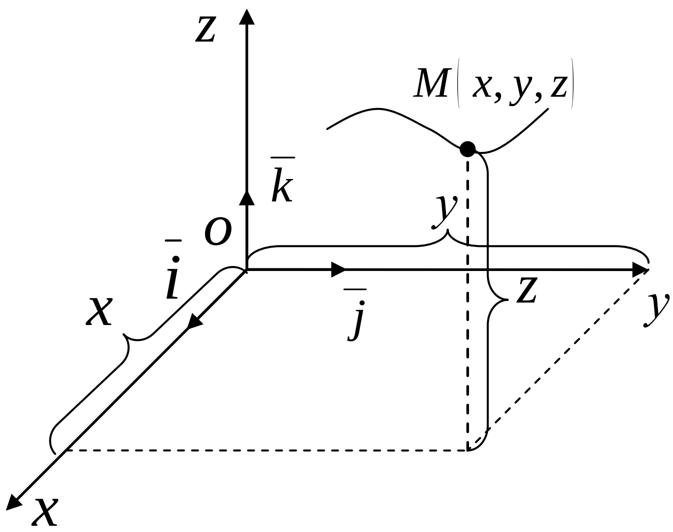

Рис. 5

Спроецируем векторное основное уравнение динамики (5) на оси координат с учётом выражений (7)–(10), получим дифференциальные уравнения движения материальной точки:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i; \\ m\ddot{y} = Y = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i; \\ m\ddot{z} = Z = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i. \end{cases} \tag{11}$$

Выражение (11) – это 2-я форма записи основного уравнения динамики материальной точки.

3. Две задачи динамики

Различают две задачи динамики – прямую и обратную.

Прямая задача динамики (первая) состоит в определении равнодействующей силы, действующей на точку известной массы, движущуюся по заданному закону.

Пример: пусть известен закон движения материальной точки и он задан координатным способом:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Тогда, согласно выражению (11), декартовые проекции на оси координат равнодействующей силы можно определить по формулам

$$X = m\cdot\ddot{x},\;\; Y = m\cdot\ddot{y},\;\; Z = m\cdot\ddot{z}\,.$$

Далее равнодействующую силу находят по формуле (9).

Таким образом, первая задача динамики всегда может быть решена с помощью операции двойного дифференцирования по времени математических выражений для закона движения материальной точки.

Пример: пусть материальная точка движется в плоскости Oxy по закону

$$\begin{cases} x = a\cos kt; \\ y = b\sin kt, \end{cases} \quad \text{где } a,\, b,\, k - \text{const}.$$

Тогда очевидно, что траектория движения описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. траекторией движения материальной точки является эллипс с полуосями a и b.

Из условия задачи имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = -ak\sin kt; \\ \dot{y} = bk\cos kt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -ak^2\cos kt = -k^2 x; \\ \ddot{y} = -bk^2\sin kt = -k^2 y. \end{cases}$$

Так как $X = m\ddot{x}$, $Y = m\ddot{y}$, то

$$\overline{F} = X\cdot\bar{i} + Y\cdot\bar{j} = m(\ddot{x}\cdot\bar{i} + \ddot{y}\cdot\bar{j}) = -mk^2(x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j}),$$

где $x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} = \bar{r}$ – радиус вектор положения материальной точки M в пространстве. Следовательно, $\overline{F} = -mk^2\cdot\bar{r}$.

Таким образом, данное движение происходит под действием силы, всегда направленной к центру эллипса (рис. 6). Модуль этой силы пропорционален расстоянию до центра эллипса:

$$F = mk^2\, OM$$

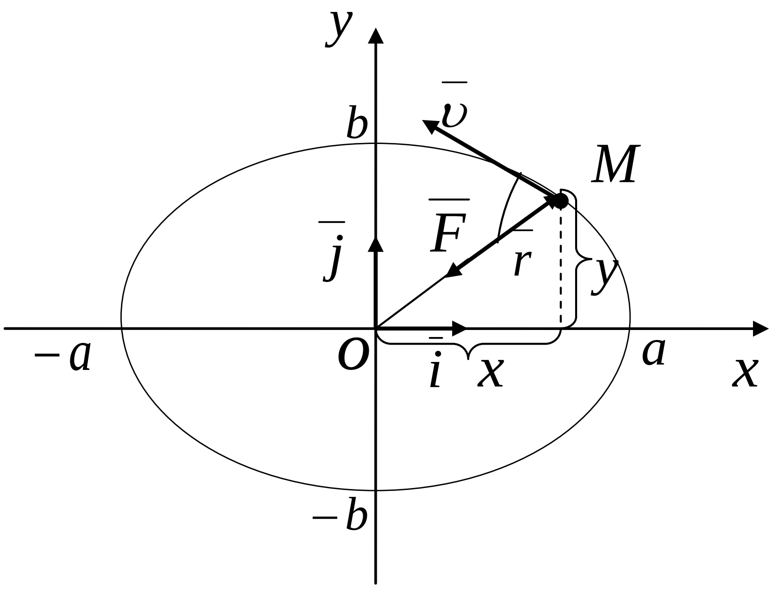

Рис. 6

Обратная задача динамики (вторая) состоит в определении закона движения материальной точки известной массы по заданным силам.

Так, пусть действующие на материальную точку силы заданы как функции:

1) времени t;

2) координат положения материальной точки x, y, z;

3) компонент (составляющих) вектора скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Тогда дифференциальные уравнения (11) движения материальной точки запишутся в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right); \\ m\ddot{y} = Y\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right); \\ m\ddot{z} = Z\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right). \end{cases} \tag{12}$$

Откуда видим, что получена система трех дифференциальных уравнений 6-го порядка, относительно трех неизвестных x, y, z.

Для определения закона движения в координатной форме необходимо проинтегрировать эту систему уравнений. В процессе интегрирования возникнут шесть произвольных констант интегрирования. Чтобы определить эти постоянные, следует задать начальные условия. Начальные условия определяют положение и скорость точки в момент начала движения $t_0 = 0$.

Так, при $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0, \tag{13}$$

где x_0, y_0, z_0 – известные координаты начального положения материальной точки в пространстве; $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ – известные компоненты (составляющие) вектора начальной скорости движения точки.

Таким образом, для решения задачи необходимо иметь, кроме системы уравнений (12), шесть начальных условий (13).

II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

1. Понятие о силе упругости

Рассмотрим металлическую винтовую пружину, подвешенную к горизонтальной неподвижной поверхности (рис. 7). Пусть l_0 – длина недеформированной пружины, l_0 – длина деформированной (растянутой) пружины, $\lambda = l - l_0$ – деформация растяжения. Как показывает опыт, при деформации пружины возникает упругая сила $\overline{F}$, стремящаяся вернуть пружину в исходное недеформированное состояние. Эту силу называют ещё *восстанавливающей*.

Величина данной силы в случае малых деформаций ($\lambda \ll l_0$) пропорциональна величине деформации λ и может быть определена из математического выражения закона Гука:

$$F = c\lambda, \tag{14}$$

где c – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом жёсткости пружины.

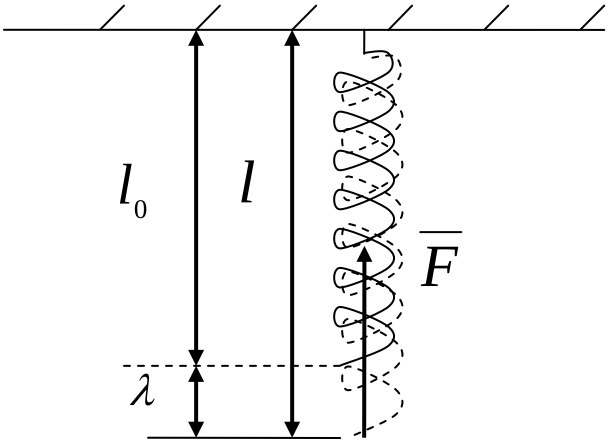

Рис. 7

Очевидно, что размерность коэффициента жесткости

$$[c] = \overbrace{\frac{\textit{Н}}{\textit{м}} = \frac{\textit{кг}}{\textit{с}^2}}^{\textit{Си}} = \overbrace{\frac{\textit{кГ}}{\textit{м}}}^{\textit{СГСЕ}}.$$

Коэффициент жёсткости c является упругой характеристикой пружины и в основном зависит от материала, из которого она изготовлена, и её геометрических размеров.

Силу $\overline{F}$ из выражения (1) называют *линейной восстанавливающей силой*, так как она пропорциональна первой степени отклонения точки от равновесного положения.

2. Экспериментальное определение коэффициента жёсткости

Пусть имеется вертикальная пружина (рис. 8), точка O – точка конца пружины в недеформированном состоянии.

1. Подвесим к пружине тело массой m и веса $P = mg$.

2. Подождём, пока колебания затухнут. Пусть точка A – конец пружины с подвешенным грузом. Измерим деформацию пружины:

$$\lambda_{CT} = OA.$$

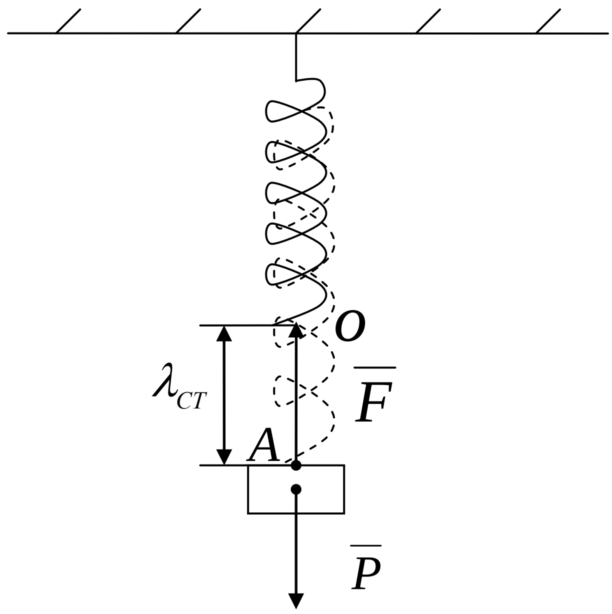

Рис. 8

3. Из условия равновесия груза силы $\overline{P}$ и $\overline{F}$ такие, что $\overline{P} = -\overline{F}$, следовательно, $P = F$.

4. Тогда из закона Гука получим, что

$$P = c\lambda_{CT} \quad \Rightarrow c = \frac{P}{\lambda_{CT}}. \tag{15}$$

Таким образом, коэффициент жёсткости c равен весу груза, делённому на статическую деформацию пружины, вызванную этим грузом.

3. Горизонтальные гармонические колебания груза на пружине

Рассмотрим тело массой m, лежащее на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности (рис. 9). С помощью горизонтальной пружины с коэффициентом жёсткости c тело прикреплено к вертикальной стенке.

Введём прямоугольную декартовую плоскую систему координат Oxy с началом в точке O – положения конца недеформированной пружины. С учётом выбранной системы координат $x = OA = \lambda$ – это одновременно и x-я координата положения груза, и текущая деформация пружины λ. Пусть в какой-то момент времени тело было сдвинуто из равновесного положения точки O. Рассмотрим силы, действующие на груз. Это $\overline{P}$ – сила веса груза, $\overline{N}$ – нормальная реакция гладкой поверхности, $\overline{F}$ – упругая сила пружины.

Трением о поверхность (так как она гладкая) и сопротивлением воздуха пренебрегаем. Как видно из рис. 9, силы $\overline{P}$ и $\overline{N}$ проекции на ось x не имеют, т. е. $P_x = N_x = 0$.

