УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

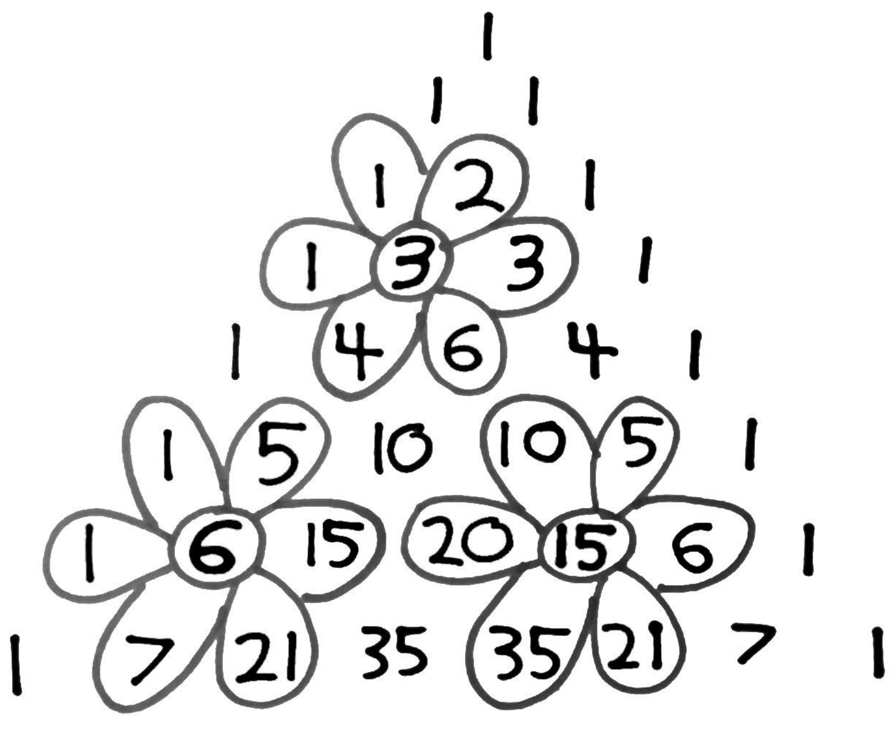
Кафедра высшей математики

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

для направления "Прикладная математика и информатика"

1 модуль



Санкт-Петербург
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

для направления "Прикладная математика и информатика"

1 модуль

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А. Типовой расчет по математическому анализу для направления "Прикладная математика и информатика". 1 модуль. Учебно-методическое пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 42 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов первого курса по направлению подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика".

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 23.06.2015, протокол №4

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

Содержание

ЧАСТЬ 1. Методические указания

В данном пособии прелагаются методические указания и задания для типовых расчетов для студентов первого курса, обучающихся по направлению “Прикладная математика и информатика”. Перед решением каждого задания студенту рекомендуется изучить соответствующую литературу [1], [2]. В конце каждого раздела приведены вопросы для самоконтроля, на которые студент должен знать ответ при защите типовых расчетов.

Задание 1. Метод математической индукции

В первом задании типового расчета нужно доказать два утверждения методом математической индукции. Подробное изложение этого метода приведено в [2, п.1.3].

Приведем несколько примеров доказательств этим методом.

Пример 1. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

☺ *База индукции.* Пусть $n=1$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ и $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = 1$, т.е. равенство верно.

Индукционная теорема. Допустим, что для $n=m$ верно равенство

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 \quad (\textit{индукционное предположение}).$$

Докажем, что при $n=m+1$ будет верным равенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2 \quad (\textit{индукционный переход}).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 .$$

По индукционному предположению она равна

$$\left(1^3 + 2^3 + \ldots + m^3\right) + (m+1)^3 = \left(\frac{m\,(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 .$$

Преобразуя последнее выражение, получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{m^2\,(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 = (m+1)^2 \cdot \frac{m^2 + 4\,(m+1)}{4} =$$

$$= \frac{(m+1)^2\,(m+2)^2}{4}.$$

Равенство доказано. ☻

Пример 2. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $\dfrac{2^n}{n!} \leqslant \dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

☺ *База индукции.* При $n = 2$ имеем $\dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^2}{2} = 2$ и $\dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{4}{9} = 2$, т.е. неравенство обращается в равенство, следовательно, оно верно.

Индукционная теорема. Допустим, что при $n = m$ неравенство $\dfrac{2^m}{m!} \leqslant \dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^m$ верно. Докажем, что при $n = m+1$ неравенство $\dfrac{2^{m+1}}{(m+1)!} \leqslant \dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{m+1}$ тоже будет верным.

Действительно, используя индукционное предположение, имеем

$$\frac{2^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{2^m}{m!} \cdot \frac{2}{m+1} \leqslant \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{2}{m+1}.$$

Так как $m \geqslant 2$, то $m+1 \geqslant 3$ и, следовательно, $\dfrac{2}{m+1} \leqslant \dfrac{2}{3}$. Тогда

$$\frac{2^{m+1}}{(m+1)!} \leqslant \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{2}{m+1} \leqslant \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}.$$

Утверждение доказано. ☻

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном n число $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ делится на 84.

☺ *База индукции.* При $n = 1$ число $4^{2n} - 3^{2n} - 7 = 4^2 - 3^2 - 7 = 0$, следовательно, делится на 84.

Индукционная теорема. Допустим, что при $n = m$ число $4^{2m} - 3^{2m} - 7$ делится на 84. Докажем, что при $n = m + 1$ число $4^{2(m+1)} - 3^{2(m+1)} - 7$ тоже делится на 84.

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$4^{2(m+1)} - 3^{2(m+1)} - 7 = 16 \cdot 4^{2m} - 9 \cdot 3^{2m} - 7 = (7 + 9) \cdot 4^{2m} - 9 \cdot 3^{2m} - 7 =$$
$$= 9 \cdot \left(4^{2m} - 3^{2m} - 7\right) + 7 \cdot \left(4^{2m} + 8\right).$$

Первое слагаемое в полученном выражении делится на 84 по индукционному предположению. Остается доказать, что второе выражение тоже делится на 84.

Учитывая, что $84 = 28 \cdot 3$, а $7 \cdot \left(4^{2m} + 8\right) = 28 \left(4^{2m-1} + 2\right)$, остается доказать, что $4^{2m-1} + 2$ делится на 3. Для этого доказательства снова применим метод математической индукции.

При $m = 1$ число $4^{2m-1} + 2 = 6$ делится на 3. Допустим, что при $m = k$ число $4^{2k-1} + 2$ делится на 3. Докажем, что $4^{2(k+1)-1} + 2$ делится на 3. Имеем

$$4^{2(k+1)-1} + 2 = 4 \cdot 4^{2k-1} + 2 = 4 \left(4^{2k-1} + 2\right) - 6.$$

В полученной сумме первое слагаемое делится на 3 по индукционному предположению, а второе по определению делимости, поэтому доказано, что $7 \cdot \left(4^{2m} + 8\right)$ делится на 84 и, следовательно, $4^{2(m+1)} - 3^{2(m+1)} - 7$ тоже делится на 84. Значит, утверждение доказано. ☻

Задание 2. Свойства сочетаний

В задании 2 требуется вычислить значение выражения, содержащего сочетания. Свойства сочетаний изложены в [2, п.1.4]. Здесь приведем еще два метода суммирования выражений, содержащих сочетания.

Пример 1. Найти сумму $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \ldots + (n+1) \cdot C_n^n$.

☺ Обозначим искомую сумму через S.

Используя свойство сочетаний $C_n^k = C_n^{n-k}$, получим

$$S = C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \ldots + (n+1) \cdot C_n^n = C_n^n + 2 \cdot C_n^{n-1} + 3 \cdot C_n^{n-2} + \ldots + (n+1) \cdot C_n^0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2S &= \left(C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \ldots + (n+1) \cdot C_n^n\right) + \\ &+ \left(C_n^n + 2 \cdot C_n^{n-1} + 3 \cdot C_n^{n-2} + \ldots + (n+1) \cdot C_n^0\right) = \\ &= (n+2)\left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right) = (n+2) \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Окончательно, $S = (n+2) \cdot 2^{n-1}$. ☻

Пример 2. Доказать равенство $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+3}$.