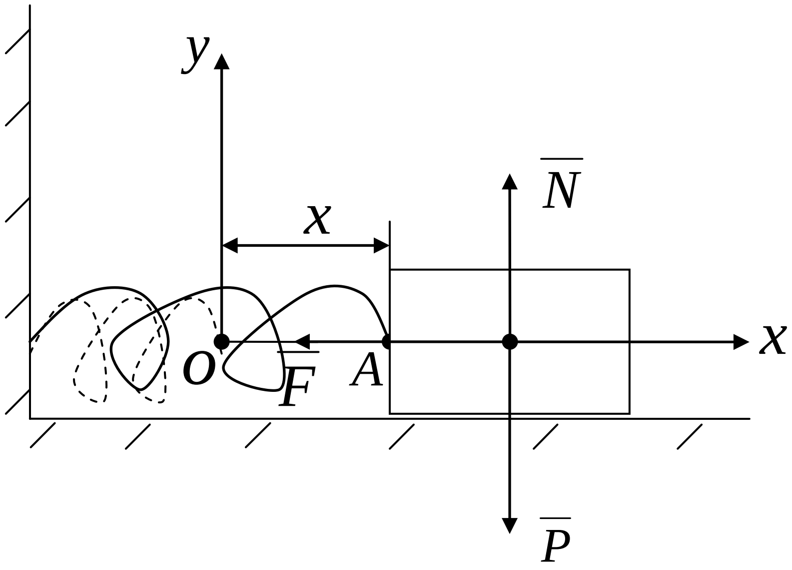

Рис. 9

На ось x в полную величину проецируется упругая восстанавливающая сила пружины $\overline{F}$, проекция которой на ось x будет

$$F_X = \begin{cases} -c|x| = -cx, \ \ \textit{если } x > 0 - \textit{пружина растянута}; \\ c|x| = c(-x), \ \ \textit{если } x < 0 - \textit{пружина сжата}, \end{cases}$$

т. е. при любом x проекция силы F на ось x определяется формулой

$$F_X = -cx. \tag{16}$$

Зная F_X, составим дифференциальное уравнение движения груза, используя результаты подразд. 2 разд. I:

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + cx = 0. \tag{17}$$

Так как на тело вдоль оси x никакие другие силы, кроме линейной восстанавливающей силы F_X, не действуют, то уравнение (17) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний груза (тела) на пружине.*

Введём обозначение $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, тогда уравнение (17) перепишем в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{18}$$

где k называется круговой частотой колебаний; в дальнейшем будет ясно, почему этот параметр имеет такое название.

Как видно, уравнение (18) – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решается оно обычным приёмом составления характеристического уравнения, т. е. решение этого уравнения ищем в виде $x = \ell^{r \cdot t}$, тогда, подставляя это решение в уравнение (18), получим $r^2 \ell^{rt} + k^2 \ell^{rt} = 0$, откуда следует характеристическое уравнение

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm k\,i \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

(его корни чисто мнимые).

Следовательно, общее решение уравнения (18) имеет вид

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt, \tag{19}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования, значения которых определяются из начальных условий.

Так, пусть задано, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ пружина была растянута на величину x_0 и грузу толчком сообщили начальную скорость $\dot{x}_0$. Таким образом, начальные условия следующие: $t_0 = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Подставим в выражение (19) значение времени $t_0 = 0$, получим

$$x_0 = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0), \text{ но } \sin(0) = 0, \text{ а } \cos(0) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = x_0. \tag{20}$$

Продифференцируем выражение (19) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (21)$$

Подставим в уравнение (21) $t = 0$, получим

$$\dot{x}_0 = -C_1 k \sin(0) + C_2 k \cos(0) \Rightarrow C_2 k = \dot{x}_0 \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}. \qquad (22)$$

С учётом выражений (20) и (22) решение (19) запишется в виде

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \cdot \sin kt. \qquad (23)$$

Преобразуем выражение (23). Введём новые обозначения:

$$x_0 = a \cdot \sin\,\alpha; \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = a \cdot \cos\,\alpha. \qquad (24)$$

Откуда получаем, что

$$x_0^2 + \frac{\dot{x}^2}{k^2} = a^2 \ \ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}\,, \qquad (25)$$

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{a \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot{x}_0\, k}{\dot{x}_0}. \qquad (26)$$

С учётом выражений (24) выражение (23) запишется в виде

$$x = a \ \ \sin\alpha \cdot \cos kt + \cos\,\alpha \cdot \sin kt \ \ = a \ \ \sin \ \ kt + \alpha \ \ , \qquad (27)$$

где a и α определяются из выражений (25) и (26).

Движение материальной точки, заданное выражением (27), называется *гармоническими колебаниями*.

Так как $-1 \le \sin(kt+\alpha) \le 1$, то $-a \le x \le a$. Следовательно, с изменением времени t продольная координата груза x изменяется в пределах от $(-a)$ до $(+a)$ и полный размах колебаний достигает величины $2a$.

Величина a, равная полуразмаху колебаний, называется амплитудой колебаний.

Как видно из выражения (25), амплитуда свободных колебаний зависит только от начальных условий движения.

Переменная величина $\varphi = kt + \alpha$ называется *фазой колебаний*; $\alpha = \varphi /_{t=0}$ – *начальной фазой* колебаний, она зависит только от начальных условий движения (26).

Определение: *движение материальной точки называется периодическим, если через некоторый промежуток времени T значения и координаты положения точки и её скорости повторяются.*

Для гармонических колебаний материальной точки, описываемых выражением (27), скорость точки в любой момент времени определится выражением

$$\dot{x} = a\,k \cdot \cos(kt+\alpha). \tag{28}$$

Мы знаем, что функции синуса и косинуса являются периодическими с периодом 2π, следовательно, значения координаты x и скорости $\dot{x}$ будут повторять свои значения при изменении фазы колебаний на величину 2π. Отсюда можно определить период колебаний:

$$k(t+T)+\alpha = kt+\alpha+2\pi. \tag{29}$$

Следовательно, свободные гармонические колебания материальной точки являются периодическими с периодом T, величина которого может быть определена из выражения (29):

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Так как период T – это время, через которое координата положения точки и её скорость повторяются, то для колебательного движения период T – это время одного полного колебания материальной точки.

Вспомнив, что $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, получим

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (30)$$

Тогда материальная точка за единицу времени совершит $f = \frac{1}{T}$ колебаний. Величину f называют *частотой колебаний*, размерность $[f] = Гц = \frac{кол}{с}$.

Величина

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (31)$$

называется *круговой частотой колебаний*, размерность $k = \frac{рад}{с}$.

4. Вертикальные колебания груза на пружине

Прикрепим груз весом P к концу вертикально подвешенной пружины (рис. 10), один конец которой закреплён на неподвижной горизонтальной поверхности.

Пусть точка A – точка конца недеформированной пружины, точка O – конец статически деформированной пружины с грузом P, т. е. то положение конца пружины, когда тело не движется, а сила тяжести уравновешивается восстанавливающей силой упругости $P = \lambda_{CT}\, c$.

Точка B – текущее положение конца деформированной пружины при колебаниях груза. Тогда, согласно закону Гука,

$OA = \lambda_{CT} = \frac{P}{c}$ – статическая деформация пружины.

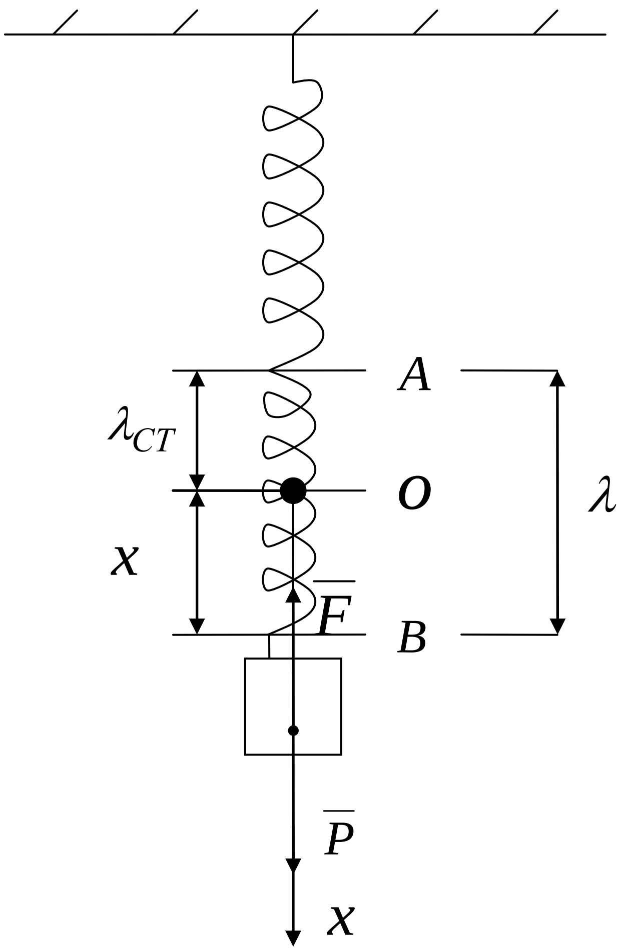

Рис. 10

Введём ось Ox с началом в точке O, направленную верти-кально вниз. Тогда $OB = x$ – динамическая деформация пружины, равная (с учётом нашего выбора оси Ox) текущей координате положения груза. Составим уравнение движения груза, при этом не учитываем сопротивление воздуха и др.:

$$m\ddot{x} = P_X + F_X \text{, где } P_X = P \text{, а } F_X = -c\lambda = -c\left(\lambda_{CT} + x\right),$$

$$\lambda = AB = OA + OB = \lambda_{CT} + x \text{ – полная деформация пружины.}$$

Тогда получаем

$$m\ddot{x} = P - c\left(\lambda_{CT} + x\right) = P - c\lambda_{CT} - cx,$$

но $\lambda_{CT} = \dfrac{P}{c} \Rightarrow$ получаем уравнение вертикальных колебаний груза на пружине:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{32}$$

Если уравнение (32) сравнить с уравнением (17), мы видим, что дифференциальное уравнение вертикальных колебаний совпадает с дифференциальным уравнением горизонтальных колебаний. Поэтому вертикальные колебания также носят гармонический и периодический характер и для них справедливы все соотношения, полученные в предыдущем подразделе.

III. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ИМПУЛЬС МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ) И ИМПУЛЬС СИЛЫ

1. Понятие о количестве движения материальной точки (импульс материальной точки)

Пусть некоторая материальная точка массы m (рис. 11) движется по криволинейной траектории со скоростью $\vec{\upsilon}$.

Определение: *количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на вектор скорости:*

$$\overline{Q} = m \cdot \overline{\upsilon}. \tag{33}$$

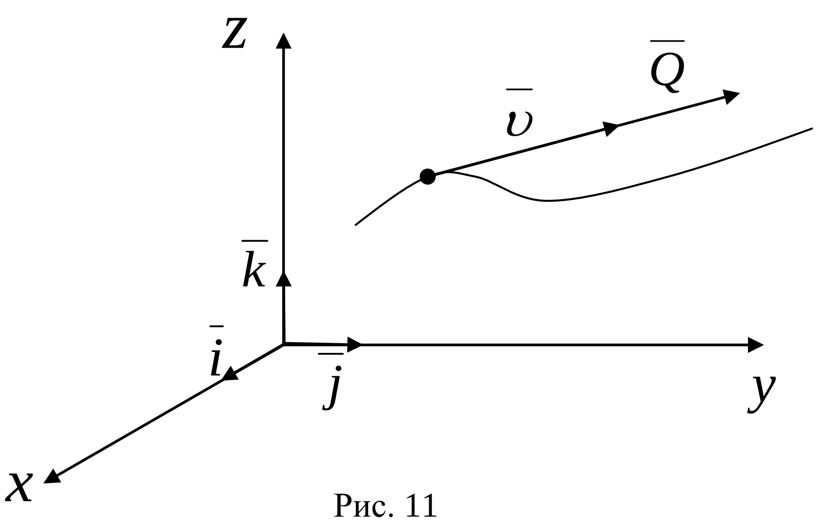

Рис. 11

Размерность количества движения в системе СИ:

$$[Q] = кг \cdot \frac{м}{с} = Н \cdot с \ ,$$

в СГСЕ:

$$[Q] = КГ \cdot с$$

Введём прямоугольную декартовую систему координат *Oxyz* с ортами осей $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (см. рис. 11), тогда вектор скорости $\bar{\upsilon}$ через свои проекции можно записать в следующем виде *(см. Кинематика, координатный способ задания движения материальной точки)*:

$$\bar{\upsilon} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k} \,. \tag{34}$$

Следовательно, исходя из выражения (33), проекции вектора количества движения $\bar{Q}$ на оси координат будут:

$$\left.\begin{aligned} Q_X &= m\dot{x}; \\ Q_Y &= m\dot{y}; \\ Q_Z &= m\dot{z}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Основное уравнение динамики для материальной точки имеет вид

$$m\bar{W} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \,, \tag{36}$$

где $\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$ – равнодействующая всех сил, действующих на точку.

Однако

$$\bar{W} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad m\bar{W} = m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m\bar{\upsilon})}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} \,.$$

С учётом этого получаем новую, 3-ю форму основного уравнения динамики материальной точки:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}. \tag{37}$$

Производная по времени от вектора количества движения материальной точки равна равнодействующей всех приложенных к точке сил.

2. Понятие об импульсе силы

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории под действием некоторой системы сил. Предположим, что в числе действующих на точку сил имеется некоторая сила $\overline{F}$, которая во всё время движения постоянна по модулю (величине) и направлению. Тогда *импульсом этой силы* на некотором интервале времени называется вектор, равный произведению вектора силы на продолжительность интервала времени её действия:

$$\overline{S} = \overline{F} \cdot (t - t_0), \tag{38}$$

где $(t - t_0)$ – интервал времени действия постоянной силы $\overline{F}$.

Размерность импульса силы в СИ: $[S] = Н \cdot с$ или $КГ \cdot с$ *в СГСЕ*, т. е. та же размерность, что и для импульса материальной точки (количества движения).

Рассмотрим общий случай. Сила $\overline{F}$, действующая на материальную точку, переменна и по модулю, и по направлению (рис. 12).

Мысленно разобьем рассматриваемый интервал времени от t_0 до t на n равных элементарных подинтервалов времени $\Delta t = \frac{t - t_0}{n}$. Тогда на траектории мы получим n участков движения, соответствующих интервалам времени.

Пусть $\overline{F}(t_i)$ – вектор силы, действующий на материальную точку в начале i- го подинтервала времени.

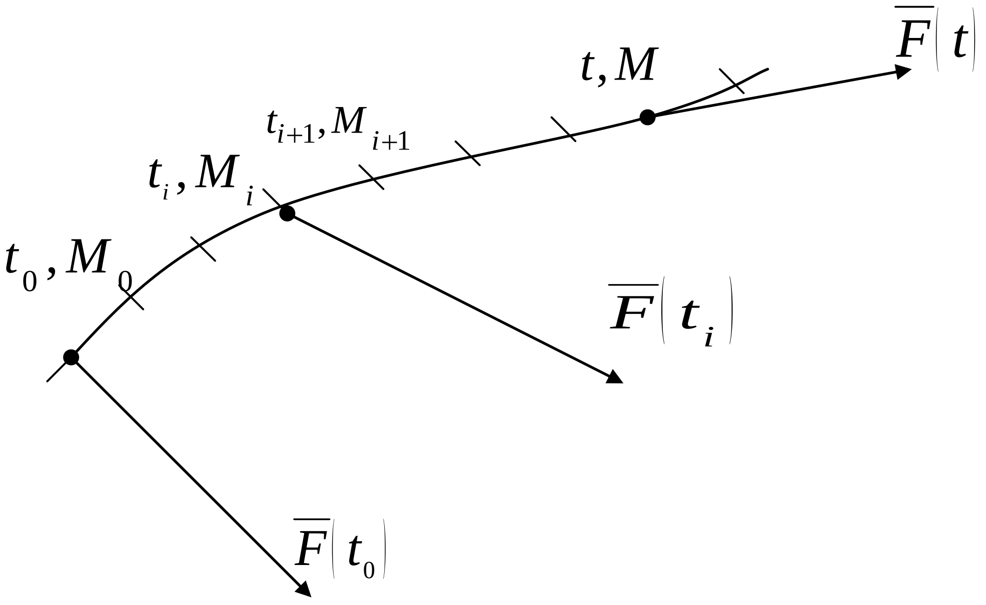

Рис. 12

Будем считать, что число подинтервалов n настолько велико, а продолжительность каждого i-го подинтервала настолько мала, что сила $\overline{F}(t_i)$ в течение времени Δt не меняется ни по модулю, ни по направлению. Тогда приближённо элементарный импульс на i-м подинтервале времени определится выражением

$$\overline{S}_i = \overline{F}\ \ t_i\ \ \Delta t. \tag{39}$$

На всём интервале времени $(t - t_0)$ приближённо импульс силы будет равен геометрической сумме импульсов сил на каждом i-м подинтервале времени:

$$\overline{S}^{\ n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}\ \ t_i\ \ \Delta t\,. \tag{40}$$

Данная формула для вычисления импульса силы $\overline{F}$ на интервале времени от t_0 до t будет тем точнее, чем больше число интервалов n и меньше продолжительность Δt_i каждого подинтервала времени. Поэтому точным значением импульса силы $\overline{F}$ на интервале времени от t_0 до t будет предел

$$\overline{S} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(t_i)\Delta t.$$

Это, если вспомнить определение интеграла,

$$\overline{S} = \int_{t_0}^{t} \overline{F} dt. \tag{41}$$

Следовательно, *импульс силы на некотором интервале времени равен векторному интегралу от вектора силы по времени на том же интервале времени.*

Замечание: так как векторный интеграл геометрической суммы равен геометрической сумме векторных интервалов, то импульс равнодействующей силы $\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$ на промежутке времени от t_0 до t будет равен

$$\overline{S} = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \overline{F_i} \cdot dt.$$

3. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Определение: *геометрическое приращение вектора количества движения материальной точки (импульса точки) на некотором интервале времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил на том же интервале времени:*

$$\overline{Q}(t) - \overline{Q}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \overline{F_i} \cdot dt.$$

Доказательство: для доказательства теоремы воспользуемся 3-й формой основного уравнения динамики:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{F},$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая сила, равная $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$.

Проинтегрируем это векторное равенство по времени на интервале от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\overline{Q}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot dt, \tag{42}$$

но интеграл

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\overline{Q}}{dt} dt = \overline{Q}(t) - \overline{Q}(t_0) \tag{43}$$

равен геометрическому приращению вектора количества движения материальной точки на интервале от t_0 до t, а $\int_{t_0}^{t} \overline{F} dt = \overline{S}$ – импульс равнодействующей силы на том же интервале времени.

Согласно правилам векторного интегрирования,

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \overline{F_i} \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \overline{F}_i \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i, \tag{44}$$

где $\overline{S}_i$ – импульс i-й силы $\overline{F}_i$ на интервале времени от t_0 до t.

С учётом выражений (43) и (44) выражение (42) примет вид

$$\overline{Q}(t) - \overline{Q}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i. \tag{45}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Как видно из выражения (45), вектор количества движения за промежуток времени от t_0 до t не изменится $\overline{Q}(t) = \overline{Q}(t_0)$, если геометрическая сумма импульсов всех сил на этом интервале времени равна нулю.

Замечание 2. Теорема об изменении импульса материальной точки получена из основного уравнения динамики. Вопрос: когда при решении задач лучше использовать основной закон динамики, а когда – теорему об изменении количества движения точки?

Очевидно, что если в числе известных и неизвестных параметров задачи мы имеем массу, силы и ускорения, то используем для решения задачи основной закон динамики.

Если в числе известных и неизвестных параметров задачи имеем массу, начальную и конечные скорости, силы и время, то для решения задачи используем теорему об изменении импульса точки.

Пример: струя несжимаемой жидкости диаметром d набегает под углом 90 °С на горизонтальную неподвижную поверхность со скоростью υ и растекается по ней (рис. 13). Плотность жидкости ρ. Требуется определить силу, с которой жидкость действует на поверхность.

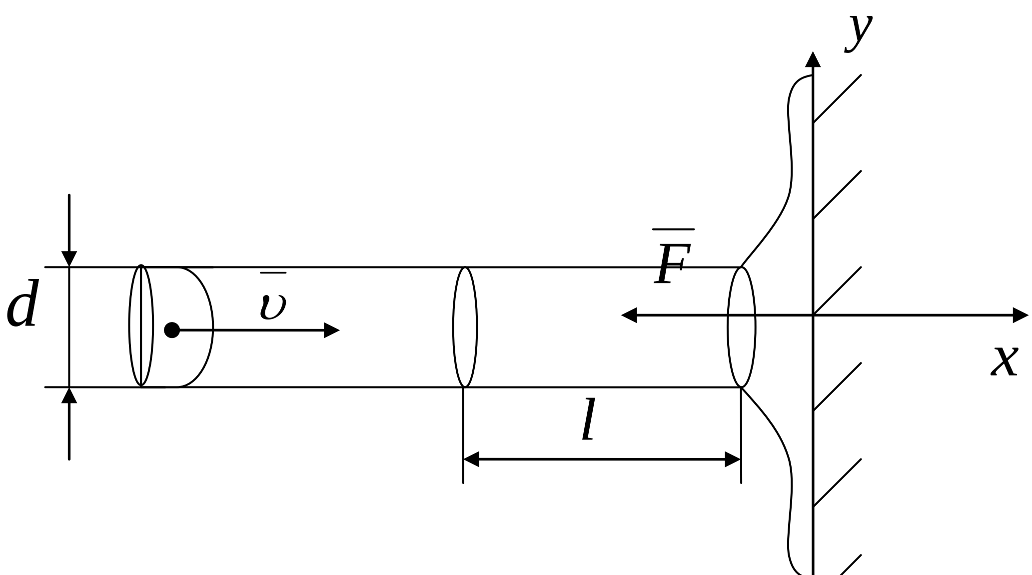

Рис. 13

Сила, с которой жидкость действует на стенку, по величине равна силе, с которой стенка действует на жидкость. Поэтому уравнение изменения вектора количества движения для массы жидкости $m = \rho \upsilon \pi d^2 / 4\, \Delta t$ в проекции на ось x запишется в следующем виде:

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = -F\Delta t.$$

Так как $\upsilon_{1x} = 0,$ а $\upsilon_{0x} = \upsilon$, то записанное выражение примет вид

$$-\rho\upsilon^2 \pi d^2 / 4\Delta t = -F\,\Delta t, \quad \text{откуда } F = \rho\upsilon^2 \pi d^2 / 4.$$

IV. КИНЕТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Кинетические моменты материальной точки относительно центра и оси

Кинетические моменты материальной точки относительно центра и оси – это моменты вектора количества движения этой точки относительно центра и оси. Они вводятся по аналогии с моментами силы относительно центра и оси, определёнными в статике. При этом все положения, введённые для момента вектора силы, справедливы и для момента вектора количества движения (кинетического момента). Только в них необходимо заменить вектор силы $\overline{F}$ на вектор количества движения $\overline{Q} = m\overline{\upsilon}$. Так как кинетический момент материальной точки относительно центра – это момент вектора количества движения относительно центра, то так же, как и момент силы относительно центра, кинетический момент точки – это вектор

$$\vec{I}_0 = \overline{M}_0(\overline{Q}).$$

Направлен данный вектор перпендикулярно плоскости, в которой лежат центр O и вектор количества движения $\overline{Q}$, в ту сторону, откуда вращение картинки под действием вектора $\overline{Q}$ вокруг центра O видится против хода часовой стрелки (рис. 14). Модуль этого вектора

$$I_0 = M_0(\overline{Q}) = Qd,$$

где d – кратчайшее расстояние от центра O до линии действия вектора количества движения $\overline{Q}$.