☺ Сгруппируем члены данной суммы:

$$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 2\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right).$$

Тогда, используя свойство сочетаний $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, получим

$$\begin{aligned} C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} &= C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = \\ &= \left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + \left(C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}\right) = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}. \end{aligned}$$

Равенство доказано. ☻

Задание 3. Предел по определению

В этом пункте нужно, используя определение предела, доказать, что заданное число является пределом заданной последовательности, или, что данная последовательность является бесконечно большой определенного или неопределенного знака. Перед решением заданий этого раздела рекомендуется изучить [1, глава II, пп.1.1–1.3, 2.1–2.3] и [2, п.3.2].

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3-4n}=-\dfrac{1}{2}$

☺ Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем номера тех членов последовательности, которые попадают в ε-окрестность точки $-\dfrac{1}{2}$, т.е. удовлетворяют неравенству $\left|\dfrac{2n-1}{3-4n}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$. После преобразований получим равносильное неравенство $\left|\dfrac{1}{2(3-4n)}\right|<\varepsilon$, или учитывая, что для натуральных значений n дробь $\dfrac{1}{2(3-4n)}$ отрицательна, окончательно получаем $\dfrac{1}{2(4n-3)}<\varepsilon$. Решая последнее неравенство, получим $n>\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8\varepsilon}$. Это означает, что если взять $n_0=\left[\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8\varepsilon}\right]+1$, то для всех $n\geqslant n_0$ члены данной последовательности попадут в ε-окрестность точки $-\dfrac{1}{2}$, т.е. число $-\dfrac{1}{2}$ является пределом этой последовательности. ☻

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n^3-2n}{n+1}=\infty$.

☺ Нам надо доказать, что последовательность $\dfrac{(-1)^n n^3-2n}{n+1}$ является бесконечно большой, т.е. что для любого $M>0$ можно найти число $n_0\in\mathbb{N}$, такое, что для любого натурального $n\geqslant n_0$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{(-1)^n n^3-2n}{n+1}\right|>M$. Решать последнее неравенство точно довольно сложно, но это и не требуется. Достаточно найти какой-нибудь номер $n_0\in\mathbb{N}$, начиная с которого требуемое неравенство будет выполняться.

Поэтому сначала оценим величину $\left|\dfrac{(-1)^n n^3-2n}{n+1}\right|$ снизу (используем неравенство $|a-b|\geqslant|a|-|b|$):

$$\left|\frac{(-1)^n n^3-2n}{n+1}\right|\geqslant\left|\frac{(-1)^n n^3}{n+1}\right|-\left|\frac{2n}{n+1}\right|=\frac{n^3}{n+1}-\frac{2n}{n+1}\geqslant\frac{n^3-2n}{2n}=\frac{n^2}{2}-1.$$

(При этом оценивании используем тот факт, что $n+1\leqslant 2n$.)

Тогда, решая неравенство $\dfrac{n^2}{2}-1>M$, получаем $n>\sqrt{2\,(M+1)}$, и, если положить $n_0=\left[\sqrt{2\,(M+1)}\right]+1$ $(n_0>2)$, то для всех натуральных чисел $n\geqslant n_0$ будет выполняться неравенство $\dfrac{n^2}{2}-1>M$ и, следовательно, неравенство $\left|\dfrac{(-1)^n n^3 - 2n}{n+1}\right| > M$. Утверждение доказано. ☻

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n} - 3n^2 + 2\sqrt{n+1}\right) = -\infty$.

☺ Здесь нужно показать, что для любого числа $M > 0$ можно найти число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого натурального $n \geqslant n_0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{2}{n} - 3n^2 + 2\sqrt{n+1} < -M$$

или равносильное неравенство

$$3n^2 - 2\sqrt{n+1} - \frac{2}{n} > M.$$

Так же как и в предыдущем примере, оценим выражение, стоящее в левой части неравенства, снизу: так как выполняются неравенства $\dfrac{2}{n} \leqslant 2$ и $2\sqrt{n+1} < 3n$, то

$$3n^2 - 2\sqrt{n+1} - \frac{2}{n} \geqslant 3n^2 - 3n - 2 = 3n\left(n-1\right) - 2 > 3\left(n-1\right)^2 - 2.$$

Решая неравенство $3\left(n-1\right)^2 - 2 > M$, получим $n > 1 + \sqrt{\dfrac{M+2}{3}}$, откуда следует, что если взять $n_0 = \left[\sqrt{\dfrac{M+2}{3}}\right] + 2$, то для всех натуральных чисел $n \geqslant n_0$, будет выполняться неравенство $3\left(n-1\right)^2 - 2 > M$ и, следовательно, неравенство $3n^2 - 2\sqrt{n+1} - \dfrac{2}{n} > M$. Утверждение доказано. ☻

Задание 4. Вычисление пределов

В этом задании нужно вычислить десять пределов, используя свойства пределов и некоторые известные пределы, полученные в теоретическом курсе. Необходимый материал для этого задания содержится в [1, глава II, §1, §2] и в [2, п.3.2].

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\left(n+3\right)^2-3\sqrt[3]{8n^5-3}}{2n\sqrt{4n^2+5}+13\sqrt[4]{n^3+n^2-2}}$.

☺Сначала установим вид неопределенности. Очевидно, что числитель и знаменатель данной дроби стремятся к бесконечности, поэтому дробь при стремлении n к бесконечности является неопределенным выражением вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Числитель и знаменатель дроби являются степенными выражениями. Определим наибольшую степень, содержащуюся в этих выражениях. Для этого сначала вынесем наибольшую степень из-под знака каждого корня:

$$\sqrt[3]{8n^5-3}=n^{5/3}\cdot\sqrt[3]{8-\frac{3}{n^5}},\quad \sqrt{4n^2+5}=n\sqrt{4+\frac{5}{n^2}},$$
$$\sqrt[4]{n^3+n^2-2}=n^{3/4}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}.$$

Таким образом, наибольшие степени каждого из двух слагаемых в числителе и каждого из двух слагаемых в знаменателе равны двум. Выносим n^2 за скобки в числителе и знаменателе:

$$\frac{3\left(n+3\right)^2-3\sqrt[3]{8n^5-3}}{2n\sqrt{4n^2+5}+13\sqrt[4]{n^3+n^2-2}}=\frac{n^2\left(3\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2-\dfrac{3}{n^{1/3}}\sqrt[3]{8-\dfrac{3}{n^5}}\right)}{n^2\left(2\sqrt{4+\dfrac{5}{n^2}}+\dfrac{13}{n^{1/4}}\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}\right)}.$$

После сокращения дроби на n^2 можно перейти к частному пределов. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n^\alpha}=0$, если $\alpha>0$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(n+3\right)^2-3\sqrt[3]{8n^5-3}}{2n\sqrt{4n^2+5}+13\sqrt[4]{n^3+n^2-2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2-\dfrac{3}{n^{1/3}}\sqrt[3]{8-\dfrac{3}{n^5}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{4+\dfrac{5}{n^2}}+\dfrac{13}{n^{1/4}}\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^{1/3}}\sqrt[3]{8-\dfrac{3}{n^5}}}{\lim\limits_{n\to\infty}2\sqrt{4+\dfrac{5}{n^2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{13}{n^{1/4}}\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}}=\frac{3}{4}.☻$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^{2n+1} - 4n^3 + 5}{3^n - 3 \cdot 49^{n-1}}$.

☺Дробь, предел которой нам нужно вычислить, является неопределенным выражением вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Как мы уже делали в предыдущем примере, в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобку бесконечно большую высшего порядка.

(Если даны две бесконечно большие последовательности x_n и y_n, то будем говорить, что последовательность x_n является *бесконечно большой более высокого порядка*, чем последовательность y_n, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = 0$.)

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ при условиях $\alpha > 0$ и $a > 1$, то в числителе бесконечно большой самого высокого порядка будет 7^{2n}. В знаменателе такой величиной будет 49^n. Вынося их за скобки и используя тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, если $0 < a < 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n+1} - 4n^3 + 5}{3^n - 3 \cdot 49^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n}\left(7^{-1} - \dfrac{4n^3}{7^{2n}} + \dfrac{5}{7^{2n}}\right)}{49^n\left(\left(\dfrac{3}{49}\right)^n - \dfrac{3}{49}\right)} = \frac{1/7}{-3/49} = -\frac{7}{3}.☻$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{3n} - 6n^2\,(n+1)!}{5\,(n+1)\,(n+2)! - 7^{2n}}$.

☺Этот пример по своему типу аналогичен предыдущим. Используя то, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{3n} - 6n^2\,(n+1)!}{5\,(n+1)\,(n+2)! - 7^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,(n+1)!\left(\dfrac{5^{3n}}{n^2\,(n+1)!} - 6\right)}{(n+1)\,(n+2)!\left(5 - \dfrac{7^{2n}}{(n+1)\,(n+2)!}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\dfrac{5^{3n}}{n^2\,(n+1)!} - 6\right)}{(n+1)\,(n+2)\left(5 - \dfrac{7^{2n}}{(n+1)\,(n+2)!}\right)} = -\frac{6}{5}.☻$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n+2}\right)$.

☺Выражение, предел которого надо найти, является неопределенностью вида $(\infty-\infty)$. Такую неопределенность удобно раскрывать, преобразуя выражение в дробь. Для этого умножим и разделим данное выражение на неполный квадрат суммы корней, а затем сократим числитель и знаменатель на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-2n+2}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-3n^2+1)-(n^3-2n+2)}{\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{n^3-3n^2+1}\cdot\sqrt[3]{n^3-2n+2}+\left(\sqrt[3]{n^3-2n+2}\right)^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2}=$$

$$=-\frac{3}{3}=-1.☻$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

☺ В данном примере основание степени $\dfrac{2n-1}{3n+2}$ стремится к числу $\dfrac{2}{3}$. Возьмем какое-либо число, лежащее между числами $\dfrac{2}{3}$ и 1, например, $\dfrac{3}{4}$. Можно утверждать, что, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\dfrac{2n-1}{3n+2}<\dfrac{3}{4}$, и тогда, в силу возрастания степенной функции, справедливо неравенство $0<\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n<\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$, то по теореме о «сжатой» переменной получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n=0$. ☻

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+11}{5n-7}\right)^{3n}$.

☺Здесь основание степени стремится к единице, поэтому выражение является неопределенностью вида 1^∞. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся замечательным пределом $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}=e$, если $\alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и свойством предельного перехода $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{y_n}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$, которое имеет место, если существуют конечные пределы последовательностей x_n и y_n, одновременно не равные нулю (будет доказано в дальнейшем).

Преобразуем основание степени следующим образом:

$$\frac{5n+11}{5n-7} = \frac{(5n-7)+18}{5n-7} = 1 + \frac{18}{5n-7} = \left(\left(1+\frac{18}{5n-7}\right)^{\frac{5n-7}{18}}\right)^{\frac{18}{5n-7}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+11}{5n-7}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{18}{5n-7}\right)^{\frac{5n-7}{18}}\right)^{\frac{18}{5n-7}\cdot 3n} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{18}{5n-7}\right)^{\frac{5n-7}{18}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{18\cdot 3n}{5n-7}} = e^{54/5}.☻$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7+\dfrac{2n}{n^2-1}}$.

☺Используя свойство предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7+\frac{2n}{n^2-1}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{2n}{n^2-1}\right)\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 7^0 = 1.☻$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n^2 - 3n^5}$.

☺ Преобразуем подкоренное выражение: $7^n n^2 - 3n^5 = 7^n n^2\left(1-\dfrac{3n^3}{7^n}\right)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n^2-3n^5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(7\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\sqrt[n]{1-\dfrac{3n^3}{7^n}}\right)$.

В последнем выражении $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{3n^3}{7^n}} = 1$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n^2-3n^5} = 7$. ☻

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[n]{49}+\sqrt[n]{7}-3}{\sqrt[n]{49}-1}$.

☺ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{49}=1$, то данное выражение является неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. Заметим, что числитель и знаменатель данной дроби можно разложить на множители (обозначив $\sqrt[n]{7}=a$):

$$\frac{2\sqrt[n]{49}+\sqrt[n]{7}-3}{\sqrt[n]{49}-1}=\frac{2a^2+a-3}{a^2-1}=\frac{(a-1)\,(2a+3)}{(a-1)\,(a+1)}=\frac{2a+3}{a+1}=\frac{2\sqrt[n]{7}+3}{\sqrt[n]{7}+1}.$$

Тогда получим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[n]{49}+\sqrt[n]{7}-3}{\sqrt[n]{49}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[n]{7}+3}{\sqrt[n]{7}+1}=\dfrac{5}{2}$. ☻

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+5+\ldots+(3n-1)}{n\,(n-2)}$.

☺Напомним, что теорему о предельном переходе в сумме можно применять только тогда, когда количество слагаемых не меняется при изменении n. Поэтому числитель данной дроби нужно преобразовать так, чтобы количество слагаемых в ней стало постоянным.

Так как в числителе стоит сумма арифметической прогрессии, то

$$2+5+\ldots+(3n-1)=\frac{2+(3n-1)}{2}\cdot n=\frac{(3n+1)\,n}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+5+\ldots+(3n-1)}{n\,(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\,n}{2n\,(n-2)}=\frac{3}{2}.$$ ☻

Задание 5. Точные границы числовых множеств. Верхний и нижний пределы

В этом пункте нужно найти точные верхнюю и нижнюю границы данной последовательности, используя определение этих границ, а также найти верхний и нижний пределы этой последовательности. Соответствующая теория изложена в [1, глава I, §5 и глава II, п.4.1], а также в [2, п.2.5 и п.3.2].

Пример. Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, если $x_n = (-1)^n 2 + \dfrac{2n+2}{2n-1}$.

☺ Рассмотрим члены последовательности с четными и нечетными номерами:

$$x_{2k} = 2 + \frac{4k+2}{4k-1} = 3 + \frac{3}{4k-1} \text{ и } x_{2k-1} = -2 + \frac{4k}{4k-3} = -1 + \frac{3}{4k-3},$$

$k \in \mathbb{N}$.

Так как дроби $\dfrac{3}{4k-1}$ и $\dfrac{3}{4k-3}$ убывают с ростом k, то последовательности x_{2k} и x_{2k-1} тоже убывают. Следовательно, $x_{2k-1} \leqslant x_1 = 2$ и $x_{2k} \leqslant x_2 = 4$. Отсюда, для любого номера n будет выполняться неравенство $x_n \leqslant 4$, т.е. число 4 является верхней границей последовательности, и, так как эта граница достигается при $n = 2$, то она является точной, то есть $\sup x_n = 4$.

Далее, так как $\dfrac{3}{4k-1} > 0$ и $\dfrac{3}{4k-3} > 0$, то $x_{2k} > 3$ и $x_{2k-1} > -1$, т.е. число -1 является нижней границей последовательности. Докажем, что эта граница точная.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует член последовательности x_n, для которого будет выполняться неравенство $x_n < -1 + \varepsilon$.

Очевидно, что, если взять нечетный номер, то такое неравенство примет вид $-1 + \dfrac{3}{4k-3} < -1 + \varepsilon$ или $\dfrac{3}{4k-3} < \varepsilon$. Так как последнее неравенство имеет решения на множестве натуральных чисел, то $\inf x_n = -1$.

Для нахождения верхнего и нижнего пределов заметим, что частичные последовательности x_{2k} и x_{2k-1} сходятся, причем $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 3$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1$.

Покажем, что других частичных пределов у данной последовательности нет. Если в одну из рассмотренных подпоследовательностей добавить конечное число членов другой или заменить ее члены членами другой, то эта операция не изменит предела, который зависит только от членов с большими номерами.

Если же взять частичную подпоследовательность, в которой будет содержаться бесконечное число членов последовательности с четными номерами и бесконечное число членов последовательности с нечетными номерами, то такая подпоследовательность не будет иметь предела (т.к. будет иметь два разных частичных предела). Поэтому $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_n = 3$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$. ☻

Задание 6. Критерий Коши

Здесь нужно, используя критерий Коши существования предела последовательности, доказать, что данная последовательность имеет предел. Критерий Коши изложен в [1, глава II, п.4.3] и в [2, п.3.2].

Пример. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно: $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n \cdot 2n}{(n-1)\, 3^n}$, $x_0 = 1$, сходится.