Так же как и для момента силы относительно центра, для кинетического момента материальной точки относительно центра справедливо равенство

$$\vec{I}_0 = \overline{r} \times \overline{Q}, \tag{46}$$

где $\overline{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор положения материальной точки.

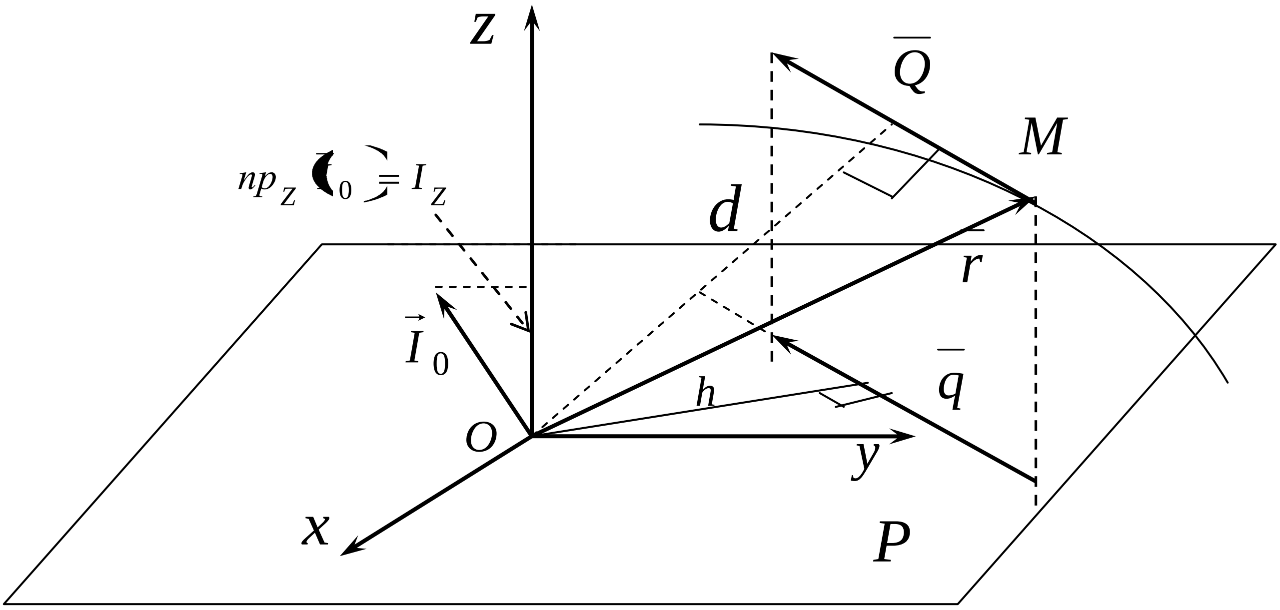

Рис. 14

Для проведения аналогии между кинетическим моментом материальной точки относительно оси и моментом силы относительно оси построим ось Oz и плоскость $P \perp Oz$, проходящую через точку O.

Спроецируем вектор количества движения на плоскость P, получим вектор $\overline{q} = np_P(\overline{Q})$. Пусть h – кратчайшее расстояние от центра O до линии действия вектора $\overline{q}$ (см. рис. 14). Тогда *кинетическим моментом материальной точки относительно оси является взятая с соответствующим знаком скалярная величина, равная* *моменту проекции вектора количества движения относительно точки O:*

$$I_Z = M_Z\left(\overline{Q}\right) = M_0\left(\overline{q}\right) = \pm q h. \qquad (47)$$

Кинетический момент точки относительно оси считается положительным, если наблюдатель, находящийся в положительном направлении оси Oz, видит вращение картинки под действием вектора $\overline{q}$ относительно оси против хода часовой стрелки. Если наблюдатель видит вращение по часовой стрелке, то кинетический момент точки относительно оси отрицательный.

Так же как и для моментов силы относительно оси и центра, лежащего на этой оси, для кинетических моментов точки справедлива следующая теорема:

кинетический момент точки относительно оси равен проекции на эту ось вектора кинетического момента этой точки относительно любого центра, лежащего на оси:

$$I_Z = np_Z(\vec{I}_0). \qquad (48)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы о связи момента силы относительно оси и момента этой же силы относительно любого центра, лежащего на оси.

Если ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$, то по аналогии с выражением (48) получим

$$I_X = np_X\left(\overline{I}_0\right); \; I_Y = np_Y\left(\overline{I}_0\right).$$

Следовательно, вектор кинетического момента точки относительно начала системы координат через свои проекции на оси координат может быть записан в виде

$$\overline{I}_0 = I_X \cdot \overline{i} + I_Y \cdot \overline{j} + I_Z \cdot \overline{k} \; . \qquad (49)$$

Если вспомнить, что радиус-вектор $\bar{r}$ положения точки M и вектор количества движения $\overline{Q}$ можно записать в координатной форме в виде

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \quad \text{и} \quad \overline{Q} = m\left(\dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}\right),$$

то векторное выражение (46) также можно записать через определитель 3-го порядка:

$$\bar{I}_0 = \bar{r} \times \overline{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = m\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right)\bar{i} + m\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right)\bar{j} + m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\bar{k}. \quad (50)$$

Сравнивая выражения (49) и (50), приходим к аналитическим уравнениям для определения кинетических моментов точки относительно декартовых осей:

$$\left.\begin{aligned} I_X &= \left(y\dot{z} - z\dot{y}\right)m; \\ I_Y &= \left(z\dot{x} - x\dot{z}\right)m; \\ I_Z &= \left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)m. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

2. Теорема о кинетическом моменте материальной точки относительно центра

Производная по времени от кинетического момента материальной точки относительно неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех сил, действующих на материальную точку, относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{I}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_i\right).$$

Доказательство: для доказательства теоремы воспользуемся векторной формулой (46) для определения кинетического момента точки относительно центра:

$$\overline{I}_0 = \overline{r} \times \overline{Q}.$$

Продифференцируем левую и правую части этого выражения по времени, получим

$$\frac{d\overline{I}_0}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \times \overline{Q} + \overline{r} \times \frac{d\overline{Q}}{dt}. \qquad (52)$$

Согласно кинематике материальной точки,

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\upsilon} \Rightarrow \frac{d\overline{r}}{dt} \times \overline{Q} = \overline{\upsilon} \times m\overline{\upsilon} = 0. \qquad (53)$$

Согласно основному уравнению динамики в 3-й форме,

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i. \qquad (54)$$

Подставляя выражения (53) и (54) в (52), получим, что

$$\frac{d\overline{I}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r} \times \overline{F}_i.$$

Вспоминая векторную формулу для определения вектора момента силы относительно центра, имеем, что $\overline{r} \times \overline{F}_i = \overline{M}_0(\overline{F}_i)$ – вектор момента силы $\overline{F}_i$ относительно центра O.

Следовательно,

$$\frac{d\overline{I}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i). \qquad (55)$$

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает <u>следствие</u>:

производная по времени от кинетического момента материальной точки относительно оси равна алгебраической сумме моментов всех действующих на точку сил относительно этой же оси:

$$\frac{dI_Z}{dt}=\sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i\right).$$

<u>Доказательство</u>: для доказательства следствия проведём через нашу точку O ось Oz и спроецируем векторное равенство (55) на ось Oz. Так как $np_Z\left(\overline{l}_0\right)=I_Z$ и, согласно теореме из статики, $np_Z\,\overline{M}_0\left(\overline{F}_i\right)=M_Z\left(\overline{F}_i\right)$, получаем, что

$$\frac{dI_Z}{dt}=\sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i\right). \tag{56}$$

3. Движение материальной точки в поле центральных сил

Определение: *полем центральных сил называют часть пространства, в каждой точке которого на тело действует сила, направленная к неподвижному центру.*

Рассмотрим движение материальной точки M (рис. 15) в поле центральных сил.

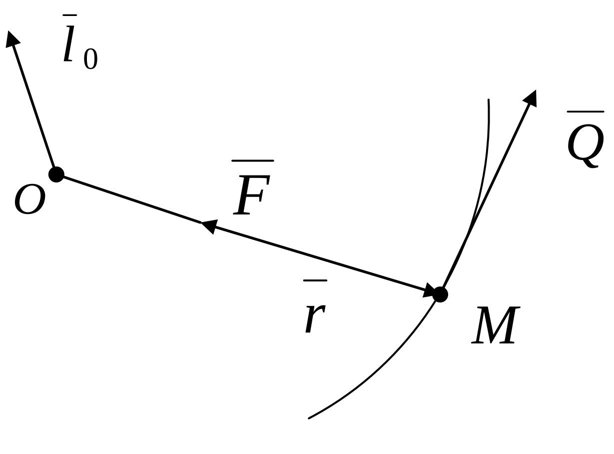

Рис. 15

Пусть точка O – центр поля, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M, $\bar{F}$ – центральная сила, действующая на точку, $\bar{Q}$ – вектор количества движения материальной точки в рассматриваемый момент времени. Применим для нашей материальной точки M теорему о кинетическом моменте точки относительно центра:

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \overline{M}_0(\bar{F}).$$

Но $\overline{M}_0(\bar{F}) = 0$, так как линия действия силы $\bar{F}$ пересекает центр O. Следовательно,

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_0 = \vec{c} = \text{const.} \tag{57}$$

Таким образом, кинетический момент материальной точки относительно центра поля есть вектор, постоянный по модулю и направлению. Следовательно, плоскость, перпендикулярная вектору кинетического момента точки, будет неподвижна. А именно, в данной плоскости лежат материальная точка и её вектор скорости. Эту плоскость называют *плоскостью орбиты* движущейся точки. Тем самым мы доказали, что орбиты планет – плоские.

Рассмотрим движение Земли вокруг Солнца по эллиптической орбите (рис. 16). Солнце, как мы знаем, находится в одном из фокусов эллипса: точка A – дальняя от Солнца точка орбиты Земли называется *апогелий*. Точка P – ближайшая к Солнцу точка орбиты – *перегелий*.

Отношение $\varepsilon = \dfrac{OC}{CP} = \dfrac{OC}{AC}$ называется эксцентриситетом эллипса. Пусть скорость движения Земли в апогелии $\bar{\upsilon}_A$, количество движения $\bar{Q}_A$, а скорость движения Земли в перегелии $\bar{\upsilon}_P$ и количество движения $\bar{Q}_P$. Тогда, согласно определению, модуль кинетического момента планеты в перегелии относительно Солнца $l_0^{(P)} = OP \cdot Q_P$, а в апогелии – $l_0^{(A)} = AO \cdot Q_A$.

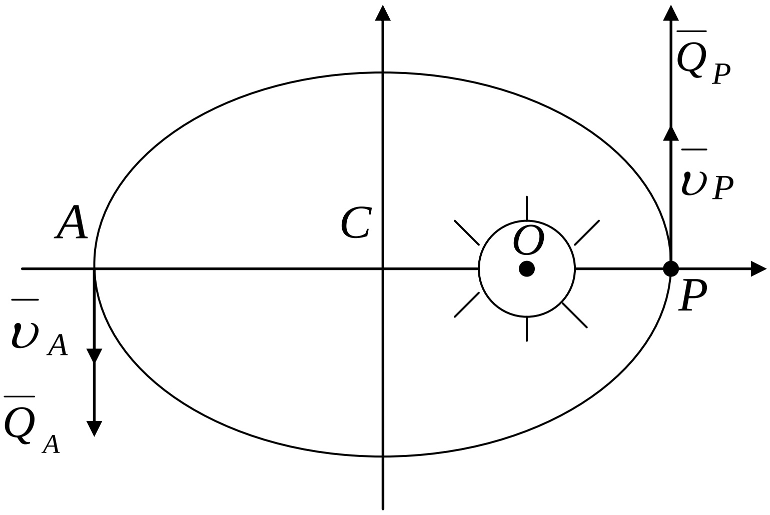

Рис. 16

В силу постоянства кинетического момента $l_0^{(P)} = l_0^{(A)}$, т. е.

$$OP \cdot m \cdot \upsilon_P = OA \cdot m \cdot \upsilon_A, \tag{58}$$

где m – масса Земли.