☺ Докажем, что, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы сможем найти номер n_0 такой, что для всех натуральных чисел $n \geqslant n_0$ и для всех натуральных p будет выполняться неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Сначала воспользуемся рекуррентной формулой для преобразования x_{n+p}:

$$x_{n+p} = x_{n+p-1} + \frac{(-1)^{n+p} \cdot 2\,(n+p)}{(n+p-1)\, 3^{n+p}} =$$

$$= x_{n+p-2} + \frac{(-1)^{n+p-1} \cdot 2\,(n+p-1)}{(n+p-2)\, 3^{n+p-1}} + \frac{(-1)^{n+p} \cdot 2\,(n+p)}{(n+p-1) \cdot 3^{n+p}} =$$

$$= x_n + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2\,(n+1)}{n \cdot 3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2\,(n+2)}{(n+1) \cdot 3^{n+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p} \cdot 2\,(n+p)}{(n+p-1)\, 3^{n+p}}.$$

Тогда $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2\,(n+1)}{n \cdot 3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2\,(n+2)}{(n+1) \cdot 3^{n+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p} \cdot 2\,(n+p)}{(n+p-1)\, 3^{n+p}} \right| <$$

$$< \frac{2\,(n+1)}{n \cdot 3^{n+1}} + \frac{2\,(n+2)}{(n+1) \cdot 3^{n+2}} + \ldots + \frac{2\,(n+p)}{(n+p-1)\, 3^{n+p}} <$$

$$< \frac{4}{3^{n+1}} + \frac{4}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{4}{3^{n+p}} = \frac{4}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{2}{3^n}.$$

Решив неравенство $\dfrac{2}{3^n} < \varepsilon$, получим $n > \log_3 \dfrac{2}{\varepsilon}$, т.е. для всех натуральных значений $n \geqslant n_0 = \left[\log_3 \dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ будет выполняться при любом натуральном значении p. ☻

Задание 7. Признак Вейерштрасса

В этом задании надо с помощью теоремы Вейерштрасса доказать, что последовательность имеет предел, и затем его вычислить, переходя к пределу в рекуррентной формуле. Необходимые теоретические сведения изложены в [1, глава II, п.3.2] и в [2, п.3.2].

Пример. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно: $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{3}$, $x_1 = \dfrac{3}{2}$, имеет предел, и найти его.

☺ Докажем, что данная последовательность удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса, т.е. она монотонна и ограничена.

Монотонность докажем по индукции. Вычислим $x_2 = \dfrac{4}{3}$, т.е. $x_1 > x_2$.

Теперь предположим, что для некоторого значения m выполняется неравенство $x_{m-1} > x_m$ и докажем, что тогда $x_m > x_{m+1}$:

$$x_{m+1} - x_m = \frac{2x_m + 1}{3} - \frac{2x_{m-1} + 1}{3} = \frac{2\left(x_m - x_{m-1}\right)}{3} < 0.$$

Отсюда следует, что последовательность монотонно убывающая.

Докажем ограниченность снизу. Но это очевидно, так как все члены этой последовательности больше нуля.

Итак, последовательность убывает и ограничена снизу, поэтому она имеет предел. Обозначим его через l и перейдем к пределу в рекуррентном соотношении, задающем последовательность. Получим $l = \dfrac{2l + 1}{3}$. Решая это уравнение, получаем $l = 1$. ☻

Задание 8. Сумма числового ряда

Понятие о числовом ряде дается в [1, глава II, п.5.1] и в [2, п.3.3].

Пример. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5}{9k^2-3k-20}$.

☺Напомним, что суммой числового ряда называется предел последовательности частных сумм данного ряда. Сначала упростим частную сумму

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{9k^2-3k-20}=\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{(3k-5)\,(3k+4)}=\frac{5}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{(3k+4)-(3k-5)}{(3k+4)\,(3k-5)}=$$

$$=\frac{5}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-5}-\frac{1}{3k+4}\right)=$$

$$=\frac{5}{9}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+1-\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{13}+\frac{1}{7}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n+4}\right)=$$

$$=\frac{5}{9}\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right).$$

Тогда сумма ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{9}\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{12}.$$ ☻

Задание 9. Исследование ряда на сходимость

Простейшие признаки сходимости положительных числовых рядов даны в [1, глава II, пп.5.1, 5.2]. Примеры задач имеются в [2, п.3.3].

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n^2+n-2}}$.

☺ Сначала воспользуемся первым признаком сравнения:

$$0<a_n=\frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n^2+n-2}}<\frac{1}{n\sqrt{n^2+n-2}}.$$

Остается только доказать, что ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n\sqrt{n^2+n-2}}$ сходится. Для доказательства воспользуемся вторым признаком сравнения. Возьмем ряд с общим членом $c_n=\frac{1}{n^2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\sqrt{n^2+n-2}}=1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ также сходится. ☻

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{n\ln(2n+3)}$.

☺ Опять сначала используем первый признак сравнения:

$$a_n = \frac{3+(-1)^n}{n\ln(2n+3)} \geqslant \frac{2}{n\ln(2n+3)}.$$

Докажем, используя второй признак сравнения, что ряд с общим членом $b_n = \dfrac{2}{n\ln(2n+3)}$ расходится. Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \dfrac{1}{n\ln n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\ln n}{n\ln(2n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln n + \ln\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\dfrac{\ln\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\ln n}} = 2.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится (см. [2, пример 3.38]). Следовательно, расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ☻

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3+(-1)^n)\,n}{2n-1}$

☺ Найдем верхний предел общего члена ряда:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{(3+(-1)^n)\,n}{2n-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{4\cdot 2k}{4k-1} = 2.$$

Отсюда следует, что предел общего члена ряда не равен нулю, т.е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда, следовательно, ряд расходится. ☻

ЧАСТЬ 2. Индивидуальные задания

Задание 1. Метод математической индукции

Доказать утверждение методом математической индукции для $n \in \mathbb{N}$ (два утверждения в каждом варианте):

1. а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)$;
   б) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

2. а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(p^2-k^2\right) = \frac{1}{4}n(n+1)\left(2p^2-n^2-n\right)$, $p \in \mathbb{N}$;
   б) $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$;

3. а) $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$; б) $\frac{5^n}{n!} \leqslant \frac{5^5}{5!}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$, $n \geqslant 6$;

4. а) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$; б) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geqslant \frac{4^n}{n+1}$;

5. а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$;
   б) $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)! > [(n+1)!]^n$, $n \geqslant 2$;

6. а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$;
   б) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{2n-1}{n}$, $n \geqslant 4$;

7. а) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$;
   б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$, $n \geqslant 3$;

8. а) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$,
   $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$; б) $5^n - 3^n + 2n \,\vdots\, 4$;

9. а) $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; б) $5^n + 2\cdot 3^n - 3 \,\vdots\, 8$;

10. а) $\dfrac{1\cdot 7}{3\cdot 5}+\dfrac{3\cdot 9}{5\cdot 7}+\dfrac{5\cdot 11}{7\cdot 9}+...+\dfrac{(2n-1)\,(2n+5)}{(2n+1)\,(2n+3)}=\dfrac{n\,(6n+1)}{3\,(2n+3)}$;
б) $37^{n+2}+16^{n+1}+23^{n}\ \vdots\ 7$;

11. а) $\dfrac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}+\dfrac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+...+\dfrac{n+2}{n\,(n+1)\,(n+3)\,(n+4)}=$
$\dfrac{n\,(n+5)}{8\,(n+1)\,(n+4)}$; б) $5^{n}-4n+15\ \vdots\ 16$;

12. а) $(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,...\,(n+n)=2^{n}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2n-1)$;
б) $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\ \vdots\ 19$;

13. а) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^{n}\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(2^{n+1}\alpha\right)}{2^{n+1}\sin\alpha}$, $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
б) $2^{2n-1}-9n^{2}+21n-14\ \vdots\ 27$;

14. а) $\dfrac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
б) $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}\ \vdots\ 19$;

15. а) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^{2}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^{2}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^{n}}=\dfrac{1}{2^{n}}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^{n}}-\operatorname{ctg}x$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
б) $2^{n+2}\cdot 3^{n}+5n-4\ \vdots\ 25$;

16. а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^{3}=n^{2}\left(2n^{2}-1\right)$; б) $3^{2n+2}-8n-9\ \vdots\ 64$;

17. а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)^{2}=\frac{1}{12}n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+5)$; б) $4^{n}+6n-10\ \vdots\ 18$;

18. а) $\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{a+3}{4}+\dfrac{a+7}{8}+\ldots+\dfrac{a+2^{n}-1}{2^{n}}=\dfrac{(a-1)\,(2^{n}-1)}{2^{n}}+n$,
$a\in\mathbb{R}$; б) $n!\ >\ 2^{n-1}$, $n\ \geqslant\ 3$;

19. а) $\dfrac{1^{4}}{1\cdot 3}+\dfrac{2^{4}}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^{4}}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)(n^{2}+n+1)}{6(2n+1)}$;
б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2}}\leqslant 2-\frac{1}{n}$;

20. а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{5}=\frac{n^{2}}{12}(n+1)^{2}\left(2n^{2}+2n-1\right)$; б) $(2n)!<2^{2n}(n!)^{2}$.

***Доказать утверждение для $n \in \mathbb{N}$:**

1. $(2n)! < [n(n+1)]^n$, $n \geqslant 2$;
2. $(2n-1)! < n^{2n-1}$, $n \geqslant 2$;
3. $\sqrt{2^{n(n-1)}} > n!$, $n \geqslant 3$
4. $2^{n-1}\left(a^n + b^n\right) \geqslant (a+b)^n$, если $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$;
5. $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$;
6. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n \geqslant 3$;
7. $(n!)^2 > n^n$, $n \geqslant 3$;
8. $nx + (n-1)\,x^2 + \ldots + 2x^{n-1} + x^n = \dfrac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$;
9. $n^n > (n+1)^{n-1}$, $n \geqslant 2$;
10. $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \ldots + \operatorname{arcctg}(2n+1) =$
    $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \ldots + \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n} - n \operatorname{arctg} 1$;

Вопросы:

1. В чем заключается принцип математической индукции?
2. Из каких этапов состоит доказательство методом математической индукции?
3. Докажем утверждение: "все лошади одного цвета". Для одной лошади утверждение выполняется. Предположим, что k лошадей одного цвета и докажем, что тогда k+1 лошадей тоже одного цвета. Выберем среди этих k+1 первые k лошадей и они будут одного цвета по предположению. Потом выберем другие k лошадей, которые также будут одного цвета, причем такого же. Утверждение доказано. Есть ли ошибка и где она?

4. Какие существуют обобщения метода математической индукции?

5. Что такое неполная индукция?

Задание 2. Свойства сочетаний

1. $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)\, C_n^n;$

2. $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n\, (n+1)\, C_n^n;$

3. $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)\, C_n^n\ ;$

4. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(2C_{n+k}^k + C_{n+k}^{k+1}\right)\ ;$

5. $\dfrac{C_n^0}{1} - \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} - \ldots + (-1)^n\, \dfrac{C_n^n}{n+1};$

6. $\dfrac{C_n^1}{C_n^0} + \dfrac{2C_n^2}{C_n^1} + \dfrac{3C_n^3}{C_n^2} + \ldots + \dfrac{nC_n^n}{C_n^{n-1}};$

7. $\dfrac{1}{2}C_n^1 - \dfrac{1}{3}C_n^2 + \dfrac{1}{4}C_n^3 - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n;$

8. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{C_n^k}{(k+1)\,(n-k+1)\, C_n^{k+1}};$

9. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^{k+1}}{k+1}C_n^k$ для $\alpha \in \mathbb{R};$

10. $\dfrac{C_n^0}{n+1} + \dfrac{C_n^1}{n} + \dfrac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{1};$

11. $\dfrac{C_n^1}{C_{n-1}^0} + \dfrac{4C_n^2}{C_{n-1}^1} + \dfrac{9C_n^3}{C_{n-1}^2} + \ldots + \dfrac{n^2C_n^n}{C_{n-1}^{n-1}};$

12. $\sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)\,(n-k)!C_n^k\ ;$

13. $C_n^0C_n^m - C_n^1C_{n-1}^{m-1} + C_n^2C_{n-2}^{m-2} - \ldots + (-1)^m\, C_n^mC_{n-m}^0\ ;$

14. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(C_n^k\right)^2 = \dfrac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}$;

15. $\sum\limits_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$;

16. $\sum\limits_{k=0}^{n-p} C_n^k C_n^{p+k} = \dfrac{(2n)!}{(n-p)!(n+p)!}$;

17. $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$;

18. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k$;

19. $C_n^0 C_{2n}^n + C_n^1 C_{2n}^{n-1} + C_n^2 C_{2n}^{n-2} + \ldots + C_n^n C_{2n}^0 = C_{3n}^n$;

20. $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$.

***Вычислить (варианты 1 – 9) или доказать (вариант 10):**

1. $\dfrac{C_n^0}{2} + \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{4} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+2}$;
2. $C_{4m}^0 - C_{4m}^2 + C_{4m}^4 - \ldots + C_{4m}^{4m}$;
3. $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$;
4. $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$;
5. $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$;
6. $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$;
7. $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots$;
8. $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots$;
9. $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots$;
10. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Вопросы:

1. Как записывается бином Ньютона?

2. Как можно вычислить биномиальные коэффициенты?

3. Какие свойства биномиальных коэффициентов Вы знаете?

4. Как можно определить биномиальные коэффициенты на языке комбинаторики?

Задание 3. Предел по определению

Доказать равенства по определению предела (3 предела в каждом варианте):

1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{2n-4}=\dfrac{5}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-n\sqrt{n}\right)=-\infty$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-(-1)^n\cdot n\right)=+\infty$.

2. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-3}{6n-4}=\dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\ln\left(n+1\right)\right)=-\infty$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\cdot n^2-n\right)=\infty$.

3. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+2}{3n-4}=\dfrac{7}{3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+2n\sqrt{n}\right)=+\infty$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\cdot 5^n-n\right)=\infty$.

4. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-2}{2n-4}=2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n+n\right)=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-n^2\right)=-\infty$.

5. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+5}{2n+7}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-2^n\right)=-\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n-1}=+\infty$.

6. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{6n-3}=\dfrac{1}{3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\ln n-2\right)=+\infty$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}\cdot\operatorname{arctg} n)=+\infty$.

7. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+3}{2n+1}=\dfrac{7}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-n\ln n\right)=-\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln n-n^2\right)=-\infty$.

8. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-7}{3n+6}=\dfrac{5}{3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3-n\cdot 2^n)=-\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\operatorname{arctg} n)=+\infty$.

9. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-4}{5n-3}=\dfrac{2}{5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^2-2\right)=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{\operatorname{arctg} n}=+\infty$.

10. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n}{5n+1}=-\dfrac{2}{5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(9+\ln(2n+1))=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n-(-1)^n\cdot n)=\infty$.

11. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+7}{6-2n}=-1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(3-\log_{1/2}(3n+2)\Big)=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+4}-\sqrt{n^2+2}\right)=+\infty$.

12. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-5}{4-2n}=-\dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+2^{\sqrt{n}}\right)=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-5}-\sqrt{2n^2+3}\right)=0$.

13. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-5}{8-6n}=-\dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^{n-2}+\log_2 n\right)=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(n+3)}{\sqrt{2n-1}}=0$.

14. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-3n}{2n-1}=-\dfrac{3}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+3n^{2/3}\right)=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\cos n}{2n^2-1}=0$.

15. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-5n}{4n-1}=-\dfrac{5}{4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{\ln n}-2\right)=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n^2-1)\operatorname{arctg} n}=0$.

16. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-3}{8-7n}=-1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\sqrt{n\ln n}\right)=-\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}\cdot\operatorname{arctg} n}{2n+5}=0$.

17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{9-10n}=-\dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3+n\cdot 2^n}\right)=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+3n-1}-\sqrt{n^3-2n}\right)=0$.

18. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{6-10n}=-\dfrac{1}{5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{3n^2-2}\right)=+\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-5}\cdot\sin\dfrac{\pi n}{6}=0$.

19. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^2-4} = \dfrac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\ln\left(n+1\right)\right) = +\infty$;
    3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(-1\right)^n \cdot n+3}{\left(-1\right)^{n+1} \cdot n^2-5} = 0.$

20. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-5}{2n^2+1} = \dfrac{5}{2}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(n\log_{1/3} n\Big) = -\infty$;
    3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^3+1} \cdot \cos\dfrac{n\left(n+1\right)}{2} = 0.$

Вопросы:

1. Что такое окрестность точки?
2. Как определяются окрестности “точек” $+\infty$, $-\infty$ и ∞?
3. Сформулируйте определение предела последовательности как для случая конечного предела, так и для случаев предела, равного $+\infty$, $-\infty$ и ∞.
4. Как на языке “ε – n_0” записать следующий факт: а) данное число не является пределом данной последовательности; б) данная последовательность не имеет конечного предела; в)данная последовательность не является бесконечно большой?
5. Поясните графически определение предела последовательности.
6. Что такое бесконечно малая последовательность?
7. Как с помощью понятия бесконечно малой определить конечный предел последовательности?
8. Что такое предельная точка множества?
9. Можно ли утверждать, что если a – предельная точка множества значений последовательности x_n, то $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$? Верно ли обратное?