Определим расстояние OP и OA через эксцентриситет эллипса ε и большую полуось $a = AC = CP$. Очевидно,

$$OP = a(1-\varepsilon), \quad \text{а} \quad AO = a(1+\varepsilon). \tag{59}$$

Тогда из выражения (58) с учётом (59) получим

$$\upsilon_A = \frac{OP}{OA}\upsilon_P = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\upsilon_P, \tag{60}$$

формулу, связывающую скорость планеты в апогелии с её скоростью в перегелии.

V. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ

1. Понятие о механической работе

Пусть материальная точка движется прямолинейно, а в числе действующих на неё сил имеется сила $\overline{F}$, постоянная по модулю и по направлению (рис. 17). Пусть M_0 и M – начальное и конечное положения материальной точки. Угол α – угол между направлением перемещения и вектором силы $\overline{F}$. Очевидно, что $\alpha = \text{const}$ во всё время движения. Тогда *работа силы* на указанном перемещении равна скалярному произведению вектора силы $\overline{F}$ на вектор перемещения $\overrightarrow{M_0M}$:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_0M} = F \cdot M_0M \cdot \cos\alpha . \tag{61}$$

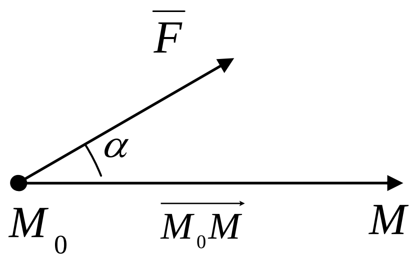

Рис. 17

Работа силы будет положительной, если $\cos\alpha > 0$, т. е. угол α – острый, и отрицательной, если $\cos\alpha < 0$, т. е. угол α – тупой (рис. 18).

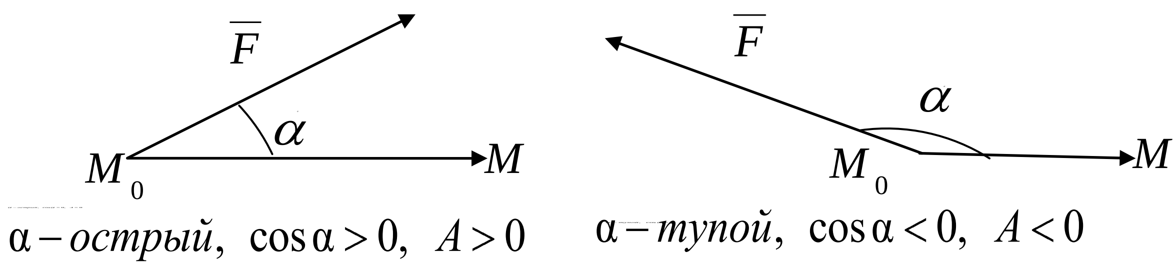

Рис. 18

Размерность работы в системе СИ: $[A] = Н \cdot м = \dfrac{кг \cdot м^2}{с^2} = Дж$.

Рассмотрим общий случай: материальная точка движется по криволинейной траектории и на неё действует сила $\overline{F}$, переменная по величине и направлению (рис. 19).

Пусть в начальный момент времени t_0 материальная точка находилась в точке M_0 траектории, а её радиус-вектор относительно произвольного неподвижного центра O равен $\overline{r_0}$. Сила, действующая на точку в этот момент времени, $\overline{F_0}$. Соответственно, в конечный момент времени материальная точка находится в точке M траектории, её радиус-вектор относительно того же неподвижного центра O равен $\overline{r}$, сила, действующая на материальную точку в конечный момент времени, $\overline{F}$.

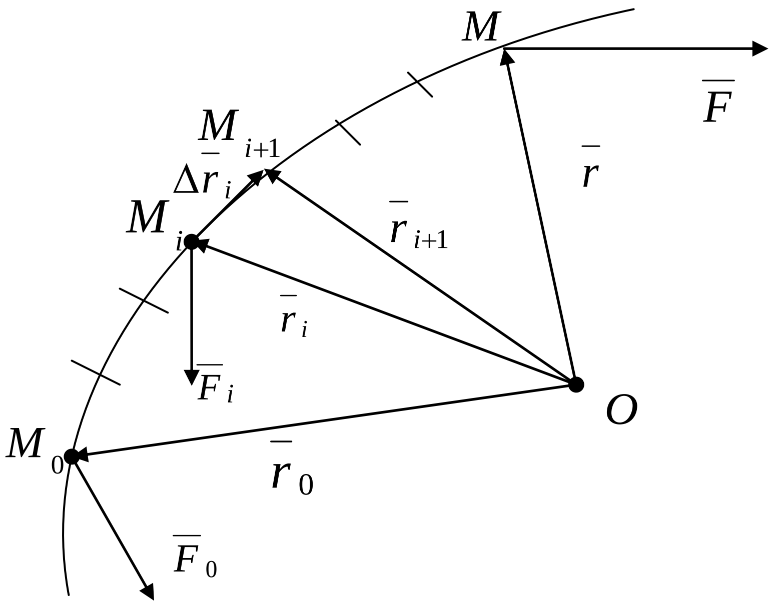

Рис. 19

Мысленно разобьём траекторию перемещения материальной точки M_0M на n подинтервалов. Для каждого i-го подинтервала введём $\overline{r}_i = \overline{r}(t_i)$ – радиус-вектор материальной точки начала i-го подинтервала времени. Тогда $\overline{r}_{i+1} = \overline{r}(t_{i+1})$ – радиус-вектор материальной точки начала $(i+1)$-го подинтервала и конца i-го подинтервала перемещения, а $\Delta\bar{r}_i = \bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i$ – геометрическое (векторное) приращение радиуса-вектора $\bar{r}$ на i-м элементарном перемещении материальной точки.

Пусть $\vec{F}_i = \bar{F}(t_i)$ – сила, действующая на материальную точку в момент времени t_i – начала i-го подинтервала перемещения. Будем полагать, что размеры каждого i-го подинтервала настолько малы, что:

1) изменением силы по модулю и по направлению в течение всего подинтервала перемещения можно пренебречь;

2) кривизной перемещения на этом подинтервале также можно пренебречь.

Тогда $\Delta\bar{r}_i$ можно рассматривать как вектор прямолинейного перемещения; согласно формуле (61), работа силы на i-м элементарном перемещении приближённо будет равна

$$\Delta A_i = \bar{F}(t_i)\,\Delta\bar{r}_i .$$

Найдём алгебраическую сумму работ на всех этих элементарных перемещениях:

$$A_n(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i(t_i)\,\Delta\bar{r}_i .$$

Данная формула даёт выражение для работы силы $\bar{F}$ на перемещении M_0M тем точнее, чем больше число элементарных подинтервалов n и чем меньше модули геометрических приращений $\Delta\bar{r}_i$. Тогда точным выражением для работы силы $\bar{F}$ на перемещении M_0M будет предел

$$A(\vec{F}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\bar{r}_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(t_i)\,\Delta\bar{r}_i = \int\limits_{\overset{\smile}{M_0M}} \bar{F}\cdot d\bar{r} . \qquad (62)$$

Следовательно, работа силы в общем случае равна криволинейному интегралу от вектора силы вдоль рассматриваемого криволинейного перемещения.

Подинтегральное выражение $\overline{F} \cdot d\overline{r} = \delta A$ называют *элементарной работой*. Элементарная работа обозначается δA, а не dA, так как в общем случае она не является дифференциалом функции. Вектор $d\overline{r}$ – это вектор бесконечно малого перемещения материальной точки вдоль траектории, поэтому элементарная работа – это работа постоянной силы $\overline{F}$ на бесконечно малом действительном перемещении точки.

Из кинематики материальной точки известно, что скорость точки при векторном способе задания движения определяется выражением

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{r}}{dt} \Rightarrow d\overline{r} = \overline{\upsilon} \cdot dt.$$

Тогда выражение (62) для работы можно записать уже через интеграл по времени:

$$A(\vec{F}) = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot \overline{\upsilon} \cdot dt\ , \tag{62a}$$

но так как $\overline{F} \cdot \overline{\upsilon} = F \cdot \upsilon \cdot \cos(\overline{F}, \overline{\upsilon})$, то

$$A(\vec{F}) = \int_{t_0}^{t} F \cdot \upsilon \cdot \cos(\overline{F}, \overline{\upsilon})\, dt\,. \tag{63}$$

Если ввести неподвижную прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$ с началом в неподвижном центре O, то силу $\overline{F}$ через её проекции на оси координат можно записать в виде

$$\overline{F} = X \cdot \overline{i} + Y \cdot \overline{j} + Z \cdot \overline{k},$$

где $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – орты системы координат.

Координатное представление радиуса-вектора $\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$, где x, y, z – координаты положения материальной точки; следовательно, $d\overline{r} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \vec{k}$.

Вспоминая из математики, что скалярное произведение векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_X b_X + a_Y b_Y + a_Z b_Z$, для элементарной работы получаем

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Отсюда приходим к еще одной формуле для определения работы:

$$A(\vec{F}) = \int\limits_{\breve{M_0 M}} Xdx + Ydy + Zdz\ . \qquad (64)$$

2. Понятие о мощности силы

Определение: *средней мощностью силы на некотором интервале времени Δt называется скалярная величина, равная отношению работы силы к величине интервала времени Δt, за которое была произведена данная работа:*

$$N_{CP} = \frac{A(\vec{F})}{\Delta t},$$

где $A(\vec{F})$ – работа силы $\bar{F}$ на рассматриваемом интервале времени Δt.

Исходя из определения размерность мощности силы

$$[N] = \frac{Дж}{c} = \frac{кг \cdot м^2}{c^3} = Вт \ \text{ – в системе } \ СИ;$$

$$\frac{КГ \cdot м}{c} \ \text{ – в } \ СГСЕ,$$

внесистемная единица мощности:

$$1 \ \textit{лошадинная сила} = 75 \ \frac{КГ \cdot м}{c}.$$

Определение: *предельное значение средней мощности при безграничном уменьшении интервала времени Δt называют мгновенной мощностью силы, или мощностью силы в данный момент времени:*

$$N_{MГ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(\vec{F})}{\Delta t} = \frac{\delta A(\vec{F})}{dt} = N\,.$$

Мгновенная мощность равна отношению элементарной работы к дифференциалу времени.

Замечание: неправильно говорить, что мощность равна производной от работы по времени, поскольку элементарная работа δA в общем случае не является полным дифференциалом. (Символ δ следует понимать как символ бесконечно малой величины.)

Так как $\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r}$, то $N = \dfrac{\overline{F} \cdot d\overline{r}}{dt} = \overline{F} \cdot \dfrac{d\overline{r}}{dt}$, но $\dfrac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\upsilon}$ – вектор скорости движения материальной точки, следовательно, мгновенная мощность силы определяется выражением

$$N = \overline{F} \cdot \overline{\upsilon} = F \cdot \upsilon \cdot \cos\,\alpha\,. \qquad (65)$$

3. Движение материальной точки в потенциальном силовом поле. Понятие о потенциальном поле

Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которого на движущуюся материальную точку действует сила, заданная и по модулю и по направлению. Если ввести декартовую систему координат $Oxyz$, то в произвольной точке M с координатами x, y, z на материальную точку будет действовать сила $\overline{F} = \overline{F}(x, y, z, t)$. Следовательно, сила является векторной функцией координат материальной точки и времени.

Силовое поле называется *стационарным*, если действующая на материальную точку сила со временем не меняется. Для стационарного поля

$$\overline{F} = \overline{F}(x, y, z).$$

Стационарное силовое поле называется *потенциальным*, если декартовые проекции силы, действующие на материальную точку с координатами x, y, z, определяются по формулам

$$X = \frac{\partial u}{dx}; \quad Y = \frac{\partial u}{dy}; \quad Z = \frac{\partial u}{dz}, \tag{66}$$

где некоторая скалярная функция координат материальной точки

$$u = u(x, y, z) \tag{67}$$

называется *потенциальной силовой функцией поля*.

Как видно, если потенциальное силовое поле является стационарным (не меняется со временем), то его характеристики полностью задаются выражением (67).

Вектор потенциальной силы

$$\overline{F} = \frac{\partial u}{dx} \cdot \overline{i} + \frac{\partial u}{dy} \cdot \overline{j} + \frac{\partial u}{dz} \cdot \overline{k} = grad\, u. \tag{68}$$

(Вектор потенциальной силы $\overline{F}$ равен градиенту от потенциальной силовой функции поля).

Рассмотрим криволинейную поверхность в пространстве, для которой значение потенциальной силовой функции

$$u(x, y, z) = c = \text{const.} \tag{69}$$

Очевидно, что само выражение (69) в неявном виде определяет и задаёт эту поверхность в пространстве.

Криволинейную поверхность в пространстве, для которой выполняется соотношение (69), называют *эквипотенциальной поверхностью*, или *поверхностью равного потенциала*.

Допустим, что материальная точка движется по эквипотенциальной поверхности, тогда выражение (69) справедливо в любой момент времени. Продифференцируем левую и правую части выражения (69) по времени по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \dot{z} = \dot{c} = 0. \tag{70}$$

Вспоминая, что $F_X = X = \frac{\partial u}{dx}; \quad F_Y = Y = \frac{\partial u}{dy}; \quad F_Z = Z = \frac{\partial u}{dz}$, а вектор скорости $\overline{\upsilon} = \dot{x} \cdot \overline{i} + \dot{y} \cdot \overline{j} + \dot{z} \cdot \overline{k}$ и что скалярное произведение векторов $\overline{a}\overline{b} = a_X b_X + a_Y b_Y + a_Z b_Z$, видим, что выражение (70) – это

$$\overline{F} \cdot \overline{\upsilon} = grad\ u \cdot \overline{\upsilon} = 0. \tag{71}$$

Поскольку оба перемножаемых вектора не равны нулю, то для того, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, необходимо, чтобы они были взаимно перпендикулярными (рис. 20)

$$\overline{F} = grad\ u \perp \overline{\upsilon}.$$

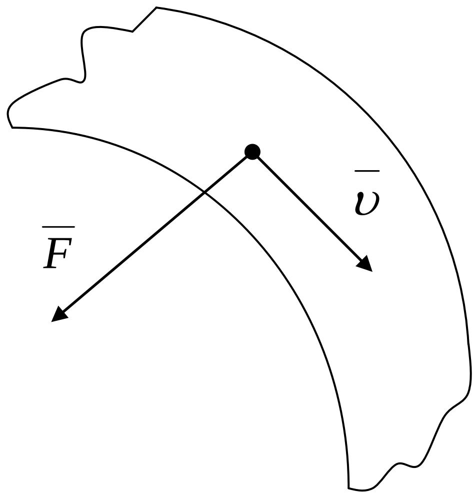

Рис. 20

Если материальная точка движется всё время по эквипотенциальной поверхности $u = c$, то очевидно, что вектор её скорости $\overline{\upsilon}$ всегда лежит в плоскости, являющейся касательной к эквипотенциальной поверхности. Следовательно, потенциальная сила $\overline{F}$ всегда направлена по нормали к этой эквипотенциальной поверхности (см. рис. 20).

4. Понятие о потенциальной энергии

Рассмотрим материальную точку, движущуюся в потенциальном силовом поле под действием только потенциальной силы (рис. 21). Введём прямоугольную декартовую систему координат. Пусть материальная точка совершила некоторое криволинейное перемещение из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вычислим работу потенциальной силы на этом перемещении. Для этого воспользуемся формулой

$$A = \int\limits_{\breve{M}_1 M_2} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int\limits_{\breve{M}_1 M_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = \int\limits_{\breve{M}_1 M_2} du.$$

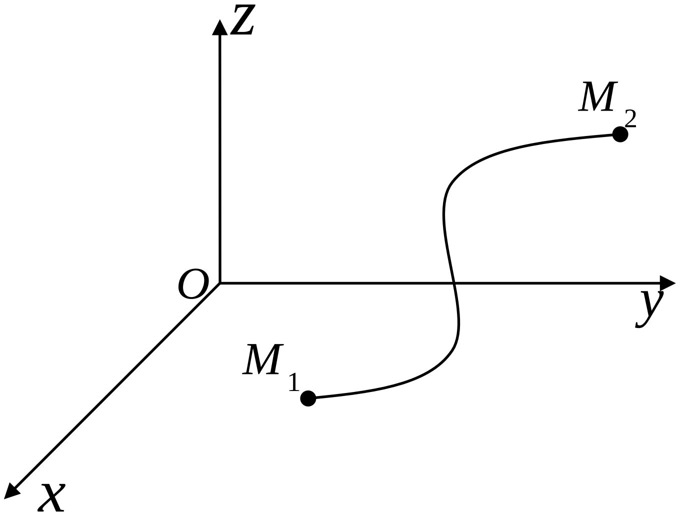

Рис. 21

Под знаком интеграла имеем полный дифференциал от потенциальной функции. Произведя интегрирование, получим

$$A = u_2 - u_1, \tag{72}$$

где $u_2 = u(x_2, y_2, z_2)$ – значение потенциальной силовой функции во 2-й точке, а $u_1 = u(x_1, y_1, z_1)$ – значение потенциальной силовой функции в 1-й точке.

Итак, мы получили, что работа потенциальной силы на некотором конечном перемещении равна разности значений потенциальной силовой функции на концах перемещения. Следовательно, величина работы зависит только от начального и конечного положений точки и не зависит от формы перемещения. *Этим потенциальные силы существенно отличаются от всех прочих.*

Согласно формуле (72), работа потенциальной силы не изменится, если потенциальную силовую функцию u изменить на постоянную величину, не изменится при этом и потенциальная сила (68). Это значит, что потенциальную силовую функцию можно всегда задать с точностью до постоянной (константы). Выберем эту постоянную так, чтобы в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ значение потенциальной функции обращалось в ноль, т. е. $u/_{M_0} = 0$. Точка M_0 называется *точкой нулевого потенциала*.

Положение этой точки в пространстве обычно выбирается из соображений физического характера.

Определение: *потенциальной энергией называется скалярная величина, равная работе по перемещению материальной точки из данного положения в точку, в которой потенциальная функция равна нулю*.

Так, пусть материальная точка находится в точке $M(x, y, z)$ (рис. 22).

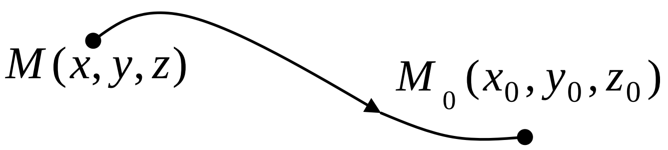

Рис. 22

Тогда, согласно формуле (72), её потенциальная энергия

$$\Pi = u/_{M_0} - u/_{M} = 0 - u(x, y, z) = -u(x, y, z). \tag{73}$$

Таким образом, потенциальная энергия материальной точки в данном положении равна значению потенциальной силовой функции в данном месте, взятому с противоположным знаком. Тогда, согласно ранее полученным выражениям, для потенциальной силы (68) и выражений (66) имеем

$$\overline{F} = -grad\ \Pi; \tag{74}$$

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \qquad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \qquad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}\ . \tag{75}$$

Работа потенциальной силы на произвольном криволинейном перемещении равна разности значений потенциальных энергий в начале и конце пути:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{76}$$

где Π_1 – потенциальная энергия материальной точки в первоначальном положении; Π_2 – потенциальная энергия материальной точки в конце пути.

5. Примеры вычисления потенциальной энергии и работы

Однородное силовое поле.

В каждой точке однородного силового поля сила, действующая на материальную точку, постоянна по модулю и направлению (например, сила веса вблизи поверхности Земли).

Введём прямоугольную декартовую систему координат *Oxyz* (рис. 23) так, что сила $\overline{P}$, действующая на материальную точку со стороны поля, параллельна оси Z. Тогда очевидно, что проекции силы $\overline{P}$ на оси координат будут $X = Y = 0$, $Z = -P$.

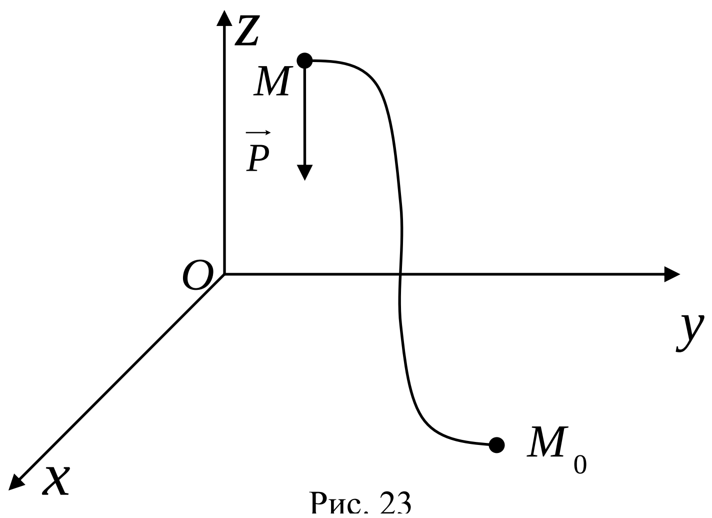

Рис. 23

Эквипотенциальными полями в данном случае будут плоскости, параллельные координатной плоскости Oxy. Допустим, что потенциальная функция равна нулю на эквипотенциальной плоскости Oxy. Тогда, согласно определению, потенциальная энергия материальной точки в положении M равна работе силы $\overline{P}$ по перемещению материальной точки из положения $M(x, y, z)$ в положение $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Следовательно,

$$\Pi = \int\limits_{\breve{M}M_0} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int\limits_{z}^{0} (-P)\, dz = Pz. \qquad (77)$$

Вблизи поверхности Земли гравитационное поле можно считать однородным. За точку с нулевым потенциалом берется точка на поверхности Земли, поэтому потенциальная энергия однородного поля силы тяжести равна произведению силы тяжести на высоту нахождения тела над поверхностью. Работа силы тяжести, согласно формуле (76),

$$A = \Pi(z_1) - \Pi(z_2) = P(z_1 - z_2), \qquad (78)$$

где z_1 – начальная высота; а z_2 – конечная высота положения точки.

Напоминаю, что от формы перемещения эта работа не зависит, а зависит она только от начальной и конечной высоты положения материальной точки.

Работа силы тяжести положительная, если тело опускается, т. е. $A > 0$, если $z_1 > z_2$, и отрицательная, если тело поднимается, $A < 0$, если $z_1 < z_2$.

Поле упругих сил.

Рассмотрим груз, расположенный на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплённый к стенке при помощи горизонтальной пружины (рис. 24).

Пусть точка O – положение конца недеформированной пружины. Введём декартовую систему координат $Oxyz$ с началом в нашей точке O и осями, направленными как показано на рисунке. Допустим, что в какой-то момент времени груз находился на расстоянии x

от точки O, тогда очевидно, что x – это и есть величина деформации пружины. Мы знаем, что при деформации пружины возникает упругая восстанавливающая сила $\overline{F}$. С учётом выбранной системы координат проекции силы $\overline{F}$ на оси координат будут: $X = -cx$, $Y = Z = 0$, где c – коэффициент жёсткости пружины.

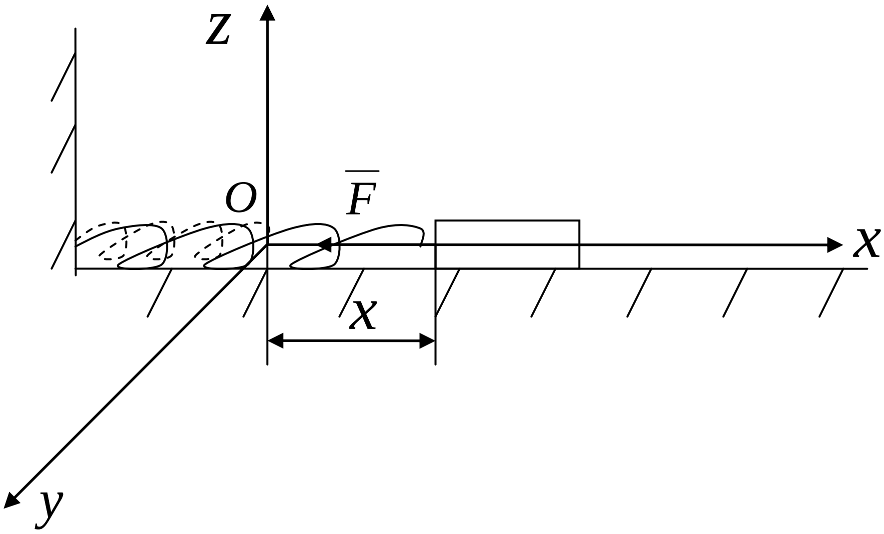

Рис. 24

Примем, что в точке O потенциальная силовая функция поля упругих сил равна нулю. Тогда на основании определения потенциальная энергия равна работе упругой силы $\overline{F}$ по перемещению груза из данного положения в точку O нулевого потенциала. Согласно формуле (64),

$$\Pi = \int_X^0 (-cx)\, dx = c\,\frac{x^2}{2}. \tag{79}$$

Отметим, что потенциальная энергия пружины не зависит от знака деформации, т. е. неважно, сжата пружина или растянута. Работа упругих сил, согласно формуле (76), определяется выражением

$$A = \frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right), \tag{80}$$

где x_1 – начальная деформация пружины; x_2 – конечная деформация пружины.

Работа упругих сил будет положительной, если начальная деформация пружины превосходит конечную по модулю, т. е. $A > 0$, если $|x_1| > |x_2|$, и, наоборот, $A < 0$, если $|x_1| < |x_2|$.

Гравитационное поле.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся в гравитационном силовом поле некоторого материального тела (рис. 25). Как мы знаем, гравитационная сила, действующая на точку, направлена к центру тела и по модулю равна

$$F = G\,\frac{M\,m}{r^2},$$

где G – универсальная гравитационная постоянная; M – масса тела; m – масса материальной точки; r – расстояние от материальной точки до центра тела.

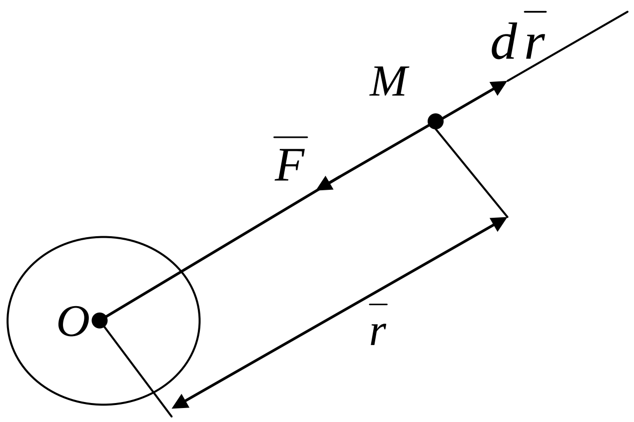

Рис. 25

Предположим, что ноль потенциальной функции гравитационного поля находится на бесконечном удалении от тела. Тогда, согласно определению, потенциальная энергия

$$\Pi = \int_r^{\infty} \bar{F}\,d\bar{r}\,.$$

Так как работа потенциальных сил не зависит от формы траектории движения, а зависит от начального и конечного положений материальной точки, то для упрощения решения задачи будем рассматривать перемещение материальной точки на бесконечное расстояние вдоль луча OM, тогда

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r} = -Fdr = -G\,M\,m\,\frac{dr}{r^2}.$$

С учётом этого потенциальная энергия материальной точки, находящейся на расстоянии r от центра тела,

$$\varPi = G\,M\,m\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -G\,M\,m\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = -G\,M\,m\frac{1}{r}\,. \qquad (81)$$

Тогда работа гравитационной силы, согласно формуле (76),

$$A = \varPi_1 - \varPi_2 = G\,M\,m\left[\left(-\frac{1}{r_1}\right) - \left(-\frac{1}{r_2}\right)\right] = G\,M\,m\frac{r_1 - r_2}{r_1\,r_2}. \qquad (82)$$

Из выражения (82) видно, что работа A гравитационной силы будет положительной, если $r_1 > r_2$, точка приблизилась к телу. Работа гравитационной силы будет отрицательной, если $r_1 < r_2$, если материальная точка удалилась от тела. Короче, $A > 0$, если $r_1 > r_2$, и $A < 0$, если $r_1 < r_2$.

VI. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

1. Понятие о кинетической энергии

Определение: *скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат модуля её скорости, называется кинетической энергией материальной точки*:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}\,. \qquad (83)$$

Размерность кинетической энергии:

в СИ: $T = \dfrac{кг \cdot м^2}{с^2} = Н \cdot м = Дж;$

в СГСЕ: $T = КГ \cdot м.$

Как видно из этих выражений, размерность кинетической энергии и работы совпадает.

Так как $\vec{\upsilon}^{\,2} = \bar{\upsilon} \cdot \bar{\upsilon} = \upsilon^2$ (скалярное произведение вектора самого на самого себя равно квадрату его модуля), то кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на скалярный квадрат вектора скорости:

$$T = \frac{m \cdot \bar{\upsilon}^{\,2}}{2}.$$

2. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Алгебраическое приращение кинетической энергии материальной точки на некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на материальную точку сил на том же перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

<u>Доказательство</u>: пусть материальная точка массы m движется под действием системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$. Выпишем основное уравнение динамики для нашей материальной точки в 1-й форме:

$$m\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i . \tag{84}$$

Вспоминая, что вектор ускорения $\overline{W} = \frac{d\overline{\upsilon}}{dt}$, перепишем выражение (84) в виде

$$m \cdot \frac{d\overline{\upsilon}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \; .$$

Помножим это векторное равенство скалярно на вектор бесконечно малого перемещения материальной точки $d\overline{r}$:

$$m\frac{d\overline{\upsilon}}{dt} \cdot d\overline{r} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot d\overline{r} \, . \tag{85}$$

Однако $\overline{F}_i \cdot d\overline{r}$, согласно определению, это элементарная работа δA_i i-й силы на бесконечно малом перемещении $d\overline{r}$. Левую часть выражения (85) можно переписать в следующем виде:

$$m\frac{d\overline{\upsilon}}{dt} \cdot d\overline{r} = m\underbrace{\frac{d\overline{r}}{dt}}_{\vec{\upsilon}} \cdot d\overline{\upsilon} = m\overline{\upsilon}d\overline{\upsilon} = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = dT$$ – дифференциал кинетической энергии.

Исходя из выше сказанного, выражение (85) перепишем в виде

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i \; . \tag{86}$$

Выражение (86) – это закон изменения кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме. Этот закон гласит: *бесконечно малое действительное приращение (дифференциал) кинетической энергии материальной точки равно алгебраической сумме элементарных работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.*

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (86) на конечном криволинейном перемещении точки $\breve{M_1 M_2}$:

$$\int\limits_{\breve{M_1 M_2}} dT = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\breve{M_1 M_2}} \delta A_i. \tag{87}$$

Левая часть равенства (87): $\int\limits_{\breve{M_1 M_2}} dT = T_2 - T_1$ – это алгебраическое приращение кинетической энергии материальной точки на рассматриваемом перемещении, где $T_2 = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2}$ – конечная кинетическая энергия материальной точки, $T_1 = \dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$ – начальная кинетическая энергия материальной точки, здесь υ_1 и υ_2 – начальная и конечная скорости движения точки.

Правая часть выражения (87): $\int\limits_{\breve{M_1 M_2}} \delta A_i = \int\limits_{\breve{M_1 M_2}} \overline{F}_i d\overline{r} = A_i$ – работа i-й силы на данном перемещении. Тогда окончательно получаем

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i . \tag{88}$$

Теорема доказана.

3. Закон сохранения полной энергии материальной точки

Рассмотрим материальную точку, движущуюся в потенциальном силовом поле под действием только потенциальных сил. Тогда работа потенциальных сил на некотором криволинейном перемещении $(\breve{M_1 M_2})$ равна разности потенциальных энергий в начале и конце пути: $A = \varPi_1 - \varPi_2$. С другой стороны, согласно теореме об изменении кинетической энергии материальной точки, имеем $T_2 - T_1 = A \Rightarrow T_2 - T_1 = \varPi_1 - \varPi_2$ или

$$T_1 + \varPi_1 = T_2 + \varPi_2. \tag{89}$$

Определение: *скалярная величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий точки в данный момент времени, называется полной энергией материальной точки.* Обычно она обозначается буквой E, т. е. в наших обозначениях: $E = T + \Pi$.

Следовательно, равенство (89) примет вид $E_1 = E_2$, где $E_1 = T_1 + \Pi_1$ и $E_2 = T_2 + \Pi_2$, соответственно, значения полной энергии материальной точки в начальной и конечной точках перемещения.

Таким образом, величина полной энергии E материальной точки, движущейся в силовом потенциальном поле под действием только потенциальных сил, в начале и в конце пути неизменна.

В силу произвольности рассматриваемого перемещения материальной точки в потенциальном силовом поле мы доказали теорему о сохранении полной энергии E материальной точки: **при движении материальной точки в потенциальном силовом поле её полная энергия E всегда остаётся постоянной.**

Рассмотрим пример использования закона сохранения полной энергии.

Пример: горизонтальные гармонические колебания груза на гладкой поверхности (рис. 26). Пусть точка O – точка конца недеформированной пружины. Систему координат Oxy выбираем так, что ось x направлена вдоль движения груза, а начало координат совпадает с положением недеформированного конца пружины, точкой O.

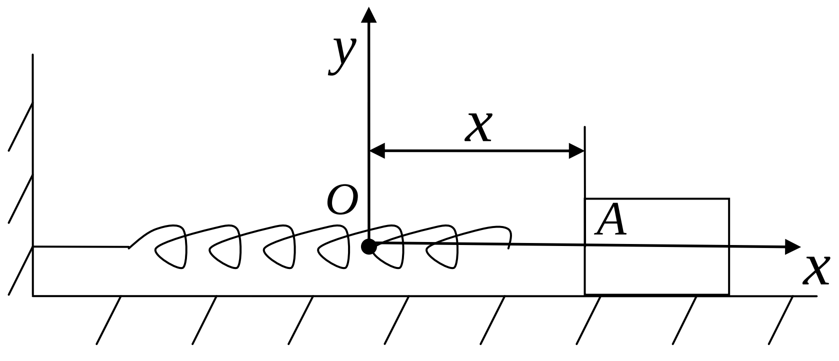

Рис. 26

Тогда деформация пружины $OA = x$ – текущей координате положения груза. Если x – деформация пружины и одновременно координата положения груза, то $|\dot{x}| = \upsilon$ – модуль вектора скорости движения груза, а $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ – кинетическая энергия груза при его движении; $П = \frac{cx^2}{2}$ – потенциальная энергия пружины, где c – коэффициент жесткости пружины.

Согласно закону о сохранении полной энергии, имеем следующее: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{cx^2}{2}$ в процессе гармонических колебаний остаётся постоянной.

Пусть в начальный момент $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \upsilon_0$. Требуется определить, чему будет равно максимальное отклонение груза от точки O.

В начальный момент времени полная энергия

$$E_1 = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{c{x_0}^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

В момент времени, когда тело отклонится на максимальную величину, скорость его движения $\upsilon = \dot{x} = 0$, а координата положения будет равна амплитуде колебаний $x = a$; следовательно, полная энергия в этот момент времени

$$E_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{ca^2}{2} = \frac{ca^2}{2}.$$

В силу сохранения полной энергии имеем

$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{ca^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{m}{c}}\,\upsilon_0$ – формула, связывающая скорость прохождения материальной точки нулевого положения с амплитудой колебаний груза на пружине.

VII. МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Понятие о силе инерции

Рассмотрим материальную точку массы m, движущуюся под действием системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ (рис. 27). Эти силы являются результатом взаимодействия материальной точки с некоторыми внешними 1, 2, 3, …, n телами, т. е. это силы, с которыми данные тела действуют на нашу материальную точку.

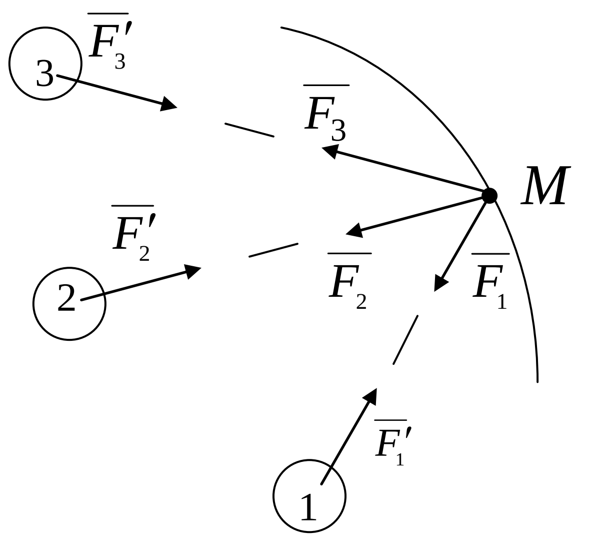

Рис. 27

С другой стороны, согласно 4-й аксиоме динамики, материальная точка действует на окружающие её тела с силами $\overline{F'}_1, \overline{F'}_2, ..., \overline{F'}_n$, такими, что для каждой пары сил $\overline{F'_i}$ и $\overline{F_i}$ выполняется следующее:

1. Модули этих сил равны: $F'_i = F_i$,

2. Они лежат на одной прямой и направлены в разные стороны.

Следовательно,

$$\overline{F'_i} = -\overline{F_i}\ .$$

Напишем основное уравнение динамики движения нашей материальной точки:

$$m\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \,.$$

Найдём равнодействующую всех сил $\overline{F_i'}$, с которыми наша точка действует на другие тела:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i'} = -\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = -m\overline{W} \,.$$

Определение: *векторная величина, имеющая размерность силы, равная взятому с противоположным знаком произведению массы точки на вектор ускорения, называется силой инерции*:

$$\overline{J} = -m\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i'} \,. \tag{90}$$

Как видно из выражения (90), сила инерции $\overline{J}$ совпадает по величине и направлению с равнодействующей всех сил $\overline{F_i'}$, с которыми материальная точка действует на взаимодействующие с ней тела.

2. Уравнение кинетостатики

Рассмотрим материальную точку, находящуюся под действием системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2,\ ...,\ \overline{F}_n$. Если под действием этой системы сил точка покоится, то из статики мы знаем, что в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = 0 \tag{91}$$

(геометрическая сумма всех сил, действующих на точку) должна быть равна нулю. Уравнение (91) – векторное уравнение статики материальной точки.

Если материальная точка движется под действием системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, то для неё можно записать основное уравнение динамики:

$$m\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} + \left(-m\overline{W}\right) = 0.$$

Если вспомнить, что $-m\overline{W} = \overline{J}$ – сила инерции материальной точки, то основной закон динамики материальной точки запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} + \overline{J} = 0. \tag{92}$$

Векторное уравнение динамики материальной точки в виде (92) имеет форму векторного уравнения статики (91), если предположить, что в число действующих на точку сил входит сила инерции. Векторное уравнение (92) выражает принцип кинетостатики: ***при движении материальной точки геометрическая сумма всех действующих на точку сил, включая силу инерции, равна нулю.***

В действительности сила инерции на материальную точку не действует, она является фиктивной силой, но сходство уравнений (91) и (92) позволяет при решении задач динамики на основе уравнения (92) пользоваться методами геометрической статики.

Введём декартовую систему координат $Oxyz$ и получим аналитические уравнения кинетостатики по аналогии с уравнениями статики равновесия материальной точки под действием сходящейся системы сил. Для этого каждую силу $\overline{F_i}$ через свои проекции на оси координат можно записать в следующем виде:

$$\overline{F}_i = X_i \cdot \bar{i} + Y_i \cdot \bar{j} + Z_i \cdot \bar{k}. \tag{93}$$

Вектор ускорения материальной точки в координатной форме

$$\overline{W} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}. \tag{94}$$

Сила инерции $\overline{J}$ через свои проекции запишется в виде

$$\overline{J} = -m\overline{W} = J_X \cdot \bar{i} + J_Y \cdot \bar{j} + J_Z \cdot \bar{k}. \qquad (95)$$

Отсюда с учётом выражения (94) имеем

$$J_X = -m\ddot{x}; \quad J_Y = -m\ddot{y}; \quad J_Z = -m\ddot{z}.$$

Спроецируем векторное уравнение кинетостатики (92) на декартовые оси, в результате придём к системе трех аналитических уравнений кинетостатики материальной точки:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i + J_X = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i + J_Y = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i + J_Z = 0. \end{cases} \qquad (96)$$

При движении материальной точки алгебраическая сумма одноимённых проекций всех действующих на неё сил, включая силу инерции, равна нулю. Использование уравнений кинетостатики особенно удобно при решении первой, прямой задачи динамики, когда закон движения материальной точки известен, величину и направление силы инерции можно определить и требуется найти неизвестную динамическую реакцию связи.

3. Определение силы давления материальной точки на поверхность

Рассмотрим материальную точку, движущуюся вдоль криволинейной поверхности (рис. 28) под действием системы активных сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, имеющих равнодействующую силу

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i .$$

Пусть $\overline{N}$ – заранее неизвестная динамическая реакция, действующая со стороны поверхности на материальную точку.

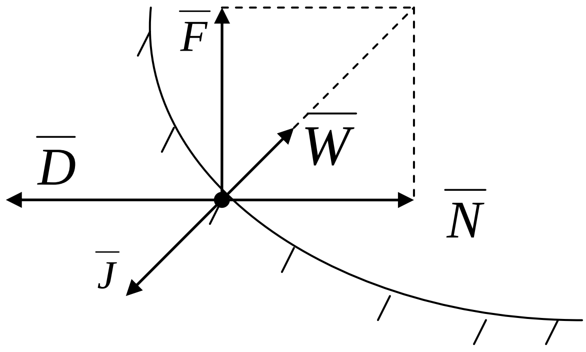

Рис. 28

Согласно векторному уравнению кинетостатики (92), имеем

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{J} = 0, \qquad (97)$$

где $\overline{J} = -m\overline{W}$ – сила инерции материальной точки.

Пусть $\overline{D}$ – сила давления материальной точки на поверхность. Согласно 4-й аксиоме динамики, имеем $\overline{N} = -\overline{D}$. Тогда уравнение (97) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{F} - \overline{D} + \overline{J} = 0 \Rightarrow \overline{D} = \overline{F} + \overline{J} \quad \text{или} \quad \overline{D} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i + \overline{J}. \qquad (98)$$

Следовательно, сила давления материальной точки на поверхность равна геометрической сумме всех действующих на точку активных сил, включая силу инерции.

Подчеркнём, что речь идёт только о сумме активных сил, приводящих точку в движение, а не о динамических реакциях связей.

Пример: автомобиль движется с постоянной скоростью по криволинейному мосту (рис. 29). Пусть R – радиус кривизны моста, $\overline{\upsilon}$ – вектор скорости движения автомобиля, $\overline{P}$ – сила веса автомобиля, направленная вертикально вниз.

Требуется определить силу давления автомобиля на мост в тот момент, когда он находится в верхней точке моста. В силу постоянства модуля скорости движения вектор ускорения автомобиля равен своей нормальной к траектории движения составляющей.

В наивысшей точке моста он ($\vec{W}$) направлен вертикально вниз, а величина (модуль) вектора ускорения $W = \dfrac{\upsilon^2}{R}$.

Тогда модуль силы инерции $\left|\overline{J}\right| = \left|- m \cdot \overline{W}\right| = \dfrac{P}{g} \cdot \dfrac{\upsilon^2}{R}$, где g – ускорение свободного падения.

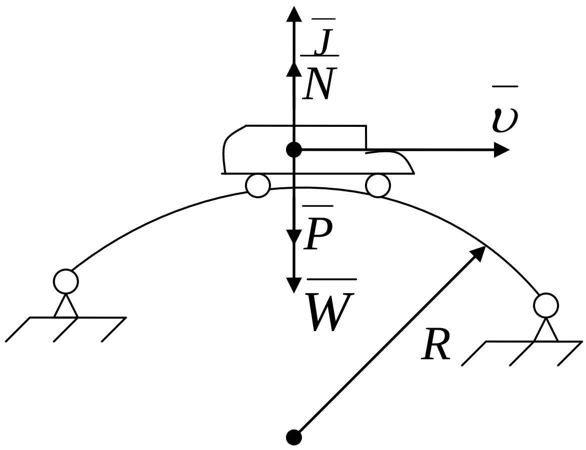

Рис. 29

Будем полагать, что прочие активные силы на автомобиль не действуют; тогда сила давления автомобиля на мост, согласно формуле (98), будет равна

$$\overline{D} = \overline{P} + \overline{J}.$$

Спроецируем это равенство на вертикальную ось, получим

$$D = P - \frac{P\upsilon^2}{g\,R} = P\left(1 - \frac{\upsilon^2}{g\,R}\right).$$

Для того чтобы не было отрыва автомобиля от моста в этот момент времени, необходимо

$$D \geq 0 \Rightarrow \; 1 - \frac{\upsilon^2}{g\,R} \geq 0 \Rightarrow \; \upsilon \leq \sqrt{gR}\,.$$

Замечание: при вращении материальной точки с постоянной скоростью вокруг какого-то неподвижного центра в пространстве сила инерции всегда направлена от центра вращения по радиусу вращения, она называется *центробежной силой*. По величине и направлению центробежная сила совпадает с силой, с которой вращающаяся точка действует на удерживающую связь.

При движении по вогнутому мосту в низшей точке (рис. 30) сила веса и центробежная сила направлены в одну сторону, поэтому модуль силы давления

$$D = P + \frac{P\upsilon^2}{g\,R} = P\left(1 + \frac{\upsilon^2}{g\,R}\right).$$

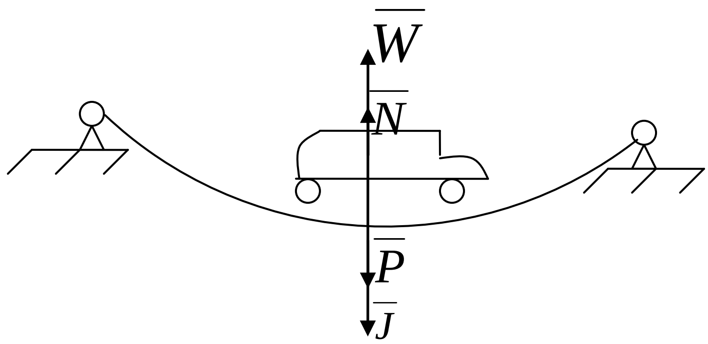

Рис. 30

Григорьев Александр Юрьевич
Малявко Дмитрий Пантелеймонович
Григорьев Константин Александрович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Динамика материальной точки

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 29.05.2015. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 3,96. Печ. л. 4,25. Уч.-изд. л. 4,0
Тираж 170 экз. Заказ № С 45

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9