Задание 4. Вычисление пределов

Вычислить пределы (10 пределов в каждом варианте):

1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\sqrt[3]{n^3-2n}+n\sqrt{n-5}}{\sqrt[4]{n^3-5n+4}-5n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^{n-2}+2n^3}{2^{2n+5}-3n^2}$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+5}+4n!}{n\cdot n!-9^{n+3}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+2n}-\sqrt{3n^2+5}\right)$;
   5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{7n+8}\right)^{2n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n-7}\right)^{2n}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5n-3}{n+7}}$;
   8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n^2+5n-3}{n+7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n^2+3}-n\right)$.

2. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt[4]{n^3-2n}+n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4}-3n^2-5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n-1}+2^{n+5}+4n^5}{n\sqrt{3n+5}-9^{n+3}}$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+3n^2+5}-\sqrt{4n^4-6n^2-7}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\dfrac{4}{2n-7}}$;
   5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+15}{9n+8}\right)^{3n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-5}{6n+7}\right)^{3n}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n+1)!}{n!\cdot(n+4)+5^n}$;
   8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2+\dfrac{4}{2n-7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

3. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n\sqrt[3]{2+3n^2-n^3}+n\sqrt{n^2-5n+3}}{\sqrt[3]{n^2-n}+6n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-5}{8n+8}\right)^{5n}$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n+2}-5n^4+n}{5n^2-7^{n+3}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n!+3^{n+1}}{5n^4-(n-1)!}$;
   5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{8n^2-2n+5}-\sqrt{8n^2+3n}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+4}{7n-3}\right)^{5n}$;
   7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{4n^2-4}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{4n^4-2n^2+3}{4n^2-4}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{27}-1}{\sqrt[n]{3}-1}$;
   10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+3n-1}}$.

4. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\sqrt{4n^2+3n}-n\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+7}-15n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n-2}+4n^2-5n}{3^{2n-4}-n^3+6}$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+3n}-\sqrt[3]{n^3-5n+3}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+6}{5n-11}\right)^{3n+1}$;
   5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n!\cdot(n-1)+6^{n+2}}{3^{2n+1}+2\,(n+1)!}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+21}\right)^{3n+1}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4-\dfrac{5}{3n+5}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n^2-\dfrac{5}{3n+5}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{16}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+...+(2n-1)}{n\,(n+2)}$.

5. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\sqrt[3]{n^4+7n^2+5}-\sqrt{n^3-5}}{\sqrt[4]{n^6-5n^3+4}+3n^2\sqrt[3]{n+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n^2+2n+7}{n-5}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{1+n}-5^n+n^4}{4^{n-1}-3n^3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\,(n+1)!-4^{n-4}}{4\,(n+7)\cdot n!-5^{2n+7}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+1}{17n-9}\right)^{5n+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n+5}{8n-4}\right)^{5n+1}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/3}\left(\sqrt[3]{3n^2+2n+4}-\sqrt[3]{3n^2-3n-4}\right)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n+7}{n-5}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{64}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-5+4-7+...+2n-(2n+3)}{3n+2}$.

6. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\sqrt[3]{n-2}+n\sqrt[3]{8n^3-1}}{\sqrt[4]{81n^8+15n^5+4}+7n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{4n+7}\right)^{4n+7}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{2+n}-3^n-5n^5}{3^{2n+1}+4n^2+5}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\,(n-15)\;\cdot n!+5^{3n-2}}{3^{4n+7}-(n+1)!}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+5}{9n-6}\right)^{4n+7}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{8n^3+4n-3}+\sqrt[3]{5n-8n^3}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n^3+7}{n^3+7}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3+2-4+....+n-(n+2)}{4n+7}$.

7. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\sqrt[4]{16n^4+4n^2}+n\sqrt[3]{8n^3-7n^2+5}}{\sqrt[3]{n^3+3n+4}+5n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n^2-4n}{n^2+7}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{2n+1}-6n^4}{n^6-25^{n+3}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5n^2-3}+\sqrt[3]{1-n^3}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{2n+1}-7n!}{3n!-6^{n+3}}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+11}{9n-13}\right)^{5n-3}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-4}{5n+8}\right)^{5n-3}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{3}-1}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^4-2n^2-4n}{n^2+7}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n+1)}{3n^2+5}$.

8. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\sqrt{n^3-2n}+n\sqrt[4]{n^4-3n^3+7}}{\sqrt[4]{16n^6-5n^3-7}+n^2\sqrt[3]{n-1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\sqrt[n]{25}+\sqrt[n]{5}-3}{\sqrt[n]{5}-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{2n+3}-3^{2n-1}}{16^{n+2}+16n^4}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{27n^3+3n-5}+\sqrt[3]{5-4n-27n^3}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^{3n-5}-(n+1)\cdot(n-1)!}{6^{n+2}+6n^4\cdot(n-4)!}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+3}{5n-7}\right)^{7n+5}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n-1}{7n+15}\right)^{7n+5}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\dfrac{n+1}{n^2+7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+\dfrac{n+1}{n^2+7}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+5+\ldots+(3n+2)}{n^2-n+5}$.

9. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\sqrt[3]{8n^3+n^2-8}+n\sqrt[5]{n^3+13n}}{\sqrt[7]{n^9-3n^7+n}-3n\sqrt{n^2+6}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9^{n-2}+6^{n+3}}{3^{2n-3}-4n^5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{13^{n-2}+2n^2\cdot(n-2)!}{12^{2n+1}-4n^5\cdot(n-5)!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{4n^3+5n^2-8}+\sqrt[3]{3n^2-4n^3}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{8n-5}{11n-5}\right)^{4n-7}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+3}{4n-8}\right)^{4n-7}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5-\dfrac{n}{n^2+5}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n-\dfrac{n}{n^2+5}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot\sqrt[n]{4}-5\cdot\sqrt[n]{2}+3}{\sqrt[n]{2}-1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-4+6-8+\ldots.+(2n-2)-2n}{4n+8}$.

10. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\sqrt[3]{n^3-2n}+n\sqrt{n-5}}{\sqrt[4]{n^3-5n+4}-5n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n+4}+3n^3+3}{n^6-2^{3n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{4n+4}+3(n+1)!}{n\cdot n!-32^{3n}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/3}\left(\sqrt[3]{9n^2+5n+4}+\sqrt[3]{8-3n-9n^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+15}{7n-11}\right)^{4n-7}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{9n+5}{9n-7}\right)^{4n-7}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n^2}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n\cdot n+n^2}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot\sqrt[n]{16}-5\cdot\sqrt[n]{4}+2}{\sqrt[n]{4}-1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4+8+\ldots+4n}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right)$.

11. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\sqrt[2]{n^3+4n}+n\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[5]{n^{10}-3n^5+4}-5n\sqrt[3]{4n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{2n+3}-6^{n+4}+5n^4}{5^{2n+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{24^{2n-5}-6\,(n+2)!}{(n-1)\cdot n\cdot n!+5^{2n}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n-12}{9n+15}\right)^{2n+7}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/3}\left(\sqrt[3]{8n^2+3n-2}+\sqrt[3]{6-n-8n^2}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n-7}\right)^{2n+7}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n-2n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n\cdot(n+1)-2n}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7\cdot\sqrt[n]{9}-6\cdot\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{3}-1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+5+9+\ldots+(4n+1)}{2n^2+5}$.

12. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{13n\sqrt[5]{3-32n^5}+n\sqrt[3]{8n+3}}{\sqrt[3]{27n^6-n^3-1}+7n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n-3}+2n^3}{3^{n+1}-5^{n+3}-n\sqrt{n}}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{15^{n-3}-2n!\cdot(n+2)}{3^{3n+1}-(n+1)!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9n^2+5}-\sqrt{9n^2-7}\right)$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n+8}{8n-6}\right)^{6n+4}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+11}{3n-8}\right)^{6n+4}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^{n-3}+5n^3}$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^{n-3}\cdot(n-2)+5n^3}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot\sqrt[n]{49}+\sqrt[n]{7}-4}{\sqrt[n]{7}-1}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+6+...+(4n+2)}{6n^2-3}$.

13. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\sqrt{16n^2+8n}+n\sqrt[3]{n^3-24n}}{\sqrt{n^3+3n+1}-5n\sqrt[4]{n^4+4n^2+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8^{n-3}+6^{2n+1}}{4^n\cdot 3^{2n+1}+n^5}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+(n+2)!}{4^{n+5}-n^2\cdot n!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{8n^2+5}-\sqrt{8n^2-3}\right)$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{9n-5}{11n-5}\right)^{8n-5}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n+6}{7n-5}\right)^{8n-5}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{2n-3}-3n^3}$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{2n-3}\cdot(2n-1)-3n^3}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot\sqrt[n]{25}-7\cdot\sqrt[n]{5}+2}{\sqrt[n]{5}-1}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+7+...+(4n+3)}{8n^2-3}$.

14. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n\sqrt[3]{n^2-2n}+n\sqrt{9n^2+7n-4}}{\sqrt[3]{n^3-2n^2+3}+2n\sqrt[4]{81n^4-13n^2+6}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^{n+3}-4^{2+n}}{2^{n-1}\cdot 3^{n+2}+3n^6}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{26^{n+3}+4\,(n+5)\cdot n!}{12^{2n-1}-5\,(n+1)!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-3}{6n^2+5}\right)^{3n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n-2}+25n^5}$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+7}\right)^{3n^2}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n-2}\cdot n+25n^5}$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-11\cdot\sqrt[n]{2}+10}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n\left(\sqrt{4n^2+7}-\sqrt{4n^2-5}\right)}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-5+9-13+...+(4n+1)-(4n+5)}{8n-7}$.

15. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n\sqrt[7]{n^5+3n^3}-5\sqrt{n^4-5}}{\sqrt[5]{n^7+3n^5-9n}-5\sqrt[3]{1-8n^6}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{2n+1}-3^{n-2}+4n^6}{2^n\cdot 8^{n-3}-6}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^{2n+5}+5\,(n+1)!}{3\,(n-1)\cdot n!-5^{3n+5}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+5n}}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^2+3}{8n^2-7}\right)^{6n+11}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^2+9}{5n^2-8}\right)^{n^2-3}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^n+5}{2^n-7}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2^n+5)\cdot n}{2^n-7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{5\cdot\sqrt[n]{9}-11\cdot\sqrt[n]{3}+6}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+6+11+...+(5n+1)}{n^2+2n+1}$.

16. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n\sqrt[6]{n^3+2n}+n\sqrt{25n^2+7n-6}}{\sqrt[5]{n^7+6n^5+4n^3}+2n\sqrt[3]{3-8n^3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^{2n}+6^{n+3}-7n^7}{n^5-2^{4n+1}\cdot 4^{n-2}}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{20n^{20}+3\,(n-3)\cdot n!}{n^2\cdot(n-2)!+4^{n-2}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{9n^2+4n+5}-\sqrt{9n^2-3n-1}}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-7}{7n^2+11}\right)^{7n+5}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+7}{4n^2-9}\right)^{7n^2+5}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\dfrac{5n}{5^n+1}}$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+\dfrac{5n}{5^n+1}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{6}-1}{7\cdot\sqrt[n]{36}-8\cdot\sqrt[n]{6}+1}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4+5-8+....+(4n+1)-(4n+4)}{2n+5}$.

17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n\sqrt[4]{n^2+4n}+11n\sqrt{4n^2-5}}{\sqrt[5]{n^6-3n^3+9}-7n\sqrt[4]{64n^4+5n^2-7}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n-2}+6^{n+2}+3n^6}{6^{n-2}-7^{n+2}-n^5}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{3n+6}+n^3\cdot(n-3)!}{6n!-7\cdot 9^{3n+4}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n^2+7}{13n^2-6}\right)^{9n-4}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2+7}{6n^2-13}\right)^{9n^2-4}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^{2n+1}-n^4}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^{2n+1}\cdot n-n^4}$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{7}-1}{3\cdot\sqrt[n]{49}-7\cdot\sqrt[n]{7}+4}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+9+...+(5n-1)}{n-4}-\dfrac{10n+5}{4}\right)$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^{-1}}{\sqrt[3]{8n^3-5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+4n-5}}$.

18. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^8+16n^4}-5n\sqrt{64n^2+12}}{7n\sqrt[5]{n^3-5n+4}-5\,(n-1)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{2n+1}-7^{2n-1}}{7^{2n+1}+5^{2n-1}+4n^4}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot 21^{n+7}-(n-1)!}{n^2\cdot(n-3)!+n^{21}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+5}{7n^2-14}\right)^{7n-15}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n\left(\sqrt[3]{27n^3+6n-7}-\sqrt[3]{27n^3-5n+7}\right)}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6}{3n^2}\right)^{7n^2-15}$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{6n+7}{9n-15}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{6n^2+7}{9n-15}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{9\cdot\sqrt[n]{9}-10\cdot\sqrt[n]{3}+1}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+7+....+(5n+2)}{4n^2-1}$.

19. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\sqrt[3]{n^2+2n+1}+6\sqrt{4n^2-5n+1}}{7\sqrt[3]{n^4+3n^3+2}-(2n+1)^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12^{n+1}+11^{n-3}+5n^5}{11^{n+2}-3^n\cdot 2^{2n+2}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^5-5(n+1)!}{15^{3n+2}+n^2\cdot(n-1)!}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{\sqrt[3]{9n^3+4n^2-7}+\sqrt[3]{4-9n^3}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^3+5}{9n^3-8}\right)^{2n+3}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^3-3}{7n^3-8}\right)^{2n^3+3}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{8n^2-4}{2n^2+3}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{8n^3-4}{2n^2+3}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{8\cdot\sqrt[n]{4}-13\cdot\sqrt[n]{2}+5}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+7+\ldots+(6n-5)}{n+2}-\dfrac{6n+7}{2}\right)$.

20. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n\sqrt[5]{n^3+7n^2}+(2n-1)\sqrt{9n^2+3}}{\sqrt{n^3+2n^2+n}+(3n-2)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}\cdot 2^{2n}-5^{n+6}}{6n^5-12^{n-2}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{4n-5}+3n^5-(n-1)!}{n^2\cdot(n-3)!+5^{6n+3}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7}{\sqrt{n^2+5n-4}-n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+5}{9n^3-4}\right)^{4n-4}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n^3+5}{9n^3-4}\right)^{4n^3-4}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n^3+7}{3n^3-5}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n+7}{3n^3-5}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{81}-5\cdot\sqrt[n]{9}+4}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+8+\ldots+(5n+3)}{4n^2+3}$.

Вопросы:

1. Какие виды неопределенностей Вы знаете?
2. Какими способами можно избавиться от неопределенностей каждого типа?
3. Что такое число e?
4. Какого вида неопределенность порождает число e?
5. Какими известными пределами мы пользуемся при раскрытии неопределенностей?

Задание 5. Точные границы числовых множеств. Верхний и нижний пределы

Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ для данной последовательности x_n:

1. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\left(2+(-1)^n\right)$.
2. $x_n = \dfrac{2n+1}{n}\arccos(-1)^n$.
3. $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}\cdot\sin\dfrac{2+(-1)^n}{6}\pi$.
4. $x_n = \left(2+\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)\cdot\dfrac{3n-1}{n+2}$.
5. $x_n = \left(3-(-1)^n\right)\cdot\dfrac{2n+5}{n+2}$.
6. $x_n = \left(2+\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\cdot\dfrac{n+2}{n+1}$.
7. $x_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1+(-1)^n}{2}\cdot\dfrac{2n+3}{n+2}$.
8. $x_n = \left(1+\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\cdot n$.
9. $x_n = \arcsin\dfrac{3+(-1)^n}{4}\cdot\dfrac{5n-1}{3n+5}$.
10. $x_n = \arcsin\dfrac{1+(-1)^n}{2}\cdot\dfrac{6n-5}{2n+4}$.
11. $x_n = \operatorname{arctg}\sqrt{2+(-1)^n}\cdot\dfrac{n}{2n+5}$.
12. $x_n = \left(1+\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\cdot\dfrac{n-3}{n+5}$.
13. $x_n = \dfrac{2n+1}{n+2}\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{2+(-1)^n}$.
14. $x_n = \dfrac{4n+5}{3n-2}\cdot\arccos\dfrac{3+(-1)^n}{4}$.
15. $x_n = \dfrac{5n-7}{3n-2}\cdot\arccos\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.
16. $x_n = \dfrac{5n-7}{2n+5}\cdot\cos\dfrac{2+(-1)^n}{6}\pi$.
17. $x_n = \dfrac{3n+5}{6n-2}\cdot\arcsin\sqrt{\dfrac{2+(-1)^n}{4}}$.
18. $x_n = \operatorname{arctg}(-1)^n\cdot\dfrac{4n-2}{n}$.
19. $x_n = \dfrac{n+5}{n+3}\cdot\arccos\sqrt{\dfrac{2+(-1)^n}{4}}$.
20. $x_n = \dfrac{5n-7}{3n+11}\cdot\arcsin(-1)^n$.

Вопросы:

1. Что такое последовательность, ограниченная сверху? Снизу? Ограниченная?
2. Что такое граница последовательности?
3. Что такое точные верхняя и нижняя границы?
4. Что такое частичные пределы последовательности?

5. Что можно сказать о частичных пределах а) сходящейся последовательности; б) расходящейся последовательности; в) бесконечно большой последовательности; г) монотонной последовательности; д) ограниченной последовательности?

6. Что можно сказать о точных границах а) сходящейся последовательности; б) расходящейся последовательности; в) бесконечно большой последовательности; г) монотонной последовательности; д) ограниченной последовательности?

7. Могут ли точные верхняя и нижняя границы последовательности совпадать?

8. Верно ли, что $\sup x_n \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\inf x_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$?

9. Можно ли утверждать, что каждый частичный предел данной последовательности является предельной точкой множества ее значений? Верно ли обратное?

Задание 6. Критерий Коши

Используя критерий Коши определить, сходится ли последовательность x_n, заданная рекуррентно ($x_1 = a$):

1. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
2. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{2^n}$.
3. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{5^n}$.
4. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{2^n}$.
5. $x_n = x_{n-1} + (-1)^n \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
6. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.
7. $x_n = x_{n-1} + (-1)^n \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.
8. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.

9. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{7}{9}\right)^n.$

10. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{7^n}.$

11. $x_n = x_{n-1} + (-1)^n \left(\dfrac{2}{5}\right)^n.$

12. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{3}{7}\right)^n.$

13. $x_n = x_{n-1} + (-1)^n \left(\dfrac{5}{6}\right)^n.$

14. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{6^n}.$

15. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{4}{7}\right)^n.$

16. $x_n = x_{n-1} + (-1)^n \cdot \left(\dfrac{5}{7}\right)^n.$

17. $x_n = x_{n-1} + \left(\dfrac{6}{7}\right)^n.$

18. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{2^n}.$

19. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{2n-1}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{4^n}.$

20. $x_n = x_{n-1} + \dfrac{n}{n+3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n.$

Вопросы:

1. Как звучит критерий Коши сходимости последовательности?
2. Как звучит отрицание критерия Коши для расходящейся последовательности?
3. Какая последовательность называется фундаментальной?
4. Какая последовательность называется сходящейся в себе?
5. Верно ли, что любая фундаментальная последовательность сходится?
6. Верно ли, что если последовательность не сходится в себе, то она расходится?
7. Верно ли, что последовательность x_n, удовлетворяющая условию

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geqslant N \ \exists p \in \mathbb{N} : \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

является фундаментальной? Приведите пример.

Задание 7. Признак Вейерштрасса

Используя признак Вейерштрасса, доказать, что данная последовательность сходится, и найти ее предел.

1. $x_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdots \frac{3n+2}{4n-2}$.
2. $x_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{12} \cdots \frac{4n+1}{5n-3}$.
3. $x_n = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdots \frac{2n+1}{4n-3}$.
4. $x_n = \frac{7}{1} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{13}{11} \cdots \frac{3n+4}{5n-4}$.
5. $x_n = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{9}{13} \cdots \frac{3n}{4n+1}$.
6. $x_n = \frac{4}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{14}{14} \cdots \frac{5n-1}{6n-4}$.
7. $x_n = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{17} \cdots \frac{3n-2}{5n+2}$.
8. $x_n = \frac{9}{2} \cdot \frac{12}{7} \cdot \frac{15}{12} \cdots \frac{3n+6}{5n-3}$.
9. $x_n = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{15} \cdots \frac{4n}{6n-3}$.
10. $x_n = \frac{11}{4} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{15}{10} \cdots \frac{2n+9}{3n+1}$.
11. $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{4}$, $x_1 = 1$.
12. $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$, $x_1 = 4$.
13. $x_{n+1} = \frac{x_n+4}{2}$, $x_1 = 2$.
14. $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{4}$, $x_1 = 2$.
15. $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{3}$, $x_1 = 1$.
16. $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 5$, $x_1 = 15$.
17. $x_{n+1} = \frac{x_n}{5} + 3$, $x_1 = 6$.
18. $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2}$, $x_1 = 4$.
19. $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, $x_1 = 6$.
20. $x_{n+1} = \sqrt{4+x_n}$, $x_1 = 5$.

Вопросы:

1. Как звучит признак Вейерштрасса сходимости последовательности?
2. Какая последовательность называется монотонной? Строго монотонной?
3. Как можно установить монотонность последовательности?
4. Какая последовательность называется ограниченной?
5. Верно ли, что если последовательность сходится, то она монотонна и ограничена?

6. Верно ли, что если последовательность сходится, то она монотонна?
7. Верно ли, что если последовательность сходится, то она ограничена?
8. Верно ли, что если последовательность расходится, то она неограниченна?
9. Верно ли, что если последовательность расходится, то она не монотонна?
10. Верно ли, что если последовательность неограниченна, то она расходится?
11. Верно ли, что если последовательность ограничена, но не монотонна, то она расходится?
12. Верно ли, что если последовательность монотонна, то ее предел является ее точной границей?
13. Справедлива ли теорема Вейерштрасса, если последовательность монотонна начиная с некоторого номера?

Задание 8. Сумма числового ряда

Найти сумму ряда.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 28n - 45}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2-7n-12}$.

9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-14n-48}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{36n^2-24n-5}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-84n-13}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2+35n-6}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-20}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-42n-40}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{16n^2-8n-15}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2-21n-10}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2+5n-6}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-35n-6}$.

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Что такое частная сумма ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся? Расходящимся?
4. Что такое сумма ряда?

Задание 9. Исследование ряда на сходимость

Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{n}}{n\,(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2-3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cdot \cos^2 n}{n^3+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{2n^3+4}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)\, 3^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{((-1)^n+2)\, n}{3n+100}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{(n+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-\sin n}{\sqrt{2n+3}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{(n+1)}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{(n+1)^3}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+(-1)^n)\,(3n+5)}{25n-4}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2+\sin(\pi n/4))}{3^n+5}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin 2^n|}{5^n+7}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^n$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+\sin(\pi n/6)}{4^n+n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{n}-5n}{n^2\sqrt[3]{n}+5n+7}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-3n}}{n^2\sqrt{n}+8}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \arcsin{(-1)^n}}{(n+1)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+5n-6}{5n^3-6n+4}$.

Вопросы:

1. Какое условие является необходимым для сходимости ряда?
2. Как можно сформулировать отрицание необходимого условия сходимости?
3. Верно ли, что если общий член ряда стремится к нулю, то ряд сходится? Почему?
4. Какие признаки определения сходимости рядов Вы знаете? Для каких рядов их можно использовать?

5. Можно ли с помощью признаков сравнения доказать расходимость ряда?

6. Можно ли использовать признак сравнения, если оценка общего члена ряда верна только начиная с некоторого номера?

7. Можно ли с помощью признаков сходимости найти сумму ряда? Оценить сумму ряда?

8. Можно ли, зная предел общего члена ряда, сделать заключение о сходимости ряда?

9. Какие “эталонные” ряды можно использовать для сравнения?

10. Как звучит критерий Коши сходимости ряда?

11. Как звучит отрицание критерия Коши?

Список литературы

[1] Т.В. Родина, Е.С. Трифанова. Курс лекций по математическому анализу - I (Для направления “Прикладная математика и информатика”). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010, 183 стр.

[2] Т.В. Родина, Е.С. Трифанова. Задачи и упражнения по математическому анализу - I (Для направления “Прикладная математика и информатика”). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011, 208 стр.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г. Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Родина Татьяна Васильевна
Трифанова Екатерина Станиславовна
Бойцев Антон Александрович

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ для направления "Прикладная математика и информатика" 1 модуль

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе