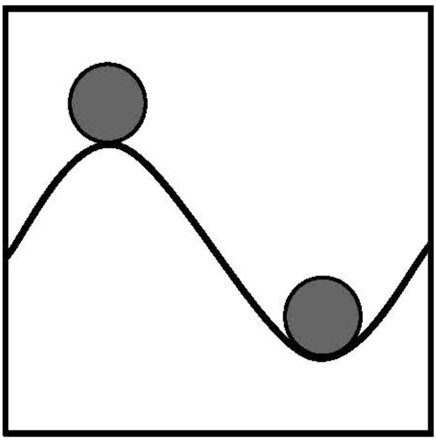
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Рябова, В.Ю. Тертычный-Даури

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ



Санкт-Петербург

2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Рябова, В.Ю. Тертычный-Даури

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Учебное пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2015

Рябова А.В., Тертычный-Даури В.Ю. Элементы теории устойчивости. Учебное пособие. — СПб: Университет ИТМО, 2015. — 208 с.

В пособии излагаются основы качественной теории устойчивости решений дифференциальных уравнений и движений динамических систем разного вида. Весь материал разбит на главы, в которых достаточно подробно излагаются важнейшие понятия, теоремы об устойчивости решений дифференциальных уравнений, методы Ляпунова в теории устойчивости, устойчивость систем автоматического управления и специальные вопросы теории устойчивости. Пособие предназначено для студентов всех специальностей, прошедших учебную подготовку по курсу «Высшая математика» и интересующихся вопросами устойчивости прохождения тех или иных процессов в реальных динамических системах. Предназначено для студентов всех технических специальностей, аспирантов, научных сотрудников и преподавателей.

Список литературы — 168 наим.

Рецензенты:
д. физ.-мат. н., профессор Шориков А.Ф.
к. физ.-мат. н., доцент Потапов А.П.

Одобрено на заседании кафедры ВМ, протокол № 4 от 28.08.2015
Одобрено Ученым советом ЕН факультета, протокол № 5 от 23.09.2015

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО — ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО — участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО — становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

Оглавление

Введение

При изучении вопросов, связанных с решением задач об устойчивости движений динамических объектов, возникают проблемы выяснения характера поведения решений и асимптотических свойств решений уравнений, описывающих эти объекты. За редким исключением найти аналитическую форму решений дифференциальных уравнений не удается и поэтому исследователю задач об устойчивости приходится прибегать к инструментарию качественного изучения свойств решений этих уравнений без использования явного вида самих решений.

Задача качественного анализа, о котором идет речь, весьма сложная. Имеется достаточно большое количество методов, с помощью которых для различных классов дифференциальных уравнений удается проводить эффективное исследование процессов, происходящих в дифференциальной системе.

Основная цель авторов этого учебного пособия заключается в том, чтобы дать широкую ретроспективу задач и методов по качественной теории дифференциальных уравнений и математической теории устойчивости динамических систем в сжатой, простой и унифицированной форме, в виде собрания различных утверждений, представления фактического материала, доступного для понимания как самих студентов технических специальностей, так и их преподавателей, а также специалистов, чьи научные интересы лежат в соответствующих областях знаний. Вместе с тем, хотелось бы отметить, что уровень математической подготовки читателей предполагается достаточно высоким, ориентированным не только на овладение материалом пособия, но и на применение его для получения каких-либо новых научных результатов, написания курсовых, дипломных проектов, защиты диссертационных работ с использованием теории устойчивости. Авторы искренне надеются, что эта основная цель в том или ином виде будет достигнута.

Глава 1 посвящена изложению основных понятий и устойчивых свойств решений систем дифференциальных уравнений (СДУ).

Приведены теоремы об устойчивости линейных СДУ. Указаны основные критерии устойчивости. Рассмотрена устойчивость решений нелинейных СДУ.

В главе 2 подробно излагаются основополагающие первый и второй (прямой) методы Ляпунова в теории устойчивости движения.

В главе 3 собраны результаты по теории устойчивости систем автоматического управления (САУ). Рассматриваются различные критерии в теории абсолютной устойчивости управляемых систем. Изучаются задачи стабилизации и оптимальной стабилизации для регулируемых динамических систем. Особое внимание уделяется адаптивным САУ.

Глава 4 знакомит со специальными вопросами теории устойчивости, куда вошли вопросы устойчивости движения механических систем, устойчивости систем с распределенными параметрами, описываемых СДУ в частных производных, устойчивости решений СДУ в банаховом пространстве и устойчивости стохастических систем.

Пособие заканчивается небольшим сборником задач и упражнений, предназначенных для самостоятельного решения с целью лучшего практического освоения предложенного теоретического материала. Все упражнения снабжены ответами.

Глава 1

Устойчивость решений дифференциальных уравнений

По-видимому, впервые задачи, связанные с устойчивостью, возникли при изучении положений равновесия механических систем. Классический пример с маятником: если маятник занимает нижнее положение, то небольшие возмущения могут вызвать лишь его затухающие колебания (положение равновесия устойчиво к небольшим возмущениям). Маятник в верхнем положении на малейший толчок отзовется падением (положение равновесия здесь, очевидно, неустойчиво). Возникает тем самым вопрос, при каких же условиях равновесное положение системы будет устойчиво? Е. Торричелли в 1644 году сформулировал в общем виде критерий устойчивости равновесия систем, находящихся под действием силы тяжести. Ж. Лагранж в 1788 году доказал утверждение о достаточных условиях устойчивости равновесия произвольной консервативной системы.

С течением времени с развитием науки и техники возникли задачи об устойчивости не только положений равновесия, но и движения системы в целом. Кризис, вызванный неустойчивой работой центробежных регуляторов, установленных на паровых машинах, явился причиной появления исследований Дж. К. Максвелла (1868 г.), И.А. Вышнеградского (1876–1877 гг.) и других, в которых те или иные вопросы теории регулирования ставились в зависимость от установления критериев устойчивости движения.

В работах Э. Дж. Рауса (1877–1884 гг.), Н.Е. Жуковского (1882 г.) и других выдвигались задачи и методы их решения, посвященные общим вопросам устойчивости движения. В работах того времени авторы при анализе устойчивых свойств исходили из линеаризованных уравнений возмущенного движения без учета влияния

членов высшего порядка. Понятно, что при таком подходе результаты анализа не могли быть вполне удовлетворительными.

В 1892 году вышла из печати фундаментальная работа А.М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», определившая качественно новый этап в развитии всей теории устойчивости. По сути, А.М. Ляпунов заложил основы этого нового этапа развития, дав строгое определение понятия устойчивости движения, поставив задачу об устойчивости движения по уравнениям первого приближения и предложив два основных метода исследования устойчивости движения.

В дальнейшем теория устойчивости развивалась по многим направлениям, в частности, немало исследований посвящено изучению устойчивости решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах, устойчивости регулируемых систем, устойчивости при постоянно действующих возмущениях, при случайных воздействиях и т.д.

С учетом этих соображений о многообразии задач математической теории устойчивости была составлена настоящая глава 1, куда вошли вопросы, связанные: 1) с устойчивостью решений дифференциальных уравнений; 2) с методами Ляпунова в теории устойчивости движения; 3) с устойчивостью регулируемых систем и 4) с различными специальными задачами теории устойчивости.

Здесь дается сжатое, почти конспективное изложение материала с установкой на сущностное раскрытие рассматриваемых вопросов без излишней их детализации. Для более полного и глубокого знакомства с теорией устойчивости отсылаем читателей к известным работам, в той или иной степени оказавшим влияние на состав и содержание настоящей главы 1. В список этих работ вошли книги [2, 3, 5, 10, 11, 13-15, 17, 20, 21, 23, 28, 32, 33, 36-38, 40, 41, 45, 48, 50, 60, 63-65, 68, 71, 73, 76-78, 80-82, 84, 86, 92-94, 97, 99, 103-106, 109, 110, 112, 113, 119, 121, 122, 125, 126, 132, 137, 140, 146-148, 150, 161]. Добавим к этому и некоторые статьи по данной тематике [1, 12, 24, 30, 42, 43, 46, 85, 90, 123, 158, 159, 166].

Нет единого определения понятия устойчивости. Согласно [89]: «Устойчивость — термин, не имеющий четко определенного содержания». Следуя [89], укажем на некоторые употребления этого термина. Если речь идет о движении, то имеют в виду прежде всего характер поведения системы на бесконечном промежутке времени.

Здесь можно выделить следующие особенности движения применительно к понятию устойчивости движения.

1. Свойство системы при движении в том или ином смысле мало отклоняться от некоторого движения при малых возмущениях начального положения системы в фазовом пространстве (устойчивость по Ляпунову, орбитальная устойчивость, равномерная устойчивость). Если к этому добавляется еще и малость отклонения при малых возмущениях закона движения, то имеем устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Если малые возмущения начального положения подчинены какому-либо дополнительному условию, то имеем условную устойчивость. Если малость возмущения и отклонения относятся лишь к некоторым параметрам, то имеем устойчивость по части переменных.

2. Свойство системы сохранять некоторые характеристики фазового портрета при малых возмущениях закона движения (устойчивость грубой системы).

3. Свойство системы по мере движения оставаться в ограниченной области фазового пространства (устойчивость по Лагранжу).

4. Свойство системы в процессе движения сколь угодно поздно возвращаться как угодно близко к своему начальному положению в фазовом пространстве (устойчивость по Пуассону).

Важно иметь в виду, подчеркнем это еще раз, что все это учебное пособие вовсе не претендует на гриф учебника по теории устойчивости. Скорее, это справочное, вспомогательное учебное пособие по данной теме, достаточное общее, достаточно сжатое по представленному материалу, без особых, лишних пространных углублений, пояснений, доказательств. Основная методологическая концепция этой главы 1 состоит в том, чтобы дать фактическое и фрагментарное изложение материала, посвященного тем или иным вопросам и задачам теории устойчивости и по возможности проиллюстрировать их какими-либо наглядными примерами.

В § 1.1 даются основные понятия и определения теории устойчивости: решения дифференциального уравнения (ДУ), устойчивого по Ляпунову, асимптотически устойчивого, равномерно устойчивого, асимптотически устойчивого в целом и других. Перечисляются общие свойства решений системы линейных ДУ. Даются формулировки известных лемм Гронуолла–Беллмана и Бихари, играющих важную роль в установлении устойчивых свойств решений.

В § 1.2 собраны теоремы об устойчивости систем линейных ДУ. Рассматриваются при этом линейные неоднородные системы с непостоянными, постоянными, почти постоянными и периодическими коэффициентами. Результаты теорем сопровождаются различными модельными примерами. Параграф завершается изучением асимптотического поведения решений линейных однородных систем ДУ с помощью асимптотических рядов.

В следующем § 1.3 речь идет о некоторых критериях устойчивости, которые связаны с алгебраической задачей Рауса–Гурвица об установлении необходимых и достаточных условий того, что корни искомого полинома расположены в отрицательной вещественной части комплексной плоскости. Приведены соответствующие теоремы и указаны критерии Гурвица, Михайлова и Рауса.

§ 1.4 посвящен изучению вопросов устойчивости решений нелинейных ДУ. Основу материала составляет анализ автономных квазилинейных систем с постоянными и непостоянными коэффициентами. Вводится условие нелинейности. Уделяется также внимание условной устойчивости решения системы ДУ общего вида. В конце параграфа рассматриваются некоторые вопросы асимптотического поведения решений полиномиальных ДУ.

1.1 Основные понятия теории устойчивости

Введем в рассмотрение нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, ..., y_n), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

где t — независимая переменная (время), $y_1, ..., y_n$ — функции t, $f_i(\cdot)$ — функции, определенные в полицилиндре $\Omega = I \times D$, где $I = \{\, t : \ t \ge t_0 \,\}$, t_0 — начальное значение t, D — открытая область действительного (или комплесного) n–мерного векторного пространства.

В векторно-матричных обозначениях: $y = (y_1, ..., y_n)^*$, $f(t, y) = \big(f_1(t, y), ..., f_n(t, y)\big)^*$, где $*$ сверху означает операцию транспонирования, систему (1.1) можно записать в виде векторного уравнения

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1.2}$$

где вектор-функцию $y = y(t) \in C^1(a, b)$, $(a, b) \subset I$, удовлетворяющую уравнению (1.2) при $t \in (a, b)$, называют его решением.

1.1.1. Основные определения. Будем в дальнейшем полагать, что $f(t, y)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по y_1, ..., y_n. Если y принимает комплексные значения, то $f(t, y)$ считаем аналитической вектор-функцией по y_1, ..., y_n. В этих условиях, как известно, задача Коши для начальных значений $(t_0, y_0) \in \Omega$ имеет единственное решение.

Определение 1.1. *Решение* $\bar{y}(t)$, $t \geq t_0$, *системы* (1.2) *называется устойчивым по Ляпунову (или просто устойчивым; иногда добавляют: устойчивым по Ляпунову при* $t \to \infty$*), если* $\forall\, \varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что все решения* $y = y(t)$ *системы* (1.2) (*в том числе и решение* $\bar{y}(t)$), *удовлетворяющие условию* $\| y(t_0) - \bar{y}(t_0) \| < \delta$, *удовлетворяют неравенству*

$$\| y(t) - \bar{y}(t) \| < \varepsilon, \qquad t > t_0.$$

Можем заключить отсюда, что решение $\bar{y}(t)$ устойчиво (устойчиво по Ляпунову), если достаточно близкие к нему $\forall\, t_0$ решения $y(t)$ целиком находятся в сколь угодно узкой ε–трубке, построенной вокруг решения $\bar{y}(t)$.

В частности, при $f(t, 0) \equiv 0$ тривиальное решение (положение равновесия, точка покоя) $\bar{y}(t) \equiv 0$, $t \in (a, \infty)$ устойчиво по Ляпунову, если $\forall\, \varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из неравенства $\| y(t_0) \| < \delta$ вытекает неравенство $\| y(t) \| < \varepsilon$, $t > t_0$.

Отметим также, что из устойчивости решения $\bar{y}(t) \not\equiv 0$ не следует его ограниченность, а из ограниченности решения не следует его устойчивость.

Определение 1.2. *В случае, когда число* $\delta > 0$ *можно выбрать, не зависящим от начального момента* $t_0 \in T \subset I$, *т.е.* $\delta = \delta(\varepsilon)$, *то устойчивость называется равномерной в области* T.

Определение 1.3. *Решение* $\bar{y} = \bar{y}(t)$, $t \in (a, \infty)$ *называется асимптотически устойчивым при* $t \to +\infty$, *если, во-первых, оно*

устойчиво по Ляпунову и, во-вторых, $\forall\, t_0 \in (a, \infty)$ $\exists\, \Delta = \Delta(t_0) > 0$ *такое, что для всех решений* $y = y(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, *удовлетворяющих условию* $\| y(t_0) - \bar{y}(t_0) \| < \Delta$, *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{t \to \infty} \| y(t) - \bar{y}(t) \| = 0. \tag{1.3}$$

Если решение $\bar{y}(t)$ *устойчиво и* $\forall\, t_0 \in (a, \infty)$ $\exists\, \Delta = \Delta(t_0) > 0$ *такое, что для всех решений* $y(t)$: $\| y(t_0) - \bar{y}(t_0) \| < \Delta$ *имеет мето предельное неравенство*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \| y(t) - \bar{y}(t) \| < 0,$$

то решение $\bar{y}(t)$ *называется экспоненциально устойчивым.*

Понятно, что из одного лишь условия (1.3) еще не следует устойчивость решения $\bar{y}(t)$. В частности, тривиальное решение $\bar{y}(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым, если оно: 1) устойчиво и 2) $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ при $\| y(t_0) \| < \Delta$. Шар $\| y \| < \Delta(t_0)$, когда t_0 фиксировано, есть *область притяжения* положения равновесия, расположенного в точке O.

Определение 1.4. *Пусть система* (1.2) *определена в полупространстве* $\Omega = I \times \{ \| y \| < \infty \}$. *Если решение* $\bar{y}(t)$, $t \in (a, \infty)$: 1) *асимптотически устойчиво при* $t \to \infty$ *и* 2) *все решения* $y = y(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > a$, *обладают свойством* (1.3), *т.е.* $\Delta = \infty$, *то решение* $\bar{y}(t)$ *называется асимптотически устойчивым в целом.*

Таким образом, для асимптотически устойчивого в целом решения $\bar{y}(t)$ его *областью притяжения* $\forall\, t_0$ является все пространство R^n переменных y, поскольку $\Delta = \infty$.

Определение 1.5. *Решение* $\bar{y} = \bar{y}(t)$, $t \in (a, \infty)$, *называется неустойчивым по Ляпунову, если для некоторых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ *и* $\forall\, \delta > 0$ $\exists$ *решение* $y_\delta(t)$ (*хотя бы одно*) *и момент* $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ *такие, что выполнены одновременно неравенства*

$$\| y_\delta(t_0) - \bar{y}(t_0) \| < \delta \qquad и \qquad \| y_\delta(t_1) - \bar{y}(t_1) \| \geq \varepsilon.$$

Заметим, что отрицание Определения 1.1 приводит к тому, что надо считать также неустойчивым решение $\bar{y}(t)$: 1) непродолжаемое при $t \to \infty$ или 2) такое решение, для которого в любой окрестности точки $\bar{y}(t_0)$ $\exists$ точка y_0, порождающая при $t = t_0$ решение $y(t)$, непродолжаемое при $t \in [\,t_0, \infty)$. Напомним, что единственность решения задачи Коши на интервале (t, ∞) обеспечивает бесконечную продолжаемость решения $y(t)$ вправо (решение $y(t)$ имеет смысл при $t \in [\,t_0, \infty)$).

Подобно этому, тривиальное решение (положение равновесия) $\bar{y} \equiv 0$ неустойчиво, если для некоторых $\varepsilon > 0,\ t_0 \in (a, \infty)$ и $\forall\, \delta > 0$ $\exists$ решение $y_\delta\,(t)$ и $\exists$ момент $t_1 > t_0$ такие, что $\|\, y_\delta\,(t_0)\,\| < \delta$ и $\|\, y_\delta\,(t_1)\,\| \geq \varepsilon$.

Модельный пример. Требуется исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения (ДУ) $\dot{y} = -a^2 y$, $a \neq 0$, с начальным условием $y_0 = y(t_0)$. Видим, что решение $y = y_0 \exp[\,-a^2\,(t - t_0)\,]$ асимптотически устойчиво, поскольку

$$\left|\, y_0\, e^{-a^2\,(t-t_0)} - \widetilde{y}_0\, e^{-a^2\,(t-t_0)} \,\right| = e^{-a^2\,(t-t_0)}\,|\, y_0 - \widetilde{y}_0 \,| < \varepsilon$$

при $t \geq t_0$, если $|\, y_0 - \widetilde{y}_0 \,| < \varepsilon\, e^{-a^2 t_0}$ и

$$\lim_{t\to\infty}\ \exp\left[\,-a^2\,(t - t_0)\,\right] |\, y_0 - \widetilde{y}_0 \,| = 0.$$

Если же на устойчивость надо исследовать решение ДУ $\dot{y} = a^2 y$, $a \neq 0$, где $y_0 = y(t_0)$, то можем сделать вывод о том, что решение $y = y_0 \exp[\,a^2\,(t - t_0)\,]$ неустойчиво, так как не существует столь малого $\delta > 0$, при котором из неравенства $|\, y_0 - \widetilde{y}_0 \,| < \delta(\varepsilon)$ следовало бы неравенство

$$\left|\, y_0\, e^{a^2\,(t-t_0)} - \widetilde{y}_0\, e^{a^2\,(t-t_0)} \,\right| < \varepsilon,$$

или

$$e^{a^2\,(t-t_0)}\,|\, y_0 - \widetilde{y}_0 \,| < 0, \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

Рассмотрим наряду с системой (1.2) возмущенную систему

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f(t, z) + \varphi(t, z), \tag{1.4}$$

где $z = (z_1,\, ...,\, z_n)^*$, $\varphi(t, z)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по z.

Определение 1.6. *Решение $\bar{y} = \bar{y}(t)$, $t \in (a, \infty)$ системы (1.2) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях $\varphi(t, z)$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такие, что при $\|\, \varphi(t, z)\,\| < \delta$ все решения $z = z(t)$ системы (1.4), удовлетворяющие условию $\|\, z(t_0)\,\| < \delta$, определены при $t \in [\,t_0, \infty)$, причем выполнено неравенство*

$$\|\, z(t) - \bar{y}(t)\,\| < \varepsilon, \qquad t \in [\,t_0, \infty).$$

1.1.2. Общие свойства решений системы линейных ДУ.

Пусть имеется линейная дифференциальная система вида

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(t)\, y_k + f_i(t), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1.5}$$

где $a_{ik}(t)$, $f_i(t)$ — коэффициенты системы и ее свободные члены считаются непрерывными на интервале $I = \{\, t \in (a, \infty)\,\}$. В интегральной форме уравнения (1.5) имеют вид

$$y_i(t) = c_i + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\tau)\, y_k(\tau) + f_i(\tau) \right) d\tau,$$

где $t_0 \in I,\ i = \overline{1, n}$, $c_i = \text{const}$, а в векторно-матричной — следующую запись:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A(t)\, y + f(t), \tag{1.6}$$

где $A(t) \in C(I),\ f(t) \in C(I)$. Отметим здесь, что для линейной системы ДУ (1.6) справедлива теорема существования и единственности решений в I с начальным условием $y_0 = y(t_0)$.

Обозначим через $X(t) = \big(x_{ik}(t)\big)$, $\det X(t) \neq 0$, *фундаментальную $n \times n$–матрицу* линейно независимых решений соответствующей однородной системы ДУ:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(t)\, x. \tag{1.7}$$

Видно, что матрица $X(t)$ удовлетворяет матричному уравнению:

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t).$$

Кроме того, если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1.7), то кажде решение этой системы может быть представлено в виде: $x(t) = X(t)\,c$, где c — n–мерный постоянный вектор. При $x_0 = x(t_0)$ имеем: $x(t_0) = X(t_0)\,c$, откуда $c = X^{-1}(t_0)\,x(t_0)$. Значит, $x(t) = K(t,t_0)\,x(t_0)$, где $K(t,t_0) = X(t)\,X^{-1}(t_0)$ — *матрица Коши*, не зависящая от выбора фундаментальной матрицы $X(t)$. Если $y = y(t)$ — это любое решение неоднородной системы, то оно может быть записано так: $y(t) = \widetilde{y}(t) + X(t)\,c$, где $\widetilde{y}(t)$ — ее некоторое фиксированное решение; c — постоянный n–вектор.

Обозначим через $W(t) = \det X(t)$, где $X(t)$ — ранее введенная фундаментальная матрица, *определитель Вронского*. Для $W(t)$, как известно, имеет место следующее дифференциальное равенство

$$\dot{W}(t) = \operatorname{Sp} A(t)\,W(t),$$

где $\operatorname{Sp} A(t)$ — след матрицы $A(t)$. Интегрируя это уравнение по t, $t \in [\,t_0, t\,]$, $t_0, t \in I$, получим так называемую *формулу Остроградского–Лиувилля*

$$W(t) = W(t_0)\,\exp\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\,d\tau.$$

Обратимся далее к линейной однородной системе (1.7) с начальным условием $x_0 = x(t_0)$. Для нахождения решения $x(t)$ воспользуемся *методом последовательных приближений*. Из уравнения (1.7) получим интегральное уравнение

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,x(t_1)\,dt_1,$$

куда под знак интеграла подставим выражение

$$x(t_1) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_2)\,x(t_2)\,dt_2.$$

Будем иметь

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,x(t_0)\,dt_1 + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} A(t_2)\,x(t_2)\,dt_2.$$

Последовательно повторяя эту процедуру, получим в результате формальное представление решения с помощью *формул Пеано*:

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,x(t_0)\,dt_1 + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} A(t_2)\,x(t_2)\,dt_2 \;+\; \ldots,$$

или

$$x(t) = \Omega_{t_0}^{t}\,x(t_0),$$

где матрица $\Omega_{t_0}^{t}$, называемая *матрицантом* дифференциальной системы (1.7), имеет вид

$$\Omega_{t_0}^{t} = E + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,dt_1 + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)\,dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} A(t_2)\,dt_2 \;+\; \ldots, \qquad (1.8)$$

где E — единичная матрица размерности n. Можно показать [37], что ряд (1.8) абсолютно сходится $\forall\, t \in I$ и эта сходимость равномерная для любого конечного $[\,\alpha, \beta\,] \subset I$. Отметим также, что матрицант $\Omega_{t_0}^{t}$ — это нормированная фундаментальная матрица системы (1.7), так как $\Omega_{t_0}^{t_0} = E$. Согласно свойству единственности решений системы линейных ДУ имеем тождество: $\Omega_{t_0}^{t} \equiv K(t,t_0)$ с матрицей Коши $K(t,t_0)$. С помощью теоремы единственности устанавливается *основное свойство матрицанта*: $\Omega_{t_1}^{t}\,\Omega_{t_0}^{t_1} = \Omega_{t_0}^{t}$, где $t_0, t_1, t \in I$.

Остановимся на *методе вариации произвольных постоянных* (методе Лагранжа). Пусть имеется неоднородная линейная система ДУ (1.6). Ее решение ищем в виде: $y = X(t)\,z$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы: $\dot{x} = A(t)\,x$, а $z = z(t)$ — новая неизвестная вектор-функция. После подстановки выражения для y в исходное уравнение (1.6) получим

$$X(t)\,\dot{z} + \dot{X}(t)\,z = A(t)\,X(t)\,z + f(t),$$

или, поскольку
$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t),$$
то в результате будем иметь
$$X(t)\,\dot{z} = f(t).$$

Следовательно, приходим отсюда к выражению
$$z(t) = c + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

С учетом того, что $y = X(t)\,z$, найдем
$$y(t) = X(t)\,c + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

где $K(t,\tau) = X(t)\,X^{-1}(\tau)$ — матрица Коши. Чтобы найти произвольный постоянный вектор c, положим здесь $t = t_0$. Тогда будем иметь: $c = X^{-1}(t_0)\,y(t_0)$, а значит,
$$y(t) = K(t,t_0)\,y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{1.9}$$

Если в формуле (1.9) матрица $X(t)$ при $t = t_0$ нормирована, т.е. $X(t_0) = E$, то в этом случае получим
$$y(t) = X(t)\,y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Заметим, что из соотношения (1.9) вытекает, что неоднородная система (1.6) имеет частное решение
$$\widetilde{y}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

такое, что $\widetilde{y}(t_0) = 0$. Кроме того, если матрица $A(t) = A$ постоянна и $X(t_0) = E$, то $X(t)\,X^{-1}(\tau)$ и $X(t-\tau+t_0)$ представляют собой фундаментальные матрицы однородной системы $\dot{x} = A(t)\,x$, совпадающие при $t = \tau$. Вывод, который отсюда можно сделать: $X(t)\,X^{-1}(\tau) \equiv X(t-\tau+t_0)$.

Следовательно, если взять $t_0 = 0$, то получим для дифференциальной системы, где $A(t) = A$:
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = Ay + f(t) \tag{1.10}$$

общее решение
$$y(t) = X(t)\,y(0) + \int\limits_{0}^{t} X(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что неоднородная система (1.10) имеет частное решение
$$\widetilde{y}(t) = \int\limits_{0}^{t} X(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

при $y(0) = 0$.

1.1.3. Лемма Гронуолла–Беллмана. Часто при изучении устойчивых свойств дифференциальных систем пользуются леммой Гронуолла–Беллмана и ее обобщениями [15, 37].

Теорема 1.1. (Лемма Гронуолла–Беллмана). *Пусть* $u(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ *при* $t \geq t_0$; $u(t), f(t) \in C[t_0,\infty)$, *причем при* $t \geq t_0$ *выполнено неравенство*
$$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \tag{1.11}$$

где c — положительная постоянная. Тогда при $t \geq t_0$ имеет место неравенство
$$u(t) \leq c\,\exp\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau. \tag{1.12}$$

Стандартное доказательство этого утверждения базируется на неравенстве

$$\frac{u(t)}{c+\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau} \le 1,$$

вытекающее из оценки (1.11). Имеем также

$$\frac{f(t)\,u(t)}{c+\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau} \le f(t). \tag{1.13}$$

Интегрируя неравенство (1.13) по t, $t\in[\,t_0,t\,]$, с учетом того, что

$$\frac{d}{dt}\left(c+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right) = f(t)\,u(t),$$

получим

$$\ln\left(c+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right) - \ln c \le \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

откуда с помощью неравенства (1.11) будем иметь оценку (1.12):

$$u(t) \le c+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau \le c\,\exp\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau.$$

Стоит отметить, что при переходе к пределу при $c\to+0$ в формулах (1.11) и (1.12) справедливость леммы не нарушится, если положить $c=0$. Далее укажем на некоторые обобщения леммы Гронуолла–Беллмана.

Теорема 1.2. *Пусть непрерывная положительная функция $u(t)$ для любых значений $t,t'\in(a,b)$ удовлетворяет следующему интегральному неравенству*

$$u(t) \le u(t') + \int\limits_{t'}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,|\,d\tau\,|, \tag{1.14}$$

где $f(t)\in C(a,b)$, $f(t)\ge 0$ при $t\in(a,b)$. Тогда при $a<t_0\le t<b$ справедливо двойное неравенство

$$u(t_0)\,\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right) \le u(t) \le u(t_0)\,\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right).$$

Замечание. В соотношении (1.14) запись $|\,d\tau\,|$ означает, что при $t\ge t'$ имеем

$$u(t) \le u(t') + \int\limits_{t'}^{t} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

а при $t\le t'$ неравенство (1.14) записывается в виде

$$u(t) \le u(t') + \int\limits_{t}^{t'} f(\tau)\,u(\tau)\,d\tau.$$

Приведем еще одно обобщение леммы Гронуолла–Беллмана.

Теорема 1.3. (Лемма Бихари). *Пусть функции $u(t)$, $f(t)\ge 0$ при $t\ge t_0$, где $u(t)$, $f(t)\in C[\,t_0,\infty)$, и имеет место неравенство*

$$u(t) \le c + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,\Phi[\,u(\tau)\,]\,d\tau.$$

Здесь $c=\mathrm{const}>0$, $\Phi(u)$ — положительная непрерывная неубывающая функция при $u\in(0,v)$, где $v\le\infty$, причем

$$\Psi(u) = \int\limits_{c}^{u} \frac{dw}{\Phi(w)}, \qquad u\in(0,v).$$

Тогда, если

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau < \Psi(v-0), \qquad t\in[\,t_0,\infty),$$

то при $t \in [t_0, \infty)$ *справедливо неравенство*

$$u(t) \le \Psi^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right], \tag{1.15}$$

где $\Psi^{-1}(u)$ *— функция, обратная к* $\Psi(u)$.

Замечание. Отметим, что при выборе $v = \infty$, $\Psi(\infty) = \infty$, неравенство (1.15) выполняется без каких-либо ограничений.

Из теоремы 1.3 вытекают следствия:

1. Если $\Phi(u) = u$, то имеем неравенство Гроноулла–Беллмана (1.12).

2. Если $\Phi(u) = u^m$, $m > 0$, $m \ne 1$, т.е. имеет место неравенство

$$u(t) \le c + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\left[\,u(\tau)\,\right]^m d\tau$$

при $t \ge t_0$, то тогда

$$u(t) \le \left[c^{1-m} + (1-m)\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right]^{1/(1-m)}$$

при $0 < m < 1$. Кроме того,

$$u(t) \le \frac{c}{\left[1 - (m-1)\,c^{m-1}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right]^{1/(m-1)}}$$

при $m > 1$ и

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau < \frac{1}{(m-1)\,c^{m-1}},$$

где $t \ge t_0$.

1.2 Теоремы об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений

Следующий параграф посвящен общим теоремам об устойчивости линейных систем ДУ. Для этого рассмотрим линейную неоднородную систему (1.6):

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A(t)\,y + f(t),$$

где положим $A(t)$, $f(t) \in C(I)$, и соответствующую ей однородную систему (1.7):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(t)\,x.$$

Определение 1.7. *Линейная система ДУ* (1.6) *называется устойчивой* (*или вполне неустойчивой*), *если все ее решения* $y = y(t)$ *устойчивы* (*или неустойчивы*) *по Ляпунову.*

Заметим попутно, что для линейных систем ДУ все ее решения устойчивы (или неустойчивы) одновременно. Однако у нелинейных систем ДУ некоторые решения могут быть устойчивыми, а другие неустойчивыми.

Теорема 1.4. *Чтобы линейная система* (1.6) $\forall\, f(t)$ *была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное решение* $x_0 \equiv 0$, $t \in (t_0, \infty)$, $t_0 \in I$, *соответствующей однородной системы* (1.7).

Доказательства этой и других теорем этого параграфа можно найти, например, в книге [37]. Укажем на то, что из доказательства необходимости условия теоремы вытекает, что устойчивость решения $x_0 \equiv 0$ системы (1.7) следует из устойчивости по крайней мере одного решения системы (1.6) при каком-либо $f(t)$.

Обратим внимание на следствия из теоремы 1.4:

1. Система (1.6) устойчива, когда устойчиво хотя бы одно ее решение, и вполне неустойчива, если неустойчиво некоторое ее решение.

2. Система (1.6) устойчива тогда и только тогда, когда устойчива система (1.7).

Видим, что в смысле устойчивости поведение решений системы (1.6) $\forall\, f(t)$ такое же, как и поведение решений системы (1.7). Поэтому в случае изучения устойчивых свойств систем (1.6), (1.7) можно ограничиться анализом лишь устойчивости решений более простой однородной линейной системы (1.7).

Определение 1.8. *Система линейных ДУ* (1.6) *называется равномерно устойчивой, если все ее решения* $y(t)$ *равномерно устойчивы при* $t \to +\infty$ *относительно начального момента* $t_0 \in I$.

Теорема 1.5. *Система линейных ДУ* (1.6) *равномерно устойчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение* $x_0 \equiv 0$ *соответствующей однородной системы* (1.7) *равномерно устойчиво при* $t \to +\infty$.

Определение 1.9. *Система линейных ДУ* (1.6) *называется асимптотически устойчивой, если все ее решения* $y(t)$ *асимптотически устойчивы при* $t \to +\infty$.

Теорема 1.6. *Система линейных ДУ* (1.6) *асимптотически усто-йчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение* $x_0 \equiv 0$ *соответствующей однородной системы* (1.7) *асимптотически устойчиво при* $t \to +\infty$.

Из этой теоремы вытекает, как следствие, что для асимптотической устойчивости системы (1.6) $\forall\, f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная система (1.7) была асимптотически устойчивой.

Перейдем дальше к рассмотрению вопроса об устойчивости линейных однородных дифференциальных систем (1.7) с матрицей $A(t) \in C(I)$. Ее устойчивость эквивалентна ограниченности всех ее решений

Теорема 1.7. *Система линейных однородных ДУ* (1.7) *устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда каждое ее решение* $x = x(t)$, *где* $t \in [\,t_0, \infty)$, $t_0 \in I$, *ограничено на интервале* $[\,t_0, \infty)$.

Эта теорема выдвигает своим следствием следующее утверждение: если неоднородная линейная система (1.6) устойчива, то все ее решения либо ограничены, либо не ограничены при $t \to +\infty$. Заметим также, что из ограниченности решений системы нелинейных ДУ устойчивость этих решений, в общем-то, не следует.

Теорема 1.8. *Линейная однородная система* (1.7) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения* $x = x(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Из этой теоремы следует, что асимптотически устойчивая система линейных ДУ асимптотически устойчива в целом (см. Определение 1.4).

Что же касается системы нелинейных ДУ, то стремление к нулю всех решений не является достаточным условием для асимптотической устойчивости ее тривиального решения.

Модельные примеры. 1. Пусть имеется скалярное уравнение $\dot{y} = 1 + t - y$, которое допускает неограниченное решение $y_0 = t$. Поскольку $y(t) = t + y(0)\,\exp{(-t)}$, то решение y_0, хорошо видно, устойчиво и асимптотически устойчиво.

2. Для скалярного уравнения $\dot{x} = \sin^2 x$ после интегрирования найдем $x = \operatorname{Arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t)$ при $x_0 \neq k\pi$, и $x = k\pi$ при $x_0 = k\pi$, где k — целое. Все эти решения ограничены на $(-\infty, +\infty)$. Вместе с тем, решение $x_0 = 0$ неустойчиво при $t \to +\infty$, так как $\forall\, x_0 \in (0, \pi)$ имеем: $x \to \pi$ при $t \to +\infty$.

3. Задается следующая линейная система:

$$\dot{x} = \frac{x}{t} - t^2 x y^2, \qquad \dot{y} = -\frac{y}{t}, \qquad t \geq 1,$$

с тривиальным решением $x = 0$, $y = 0$. После интегрирования получим

$$x = c_1 t\, e^{-c_2^2 t}, \qquad y = \frac{c_2}{t},$$

откуда при $t_0 = 1$ найдем

$$x(t) = x(t_0)\, t\, e^{-y^2(t_0)(t-1)}, \qquad y(t) = \frac{y(t_0)}{t}.$$

Имеем: $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Тем не менее, $\forall\, \delta > 0$ при $x(t_0) = \delta^2$, $y(t_0) = \delta$ получим: $x(t + \delta^{-2}) > e^{-1}$. Значит, решение $x = 0$, $y = 0$ не является устойчивым и асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$.

Обратимся далее к вопросу об устойчивости линейной однородной системы вида (1.10) с постоянной $(n \times n)$–матрицей A при $f(t) \equiv 0$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax. \tag{1.16}$$

Решая систему (1.16), возьмем $x = e^{At}\,u$. Подставляя, получим с учетом свойств экспоненциальной матрицы

$$\frac{dx}{dt} \equiv e^{At}\,\frac{du}{dt} + A\,e^{At}\,u = A\,e^{At}\,u,$$

откуда следует

$$e^{At}\,\frac{du}{dt} = 0, \qquad \det\, e^{At} \neq 0.$$

Поскольку матрица e^{At} неособая, то $\dot u = 0$. Значит, $u = c$ — постоянный вектор размерности $n \times 1$. Итак, общее решение системы (1.16) определяется равенством: $x = e^{At}c$. При $x_0 = x(t_0)$ имеем: $c = e^{-At_0}\,x_0$, следовательно $x = e^{A\,(t-t_0)}\,x_0$.

Обозначим через λ_1, ..., λ_m собственные числа матрицы A, соответствующие различным *клеткам Жордана.* Пусть S — неособенная матрица, приводящая матрицу A к жордановой форме:

$$A = S^{-1}\Omega S, \qquad \Omega \equiv \mathrm{diag}\,\big[\,J_1(\lambda_1),\, ...,\, J_m(\lambda_m)\,\big],$$

где $J_s(\lambda_s)$ — соответствующие клетки Жордана

$$J_s(\lambda_s) = \begin{pmatrix} \lambda_s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}, \qquad s = \overline{1, m}.$$

Пользуясь свойствами матричной экспоненты, получим следующее выражение для решения $x(t)$:

$$x(t) = S^{-1}\,\Omega_e(t)\,Sx_0,$$

где

$$\Omega_e(t) = \mathrm{diag}\,\Big[\,e^{(t-t_0)\,J_1(\lambda_1)},\, ...,\, e^{(t-t_0)\,J_m(\lambda_m)}\,\Big].$$

Теорема 1.9. *Линейная однородная система ДУ* (1.16) *устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни матрицы* A : $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $i = \overline{1, n}$, *имеют неположительные вещественные части, т.е.* $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) \le 0$, $i = \overline{1, n}$, *причем характеристические корни, для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) = 0$, *допускают лишь простые элементарные делители* (*для них клетки Жордана сводятся к одному элементу*).

Легко показать, что система (1.16) равномерно устойчива относительно начального момента $t_0 \in (-\infty, +\infty)$. В самом деле, поскольку решения устойчивой линейной системы ограничены, то при $t \ge 0$ выполняется ограничение $\|\, e^{At}\,\| \le c$. Если $x(t)$ — решение системы $x(t) = e^{(t-t_0)\,A}\,x(t_0)$, тогда при $t \ge t_0$ получим

$$\|\, x(t)\,\| \le \Big\|\, e^{(t-t_0)\,A}\,\Big\|\,\|\, x(t_0)\,\| \le c\,\|\, x(t_0)\,\| < \varepsilon,$$

где надо взять $\|\, x(t_0)\,\| < \varepsilon/c = \delta$. Здесь число δ не зависит от t_0. Вывод: тривиальное решение $x \equiv 0$ равномерно устойчиво при $t \to \infty$, следовательно, и все решения этой системы также равномерно устойчивы при $t \to \infty$ (см. теорему 1.5).

Теорема 1.10. *Линейная однородная система ДУ* (1.16) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни матрицы* A : $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $i = \overline{1, n}$, *имеют отрицательные вещественные части, а именно,* $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1, n}$.

Особый интерес представляют дифференциальные линейные системы с почти постоянной матрицей [15, 37]. Назовем матрицу коэффициентов A ДУ $\dot z = A(t)\,z$ почти постоянной, если $\lim_{t\to\infty} A(t) = A$, где A — постоянная матрица.

Теорема 1.11. *Пусть дифференциальная система* (1.16) *с постоянной* $(n \times n)$*–матрицей* A *устойчива при* $t \to \infty$. *Тогда система*

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = \big[\,A + B(t)\,\big]\,y,$$

где $B(t) \in C[\,t_0, \infty)$, $\int_{t_0}^{\infty} \|\, B(t)\,\|\, dt < \infty$, *также устойчива при* $t \to \infty$.

Заметим, что теорема 1.11 не имеет места для случая с переменной матрицей $A(t)$.

Теорема 1.12. *Если система* (1.16) *с постоянной матрицей* A *асимптотически устойчива при* $t \to \infty$, *то система*

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = \big[\,A + B(t)\,\big]\,y,$$

где $B(t) \in C[\,t_0, \infty)$, $B(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, *также асимптотически устойчива при* $t \to \infty$.

Укажем на один важный результат, вытекающий из этой теоремы: линейная система с полиномиальными коэффициентами

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \left(A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ \dots \ + A_m\right) y,$$

где A_k, $k = \overline{0, m}$, — постоянные $(n \times n)$–матрицы, асимптотически устойчива, если все корни λ_i, $i = \overline{1, n}$, характеристического (векового) уравнения: $\det\left(A_0 - \lambda E\right) = 0$ имеют отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, E — единичная матрица размерности n.

Модельный пример. Данный пример показывает, что теорема 1.12 с переменной матрицей $A(t)$ не верна. Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = -x/t$, $t > 0$, с общим решением $x = c/t$, которое является асимптотически устойчивым при $t \to \infty$. Видим, что уравнение $\dot{y} = y/t$ с коэффициентом $1/t = -1/t + 2/t$, отличным от коэффициента исходного уравнения на бесконечно малую при $t \to \infty$ функцию, неустойчиво при $t \to \infty$, поскольку его общее решение $y = ct$ не ограничено.

Проанализируем также случай Лаппо–Данилевского для линейной системы с переменной матрицей. Пусть имеется система вида (1.7):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(t)\,x,$$

где матрица $A(t) \in C[\,t_0, \infty)$ и, кроме того, $A(t)$ при $t \geq t_0$ перестановочна со своим интегралом (*условие Лаппо–Данилевского*):

$$A(t) \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau \cdot A(t). \tag{1.17}$$

Заметим, что матрица

$$\Omega(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}, \qquad \Omega(t_0) = E,$$

является матрицантом исходной системы (1.7). Таким образом, общее решение системы (1.7) записывается так:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\, x(t_0).$$

Теорема 1.13. *Пусть* $\forall\,(t_0, t) \in (a, \infty)$ *выполнено условие* (1.17) *и существует предел*

$$A = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau.$$

Тогда, если все собственные числа $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $i = \overline{1, n}$, *предельной матрицы A расположены в левой полуплоскости:* $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1, n}$, *то линейная система* (П1.7) *асимптотически устойчива при* $t \to \infty$.

Рассмотрим еще линейные системы ДУ с периодическими коэффициентами. Пусть имеется система вида

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \left[\,A(t) + B(t)\,\right] z, \tag{1.18}$$

где матрица $A(t)$ периодическая, т.е. $A(t + \tau) = A(t)$, $\tau \neq 0$ — вещественное число, а $B(t)$ — матрица с малыми значениями при $t \to \infty$. Наряду с системой (1.18) возьмем систему невозмущенных ДУ:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A(t)\,y. \tag{1.19}$$

Теорема 1.14. *Если все решения системы* (1.19) *ограничены, то в предположениях, что:* 1) $A(t)$ *— периодическая матрица;* 2) $\int t_0{}^{\infty} \|\,B(t)\,\|\,dt < \infty$, *все решения векторного уравнения* (1.18) *также ограничены.*

В тех же предположениях, если все решения уравнения (1.19) *стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *то тоже самое имеет место и для всех решений уравнения* (1.18).

Вернемся далее к однородной линейной системе, аналогичной системе (1.7), считая, что матрица $A(t)$ — это матрица с переменными коэффициентами общего вида. Однако ограниченность решений этой системы наряду с условиями $\| B(t) \| \to 0\,(t \to \infty)$ или $\int_{t_0}^{\infty} \| B(t) \| \, dt < \infty$ недостаточны, чтобы гарантировать ограниченность всех решений системы вида (1.18) (см. работу [15]).

Теорема 1.15. *Существует система* (1.19) *с матрицей* $A(t)$ *общего вида, все решения которой стремятся к нулю при* $t \to \infty$ *и матрица* $B(t)$, *удовлетворяющая условиям:* $\int_{t_0}^{\infty} \| B(t) \| \, dt < \infty$ *или* $\| B(t) \| \to 0$, *такие, что система* (П1.18) *обладает неограниченными решениями.*

Вместе с тем, ограниченности решений можно добиться, выбрав соответствующим образом условия.

Теорема 1.16. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\int_{t_0}^{\infty} \| B(t) \| \, dt < \infty$. 2. $\underline{\lim}_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau) \, d\tau > -\infty$ (*это условие выполняется, в частности, если* $\operatorname{Sp} A(t) = 0$).

Тогда, если все решения системы (1.19) *с матрицей* $A(t)$ *общего вида ограничены, то и все решения системы* (1.18) *будут ограничены.*

В системе (1.18) положим $A(t) = A$, где A — постоянная матрица:

$$\dot z = \frac{dz}{dt} = \big[\, A + B(t) \,\big]\, z. \tag{1.20}$$

Теорема 1.17. *Если в системе* (1.20) *выполнены условия:* 1. A *— постоянная матрица с простыми характеристическими числами.* 2. $\| B(t) \| \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то тогда каждому характеристическому числу* λ_k *соответствует решение* $z^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,n}$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$c_2 \, \exp\left[\operatorname{Re}\lambda_k\, t - d_2 \int\limits_{t_0}^{t} \| B(\tau) \| \, d\tau\right] \;\le\; \| z^{(k)}(t) \| \;\le$$

$$\le\; c_1 \, \exp\left[\operatorname{Re}\lambda_k\, t + d_1 \int\limits_{t_0}^{t} \| B(\tau) \| \, d\tau\right], \qquad t \ge t_0,$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 *— положительные постоянные. При этом система решений* $z^{(k)}(t)$ *линейно независима и, более того, имеет место предельное равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| z^{(k)}(t) \|}{t} = \operatorname{Re}\, \lambda_k, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Завершим параграф изучением асимптотического поведения решений линейных однородных систем ДУ с помощью асимптотических рядов [15]. Будем считать, что в системе матрица коэффициентов в качестве элементов имеет рациональные функции и при этом каждый из элементов этой матрицы стремится к некоторому постоянному значению при $t \to \infty$. Тогда, очевидно, для достаточно больших t каждый элемент можно разложить в сходящийся степенной ряд вида

$$a_{ij}(t) = c_0 + \frac{c_1}{t} + \ \dots\ + \frac{c_k}{t^k} + \ \dots,$$

где $c_k = c_k(i,j)$. Следовательно, при $t \ge t_0$ можно матрицу A представить так:

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{t}\, A_1 + \ \dots\ + \frac{1}{t^k}\, A_k + \ \dots, \tag{1.21}$$

где A_k — постоянные матрицы.

Перейдем к рассмотрению дифференциальной системы

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = A(t)\, y, \tag{1.22}$$

с матрицей $A(t)$, допускающей разложение (1.21). Если такое разложение имеет место, то

$$\begin{gathered} \lim_{t\to\infty} A(t) = A_0, \qquad \lim_{t\to\infty} t\,\big[\, A(t) - A_0 \,\big] = A_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lim_{t\to\infty} t^{n+1} \left[A(t) - A_0 - \frac{A_1}{t} - \ \dots\ - \frac{A_n}{t^n} \right] = A_{n+1}. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Обратим внимание на то, что соотношения (1.23) вовсе не предполагают сходимости ряда (1.21). Ряды, даже если они и расходятся, но дают хорошее приближение к данной функции для соответствующих частичных сумм, называются *асимптотическими рядами.*

Определение 1.10. *Если бесконечная последовательность* $\{a_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *определена так, что*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a_0, \qquad \lim_{t\to\infty} t\left[f(t) - a_0\right] = a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{n+1}\left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} - \ldots - \frac{a_n}{t^n}\right] = a_{n+1},$$

то говорят, что функция $f(t)$ *обладает асимптотическим разложением при* $t \to \infty$. *Записывается это так:*

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^n}, \tag{1.24}$$

где написанный формальный степенной ряд (1.24) *может сходиться или расходиться.*

Проанализируем алгебраические зависимости, для которых характерны соотношения типа (1.24).

Теорема 1.18. *Пусть имеют место соответствия*

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{-n}, \qquad g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^{-n}.$$

Тогда справедливы соотношения:

1. $c_1 + c_2 g \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(c_1 a_n + c_2 b_n\big)\, t^{-n}, \qquad \forall\, c_1, c_2 = \mathrm{const};$
2. $fg \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\, t^{-n},$ *где* $c_n = \sum\limits_{k+l} a_k b_l;$
3. $\dfrac{1}{f(t)} \sim c_0 + \dfrac{c_1}{t} + \ldots + \dfrac{c_n}{t_n},$ *где*

$$a_0 \neq 0, \quad a_0 c_0 = 1, \quad a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0, \ \ldots, \sum_{k+l=n} a_k c_l = 0, \quad n > 0.$$

Кроме того, если

$$f'(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, t^{-n},$$

то $d_0 = d_1 = 0$ *и* $d_n = -(n-1)\, a_{n-1}$ *при* $n \geq 2$. *Если* $a_0 = a_1 = 0$, *то*

$$\int_t^{\infty} f(\tau)\, d\tau \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n\, t^{-(n-1)}}{n-1};$$

если по крайней мере один из коэффициентов a_0, a_1 *отличен от нуля, то* $\left|\int_t^{\infty} f(\tau)\, d\tau\right| = \infty$.

Замечания. 1. Имеет место следующее полезное утверждение: асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^n}$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\forall$ целого $N \geq 0:$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{t^n} + O\left(\frac{1}{t^{N+1}}\right).$$

2. Отметим здесь также, что хотя каждая функция может иметь лишь единственное асимптотическое разложение, но, тем не менее, различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.

Пусть имеется система (1.22), где элементы матрицы $A(t)$ представляют собой рациональные функции t, а в более общем случае, имеют асимптотические разложения вида

$$a_{ij}(t) - p(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m\, t^{-m},$$

где $p \equiv p_{ij}$, $c_m = c_m(i,j)$; $p(t)$ — многочлен по t. Рассмотрим здесь случай, когда матрица $A(t)$ имеет асимптотическое разложение вида

$$A(t) \sim A_0 + A_1 t^{-1} + \ \dots\ + A_m t^{-m} + \ \dots . \qquad (1.25)$$

Помимо этого, предположим, что характеристические числа матрицы A_0 различны.

Теорема 1.19. *Пусть задано уравнение* (1.22), *для которого имеется разложение* (1.25) *и матрица* A_0 *обладает простыми характеристическими числами* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. *Тогда каждому характеристическому числу* λ_k *соответствует решение* y_k *уравнения* (1.22), *для которого имеет место асимптотическое разложение*

$$y_k \sim e^{\lambda_k t}\, t^{\mu_k} \left(c_0 + c_1 t^{-1} + \ \dots\ + c_m t^{-m} + \ \dots\right),$$

где c_0 *— ненулевой вектор,* $\lambda_k(t)$ *— характеристические числа матрицы* $A_0 + A_1 t^{-1}$, $\lim_{t\to\infty} \lambda_k(t) = \lambda_k$, $\lambda_k(t) \sim \lambda_k + \mu_k t^{-1} + \nu_k t^{-2} + \ \dots .$

1.3 Некоторые критерии устойчивости

Ниже будут рассмотрены некоторые наиболее распространенные критерии устойчивости, связанные с *проблемой Рауса–Гурвица*, которая формулируется в виде следующей алгебраической задачи: требуется установить необходимые и достаточные условия, при которых все корни искомого алгебраического многочлена имеют отрицательные вещественные части.

1.3.1. Критерий Гурвица. Пусть имеется многочлен относительно комплексного значения $z = x + iy$ с действительными или комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots\ + a_1 z + a_0. \qquad (1.26)$$

Определение 1.11. *Многочлен* $f(z)$ (1.26) *степени* $n \geq 1$ *называется многочленом (полиномом) Гурвица, если все его корни (нули)* $z_1, z_2, \dots, z_n$ *имеют отрицательные вещественные части:* $\operatorname{Re} z_j < 0$, $j = \overline{1,n}$, *т.е. лежат в левой комплексной полуплоскости. Многочлен Гурвица часто называют устойчивым или, просто, гурвицевым.*

Будем считать дальше, что у многочлена $f(z)$ (1.26) коэффициенты a_j, $j = \overline{1,n}$, вещественны, и, кроме того, $a_n \neq 0$, $a_0 > 0$. Такой многочлен, не имеющий нулевых корней, иногда называют стандартным многочленом степени n, где $n \geq 1$ [37]. Сформулируем необходимое условие для устойчивого многочлена $f(z)$ (1.26) в виде следующей *теоремы Стодолы.*

Теорема 1.20. *Если стандартный многочлен является многочленом Гурвица, то все его коэффициенты положительны.*

Замечание. Условие теоремы 1.20 Стодолы для стандартного многочлена второй степени являются также и достаточными, а именно, при $a_0, a_1, a_2 > 0$ многочлен $f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ будет устойчивым. Однако для стандартного многочлена степени выше второй из положительности его коэффициентов, вообще говоря, не следует его устойчивость.

Введем понятие *присоединенного многочлена*, обозначив через H_n, $n = 1, 2, \dots$ — множество всех стандартных многочленов Гурвица степени n.

Определение 1.12. *Многочлен*

$$F(z) = (1 + \alpha z)\, f(z) + f(-\,z), \qquad \alpha > 0, \qquad (1.27)$$

называется присоединенным к многочлену $f(z)$.

Можно доказать [37] следующие два утверждения: 1. Многочлен $F(z)$, присоединенный к стандартному многочлену Гурвица, является стандартным многочленом Гурвица, т.е., если $f(z) \in H_n$, то $F(z) \in H_{n+1}$. 2. Для любого стандартного многочлена Гурвица степени $n+1$, $n \geq 1$, существует стандартный многочлен Гурвица степени n, по отношению к которому данный многочлен является присоединенным, т.е. если $F(z) \in H_{n+1}$, то $\exists\, \alpha > 0$ и $f(z) \in H_n$ такие, что $F(z) \equiv (1 + \alpha z)\, f(z) + f(-\,z)$.

Отметим, что у стандартного многочлена $F(z)$ степени $n+1$:

$$F(z) = b_{n+1} z^{n+1} + \ \dots\ + b_1 z + b_0,$$

где $b_0, b_1 > 0$, существует стандартный многочлен $f(z)$ степени n, для которого $F(z) = S\,f(z)$, где через S символически обозначена операция присоединения: в выражении (1.27) $F(z) = S\,f(z)$.

Из представленных выше утверждений следует, что можно построить множество стандартных многочленов Гурвица, исходя из совокупности стандартных многочленов H_1 первой степени и дальнейшего последовательного применения операции присоединения $S:\ SH_1 = H_2,\ SH_2 = S^2H_1 = H_3$ и т.д.

Пусть имеется стандартный многочлен $f(z)$ (1.26). Составим *матрицу Гурвица* размерности n :

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_s = 0$ при $s < 0$ и $s > n$.

Теорема 1.21 (Теорема Гурвица). *Для того, чтобы стандартный многочлен $F(z)$ (1.26) был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры*

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \dots,\ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0 \qquad (1.28)$$

его матрицы Гурвица Γ_f (условия Гурвица, условия Рауса–Гурвица).

Понятно, что для доказательства необходимости и достаточности выполнения условий Гурвица (1.28) надо показать, что если $f(z) \in H_n$, то условия Гурвица будут выполнены, и наоборот.

Если многочлен $f(z)$ (1.26) — это стандартный многочлен Гурвица, то $f(z)$ можно представить в виде: $f(z) = z^n\,g(1/z)$, где многочлен

$$g(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ \dots\ + a_n$$

есть также стандартный многочлен Гурвица, и обратно. В самом деле, если z_i, $i = \overline{1, n}$, — корни многочлена $f(z)$ и $\operatorname{Re} z_i < 0$, то $1/z_i$

— корни многочлена $g(z)$ и

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z_i} = \frac{\operatorname{Re}\, z_i}{|\, z_i\,|^2} < 0, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, условия Гурвица для многочлена можно записать и так:

$$\bar\Delta_0 = a_n > 0, \quad \bar\Delta_1 = a_{n-1} > 0, \quad \bar\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0,\ \dots,$$

$$\bar\Delta_n = a_0\bar\Delta_{n-1} > 0.$$

Возьмем далее линейную однородную систему ДУ с постоянной вещественной матрицей $A:\ \dot x = Ax$, где $\det(\lambda E - A) = 0$ — характеристическое уравнение матрицы A, которое может быть записано в виде

$$\lambda^n - A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \ \dots\ + (-1)^nA_n = 0,$$

где

$$A_1 = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} = \operatorname{Sp} A,\ A_2 = \sum_{\alpha<\beta}\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix},\ \dots,\ A_n = \det\, A.$$

Для асимптотической устойчивости исходной системы необходимо выполнение ограничений:

$$-A_1 > 0, \qquad A_2 > 0, \quad \dots, \quad (-1)^n\,A_n > 0,$$

в частности, $\operatorname{Sp} A < 0,\ (-1)^n \det\, A > 0$. Если $n = 2$ и имеем систему второго порядка, то написанные условия будут также достаточны для ее асимптотической устойчивости. В общем случае для асимптотической устойчивости системы $\dot x = Ax$ необходимо и достаточно выполнение условий Гурвица:

$$\bar\Delta_1 = -A_1 > 0, \quad \bar\Delta_2 = \begin{vmatrix} -A_1 & 1 \\ -A_3 & A_2 \end{vmatrix} = -A_1A_2 + A_3 > 0, \quad \dots,$$

$$\bar\Delta_n = (-1)^n\,A_n\bar\Delta_{n-1} > 0.$$

Модельные примеры. 1. Для многочлена с вещественными коэффициентами p, q, r :

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r$$

условия Гурвица имеют вид

$$r > 0, \quad \Delta_1 = q > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q & r \\ 1 & p \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = 1 \cdot \Delta_2 > 0,$$

т.е. $q > 0$, $0 < r < pq$. Поэтому в пространстве коэффициентов область с системой координат (СК) $Opqr$ многочленов Гурвица ограничена сверху положительной частью координатной плоскости $r = 0$ и гиперболическим параболоидом $r = pq$.

2. Требуется найти область асимптотической устойчивости системы

$$\dot{x} = -x + \alpha y, \qquad \dot{y} = \beta x - y + \alpha z, \qquad \dot{z} = \beta y - z$$

с действительными коэффициентами α и β. Запишем характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -\alpha & 0 \\ -\beta & \lambda+1 & -\alpha \\ 0 & -\beta & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\lambda+1)\left[\,\lambda^2 + 2\lambda + (1 - 2\alpha\beta)\,\right] = 0,$$

откуда получим следующий результат: асимптотическая устойчивость будет иметь место, если $1 - 2\alpha\beta > 0$, т.е. $\alpha\beta < 1/2$.

В качестве замечания укажем на условие того, чтобы стандартный многочлен $F(z)$ (1.26) имел корни, лежащие лишь в замкнутой левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры Δ_1, ..., Δ_n его матрицы Гурвица были бы неотрицательны: $\Delta_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$.

1.3.2. Критерий Михайлова. При наличии большой степени многочлена $f(z)$ вычисление определителей высоких порядков в критерии Гурвица превращается в трудоемкую процедуру. При относительно больших степенях $f(z)$ для нахождения расположения

корней z_1, ..., z_n многочлена $f(z)$ оказываются более удобными частотные критерии, которые по своей сути эквивалентны критерию Гурвица. Ниже рассмотрим один из таких критериев — *критерий Михайлова*, называемый иногда *критерием Эрмита–Михайлова*.

Вновь заострим свое внимание на стандартном многочлене $f(z)$ (1.26) степени n, $n \geq 1$, с действительными коэффициентами, где $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots\ + a_1 z + a_0.$$

Рассмотрим кривую γ : $w = f(i\omega)$, где $\omega \in [0, \infty)$ — действительный параметр, $i^2 = -1$. Кривую γ называют *годографом Михайлова* функции $f(z)$. Иногда годограф Михайлова называют *амплитудно-фазовой характеристикой* многочлена $f(z)$.

Теорема 1.22. *Предположим, что стандартный многочлен* $f(z)$ (1.26) *не имеет чисто мнимых корней. Тогда угол поворота против хода часовой стрелки ненулевого вектора* $f(i\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$, *равен*

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\,(n - 2m), \tag{1.29}$$

где m, $0 \leq m \leq n$ — *число корней с учетом их кратностей многочлена* $f(z)$ *с положительной вещественной частью.*

И обратно, если справедлива формула (1.29), *то на положительной полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *расположено точно* m *корней многочлена* $f(z)$, *где каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

Поясним здесь, что угол поворота вектора $f(i\omega)$, о котором идет речь, равен: $\Phi = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(i\omega)$, где Δ_γ — это приращение соответствующей функции вдоль годографа Михайлова γ, когда параметр ω меняется от нуля до ∞; под $\operatorname{Arg} z$ понимается непрерывная ветвь многозначной функции $\arg z + 2\pi k$, где k — целое, и $\arg z$ — главное значение аргумента: $-\pi < \arg z < \pi$.

Положим для определенности, что при $\omega = 0$ аргументы равны их главным значениям. Имеем: $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} a_n = 0$. Можно показать [37], что каждый корень с отрицательной вещественной частью стандартного многочлена $f(z)$ при $0 \leq \omega < \infty$ обеспечивает поворот вектора $f(i\omega)$ "в среднем"на $+\pi/2$, а каждый корень этого многочлена с положительной вещественной частью — поворот вектора $f(i\omega)$ "в среднем"на $-\pi/2$.

Если m — число корней стандартного многочлена $f(z)$ с положительной вещественной частью, то число корней этого многочлена с отрицательной вещественной частью с учетом отсутствия чисто мнимых корней равно $n-m$. Значит, для суммарного поворота вектора $f(i\omega)$, когда $\omega \in [0,\infty)$, получаем выражение (1.29): $\Phi = (n-m)\,\pi/2 + m\,(-\pi/2) = (n-2m)\,\pi/2$.

Теорема 1.23 (Критерий Михайлова). *Для того, чтобы стандартный многочлен $f(z)$ (1.26), не имеющий чисто мнимых корней, являлся многочленом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота против хода часовой стрелки вектора $f(i\omega)$ при $\omega \in [0,\infty)$ был бы равен*

$$\Phi = n\pi/2, \tag{1.30}$$

где n, $n \geq 1$ — степень многочлена.

Результат (1.30) сразу вытекает из (1.29) при $m=0$. Как следствие из критерия Михайлова получим, что если для стандартного многочлена $f(z)$ степени n имеет место неравенство: $\Phi < n\pi/2$, то $f(z)$ не является многочленом Гурвица.

Заметим, что в случае, если стандартный многочлен $f(z)$ степени n устойчив, то вектор $f(i\omega)$ при $\omega \in [0,\infty)$ монотонно поворачивается против хода часовой стрелки на угол $n\pi/2$. Поскольку $f(0) = a_0 > 0$, то годограф Михайлова γ многочлена $f(z)$, выходя из точки a_0 положительной полуоси $\operatorname{Re} z > 0$ при $\omega \in [0,\infty)$ будет последовательно пересекать полуоси $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$, ..., проходя через n квадрантов.

И обратно, если годограф Михайлова γ стандартного многочлена $f(z)$ степени n, не имеющий чисто мнимых корней, выходя из точки $f(0) = a_0 > 0$ положительной полуоси $\operatorname{Re} z > 0$ при $\omega \in (0,\infty)$ последовательно по одному разу пересекает $n-1$ полуосей $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$, ..., асимптотически стремясь к n–й по счету полуоси, то угол поворота вектора $f(i\omega)$ равен $n\pi/2$, откуда следует, что многочлен $f(z)$ — это многочлен Гурвица.

Модельный пример. Требуется, используя критерий Михайлова, установить условия Гурвица для многочлена

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r$$

с вещественными коэффициентами p, q, r (ср. полученный результат с результатом предыдущего модельного примера 1, полученным чуть ранее).

Итак, имеем

$$f(i\omega) = (-\,p\omega^2 + r) + i\omega\,(-\,\omega^2 + q).$$

Значит, точки пересечения годографа γ, $\omega \in [0,\infty)$ многочлена $f(z)$ с полуосями $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$ последовательно — это $i\omega_k$, $k = 0,1,2$, где

$$\omega_0 = 0, \qquad \omega_1 = \sqrt{r/p}, \qquad \omega_2 = \sqrt{q}.$$

Поскольку ω_1 и ω_2 должны быть действительны, то

$$r/p > 0 \qquad \text{и} \qquad q > 0. \tag{$*$}$$

Кроме того, имеем

$$f(i\omega_0) = r, \quad f(i\omega_1) = i\sqrt{r/p}\,(q - r/p), \quad f(i\omega_2) = -\,(pq - r).$$

Отсюда с учетом направления векторов $f(i\omega_k)$, $k = 0,1,2$, для случая многочлена Гурвица получим, что

$$r > 0, \qquad q - r/p > 0, \qquad pq - r > 0. \tag{$**$}$$

Помимо этого, полагая $\operatorname{Arg} f(i\omega) = 0$ при $\omega = 0$, найдем

$$\lim_{\omega \to +\infty} \operatorname{Arg} f(i\omega) = \frac{3\pi}{2}.$$

Наконец, из неравенств $(*)$ и $(**)$ получим условия Гурвица:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad 0 < r < pq,$$

совпадающие с неравенствами предыдущего модельного примера 1.

1.3.3. Критерий Рауса. Весьма кратко изложим *метод* (*алгоритм*) *Рауса* [97] для определения числа m корней с положительной вещественной частью многочлена $f(z)$ (1.26). Для случая $m = 0$ этот метод дает критерий устойчивости многочлена $f(z)$.

Для начала обратимся к понятию *индекса Коши* вещественной рациональной функции и *теореме Штурма об индексе*. Пусть имеется вещественная рациональная функция (РФ) $R(x) = \psi(x)/\varphi(x)$, $\varphi(x) \neq 0$, $x \in R$, где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ — произвольные вещественные взаимно простые многочлены. Корни $\varphi(x)$ называются *полюсами* РФ $R(x)$. Если x_0 — полюс кратности k_0 РФ $R(x)$, то

$$\varphi(x) = (x - x_0)^{k_0}\, \varphi_1(x), \qquad \varphi_1(x_0) \neq 0,$$

где $\varphi_1(x)$ — некоторый многочлен. Число $A_0 \neq 0$:

$$A_0 = \frac{\psi(x_0)}{\varphi_1(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \, (x - x_0)^{k_0}\, R(x)$$

называется *главным коэффициентом* РФ $R(x)$ в полюсе x_0.

Определение 1.13. *Индексом РФ* $R(x)$ *в полюсе* x_0 *кратности* k_0 *называется число* $\operatorname{Ind}_{x_0} R(x)$, *определяемое по правилу:* $\operatorname{Ind}_{x_0} R(x) = \{+1,$ *если* k_0 *нечетно и* $A_0 > 0$; -1, *если* k_0 *нечетно и* $A_0 < 0$; 0, *если* k_0 *четно*$\}$, *где* $A_0 = \psi(x_0)/\varphi_1(x_0)$.

Индексом Коши $\operatorname{Ind}_a^b R(x)$ РФ $R(x)$ на интервале (a, b), где $a, b \in R$, называется сумма индексов РФ $R(x)$ по всем полюсам $x_0 \in (a, b)$:

$$\operatorname{Ind}_a^b R(x) = \sum_{a < x_0 < b} \operatorname{Ind}_{x_0} R(x).$$

При отсутствии полюсов на (a, b) полагаем $\operatorname{Ind}_a^b R(x) = 0$.

Отметим, что число различных вещественных корней многочлена $\varphi(x)$, принадлежащих интервалу (a, b), равно следующему индексу: $\operatorname{Ind}_a^b \left[\varphi'(x)/\varphi(x)\right]$. Для вычисления индекса $\operatorname{Ind}_a^b R(x)$ пользуются методом, в основу которого положена *теорема Штурма.*

Определение 1.14. *Последовательность многочленов*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_s(x), \qquad x \in (a, b), \tag{1.30$'$}$$

называется рядом Штурма в интервале (a, b), *если на этом интервале выполнены два свойства:* 1) *из* $\varphi_k(\bar{x}) = 0$, *где* $\bar{x} \in (a, b)$, *следует, что* $\varphi_{k-1}(\bar{x}) \cdot \varphi_{k+1}(\bar{x}) < 0$, $k = \overline{2, s-1}$; 2) $\varphi_s(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.

Теорема 1.24 (Теорема Штурма об индексе). *Если* (1.30$'$) *— это ряд Штурма в* (a, b), *а* $V(x)$ *— число перемен знака в этом ряду при фиксированном значении* $x \in (a, b)$, *то*

$$V(a) - V(b) = \operatorname{Ind}_a^b \left[\varphi_2(x)/\varphi_1(x)\right].$$

Пусть задана правильная РФ $R(x) = \psi(x)/\varphi(x)$. Теорема 1.24 будет справедлива и для ряда, получаемого из ряда (1.30$'$) умножением всех членов $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, s}$, на один и тот же многочлен $\zeta(x)$. Полученный при этом ряд называется *обобщенным рядом Штурма.*

Если даны два произвольных многочлена $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, где $\deg\psi(x) < \deg\varphi(x)$, то с помощью *алгоритма Евклида* можно построить обобщенный ряд Штурма, начинающийся с функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Алгоритм Евклида заключается в следующем. Пусть $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, $\varphi_2(x) \equiv \psi(x)$. Тогда, обозначая через $-\varphi_3(x)$ остаток от деления $\varphi_1(x)$ на $\varphi_2(x)$, через $-\varphi_4(x)$ — остаток от деления $\varphi_2(x)$ на $\varphi_3(x)$ и т.д., получим следующую последовательность функций:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x) = \xi_1(x)\,\varphi_2(x) - \varphi_3(x), \qquad \varphi_2(x) = \xi_2(x)\,\varphi_3(x) - \varphi_4(x), \quad \dots, \\ \varphi_{k-1}(x) = \xi_{k-1}(x)\,\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x), \quad \dots, \\ \varphi_{s-1}(x) = \xi_{s-1}(x)\,\varphi_s(x). \end{gathered} \tag{1.31}$$

Отсюда вытекает, что индекс любой правильной РФ $R(x)$ можно определить при помощи теоремы Штурма. Для этого надо представить $R(x)$ в виде

$$R(x) = Q(x) + \psi(x)/\varphi(x), \tag{1.32}$$

где $Q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — многочлены, и применить теорему Штурма к обобщенному ряду, построенному для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с помощью алгоритма (1.31).

Следовательно, для любой РФ $R(x)$, $x \in (a,b)$, имеет место равенство

$$\operatorname{Ind}_a^b R(x) = V(a) - V(b), \tag{1.33}$$

где $V(x)$ — число перемен знака при фиксированном $x \in (a,b)$ в обобщенном ряде Штурма, построенном для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с помощью алгоритма Евклида (1.31). Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — многочлены из (1.32); $V(a)$, $V(b)$ определены как и в теореме Штурма. Взяв в (1.33) $R(x) = \varphi'(x)/\varphi(x)$, получим, что число вещественных корней многочлена $\varphi(x)$ внутри интервала (a,b) равно $V(a) - V(b)$.

Имеем далее: для любой РФ $R(x)$ такой, что $R(a) = R(b) = 0$, где $a < b$, справедлива формула

$$\operatorname{Ind}_a^b R(x) = -\frac{1}{\pi}\, \Delta \operatorname{Arctg} R(x)\,\Big|_a^b, \tag{1.34}$$

где $\Delta \operatorname{Arctg} R(x)\,\big|_a^b$ — это приращение некоторой непрерывной ветви $\operatorname{Arcg} R(x)$ многозначной функции $\operatorname{arctg} R(x) + k\pi$, где k — целое.

Опишем далее сжато сам алгоритм Рауса, положив, что многочлен $f(z)$ (1.26) не имеет корней на мнимой оси ($a_k \in R$, $k = \overline{0,n}$, $f(i\omega) \neq 0, \forall\, \omega \in R$). В этом случае справедлива *формула Эрмита–Михайлова* (ср. с формулой (1.29)):

$$\Delta \operatorname{Arg} f(i\omega)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi\,(n - 2m), \tag{1.35}$$

где m — число корней многочлена $f(z)$ в правой полуплоскости с учетом их кратности.

Введем новые обозначения для коэффициентов многочлена $f(z)$, полагая $\alpha_n = a_n \neq 0$:

$$f(z) = \alpha_n z^n + \beta_n z^{n-1} + \alpha_{n-1} z^{n-2} + \beta_{n-1} z^{n-3} + \alpha_{n-2} z^{n-4} + \beta_{n-2} z^{n-5} + \ldots,$$

где $\alpha_k = a_{k-2u}$, $\beta_k = a_{k-(2u+1)}$, $k = n, n-1, n-2, \ldots, u = 0,1,2, \ldots$. Полагая здесь $z = i\omega$, будем иметь

$$f(i\omega) = i^n \left[\, \varphi_1(\omega) - i\, \varphi_2(\omega)\,\right], \tag{1.36}$$

где

$$\varphi_1(\omega) = \alpha_n \omega^n - \alpha_{n-1}\omega^{n-2} + \alpha_{n-2}\omega^{n-4} - \ \ldots,$$
$$\varphi_2(\omega) = \beta_n \omega^{n-1} - \beta_{n-1}\omega^{n-3} + \beta_{n-2}\omega^{n-5} - \ \ldots.$$

Применим индекс Коши с учетом формул (1.34), (1.36). Принимая во внимание, что умножение $f(z)$ на комплексное число не меняет $\Delta \operatorname{Arg} f(i\omega)$, будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\, \Delta \operatorname{Arg} f(i\omega)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\, \Delta \operatorname{Arg} \frac{f(i\omega)}{i^n}\,\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\, \Delta \operatorname{Arg} \frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi_1(\omega)}\,\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_(\omega)}{\varphi_1(\omega)},$$

откуда и из формулы (1.35) вытекает, что

$$\operatorname{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi_1(\omega)} = n - 2m. \tag{1.37}$$

Чтобы найти индекс, стоящего в левой части равенства (1.37), воспользуемся теоремой Штурма 1.24. Построим обобщенный ряд Штурма для многочленов $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ при помощи алгоритма (1.31):

$$\varphi_1(\omega),\ \varphi_2(\omega),\ \varphi_3(\omega),\ \ldots,\ \varphi_r(\omega). \tag{1.38}$$

Затем рассмотрим так называемый *регулярный случай*: $r = n + 1$, причем $\varphi_{n+1}(\omega) = \mathrm{const} \neq 0$. Найдем коэффициенты многочленов $\varphi_3(\omega)$, ..., $\varphi_{n+1}(\omega)$ в ряде (1.38), пользуясь схемой (1.31). Имеем

$$\varphi_3(\omega) = \frac{\alpha_n}{\beta_n}\, \omega\, \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) = \gamma_n(\omega^{n-2} - \gamma_{n-1}\omega^{n-4} + \gamma_{n-2}\omega^{n-6} + \ \ldots,$$

где

$$\gamma_n = \alpha_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\, \beta_{n-1}, = \frac{\beta_n \alpha_{n-1} - \alpha_n \beta_{n-1}}{\beta_n},$$
$$\gamma_{n-1} = \gamma_{n-2} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\, \beta_{n-2}. = \frac{\beta_n \alpha_{n-2} - \alpha_n \beta_{n-2}}{\beta_n}.$$

Запишем затем

$$\varphi_4(\omega) = \frac{\beta_n}{\gamma_n}\,\omega\,\varphi_3(\omega) - \varphi_2(\omega) = \delta_n\omega^{n-3} - \delta_{n-1}\omega^{n-5} + \ \dots,$$

где

$$\delta_n = \beta_{n-1} - \frac{\beta_n}{\gamma_n}\,\gamma_{n-1} = \frac{\gamma_n\beta_{n-1} - \beta_n\gamma_{n-1}}{\gamma_n},$$
$$\delta_{n-1} = \beta_{n-2} - \frac{\beta_n}{\gamma_n}\,\gamma_{n-2} = \frac{\gamma_n\beta_{n-2} - \beta_n\gamma_{n-2}}{\gamma_n}, \ \dots .$$

Коэффициенты остальных многочленов $\varphi_5(\omega)$, ..., $\varphi_{n+1}(\omega)$ определяются аналогично. Отметим, что каждый многочлен в ряду (1.38), где $r = n+1$, является либо четной, либо нечетной функцией.

Теперь можно составить *таблицу (схему) Рауса*:

$$\begin{bmatrix} \alpha_n, & \alpha_{n-1}, & \alpha_{n-2}, & \dots \\ \beta_n, & \beta_{n-1}, & \beta_{n-2}, & \dots \\ \gamma_n, & \gamma_{n-1}, & \gamma_{n-2}, & \dots \\ \delta_n, & \delta_{n-1}, & \delta_{n-2}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Здесь регулярный случай, когда $r = n+1$ в (1.38), имеет место тогда и только тогда, когда первый столбец в таблице Рауса (1.39) состоит из $n+1$ отличных от нуля чисел.

Применяя в интервале $(-\infty, +\infty)$ к ряду (1.38) теорему Штурма, получим из соотношения (1.37): $V(-\infty) - V(+\infty) = n - 2m$, причем $V(-\infty) + V(+\infty) = n$, т.е. $m = V(+\infty)$.

Теорема 1.25 (Теорема Рауса) *В регулярном случае, когда первый столбец в таблице* (1.39) *состоит из* $n+1$ *отличных от нуля чисел, число корней вещественного многочлена* $f(z)$ *степени* n (1.26), *лежащих в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$, *равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.*

Поясним это утверждение. В регулярном случае равенство $m = V(+\infty)$ дает достаточное условие для устойчивости многочлена $f(z)$.

Это условие является также и необходимым. Действительно, пусть все корни многочлена $f(z)$ имеют отрицательные вещественные части, т.е. лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Тогда $f(z)$ не имеет корней на мнимой оси, а это значит, что справедлива формула (1.37), а также при $m = 0$ формула: $V(-\infty) - V(+\infty) = n$.

Имеем также неравенства

$$0 \le V(-\infty) \le r - 1 \le n, \qquad 0 \le V(+\infty) \le r - 1 \le n,$$

где числа $V(-\infty)$, $V(+\infty)$ для ряда (1.38) определены. Следовательно, формула: $V(-\infty) - V(+\infty) = n$ возможна лишь при условии, что $r - 1 = n$, а именно — лишь в регулярном случае, где $r = n+1$ и когда $V(-\infty) = n$, $V(+\infty) = 0$, т.е. тогда, когда справедлива формула $m = V(+\infty)$, где $m = 0$. Отсюда приходим к следующему критерию устойчивости вещественного многочлена.

Теорема 1.26 (Критерий Рауса). *Для того, чтобы все корни вещественного многочлена* $f(z)$ *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) *число элементов первого столбца таблицы Рауса* (1.39) *было равно* $n+1$ *и* 2) *все они были отличны от нуля и не имели один знак.*

Замечание. Пусть имеется вещественный многочлен $f(z)$ степени n (1.26), у которого коэффициент a_n при старшей степени положителен. В этом случае $f(z)$ устойчив тогда и только тогда, когда первый столбец таблицы Рауса состоит из $n+1$ положительных чисел.

1.4 Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим нелинейную систему ДУ вида

$$\dot z_i = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t) \quad z_i(0) = c_i, \qquad i = \overline{1,n},$$

которая может быть записана с помощью введения дополнительной переменной $z_{n+1} = t$ в виде

$$\dot z_i = f_i(z_1, \dots, z_{n+1}), \qquad \dot z_{n+1} = 1, \qquad z_i(0) = c_i, \qquad z_{n+1}(0) = 0,$$

где $i = \overline{1,n}$. Эту систему можно представить в компактной форме так:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f(z), \qquad z(0) = c, \tag{1.40}$$

где вектор $f(z) = \big(f_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})\big), \qquad i = \overline{1,n}$.

Выясним, при каких условиях у системы (1.40) существует единственное решение [15]. Предположим, что $f(z)$ является непрерывной функцией z в некоторой окрестности c, $c = z(0) = z_0$, например, в замкнутой области D, определенной неравенством $\| z - c \| \le c_1$, где $c_1 = \text{const} > 0$. Будем считать также, что для любых векторов $x, y \in D$ выполнено неравенство:

$$\| f(x) - f(y) \| \le c_2 \| x - y \|, \qquad c_2 = \text{const} > 0, \tag{1.41}$$

где c_2 — постоянная, не зависящая от векторов x и y. Условие вида (1.41) называется *условием Липшица*. Из него сразу следует непрерывность функции $f(x)$.

Теорема 1.27. *Если для любых двух векторов x и y области D, определенной неравенством $\| z - c \| \le c_1$, имеет место неравенство* (1.41), *где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые постоянные, то при $0 \le t \le c_1/c_3$, где $c_3 = \max_D \ \| f(z) \|$, существует единственное решение задачи* (1.40).

Перейдем к изучению устойчивости решений нелинейных ДУ. Пусть имеются системы вида

$$\dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, z_j + f_i(z,t), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{П1.42}$$

где $f_i(z,t)$ — нелинейные функции z_j. Если f_i не зависят явно от t, т.е. имеем автономную систему, то тогда систему (1.42) можно представить в векторно-матричном виде так:

$$\dot{z} = A(t)\, z = f(z). \tag{1.43}$$

Заметим, что здесь $z = z(t)$ и результаты, относящиеся к системе (1.43), относятся лишь к устойчивости нулевого решения. Тем не менее, эти результаты можно легко распространить и на системы ДУ вида (1.42).

Введем следующее *условие нелинейности*:

$$\frac{\| f(z) \|}{\| z \|} \to 0 \qquad \text{при} \qquad \| z \| \to 0. \tag{1.44}$$

Будем в дальнейшем часто требовать, чтобы матрица A удовлетворяла одному из условий: 1) $A(t) = A$ — постоянна; 2) $A(t)$ — периодическая матрица; 3) $A(t)$ — асимптотически приближается к постоянной или периодической матрице.

Под устойчивостью решения $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ уравнения (1.43), как обычно, понимается следующее: если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого другого решения $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ этого уравнения, для которого $\| z - y \| \le \delta$ при $t = t_0$, имеет место неравенство $\| z - y \| \le \varepsilon$ для $t \ge t_0$.

Изложим основной результат, связывающий устойчивость нулевого решения нелинейного уравнения с поведением решений линейного уравнения. Для этого возьмем уравнение вида

$$\dot{z} = Az + f(z), \qquad z(0) = c, \tag{1.45}$$

где A — постоянная матрица, а вектор $f(z)$ удовлетворяет условию нелинейности (1.44). Если допустить, что величина $\| z(0) \|$ мала, то в силу условия (1.44) $Az + f(z)$ очень близко к Az. Поэтому, если все решения уравнения $\dot{y} = Ay$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, то z не может стать большим. Это значит, что $\forall\, t$ решение z должно вести себя схожим образом с решением уравнения $\dot{y} = Ay$. Эти наводящие эвристические соображения оформим корректно в виде следующей теоремы.

Теорема 1.28. *Пусть выполнены условия:* 1) *каждое решение уравнения $\dot{y} = Ay$ стремится к нулю при $t \to \infty$;* 2) *вектор-функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности $z = 0$;* 3) $\| f(z) \| / \| z \| \to 0$ *при* $\| z \| \to 0$. *Тогда $z = 0$ является устойчивым решением уравнения* (1.45). *Кроме того, каждое решение этого уравнения, для которого $\| z(0) \|$ достаточно мало, стремится к нулю при $t \to \infty$.*

Обсудим эту теорему в части, касающейся того, что непрерывное продолжение решения не может отклониться от тривиального решения слишком далеко, если начальное условие достаточно близко к началу координат. Здесь надо указать на связь между понятием единственности решения с понятием устойчивости. Из устойчивости решения вытекает его единственность с учетом того, что решение задается с помощью начальных условий. Кроме того, если правые части системы непрерывны и удовлетворяют, например, условию Липшица, обеспечивающему единственность решения, то из теоремы о непрерывной зависимости решения от начального условия следует, что наличие устойчивости (или неустойчивости) данного решения не зависит от того, при каком значении t задается начальное условие. Если единственность не обеспечена, то начальное значение t существенно для систем вида (1.42), т.е. неавтономных, но несущественно, если t не входит в правые части уравнений — к примеру, систем вида (1.45), т.е. автономных [15].

Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении решений. Решения системы (1.45) при достаточно малом значении $\| c \|$ по теореме 1.28 стремятся к нулю и мажорируются показательными функциями вида $\exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$. Исследуем задачу о точном асимптотическом поведении решений.

Возьмем для анализа случай, когда компоненты $f(z)$ представляют собой степенные ряды по элементам z, где степень рядов выше первой. Тогда систему (1.45) можно записать в виде

$$\dot z = \left[\, A + G(z) \,\right] z, \tag{1.46}$$

где через $G(z)$ обозначена матрица, элементы которой суть степенные ряды по элементам z без свободных членов.

Поскольку $\| z(t) \| \to 0$ при $t \to \infty$, то подставляя $z(t)$ в выражение $G(z)$ уравнения (1.46), получим, что это решение удовлетворяет уравнению

$$\dot z = \left[\, A + B(t) \,\right] z, \tag{1.47}$$

где $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, более того, $\| B(t) \| \le c_1 \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$ при $t \ge 0$, $c_1 = \mathrm{const}$. Подобная оценка имеет место и для производной $B'(t)$.

Если матрица A имеет простые характеристические числа, то асимптотическое поведение решений уравнения (1.47) можно получить из аналогов теорем 1.17, 1.19. Если у A есть кратные характеристические числа, то асимптотическое поведение решений можно найти, используя оценки для $B(t)$ и $B'(t)$.

Утверждение, аналогичное теореме 1.28, имеет место и в случае периодической матрицы $A(t)$.

Теорема 1.29. *Пусть задано уравнение*

$$\dot z = A(t)\, z + f(z),$$

где $A(t)$ *— периодическая с периодом* τ *матрица. Если:* 1) *каждое решение уравнения* $\dot y = A(t)\, y$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$; 2) *вектор-функция* $f(z)$ *непрерывна в некоторой окрестности точки* $z = 0$; 3) $\| f(z) \| / \| z \| \to 0$ *при* $\| z \| \to 0$, *то тогда тривиальное решение* $z = 0$ *устойчиво.*

Теорема 1.30. *Пусть в системе* $\dot z = Az + f(z)$ *с постоянной матрицей* A *выполнены условия:* 1) *матрица* A *имеет по крайней мере одно характеристическое число с положительной вещественной частью;* 2) $\| f(z) \| / \| z \| \to 0$ *при* $\| z \| \to 0$. *Тогда решение* $z = 0$ *неустойчиво.*

Тем не менее, можно показать, что если матрица A обладает по крайней мере одним характеристическим числом с отрицательной вещественной частью, то решение $z = 0$ удовлетворяет в определенной степени свойству *условной устойчивости.* Чтобы в этом убедиться, приведем следующую теорему.

Теорема 1.31. *Пусть имеют место допущения:* 1) k *характеристических чисел, где* $1 \le k \le n$, *матрицы* A *имеют отрицательную вещественную часть;* 2) $f(0) = 0$; 3) $\| f(z_1) - f(z_2) \| \le c_1 \| z_1 - z_2 \|$, *когда* $\| z_1 \|, \| z_2 \| \le c_2$, *где* $c_1 \to 0$ *при* $c_2 \to 0$. *Тогда существует* k*–параметрическое семейство решений уравнения* $\dot z = Az + f(z)$, *стремящихся к нулю при* $t \to \infty$.

Дадим теперь строгое определение того, что понимается под условной устойчивостью решения системы ДУ общего вида.

Определение 1.15. *Говорят, что решение* $\zeta = \zeta(t)$ n*–мерной дифференциальной системы*

$$\dot z = f(z, t)$$

условно устойчиво при $t \to \infty$, *если в пространстве* $z \in R^n$ *существует* k*–мерное многообразие* S_k *начальных значений* $\zeta(t_0) \in S_k$, $k \in [1, n)$ *такое, что для любого решения* $z = z(t)$, *подчиненно-*

го условию

$$z(t_0) \in S_k, \qquad \| z(t_0) - \zeta(t_0) \| < \delta(\varepsilon),$$

будет выполнено неравенство

$$\| z(t) - \zeta() \| < \varepsilon \qquad \textit{при} \qquad t \geq t_0.$$

Условная устойчивость называется асимптотической, если, помимо этого,

$$\| z(t) - \zeta(t) \| \to 0 \qquad \textit{при} \qquad t \to \infty,$$

где для некоторой положительной постоянной Δ *выполняется неравенство:* $\| z(t_0) - \zeta(t_0) \| < \Delta$.

Рассмотрим квазилинейную систему вида (1.42):

$$\dot{z} = Az + f(z,t), \tag{1.48}$$

где A — постоянная матрица, имеющая k, $1 \leq k < n$, характеристических чисел с отрицательными действительными частями, причем $f(z,t) = o(z)$ равномерно по t.

Теорема 1.32 (Обобщенная теорема Ляпунова) (см. работы [37, 63, 84]). *Пусть матрица* A *имеет* k *характеристических чисел с отрицательными действительными частями и* $n-k$ *характеристических чисел с неотрицательными действительными частями, причем вектор-функция* $f(z,t)$ *непрерывна по* t *при* $t \geq 0$ *и удовлетворяет по* z *условию Липшица:*

$$\| f(\bar{z},t) - f(z,t) \| \leq c \, \| \bar{z} - z \|, \tag{1.49}$$

где $\| \bar{z} \|, \| z \| < \Delta$ *при* $t \geq 0$; $c = c(\Delta)$ *и* $c \to 0$ *при* $\Delta \to 0$. *Тогда тривиальное решение* $z = 0$ *системы* (1.48) *условно асимптотически устойчиво относительно некоторого* k*–мерного многообразия* S_k *начальных значений.*

Из этой теоремы, как следствие, вытекает следующее утверждение. Если матрица A имеет k характеристических чисел с отрицательной действительной частью и $n-k$ характеристических чисел с положительной действительной частью, причем условие Липшица

(1.49) для $f(z,t)$ выполнено $\forall \, t \in (-\infty, +\infty)$ и константа Липшица c достаточно мала, то тогда в некоторой окрестности начала координат пространства R^n $(z \in R^n)$ существуют многообразия S_k^+ и S_{n-k}^- соответственно измерений k и $n-k$ такие, что для решений $z(t)$ системы (1.48) справедливы предельные соотношения:

$$z(t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty, \qquad \text{если} \qquad z(0) \in S_k^+,$$

$$z(t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to -\infty, \qquad \text{если} \qquad z(0) \in S_{n-k}^-.$$

Приведем еще теорему о поведении решений при $t \to \infty$ системы вида (1.48) при специальных ограничениях на вектор-функцию $f(z,t)$.

Теорема 1.33. *Пусть задано уравнение вида* (1.48) : $\dot{z} = Az + f(z,t)$, *для которого выполняются следующие условия:* 1) *все решения уравнения* $\dot{y} = Ay$ *ограничены;* 2) $\| f(z,t) \| \leq g(t) \, \| z \|$, *где* $\| z \| \leq c$, $\int_0^\infty g(t)\, dt < \infty$, $c = \text{const} > 0$. *При этих условиях решение* $z = 0$ *данного уравнения устойчиво.*

Завершим Главу 1 рассмотрением вопроса об асимптотическом поведении решений полиномиального уравнения вида [15]:

$$P(u, \dot{u}, t) = \sum a_{lmn} \, t^l u^m (\dot{u})^n = 0, \tag{1.50}$$

где $l, m, n \geq 0$; $l + m + n \leq N$, уделяя также внимание и такому важному частному случаю, как:

$$\dot{u} = P(u,t)/Q(u,t), \tag{1.51}$$

где P и Q — некоторые многочлены.

Решение уравнения (1.50) называется *правильным*, если оно существует и имеет непрерывную производную для $t \geq t_0$. Будем говорить, что правильное решение обладает определенным свойством, например, положительностью, монотонностью и т.п., если это свойство имеет место для всех достаточно больших значений t.

Теорема 1.34. *Если* $u(t)$ *— правильное решение данного уравнения* $P(u, \dot{u}, t) = 0$, *то найдется такая постоянная* k, *для которой*

$$| \, u \, | < \exp\left(\frac{t^{k+1}}{k+1} \right), \qquad t \geq t_0.$$

Если s — наивысший показатель степени t, содержащийся в многочлене $P(u, \dot{u}, t)$, то $\forall\, \varepsilon > 0$ можно положить $k = s + \varepsilon$.

Перейдем к анализу уравнения (1.51). Предполагается, что в уравнении $\dot{u} = P(u,t)/Q(u,t)$ дробь справа несократима и для рассматриваемых решений $Q \neq 0$. Можно доказать [28], что имеют место следующие вспомогательные утверждения:

1. Каждое решение уравнения (1.51), непрерывное и непостоянное при $t \geq t_0$, является строго монотонным при достаточно больших значениях t.

2. Если функция u является решением уравнения (1.51), то любая рациональная функция $H(u,t) = K(u,t)/L(u,t)$ от переменных u и t строго монотонна, за исключением случаев, когда рассматриваемое решение удовлетворяет уравнению $L = 0$ или когда функция H постоянна вдоль этого решения.

Эти утверждения приводят к фундаментальному выводу об асимптотическом поведении решений уравнения (1.51).

Теорема 1.35. *Каждое правильное ненулевое решение уравнения* (1.51) *в конечном результате становится, как и его производные всех порядков, монотонным и удовлетворяет одному из соотношений*

$$u \sim a\, t^b\, e^{P(t)}, \qquad u \sim a\, t^b\, (\ln t)^{1/c},$$

где $P(t)$ — многочлен относительно t; c — целое число, а u b — постоянные.

Вновь вернемся к уравнению (1.50). Для него можно уточнить результат теоремы 1.34 с помощью следующего утверждения.

Теорема 1.36. *Пусть u — любое правильное решение полиномиального уравнения* (1.50). *Тогда либо $u = o\big(t^b\big)$ для некоторого постоянного b, либо*

$$u = \pm\, \exp\left[\, a\, t^b\, \big(1 + \varepsilon(t)\big)\,\right], \tag{1.52}$$

где все решения вида (1.52) *монотонны, равно как и их производные всех порядков. Здесь a и b — постоянные, а $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Глава 2

Методы Ляпунова в теории устойчивости движения

Предлагаются вниманию вопросы устойчивости, связанные с двумя разработанными А.М. Ляпуновым методами исследования [84]. Для применения *первого метода* надо предположить, что данное анализируемое решение уже известно. Понятно, что этот метод можно использовать лишь к достаточно ограниченному , хотя и важному, классу случаев. *Второй метод*, или как его еще называют, *прямой метод* Ляпунова, напротив, предполагает, что для его применения знать самих решений не надо. Именно в этом заключается очевидное преимущество прямого метода, которое делает его весьма общим и универсальным.

Работа А.М. Ляпунова [84] содержит много плодотворных идей и значительных результатов. Укажем лишь на некоторые из них. А.М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости движения. Сейчас оно является общепринятым. До него же существовало целое множество таких противоречивых определений. Он, как уже было сказано, предложил два основных метода исследования устойчивости движения. Второй (прямой) метод получил наибольшее распространение благодаря своей простоте и эффективности. А.М. Ляпунову принадлежит постановка задачи об устойчивости движения по уравнениям первого приближения, когда об устойчивости можно судить по линеаризованным уравнениям без привлечения к анализу исходных точных уравнений. Он дал полное решение этой задачи для установившихся движений и для большого класса неустановившихся движений. Особенно подробно им были изучены при этом периодические движения.

Теория устойчивости движения, получив столь мощный толчок для своего развития, после А.М. Ляпунова продвигалась аналитически и практически по разным направлениям усилиями многих исследователей. Выяснялись условия устойчивости при больших начальных и постоянно действующих возмущениях, на конечном промежутке времени, при случайных воздействиях и т.д. Изучались задачи устойчивости в различных областях науки и техники, включая управляемые, упругие, физические и проч. динамические системы.

Сразу же уточним, что обилие исходного материала (см., например, работы [4, 10, 11, 22, 37, 44, 46, 48, 53-55, 66, 71, 84, 86, 87, 92, 107, 123, 126, 148, 150] и содержащуюся там библиографию) изначально выдвигает определенные трудности по его отбору и сжатию для целей беглого ознакомления в главе 2. Основу данного содержания составляют классические результаты по этой теме, концентрировано выбранные с помощью работ [37, 48, 86, 87, 92, 150].

В § 2.1 рассматривается первый метод Ляпунова изучения устойчивости движения. Вводятся основные понятия: характеристический показатель функции, матрицы, спектр решений системы дифференциальных уравнений (ДУ), нормальные фундаментальные системы, приводимые и правильные системы, матрица и преобразование Ляпунова. С помощью этих понятий устанавливаются некоторые утверждения о нормальности фундаментальной системы решений, о приводимости системы ДУ, об асимптотической эквивалентности, о правильности системы ДУ.

В § 2.2 продолжается изучение первого метода Ляпунова. Дается формулировка теоремы Флоке для периодической системы. Вводятся понятия матрицы монодромии, мультипликатора, нормального решения и формулируются условия устойчивости периодической системы. Указывается на интегральный признак устойчивости Ляпунова. Рассматриваются также гамильтоновы (канонические) системы ДУ и даются условия устойчивости таких систем.

Следующий § 2.3 посвящен второму (прямому) методу Ляпунова в теории устойчивости. Дается понятие функции Ляпунова и формулируются базовые три теоремы Ляпунова об устойчивости, об асимптотической устойчивости, о неустойчивости. Дополняют их теоремы Четаева, Персидского и некоторые другие утверждения. Рассматривается также теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Продолжением этого анализа служит § 2.4, в котором помещены условия устойчивости по Лагранжу, системы с конвергенцией, диссипативные системы, системы уравнений в вариациях и дана характеристика поведения их решений. Дано понятие орбитальной устойчивости и приведены условия ее наличия.

2.1 Первый метод Ляпунова

Зададим на промежутке $[\,t_0,\infty)$ действительную функцию $\varphi(t)$. Если для некоторой последовательности $t_k\to\infty$, $k=1,2,\ldots$, существует конечный (бесконечный) предел вполне определенного знака: $a=\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)$, то он называется *частичным пределом* функции $\varphi(t)$ при $t\to\infty$. Наибольший (наименьший) из частичных пределов $\alpha(\beta)$ функции $\varphi(t)$ при $t\to\infty$ называется ее верхним (нижним) пределом: $\alpha=\overline{\lim}_{t\to\infty}\varphi(t)$, $\beta=\underline{\lim}_{t\to\infty}\varphi(t)$.

2.1.1. Характеристические показатели. Основные определения. Пусть имеется показательная функция $e^{\alpha t}$ с действительным α. Число α называется *характеристическим показателем* функции $e^{\alpha t}$. Если $f(t)=f_1(t)+i\,f_2(t)$, $i^2=-1$, $t\in(t_0,\infty)$, то модуль $f(t)$ можно записать в показательной форме

$$|\,f(t)\,|=e^{\alpha(t)\,t},\qquad \alpha(t)=\frac{1}{t}\ln|\,f(t)\,|.$$

Понятно, что рост значений функции $|\,f(t)\,|$ напрямую связан с ростом значений функции $\alpha(t)$.

Определение 2.1. *Число (конечное или выражаемое символом $\pm\infty$), определяемое при $t\in(t_0,\infty)$ соотношением*

$$\chi[\,f\,]=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\,\ln|\,f(t)\,|,\tag{2.1}$$

называется характеристическим показателем Ляпунова (или, просто, характеристическим показателем).

Для функции $e^{\alpha t}$ имеем: $\chi[\,e^{\alpha t}\,]=\alpha$. Кроме того, $\chi[\,c\,f(t)\,]=\chi[\,f(t)\,]$, $c\neq 0$; $\chi[\,f(t)\,]=\chi[\,|\,f(t)\,|\,]$. Из формулы (2.1) вытекают еще и такие свойства характеристического показателя (х.п.):

1) Свойство монотонности: если $|\,f(t)\,|\le|\,g(t)\,|$, $t>T$, то $\chi[\,f\,]\le\chi[\,g\,]$.

2) $\forall\,\{\,t_k\,\}$, $t_k\to\infty:\ \overline{\lim}_{k\to\infty}\,(1/t_k)\ln|\,f(t_k)\,|\le\chi[\,f(t)\,]$.

3) Пусть $\chi[\,f\,] = \alpha \neq \pm\infty$. Тогда $\forall\,\varepsilon > 0$:

$$f(t) = o\big(e^{(\alpha+\varepsilon)\,t}\big) \iff \lim_{t\to\infty} \frac{|\,f(t)\,|}{e^{(\alpha+\varepsilon)\,t}} = 0, \tag{2.2}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{|\,f(t)\,|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\,t}} = +\infty \iff \exists\, t_k \to \infty : \lim_{k\to\infty} \frac{|\,f(t_k)\,|}{e^{(\alpha-\varepsilon)\,t_k}} = +\infty. \tag{2.3}$$

Обратно, если для некоторого α, $\forall\,\varepsilon > 0$ выполнено (2.2), то $\chi[\,f\,] \leq \alpha$; если выполнено (2.3), то $\chi[\,f\,] \geq \alpha$; если выполнены (2.2), (2.3), то $\chi[\,f\,] = \alpha$.

Приведем еще некоторые важные соотношения для характеристических показателей функций (х.п.ф.), доказательство которых можно найти в работе [37]:

1) $\chi\big[\sum_{k=1}^{m} f_k(t)\big] \leq \max_k\ \chi[\,f_k(t)\,]$.

2) $\chi\big[\prod_{k=1}^{m} f_k(t)\big] \leq \sum_{k=1}^{m} \chi[\,f_k(t)\,], \quad f_k(t) \neq \pm\infty$.

3) Если функция $f(t)$ имеет строгий х.п., т.е. у нее $\exists$ конечный предел:

$$\chi[\,f\,] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, \ln|\,f(t)\,|,$$

то тогда

$$\chi[\,f(t)\,g(t)\,] = \chi[\,f(t)\,] + \chi[\,g(t)\,].$$

В частности,

$$\chi\big[\,e^{\alpha t}\,y\,\big] = \alpha + \chi[\,y\,].$$

Определение 2.2. *Следуя Ляпунову* [84], *под интегралом функции* $f(t)$, $t \in [\,t_0, \infty)$ *будем понимать*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau,\ \textit{если}\ \chi[\,f\,] \geq 0;\ F(t) = \int_{t}^{\infty} f(\tau)\,d\tau,\ \textit{если}\ \chi[\,f\,] < 0.$$

Можно показать [37], что х.п. интеграла не превышает х.п. подынтегральной функции, т.е. $\chi[\,F\,] \leq \alpha = \chi[\,f\,]$, откуда в качестве следствия имеем: если

$$\chi[\,\varphi\,] \leq \alpha, \qquad \chi[\,\psi\,] \leq \beta, \qquad \alpha + \beta \geq 0,$$

то

$$\chi\Big[\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\,\Big] \leq \alpha + \beta.$$

Определение 2.3. *Характеристическим показателем матрицы (х.п.м.)* $F(t) = \big(f_{ij}(t)\big)$, $t \in [\,t_0, \infty)$ *назовем следующее число (или символ* $\pm\infty$*)* :

$$\chi[\,F(t)\,] = \max_{i,j}\ \chi[\,f_{ij}\,(t)\,].$$

Отсюда вытекает, например, что $\chi[F^*(t)\,] = \chi[\,F(t)\,]$, $*$ — символ транспонирования. Для х.п.м. имеют место следующие свойства:

1) $\chi[\,F(t)\,] = \chi[\,\|\,F(t)\,\|\,]$, где в качестве нормы матрицы $F(t)$ можно взять любую из трех:

$$\|\,F\,\|_1 = \max_i \sum_j |\,f_{ij}\,|, \quad \|\,F\,\|_2 = \max_j \sum_i |\,f_{ij}\,|,$$
$$\|\,F\,\|_3 = \big(\mathrm{Sp}\,F^*F\big)^{1/2}.$$

2) Пусть $F_s(t)$, $s = \overline{1,N}$ — $m \times n$–матрицы и $F(t) = \sum_{s=1}^{N} F_s(t)$. Тогда $\chi[\,F(t)\,] \leq \max_s\ \chi[\,F_s(t)\,]$.

3) Пусть $F_s(t)$, $s = \overline{1,N}$ — матрицы, допускающие последовательное умножение и $F(t) = \prod_{s=1}^{N} F_s(t)$. Тогда $\chi[\,F(t)\,] \leq \sum_{s=1}^{N} \chi[\,F_s(t)\,]$.

2.1.2. Спектр и нормальные фундаментальные системы. Рассмотрим линейную однородную систему ДУ

$$\dot{x} = A(t)\,x, \qquad x \in R^n, \tag{2.4}$$

где $A(t) \in C(a, \infty)$. Следующая теорема носит название теоремы Ляпунова о характеристических показателях решений линейной системы.

Теорема 2.1. *Если матрица системы* (2.4) *ограничена, а именно:* $\|\,A(t)\,\| \leq c < \infty$, *то каждое действительное или комплексное ее решение* $x = x(t) \not\equiv 0$ $(a < t_0 \leq t < \infty)$ *имеет конечный х.п.*

Чтобы установить структуру множества х.п. решений системы (2.4), обратим внимание на следующее утверждение: вектор-функции $x^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,m}$, определенные на $[\,t_0, \infty)$ и обладающие различными х.п., линейно независимы.

Спектром решений системы ДУ называется множество всех собственных (отличных от $\pm\infty$) х.п. Отметим, что если матрица $A(t)$ системы (2.4) действительна, то ее спектр может быть реализован на множестве действительных решений.

Теорема 2.2. *Спектр системы* (2.4) *с непрерывной ограниченной матрицей* $A(t)$ *состоит из конечного числа элементов:* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ \dots\ < \alpha_m$, $m \le n$.

Укажем на то, что х.п. α_j, $j = \overline{1,m}$, нетривиальных решений системы $\dot{x} = Ax$ с постоянной матрицей A являются вещественными частями характеристических корней λ_j матрицы A, т.е. $\alpha_j = \operatorname{Re}\lambda_j(A)$, $j = \overline{1,m}$, где $\lambda_j = \lambda_j(A)$ — корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ с различными вещественными частями. Нелинейные системы ДУ, в общем, могут не удовлетворять выводам теоремы 2.2, например, их спектр может состоять из бесконечного числа элементов.

Вернемся к системе (2.4), где $A(t) \in C[\,t_0, \infty)$, $\sup_t \|\,A(t)\,\| < \infty$, $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ \dots\ < \alpha_m < \infty$, $m \le n$ — ее спектр, взятый в порядке возрастания. Пусть $x = x(t)$, $t \in [\,t_0, \infty)$ — совокупность всех решений системы (2.4). Ее отдельные решения $x^{(k)}(t) \in R^n$, $k = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему

$$X(t) = \left\{ x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t) \right\}, \tag{2.5}$$

состоящую из максимального числа линейно независимых решений.

Пусть система $X(t)$ содержит n_s решений с х.п. α_s, $s = \overline{1,m}$. Величину $\sigma = \sum_{s=1}^m n_s\,\alpha_s$, где $\sum_{s=1}^m n_s = n$, называют *суммой х.п.* системы $X(t)$ (2.5). В силу конечности числа х.п. линейной системы существуют фундаментальные системы $X(t)$ (2.5) с наименьшей суммой х.п. σ по сравнению с другими фундаментальными системами. Такие фундаментальные системы и соответствующие им фундаментальные матрицы называют *нормальными* (по Ляпунову).

Обозначим через N_s, $s = \overline{1,m}$ — максимальное число линейно независимых решений системы (2.4), имеющих х.п. α_s. Пусть M_s — совокупность всех решений $x(t)$, х.п. которых не превосходят числа α_s: $M_s = \left\{ x(t) : \ \chi[\,x(t)\,] \le \alpha_s \right\}$. В частности, $M_n = R^n$. Кроме того, из свойств х.п. вытекает, что если $x(t),\, y(t) \in M_s$, то $c\,x(t) \in M_s$, где $c = \mathrm{const}$, и $x(t) + y(t) \in M_s$. А это значит, что M_s есть линейное подпространство пространства решений R^n.

Отметим некоторые свойства числа N_s : 1) $N_s = \dim M_s$, $s = \overline{1,m}$; 2) имеет место неравенство $N_1 < N_2 \ \dots\ < N_m = n$.

Для суждения о нормальной фундаментальной системе решений вводят понятие несжимаемости системы функций.

Определение 2.4. *Говорят, что система ненулевых вектор-функций* $x^{(1)}(t)$, ..., $x^{(k)}(t)$, $k \le n$, *обладает свойством несжимаемости, если х.п. любой их линейной комбинации* $y = \sum_{j\le k} c_j\, x^{(j)}(t)$, $c_j = \mathrm{const} \ne 0$, *совпадает с наибольшим из х.п. комбинируемых решений, т.е.* $\chi[\,y\,] = \max_j \chi\left[\,x^{(j)}(t)\,\right]$.

Пользуясь этим определением, можно показать, что если фундаментальная система $X(t)$ обладает свойством несжимаемости и n_s, $s = \overline{1,m}$ — число ее решений с х.п. α_s, причем N_s — максимальное число линейно независимых решений системы с х.п. α_s, то имеют место равенства: $\sum_{k=1}^s n_k = N_s$, $s = \overline{1,m}$, т.е. в этом случае суммы $\sum_{k=1}^s n_k$, $s = \overline{1,m}$, достигают своих наибольших значений.

Следующая теорема носит название *теоремы Ляпунова о нормальности фундаментальной системы.*

Теорема 2.3. *Фундаментальная система линейной системы* (2.4) *является нормальной тогда и только тогда, когда она обладает свойством несжимаемости.*

Из этой теоремы вытекают следствия: 1. Во всех нормальных фундаментальных системах $X(t)$ количество n_s решений с х.п. α_s, $s = \overline{1,m}$, одно и то же. 2. Всякая нормальная фундаментальная система реализует весь спектр линейной системы.

Определение 2.5. *Полным спектром системы* (2.4) *называют совокупность всех х.п.* α_1, ..., α_n *нетривиальных решений системы* (2.4), *где каждый повторяется столько раз, сколько* n_s, $s = \overline{1,m}$, *линейно независимых решений с х.п.* α_s *содержится в некоторой ее нормальной фундаментальной системе* $X(t)$. *При этом сумму* $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k \equiv \sum_{s=1}^m n_s\alpha_s$ *называют суммой х.п. линейной системы, где* n_s *— кратность элементов спектра.*

Следующая теорема носит название *теоремы Ляпунова о построении нормальной фундаментальной системы решений.*

Теорема 2.4. *Рассматривается система* (2.4), *где* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A(t) \in C(a, \infty)$, $\sup_t \| A(t) \| < \infty$. *Обозначим через* $Z(t) = \{ z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t) \}$ *ее фундаментальную матрицу. Тогда существует постоянная треугольная матрица*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

такая, что $X(t) = Z(t)\, C$ *есть нормальная фундаментальная матрица системы* (2.4).

Укажем на следствие из этой теоремы: если линейная система (2.4) имеет треугольную фундаментальную матрицу $Z(t)$, то для этой системы существует нормальная треугольная матрица $X(t) = \big(x_{ik}(t)\big)$, где $x_{ik}(t) = 0$, $k > i$, причем $x_{ii}(t) = z_{ii}(t)$.

Теорема 2.5 дает достаточное условие асимптотической устойчивости линейной системы ДУ.

Теорема 2.5. *Пусть в системе* (2.4) : $\sup_t \| A(t) \| < \infty$, $A(t) \in C(a, \infty)$, $\{ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \}$ *— ее спектр, где* $m \leq n$. *Для асимптотической устойчивости системы* (2.4) *достаточно, чтобы ее наибольший х.п. был бы отрицательным, т.е.* $\alpha = \max_k \alpha_k < 0$.

Теорема 2.6 (Неравенство Важевского). *Для любого решения системы* (2.4), *где* $A(t) \in C[\, t_0, \infty)$, *справедливо неравенство*

$$\| x(t_0) \| \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \leq \| x(t) \| \leq \| x(t_0) \| \exp \int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau,$$

где $\| x(t) \|$ *— евклидова норма вектора* $x(t)$; $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ *— соответственно наименьший и наибольший характеристические корни эрми-тово-симметризованной матрицы*

$$A_*(t) = (1/2) \left[A(t) + A^*(t) \right],$$

где $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)$, $A^*(t) = \big(a_{ji}(t)\big)$ *— эрмитово-сопряженная матрица.*

Отсюда вытекают следствия: 1. Для асимптотической устойчивости системы (2.4) достаточно выполнения условия: $\Lambda(t) \leq -h < 0$ при $t \in [\, t_0, \infty)$, где $h = \text{const} > 0$. 2. Спектр системы (2.4) целиком расположен на отрезке $[\, l, L\,]$, где

$$l = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau, \qquad L = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau.$$

Для асимптотической устойчивости системы (2.4) достаточно, чтобы было $L < 0$.

Пусть система (2.4) имеет спектр: $-\infty < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m < \infty$, $m \leq n$. Обозначим через $X(t) = \big(x_{ik}(t)\big)$ ее фундаментальную матрицу. Здесь индексы: i — номер координаты, k — номер решения. Обозначим также через $\sigma_X = \sum_{k=1}^{n} \chi[\, x^{(k)}\,] = \sum_{s=1}^{m} n_s \alpha_s$ — сумму х.п. всех решений из $X(t)$; число n_s, где $n_s \geq 1$, показывает, сколько решений с х.п. α_s содержится в системе $X(t)$.

Используя свойства х.п. и формулу Остроградского–Лиувилля (см. главу 1), можно получить *неравенство Ляпунова*

$$\sigma_X = \sum_{s=1}^{m} n_s\, \alpha_s \geq \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau \equiv D. \tag{2.6}$$

В силу ограниченности матрицы $A(t)$ имеем

$$D = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau \equiv F,$$

откуда следует, что $\sigma_X \geq F$, т.е. для системы (2.4) с непрерывной ограниченной матрицей сумма х.п. решений из любой ее фундаментальной системы $X(t)$ не меньше верхнего предела от среднего значения следа матрицы системы.

В том случае, когда матрица $A(t)$ комплексная, неравенство Ляпунова (2.6) записывается в виде

$$\sigma_X \geq \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau \equiv H.$$

Сформулируем достаточное условие нормальности фундаментальной системы решений $X(t)$ системы (2.4): если выполнено *равенство Ляпунова*: $\sigma_X = H$, то эта система нормальная.

2.1.3. Приводимые и правильные системы. Матрица $L(t) \in C^1[\,t_0, \infty)$, в общем случае комплексная, называется *матрицей Ляпунова*, если для нее выполнены условия: 1) $L(t)$ и $\dot{L}()$ равномерно по $t \in [\,t_0, \infty)$ ограничены, т.е. $\sup_t \|\, L(t) \,\| < \infty$, $\sup_t \|\, \dot{L}(t) \,\| < \infty$ и 2) $|\det L(t)\,| \geq m > 0$, где m — некоторая положительная постоянная.

Укажем на следующие особенности матрицы Ляпунова $L(t)$: 1) $|\det L(t)\,| \leq M < \infty$; 2) $L^{-1}(t)$ также является матрицей Ляпунова.

Линейное преобразование $y = L(t)\,x$, где $x, y \in R^n$, $L(t)$ — $(n \times n)$ –матрица Ляпунова, называется *преобразованием Ляпунова.* Можно показать, что при преобразовании Ляпунова, примененном к линейной системе (2.4), х.п. ее решений x сохраняются.

Определение 2.6. *Линейная однородная дифференциальная система* (2.4) *называется приводимой, если с помощью некоторого преобразования Ляпунова она может быть сведена к линейной системе $\dot{y} = By$ с постоянной матрицей B.*

Теорема 2.7 (Теорема Еругина). *Система* (2.4) *приводима тогда и только тогда, когда некоторая ее фундаментальная матрица $X(t)$ может быть представлена в виде: $X(t) = L(t)\,e^{Bt}$, где $L(t)$ — матрица Ляпунова, B — постоянная матрица.*

Сформулируем условия устойчивости приводимой системы: 1. Приводимая линейная однородная система устойчива тогда и только тогда, когда все ее х.п. неположительны, причем нулевым х.п. отвечают простые элементарные делители, если их рассматривать как вещественные части собственных значений соответствующей постоянной матрицы.

2. Приводимая линейная однородная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее х.п. отрицательны.

Эти условия следуют из того обстоятельства, что х.п. приводимой системы (2.4) равны действительным частям корней соответствующего характеристического уравнения: $\det(B - \lambda E) = 0$, где система $\dot{y} = By$ устойчива или неустойчива одновременно с данной системой.

Пусть система (2.4): $\dot{x} = A(t)\,x$ с ограниченной непрерывной действительной матрицей $A(t)$ преобразованием Ляпунова $x = L(t)\,y$ сводится к системе $\dot{y} = 0$ с нулевой матрицей и общим решением $y = c$.

Теорема 2.8. *Если все решения $x(t)$ системы* (2.4) *ограничены в промежутке $[\,t_0, \infty)$ и*

$$\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau \geq a > -\infty,$$

где $a = \text{const}$, то система (2.4) *с помощью преобразования Ляпунова может быть преобразована в систему с нулевой матрицей.*

Следствие: если матрица $A(t)$ системы (2.4) абсолютно интегрируема, т.е. $\int_{t_0}^{\infty} \|\, A(t) \,\|\, dt < \infty$, то эта система приводима к системе с нулевой матрицей.

Определение 2.7. *Говорят, что системы ДУ: $\dot{x} = f(t, x)$ и $\dot{y} = g(t, y)$ асимптотически эквивалентны, если между их решениями $x(t)$ и $y(t)$ можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что $\lim_{t\to\infty} \big[\, x(t) - y(t) \,\big] = 0$.*

Следующая *теорема Левинсона* дает один из признаков асимптотической эквивалентности линейных систем ДУ.

Теорема 2.9. *Пусть решения системы $\dot{x} = Ax$ $(*)$, где A — постоянная $(n \times n)$–матрица, ограничены на $[\,0, \infty)$. Тогда система $\dot{y} = \big[\, A + B(t) \,\big]\, y$ $(**)$, где $B(t) \in C[\,0, \infty)$ и $\int_0^{\infty} \|\, B(t) \,\|\, dt < \infty$, асимптотически эквивалентна системе $(*)$.*

Перейдем к рассмотрению так называемых *правильных систем.* Пусть имеется линейная однородная система (2.4) с наложенными на матрицу $A(t)$ ранее ограничениями: $A(t) \in C[\,t_0, \infty)$, $\sup_t \|\, A(t) \,\| < \infty$. Пусть $\sigma = \sum_{k=1}^{m} n_k\, \alpha_k$ — сумма х.п. с учетом их кратностей n_k решений системы (2.4).

Определение 2.8. *Действительная линейная система называется правильной по Ляпунову, если для суммы ее х.п. σ имеет* *место равенство*

$$\sigma = \underline{\lim}_{t\to\infty}\ \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A(\tau)\, d\tau.$$

Если $A(t)$ — комплексная матрица, то условие правильности линейной системы записывается с помощью равенства

$$\sigma = \underline{\lim}_{t\to\infty}\ \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\, A(\tau)\, d\tau. \tag{2.7}$$

Можно показать, что система (2.4) является правильной тогда и только тогда, когда существует указанный нижний предел (2.7) и выполняется равенство Ляпунова (2.7). Связь между правильными и приводимыми системами установлена Ляпуновым в виде следующего утверждения.

Теорема 2.10. *Всякая приводимая линейная дифференциальная система является правильной.*

Модельный пример. То, что обратное, вообще говоря, не верно, показывает данный пример. Скалярное уравнение $\dot{x} = x/(2\sqrt{t})$, $t>0$, является правильным, поскольку его общее решение есть $x = c\,e^{\sqrt{t}}$ и при $c \neq 0$ получим

$$\chi[\,x\,] = 0 = \lim_{t\to\infty}\ \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}},$$

где $t_0 > 0$. Однако исходное уравнение не является приводимым, так как его общее решение $x = c\,e^{\sqrt{t}}$ не имеет структуру, определяемую теоремой Еругина 2.7.

Пусть в системе (2.4) матрица $A(t)$ — действительная или комплексная. Тогда система $\dot{y} = -A^*(t)\,y$, где $A^*(t) = \overline{A^{\mathrm{T}}(t)}$ — эрмитово-сопряженная матрица для $A(t)$, называется сопряженной для системы (2.4). Здесь "т"сверху — символ транспонирования. Для действительной матрицы $A(t):\ A^*(t) = A^{\mathrm{T}}(t)$ и ее сопряженная система $\dot{y} = -A^{\mathrm{T}}(t)\,y$.

Для любых решений x и y взаимно сопряженных систем справедливо тождество: $y^*x \equiv (x,y) \equiv c$, где c — некоторая постоянная. Если $X(t)$ и $Y(t)$ — фундаментальные матрицы решений этих систем, то $Y^*X \equiv C$, где C — постоянная матрица. Обратно: при $\det C \neq 0$, для фундаментальной матрицы $X(t)$ следует, что $Y(t)$ — это фундаментальная матрица сопряженной системы.

Теорема 2.11 (Теорема Перрона). *Для правильности системы* (2.4) *необходимо и достаточно, чтобы полный спектр* (*с учетом кратностей х.п.*) *данной системы* $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ \dots\ \le \alpha_n$ *и полный спектр ее сопряженной системы* $\beta_1 \ge \beta_2 \ge\ \dots\ \beta_n$ *были бы симметричны относительно нуля, т.е. чтобы выполнялись равенства:* $\alpha_s + \beta_s = 0$, $s = \overline{1,n}$.

Из этой теоремы вытекает также, что 1) для правильной линейной системы сопряженная система также является правильной линейной; 2) если система (2.4) правильная и $X(t)$ — ее нормальная фундаментальная матрица, то $Y = \left[\,X^{-1}(t)\,\right]^*$ есть нормальная фундаментальная матрица сопряженной системы.

2.1.4. Треугольная линейная система. Пусть для определенности имеется линейная однородная система ДУ с ограниченной нижней треугольной матрицей $A(t):\ A(t) = \big((a_{ik}(t)\big) \in C[\,t_0,\infty)$, $a_{ik}(t) \equiv 0$ при $k > i$.

Теорема 2.12 (Теорема Ляпунова). *Действительная треугольная однородная линейная система с ограниченными коэффициентами является правильной тогда и только тогда, когда ее диагональные коэффициенты* $a_{kk}(t)$, $k = \overline{1,n}$, *имеют конечные средние значения:*

$$\mu_k = \lim_{t\to\infty}\ \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t} a_{kk}(\tau)\, d\tau.$$

Из этой теоремы вытекает, что если исходная треугольная система правильная, то тогда средние значения μ_k ее диагональных коэффициентов $a_{kk}(t)$ дают спектр $\{\,\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n\,\}$ этой системы: $\alpha_k = \mu_k$, $k = \overline{1,n}$.

Известно утверждение, что всякую фундаментальную матрицу $X = \big(x_{ij}(t)\big)$ с комплексными элементами можно представить в виде: $X(t) = U(t)\,R(t)$, где $U(t)$, $R(t) \in C^1[\,t_0, \infty)$. Здесь $U(t)$ — унитарная матрица: $U^*(t)\,U(t) = E$; $R(t)$ — верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, т.е. $R(t) = \big(r_{ij}(t)\big)$, $r_{ii}(t) > 0, r_{ij}(t) > 0$, $j > i$. Для вещественной матрицы $X(t)$ матрица $U(t)$ — действительная и ортогональная, матрица $R(t)$ — треугольная и действительная.

Следующая теорема носит название *теоремы Перрона о триангуляции линейной системы.*

Теорема 2.13.. *Всякую систему вида* (2.4) *с помощью унитарного преобразования* $x = U(t)\,y$ *можно привести к системе с верхней треугольной матрицей и с вещественными диагональными коэффициентами:* $\dot y = B(t)\,y$, *где* $B(t) = \big(b_{ij}(t)\big)$, $b_{ij}(t) = 0$ *при* $i > j$, $\operatorname{Im} b_{ii}(t) = 0$. *Причем, если матрица* $A(t)$ *ограничена на* $[\,t_0, \infty)$, *то треугольные матрицы* $B(t)$ *и* $\dot U(t)$ *также ограничены на* $[\,t_0, \infty)$.

Отметим, что для действительной матрицы $A(t)$ матрицу $U(t)$ можно выбрать действительной и ортогональной.

Укажем на следствия из теоремы 2.13: 1. Если система (2.4) правильная, то система $\dot y = B(t)\,y$ также правильная.

2. Если система (2.4) правильная, то для каждого ее нетривиального решения $x = x(t)$ существует строгий х.п.: $\alpha = \lim_{t\to\infty} (1/t)\times$ $\times\ln \|\,x(t)\,\|$.

2.2 Первый метод Ляпунова (продолжение)

Во втором параграфе главы 2 продолжим изучение первого метода Ляпунова в анализе устойчивости дифференциальных систем в соответствии с работой [37]. Пусть имеется линейная система вида (2.4) с непрерывной (или кусочно-непрерывной) на $(-\infty, +\infty)$ периодической матрицей $A(t)$:

$$\dot x = \frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \qquad A(t+\omega) = A(t), \quad \omega > 0. \tag{2.8}$$

Теорема 2.14 (Теорема Флоке). *Для линейной системы* (2.8) *с* ω*–периодической матрицей* $A(t)$ *нормированная при* $t = 0$ *фундаментальная матрица решений* (*матрицант*) *имеет вид*

$$X(t) = \Phi(t)\,e^{\Lambda t},$$

где $\Phi(t) \in C^1$ *—* ω*–периодическая, неособая матрица такая, что* $\Phi(0) = E$; Λ *— постоянная матрица.*

Здесь матрица $X(t+\omega)$ также является фундаментальной, $X(t+\omega) \equiv X(t)\,C$, где C — постоянная неособенная матрица, $X(0) = E$, $C = X(\omega)$. Таким образом, $X(t+\omega) = X(t)\,X(\omega)$. Матрица $X(\omega)$ называется *матрицей монодромии.*

Добавим к этому: из теоремы 2.14 имеем, что $\Lambda = (1/\omega)\operatorname{Ln} X(\omega)$ и $\Phi(t) = X(t)\,e^{-\Lambda t}$. Собственные значения λ_i матрицы Λ, т.е. корни уравнения $\det(\Lambda - \lambda E) = 0$ называются х.п. системы (2.8); х.п. Ляпунова нетривиальных решений системы (2.8) — это вещественные части х.п. системы (2.8).

Собственные значения ρ_i, $i = \overline{1,n}$, матрицы $C = X(\omega)$, а именно, корни характеритсического уравнения $\det[\,C(\omega) - \rho E\,] = 0$ называются *мультипликаторами.* Отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = \operatorname{Sp} X(\omega), \qquad \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \det\, X(\omega) = \exp\int\limits_0^{\omega} \operatorname{Sp} A(t)\,dt.$$

Поскольку $\det X(\omega) \neq 0$, то $\rho_j \neq 0$. Из формулы $\Lambda = (1/\omega)\operatorname{Ln} X(\omega)$ следует, что

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega}\operatorname{Ln}\rho_j = \frac{1}{\omega}\left[\,\ln|\,\rho_j\,| + i\,\big(\arg\rho_j + 2\pi k\big)\,\right],$$

где $j = \overline{1,n}$, k — целое. Видно, х.п. определяются с точностью до мнимых слагаемых $i\,2\pi k/\omega$.

Теорема 2.15. *Для любого мультипликатора* ρ $\exists\,\xi(t) \not\equiv 0$ *— нетривиальное решение периодической системы* (2.8), *удовлетворяющее условию:*

$$\xi(t+\omega) = \rho\,\xi(t), \tag{2.9}$$

называемое нормальным решением. Обратно, если для некоторого решения $\xi(t) \not\equiv 0$ *выполнено условие* (2.9), *то число* ρ *есть мультипликатор данной системы.*

Как следствие из теоремы получим: периодическая система (2.8) имеет решение $\xi(t) \not\equiv 0$ периода ω тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее мультипликаторов $\rho = 1$.

Положим $\rho = e^{\lambda\omega}$ и $\xi(t) = e^{\lambda t}\,\varphi(t)$. Тогда из равенства (2.9) найдем, что $e^{\lambda\,(t+\omega)}\,\varphi(t+\omega) = e^{\lambda\omega}\,e^{\lambda t}\,\varphi(t)$ и $\varphi(t+\omega) = \varphi(t)$. Значит, нормальное решение $\xi(t)$ периодической системы имеет указанный вид $\xi(t) = e^{\lambda t}\,\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in C^1$ — ω–периодическая вектор-функция, $\lambda = (1/\omega)\,\mathrm{Ln}\,\rho$ — х.п. системы.

Если существует мультипликатор $\rho = -1$, то ему соответствует *антипериодическое решение* $\xi(t) \not\equiv 0$ периода ω : $\xi(t+\omega) = -\xi(t)$, откуда $\xi(t+2\omega) = -\xi(t+\omega) = \xi(t)$, т.е. $\xi(t)$ — 2ω–периодическое решение.

Теорема 2.16 (Теорема Ляпунова). *Линейная система с непрерывной периодической матрицей приводима.*

Сделаем в системе (2.8) замену переменных: $x = \Phi(t)\,y \equiv X(t)\,e^{-\Lambda t}\,y$, где $X(t)$ — нормированная матрица решений. Тогда $\dot y = \Lambda y$; следовательно, х.п. λ_j являются корнями характеристического уравнения матрицы системы $\dot y = \Lambda y$. Отсюда можно сформулировать следующие условия устойчивости периодической системы:

1. Система (2.8) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_j расположены внутри замкнутого единичного круга $|\,\rho\,| \le 1$, причем мультипликаторы, лежащие на самой окружности $|\,\rho\,| = 1$, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии.

2. Для асимптотической устойчивости системы (2.8) необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы располагались внутри единичного круга $|\,\rho\,| < 1$.

Воспользумся далее теоремой 2.14 Флоке. Будем считать, что λ_1, ..., λ_m, $m \le n$ — х.п. системы, т.е. собственные значения матрицы Λ. Для каждого х.п. λ однородной периодической системы существует ее нормальное решение вида $y = e^{\lambda t}\,\psi(t)$, где $\psi(t) \in C^1$ — ω–периодическая вектор-функция. Если все мультипликаторы ρ_1, ..., ρ_n системы (2.8) простые, то существует ее фундаментальная система нормальных решений $y_1 = e^{\lambda_1 t}\,\psi_1(t)$, ..., $y_n = e^{\lambda_n t}\,\psi_n(t)$,

где $\psi_i(t) \in C^1$, $i = \overline{1,n}$ — ω–периодические вектор-функции, $\lambda_i = (1/\omega)\,\mathrm{Ln}\,\rho_i$, $i = \overline{1,n}$.

Модельный пример. Пусть имеется скалярное уравнение

$$\ddot x + p(t)\,\dot x + q(t)\,x = 0,$$

где $p(t)$, $q(t)$ — непрерывные ω–периодические функции. Обозначая $y = \dot x$, получим линейную периодическую систему

$$\dot x = y, \qquad \dot y = -\,q(t)\,x - p(t)\,y.$$

Будем считать, что ρ_1, ρ_2 — мультипликаторы этой системы и $\lambda_j = (1/\omega)\,\mathrm{Ln}\,\rho_j$, $j = 1, 2$. Поскольку

$$\rho_1\rho_2 = \exp\left(-\int\limits_0^\omega p(t)\,dt\right),$$

то можно положить

$$\lambda_2 = -\,\lambda_1 - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega p(t)\,dt.$$

При $\rho_1 \ne \rho_2$ (если $\rho_1 = \rho_2$ и им отвечают простые элементарные делители) исходное уравнение имеет фундаментальную систему решений $x_1 = e^{\lambda_1 t}\,\psi_1(t)$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}\,\psi_2(t)$ с $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1$ — ω–периодическими функциями.

При $\rho_1 = \rho_2$ и им отвечает не простой элементарный делитель, исходное уравнение имеет фундаментальную систему решений: $x_1 = e^{\lambda_1 t}\,\psi_1(t)$, $x_2 = e^{\lambda_1 t}\left[\,t\,\psi_1(t) + \psi_2(t)\,\right]$ с $\psi_1(t)$, $\psi_2(t) \in C^1$ — ω–периодическими функциями, причем $\lambda_1 = \big(-1/(2\omega)\big)\int_0^\omega p(t)\,dt$.

Рассмотрим далее скалярное линейное ДУ второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\ddot z + a(t)\,\dot z + b(t)\,z = 0,$$

где $a(t) \in C^1(-\infty,\infty)$, $b(t) \in C(-\infty,\infty)$; $a(t)$, $b(t)$ — ω–периодические функции. Положим $z = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_0^t a(s)\,ds\big)\,x$. Тогда получим уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0, \tag{2.10}$$

где обозначено

$$p(t) = b(t) - \frac{a^2(t)}{4} - \frac{\dot{a}(t)}{2}, \qquad p(t) \in C(-\infty, \infty), \quad p(t+\omega) = p(t).$$

Чтобы изучить свойства устойчивости уравнения (2.10), сведем его к эквивалентной системе

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\,p(t)\,x, \tag{2.11}$$

с матрицей коэффициентов

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\,p(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Sp}\,P(t) = 0.$$

Соответственно под устойчивостью (неустойчивостью) уравнения (2.10) будем понимать устойчивость (неустойчивость) данной системы (2.11). Для устойчивого уравнения (2.10) имеем ограниченность на $[\,t_0, \infty)$ всех решений $x(t)$ и $\dot{x}(t)$. Отсюда следует, что уравнение (2.10) неустойчиво лишь в случае неограниченных решений.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица решений с начальными условиями:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \varphi(0) = 1, & \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \psi(0) = 0, & \dot{\psi}(0) = 1, \end{matrix}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — линейно независимые решения уравнения (2.10).

Решения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ можно получить в виде сходящихся рядов [84] — введем в уравнение (2.10) числовой параметр $\mu:\ \ddot{x} = \mu\,p(t)\,x$ (для уравнения (2.10) имеем $\mu = -1$). Пусть решение этого уравнения

$$\varphi(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\,\mu^k.$$

Подставляя это выражение в ДУ, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{\varphi}_k(t)\,\mu^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p(t)\,\varphi_k(t)\,\mu^{k+1}, \tag{2.12}$$

откуда имеем соотношения

$$\ddot{\varphi}_0(t) = 0, \qquad \ddot{\varphi}_k(t) = p(t)\,\varphi_{k-1}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

с начальными условиями

$$\varphi_0(0) = 1, \qquad \dot{\varphi}_0(0) = 0, \qquad \varphi_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = 0, \qquad k \ge 1.$$

Из уравнений (2.13) найдем

$$\varphi_0(t) = 1, \qquad \varphi_k(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} p(t_2)\,\varphi_{k-1}(t_2)\,dt_2 \ =$$

$$= \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t p(t_2)\,\varphi_{k-1}(t_2)\,dt_1 = \int_0^t (t-t_2)\,p(t_2)\,\varphi_{k-1}(t_2)\,dt_2 \ =$$

$$= \int_0^t (t-t_1)\,p(t_1)\,\varphi_{k-1}(t_1)\,dt_1, \qquad k \ge 1. \tag{2.14}$$

Таким образом, можем записать ряд (2.12) в виде

$$\varphi(t,\mu) = 1 + \mu \int_0^t (t-t_1)\,p(t_1)\,dt_1 \ +$$

$$+\ \mu^2 \int_0^t (t-t_1)\,p(t_1)\,dt_1 \int_0^{t_1} (t_1-t_2)\,p(t_2)\,dt_2 \ + \ \ldots . \tag{2.15}$$

Изучим сходимость ряда (2.15). Будем считать, что $|\,p(t)\,| \le M$, $t \in (-\infty, \infty)$. Из соотношения (2.14) с учетом того, что $\varphi_0(t) = 1$,

$\forall\, t \in (-\infty, \infty)$, последовательно получим

$$|\,\varphi_1(t)\,| \le \int\limits_0^t |\,t - t_1\,|\,M\,|\,dt_1\,| = \frac{Mt^2}{2!},$$

$$|\,\varphi_2(t)\,| \le \int\limits_0^t |\,t - t_1\,|\,M \cdot \frac{Mt^2}{2!}\,|\,dt_1\,| = \frac{M^2}{2!}\left(\frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4}\right) = \frac{M^2 t^4}{4!}$$

и т.д. Следовательно, функциональный ряд (2.15) мажорируется сходящимся $\forall\,(\mu, t)$ рядом:

$$1 + |\,\mu\,| \cdot \frac{Mt^2}{2!} + |\,\mu\,|^2 \cdot \frac{M^2 t^4}{4!} \;+\; \ldots = \operatorname{ch}\left(t\,\sqrt{M\,|\,\mu\,|}\right).$$

Согласно признаку Вейерштрасса ряд (2.15) сходится абсолютно и равомерно в конечной области $G\left\{\,|\,\mu\,| < \mu_0,\, |\,t\,| < T\,\right\}$. Более того, ряды, полученные почленным дифференцированием по t ряда (2.15), также абсолютно и равномерно сходятся в G. Это значит, что сумма $\varphi(t, \mu)$ ряда (2.15) представляет собой решение ДУ: $\ddot{x} = \mu\, p(t)\, x$. При $\mu = -\,1$ получим решение ДУ (2.10):

$$\varphi(t) = 1 - \int\limits_0^t (t - t_1)\, p(t_1)\, dt_1 \;+$$

$$+\; \int\limits_0^t (t - t_1)\, p(t_1)\, dt_1 \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t_2)\, p(t_2)\, dt_2 \;+\; \ldots, \quad t \in (-\,\infty, \infty).$$

Аналогично для ДУ: $\ddot{x} = \mu\, p(t)\, x$ строится второе решение

$$\psi(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)\, \mu^k,$$

где

$$\psi_0(t) = t, \qquad \psi_k(t) = \int\limits_0^t (t - t_1)\, p(t_1)\, \psi_{k-1}(t_1)\, dt_1, \quad k \ge 1.$$

Имеем отсюда

$$\psi(t, \mu) = t + \mu \int\limits_0^t (t - t_1)\, t_1\, p(t_1)\, dt_1 \;+$$

$$+\; \mu^2 \int\limits_0^t (t - t_1)\, p(t_1)\, dt_1 \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t_2)\, t_2\, p(t_2)\, dt_2 \;+\; \ldots,$$

т.е.

$$\psi(t) = t - \int\limits_0^t (t - t_1)\, t_1\, p(t_1)\, dt_1 \;+$$

$$+\; \int\limits_0^t (t - t_1)\, p(t_1)\, dt_1 \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t_2)\, t_2\, p(t_2)\, dt_2 \;+\; \ldots, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Составим характеристическое уравнение

$$\det\left[\,X(\omega) - \rho E\,\right] = \begin{vmatrix} \varphi(\omega) - \rho & \psi(\omega) \\ \dot{\varphi}(\omega) & \dot{\psi}(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

С учетом того, что

$$\det\, X(\omega) = \det\, X(0)\, \exp\left[\,\int\limits_0^{\omega} \operatorname{Sp} P(t)\, dt\right] = 1,$$

будем иметь: $\rho^2 - a\rho + 1 = 0$, где *константа Ляпунова* a равна

$$a = \varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega) = \operatorname{Sp} X(\omega).$$

Из предыдущих равенств следует, что

$$\dot{\psi}(t) = 1 - \int\limits_0^t t_1\, p(t_1)\, dt_1 + \int\limits_0^t p(t_1)\, dt_1 \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t_2)\, t_2\, p(t_2)\, dt_2 \;+\; \ldots\,.$$

Значит, число a определяется выражением

$$a = 2 - \omega \int\limits_0^{\omega} p(t_1)\, dt_1 + \int\limits_0^{\omega} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2\, (\omega - t_1 + t_2)(t_1 - t_2)\, p(t_1)\, p(t_2)\; -$$

$$- \int\limits_0^{\omega} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \int\limits_0^{t_2} dt_3\, (\omega - t_1 + t_3)(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\, p(t_1)\, p(t_2)\, p(t_3) \; + \; \ldots .$$

С помощью этого соотношения получим следующий признак неустойчивости уравнения (2.10).

Теорема 2.17. *Если непрерывный периодический коэффициент $p(t)$ может принимать лишь отрицательные или нулевые значения, не будучи тождественно равным нулю, то линейное уравнение* (2.10) *неустойчиво, причем мультипликаторы положительны и один из них больше единицы, а другой — меньше.*

Для случая, когда $p(t) \geq 0$, имеем утверждение, называемое *интегральным признаком устойчивости Ляпунова.*

Теорема 2.18. *Если непрерывная ω–периодическая функция $p(t)$ может принимать лишь положительные или нулевые значения, не будучи тождественно равной нулю, и при этом выполнено неравенство:* $0 < \omega \int_0^{\omega} p(t)\, dt \leq 4$, *то все решения $x(t)$ уравнения* (2.10) *ограничены вместе с их производными первого порядка на* $(-\infty, \infty)$, *т.е. уравнение* (2.10) *устойчиво.*

В качестве следствия отметим, что если уравнение (2.10) с непрерывным положительным ω–периодическим коэффициентом $p(t)$ имеет неограниченное решение, то тогда выполнено неравенство: $\omega \int_0^{\omega} p(t)\, dt > 4$.

Модельный пример. Пусть задано уравнение Матье

$$\ddot{x} + \big(\alpha + \beta \cos t\big)\, x = 0, \qquad \alpha > 0, \quad |\,\beta\,| \leq \alpha.$$

Имеем: $p(t) = \alpha + \beta \cos t,\ \omega = 2\pi$. Значит,

$$\omega \int\limits_0^{\omega} p(t)\, dt = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (\alpha + \beta \cos t)\, dt = 4\pi^2 \alpha.$$

В силу интегрального признака Ляпунова отсюда область устойчивости задается неравенствами: $|\,\beta\,| \leq \alpha$, $0 < \alpha \leq 1/(\pi^2)$.

Рассмотрим далее *гамильтонову* (*каноническую*) *систему* ДУ с функцией Гамильтона H :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{2.16}$$

где $H = h(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \equiv H(t, q, p) \in C]\,t\,],\ C^1[\,q, p\,]$. Если H не зависит явно от времени t : $H = H(q, p)$, то каноническая система (2.16) допускает первый интеграл $H(q, p) = h = \mathrm{const}$.

Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in R^{2n}, \qquad J = J_{2n} = \begin{pmatrix} q & 0 & E_n \\ & -E_n & 0 \end{pmatrix} \in R^{2n} \times R^{2n},$$

где матрица J носит название *симплектической единицы*. Система (2.16) в этих обозначениях запишется так:

$$\dot{x} = J\, \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} \equiv \begin{pmatrix} \partial H / \partial q \\ \partial H / \partial p \end{pmatrix}.$$

Пусть $q = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$. Тогда $H = H(t, x)$. Если функция H является квадратичной формой $x_1, \ldots, x_n$:

$$H(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk}(t)\, x_j x_k, \qquad a_{jk}(t) = a_{kj}(t),$$

то тогда

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}(t)\, x_k \\ \vdots \\ \sum_k a_{2n,k}(t)\, x_k \end{pmatrix} \equiv A(t)\, x,$$

где $A(t) = \big(a_{jk}(t)\big)$ — симметрическая матрица. Тем самым имеем линейную гамильтонову систему

$$\dot{x} = J\, A(t)\, x, \quad H(t, x) = \frac{1}{2}\, \big(A(t)\, x,\, x\big), \quad \mathrm{Sp}\,\big[\, J\, A(t)\,\big] = 0. \tag{2.17}$$

Пусть $x, y \in R^{2n}$ — любые решения системы (2.17). Тогда имеет место следующее утверждение: для любых двух решений x и y

системы (2.17) остается постоянным их симплектическое произведение: $u = (x,\ Jy) \equiv \mathrm{const}$.

Из курса алгебры известно, что многочлен степени n :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ + \ \dots \ + \ a_n, \qquad a_0 \neq 0, \quad z = x + iy,$$

называется *возвратным*, если его коэффициенты, симметрично расположенные относительно крайних членов многочлена, равны между собой: $a_k = a_{n-k}$, $k = 0, 1, \dots$. Отсюда следует, что для возвратного многочлена $f(z)$ степени n имеет место тождество:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{1}{z^n}\, f(z), \qquad z \neq 0.$$

В обратную сторону имеем: если это тождество имеет место, то многочлен $f(z)$ возвратный. Для возвратного многочлена $f(z)$ *уравнение* $f(z) = 0$ называется *возвратным*.

Пусть возвратное уравнение имеет четную степень n. Тогда подстановка $t = z + 1/z$ приводит его к уравнению степени $n/2$ относительно неизвестного t. Возвратное уравнение нечетной степени n имеет корень $z = -1$. Выделение этого корня приводит к возвратному уравнению четной степени $n - 1$. Следовательно, с помощью указанной подстановки можно привести возвратное уравнение нечетной степени n к алгебраическому уравнению степени $(n-1)/2$.

Подытоживая, придем к следующему утверждению. В возвратном уравнении каждому его корню $z_s \neq \pm 1$ соответствует взаимно обратный корень $1/z_s$ той же кратности. Если, помимо этого, уравнение имеет корень $z = 1$, то кратность этого корня четная; если же оно имеет корень $z = -1$, то его кратность сравнима со степенью уравнения n по $\mathrm{mod}\, 2$ (кратность корня $z = -1$) четная, если n четно, и нечетная, если n нечетно). Как следствие получим, что если возвратное уравнение четной степени имеет корень $z = 1$ или корень $z = -1$, то эти корни четной кратности.

Теорема 2.19 (Теорема Ляпунова–Пуанкаре). *Если матрица* $A(t)$ *линейной гамильтоновой системы* (2.17) ω*–периодическая, то характеристическое уравнение* $f(\rho) \equiv \det\big[\,\rho E - X(\omega)\,\big] = 0$, *где* $X(\omega)$ *— матрица монодромии, является возвратным.*

Из этой теоремы вытекают следствия: 1. Для гамильтоновой системы (2.17) с ω–периодической матрицей $A(t)$ мультипликаторы ρ_s и $1/\rho_s$, $|\,\rho_s\,| \neq 1$, имеют одинаковую кратность. 2. Если характеристическое уравнение $\det\big[\,\rho E - X(\omega)\,\big] = 0$ имеет корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$, то эти корни четной кратности.

Из теоремы 2.19 также следует, что система (2.17) не является асимптотически устойчивой.

Теорема 2.20. *Система* (2.17) *с периодическими коэффициентами устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы* ρ_j *расположены на единичной окружности* $|\,\rho\,| = 1$ *и имеют простые элементарные делители.*

Пусть дифференциальная система имеет вид: $\ddot{x} + B(t)\,x = 0$, где $B(t)$ — периодическая и симметрическая $(n{\times}n)$–матрица: $B(t{+}\omega) = B(t)$, $B^*(t)$, $\omega > 0$. Исходное уравнение запишем в виде системы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\,B(t)\,x, \tag{2.18}$$

или

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J\,A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \qquad A^*(t) = A(t).$$

Можем утверждать в силу симметричности матрицы $A(t)$, что характеристическое уравнение для периодической системы (2.18) возвратное.

Возьмем теперь неоднородную периодическую систему

$$\dot{y} = A(t)\,y + f(t), \tag{2.19}$$

где $A(t)$, $f(t)$ — непрерывные $(n \times n)$ и $(n \times 1)$–матрицы с общим периодом $\omega > 0$.

Теорема 2.21. *Если однородная периодическая система* $\dot{x} = A(t)\,x$ *не имеет нетривиальных* ω*–периодических решений, т.е. все ее мультипликаторы отличны от единицы* $(\rho_j \neq 1)$, *то соответствующая неоднородная периодическая система* (2.19) *имеет единственное периодическое решение с периодом* ω.

Замечания. 1. Периодическое решение $y(t)$ системы (2.19) может быть записано в виде

$$y(t) = \int_0^{\omega} G(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} X(t)\,\big[\,E - X(\omega)\,\big]^{-1} X^{-1}(\tau), & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ X(t+\omega)\,\big[\,E - X(\omega)\,\big]^{-1} X^{-1}(\tau), & 0 \le t < \tau \le \omega. \end{cases}$$

Здесь $X(t)$ — нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица однородной системы.

2. Если однородная система $\dot{x} = A(t)\,x$ имеет нетривиальные ω–периодические решения (резонансный случай), то соответствующая неоднородная система (2.19) допускает ω–периодическое решение не всегда.

Теорема 2.22. *Пусть линейная однородная ω–периодическая система $\dot{x} = A(t)\,x$ допускает k линейно независимых ω–периодических решений $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_k(t)$, $1 \le k \le n$. Тогда*

1) *сопряженная система $\dot{\xi} = -\,A^*(t)\,\xi$ имеет также k линейно независимых ω–периодических решений $\psi_1(t)$, ..., $\psi_k(t)$;*

2) *соответствующая неоднородная система (2.19) имеет ω–пери-одические решения тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности: $\int_0^{\omega} \big(\psi_s(t),\, f(t)\big)\, dt = 0$, $s = \overline{1,k}$, причем в этом случае ω–периодические решения системы (2.19) образуют k–параметрическое семейство интегральных кривых.*

Теорема 2.23 (Теорема Массера). *Если линейная неоднородная ω–периодическая система (2.19) имеет ограниченное решение $y(t)$, $t \ge 0$, то у этой системы существует ω–периодическое решение.*

Сформулируем еще одно утверждение, вытекающее из этой теоремы как следствие: если система (2.19) не имеет ω–периодических решений, то все решения этой системы не ограничены как на полуоси $t \ge 0$, так и на полуоси $t \le 0$.

В завершении параграфа обратимся к случаю, когда задана слабо нелинейная (квазилинейная) периодическая система вида

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A(t)\,y + f(t) + \mu\,\varphi(t,y), \tag{2.20}$$

где $A(t)$, $f(t)$ — ω–периодичны, $\varphi(t,y) \in C[\,t\,]$, $C^1[\,y\,]$; $\varphi(t+\omega, y) = \varphi(t,y)$, μ — малый параметр. При $\mu = 0$ система (2.20) совпадает с линейной неоднородной (порождающей) периодической системой (2.19).

Метод малого параметра, предложенный Пуанкаре, о существовании ω–периодических решений системы (2.20) в своем концентрированном виде используется в следующей теореме.

Теорема 2.24. *Если все мультипликаторы порождающей системы (2.19) отличны от единицы, то при достаточно малых $|\,\mu\,|$ нелинейная система (2.20) имеет единственное ω–периодическое решение $y(t,\mu)$ такое, что $\lim_{\mu\to 0}\, y(t,\mu) = y_0(t)$, где $y_0(t)$ — ω–периодическое решение порождающей системы (2.19).*

2.3 Второй (прямой) метод Ляпунова

Перейдем к изучению второго или, как его часто называют, прямого метода Ляпунова в теории устойчивости, пользуясь в основном учебным материалом работ [37, 150]. Рассмотрим дифференциальную систему (невозмущенное движение)

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = Y(t,y), \tag{2.21}$$

полагая при этом, что $Y \in C[\,t\,]$, $C^1[\,y\,]$ на $\Omega = \big\{\,(t,y):\ a < t < \infty,\ y \in G\,\big\}$, a — число или символ $-\infty$, $G \subset R^n$. Тогда для любой начальной точки $(t_0, y_0) \in \Omega$ справедлива локальная теорема существования и единственности решения $y(t)$ системы (2.21) с начальными условиями $y(t_0) = y_0$.

Обозначим через $\bar{y}(t)$, $t \in [\,t_0, \infty)$, $t_0 > a$ — решение системы (2.21), устойчивость которого надо исследовать. Пусть h — окрестность этого решения $U_h(\bar{y}(t)) \subset G$, где $U_h(\bar{y}(t)) = \big\{\,\|\,y(t) - \bar{y}(t)\,\| < h \le \infty,\ t \in [\,t_0, \infty)\,\big\}$. Обозначим также $x = y - \bar{y}(t)$ — отклонение одного решения от другого. Поскольку $\dot{\bar{y}} = Y(t,\, \bar{y}(t))$, то для x получим ДУ

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t,x), \qquad X(t,0) \equiv 0, \tag{2.22}$$

где

$$X(t,x) = \big[\, Y(t,\, x+\bar{y}(t)) - Y(t,\bar{y}) \,\big] \in C[\,t\,],\, C^1[\,x\,],\, t \in (a,\infty),\, \|\,x\,\| < h.$$

Видим, что система (2.22) имеет тривиальное решение $x = 0$. Это решение соответствует данному решению $\bar{y} = \bar{y}(t)$. Систему (2.22) называют *приведенной*. Согласно Ляпунову она называется системой уравнений возмущенного движения. Итак, установлено, что анализ устойчивости решения $\bar{y} = \bar{y}(t)$ системы (2.21) сводится к анализу устойчивости тривиального решения (*положения равновесия*) $x = 0$ системы (2.22).

Введем в рассмотрение функцию $V = V(t,x) \in C[\,t\,],\, C^1[\,x\,]$ в $Z = \big\{\, t \in (a,\infty),\, \|\,x\,\| < h \,\big\}$.

Определение 2.9. 1. *Действительная непрерывная скалярная функция* $V(t,x)$ *называется знакопостоянной (знакоположительной или знакоотрицательной) в* Z, *если* $V(t,x) \ge 0$ (*или* $V(t,x) \le 0$) *при* $(t,x) \in Z$.

2. *Функция* $V(t,x)$ *называется положительно определенной в* Z, *если найдется скалярная функция* $W(x) \in C[\,x\,]$, $\|\,x\,\| < h$ *такая, что* $V(t,x) \ge W(x) > 0$, $V(t,0) = W(0) = 0$ *при* $\|\,x\,\| \ne 0$.

3. *Функция* $V(t,x)$ *называется отрицательно определенной в* Z, *если найдется такая скалярная функция* $W(x) \in C[\,x\,]$, $\|\,x\,\| < h$, *что* $V(t,x) \le W(x) < 0$, $V(t,0) = W(0) = 0$ *при* $\|\,x\,\| \ne 0$.

Положительно или отрицательно определенная функция называется знакоопределенной.

Определение 2.10. *Говорят, что функция* $V(t,x)$ *имеет бесконечно малый высший предел при* $x \to 0$, *если при некотором* $t_0 > a$ *функция* $V(t,x)$ *стремится равномерно по* t *к нулю, т.е.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $|\,V(t,x)\,| < \varepsilon$ *при* $\|\,x\,\| < \delta$ *и* $t \in [\,t_0,\infty)$.

Рассмотрим приведенную систему (2.22) с решением $x = x(t)$ и возьмем некоторую функцию $V = V(t,x) \in C^1[\,t\,],\, C^1[\,x\,]$ в Z.

Функцию

$$\dot{V}(t,x) = \frac{dV(t,x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, X_i(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \big(\operatorname{grad} V,\ X\big)$$

называют полной производной по времени t функции $V(t,x)$ в силу системы (2.22).

Следующую теорему называют *первой теоремой Ляпунова* (теоремой об устойчивости).

Теорема 2.25. *Если для приведенной системы* (2.22) *существует положительно определенная скалярная функция* $V(t,x) \in C^1[\,t\,],\, C^1[\,x\,]$, $t \ge t_0$, *допускающая знакоотрицательную производную по времени* $\dot{V}(t,x)$ *в силу системы, то тривиальное решение* $x = 0$ *данной системы устойчиво по Ляпунову.*

Укажем на следствия из этой теоремы. 1. Пусть выполнены условия теоремы 2.25. Тогда все решения $x(t)$ системы (2.22) с достаточно малыми по норме начальными значениями $x(t_0)$ бесконечно продолжаемы вправо и ограничены при $t \ge t_0$.

2. Если для линейной однородной системы $\dot{x} = A(t)\,x$, $A(t) \in C[\,t_0,\infty)$ существует положительно определенная функция $V(t,x)$, у которой в силу системы $\dot{V}(t,x) \le 0$, то все решения $x(t)$ этой системы определены и ограничены при $t \ge t_0$.

Модельный пример. Требуется исследовать устойчивость стационарных вращений твердого тела в случае Эйлера [87]. Напомним, как выглядят уравнения движения. Пусть твердое тело совершает вращение вокруг точки O. Введем подвижную СК $Oxyz$, жестко связанную с телом; p, q, r — проекции вектора угловой скорости ω тела на ее оси. Пусть Ox, Oy, Oz — главные оси инерции тела для точки O. Тогда моменты инерции: $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$; $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$ — главные моменты инерции. Динамические уравнения Эйлера для случая, когда внешние моменты сил, действующих на тело, отсутствуют (случай Эйлера) имеют вид

$$A\dot{p} + (C-B)\,qr = 0, \qquad B\dot{q} + (A-C)\,rp = 0, \qquad C\dot{r} + (B-A)\,pq = 0.$$

Если вращение стационарно, угловая скорость ω постоянна и величины p, q, r постоянны. Тогда получим уравнения движения

$$(C - B)\, qr = 0, \qquad (A - C)\, rp = 0, \qquad (B - A)\, pq = 0.$$

Отсюда следует, что стационарное вращение тела происходит вокруг любой из главных осей инерции тела для точки O.

Проанализируем устойчивость движения, в котором $p = \omega = \text{const}$, $q = 0$, $r = 0$. Этому движению отвечает вращение вокруг оси Ox, соответствующей моменту инерции A. В этом случае динамические уравнения Эйлера имеют два первых интеграла

$$U_1 = 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \qquad U_2 = K_0^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2, \quad (*)$$

где $T = \text{const}$ — кинетическая энергия тела, $K_0 = \text{const}$ — кинетический момент тела; K_0^2 — квадрат длины вектора K_0; $\dot{K}_0 = M_0 = 0$, M_0 — главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O.

Введем возмущения x, y, z по формулам: $p = \omega + x$, $q = y$, $r = z$ и подставим эти выражения в интегралы $(*)$. Отбрасывая несущественные постоянные в соотношениях для U_1 и U_2, получим первые интегралы для уравнений возмущенного движения:

$$U_1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A\omega x, \qquad U_2 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2A^2\omega x.$$

Возьмем далее функцию V в виде: $V = U_1^2 + U_2^2$. Понятно, что $V \geq 0$, $\forall x, y, z$. Легко показать, что если A — это наименьший или наибольший из моментов инерции, то функция V определенно положительная. Для этого надо показать, что при малых x, y, z система уравнений

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0 \qquad (**)$$

имеет единственное решение $x = y = z = 0$. В самом деле, из уравнений $(**)$ получим

$$AU_1 - U_2 \equiv B\,(A - B)\, y^2 + C\,(A - C)\, z^2 = 0.$$

Если по предположению A — наименьший или наибольший из моментов инерции, то последнее равенство имеет место, лишь когда $y = z = 0$. Тогда из $(**)$ вытекает, что $x = 0$ или $x = -2\omega$ и при

достаточно малых x, y, z система $(**)$ имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Таким образом, стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси наименьшего или наибольшего из моментов инерции устойчивы по Ляпунову относительно к возмущениям величин p, q, r. Если, скажем, ось Oy отвечает среднему по величине моменту инерции, то при малом возмущении стационарного вращения вокруг оси Oy вектор угловой скорости с течением времени покидает окрестность этой оси — имеем неустойчивость стационарного вращения вокруг оси Oy.

Перейдем ко *второй теореме Ляпунова* (теореме об асимптотической устойчивости).

Теорема 2.26. *Пусть для приведенной системы* (2.22) *существует положительно определенная функция* $V(t,x) \in C^1[\,t\,],\ C^1[\,x\,]$, *допускающая бесконечно малый высший предел при* $x \to 0$ *и имеющая отрицательно определенную* $\dot{V}(t,x)$ *в силу этой системы. Тогда тривиальное решение* $x = 0$ *системы асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t \to \infty$.

Имеются следствия из этой теоремы. 1. В условиях теоремы 2.26 множество $\|\,x\,\| \leq h < \infty$ принадлежит области притяжения тривиального решения $x = 0$. 2. В условиях теоремы 2.26 каждое решение линейной однородной системы $\dot{x} = A(t)\,x$ асимптотически устойчиво в целом.

Следующее утверждение носит название *теоремы Барбашина–Красовского.* Пусть определены функция $V(t,x) \in C^1[\,t\,],\ C^1[\,x\,]$ и функции $W(x)$, $W_0(x)$, $W_1(x) \in C[\,x\,]$ такие, что выполняются условия: 1) $W(x) \leq V(t,x) \leq W_0(x)$; 2) $\dot{V}(t,x) \leq -W_1(x)$ в силу уравнения (2.22); 3) $\lim_{\|\,x\,\| \to \infty} W(x) = \infty$. Тогда тривиальное решение системы (2.22) асимптотически устойчиво в целом.

Следующая *третья теорема Ляпунова* — это теорема о неустойчивости.

Теорема 2.27. *Предположим, что для приведенной системы* (2.22) $\exists\, V(t,x) \in C^1[\,t\,],\ C^1[\,x\,]$, *допускающая бесконечно малый высший предел при* $x \to 0$ *и имеющая знакоопределенную производную* $\dot{V}(t,x)$ *по* t *в силу системы. Если при некотором* $t_0 > a$ *в любой окрестности* $\|\,x\,\| < \Delta \leq h$ *найдется точка* (t_0, x_0), *для которой знак функции* $V(t,x)$ *такой же, как и знак функции* $\dot{V}(t,x)$, *т.е.* $V(t_0, x_0)\,\dot V(t_0, x_0) > 0$, *то тривиальное решение* $x = 0$ *системы* (2.22) *неустойчиво по Ляпунову.*

Отметим, что в этой теореме функция $V(t, x)$, в отличие от $\dot V(t, x)$, не обязательно является знакоопределенной. Функции $V(t, x)$, о которых идет речь в теоремах 2.25 – 2.27 называются *функциями Ляпунова.*

Условия третьей теоремы Ляпунова можно ослабить и прийти к *теореме Четаева* о неустойчивости движения, суть которой сводится к тому, что если для приведенной системы (2.22) $\exists V(t, x) \in C^1[\,t\,],\ C^1[\,x\,]$, ограниченная в области, где $V(t, x) \ge \alpha > 0$, $\forall\, t \ge t_0$ и в сколь угодно малой окрестности нуля переменных x, для которой $\dot V(t, x) \ge \beta > 0$, где $\beta = \beta(\alpha)$, в силу системы (2.22), то тогда тривиальное решение этой системы неустойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.

Тривиальное решение $x = 0$ приведенной системы (2.22) называется *экспоненциально устойчивым* при $t \to \infty$, если для каждого решения $x(t)$ этой системы в некоторой области $t \in [\,t_0, \infty)$, $\|\,x\,\| \le h$ имеет место неравенство

$$\|\,x(t)\,\| \le N\,\|\,x(t_0)\,\|\,e^{-\,\alpha\,(t - t_0)}, \qquad t \ge t_0,$$

где N, α — положительные постоянные, не зависящие от выбора решения $x(t)$. Заметим, что из экспоненциальной устойчивости решения $x = 0$ следует его асимптотическая устойчивость. Если $x(t)$ — нетривиальное решение приведенной системы (2.22), то оно будет экспоненциально устойчиво, если близкие к нему при $t = t_0$ решения $\xi(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\|\,x(t) - \xi(t)\,\| \le N\,\|\,x(t_0) - \xi(t_0)\,\|\,e^{-\,\alpha\,(t - t_0)}, \qquad t \ge t_0, \qquad N, \alpha > 0.$$

Имеет место следующее утверждение. Пусть тривиальное решение $x = 0$ системы $\dot x = Ax$, где A — постоянная матрица, асимптотически устойчиво при $t \to \infty$, тогда эта система экспоненциально устойчива (все ее решения экспоненциально устойчивы при $t \to \infty$). Заметим здесь также, что если $A = A(t)$ — матрица с переменными коэффициентами, то это утверждение, вообще говоря, не верно.

Теорема 2.28. *Если существует положительно определенная квадратичная форма* $V(x) = (Ax,\, x)$, *производная которой* $\dot V(x)$ *в силу приведенной системы* (2.22) *удовлетворяет неравенству*

$$\dot V(x) \le W(x), \qquad W(x) \equiv -\,(Bx,\, x),$$

где $t \ge t_0$, $\|\,x\,\| \le h$, $W(x)$ *— отрицательно определенная квадратичная форма,* A *и* B *— постоянные симметрические матрицы, то тривиальное решение* $x = 0$ *этой системы экспоненциально устойчиво при* $t \to \infty$.

Следующая *теорема Персидского* посвящена выяснению вопроса об обращении первой теоремы Ляпунова.

Теорема 2.29. *Пусть приведенная система* (2.22) *допускает тривиальное решение* $x = 0$, *устойчивое по Ляпунову. Тогда для этой системы в области* $t \in [\,t_0, \infty)$, $\|\,x\,\| < h$ *существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова об устойчивости.*

Рассмотрим ниже систему ДУ вида

$$\dot x = Ax + \varphi(t, x), \tag{2.23}$$

где A — постоянная матрица, $\varphi(t, x) \in C$, $t \ge t_0 = 0$, $\|\,x\,\| < h$. Положим $\varphi(t, x) = o(\|\,x\,\|)$, т.е. $\varphi(t, x)/\|\,x\,\| \to 0$ равномерно по t при $x \to 0$. Систему (2.23) часто называют *квазилинейной.* Видим, что она имеет тривиальное решение $x = 0$.

Теорема 2.30 (Теорема Ляпунова). *Если все собственные значения* $\lambda_j(A)$, $j = \overline{1, n}$, *матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части:* $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, *то тривиальное решение* $x = 0$ *квазилинейной системы* (2.23) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Как следствие из этой теоремы вытекает, что тривиальное решение $x = 0$ экспоненциально устойчиво при $t \to \infty$.

Возьмем нелинейную автономную систему вида

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = f(y), \qquad f(y) \in C^2, \tag{2.24}$$

где $\| y \| < h$. Если $f(y_0) = 0$, то $y = y_0$ есть состояние равновесия системы (2.24). Положим $y = y_0 + x$. Тогда

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)\,x + o\big(\| x \|\big) = Ax + o\big(\| x \|\big),$$

где $A = f'(y_0) = \big(f_{jk}(y_0)\big)$ — *матрица Якоби*. Полагая $x = y - y_0$ за новую переменную, где $y - y_0$ — отклонение вектора y от положения равновесия y_0, получим систему: $\dot{x} = Ax + o\big(\| x \|\big)$. На основании теоремы 2.30 Ляпунова имеем следующее утверждение.

Теорема 2.31. *Если все собственные значения матрицы Якоби $A = f'(y_0)$ имеют отрицательные вещественные части, то состояние равновесия $y = y_0$ нелинейной автономной системы* (2.24) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.*

Модельный пример. Пусть имеется уравнение нелинейных колебаний маятника в сопротивляющейся среде

$$\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b\sin\theta = 0,$$

где θ — угловая координата; a, b — положительные постоянные. Приведем это уравнение к нормальной системе Коши:

$$\dot{\theta} = \omega, \qquad \dot{\omega} = -\,a\omega - b\sin\theta.$$

Проанализируем устойчивость состояния равновесия $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ этой системы. Для этого введем обозначения: $y = (\theta,\, \omega)$, $y_0 = (\theta_0,\, \omega_0) = (0,\, 0)$. Тогда

$$f(y) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\,a\omega - b\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad f'(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\,b\cos\theta & -\,a \end{pmatrix},$$

$$A = f'(y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\,b & -\,a \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\,\lambda & 1 \\ -\,b & -\,a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Поскольку $a, b > 0$, то для характеристического уравнения выполнено условие Гурвица, а это значит, что искомое состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Теорема 2.32. *Пусть квазилинейная система* (2.23), *где A — постоянная матрица, $\varphi(t,x) \in C[\,t \geq t_0,\, \| x \| < h\,]$, такова, что равномерно по t имеем: $\| \varphi(t,x) \| / \| x \| \to 0$ при $x \to 0$. Если хотя бы одно собственное значение $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $j = \overline{1,n}$, матрицы A имеет положительную вещественную часть, то тривиальное решение $x = 0$ этой системы неустойчиво по Ляпунову.*

Перейдем к рассмотрению *теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению*. Пусть имеется нелинейная система ДУ

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t,x), \tag{2.25}$$

где $A(t) \in C[\,t \geq t_0,\, \sup_t \| A(t) \| < \infty\,]$, $f(t,x) \in C[\,t\,]$, $C^1[\,x\,]$, $t \in [\,t_0, \infty)$, $\| x \| < h$, причем

$$\| f(t,x) \| \leq \psi(t)\, \| x \|^m, \qquad m > 1. \tag{2.26}$$

Здесь $\psi(t)$ — положительная, непрерывная функция t, $t \in [\,t_0, \infty)$, такая, что х.п. $\chi[\,\psi(t)\,] = 0$, а норма матрицы $A(t) = (a_{ij}(t))$ понимается в смысле нормы: $\| A(t) \| = \max_j \sum_k |\, a_{jk}(t)\,|$.

Теорема 2.33. *Если система первого приближения:*

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A(t)\,y \tag{2.27}$$

правильная и все ее х.п. α_k, $k = \overline{1,n}$, отрицательны, причем выполнено условие нелинейности (2.26), *то тривиальное решение $x = 0$ полной исходной системы* (2.25) *экспоненциально устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.*

В качестве следствия отметим, что любое решение $x(t)$ нелинейной системы (2.25) с начальными данными $x(t_0)$, принадлежащими достаточно малой окрестности $\| x(t_0) \| < \Delta$, имеет х.п., удовлетворяющий неравенству: $\chi[\,x(t)\,] \leq \max_k \alpha_k$, где α_k — х.п. соответствующей линейной системы (2.27).

Модельный пример. Требуется исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\dot{x} = -4y - x^3, \qquad \dot{y} = 3x - y^3.$$

Характеристическое уравнение $\det\begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$ для системы первого приближения имеет чисто мнимые корни. В этом критическом случае провести исследование по первому приближению нельзя. Предлагается выбрать функцию Ляпунова вида $V = 3x^2 + 4y^2$. Имеем: $V(x, y) \geq 0$, $V(0, 0) = 0$,

$$\dot{V} = 6x\,(-4y - x^3) + 8y\,(3x - y^3) = -(6x^4 + 8y^4) \leq 0,$$

причем вне некоторой окрестности начала координат $\dot{V} \leq -\beta < 0$. Следовательно, точка покоя $x = 0$, $y = 0$ в силу второй теоремы Ляпунова асимптотически устойчива.

Пусть дана линейная однородная система (2.27), где α_1, ..., α_n — ее х.п. Число

$$\kappa = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\,d\tau \tag{2.28}$$

называется *мерой неправильности* системы (2.27). С учетом неравенства Ляпунова (2.6)

$$\sum_{k} \alpha_k \geq \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\,d\tau$$

из формулы (2.28) получим

$$\kappa \geq \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\,d\tau - \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\,d\tau \geq 0.$$

Видно, что система (2.27) правильная тогда и только тогда, когда $\kappa = 0$. Обобщением теоремы 2.33 Ляпунова для неправильных систем является следующая *теорема Массера.*

Теорема 2.34. *Зададим нелинейную систему* (2.25), *причем будем считать, что* $f(t, 0) \equiv 0$. *Если*

1) $\| f(t, x) \| \leq \psi(t) \| x \|^m$, $m > 1$, *где* $\psi(t)$ — *положительная функция такая, что* $\chi[\psi(t)] = 0$;

2) *для х.п.* α_1, ..., α_n *линейного приближения* (2.27) *выполнено неравенство*

$$\max_k \alpha_k < -\frac{\kappa}{m-1} \leq 0,$$

где κ — *мера неправильности линейной системы* (2.27), *то тогда тривиальное решение* $x \equiv 0$ *нелинейной системы* (2.25) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t \to \infty$.

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что для х.п. решений $x(t)$, где $\| x(t_0) \|$ достаточно мало, справедлива оценка: $\chi[x(t)] \leq \max_k \alpha_k$.

2.4 Второй метод Ляпунова (продолжение)

Пусть имеется система

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{2.29}$$

где $f(t, y) \in C[t]$, $C^1[y]$, $t \in I = \{a < t < \infty\}$, $y \in R^n$ и система (2.29) имеет единственное решение $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, где $t_0 \in I$.

Определение 2.11. *Система* (2.29) *называется устойчивой по Лагранжу, если:* 1) *каждое решение* $y(t, t_0, y_0)$, $t_0 \in I$, *неограниченно продолжаемо вправо, т.е. имеет смысл при* $t \in [t_0, \infty)$; 2) *норма вектора* $\| y(t, t_0, y_0) \|$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$.

Понятно, что если система (2.29) имеет ограниченное, асимптотически устойчивое в целом решение $y(t)$, то эта система устойчива по Лагранжу.

С помощью функций Ляпунова можно сформулировать утверждение о необходимых и достаточных условиях устойчивости системы (2.29) по Лагранжу.

Теорема 2.35. *Для того, чтобы система* (2.29) *была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в* $I \times R^n$ *су-*

ществовала функция $V(t,y)$ *такая, что:* 1) $V(t,y) \geq W(y)$, *где* $W(y) \to \infty$ *при* $\| y \| \to \infty$;

2) *для каждого решения* $y(t,t_0,y_0)$ *функция* $V[\,t,\, y(t,t_0,y_0)\,]$ *была невозрастающей относительно переменной* t.

Заметим, что для случая достаточности условие 2) можно заменить условием: $\dot V(t,y) \leq 0$ в силу системы (2.29).

Модельный пример. Задается скалярное ДУ, решения которого надо исследовать на устойчивость по Лагранжу:

$$\ddot x + p(t)\,\dot x + q(t)\,f(x) = 0, \qquad (*)$$

где $p(t) \in C[\,0,\infty)$, $q(t) \in C^1[\,0,\infty)$, $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$. Покажем, что при выполнении условий: 1) $0 < q(t) \leq M$; 2) $p(t) \geq -\,\dot q(t)/(2q(t))$; 3) $\int_0^{\pm\infty} f(x)\,dx = +\,\infty$ решения $x(t)$, $\dot x(t)$ уравнения $(*)$ ограничены на $[\,0,\infty)$.

С этой целью запишем уравнение $(*)$ в виде нормальной системы Коши

$$\dot x = y, \qquad \dot y = -\,p(t)\,y - q(t)\,f(x). \qquad (**)$$

Возьмем

$$V(t,x,y) = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi + \frac{y^2}{2q(t)}.$$

С учетом неравенства 1) можем написать

$$V(t,x,y) \geq \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi + \frac{y^2}{2M} \equiv W(x,y),$$

где, пользуясь 3), имеем: $W(x,y) \to +\,\infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Представим далее

$$V[\,t,\, x(t),\, y(t)\,] = \int\limits_0^{x(t)} f(\xi)\,d\xi + \frac{y^2(t)}{2\,q(t)}.$$

Дифференцируя это равенство по t и принимая во внимание систему $(**)$ с учетом неравенства 2), получим

$$\dot V(t,x,y) = f[\,x(t)\,]\,y(t) + \frac{y(t)\,\dot y(t)}{q(t)} - \frac{y^2(t)\,\dot q(t)}{2\,q^2(t)} \;=$$

$$=\; f[\,x(t)\,]\,y(t) - \frac{y(t)}{q(t)}\,\{\,p(t)\,y(t) + q(t)\,f[\,x(t)\,]\,\} \;-$$

$$-\;\frac{y^2(t)\,\dot q(t)}{2\,q^2(t)} = -\,\frac{y^2(t)}{q(t)}\left[\,p(t) + \frac{\dot q(t)}{2\,q(t)}\,\right] \leq 0.$$

Итак, заключаем: условия теоремы 2.35 выполнены, а это значит, что решения $x(t)$, $y(t) = \dot x(t)$ ограничены при $t \in [\,0,\infty)$.

Перейдем далее к рассмотрению *систем с конвергенцией.* Зададим систему ДУ вида (2.29): $\dot y = f(t,y)$, где положим $t \in I = \{\,-\infty,+\infty\,\}$.

Определение 2.12. *Говорят, что система* (2.29) *обладает свойством конвергенции, если:*

1) *все решения* $y(t) = y(t,t_0,y_0)$ *определены при* $t \in [\,t_0,\infty)$;

2) $\exists\,!\ \eta(t)$, $t \in I$ *— решение, определенное и ограниченное* $\forall\, t \in I$, *т.е.* $\sup_t \|\,\eta(t)\,\| < \infty$;

3) *решение* $\eta(t)$ *асимптотически устойчиво в целом при* $t \to +\infty$, *т.е. для любого решения* $y(t,t_0,y_0)$ *выполнено предельное равенство*

$$\lim_{t\to\infty}\,\left[\,y(t,t_0,y_0) - \eta(t)\,\right] = 0.$$

Такое решение $\eta(t)$ иногда называют *предельным режимом* системы (2.29). Видно, что система с конвергенцией характеризуется тем, что все ее решения $y(t,t_0,y_0)$ *предельно ограничены* при $t \to +\infty$: $\exists R > 0$ такое число, что $\|\,y(t,t_0,y_0)\,\| < R$ при $t > t_0 + T(t_0,y_0)$.

Добавим к этому, что если у конвергентной системы (2.29) функция $f(t,y)$ — ω–периодична по t, то ограниченное решение $\eta(t)$ также ω–периодично по t. В самом деле, пусть $f(t+\omega,y) = f(t,y)$. Возьмем вектор-функцию $\eta(t+\omega)$. В силу системы (2.29) имеем

$$\dot\eta(t+\omega) = f[\,t+\omega,\, \eta(t+\omega)\,] = f[\,t,\, \eta(t+\omega)\,],$$

т.е. $\eta(t+\omega)$ — также решение системы (2.29), причем ограниченное на I. А так как система с конвергенцией имеет единственное ограниченное на I решение, то отсюда $\eta(t+\omega) = \eta(t)$, что и требовалось показать.

Теорема 2.36. *Пусть имеется система ДУ*

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \tag{2.30}$$

где A — постоянная $(n \times n)$–матрица, $f(t) \in R^n$, $f(t) \in C(I)$, $I = \{-\infty, +\infty\}$. При выполнении условий, что все характеристические числа $\lambda_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные действительные части $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$, и $\sup_t \|\, f(t)\,\| = M < \infty$ на I, система (2.30) *обладает свойством конвергенции, причем вектор-функция*

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{A\,(t-\tau)}\, f(\tau)\, d\tau$$

представляет собой единственное ограниченное на I решение системы (2.30).

Введем в обращение так называемую *симметризованную матрицу Якоби* для системы (2.29):

$$J_s(t,y) = \frac{1}{2}\left[\, f'_y(t,y) + \big(f'_y(t,y)\big)^*\,\right] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} + \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\right),$$

где $*$ сверху — знак транспонирования. Полагаем, что $f(t,y) \in C[\,t\,]$, $C^1[\,y\,]$, $t \in I$, $y \in R^n$.

Теорема 2.37. *Если для системы* (2.29) *выполнены условия: $\sup_t \|\, f(t,0)\,\| = K < \infty$ и наибольший характеристический корень $\Lambda(t,y)$ матрицы $J_s(t,y)$ $\forall\, t, y$ удовлетворяет неравенству $\Lambda(t,y) \le -\alpha < 0$, где α — положительное число, то тогда система* (2.29) *обладает свойством конвергенции.*

Из этой теоремы вытекают некоторые важные следствия.

1. Пусть имеется система ДУ

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = f(t) + g(y), \qquad y \in R^n, \tag{2.31}$$

где $f(t) \in C(I)$, $g(y) \in R^n$, и выполнены условия: 1) $\sup_t \|\, f(t)\,\| < \infty$; 2) наибольший из характеристических корней $\Lambda(y)$ симметризованной матрицы Якоби

$$J_s(y) = \frac{1}{2}\left[\, J(y) + J^*(y)\,\right], \qquad J(y) = g'(y),$$

где $J(y)$ — это матрица Якоби, удовлетворяет неравенству: $\Lambda(y) \le -\alpha < 0$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Тогда система (2.31) обладает свойством конвергенции.

2. Пусть задана система

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = A(t)\, y + f(t), \qquad y \in R^n, \tag{2.32}$$

где $A(t)$, $f(t) \in C(I)$, и выполнены условия: 1) $\sup_t \|\, f(t)\,\| < \infty$; 2) наибольший из характеристических корней $\Lambda(t)$ симметризованной матрицы $A_s(t) = [\, A(t) + A^*(t)\,]/2$ удовлетворяет неравенству: $\Lambda(t) \le -\alpha < 0$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Тогда система (2.32) обладает свойством конвергенции.

Пусть имеется нелинейная система вида (2.29): $\dot y = f(t,y)$, где $f(t,y) \in C[\,I \times R^n\,]$, причем выполнено свойство единственности решений $y(t,t_0,y_0)$.

Определение 2.13. *Система* (2.29) *называется диссипативной, если все ее решения $y(t,t_0,y_0)$ бесконечно продолжаемы вправо и $\exists\, R > 0$ — число такое, что*

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \|\, y(t,t_0,y_0)\,\| < R.$$

Иногда решения диссипативной системы называют *предельно ограниченными*. Определение 2.13 надо понимать в том смысле, что для каждого решения $y(t,t_0,y_0)$ системы (2.29) найдется момент времени $t_* = t_0 + T(t_0,y_0) \ge t_0$, начиная с которого данное решение попадет в фиксированную сферу $\|\, y\,\| < R$, а именно: $\|\, y(t,t_0,y_0)\,\| < R$, где $t \in [\,t_*, \infty)$.

Укажем на то, что конвергентная система также будет диссипативной и за сферу $\|\, y\,\| < R$ можно взять любую сферу, содержащую единственное ограниченное решение $\eta(t)$.

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова $V(t,y) \in C^1[\,t\,],\, C^1[\,y\,]$ в области $\Omega = \{\, I \times D\,\},\, t \in I,\, y \in D \subset R^n$ такую, что:

1) $\exists\, \alpha(r),\, r \geq 0$ — положительная непрерывная возрастающая функция, для которой $V(t,y) \leq \alpha\big(\|\,y\,\|\big)$ при $(t,y) \in \Omega$;

2) $\exists\, \beta(r),\, r \geq 0$ — непрерывная неубывающая функция, для которой $V(t,y) \geq \beta\big(\|\,y\,\|\big)$ при $(t,y) \in \Omega$, где $\beta(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$;

3) $\exists\, \gamma(r),\, r \geq 0$ — положительная непрерывная функция, для которо $\dot V(t,y) \leq -\,\gamma\big(\|\,y\,\|\big)$ при $(t,y) \in \Omega$, где $\dot V(t,y)$ — полная производная по t от $V(t,y)$ в силу системы (2.29).

При выполнении 1), 2) и 3) соответственно говорят, что функция $V(t,y)$ обладает свойством α, β и γ в области Ω.

Теорема 2.38 (Теорема Йосидзавы). *Пусть во внешности некоторого цилиндра $S = \{\, I \times D_\rho\,\}$, где $t \in I,\, y \in D_\rho = \{\,\|\,y\,\| > \rho\,\}$, для системы (2.29) $\exists\, V(t,y)$ — функция Ляпунова: $V(t,y) \in C^1[\,t\,],\, C^1[\,y\,]$ в области S, обладающая свойствами α, β и γ. Тогда система (2.29) равномерно диссипативна относительно начального момента t_0, т.е. можно выбрать число $T(t_0, y_0)$, зависящим только от y_0.*

Пусть имеется система вида (2.29): $\dot y = f(t,y)$, в которой $f(t,y) \in C[\,t\,],\, C^1[\,y\,],\, t \in [\,t_0, \infty),\, \|\,y\,\| < h$. Обозначим $\eta = \eta(t)$ — решение этой системы такое, что $\|\,\eta(t)\,\| \leq h_* < h$. Возьмем $z = y - \eta(t)$. Тогда

$$\dot z = f[\,t,\, \eta(t) + z\,] - f[\,t,\, \eta(t)\,]. \tag{2.33}$$

Применим теорему о среднем. В результате получим

$$\dot z = f'_y\,[\,t,\, \eta(t)\,]\, z + r(t,z), \tag{2.34}$$

где $r(t,z) = o\big(\|\,z\,\|\big)$ при $z \to 0$ равномерно по $t \in [\,t_0,\, t_0 + T\,],\, T > 0$. Линеаризируя систему (2.34), получим

$$\dot x = f'_y\,[\,t,\, \eta(t)\,]\, x. \tag{2.35}$$

Линейная система (2.35) называется *системой уравнений в вариациях* для системы (2.29) относительно ее решения $\eta(t)$ (*система первого приближения*).

Понятно, что если имеется линейная система $\dot y = A(t)\, y + f(t)$, то ее система уравнений в вариациях совпадает с соответствующей однородной системой $\dot x = A(t)\, x$.

Если система (2.29) автономна: $\dot y = f(y)$ и $\eta = \eta(t)$ ее решение, то тогда $x = \dot\eta(t)$ является решением ее системы уравнений в вариациях.

Положим в системе (2.29) вектор-функцию $f(t,y)$ ω–периодичес-кой по t; пусть решение $\eta(t)$ также ω–периодично. Тогда система уравнений в вариациях (2.35) представляет собой систему с периодическими коэффициентами.

Теорема 2.39 (Теорема Ляпунова). *Если все х.п. λ_j системы уравнений в вариациях для данного периодического решения $\eta(t)$ имеют отрицательные вещественные части, то это периодическое решение асимптотически устойчиво при $t \to \infty$.*

Зададим далее автономную систему

$$\dot y = \frac{dy}{dt} = f(y), \tag{2.36}$$

где $f(y) \in C^1[\,y\,],\ \|\,y\,\| < h$.

Определение 2.14. *Пусть $y = y(t),\, t \in (a,b)$, является решением системы (2.36). Тогда совокупность точек $L = \{\, y(t),\, t \in (a,b)\,\}$ фазового пространства R^n, где $y \in R^n$, называется траекторией решения.*

Видно, что траектория L — это проекция интегральной кривой $y = y(t)$ пространства $I \times R^n$ в пространство R^n, где время $t \in I$ играет роль параметра. Автономная система (2.36) наряду с решением $y = y(t)$ допускает в качестве решений и $y(t + c),\, c \in R$ — семейство решений с той же самой траекторией L. Величину $\rho(z, L) = \inf_{y \in L}\ \|\,z - y\,\|$ будем рассматривать в качестве расстояния от точки $z \in R^n$ до множества $L \subset R^n$.

Определение 2.15. *Решение $\eta = \eta(t),\, t \in [\,t_0, \infty)$ системы (2.36) называется орбитально устойчивым при $t \to \infty$, если траектории L всех решений $y = y(t),\, t \in [\,t_0, \infty)$, достаточно близких в начальный момент времени t_0 к решению $\eta(t)$, в дальнейшем целиком содержатся в ε–окрестности траектории L_0 данного решения $\eta = \eta(t)$, т.е. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что если $\|\,y(t_0) - \eta(t_0)\,\| < \delta$, то $\rho\big(y(t),\, L_0\big) < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.*

Здесь $L = \{\, y(t);\ t \in [\, t_0, \infty)\,\}$, $L_0 = \{\, \eta(t);\ t \in [\, t_0, \infty)\,\}$. Заметим также, что поскольку орбитальная устойчивость решения $\eta(t)$ не зависит от выбора начального момента t_0, то она эквивалентна орбитальной устойчивости траектории.

Определение 2.16. *Орбитально устойчивое решение* $\eta(t)$ *называется асимптотически орбитально устойчивым, если* $\exists\, \Delta_0 > 0$ *такое, что* $\forall\, y(t)$ *— решений, удовлетворяющих неравенству* $\|\, y(t_0) - \eta(t_0)\,\| < \Delta_0$, *выполнено предельное соотношение:* $\rho\big(y(t), L_0\big) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Отметим еще в качестве замечаний: 1) если L_0 — замкнутая орбитально устойчивая траектория, то достаточно близкие к ней при $t = t_0$ траектории L "навиваются"на нее при $t \to \infty$; 2) из устойчивости решения следует его орбитальная устойчивость. Однако обратное, вообще говоря, места не имеет.

Приведем еще несколько утверждений. 1. Если автономная система (2.36) имеет нетривиальное ω–периодическое решение $\eta(t)$, то для соответствующей системы уравнений в вариациях

$$\dot{x} = f'_y\big(\eta(t)\big)\, x, \tag{2.37}$$

представляющей собой линейную периодическую систему, по меньшей мере один из ее мультипликаторов $\rho = 1$, т.е. по крайней мере один из х.п. системы (2.37) является нулевым.

2. Орбитально устойчивое решение $\eta(t)$ с асимптотической фазой асимптотически орбитально устойчиво. Здесь под *асимптотической фазой* решения $\eta(t)$ понимается число $c = c(y)$ такое, что $\|\, y(t+c) - \eta(t)\,\| \to 0$ при $t \to \infty$ для каждого решения $y(t)$, удовлетворяющего начальному неравенству $\|\, y(t_0) - \eta(t_0)\,\| < \Delta_0$ с достаточно малым $\Delta_0 > 0$.

Пусть имеется автономная система (2.36), где $f(y) \in C^1[\, y\,]$, причем $\|\, y\,\| < h$ и $\eta = \eta(t)$ — ω–периодическое ее решение такое, что $\|\, \eta(t)\,\| \le h_* < h$. Соответствующая система уравнений в вариациях имеет вид (2.37).

Теорема 2.40 (Теорема Андронова–Витта). *Пусть* ω*–перио-дическое решение* $\eta(t)$ *автономной системы* (2.36) *не сводится к тождественной постоянной* $(\dot{\eta}(t) \not\equiv 0)$, *причем система* (2.37) *для этого решения имеет один простой нулевой х.п., а все остальные х.п. обладают отрицательными действительными частями. Тогда решение* $\eta(t)$ *устойчиво по Ляпунову при* $t \to \infty$.

Эту теорему можно преобразовать для установления достаточных условий орбитальной устойчивости периодического решения автономной системы.

Теорема 2.41. *Пусть автономная система* (2.36) *допускает* ω*–периодическое решение* $\eta(t)$ *такое, что* $\dot{\eta}(t) \not\equiv 0$, *причем система уравнений в вариациях* (2.37) *для этого решения имеет один простой нулевой х.п., а все остальные имеют отрицательные действительные части. Тогда периодическое решение* $\eta(t)$ *асимптотически орбитально устойчиво при* $t \to \infty$.

Кроме того, для каждого близкого к $\eta(t)$ *решения* $y(t)$ *существует асимптотическая фаза, т.е. если для достаточно малой* $\Delta > 0$ *выполнено неравенство* $\|\, y(t_1) - \eta(t_0)\,\| < \Delta$ *для некоторых* t_0 *и* t_1, *то тогда* $\exists\, c = c(y) = \text{const}$ *такая, что будет иметь место предельное соотношение:* $\lim_{t\to\infty} [\, y(t+c) - \eta(t)\,] = 0$.

Глава 3

Устойчивость систем автоматического управления

Системы автоматического управления (регулирования) (САУ, СУ) представляют собой совокупную систему, состоящую из самого объекта управления (ОУ) и управляющего устройства (управления, регулятора). Управление предназначено для того, чтобы поддерживать в ОУ некоторый заданный режим функционирования. Более того, все возможные отклонения движения ОУ от этого режима, возникающие в СУ, должны быть с течением времени сведены в окрестность нуля, т.е. в практическом плане СУ должна быть асимптотически устойчива.

При исследовании устойчивости САУ применяются различные аналитические методы, основанные в большинстве случаев на теоремах Ляпунова об устойчивости движения (см., например, работы [1-3, 16, 23-27, 29, 31, 32, 34, 39, 49, 51, 52, 56, 72, 74-76, 79, 80-83, 91, 94, 95, 98, 100, 102, 111, 112, 114-118, 121, 124, 125, 129, 130, 131, 133, 135, 137-139, 149, 151-154, 157, 160, 167]).

Большой объем результатов и их разнообразие, очевидно, делают невозможным полное их изложение в пределах этой главы. Тем не менее, за основу изложения взят применявшийся и ранее принцип сжатого ознакомления с результатами анализа устойчивости САУ применительно к некоторым общим направлениям. Это касается вопросов обеспечения абсолютной устойчивости, стабилизации, устойчивости и оптимизации и ряда других известных задач устойчивости.

Отметим, что теорию стабилизации и, в частности, оптимальной стабилизации управляемых движений можно рассматривать как дальнейшее развитие задач устойчивости. В этом видится тесная связь проблем стабилизации с классическими проблемами устойчивости и значение этой связи для последующих исследований в этих областях.

§ 3.1 посвящен рассмотрению вопросов абсолютной устойчивости, т.е. "устойчивости в целом"управляемых динамических систем. Даются основные понятия и определения: устойчивости системы в малом, асимптотической устойчивости в малом, в целом, абсолютно устойчивой системы и др. Изучаются различные критерии абсолютной устойчивости: квадратичный, круговой, критерий Попова, которые сопровождаются соответствующими формулировками теорем.

В § 3.2 исследуется задача стабилизации управляемых движений, задаваемых линейными ДУ. Вводятся понятия управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости. Рассматривается критерий Найквиста стационарной стабилизации. Анализируется решение задачи стабилизации на основе использования уравнения Лурье–Риккати.

В § 3.3 изучается задача об оптимальной стабилизации, когда система управления выбирается из расчета обеспечения целевых стабилизационных условий по состоянию и минимизации по множеству допустимых управлений некоторого функционала качества. Отмечается тесная связь методов оптимального управления (метода динамического программирования) с прямым методом Ляпунова устойчивости движения. Формулируется основная теорема об оптимальной стабилизации и дается схема ее доказательства с помощью введения оптимальной функции Ляпунова. Обговаривается связь этой теоремы с вариационным исчислением (уравнение Гамильтона–Якоби) и с принципом максимума Понтрягина.

Завершается глава 3 параграфом о синтезе стабилизирующих адаптивных управлений (§ 3.4). И в случае адаптивного объекта управления, когда в системе некоторые параметры неизвестны, формирование стабилизирующих управляющих воздействий целесообразно осуществлять путем использования функций Ляпунова. Эта фундаментальная идея синтеза продемонстрирована на примере линейного объекта управления с действующими на него ограниченными возмущениями.

3.1 Абсолютная устойчивость

Устойчивость в целом, т.е. при любых начальных возмущениях и любой нелинейности (двигателя, исполнительного механизма, сервомотора), которая подчинена некоторым условиям, получила название *абсолютной устойчивости.* Более точно [89], абсолютная устойчивость — это устойчивость в целом тривиального решения нелинейной системы ДУ, равномерная для всех систем некоторого класса M. Будем придерживаться изложения и стиля работ [89, 94, 130].

3.1.1. Основные понятия и определения. Рассмотрим систему, описываемую векторным уравнением

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,\xi(t) \tag{3.1}$$

и некоторым множеством M пар функций $(x(\cdot),\, \xi(\cdot))$, где A, B — постоянные комплексные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times k$ соответственно, $x(t)$ и $\xi(t)$ — векторные комплекснозначные функции размерности $n \times 1$ и $k \times 1$ соответственно, причем $\xi(t)$ локально суммируема, а $x(t)$ абсолютно непрерывна.

Часто в прикладных исследованиях A, B, $x(t)$, $\xi(t)$ принимают вещественные значения, уравнение (3.1) описывает при этом линейную часть системы, множество M определяется свойствами нелинейных блоков системы. В простейшем случае задается один фиксированный нелинейный блок, описываемый уравнением

$$\xi(t) = \varphi[\,\sigma(t),\, t\,], \qquad \sigma(t) = C\,x(t), \tag{3.2}$$

где $\sigma(t)$, $\xi(t)$ — скалярные функции, C — $(1 \times n)$–вектор-строка; $\sigma(t)$, $\xi(t)$, C — вещественны. Тогда класс M — это множество всех пар $(x(\cdot),\, \xi(\cdot))$, для которых выполняются соотношения (3.2).

Уравнения линейной системы в пространстве состояний записываются в виде (3.1). Уравнения нелинейной части системы (3.1) бывают разнообразны — они связывают $\xi(t)$ и $\sigma(t)$. Здесь $\xi(t) = u(t)$ — векторный вход линейной части (выход нелинейной части), $\sigma(t)$ — векторный выход линейной части (вход нелинейной части). Отметим, что уравнения (3.1), (3.2) описывают произвольную систему нелинейных ДУ. Выделение же линейной части позволяет более глубоко учесть конкретные свойства системы.

Устойчивость системы (3.1), (3.2) *в малом* (в частности, по Ляпунову) означает малость решения $x(t)$ при условии малости $|\,x(0)\,|$, $t_0 = 0$. Для устойчивости по Ляпунову должна быть малой величина $\sup_{t\ge 0}\,|\,x(t)\,|$. *Асимптотическая устойчивость в малом* означает, что для рассматриваемых малых значений $|\,x(0)\,|$ выполняется предельное соотношение: $|\,x(0)\,| \to 0$ при $t \to \infty$ $(*)$. *Асимптотическая устойчивость в целом* означает устойчивость в малом и, помимо этого, выполнение соотношения $(*)$ для любого решения $x(t)$.

Когда говорят об абсолютной устойчивости, то имеют в виду наличие некоторого класса $M = \{\,\varphi\,\}$ нелинейных блоков в (3.2). Система (3.1) называется *абсолютно устойчивой в классе M нелинейных блоков*, если любая система (3.1), (3.2) с $\varphi \in M$ устойчива в целом и притом эта устойчивость равномерна $\forall\,\varphi \in M$.

Итак, абсолютная устойчивость означает асимптотическую устойчивость в целом (т.е. относительно всего пространства состояний), а не в малом. Другими словами, при любых отклонениях начальных данных от расчетных разность отклонения истинного процесса от расчетного стремится к нулю при $t \to \infty$. Если $x(t)$ — вектор состояния системы (3.1), записанный в отклонениях от невозмущенного состояния, то для абсолютной устойчивости надо потребовать выполнения соотношения $(*)$. Абсолютная устойчивость означает также, что соотношение $(*)$ имеет место для всех нелинейностей φ из заданного класса M.

Обычно еще требуется, чтобы условие $(*)$ было выполнено равномерно относительно $\varphi \in M$. К примеру, вместо $(*)$ требуют выполнения условия: $|\,x(t)\,| \le c\,\exp\left(-\varepsilon t\right) |\,x(0)\,|$, $t_0 = 0$, $t \ge 0$ $(**)$, где числа $c > 0$, $\varepsilon > 0$ — одни и те же $\forall\,\varphi \in M$. Это и означает равномерность данного условия. При выполнении $(**)$ говорят об *экспоненциальной абсолютной устойчивости.*

Наряду с абсолютно устойчивыми рассматриваются и *абсолютно неустойчивые системы* в заданном классе нелинейностей $M = \{\,\varphi\,\}$. Абсолютно неустойчивая система имеет два свойства. Во-первых, в пространстве состояний $\forall\, r > 0$ на сфере $|\,x\,| = r = \mathrm{const}$ $\exists\, x_*$ и шар $|\,x - x_*\,| \le \delta$ с центром в точке x_* такие, что для любого начального состояния из этого шара, т.е. при

$|\, x(0) - x_* \,| < \delta$, $t_0 = 0$, для соответствующего состояния $x(t)$ системы выполнено: $|\, x(t)\, | \to +\infty$ при $t \to \infty$ $(*)$. Во-вторых, соотношение $(*)$ должно выполняться равномерно $\forall\, \varphi \in M$.

Если вместо $(*)$ имеет место неравенство: $|\, x(t)\, | > c \exp(\varepsilon t)\, |\, x(0)\, |$ $(**)$, где числа $c > 0, \varepsilon > 0$ — одни и те же $\forall\, \varphi \in M$, то говорят об *экспоненциальной абсолютной неустойчивости.*

При рассмотрении нелинейных зависимостей приоритет отдают квадратичным соотношениям, связывающим $\xi(t)$ и $x(t)$, как наиболее приближенным к практике. Например, пусть относительно функций $\varphi(\sigma, t)$ в соотношении (3.2) известно лишь, что $\forall\, t \geq 0$, $\sigma \neq 0$:

$$\mu_1 \leq \frac{\varphi(\sigma,t)}{\sigma} \leq \mu_2. \tag{3.3}$$

В этом случае $M = M[\, \mu_1, \mu_2\,]$ есть множество $x(t)$ и $\xi(t)$, для которых $\mu_1 \leq \xi(t)/\sigma(t) \leq \mu_2$, где $\sigma(t) = C\, x(t)$, или, иначе

$$\big[\, \mu_2\, \sigma(t) - \xi(t)\, \big]\big[\, \xi(t) - \mu_1\, \sigma(t)\, \big] \geq 0. \tag{3.4}$$

Видим, что в (3.3) нелинейность $\varphi(\sigma, t)$ находится между прямыми $\varphi = \mu_1 \sigma$ и $\varphi = \mu_2 \sigma$ в угловом секторе на плоскости $\{\, \sigma, \varphi\, \}$, включая эти прямые.

Будем считать, что система (3.1) *управляема*, т.е. ранг $(n \times nk)$–матрицы $(B\, |\, AB\, |\, ...\, |\, A^{n-1}B)$ равен n, и $\det\,(A - i\omega E) \neq 0$ для всех вещественных ω, где E — единичная $(n \times n)$–матрица, $i^2 = -1$. Функция $W(p) = C\,(A - pE)^{-1}B$ является *передаточной функцией* линейной части системы (3.1) от входа ξ к выходу $(-\sigma)$, где p — переменная преобразования Лапласа.

Пусть $k \geq 1$. Обозначим через $F(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ — *эрмитову форму* на $C^n \times C^k$. Напомним, эрмитовой формой $F(\tilde{\zeta})$, $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_j)$, $j = \overline{1, l}$, называется выражение вида

$$F(\tilde{\zeta}) = \mathrm{Re}\, \left(\sum_{j,h=1}^{l} \alpha_{jh}\, \tilde{\zeta}_j \tilde{\zeta}_h^* \right),$$

где $\tilde{\zeta}$ — комплексная векторная переменная, α_{jh} — комплексные числа, $*$ сверху означает комплексное сопряжение. В вещественном случае имеем вещественную квадратичную форму. Знак $\tilde{}$ сверху над буквой означает, что переменная принимает комплексные значения.

Рассмотрим класс M_{1L} пар действительных функций $\big(x(t),\, \xi(t)\big)$, удовлетворяющих *локальной связи*:

$$F\big[\, x(t),\, \xi(t)\, \big] \geq 0 \tag{3.5}$$

(соответственно — класс M_{2L} пар комплексных функций $\big(\tilde{x}(t),\, \tilde{\xi}(t)\big)$ в соотношении (3.5)).

Кроме того, введем еще класс $M_{1I}(\gamma)$ пар действительных функций $\big(x(t),\, \xi(t)\big)$, удовлетворяющих *интегральной связи*, а именно: $\exists$ числа $t_k \to \infty$ такие, что

$$\int\limits_0^{t_k} F\big[\, x(t),\, \xi(t)\, \big]\, dt \geq -\, \gamma, \tag{3.6}$$

где числа t_k зависят от $\big(x(\cdot),\, \xi(\cdot)\big)$, $\gamma > 0$ (соответственно имеем класс $M_{2I}(\gamma)$ пар комплексных функций $\big(\tilde{x}(t),\, \tilde{\xi}(t)\big)$ в соотношении (3.6)).

Пусть система (3.1) управляема и выполнено следующее условие *минимальной устойчивости*: существует такая $(k \times n)$–матрица R, что $A + BR$ — это *матрица Гурвица* и $F(x, Rx) \geq 0\ \forall\, x$, где F — форма в соотношениях (3.5) или (3.6).

Введем некоторые произвольные матрицы D, H соответствующих размерностей $m \times n$ и $m \times k$, полагая, что $\|\, D\, \| + \|\, H\, \| \neq 0$. Сформируем по этим матрицам следующий выход системы (3.1):

$$\eta(t) = D\, x(t) + H\, \xi(t). \tag{3.7}$$

Когда все величины в соотношениях (3.1), (3.7), а также коэффициенты формы $F(x, \xi)$ действительны, имеем действительный случай; если эти величины комплексны, имеем комплексный случай. Множество всех действительных пар $\big(x(\cdot),\, \xi(\cdot)\big)$, удовлетворяющих соотношениям (3.5) (или (3.6)), обозначено через M_{1L} (или $M_{1I}(\gamma)$); в комплексном случае — это множество M_{2L} (или $M_{2I}(\gamma)$).

Пусть $\|\, \eta(\cdot)\, \|^2 = \int_0^\infty |\, \eta(t)\, |^2\, dt$. Систему (3.1) называют *абсолютно устойчивой по выходу* (3.7) в классе M, если $\exists\, c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ — такие постоянные, что из соотношений (3.1), (3.7) и $\big(x(\cdot),\, \xi(\cdot)\big) \in$

M следует конечность $\| \eta(\cdot) \|$ и оценка

$$\| \eta(\cdot) \|^2 \le c_1 \, | \, x(0) \, |^2 + c_2, \tag{3.8}$$

где M — одно из четырех указанных выше множеств или какое-либо из их подмножеств.

3.1.2. Квадратичный критерий. *Квадратичный критерий абсолютной устойчивости* разобьем на три утверждения: для интегральной связи, для локальной связи и по выходу [89, 94, 130]. Введем при этом следующее условие $(*)$: матрица A в уравнении (3.1) не имеет собственных значений на мнимой оси, или, иначе, матрица-функция $W(p)$ не имеет полюсов на мнимой оси.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* $(*)$ *и система* (3.1) *минимально устойчива в классе функций* M, *удовлетворяющих соответствующей интегральной связи* (3.6) *с формой* F. *Для абсолютной устойчивости системы* (3.1) *в указанном классе функций как в вещественном, так и в комплексном случаях необходимо и достаточно, чтобы форма* $F(i\omega, \tilde{\xi})$ *была отрицательно определенной, т.е.*

$$F(i\omega, \tilde{\xi}) < 0, \qquad \forall\, \omega \in [\,-\infty, \infty], \quad \forall\, \tilde{\xi} \ne 0. \tag{3.9}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* $(*)$ *и система* (3.1) *минимально устойчива в классе функций* M, *удовлетворяющих соответствующей локальной связи* (3.5) *с формой* F. *Для абсолютной устойчивости системы* (3.1) *в указанном классе функций как в вещественном, так и в комплексном случаях достаточно, чтобы было выполнено неравенство* (3.9). *При выполнении* (3.9) *абсолютная устойчивость экспоненциальна:* $\exists\, c > 0$, $\varepsilon > 0$ *— постоянные, зависящие лишь от коэффициентов системы* (3.9) *и формы* F, *такие, что* $\forall\, t \ge t_0$, $\forall\, x(t)$ *— решения системы* (3.1), *в которой* $x(t)$ *и* $\xi(t)$ *удовлетворяют соотношению* (3.5), *выполнено неравенство*

$$| \, x(t) \, | \le c\, e^{-\varepsilon\,(t - t_0)} \; | \, x(t_0) \, |. \tag{3.10}$$

В комплексном случае, когда матрица формы $F(i\infty, \tilde{\xi})$ *невырождена, условие* (3.9) *является также и необходимым для абсолютной устойчивости в классе* M.

Замечание. Условие (3.9) называют *частотным условием.* Отметим, что в теореме 3.2 не содержится необходимости частотного условия для локальной связи в вещественном случае, поскольку такое утверждение было бы неверным.

Теорема 3.3. *Для абсолютной устойчивости системы* (3.1) *по выходу* (3.7) *вклассе* $M_{2I}(\gamma)$ (*в действительном случае — в классе* $M_{1I}(\gamma)$) *необходимо и достаточно, чтобы* $\exists\, \delta > 0$ *— такое число, для которого*

$$F(\tilde{x}, \, \tilde{\xi}) \le -\,\delta \, | \, \tilde{\eta} \, |^2 \tag{3.11}$$

$\forall\, \tilde{x}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ *— комплексных и* $\forall\, \omega$ *— действительных величин, связанных соотношениями*

$$i\omega\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{\xi}, \qquad \tilde{\eta} = D\tilde{x} + H\tilde{\xi}. \tag{3.12}$$

При выполнении соотношений (3.11), (3.12) *в неравенстве* (3.8) $c_2 = c_2'\gamma$, *причем числа* c_1, c_2' *не зависят от* γ *в выражении* (3.6). *Если* $\eta(t) = x(t)$ *и выполнено неравенство* (3.5), *а также* (3.11) (*для* $\tilde{\eta} = \tilde{x}$), *то имеет место экспоненциальная устойчивость в целом:* $\exists\, c > 0$, $\varepsilon > 0$, *для которых выполнено неравенство* (3.10) $\forall\, x, \, t \ge t_0$.

Пусть $\det\,(A - i\omega E) \ne 0 \;\forall\, \omega$. *Для абсолютной устойчивости системы* (3.1) *по выходу* $\eta(t) = \big(x(t), \xi(t)\big)$ *в классе* M_{2L} *необходимо и достаточно* (*достаточно лишь в классе* M_{1L}), *чтобы* $\forall\, \omega \in [\,-\infty, \infty]$, $\forall\, \tilde{\xi} \ne 0$ *было выполнено неравенство*

$$F\big[\,(A - i\omega E)^{-1} B\tilde{\xi}, \, \tilde{\xi}\,\big] < 0. \tag{3.13}$$

3.1.3. Круговой критерий. Следствием квадратичного критерия для локальной связи (теорема 3.2) является *круговой критерий.* Поясним его суть.

Воспользуемся соотношениями (3.12), из которых получим

$$\tilde{\eta} = W^{(\eta)}(i\omega)\tilde{\xi}, \qquad W^{(\eta)}(i\omega) = H + D\,(i\omega E - A)^{-1} B,$$

где элемент $W_{jk}^{(\eta)}$ матрицы $W^{(\eta)}(i\omega)$ называется *частотной характеристикой* от входа ξ_k к выходу η_j. Критерии, выражающие свойства системы с помощью частотных характеристик, называются *частотными критериями устойчивости*. Главное их достоинство заключается в удобстве практического использования и в инвариантности по отношению к преобразованиям системы (3.1) вида: $x' = Tx$, где T — постоянная неособая матрица.

Пусть имеется действительный случай с $k = 1$ для класса $M[\,\mu_1, \mu_2\,]$, который определяется соотношением (3.4). Тогда условие (3.13) запишется следующим образом:

$$\operatorname{Re}\,\{\,[\,\mu_2\,\overline{W(i\omega)} - 1\,]\,[\,1 - \mu_1\,W(i\omega)\,]\,\} > 0, \tag{3.14}$$

где $W(i\omega) = C\,(A - i\omega E)^{-1}B$ — частотная характеристика от входа $\xi(t)$ к выходу $[\,-\sigma(t)\,]$.

Представленный частотный критерий (3.14), рассматриваемый как круговой критерий, означает, что частотная характеристика $W(i\omega)$, $\omega \in [-\infty, \infty]$, не пересекается с окружностью, центр которой находится в точке $(-1/\mu_1 - 1/\mu_2)/2$, и проходящей через точки $(-1/\mu_1)$, $(-1/\mu_2)$. В данном случае условие минимальной устойчивости означает, что асимптотически устойчива линейная система (3.1), где $\xi = \mu\sigma$, $\sigma = Cx$, $\mu \in [\,\mu_1, \mu_2\,]$. Критерий (3.14) служит естественным обобщением критерия Михайлова–Найквиста на нелинейные системы.

Приступим к формальным записям. Пусть имеется система (3.1), (3.2) с одной нелинейностью. Предположим, что имеет место вещественный случай, а именно, все величины в уравнениях (3.1), (3.2) вещественны. Тогда дробно-рациональная функция $W(p)$ имеет вещественные коэффициенты.

Далее рассмотрим замкнутую линейную стационарную систему, получаемую из системы (3.1), (3.2) заменой нелинейного блока линейным блоком с уравнением

$$\xi = \mu\sigma, \tag{3.15}$$

где μ — вещественное число. Будем считать, что $W(i\omega) \neq 0$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, что означает: если линейная часть системы описывается уравнением (3.1), то матрица A не имеет чисто мнимых собственных чисел.

Пусть число k_p — это степень неустойчивости разомкнутой системы, точнее — это число полюсов функции $W(\lambda)$, или собственных чисел матрицы A, расположенных в правой полуплоскости с учетом их кратности. Предположим, что точка $(-1/\mu)$ не лежит на годографе $W(i\omega)$. Пусть k_0 — число оборотов годографа $W(i\omega)$ при возрастании ω от $-\infty$ до $+\infty$ вокруг точки $(-1/\mu)$. Согласно критерию Михайлова–Найквиста замкнутая система (3.1), (3.15) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $k_0 = k_p$.

Затем рассмотрим нелинейную систему (3.1), (3.2), где относительно нелинейности предположим, что вход $\sigma(t)$ и выход $\xi(t)$ нелинейного блока вещественны и при $\sigma(t) \neq 0$ находятся $\forall\, t$ на плоскости $\{\,\sigma, \xi\,\}$ в некотором секторе $\alpha \le \xi/\sigma \le \beta$. Класс нелинейных блоков, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $M_{\alpha\beta}$. Пусть $C[\,\alpha, \beta\,]$ — область на комплексной плоскости $\{\,z\,\}$, задаваемая неравенством

$$\operatorname{Re}\,\big[\,(1 + \alpha z)(1 + \beta z)^*\,\big] \le 0, \tag{3.16}$$

где $\alpha \neq -\infty$, $\beta \neq +\infty$. Границу области $C[\,\alpha, \beta\,]$ обозначим через $B[\,\alpha, \beta\,]$ (надо в (3.16) вместо знака $\le$ взять знак $=$).

Круговой критерий утверждает, что если годограф $W(i\omega)$ не пересекает не только отрезок $[\,-1/\alpha, -1/\beta\,]$, но и окружность $B[\,\alpha, \beta\,]$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$, или вертикальную прямую $B[\,\alpha, \beta\,]$ $(\alpha = 0$ или $\beta = 0)$, то устойчивость имеет место и для всех нелинейных систем (3.1), (3.2) с нелинейностями из класса $M_{\alpha\beta}$, о чем и говорит следующая теорема (круговой критерий для случая $\alpha \neq -\infty$, $\beta \neq +\infty$).

Теорема 3.4. *Пусть выполнены предположения:* 1) *функция* $W(p)$ *не имеет полюсов на мнимой оси;* 2) *справедливо неравенство* (3.16), *т.е. все линейные системы* (3.1), (3.15), *где* $\mu[\alpha, \beta]$, *асимптотически устойчивы;* 3) *годограф* $W(i\omega)$, $\omega \in [\,-\infty, \infty\,]$, *не имеет общих точек с окружностью (или прямой)* $B[\,\alpha, \beta\,]$. *Тогда нелинейная система* (3.1), (3.2) *абсолютно экспоненциально устойчива в классе* $M_{\alpha\beta}$ *нелинейностей, удовлетворяющих условию* $\alpha \le \xi/\sigma \le \beta$, *или равносильному соотношению*

$$(\beta - \sigma - \xi)(\xi - \alpha\sigma) \ge 0,$$

т.е. для любого решения системы (3.1), (3.2) *и* $\forall\, t \ge t_0$ *выполнено неравенство*

$$|\,x(t)\,| \le c\,e^{-\varepsilon\,(t - t_0)}\,|\,x(t_0)\,|,$$

где числа $c > 0$, $\varepsilon > 0$ одинаковы $\forall\,\varphi \in M_{\alpha\beta}$ и $\|\,\xi\,\| < \infty$.

Отметим, что условия 2) и 3) в формулировке теоремы 3.4 можно заменить на следующие: 2′) система (3.1), (3.15) асимптотически устойчива, где $\mu \in [\,\alpha, \beta\,]$; 3′) годограф $W(i\omega)$, $\omega \in [\,-\infty, \infty\,]$, не имеет общих точек с областью $C[\,\alpha, \beta\,]$.

3.1.4. Критерий Попова. *Частотный критерий Попова* абсолютной устойчивости для нелинейных систем с $k = 1$ и класса M стационарных нелинейностей $\xi(t) = \varphi[\,\sigma(t)\,]$, где $0 \le \varphi(\sigma)/\sigma \le \mu_0$, имеет вид: $\exists\,\theta$ — число такое, что

$$\frac{1}{\mu_0} + \operatorname{Re} W(i\omega) + \theta \operatorname{Re}[\,i\omega\, W(i\omega)\,] > 0, \tag{3.17}$$

где $\omega \in [\,0, \infty\,]$. Укажем на то, что условие минимальной устойчивости в этом случае означает, что матрица A в уравнении (3.1) — это матрица Гурвица. Подытожим сказанное в следующем утверждении (частотный критерий В.М. Попова).

Теорема 3.5. *Будем считать, что в системе* (3.1) *матрица A — гурвицева, т.е. все полюсы функции $W(p)$ расположены в левой полуплоскости. Предположим также, что для некоторого вещественного θ* (*параметр Попова*) *и $\forall\,\omega \in [\,0, \infty\,]$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\mu_0} + \operatorname{Re}[\,(1 + i\omega\theta)\, W(i\omega)\,] > 0.$$

Тогда система (3.1) *абсолютно устойчива в классе M нелинейностей* (3.2), *причем число γ в соотношении* (3.6) *определяется формулой: $\gamma = \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma$.*

Отметим, что график функции $\xi = \varphi(\sigma)$ в рассматриваемом случае расположен на плоскости в секторе $\xi = \mu\sigma$, $0 \le \mu \le \mu_0$.

Модельный пример. Рассмотрим систему с уравнениями

$$\ddot\sigma + 2\alpha\dot\sigma + \sigma = \eta, \qquad \dot\eta + \beta\eta = \varphi(\sigma), \tag{$*$}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \le \sigma\,\varphi(\sigma) \le \mu_0\sigma^2$. Условие устойчивости линейной части, получаемой из (3.1) заменой $\varphi(\sigma)$ на 0, очевидно, выполнено. Положим $\xi = \varphi(\sigma)$ и заменим d/dt на p, σ на $\tilde\sigma$, ξ на $\tilde\xi$. Тогда, выражая из $(*)$ $\tilde\sigma$ через $\tilde\xi$, получим $\tilde\sigma = -W(p)\,\tilde\xi$ с передаточной

функцией

$$W(p) = \frac{-1}{(p + \beta)(p^2 + 2\alpha p + 1)}. \tag{$**$}$$

Используя формулу $(**)$ для $W(p)$, найдем, что в критерии Попова:

$$\pi(\omega) = \frac{1}{\mu_0} - \operatorname{Re}\,\frac{(1 + i\omega\theta)}{(\beta + i\omega)(1 + 2\alpha i\omega - \omega^2)}.$$

Имеем: $\pi(0) = 1/\mu_0 - 1/\beta > 0$. Поэтому $\mu_0 < \beta$ и $\exists\,\theta:\ \pi(\omega) > 0$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом, при $\mu_0 < \beta$ система $(*)$ устойчива в целом. Устойчивость абсолютна в классе M стационарных нелинейностей $\xi = \varphi(\sigma)$ таких, что $\mu_0\sigma^2 \ge \sigma\,\varphi(\sigma) \ge 0$. Поскольку линейная система $(*)$ с $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ не является асимптотически устойчивой при $\mu \ge \beta$, то условие $\mu_0 < \beta$ является не только достаточным, но и необходимым для абсолютной устойчивости в указанном классе функций.

Важно отметить также, что между частотными критериями и фактом существования глобальной функции Ляпунова имеется определенная связь. Эти критерии могут быть получены с помощью функций Ляпунова из некоторых многопараметрических классов функций. К примеру, круговой критерий (3.14) представляет необходимое и достаточное условие существования функции $V(x) = x^* G x$, где $G = G^* = \mathrm{const}$ — $(n \times n)$–матрица, $*$ — знак эрмитова сопряжения, такой, что $\dot V$ в силу системы (3.2), (3.11) с произвольной нелинейностью (3.2), для которой $\mu_1 \le \varphi(\sigma, t)/\sigma \le \mu_2$, удовлетворяет условию: $dV(x)/dt < 0$, $x \ne 0$. Аналогично, частотное условие Попова (3.17) включает все критерии, которые можно установить с помощью функции Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности":

$$V(x) = x^* G x + \theta \int\limits_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma. \tag{3.18}$$

Функция Ляпунова вида (3.18) была предложена А.И. Лурье [82] и зависит от n параметров. Для этих параметров составляются n квадратных уравнений, так называемых *разрешающих уравнений Лурье.* Из работ [151, 153, 157] следует, что условия разрешимости этих уравнений совпадают с критерием Попова. Тем самым функция $V(x)$ (3.18) в этом смысле имеет признаки "оптимальной а именно: соответствующие критерии нельзя улучшить, прибегая к использованию различных функций вида (3.18) [29].

3.2 Стабилизация управляемых движений

В этот параграф вошли известные результаты по решению задач стабилизации линейных управляемых систем, составляющих основу современной теории управления. Вопросы обеспечения стабилизации и устойчивости динамических систем тесно друг с другом связаны и этим вопросам (в том числе и в рамках метода функций Ляпунова) посвящена обширная литература. Тем не менее, при написании § 3.2 использовался материал работ [76, 79], его краткое, справочное изложение. В этих же работах можно найти и доказательство всех упомянутых здесь утверждений.

3.2.1. Управляемость и наблюдаемость. Зададим объект управления (ОУ) системой линейных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad y = c^* x, \tag{3.19}$$

где A, b, c — вещественные постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ соответственно; $x = x(t)$, $u = u(t)$, $y = y(t)$ — вектор-функции времени $t \in [\,t_0, T\,]$ размерностей n, m и l из R^n, R^m и R^l соответственно. Эти векторы носят названия: $x(t)$ — состояние системы, $u(t)$ — вход (или управление), $y(t)$ — выход системы в момент времени t. Операция $*$ в вещественном случае означает транспонирование, а в комплексном — эрмитово сопряжение.

Основная задача управления состоит в выборе такой функции $u(t)$, при которой ОУ переводится из одного состояния в фазовом пространстве в другое в течение заданного времени.

Определение 3.1. *Система* (3.19) *называется полностью управляемой (или вполне управляемой), если* $\forall\, x_0, x_1 \in R^n$ *и* $\forall\, t_0 < t_1$ $\exists\, u(t)$ *— кусочно-непрерывное управление, заданное на* $[\,t_0, t_1]$, *что для решения* $x(t)$ *системы* (3.19) *с этим управлением и с начальным условием* $x_0 = x(t_0)$ *выполнено равенство* $x_1 = x(t_1)$.

Часто, говоря о полностью управляемой системе (3.19), говорят также, что пара (A, b) является полностью управляемой. Ниже представлена *теорема о критериях полной управляемости.*

Теорема 3.6. *Следующие условия эквивалентны между собой и каждое из них является необходимым и достаточным условием для полной управляемости системы* (3.19) :

1) *ранг* $(n \times nm)$*–матрицы* $\bigl(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\bigr)$ *равен* n;

2) *из равенств* $z^* A^k b = 0$, *где* $z \in R^n$, $k = \overline{0, n-1}$, *следует, что* $z = 0$;

3) *линейная оболочка* L, *натянутая на* n*–векторы, составляющие матрицу* $e^{At}b$, *совпадает с* R^n :

$$L\bigl\{\, e^{At}b,\ t \in (-\infty, \infty)\,\bigr\} = R^n;$$

4) $\forall\, \tau_1, \tau_2$ *— чисел таких, что* $\tau_1 < \tau_2$:

$$L\bigl\{\, e^{At}b,\ t \in (\tau_1, \tau_2)\,\bigr\} = R^n;$$

5) $\forall\, \tau_1, \tau_2$ *— чисел таких, что* $\tau_1 < \tau_2$, *матрица*

$$K = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-At} b\, b^* e^{-A^* t}\, dt > 0$$

является симметрической и положительно определенной;

6) *линейная оболочка* L, *натянутая на комплекснозначные* n*–векторы, составляющие матрицу* $(pE - A)^{-1}b$ *при* $p \in C$, $p \neq \lambda_j(A)$, *совпадает с* n*–мерным унитарным пространством* C^n :

$$L\bigl\{\, (pE - A)^{-1}b,\ p \in C, p \neq \lambda_j(A)\,\bigr\} = C^n,$$

где $\lambda_j(A)$ *— собственные значения матрицы* A, E *— единичная* n*–матрица;*

7) $\forall\, \Omega \subset C$ *— множества, имеющего предельную точку, отличную от* $\lambda_j(A)$, *выполнено равенство*

$$L\bigl\{\, (pE - A)^{-1}b,\ p \in \Omega\,\bigr\} = C^n;$$

8) *не существует* $(n\times n)$*–матрицы* S *— неособой и такой, чтобы матрицы* $S^{-1}AS$ *и* $S^{-1}b$ *имели структуру:*

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad S^{-1}b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

9) $\operatorname{rank}(q_0, \ldots, q_{n-1}) = n$, *где* q_j *— коэффициенты полинома*

$$q_{n-1}p^{n-1} + \ldots + q_0 = \det(pE - A) \cdot (pE - A)^{-1}b;$$

10) *не существует* $z \neq 0$ *— вектора, для которого выполнены равенства* $A^*z = \lambda z$, $z^*b = 0$, *где* λ *— некоторое число.*

Из этой теоремы вытекают следствия. 1. Если пара (A, b) полностью управляема, то тогда $\forall\,(n\times m)$–матрицы s пара $(A + bs^*, b)$ также полностью управляема.

2. Если пара (A, b) полностью управляема, то тогда и пара $(\tilde{A}, \tilde{b})$, где $\tilde{A} = S^{-1}AS$, $\tilde{b} = S^{-1}b$, также полностью управляема; здесь S — произвольная вещественная неособая матрица.

3. Если пара (A, b) полностью управляема и λ_0 — произвольное собственное число матрицы A, то тогда дефект (разность между размерностью матрицы и ее рангом) d матрицы $(A - \lambda_0 E)$ не превосходит ранга матрицы b.

Пусть имеется система (3.19), где A — $(n\times n)$–матрица, b и c — векторы из R^n; $u, y \in R$ — скалярные вход и выход. Если пара (A, b) полностью управляема, то в этом случае систему (3.19) можно привести к виду, который используется для решения многих задач стабилизирующего синтеза.

Теорема 3.7. *Предположим, что в системе* (3.19) $m = l = 1$ *и пара* (a, b) *полностью управляема. Тогда систему* (3.19) *невырожденным линейным преобразованием можно привести к следующему виду:*

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \qquad \dot{x}_n = -\,a_1x_1 - \ldots - a_nx_n + u,$$

$$y = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n,$$

где числа a_j, $j = \overline{1, n}$, *являются коэффициентами характеристического многочлена*

$$\det(pE - A) = p^n + a_np^{n-1} + \ldots + a_1.$$

Перейдем далее к понятию *полной наблюдаемости.*

Определение 3.2. *Система* (3.19) *называется полностью наблюдаемой, если* $\forall\, t_1, t_2$ *таких, что* $t_1 < t_2$ *и* $\forall\,\{\,x_1(t),\, u_1(t),\, y_1(t)\,\}$, $\{\,x_2(t),\, u_2(t),\, y_2(t)\,\}$ *— троек вектор-функций, определенных на* $[\,t_1, t_2\,]$ *и удовлетворяющих системе* (3.19), *из равенства входов и выходов:*

$$u_1(t) = u_2(t), \qquad y_1(t) = y_2(t), \qquad \forall\, t \in [\,t_1, t_2\,]$$

следует равенство состояний: $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall\, t \in [\,t_1, t_2\,]$.

Говоря о полностью наблюдаемой системе (3.19), говорят также, что пара (A, c) является полностью наблюдаемой. Видим, что система (3.19) полностью наблюдаема, если по точным измерениям входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ можно однозначно определить состояние $x(t)$. Следующая теорема носит название *теоремы двойственности Калмана.*

Теорема 3.8. *Для полной наблюдаемости пары* (A, c) *необходимо и достаточно полной управляемости пары* (A^*, c).

Очевидно теперь, что если в теореме 3.6 о критериях полной управляемости в условиях 1) – 10) заменить A и b соответственно на A^* и c, то получим необходимые и достаточные условия полной наблюдаемости пары (A, c).

Для системы (3.19) ее передаточная функция имеет вид $(l\times n)$–матрицы:

$$Wp) = c^*\,(A - pE)^{-1}b.$$

Передаточная функция $W(p)$ называется *невырожденной*, если $\forall\, p_0$ — корня многочлена $\Delta(p) = \det(pE - A)$ существует такой минор $\mu(p)$ матрицы $W(p)$, что

$$\lim_{p\to p_0} \Delta(p)\,\mu(p) \neq 0.$$

Следующий важный признак устанавливает *критерий полной управляемости и полной наблюдаемости* в терминах передаточной функции.

Теорема 3.9. *Для полной управляемости и полной наблюдаемости системы* (3.19) *необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция $W(p)$ была невырожденной.*

Замечание. Эту теорему для случая, когда в системе (3.19) $m = 1$ и b — это вектор, можно переформулировать, а именно: для полной управляемости и полной наблюдаемости системы (3.19) необходимо и достаточно, чтобы полиномы $\det(pE - A)$ и $W(p) \cdot \det(pE - A)$ не имели общих нулей.

3.2.2. Стабилизируемость. Зададимся вопросом, можно ли сделать вещественную систему (3.19) устойчивой с помощью выбора управления u. Если это возможно, то систему (3.19) называют *стабилизируемой*, а соответствующее управление — *стабилизирующим*.

Пусть на вход линейной системы (3.19) подается управление $u \in R^m$ в зависимости от измеренного выхода $y \in R^l$ по правилу: $u = s^* y$, где $s = s(t)$ — переменная $(l \times m)$–матрица. Тогда говорят о *линейном управлении по принципу обратной связи*.

Если $\forall\, t$ измерению доступны все компоненты вектора состояия x системы (в этом случае $c = E$ — единичная $(n \times n)$–матрица и $y = x$), то тогда говорят, что управление построено по *принципу полной обратной связи*; в случае, когда c — $(n \times l)$–матрица, где $l < n$, и измерению доступны лишь компоненты вектора выхода y, то говорят об управлении, построенном по *принципу неполной обратной связи*.

Задача линейной стабилизации системы (3.19) ставится так: требуется построить управление

$$u = s^*(t)\, y, \qquad y = c^* x, \tag{3.20}$$

где $s(t)$ — $(l \times m)$–матрица, при котором система (3.19), замкнутая этой обратной связью, т.е. система

$$\dot{x} = \left\{\, A + b\, [\, c\, s(t)\,]^* \,\right\} x \tag{3.21}$$

асимптотически устойчива (в целом). Построенное управление u, решающее поставленную задачу, является стабилизирующим, а сама система (3.19) — стабилизируемой. В этом случае также говорят, что тройка (A, b, c) является стабилизируемой. Если $c = E$ и управление построено по принципу полной обратной связи, говорят о стабилизируемой паре (A, b).

В случае, когда $s = s(t)$, речь идет о линейной нестационарной стабилизации системы (3.19); если $s(t) = s = \text{const}$ — то о линейной стационарной стабилизации системы (3.19).

В задаче линейной стационарной стабилизации система (3.19) стабилизируема, если существует обратная связь (3.20), где $s(t) = s$ — постоянная $(l \times m)$–матрица, такая, что замкнутая система (3.21) асимптотически устойчива, т.е. матрица $A + bs^*c^*$ гурвицева.

Рассмотрим далее систему (3.19) в рамках решения задачи стационарной стабилизируемости, полагая, что $m \geq 1$ и выходом у этой системы является вектор состояния: $y = x$. Требуется найти вещественную $(n \times n)$–матрицу s, для которой матрица $A + bs^*$ была бы гурвицевой, т.е. чтобы спектр $\sigma\{\, A + bs^* \,\}$ (набор собственных чисел) матрицы $A + bs^*$ лежал в левой полуплоскости. Решение этой задачи дадим с помощью следующей теоремы о стабилизации.

Теорема 3.10. *Будем считать, что A и b — вещественные $(n \times n)$ и $(n \times m)$–матрицы соответственно и, кроме того, пара (A, b) полностью управляема. Обозначим через μ_1, ..., μ_n произвольные вещественные числа.*

Тогда существует вещественная $(n \times m)$–матрица s такая, что спектр $\sigma\{\, A + bs^* \,\}$ матрицы $A + bs^*$ совпадает с набором чисел $\{\, \mu_1, \ldots, \mu_n \,\}$, т.е.

$$\sigma\{\, A + bs^* \,\} = \{\, \mu_1, \ldots, \mu_n \,\}, \qquad \mu_j \in R, \quad j = \overline{1, n}.$$

В частности, если $\mu_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, то матрица $A + bs^*$ гурвицева.

Из этой теоремы вытекает, что полная управляемость системы является достаточным условием ее стабилизируемости, но не необходимым. В самом деле, система (3.19) стабилизируема для случая, когда A — гурвицева матрица, а $b = 0$; при этом она не полностью управляема.

Критерий Найквиста является одним из эффективных критериев стационарной стабилизации линейных систем. Пусть имеется система (3.19). Надо построить такую обратную связь $u = s^* y$ с постоянной $(l \times m)$–матрицей s, чтобы замкнутая этим управлением система была асимптотически устойчивой.

Пусть $W(p)$ — передаточная функция системы (3.19) от входа u к выходу $(-y) : W(p) = c^*(A - pE_n)^{-1} b$, где E_n — единичная $(n \times n)$–матрица. Укажем на то, что значения $W(p)$ — это $(l \times m)$–матрицы. Обозначим через

$$\Delta_r(p) = \det(pE_n - A), \qquad \Delta_z(p) = \det\left[\, pE_n - (A + bs^*c^*)\,\right]$$

— характеристические многочлены матриц: A разомкнутой системы и $A + bs^*c^*$ замкнутой системы, связь между которыми устанавливается соотношением

$$\Delta_z(p) = \Delta_r(p) \cdot \det\left[\, E_m + s^* W(p)\,\right]. \qquad (3.22)$$

В предположении, что у $\Delta_r(p)$ и $\Delta_z(p)$ нет корней на мнимой оси, из формулы (3.22) вытекает, что

$$\det\left[\, E_m + s^* W(i\omega)\,\right] \neq 0, \qquad \omega \in (-\infty, \infty). \qquad (3.23)$$

Отсюда можно найти целое число k_0 :

$$k_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \Delta\,\varphi(\omega)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{Arg}\, \det\left[\, E_m + s^* W(i\omega)\,\right],$$

где $\Delta\,\varphi(\omega)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ — это приращение фукции $\varphi(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$; $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $\arg z \in (-\pi, \pi)$, k — целое.

Обозначим далее через k_r и k_z числа собственных значений матриц A и $A + bs^*c^*$, расположенных в правой полуплоскости с учетом их кратностей. Эти числа называются *степенями неустойчивости* соответственно разомкнутой и замкнутой систем. Если применить к обеим частям равенства (3.22) формулу Эрмита–Михайлова (с учетом неравенства (3.23) это сделать можно), то в результате для матриц A и $A + bs^*c^*$, не имеющих собственных значений на мнимой оси, получим соотношение: $k_z = k_r - k_0$. Из этой формулы следует

критерий Найквиста: замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad y = c^*x, \qquad x \in R^n,\ u \in R^m,\ y \in R^l,$$

с обратной связью $u = s^*y$, где $s \in R^l \times R^m$ — постоянная матрица, асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $k_r = k_0$.

Стоит отметить, что критерий Найквиста дает возможность установить устойчивость данной замкнутой системы лишь по частотной характеристике $W(i\omega)$ системы (3.19) вне зависимости от аналитического выражения функции $W(p)$.

3.2.3. Стабилизируемость и уравнение Лурье–Риккати. Вновь вернемся к линейной системе (3.19). Управление u выберем по принципу неполной обратной связи: $u = s^*y$, $y \in R^l$, где s — вещественная постоянная $(l \times m)$–матрица, с тем, чтобы замкнутая система $\dot{x} = (A + bs^*c^*)\,x$, $x \in R^n$, была асимптотически устойчивой, т.е. чтобы матрица $A + bs^*c^*$ была гурвицевой, а тем самым тройка (A, b, c) была стабилизированной.

Напомним предварительно некоторые хорошо известные утверждения.

Лемма 3.1 (Лемма Ляпунова). *Пусть A — гурвицева $(n \times n)$–матрица, G — произвольная симметрическая матрица. Тогда матричное уравнение*

$$A^*X + XA = G$$

относительно симметрической $(n \times n)$–матрицы X имеет и притом единственное решение

$$X = -\int_0^{+\infty} e^{A^*t}\, G\, e^{At}\, dt.$$

Если $G \leq 0$, то $X \geq 0$; если же $G < 0$, то $X > 0$.

Относительно записи в формулировке леммы 3.1: полагаем, что запись для матриц $Q \geq 0$ (или $Q > 0$) означает, что соответствующая ей квадратичная форма $x^*Qx \geq 0$, $\forall\, x \in R^n$ (или $x^*Qx > 0$, $\forall\, x \in R^n$, $x \neq 0$). Аналогичный смысл имеем и для $Q \leq 0$ (или $Q < 0$).

Лемма 3.2. *Предположим, что* $(n \times n)$*–матрицы* A *и* H, *где* $H = H^*$, *удовлетворяют матричному неравенству*

$$A^*H + HA \leq cc^*,$$

где c — $(n \times l)$*–матрица, причем пара* (A, c) *полностью наблюдаема. Тогда:* 1) *матрица* A *не имеет собственных значений на мнимой оси;* 2) *матрица* A *гурвицева тогда и только тогда, когда* $H > 0$.

Следующую теорему о стабилизируемости тройки (A, b, c), которую можно доказать с помощью лемм 3.1 и 3.2, представим в терминах разрешимости матричного *уравнения Лурье–Риккати.* Для удобства вначале сформулируем теорему о необходимом условии стабилизируемости системы (3.19) (или тройки (A, b, c)).

Теорема 3.11. *Пусть система* (3.19) *стабилизируема. Тогда:* 1) *пары* (A, b) *и* (A^*, c) *стабилизируемы;* 2) *существуют вещественные* $(l \times m)$ *и* $(m \times n)$*–матрицы* s *и* g *соответственно, такие, что имеет место соотношение*

$$s^*c^* + b^*H = g, \tag{3.24}$$

где $H = H^*$ — *вещественная неотрицательно определенная* $(n \times n)$*–матрица, которая является решением матричного уравнения*

$$A^*H + HA - Hbb^*H + cc^* + g^*g = 0. \tag{3.25}$$

Отметим, что уравнение (3.25) называют *матричным алгебраическим уравнением Риккати.* Этому уравнению с квадратичной структурой относительно матрицы H удовлетворяют стационарные решения матричного ДУ:

$$\dot{H} = -Hbb^*H + (A^*H + HA) + (cc^* + g^*g),$$

которое называют *матричным ДУ Риккати.*

На очереди теорема о достаточном условии стабилизируемости системы (3.19) (или тройки (A, b, c)).

Теорема 3.12. *Предположим, что в системе* (3.19) *матрицы* A, b *и* c *удовлетворяют условиям:* 1) *пара* (A, b) *стабилизируема, а пара* (A, c) *полностью наблюдаема;* 2) *существуют вещественные* $(l \times m)$ *и* $(m \times n)$*–матрицы* s *и* g *соответственно, удовлетворяющие соотношениям* (3.24), (3.25), *где* $H = H^*$ — *вещественная положительно определенная матрица. Тогда система* (3.19) *стабилизируема.*

Отметим, что в теореме 3.11 ее условия являются также и достаточными для стабилизируемости системы (3.19) [163]. Условия теоремы 3.12 более жесткие, чем условия теоремы 3.11. Действительно, стабилизируемость пары (A^*, c) и $H \geq 0$ в теореме 3.11 меняются на полную наблюдаемость пары (A, c) и $H > 0$ в теореме 3.12.

В силу стабилизируемости системы (3.19) существует вещественная $(l \times m)$–матрица s, для которой матрица $A + bs^*c^*$ гурвицева. Значит, по лемме 3.1 Ляпунова существует такая симметрическая матрица $H = H^* > 0$, что выполнено равенство

$$(A + bs^*c^*)^*H + H\,(A + bs^*c^*) = -\,cc^* - css^*c^*. \tag{3.26}$$

Видим, что в линейном пространстве эрмитовых матриц $\{\,H\,\}$, где $H = H^*$, левая часть соотношения (3.26) определяет линейный оператор $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}(H) = (A + bs^*c^*)^*H + H\,(A + bs^*c^*).$$

По лемме 3.1 уравнение $\mathcal{K}(H) = G$ однозначно разрешимо $\forall\, G : G = G^*$, т.к. $A + bs^*c^*$ — гурвицева матрица. Следовательно, оператор $\mathcal{K}$ обратим и у него $\exists\,\mathcal{L}$ — линейный оператор, обратный к $\mathcal{K} : \mathcal{L} \equiv \mathcal{K}^{-1}$. Поэтому, решая уравнение (3.26) относительно матрицы H, получим: $H = -\mathcal{L}(cc^*) - \mathcal{L}(css^*c^*)$. После подстановки этого значения H в уравнение (3.24) будем иметь квадратное относительно $(l \times m)$–матрицы cs уравнение

$$\mathcal{L}(css^*c^*)\,b - cs = -\,g^* - \mathcal{L}(cc^*)\,b. \tag{3.27}$$

Приходим, таким образом, к *разрешающим уравнениям Лурье* [82] в векторной форме, которые обладают структурой уравнений (3.27) и имеют многие важные практические применения. Итак, уравнения (3.24), (3.25), (3.26) сводятся к уравнениям Лурье–Риккати. Обратное также верно. В работе [82] были найдены условия разрешимости уравнений Лурье в некоторых случаях. В общем же случае условием разрешимости уравнений Лурье является *частотное условие Якубовича–Калмана* [32]. Для линейных систем вида (3.19) это частотное условие совпадает с критерием Найквиста.

Рассмотренная выше задача *стационарной стабилизации* линейных систем вида (3.19), решаемая синтезом линейной обратной связи, относится к важнейшим проблемам теории управления. Тем не менее, для системы (3.19) может быть поставлена и *задача Брокетта нестационарной стабилизации*, когда требуется найти $(l\times m)$–матрицу $s(t)$ такую, чтобы система (3.19), замкнутая обратной связью $u = s^*(t)\,y$ была асимптотически устойчивой (в целом).

Иначе задача Брокетта может быть сформулирована так: задана тройка матриц (A, b, c) размерностей $n\times n$, $n\times m$ и $n\times l$ соответственно. Ставится вопрос об условиях существования $(l\times m)$–матрицы $s(t)$ такой, чтобы система (3.21): $\dot{x} = [\,A + b\,s^*(t)\,c^*\,]\,x$, $x\in R^n$, была асимптотически устойчивой. Подробнее о решении этой задачи в классе кусочно-постоянных периодических матриц см. работы [74, 75, 79].

Ранее уже была проанализирована задача стабилизации системы $\dot{x} = Ax + bu$ с помощью постоянной матрицы s. В задаче Брокетта надо найти переменную матрицу $s(t)$ с указанным стабилизирующим свойством для системы (3.21) и ответить на вопрос, насколько введение матрицы $s(t)$ увеличивает возможности стационарной стабилизации?

3.3 Устойчивость и оптимальность процессов управления

В рамках теории оптимальных процессов в управляемых динамических системах важное место занимает задача об оптимальной стабилизации заданного движения (подробности см. в работе [114]). Речь идет о задаче синтеза управляющих воздействий, которые обеспечивают устойчивость движения при оптимальном качестве переходных процессов.

Таким образом, ясно, что задача об оптимальной стабилизации тесно связана с общей задачей об устойчивости движения и по сути

является дальнейшим развитием проблемы устойчивости в применении к теории управляемых динамических систем.

Важно также еще отметить, что эта тесная взаимосвязь методов оптимального управления и классических методов теории устойчивости Ляпунова особенно наглядно проявляется на примере метода динамического программирования как одного из основных в теории оптимизации, и который, в общем-то, является объединением методов вариационного исчисления с методом функций Ляпунова [114].

3.3.1. Задачи о стабилизации и об оптимальной стабилизации. Пусть движение динамической системы описывается ДУ в нормальном виде

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_r), \tag{3.28}$$

где $s = \overline{1, n}$. Здесь y_s — некоторые параметры движения, например, координаты, скорости и т.д.; величины $v_1, \ldots, v_r$ описывают управляющие воздействия, приложенные к объекту.

Возьмем частное движение системы, порождаемое некоторыми управляющими воздействиями $v_j = p_j(t)$, $j = \overline{1, r}$. Этому движению отвечает некоторое частное решение $y_s = f_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, системы (3.28). Это движение называют *невозмущенным*.

Вместе с невозмущенным движением $\{\,f_s(t)\,\}$ рассмотрим возмущенные движения $\{\,y_s(t)\,\}$, которые также описываются ДУ (3.28), но уже при $v_j(t) \neq p_j(t)$. Отклонения $v_j(t) - p_j(t)$ позволяют судить об устойчивости движения $y_s = f_s(t)$: тем самым задача стабилизации невозмущенного движения $y_s = f_s(t)$ сводится к выбору величин отклонения $v_j - p_j(t)$, обеспечивающих устойчивость движения $y_s = f_s(t)$.

Удобно для анализа задачи стабилизации перейти к новым переменным и составить относительно них уравнения возмущенного движения управляемой системы. Обозначим

$$x_s = y_s - f_s(t), \qquad u_j = v_j - p_j(t), \tag{3.29}$$

где $s = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$; x_s — возмущения движений, u_j — отклонения управляющих воздействий от величин $p_j(t)$. При этом уравнения возмущенного движения будут иметь вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r) =$$

$$= Y_s(t, x_1 + f_1, ..., x_n + f_n, u_1 + p_1, ..., u_r + p_r) -$$

$$- Y_s(t, f_1, ..., f_n, p_1, ..., p_r), \quad s = \overline{1, n}. \tag{3.30}$$

Задача I (*о стабилизации*). Требуется найти такие управляющие воздействия $u_1(t, x_1, ..., x_n), ..., u_r(t, x_1, ..., x_n)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ в силу уравнений (3.30) при $u_j = u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$.

В сформулированной задаче I предполагается, что в процессе управления объектом можно измерять текущие значения всех координат $x_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, на основе которых можно строить управляющие воздействия $u_j[\,t, x_1(t), ..., x_n(t]$, $j = \overline{1, r}$. При этих воздействиях на объект его заданное невозмущенное движение $x_s = 0$ должно быть асимптотически устойчивым.

Предполагается в силу соотношений (3.29), что функции $u_j(t, x_1$ $, ..., x_n)$ удовлетворяют равенствам: $u_j(t, 0, ..., 0) = 0$, $j = \overline{1, r}$. Помимо этого, будем считать, что эти функции определены и непрерывны в области

$$|\,x_s\,| < h, \qquad t \geq 0, \qquad s = \overline{1, n}. \tag{3.31}$$

Примем также, что функции X_s и u_j в уравнениях (3.30) удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решений x_s, $\forall\, t_0$, $x_s(t_0)$ — начальных условий из области (П3.31). И еще: будем считать, что функции $u_j(t, x_1, ..., x_n)$ могут принимать любые, сколь угодно большие значения: $u_j \in (-\infty, \infty)$, $j = \overline{1, r}$.

Перейдем далее к задаче об оптимальной стабилизации, которая, как уже было выше сказано, помимо задачи о стабилизации заданного движения $x_s = 0$ (обеспечением асимптотической устойчивости) содержит еще и требование обеспечения оптимального (наилучшего) качества переходного процесса, а именно: оптимального качества возмущенного движения $x_s(t)$ в процессе его стремления к состоянию $x_s = 0$ при $t \to \infty$.

Часто функционал качества J для этих целей выбирается в виде совокупных затрат системы управления на всем промежутке вре-

мени, которые требуется минимизировать:

$$J = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1(t),\, ...,\, x_n(t),\, u_1(t),\, ...,\, u_r(t)\,\big]\, dt, \tag{3.32}$$

где $\omega(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r) = \omega(\cdot) \geq 0$ — функция, определенная в области (3.31). Полагаем, что $u_j(t) = u_j[\,t, x_1(t), ..., x_n(t)\,]$ — величины управляющих воздействий, представляющих собой лишь функции времени; $x_s(t)$ — движения системы (3.30), которые возникают за счет приложения управлений $u_j(t)$. Для многих практических случаев применения такой подходящей подынтегральной функцией $\omega(\cdot)$, отвечающей физическим условиям решаемой задачи, является функция, выбранная в виде определенно положительной квадратичной формы

$$\omega(\cdot) = \sum_{s,l=1}^{n} \alpha_{sl}\, x_s x_l + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij}\, u_i u_j.$$

Задачу о стабилизации системы (3.30) с учетом минимизации критерия качества J (3.32) называют задачей об оптимальной стабилизации.

Задача II (*об оптимальной стабилизации*). Пусть выбран критерий качества переходного процесса $x_s(t)$ в виде интеграла (3.32). Требуется найти такие управляющие воздействия $u_1^0(t, x_1, ..., x_n), ..., u_r^0(t, x_1, ..., x_n)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ в силу уравнений (3.30) (т.е. при $u_j = u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$). При этом для всех других управляющих воздействиях $u_j^*(t, x_1, ..., x_n)$, решающих задачу I, должно выполняться неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t),\, u_1^0(t),\, ...,\, u_r^0(t)\,\big]\, dt \;\leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t),\, u_1^*(t),\, ...,\, u_r^*(t)\,\big]\, dt, \tag{3.33}$$

$\forall\, t_0,\, x_s(t_0)$ — начальных условий из области: $|\,x_s(t_0)\,| \le h_0,\, t_0 \ge 0$, где $h_0 > 0$ — некоторая заданная постоянная. Функции $u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$, $j = \overline{1, r}$, решающие задачу II, называются *оптимальным управлением.*

Заметим, что задача II ставит перед выбором функций u_j^0 более жесткие требования по сравнению с задачей I и разрешающими ее функциями u_j. Именно поэтому в задаче II, как правило, имеется лишь единственное решение $u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$; в задаче I, напротив, выбор функций $u_j(t, x_1, ..., x_n)$, как правило, связан с большим числом возможностей.

3.3.2. Оптимальная стабилизация и второй метод Ляпунова. В данном разделе решение задачи II оптимальной стабилизации в соответствии с методом динамического программирования Р. Беллмана [16] свяжем со вторым методом Ляпунова в теории устойчивости.

Рассмотрим ДУ возмущенного движения (3.30):

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r), \qquad s = \overline{1, n},$$

где функции $X_s(\cdot)$ определены в области

$$|\,x_s\,| \le h, \qquad t \ge 0, \qquad s = \overline{1, n}, \tag{3.34}$$

и удовлетворяют в этой области указанным ранее условиям.

В качестве функции Ляпунова $V(t, x_1, ..., x_n)$ будем брать определенно положительные функции в области (3.34). Обозначим через $\Omega(V, t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r)$ следующее выражение:

$$\Omega(V, t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r) = \frac{\partial V}{\partial t} + \tag{3.35}$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{x_s} X_s(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r) + \omega(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r),$$

где $\omega(\cdot) \ge 0$ — подынтегральная функция из критерия (3.32).

Выберем затем некоторую функцию $V(t, x_1, ..., x_n)$ и некоторые функции $u_j = u_j^*(t, x_1, ..., x_n)$, $j = \overline{1, r}$ так, чтобы в области (3.34)

выполнялось равество

$$\Omega(V, t, x_1, ..., x_n, u_1^*, ..., u_r^*) = 0.$$

Тогда, очевидно, из соотношения (3.35) при $u_j = u_j^*(t, x_1, ..., x_n)$ в этой области будет вытекать равенство

$$\frac{dV}{dt} = -\,\omega(t, x_1, ..., x_n).$$

Теперь сформулируем основную теорему об оптимальной стабилизации.

Теорема 3.13. *Если для ДУ возмущенного движения* (3.30) *можно найти допускающую бесконечно малый высший предел определенно положительную функцию* $V^0(t, x_1, ..., x_n)$ *и функции* $u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$, *удовлетворяющие в области* (3.34) *условиям:*

1) *функция*

$$w(t, x_1, ..., x_n) = \omega\big[\,t, x_1, ..., x_n, u_1^0(t, x_1, ..., x_n), ..., u_r^0(t, x_1, ..., x_n)\,\big]$$

является определенно положительной;

2) *справедливо равенство*

$$\Omega\big[\,V^0, t, x_1, ..., x_n, u_1^0(t, x_1, ..., x_n), ..., u_r^0(t, x_1, ..., x_n)\,\big] = 0; \tag{3.36}$$

3) *для любых чисел* u_j *справедливо неравенство*

$$\Omega\big(V^0, t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r\big) \ge 0, \tag{3.37}$$

то тогда функции $u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$ *разрешают задачу II об оптимальной стабилизации. При этом выполняется равенство*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1^0(t), ..., x_n^0(t),\, u_1^0(t), ..., u_r^0(t)\,\big]\, dt \;= \\ &= \min_u \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1(t), ..., x_n(t),\, u_1(t), ..., u_r(t)\,\big]\, dt \;= \\ &= \; V^0\big[\,t_0,\, x_1(t_0), ..., x_n(t_0)\,\big]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Замечание. Обратим внимание на то, что функция V, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, помимо того, что она устанавливает сам факт устойчивости, позволяет также оценить область

$$| x_s(t_0) | \le h_0, \qquad t \ge 0, \qquad s = \overline{1,n}, \tag{3.39}$$

тех начальных возмущений $x_s(t_0)$, которые удовлетворяют неравенствам (3.31): $| x_s(t) | < h$, где $t \ge t_0$, $s = \overline{1,n}$, а также предельному соотношению

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0. \tag{3.40}$$

Заметим еще, что при $u_j = u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$ в уравнениях (3.30) функция V^0 удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а интеграл J (3.32) достигает наименьшего значения $\forall\, x_s(t_0)$, $t_0 \ge 0$ — начальных условий из области (3.39).

Приведем далее схему доказательства теоремы 3.13, решающей задачу II [114]. Итак, при $u_j = u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$ функция V^0 удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Полная производная по времени $\dot V^0$ в силу уравнений (3.30) при $u_j = u_j^0$ определяется равенством

$$\frac{dV^0}{dt} = -\,\omega(t, x_1, ..., x_n, u_1^0, ..., u_r^0), \tag{3.41}$$

т.е. $\dot V^0$ является определенно отрицательной функцией. Отсюда управляющие воздействия $u_j^0(t, x_1, ..., x_n)$ обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ и выполнение предельного соотношения (3.40) $\forall\, x(t_0)$ — начальных условий из области (3.39).

Чтобы доказать утверждение теоремы, надо выявить наличие соотношения (3.38). Приступим к этому. Положим, что движения $x_s^0(t)$ при $u_j = u_j^0$ и при условии (3.39) удовлетворяют оценке (3.31): $| x_s^0(t) | < h$. Тогда вдоль этих движений $\forall\, t \ge t_0$ выполняется равенство (3.36) или равносильное ему равенство (3.41). Помимо этого, по причине асимптотической устойчивости выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V^0\big[\, t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t) \,\big] = 0. \tag{3.42}$$

Проинтегрируем равенство (3.41) вдоль движния $x_s^0(t)$ по промежутку $t \in [\, t_0, \infty)$ и с учетом соотношения (3.42) получим

$$V^0\big[\, t_0,\, x_1(t_0),\, ...,\, x_n(t_0) \,\big] \; = \tag{3.43}$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} \omega\big[\, t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t),\, u_1^0(t),\, ...,\, u_r^0(t) \,\big]\, dt.$$

Вместе с тем, предположим, что $u_j^*(t, x_1, ..., x_n)$, $j = \overline{1,r}$ — какие-либо функции, также решающие задачу о стабилизации движения $x_s = 0$, $s = \overline{1,n}$, для начальных возмущений из области (3.39). Будем считать также, что соответствующие движения $x_s^*(t)$ не выходят при $t \ge t_0$ из области $| x_s | \le h$. Тогда в процессе движения $x_s^*(t)$, $\forall\, t$ будет иметь место неравенство (3.37), или равносильное неравенство

$$\frac{dV^0}{dt} \ge -\,\omega\big[\, t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t) \,\big], \tag{3.44}$$

где $\dot V^0$ — полная производная по t функции V^0 вдоль движения $x_s^*(t)$.

Проинтегрируем неравенство (3.44) по промежутку времени $t \in [\, t_0, \infty)$. С учетом предельного равенства

$$\lim_{t\to\infty} V^0\big[\, t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t) \,\big] = 0 \tag{3.45}$$

будем иметь

$$V^0\big[\, t_0,\, x_1(t_0),\, ...,\, x_n(t_0) \,\big] \; \le \tag{3.46}$$

$$\le \int_{t_0}^{\infty} \omega\big[\, t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t),\, u_1^*(t),\, ...,\, u_r^*(t) \,\big]\, dt.$$

Такое же неравенство получим и в случае, когда движение $x_s^*(t)$ покидает область (3.34): $| x_s | \le h$, $s = \overline{1,n}$. В самом деле, пусть $\tau > t_0$ — момент времени, когда движение $x_s^*(t)$ в последний раз вошло в область (3.34) и уже при $t \geq \tau$ больше эту область не покидает. Значит, с этого момента вдоль движения $x_s^*(t)$ все время выполняется условие (3.44). Интегрируя тогда это неравенство по $t \in [\tau, \infty)$ и учитывая вновь предельное соотношение (3.45), получим

$$V^0\big[\,\tau,\, x_1^*(\tau),\, ...,\, x_n^*(\tau)\,\big] \;\leq \tag{3.47}$$

$$\leq \int\limits_{\tau}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t),\, u_1^*(t),\, ...,\, u_r^*(t)\,\big]\, dt.$$

Однако по выбору $x_s(t_0)$ из области (3.39) имеем неравенство

$$V^0\big[\,t_0,\, x_1(t_0),\, ...,\, x_n(t_0)\,\big] < V^0\big[\,\tau,\, x_1^*(\tau),\, ...,\, x_n^*(\tau)\,\big], \tag{3.48}$$

а по причине неотрицательности функции ω имеем неравенство

$$\int\limits_{\tau}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t),\, u_1^*(t),\, ...,\, u_r^*(t)\,\big]\, dt \;< \tag{3.49}$$

$$< \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\big[\,t,\, x_1^*(t),\, ...,\, x_n^*(t),\, u_1^*(t),\, ...,\, u_r^*(t)\,\big]\, dt.$$

Из соотношений (3.47) – (3.49) вновь вытекает справедливость неравенства (3.46). Окончательный вывод, который отсюда следует: соотношения (3.43) и (3.46) доказывают финальное утверждение (3.38) теоремы 3.13.

Отметим некоторые особенности рассматриваемой задачи об оптимальной стабилизации. Функции $V^0(t, x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.13, часто называют *оптимальными функциями Ляпунова*. Решение задачи II сводится к нахождению функций V^0 и u_j^0, удовлетворяющих соответствующим условиям теоремы 3.13 при обеспечении равенства (3.36). Соотношение (3.36) является уравнением в частных производных относительно функции V^0, которое надо решить с учетом дополнительного условия (3.37). Видим, что задача нахождения оптимальной функции Ляпунова V^0 приобретает черты достаточно сложной проблемы.

Критерий оптимальности управляющих воздействий u_j^0, который выражается с помощью соотношений (3.36), (3.37), соответствует методам вариационного исчисления [34], причем соотношение (3.36) имеет форму уравнения Гамильтона–Якоби в частных производных. В теореме 3.13 критерий сформулирован не в виде характерных необходимых условий экстремальности, а в виде достаточных условий минимума интеграла J (3.32). Более того, условия теоремы 3.13 обеспечивают выполнение еще и предельного равенства $\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0$, типичного для теорем второго метода Ляпунова в теории устойчивости движения.

Помимо вариационного исчисления связь теоремы 3.13 можно обнаружить также и с принципом максимума Понтрягина как еще одним из основных методов исследования задач оптимального управления [111], где оптимальные управления ищутся в виде функции только времени $u_j^0(t)$ при фиксированных начальных условиях $x_s(t_0)$.

По аналогии с задачей II принцип максимума утверждает, что на оптимальном движении $x_s^0(t)$ системы (3.30), которое порождается управлением $u_j^0(t)$, выполняется условие

$$H\big[\,\psi_0(t),\, ...,\, \psi_{n+1}(t),\, t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t),\, u_1^0,\, ...,\, u_r^0\,\big] \;\geq$$

$$\geq\; H\big[\,\psi_0(t),\, ...,\, \psi_{n+1}(t),\, t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t),\, u_1,\, ...,\, u_r\,\big] \tag{3.50}$$

для любых чисел $u_1, ..., u_r$. Величина H задается равенством

$$H\big(\psi_0, ..., \psi_{n+1}, t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r\big) \;=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, X_i\big(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r\big) + \psi_{n+1} + \psi_0\, \omega(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r),$$

причем величины $\psi_i(t)$ являются некоторым частным решением системы

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\, \psi_j, \qquad \frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial t}\, \psi_j,$$

где $i = \overline{0, n}$; $X_0 = \omega$, $X_{n+1} = 1$, а на оптимальном движении $x_s^0(t)$ величина H остается постоянной, т.е.

$$H\big[\,\psi_0(t),\, ...,\, \psi_{n+1}(t),\, t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t),\, u_1^0(t),\, ...,\, u_r^0(t)\,\big] = 0 \tag{3.51}$$

при $t \geq t_1$.

Чтобы обнаружить связь принципа максимума с теоремой 3.13, надо проверить, что при выполнении условий теоремы 3.13 на оптимальном движении $x_s^0(t)$, порождаемом оптимальным управлением $u_j^0(t) = u_j^0[\,t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t)\,]$, имеют место равенства

$$\psi_s(t) = -\,\frac{\partial V^0[\,t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t)\,]}{\partial x_s}, \qquad s = \overline{1,n},$$

$$\psi_{n+1}(t) = -\,\frac{\partial V^0[\,t,\, x_1^0(t),\, ...,\, x_n^0(t)\,]}{\partial t}, \qquad \psi_0 = -\,1.$$

Итак, в этом сопоставлении равенство (3.51) и неравенство (3.50) имеют тот же смысл, что и равенство (3.36) и неравенство (3.37) соответственно.

Заметим напоследок еще раз, что принцип максимума дает необходимые условия оптимальности управления в форме: $u_j^0(t) = u_j^0(t)$, а теорема 3.13 — достаточные условия $u_j^0(t)$ в форме: $u_j^0(t) = u_j^0(t, x_1,\, ...,\, x_n)$. Обратим внимание также на то, что в случае установившихся движений $x_s = 0$, когда X_s и ω от времени явно не зависят, оптимальную функцию Ляпунова V^0 и оптимальные управления u_j^0 надо также искать в виде функций, не зависящих явно от времени: $V^0 = V^0(x_1,\, ...,\, x_n)$, $u_j^0 = u_j^0(x_1,\, ...,\, x_n)$, $j = \overline{1,r}$.

Применению второго метода Ляпунова в теории адаптивного управления посвящен следующий параграф. Метод функций Ляпунова или прямой метод Ляпунова исследования устойчивости решений систем ДУ получил широкое распространение и дальнейшее развитие в теории адаптивных динамических систем (см., например, работы [102, 131, 133, 135, 136, 138] вместе с имеющейся там библиографией). Основная идея использования этого метода при синтезе управлений состоит в построении неотрицательных квадратичных функций (функций Ляпунова) от переменных состояния, убывающих на траекториях исследуемой системы.

3.4 Синтез стабилизирующих адаптивных управлений

Задача стабилизации в адаптивном варианте "требует, чтобы управляющая система, синтезированная с помощью той или иной функции Ляпунова, не зависела от (неизвестных) параметров конкретного объекта управления ... ."[136].

3.4.1. Синтез стабилизирующих регуляторов. Изложим кратко результаты, содержащиеся в книге [136]. Зададим объект управления (ОУ) с выходом $y(t)$, состоянием $x(t)$ и управлением $u(t)$ следующим уравнением:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(\tau)\, x + B(\tau)\, u + v(t), \qquad y(t) = D\, x(t), \tag{3.52}$$

где $v(t)$ — действующее на ОУ возмущение, относительно которого известно лишь, что

$$\|\, v(t)\,\| \leq C_v, \tag{3.53}$$

где C_v — заданная постоянная, A — квадратная, а B и D — прямоугольные матрицы соответствующих размерностей. Матрицы A и B определены с точностью до вектора неизвестных параметров τ, $\tau \in T_\tau \subset R^N$.

Пару $\{\,\tau,\, v(\cdot)\,\} = \xi$ называют *вариантом*. Множество вариантов $\{\,\xi\,\} = T_\tau \times V_v$, где V_v — множество всевозможных реализаций возмущений (помех), удовлетворяющих неравенству (3.53).

Цель управления (ЦУ) определим в выполнении неравенства

$$J = \overline{\lim_{t\to\infty}}\; Q[\,y(t),\, u(t)\,] < C_Q, \tag{3.54}$$

где $Q(y,u)$ — целевая функция, $Q(y,u) \in C[\,y,u\,]$, C_Q — заданная постоянная (при $C_Q = \infty$ имеем задачу о диссипативности).

Будем считать, что вектор $y(t)$ входит в *сенсор* $\sigma(t)$ — набор доступных измерений в момент времени t. Пусть $\forall\,\tau \in T_\tau\; \exists\, u(t)$ — обратная связь вида

$$u(t) = C(\tau)\, y(t), \tag{3.55}$$

обладающая следующими свойствами:

1) матрица $K(\tau) = A(\tau) + B(\tau)\, C(\tau)$ является гурвицевой;

2) $\exists\, H(\tau)$ — положительная матрица и $\exists\, \rho(\tau)$ — положительное число такие, что

$$G(\tau) \equiv -\left[\, K^*(\tau)\, H(\tau) + H(\tau)\, K(\tau) + \rho(\tau)\, H(\tau)\,\right] \geq 0, \qquad (3.56)$$

т.е. $G(\tau)$ — неотрицательная матрица;

3) целевая функция $Q(y,u)$, матрица $H(\tau)$ и возмущение $v(t,\xi)$ согласованы друг с другом в соответствии с тем, что справедливо включение:

$$\left\{ x^*\, H(\tau)\, x \leq \frac{\|\, H(\tau)\,\|\, C_v^2}{\varepsilon \rho'(\tau)\,[\,\rho(\tau) - \rho'(\tau)\,]} \right\} \subseteq$$

$$\subseteq\ \left\{\, Q[\, Dx,\, C(\tau)\, Dx\,] < C_Q \,\right\}, \qquad (3.57)$$

где постоянные C_Q, C_v взяты из неравенств (3.53), (3.54), число $\rho(\tau)$ — из неравенства (3.56). Здесь $\rho'(\tau)$ — некоторая положительная величина такая, что $\rho'(\tau) < \rho(\tau)$; $0 < \varepsilon < 1$ — некоторое число.

Легко показать, что закон управления (3.55) со всеми перечисленными свойствами 1) – 3) обеспечивает выполнение ЦУ (3.54). В самом деле, найдем d/dt от функции

$$V(x) = x^*\, H(\tau)\, x \qquad (3.58)$$

вдоль траектории $x = x(t)$ уравнения

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = K(\tau)\, x. \qquad (3.59)$$

Учитывая обозначение (3.56), будем иметь

$$\frac{d\, V[\, x(t)\,]}{dt} \leq -\left[\, \rho(\tau) - \rho'(\tau)\,\right] V[\, x(t)\,] + \frac{\|\, H(\tau)\,\|\, C_v^2}{\rho'(\tau)}. \qquad (3.60)$$

Поскольку величина $\rho - \rho' > 0$, то из неравенства (3.60) получим, что $\forall\, \varepsilon \in (0,1)$ и $C_v > 0$ траектория $x(t)$ за конечное время войдет в множество:

$$\left\{ x^*\, H(\tau)\, x \leq \frac{\|\, H(\tau)\,\|\, C_v^2}{\varepsilon \rho'(\tau)\,[\,\rho(\tau) - \rho'(\tau)\,]} \right\}$$

и больше его не покинет. Однако в силу условия 3) (см. соотношение (3.57)) это множество содержится в множестве, которое в пространстве состояний задается неравенством: $Q(y,u) < C_Q$, где $y = Dx$, $u = C(\tau)\, y = C(\tau)\, Dx$, а именно: начиная с некоторого момента времени будет выполняться неравенство $Q[\, y(t),\, u(t)\,] < C_Q$, приводящее к ЦУ (3.54).

Заметим, что когда возмущений нет и $C_v = 0$, множество в левой части включения (3.57) вырождается в точку $x = 0$, а это значит, что все траектории системы управления (3.52), (3.59) стягиваются к нулевому вектору.

Из рассмотренного вытекает, что $\forall\, \tau\, \in\, T_\tau$ функция Ляпунова (3.58) с указанными свойствами может быть построена; зависимости $C(\tau)$, $H(\tau)$, $\rho(\tau)$, $G(\tau)$ при этом считаются известными при $\tau \in T_\tau$.

В случае, когда значение вектора $\tau = \text{const}$ не известно, воспользоваться законом управления (3.55) непосредственно не представляется возможным. Тогда в адаптивном варианте существуют некоторые пути учета зависимости (3.55).

Первый подход, называемый *идентификационным*, состоит в использовании закона управления вида

$$u(t) = C[\, \bar{\tau}(t)\,]\, y(t), \qquad (3.61)$$

где $\bar{\tau}(t)$ — настраиваемая оценка в момент времени t неизвестного вектора τ. Этот подход базируется на использовании зависимости $C(\tau)$, а синтез управления при этом сводится к идентификации ОУ (3.52).

Второй подход, называемый *прямым*, не использует зависимость $C(\tau)$ и состоит в формировании закона управления по правилу

$$u(t) = C(t)\, y(t), \qquad (3.62)$$

где настройка коэффициентов обратной связи осуществляется непосредственно с помощью некоторой матрицы настраиваемых параметров $\bar{C}(t)$.

3.4.2. Алгоритм идентификационной настройки параметров. Рассмотрим алгоритм управления (3.61). Наложим на ОУ (3.52) ограничения: предположим, что измерению доступен весь вектор состояния $x(t)$, а матрица H в соотношении (3.56) не зависит от τ. При таких ограничениях найдем закон изменения оценок $\bar{\tau}(t)$, обеспечивающих равномерную ограниченность функции (3.58) на траекториях системы управления (3.52), (3.61).

Продифференцируем функцию $V(x)$ (3.58) и тогда с учетом уравнения (3.52) получим

$$\dot{V}[\,x(t)\,] \le -\,x^*(t)\,G[\,\bar{\tau}(t)\,]\,x(t) + \\ + \frac{\|\,H\,\|\,C_v^2}{\rho[\,\bar{\tau}(t)\,]} + 2x^*(t)\,H\big\{\,A(\tau) - A[\,\bar{\tau}(t)\,]\,\big\}\,x(t) + \\ + \,2x^*(t)\,H\big\{\,B(\tau) - B[\,\bar{\tau}(t)\,]\,\big\}\,u. \qquad (3.63)$$

Дополнительно потребуем, чтобы матрицы A и B зависели от вектора τ линейно. Тогда имеем

$$x^*(t)\,H\big\{\,A(\tau) - A[\,\bar{\tau}(t)\,]\,\big\}\,x(t) + \\ + \,x^*(t)\,H\big\{\,B(\tau) - B[\,\bar{\tau}(t)\,]\,\big\}\,u(t) = F^*(t)\,[\,\tau - \bar{\tau}(t)\,],$$

где вектор $F(t)$ выражается через сенсор, а значит он доступен измерению $\forall\,t$.

Преобразуем выражение (3.63) к виду

$$\dot{V}[\,x(t)\,] \le -\,x^*(t)\,G[\,\bar{\tau}(t)\,]\,x(t) + \\ + \,2F^*(t)\,[\,\tau - \bar{\tau}(t)\,] + \frac{\|\,H\,\|\,C_v^2}{\rho\,[\,\bar{\tau}(t)\,]}. \qquad (3.64)$$

Алгоритм получения настраиваемых оценок $\bar{\tau}(t)$ зададим уравнением

$$\dot{\bar{\tau}}(t) = \frac{d\,\bar{\tau}(t)}{dt} = P[\,F(t) - \gamma\,\bar{\tau}(t)\,], \qquad (3.65)$$

где P — произвольная положительная матрица, γ — некоторое неотрицательное число. Тогда неравенство (3.64) запишется так:

$$\dot{\bar{V}} \le -\,x^*(t)\,G[\,\bar{\tau}(t)\,]\,x(t) + \\ + \frac{\|\,H\,\|\,C_v^2}{\rho\,[\bar{\tau}(t)\,]} - \gamma\,\|\,\bar{\tau}(t) - \tau\,\|^2 + \gamma\,\|\,\tau\,\|^2, \qquad (3.66)$$

где введены обозначения

$$\bar{V}(t) \equiv x^*(t)\,H\,x(t) + \|\,\bar{\tau}(t) - \tau\,\|^2_{P^{-1}},$$

$$\|\,\bar{\tau} - \tau\,\|^2_{P^{-1}} \equiv [\,\bar{\tau}(t) - \tau\,]^*\,P^{-1}\,[\bar{\tau}(t) - \tau\,].$$

Из неравенства (3.66) следует, что если равномерно по $\tau \in T_\tau$ выполняются неравенства: $G(\tau) \ge \lambda_G > 0$ и $\rho(\tau) \ge \rho > 0$, то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\;\bar{V}(t) \le \frac{\|\,H\,\|^2\,C_v^2}{\lambda_G\rho} + \|\,\tau\,\|^2$$

при выборе $\gamma = \lambda_G/\|\,H\,\|$ в алгоритме (3.65).

Итак, алгоритм настройки параметров (3.65) определяется через сенсор и обеспечивает диссипативность системы управления. Заметим, что вывод алгоритма адаптации (3.65) опирался на предположение о линейной зависимости коэффициентов ОУ (3.52) от вектора неизвестных параметров τ.

3.4.3. Алгоритм прямой настройки коэффициентов регулятора. Продифференцируем функцию $V(x)$ (3.58) по t в силу уравнения ОУ (3.52):

$$\dot{V}[\,x(t)\,] \le -\,x^*(t)\,G(\tau)\,x(t) - [\,\rho(\tau) - \rho'(\tau)\,]\,V[\,x(t)\,] + \\ + \,2y^*(t)\,[\bar{C}(t) - C(\tau)\,]^*B^*(\tau)\,H(\tau)\,x(t) + \frac{\|\,H(\tau)\,\|\,C_v^2}{\rho'(\tau)}. \qquad (3.67)$$

Отметим здесь, что при $\bar{C}(t) = C(\tau)$ получим, очевидно, неравенство (3.60).

Дополнительно будем считать, что матрица $H(\tau)$ удовлетворяет равенству

$$B^*(\tau)\,H(\tau) = LD, \qquad (3.68)$$

где D — матрица из уравнения (3.52), а L — некоторая матрица соответствующей размерности, не зависящая от τ. Тогда в неравенстве (3.67) предпоследнее слагаемое можно записать в виде

$$2y^*(t)\,[\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,]^*L\,y(t) = 2\mathrm{Sp}\,\big\{\,Lyy^*\,[\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,]^*\,\big\}.$$

Матрица Lyy^* выражается через сенсор; значит, $\forall\, t$ она может быть использована для получения настраиваемых оценок $\bar{C}(t)$.

Алгоритм получения $\bar{C}(t)$ зададим так:

$$\dot{\bar{C}}(t) = -\,P\,\big[\,L\,y(t)\,y^*(t) + \gamma\,\bar{C}(t)\,\big], \tag{3.69}$$

где P — произвольная симметрическая положительная матрица, γ — неотрицательное число. Тогда

$$2y^*(t)\,[\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,]^*L\,y(t) \;=$$

$$=\; \frac{d}{dt}\,\|\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,\|^2_{P^{-1}} - \gamma\,\|\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,\|^2 + \gamma\,\|\,C(\tau)\,\|^2,$$

где обозначено

$$\|\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,\|^2_{P^{-1}} \equiv \mathrm{Sp}\,\big\{\,[\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,]^*\,P^{-1}\,[\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,]\,\big\} \tag{3.70}$$

и использованы алгебраические соотношения

$$\mathrm{Sp}\,ab^* = \mathrm{Sp}\,ba^*, \qquad 2\mathrm{Sp}\,a^*P^{-1}b = \mathrm{Sp}\,a^*P^{-1}a + \mathrm{Sp}\,b^*P^{-1}b.$$

С учетом написанных выражений неравенство (3.67) запишем в виде

$$\dot{\bar{V}}(t) \le -\,[\,\rho(\tau) - \rho'(\tau)\,]\,\bar{V}(t) \;+$$

$$+\;\frac{\|\,H(\tau)\,\|\,C_v^2}{\rho'(\tau)} + 2\,[\,\rho(\tau) - \rho'(\tau)\,]\,\|\,C(\tau)\,\|^2, \tag{3.71}$$

где обозначено

$$\bar{V}(t) = x^*(t)\,H(\tau)\,x(t) + \|\,\bar{C}(t) - C(\tau)\,\|^2_{P^{-1}}$$

и положено, что $\gamma \ge \rho(\tau) - \rho'(\tau)$.

Из неравенства (3.71) вытекает справедливость оценки

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\bar{V}(t) \le \frac{\|\,H(\tau)\,\|\,C_v^2}{\rho'(\tau)\,[\,\rho(\tau) - \rho'(\tau)\,]} + \|\,C(\tau)\,\|^2_{P^{-1}} \equiv C_{\bar{V}}(\tau),$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,x^*(t)\,H(\tau)\,x(t) \le C_{\bar{V}}(\tau),\;\; \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\|\,C(t) - C(\tau)\,\|^2_{P^{-1}} < C_{\bar{V}}(\tau). \tag{3.72}$$

Из неравенств (3.72) в свою очередь вытекает равномерная по t ограниченность $\|\,x(t)\,\|$. Если к тому же имеет место включение (ср. с (3.57)):

$$\big\{\,x^*\,H(\tau)\,x \le C_{\bar{V}}(\tau)\,\big\} \subseteq \big\{\,\sup_{\bar{C}(t)}\; Q[\,Dx,\,\bar{C}(t)\,Dx\,] \le C_Q\,\big\},$$

где $Q(\cdot)$, $\bar{C}(t)$, C_Q — величины из соотношений (3.54), (3.57), а также (3.62), то тогда обеспечивается ЦУ (3.54).

Заметим, что в случае отсутствия каких-либо возмущений (помех), т.е. когда $C_v = 0$, из неравенств (3.72) вовсе не следует, что система управления (3.52), (3.62) будет асимптотически устойчивой. Из неравенства (3.67) при $C_v = 0$ вытекает, что асимптотическую устойчивость по x можно обеспечить, если в алгоритме (3.69), (3.70) задать $\gamma = 0$. Однако надо иметь в виду, что система управления (3.52), (3.62) при $\gamma = 0$ является неустойчивой при сколь угодно малом уровне C_v возмущений $v(t)$, действующих на ОУ (3.52) [136].

Глава 4

Специальные вопросы теории устойчивости

Теория устойчивости динамических процессов, описываемых различными классами дифференциальных уравнений (ДУ), тем самым имеет разнообразные методы исследования и сферы применения. О части из них , быть может, наиболее распространенных и важных было уже сказано в предыдущих трех главах. Тем не менее, остаются еще многие области для рассмотрения и использования результатов теории устойчивости, требующие внимания.

Среди этого обилия направлений аналитического решения задач, связанных с вопросами устойчивости, были отобраны задачи, нашедшие широкое отражение и изучение в различных областях механики (см., например, работы [6-9, 40, 47, 59, 84, 86, 87, 92, 101, 108, 148, 168]), в системах ДУ с распределенныи параметрами [18, 19, 50, 52, 127, 128], в системах ДУ в банаховом пространстве [10, 36, 57, 67-69, 88, 141, 162], в стохастических системах ДУ [35, 61, 62, 70, 96, 134, 142-145, 164, 165].

Отметим также, что основным методом исследования устойчивости для систем, описываемых различными типами ДУ, попрежнему остается прямой метод Ляпунова и его модификации — второй метод, по сути, выполняет здесь роль основного аналитического инструмента для качественного изучения того или иного динамического явления на наличие устойчивости.

В § 4.1 включены вопросы устойчивости движения механических систем (МС). Изучаются движения голономных МС, описываемых уравнениями Лагранжа 2–го рода. Вводятся понятия их невозмущенного и возмущенного решения (движения), устойчивого и неустойчивого движения, состояния покоя. Основное внимание концентрируется на теореме Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной голономной МС и вариантах ее обращения — теоремах об условиях неустойчивости положения равновесия. Сюда включен также раздел о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость МС.

В § 4.2 рассматриваются лишь некоторые, хорошо изученные задачи теории устойчивости динамических систем, описываемых ДУ в частных производных. Вводятся вспомогательные понятия инвариантного множества и инвариантного устойчивого (асимптотически устойчивого) множества. Определяются необходимые и достаточные условия устойчивости решений систем ДУ с частными производными в метрическом пространстве. Анализируются также вопросы, посвященные устойчивости квазилинейных систем ДУ в частных производных.

§ 4.3 посвящен обзорному исследованию устойчивости решений уравнений, заданных в банаховом пространстве. Изложены основные результаты в этой области, полученные многими специалистами. Особое место уделяется вопросам устойчивости решений нелинейных ДУ. Даются основные понятия, характерные для ДУ в банаховом пространстве и устанавливаются различные критерии устойчивости решений рассматриваемых уравнений.

В § 4.4 бегло анализируются задачи устойчивости того или иного вида стохастических систем, подверженных действию белых шумов. Сами же системы задаются стохастическими ДУ Ито. Приводится ряд теорем, которые можно рассматривать как естественное обобщение теорем второго метода Ляпунова об устойчивости на стохастические системы.

4.1 Устойчивость движения механических систем

Акцентируем внимание на некоторых особенностях движения механических систем (МС) в ситуациях, связанных с выяснением вопросов об устойчивости движения. При этом вновь возвращаться к изложению всех аспектов второго метода Ляпунова не будем, полагая, что основные определения, понятия и идеи уже известны. Исключения коснутся лишь ляпуновской методологии применительно к движению МС (подробности см. в книге [101]).

4.1.1. Движения. Будем в дальнейшем рассматривать лишь движения голономных МС с конечным числом степеней свободы, т.е. таких МС, движения которых описываются *уравнениями Лагранжа 2–го рода:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \qquad s = \overline{1,l}. \tag{4.1}$$

Здесь обозначено: $q_s, \dot q_s$ — обобщенные координаты и скорости МС соответственно, T — ее кинетическая энергия, Q_s — обобщенная сила по координате s.

Систему (4.1), как известно, можно заменить системой $2l$ уравнений первого порядка вида

$$\frac{dq_s}{dt} = \eta_s, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s. \tag{4.2}$$

В случае, если все силы потенциальны, можно с помощью функции Лагранжа $L(q, \dot q, t)$ записать систему уравнений в виде

$$\frac{dq_s}{dt} = \eta_s, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s}, \tag{4.3}$$

либо в канонической форме

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s},$$

где $p_s = \partial L/\partial \dot q_s$ — это обобщенный импульс, $H(q, p, t)$ — функция Гамильтона.

Уравнения Лагранжа 2–го рода в задачах классической механики всегда разрешимы относительно вторых производных (ускорений) по времени. Следовательно, систему (4.2) ((4.3)) можно представить в нормальной форме

$$\frac{dq_s}{dt} = \eta_s, \qquad \frac{d\eta_s}{dt} = Z_s(q, \eta, t), \tag{4.4}$$

где начальным значениям $q_{s0}, \dot q_{s0}$ или q_{s0}, η_{s0} отвечает некоторое частное решение системы (4.4) в предположении выполнения условий существования и единственности решения системы (4.4).

Из множества частных решений выберем одно: $q_s = \varphi_s(t)$, $\dot q_s = \psi(t)$ и будем его считать *невозмущенным* с порождающими начальными значениями $\bar q_{s0}$ и $\dot{\bar q}_{s0}$. При $t_0 = 0$ имеем: $\varphi_s(0) = \bar q_{s0}$, $\psi_s(0) = \dot{\bar q}_{s0}$. Любое другое частное решение системы (4.4) назовем *возмущенным* с начальными значениями

$$q_s(0) \equiv q_{s0} = \bar q_{s0} + \varepsilon_s, \qquad \dot q_s(0) \equiv \dot q_{s0} = \dot{\bar q}_{s0} + \varepsilon'_s.$$

Считаем все величины вещественными; постоянные $\varepsilon_s, \varepsilon'_s$ назовем *начальными возмущениями*, а разности $q_s(t) - \varphi_s(t)$ и $\dot q_s(t) - \psi_s(t)$, где $t \ge t_0$, назовем *возмущениями обобщенных координат и обобщенных скоростей.*

В силу единственности решения системы ДУ возмущения равны нулю, если начальные возмущения ε_s и ε'_s равны нулю. Если же $\varepsilon_s, \varepsilon'_s \ne 0$, то и возмущения в последующем отличны от нуля.

Интуитивно ясно, что невозмущенное движение является *устойчивым*, если при достаточно малых $\varepsilon_s, \varepsilon'_s$ возмущения при $t \ge t_0$ не выйдут за некоторые заданные, малые числовые пределы. В противном случае имеем *неустойчивое* невозмущенное движение.

Для исследования *состояния покоя* системы запишем уравнения движения в нормальной форме. Обозначим

$$q_s(t) - \varphi_s(t) = x_s(t), \qquad \dot q_s(t) - \psi_s(t) = x_{l+s}(t), \qquad s = \overline{1,l}.$$

При подстановке функций $\varphi_s(t)$ и $\psi_s(t)$ в систему (4.4) получим тождества

$$\frac{d\varphi_s}{dt} \equiv \eta_s, \qquad \frac{d\psi_s}{dt} \equiv Z_s(\varphi, \psi, t). \tag{4.5}$$

Вычтем почленно соотношения (4.5) из (4.4); тогда придем к системе ДУ для возмущений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x, t), \qquad i = \overline{1, 2l}, \tag{4.6}$$

где положим, что $\forall\, t$ функции X_i конечны, однозначны и непрерывно дифференцируемы по своим аргументам в области $|\,x_i\,| \le C = \mathrm{const}$. Кроме того, $X_i(0, t) = 0$, значит, невозмущенному движению отвечает нулевое решение системы (4.6).

Введем еще функцию Ляпунова $V(x,t)$, определенную при $t \geq t_0$, $|\,x_s(t)\,| < \Delta$, $\Delta > 0$, которая представляет собой вещественную, однозначную, непрерывно дифференцируемую функцию своих переменных. Следующая *теорема Ляпунова* дает достаточное условие устойчивости невозмущенного движения: если ДУ возмущенного движения таковы, что можно найти знакоопределенную функцию $V(x,t)$, производная которой по времени в силу этих ДУ была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с $V(x,t)$, или тождественно равной нулю (в этом случае $V(x,t)$ — интеграл системы ДУ возмущенного движения), то невозмущенное движение устойчиво.

4.1.2. Теорема Лагранжа и ее обращение. Речь идет о теореме Лагранжа о достаточном условии устойчивости положения равновесия. Положения равновесия могут быть найдены, исходя из статического принципа виртуальных перемещений. Определив интересующее положение, поместим в него начало координат: в положении равновесия все обобщенные координаты будут равны нулю. Затем возьмем в качестве невозмущенного состояния состояние равновесия, или, иначе, состояние покоя, в котором все обобщенные скорости также равны нулю. Следовательно, устойчивость невозмущенного состояния равновесия эквивалентна устойчивости нулевого решения системы (4.4).

Теорема 4.1 (Теорема Лагранжа). *Положение равновесия консервативной голономной системы устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум.*

Поясним это утверждение. Из условия консервативности системы вытекает, что обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы формулы преобразования не содержали время ($\partial/\partial t = 0$). Отсюда кинетическая энергия системы — это однородная квадратичная форма обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от q, но не зависящими от t :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} A_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Здесь $T = 0$ тогда и только тогда, когда все $\dot{q} = 0$, причем в некоторой окрестности точки состояния покоя: $|\,q\,| < \Delta$, $|\,\dot{q}\,| < \Delta$, кинетическая энергия T будет возрастать вместе с $|\,\dot{q}\,|$.

Что касается потенциальной энергии $\Pi(q)$, то она определяется с точностью до постоянной. Зададим эту постоянную так, чтобы в положении равновесия потенциальная энергия была равна нулю. Значит, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум и $\Pi(0) = 0$, то в некоторой окрестности этого положения $|\,q\,| < \Delta$ имеем: $\Pi(q_1, \ldots, q_l) > 0$.

Возьмем за функцию Ляпунова функцию $E = T + \Pi$ — полную энергию системы, зависящую от q и $\dot{q}$ — переменных состояния движения МС. Функция $E(q,\dot{q})$ есть знакоопределенная положительная функция, равная нулю в состоянии равновесия. В силу консервативности системы и уравнений возмущенного движения $\dot{E} = 0$. Следовательно, по теореме Ляпунова невозмущенное состояние (состояние покоя) устойчиво.

Пусть в области $|\,q\,| < \Delta$, $|\,\dot{q}\,| < \Delta$ функция $E(q,\dot{q})$ возрастает с удалением от начала координат, т.е. с удалением от точки, отвечающей невозмущенному состоянию покоя. Пусть $0 < \varepsilon < \Delta$. На точках ε–границы имеем: $E(q,\dot{q})\big|_{\varepsilon} = \min E \equiv E_*$. Зададим начальные возмущения q_0 и $\dot{q}_0$ так, чтобы $|\,q_0\,| < \delta$, $|\,\dot{q}_0\,| < \delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$. Тогда справедливо будет неравенство

$$E = E_0 = T_0 + \Pi_0 < E_*,$$

что означает невыход за пределы ε–границы.

При полной диссипации: $\dot{E} < 0$ и E с течением времени будет убывать, величины $q, \dot{q}$ будут стремиться к нулю, а устойчивость состояния равновесия в этом случае будет асимптотической.

В работе [84] А.М. Ляпунов поставил задачу об обращении теоремы Лагранжа и доказал теорему о достаточных условиях неустойчивости положения равновесия при некоторых ограничениях на силовой потенциал. Н.Г. Четаев [148], обобщая результаты Ляпунова, предложил вариант теоремы о неустойчивости в виде достаточных условий неустойчивости невозмущенного состояния системы.

Зададим возмущенное движение системой ДУ (4.6) с начальными данными $x_i(t_0) = x_{i0}$. Нулевое решение этой системы отвечает невозмущенному состоянию системы. Пусть $|x_s| \leq h$ — некоторая малая окрестность начала координат. Рассмотрим функцию $V(x_1, x_2, ..., x_{2l}, t)$, принимающую положительные значения в какой-либо части этой малой окрестности и за ее пределами (назовем ее областью $V > 0$, ограниченную кривой $V = 0$). Отметим свойства функции V в области $V > 0:$ 1) область $V > 0$ существует при любых сколь угодно больших значениях t; 2) в области $V > 0$ функция V ограничена; 3) в области $V > 0$ величина $\dot{V}$ с учетом уравнений возмущенного движения принимает положительные значения и $\forall\, x_s, t$ таких, что $V(x_1, ..., x_{2l}, t) \geq A > 0$, выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} \geq B > 0, \qquad B = f(A),$$

где A, B — некоторые положительные постоянные.

Теорема 4.2 (Теорема Четаева). *Если для ДУ возмущенного движения можно найти функцию V, удовлетворяющую условиям* 1), 2), 3), *то невозмущенное движение неустойчиво.*

Многие исследователи занимались задачей обращения теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы [59]. Задача о том, будет ли неустойчивым положение равновесия консервативной системы, если в этом положении потенциальная энергия Π не имеет минимума, до сих пор полностью не решена. Следующие две теоремы включают достаточные условия неустойчивости положения равновесия.

Теорема 4.3 (Теорема Ляпунова). *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет максимум и это определяется совокупностью членов наинизшего порядка в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то равновесие неустойчиво.*

Обобщением этой теоремы Ляпунова является следующая *теорема Четаева.*

Теорема 4.4. *Пусть в положении равновесия $q_1 = 0, q_2 = 0, ..., q_l = 0$. Если потенциальная энергия Π консервативной системы является однородной функцией отклонений q_s от положения равновесия и в положении равновесия не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво.*

Модельный пример. Рассматривается задача об устойчивости равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости [87]. Положим, что тело ограничено выпуклой поверхностью σ. Пусть общая нормаль (вертикаль) к горизонтальной плоскости и к поверхности σ в некоторой ее точке D_* содержит центр тяжести тела C. Тогда тело на плоскости может быть в состоянии равновесия, при этом в точке D_* поверхность тела σ соприкасается с плоскостью.

Введем связанную с телом СК $Cxyz$, где ось Cz содержит отрезок прямой D_*C, а оси Cx и Cy направлены параллельно линиям кривизны поверхности тела σ в точке D_*. В этом случае уравнение поверхности тела σ в окрестности точки D_* можно записать так:

$$f \equiv -h - z + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}\right) + \ ... \ = 0, \tag{4.7}$$

где x, y, z — координаты точки D поверхности σ, в которой тело касается плоскости при малом отклонении тела от положения равновесия, h — расстояние центра тяжести тела от опорной горизонтальной плоскости в положении равновесия: $x = y = 0$, $z = -h$; здесь r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела σ в точке D_* ($r_1, r_2 > 0$, так как σ выпукла и целиком расположена над опорной плоскостью). В уравнении (4.7) в многоточие входят члены по x и y, порядок которых выше второго.

Потенциальную энергию Π зададим формулой

$$\Pi = mgl, \tag{4.8}$$

где $l = -(n, CD)$ — расстояние от центра тяжести до касательной плоскости к поверхности тела σ; n — единичная внутренняя нормаль в точке D, m — масса тела, g — ускорение свободного падения. Из уравнения (4.7) и выражения: $n = -\operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f|$ получим компоненты вектора n :

$$\gamma_1 = -\frac{x}{r_1} + ..., \quad \gamma_2 = -\frac{y}{r_2} + ..., \quad \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2}\right) + \ldots . \tag{4.9}$$

Если учесть, что $CD = (x, y, z)$, и пренебречь в выражении для Π несущественной добавкой mgh, то с помощью соотношений (4.7) –

(П4.9) получим

$$\Pi = \frac{1}{2}\, mg \left[\frac{(r_1 - h)\, x^2}{r_1^2} + \frac{(r_2 - h)\, y^2}{r_2^2} \right] \; + \; \ldots .$$

Отсюда и из теоремы Лагранжа вытекает, что если центр тяжести тела C расположен ниже обоих главных центров кривизны поверхности тела σ в точке его касания с опорной плоскостью, то положение равновесия устойчиво. В случае же, когда центр тяжести находится выше хотя бы одного из главных центров кривизны, то по теореме Ляпунова имеем неустойчивость.

4.1.3. Влияние диссипативных и гироскопических сил. Рассмотрим голономную МС, движущуюся под действием консервативных сил. При добавлении к этой системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа 4.1 при наличии строгого локального минимума потенциальной энергии П остается в силе [87], т.е. положение равновесия системы при таком добавлении сил остается по-прежнему устойчивым. Ниже по этому поводу представлены некоторые результаты, содержащиеся в *теоремах Томсона–Тэта–Четаева.*

Теорема 4.5. *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

Предположим затем, что положение равновесия консервативной МС неустойчиво. Поставим вопрос: можно ли путем добавления диссипативных сил стабилизировать его? Другими словами, можно ли каким-либо способом добавить диссипативные силы, чтобы неустойчивое при наличии потенциальных сил положение равновесия стало устойчивым, а возможно даже и асимптотически устойчивым? Ответ известен — он отрицательный.

Для его формализации введем некоторые вспомогательные понятия. Предположим, что кинетическая энергия консервативной системы в окрестности положения равновесия представляет собой определенно положительную квадратичную форму обобщенных скоростей вида

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \dot q_i \dot q_k \tag{4.10}$$

с постоянными коэффициентами a_{ik}. Кроме того, положим, что в окрестности положения равновесия $q_1 = q_2 = \ \ldots \ = q_n = 0$ потенциальная энергия разлагается в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем квадратичная часть этого ряда не равна тождественно нулю и

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\, q_i q_k, \tag{4.11}$$

где c_{ik} — постоянные коэффициенты.

С помощью вещественной неособенной линейной замены переменных $q \to \theta$ вида: $q = U\theta$, $\det\, U \neq 0$, квадратичные формы (4.10), (4.11) можно одновременно привести к сумме квадратов относительно новых переменных θ_i :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot\theta_i^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i^2.$$

Согласно Пуанкаре числа λ_i называются *коэффициентами устойчивости.* Если функция (4.11) определенно положительна, то все величины λ_i положительны и положение равновесия устойчиво. В случае, если хотя бы одна из величин λ_i отрицательна, то положение равновесия неустойчиво.

Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется *степенью неустойчивости.* Большое значение при этом играет четность или нечетность степени неустойчивости. Если C — матрица квадратичной формы (4.11), то $\det\, C = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Имеем отсюда: если $\det\, C > 0$, то степень неустойчивости четная или равна нулю; если же $\det\, C < 0$, то степень неустойчивости нечетная.

Теорема 4.6. *Если среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным, то изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.*

В связи с этой теоремой возникает вопрос о возможности стабилизации положения равновесия с помощью гироскопических сил. Обратимся к следующей теореме, полагая, что действующие гироскопические силы линейно зависят от обобщенных скоростей.

Теорема 4.7. *Если степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна, то стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна, если же степень неустойчивости четна, то гироскопическая стабилизация возможна.*

Теорема 4.8. *Если изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости, то оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.*

Из представленных выше теорем Томсона–Тэта–Четаева вытекают такие выводы [87]:

1. Добавление диссипативных сил не нарушает устойчивости (неустойчивости) изолированного положения равновесия консервативной системы.

2. Добавление гироскопических сил при четной степени неустойчивости может стабилизировать неустойчивое положение равновесия.

3. Если неустойчивое положение равновесия стабилизировано гироскопическими силами, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией положение равновесия вновь будет неустойчивым.

Зетим также, что устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, называют *временной* в отличие от устойчивости, которая имеется при наличии лишь потенциальных сил и которую называют *вековой*.

4.2 Устойчивость систем с распределенными параметрами

В этом параграфе рассматриваются некоторые задачи теории устойчивости применительно к системам ДУ в частных производных. Большинство исследований устойчивости в задачах, связанных с уравнениями в частных производных, основано на построе-

нии соответствующего аналога второго метода Ляпунова. В этом смысле материал данной части не является исключением и базируется на результатах двух известных работ [50, 52].

В этих работах исследуются динамические системы в метрическом пространстве и вопрос об устойчивости инвариантных множеств, состоящих из траекторий. По сути, делается обобщение второго метода Ляпунова на случай, когда функции Ляпунова V заменяются функционалами.

4.2.1. Основные понятия и определения. Рассматривается система ДУ в частных производных следующего вида

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s\left(x_1, ..., x_k, u_1, ..., u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, ...\right), \tag{4.12}$$

где $i, s = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$, в предположении, что функции f_s заданы и непрерывны в некоторой области G изменения всех своих аргументов, $G \subset E_N$ — евклидово пространство размерности N.

Введем в рассмотрение функциональное пространство Φ с элементами в виде вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, где $\varphi_i = \varphi_i(x_1, ..., x_k)$ — функции, заданные в E_k. Будем считать это пространство Φ метрическим, или линейным нормированным (напомним, линейное нормированное пространство является частным случаем метрического пространства).

Положим, что $\forall\, \varphi \in \Phi$ можно построить решение $U = U(\varphi, t)$ системы (4.12), где $U = (u_1, ..., u_n)$ такое, что $U(\varphi, t)$ определено $\forall\, t \in (-\infty, \infty)$, причем $U(\varphi, t) \in \Phi$, $U(\varphi, 0) = \varphi$. Кроме того, полагаем, что $U(\varphi, t)$ непрерывно по φ и t и $U(\varphi, t) \equiv 0$ при $\varphi = 0$.

Таким образом, допускаем, что система (4.12) имеет нулевое решение и вопрос об устойчивости этого решения выдвигается на первый план. При сделанных предположениях о системе (4.12) в пространстве Φ определена динамическая система $U(\varphi, t)$ и точка $\varphi = 0$ является замкнутым инвариантным множеством этой системы. Для дальнейшего изучения нам потребуются некоторые определения.

Определение 4.1. *Множество M из метрического пространства K называется инвариантным по отношению к динамической системе $f(p, t)$ (семейству операторов $F_t(p) = f(p, t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, заданных в K : $\forall\, p \in K \Longrightarrow F_t(p) \in K$, $F_0(p) = p$), если* *оно состоит из траекторий этой динамической системы, т.е. из* $p \in M$ *следует, что* $f(p,t) \in M$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Определение 4.2. *Замкнутое в* K *инвариантное множество* M *называется устойчивым по Ляпунову, если* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ — *величина такая, что при* $\rho(p,M) < \delta \Longrightarrow \rho[\, f(p,t),\, M\,] < \varepsilon$ *при* $t \geq 0$. *Если, кроме того,* $\rho[\, f(p,t),\, M\,] \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то замкнутое инвариантное множество* M *называется асимптотически устойчивым.*

Здесь через $\rho(x,y)$ обозначено метрическое расстояние между элементами x и y.

Определение 4.3. *Решение* $U = 0$ *системы* (4.12) *называется устойчивым, если* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *такое, что при* $\rho(\varphi, 0) < \delta$ *будет* $\rho[\, U(\varphi,t),\, 0\,] < \varepsilon$ *при* $t \geq 0$. *Если, кроме того,* $\rho[\, U(\varphi,t),\, 0\,] \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то решение* $U = 0$ *называется асимптотически устойчивым. Здесь* $\rho(\varphi, 0)$ — *метрическое расстояние между элементами* φ *и* 0.

Определение 4.4. *Множество всех точек* $\varphi \in \Phi$, *обладающих свойством* $\rho[\, U(\varphi,t),\, 0\,] \to 0$ *при* $t \to \infty$, *будем обозначать через* A. *Если решение* $U = 0$ *асимптотически устойчиво, то множество* A *называется областью асимптотической устойчивости нулевого решения системы* (4.12).

Определение 4.5. *Асимптотически устойчивое решение* $U = 0$ *системы* (4.12) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если* $\rho[\, U(\varphi,t),\, 0\,] \to 0$ *при* $t \to \infty$ *равномерно по* φ.

Определение 4.6. *Точка* $U = 0$ *в случае асимптотической устойчивости называется равномерно притягивающей, если* $\forall\, h > 0\ \exists\, T, \alpha > 0$ — *такие величины, что* $\rho[\, U(\varphi,t),\, 0\,] \geq \alpha$, *когда* $t \in [\,0, T\,]$ *и* $\rho(\varphi, 0) \geq h$.

Теорема 4.9. *Чтобы открытое инвариантное множество* A, *содержащее малую окрестность точки* $\varphi = 0$, *было областью асимптотической устойчивости равномерно асимптотически устойчивого и равномерно притягивающего нулевого решения системы* (4.12), *необходимо и достаточно, чтобы существовали функционалы* $V(\varphi)$ *и* $W(\varphi)$, *обладающие следующими свойствами:*

1) *функционал* $V(\varphi)$ *задан и непрерывен в* A, *функционал* $W(\varphi)$ *задан и непрерывен в* Φ;

2) *при* $\varphi \in A$ *имеем:* $V(\varphi) \in (-1, 0)$; *при* $\varphi \in \Phi$ *и* $\rho(\varphi, 0) > 0$ *имеем:* $W(\varphi) > 0$;

3) $\forall\, \gamma_2 > 0\ \exists\, \gamma_1, \alpha_1 > 0$ — *величины такие, что имеют место неравенства* $V(\varphi) < -\gamma_1$, $W(\varphi) > \alpha_1$ *при* $\rho(\varphi, 0) \geq \gamma_2$;

4) $W(\varphi) \to 0$, $V(\varphi) \to 0$ *при* $\rho(\varphi, 0) \to 0$;

5) *если* $\bar{\varphi}$ — *точка границы области* A *и* $\rho(\varphi, 0) \neq 0$, *то* $V(\varphi) \to -1$ *при* $\rho(\varphi, \bar{\varphi}) \to 0$, $\varphi \in A$;

6) *полная производная по времени функционала* $V(\varphi)$, *вычисленная на движении* $U(\varphi, t)$, *удовлетворяет соотношению*

$$\frac{d\,V[\,U(\varphi,t)\,]}{dt} = W[\,U(\varphi,t)\,]\,\{\,1 + V[\,U(\varphi,t)\,]\,\},$$

или, короче, $\dot{V} = W\,(1 + V)$.

Укажем на то, что множество элементов $\varphi \in \Phi$ таких, что $V(\varphi) \in (-1, 0)$, образует сечение A, т.е. любое решение $U(\varphi, t)$, $\varphi \in A$ имеет с этим множеством единственную общую точку.

Добавим в правую часть системы (4.12) время t и рассмотрим систему ДУ вида

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s\left(t, x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots\right), \tag{4.13}$$

где $i, s = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$, и правые части заданы и непрерывны при $t \geq 0$ в некоторой области G изменения своих аргументов $x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \partial u_i/\partial x_j, \ldots$; $G \subset E_N$.

Будем считать, что $\forall\, \varphi \in \Phi$, $t_0 \geq 0$ существует решение системы (4.13) $U = U(\varphi, t, t_0)$ со свойствами: 1) $\forall\, \varphi \in \Phi$ решение $U(\varphi, t, t_0)$ определено $\forall\, t > t_0$ и $U(\varphi, t, t_0) \in \Phi\ \forall\, t \geq t_0 \geq 0$; 2)$U(\varphi, t, t_0) = \varphi$ при $t = t_0$.

Предположим также, что система (4.13) имеет нулевое решение $U \equiv 0$, являющееся инвариантным множеством этой системы, т.е. из $\varphi = 0$ следует, что

$$U(\varphi, t, t_0) = 0, \qquad t \geq t_0. \tag{4.14}$$

Определение 4.7. *Инвариантное множество* $U = 0$ *называется устойчивым, если* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *такое, что при* $\rho(\varphi, 0) < \delta$

имеет место неравенство

$$\rho[\,U(\varphi,t,t_0),\,0\,]<\varepsilon,\qquad t_0\in[\,0,t\,].$$

Если, помимо этого,

$$\rho[\,U(\varphi,t,t_0),\,0\,]\to 0\qquad при\qquad t\to\infty,$$

то решение $U=0$ называется асимптотически устойчивым.

Теорема 4.10. *Для того, чтобы решение $U=0$ системы* (4.13) *со свойством* (4.14) *было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое однопараметрическое семейство функционалов, что*

1) $\forall\,\varphi\in S(0,r)$ *определена функция $V_t(\varphi)$ вещественного аргумента $t\geq 0$, где $S(0,r)$ — совокупность функций φ таких, что* $0<\rho(\varphi,0)<r$;

2) $\forall\,c_1>0\ \exists\,c_2>0$ — *величина такая, что $V_t(\varphi)>c_2$ при* $\rho(\varphi,0)>c_1$ *и* $\forall\,t\geq 0$;

3) $V_t(\varphi)\to 0$ *равномерно по $t\geq 0$ при* $\rho(\varphi,0)\to 0$;

4) *функция $V_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]$ не возрастает $\forall\,t\geq t_0$, для которых она определена;*

5) *если, кроме того, функция $V_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]\to 0$ при $t\to\infty$ $\forall\,t_0\geq 0$ и $\rho(\varphi,0)<\delta_1$, где $\delta_1>0$ достаточно мало, то решение $U=0$ системы* (4.13), *удовлетворяющее условию* (4.14), *будет асимптотически устойчивым. Обратное также имеет место: если решение $U=0$ асимптотически устойчиво, то справедливо* 5).

Определение 4.8. *Асимптотически устойчивое нулевое решение системы* (4.13) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если*

$$\rho[\,U(\varphi,t,t_0),\,0\,]\to 0\qquad при\qquad t-t_0\to+\infty$$

равномерно относительно $t_0\geq 0$ при $\rho(\varphi,0)<\delta_2$, где $\delta_2>0$ достаточно мало.

Определение 4.9. *Асимптотически устойчивое нулевое решение системы* (4.13) *называется равномерно притягивающим,*

если $\forall\,h>0\ \exists\,T,\alpha>0$ — величины такие, что

$$\rho[\,U(\varphi,t,t_0),\,0\,]>\alpha\qquad при\qquad 0\leq t_0\leq t\leq t_0+T$$

и $\rho(\varphi,0)>h\ \forall\,t_0\geq 0$.

Теорема 4.11. *В предположении единственности решения задачи Коши для системы* (4.13) *в пространстве Φ для того, чтобы нулевое решение системы* (4.13) *со свойством* (4.14) *было равномерно асимптотически устойчивым и равномерно притягивающим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие семейства функционалов V_t и W_t, что:*

1) $\forall\,\varphi\in S(0,r)$, *где $r>0$ — достаточно мало, определены величины $V_t(\varphi)$ и $W_t(\varphi)$, являющиеся функциями вещественного аргумента $t\geq 0$;*

2) $\forall\,c_1>0\ \exists\,c_2,c_3>0$ — *величины такие, что имеют место неравенства $V_t(\varphi)>-c_2$, $W_t(\varphi)>c_3$ при $\rho(\varphi,0)>c_1$ и $t\geq 0$;*

3) $V_t(\varphi)\to 0$, $W_t(\varphi)\to 0$ *при $\rho(\varphi,0)\to 0$ равномерно относительно $t\geq 0$;*

4) $d\,V_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]/dt=W_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]$.

В следующей теореме сформулированы необходимые и достаточные условия неустойчивости нулевого решения системы (4.13).

Теорема 4.12. *Предполагается, что система* (4.13) *удовлетворяет условиям единственности решения задачи Коши в пространстве Φ. Тогда для того, чтобы нулевое решение системы* (4.13) *было неустойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали семейства функционалов V_t и W_t, обладающие свойствами:*

1) $\forall\,\varphi\in S(0,r)$, *где $r>0$, определены функции $V_t(\varphi)$ и $W_t(\varphi)$ при $t\geq 0$;*

2) *функция $V_t(\varphi)$ ограничена при $t\geq 0$, $\varphi\in S(0,r)$;*

3) $\forall\,\delta>0\ \exists\,\varphi_0,t_0$ *такие, что $V_{t_0}(\varphi_0)>0$, $\rho(\varphi_0,M)<\delta$;*

4) $d\,V_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]/dt=\lambda\,V_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]+W_t[\,U(\varphi,t,t_0)\,]$, *где $W_t(\varphi)\geq 0$, $\lambda=\mathrm{const}>0$.*

Отметим, что представленная выше достаточно общая теория [50, 52] позволяет ставить и решать проблемы устойчивости решений систем ДУ с частными производными не только в случае задачи Коши, но и различных смешанных задач для систем уравнений высшего порядка.

4.2.2. Устойчивость решений квазилинейных систем. Пусть имеется система ДУ в частных производных следующего вида

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(u_1, ..., u_n) + \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i}, \tag{4.15}$$

где $s = \overline{1,n}$, $f_s(u_1, ..., u_n)$ — заданные в E_n непрерывные, ограниченные функции, b_i — вещественные постоянные.

Введем в рассмотрение линейное нормированное пространство Φ с элементами φ, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, где $\varphi_s = \varphi_s(x_1, ..., x_k)$, $s = \overline{1,n}$, — непрерывно дифференцируемые функции по $x_1, ..., x_k$, заданные и ограниченные в E_k вместе со своими производными, полагая при этом, что $\| \varphi \| = \left(\sup_{E_k} \sum_{s=1}^{n} \varphi_s^2 \right)^{1/2}$.

Будем считать, что система (4.15) имеет решение $U = 0$, $U = U(u_1, ..., u_n)$. Возникает вопрос об устойчивости этого решения.

Теорема 4.13. *Пусть функции f_s непрерывно дифференцируемы в E_n. Тогда $\forall \varphi \in \Phi\ \exists U(\varphi, t)$ — семейство функций, обладающих следующими свойствами:*

1) *функции $U(\varphi, t)$ заданы при $t \in (-\infty, \infty)$ и $U(\varphi, t) \in \Phi\ \forall t \in (-\infty, \infty)$;*

2) *функции $U(\varphi, t)$ непрерывны по обоим своим аргументам, т.е. $U(\varphi_1, t_1) - U(\varphi_2, t_2) \to 0$ при $(t_1 - t_2) \to 0$, где $t_2 < \infty$ и $\| \varphi_1 - \varphi_2 \| \to 0$;*

3) *$U(\varphi, t) = \varphi$ при $t = 0$;*

4) *функция $U(\varphi, t)$ является решением системы* (4.15).

Отметим в качестве заключения, что доказательство теоремы 4.13 основано на использовании продолжимости решений системы

$$\frac{du_s}{dt} = f_s(u_1, ..., u_n), \tag{4.16}$$

где $u_s = u_s(t, \varphi_1, ..., \varphi_n)$, $s = \overline{1,n}$,

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_s}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}, \qquad j = \overline{1,k},$$

на все значения $t \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения системы (4.15). Будем предполагать, что нулевое решение системы (4.16) асимптотически устойчиво. Тогда можно показать [50], что $\exists V(u_1, ..., u_n)$, $W(u_1, ..., u_n)$ — две функции, обладающие следующими свойствами:

1) функция V задана в области A асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4.16) и удовлетворяет в A неравенствам: $-1 < V < 0$;

2) функция W задана в E_n, причем $\forall \alpha > 0\ \exists \beta > 0$ такое, что при $|U| > \alpha$ следует: $W > \beta$ и $V(0, ..., o) = W(0, ..., 0) = 0$;

3) полная производная по времени dV/dt, вычисленная в силу системы (4.16), удовлетворяет соотношению: $\dot{V} = W(1 + V)$.

Итогом этого рассмотрения служит следующее утверждение: для того, чтобы нулевое движение $\varphi = 0$ динамической системы, определяемой совокупностью уравнений (4.15), было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы было асимптотически устойчиво нулевое решение системы (4.16).

Пусть имеется система ДУ с частными производными вида

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = U_s^{(\mu)} + \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i}, \qquad s = \overline{1,n},$$

где $U_s^{(\mu)}$ — однородные функции порядка $\mu \geq 1$ переменных $u_1, ..., u_n$; здесь $\mu = p/q$, q — нечетное, $p \neq 2k$. Можно доказать [20], что необходимым и достаточным условием того, чтобы нулевое решение системы

$$\frac{du_s}{dt} = U_s^{(\mu)}$$

было асимптотически устойчивым, является существование однородных функций $V(u_1, ..., u_n)$ и $W(u_1, ..., u_n)$, где V — функция порядка $m - \mu + 1$, а W — функция порядка m, причем $W < 0$

при $U \neq 0$, а $V > 0$ при $U \neq 0$, удовлетворяющих соотношению: $dV/dt = W$.

Завершим параграф рассмотрением системы ДУ в частных производных вида

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial y_j}{\partial x_s} = g_j, \qquad j = \overline{1,k}. \tag{4.17}$$

Предполагается, что функции f_s, g_j в системе (4.17) — это вещественные функции переменных t, $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_k)$, заданные при $t \in (-\infty, \infty)$, $X \in E_n$, $Y \in E_k$, непрерывные и непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам. Система вида (4.17) называется системой ДУ в частных производных с *одинаковой главной частью*.

Помимо этого, будем считать, что $\forall\, Y_0(X) \in C^1$ — векторной функции система (4.17) имеет решение $Y = Y(t, X, t_0, Y_0)$, удовлетворяющее начальному условию $Y = Y_0(X)$ при $t = t_0$; C^1 — пространство всех непрерывно дифференцируемых функций, заданных при $X \in E_n$. Пусть также система (4.17) имеет нулевое решение $Y = 0$, т.е. $g_j = 0$ при $Y = 0$, $j = \overline{1,k}$.

Определение 4.10. *Решение $Y = 0$ системы (4.17) называется асимптотически устойчивым, если $\forall\, t_0 \geq 0, \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что при $\rho(Y_0, 0) < \delta$ будут выполняться соотношения:*

1) $\rho[\,Y(t, X, t_0, Y_0),\, 0\,] < \varepsilon$ *при* $t \geq t_0$ *и*
2) $\rho[\,Y(t, X, t_0, Y_0),\, 0\,] \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *где*

$$\rho(Y, 0) \equiv \max_{X \in E_n} \|\,Y\,\|, \qquad \|\,Y\,\| = \left(\sum_{j=1}^{k} y_j^2\right)^{1/2}.$$

Совместно с системой (4.17) введем в рассмотрение систему ДУ:

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \varphi_s \frac{\partial y_j}{\partial x_s} = \psi_j, \qquad j = \overline{1,k}, \tag{4.18}$$

где

$$\varphi_s = f_s\big|_{Y=0}, \qquad \psi_j = \sum_{l=1}^{j} \frac{\partial g_j}{\partial y_l}\bigg|_{Y=0} \cdot y_l = \sum_{l=1}^{j} p_{jl}\, y_l.$$

Рассмотрим также матричное уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial t} + P^* A + AP + \sum_{s=1}^{n} \varphi_s \frac{\partial A}{\partial x_s} = B, \tag{4.19}$$

где A и B — симметрические квадратные матрицы порядка k; $P = (p_{jl}) = \big(\partial g_j/\partial y_l\big)\big|_{Y=0}$, $j, l = \overline{1,k}$. Пусть λ_j, μ_j — собственные числа матриц A и B соответственно.

Теорема 4.14. *Если система (4.19) имеет решение в виде пары симметрических, непрерывно дифференцируемых матриц (A, B), заданных при $t \geq 0$, $X \in E_n$, таких, что $\exists\, \alpha, \beta > 0$ — постоянные, удовлетворяющие неравенствам $\alpha \leq \lambda_j \leq \beta$, $\mu_j \leq -\alpha$, где $j = \overline{1,k}$, то тогда решение $Y = 0$ системы (4.18) будет асимптотически устойчивым.*

Теорема 4.15. *Пусть выполнены условия теоремы 4.14 и, кроме того: 1) $|\,g_j - \psi_j\,| \leq c\,\|\,Y\,\|^2$ при $\|\,Y\,\| \leq r$, $X \in E_n$, $t \geq 0$, где r и c — некоторые положительные постоянные; 2) матрицы $\partial A/\partial x_s$, $s = \overline{1,n}$, равномерно ограничены. Тогда нулевое решение системы (4.17) асимптотически устойчиво.*

Заметим, что матричное уравнение (4.19) при $\varphi_s = 0$ обращается в матричное уравнение Ляпунова. Система (4.18) при этом становится системой линейных обыкновенных ДУ и условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теореме 4.14, становятся хорошо известными условиями асимптотической устойчивости для системы обыкновенных ДУ.

4.3 Устойчивость решений ДУ в банаховом пространстве

Этот параграф освящает ряд вопросов исследования устойчивости решений уравнений, заданных в функциональных пространствах [10]. Особое внимание уделяется задачам об устойчивости решений нелинейных уравнений.

4.3.1. Банахово пространство. ДУ в банаховом пространстве. Пусть E — некоторое множество, в котором введены две операции — сложение элементов и умножение на число, удовлетворяющие условиям: 1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3)

$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; 4) $(\lambda+\mu)\,x = \lambda x + \mu x$; 5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\,x$; 6) $\exists\, 0 \in E:\ 0x = 0$; 7) $1 \cdot x = x$. Пусть, кроме того, $\forall\, x \in E$ определено неотрицательное число $\|\, x\,\|$, называемое *нормой элемента* x, удовлетворяющее условиям: $a)$ $\|\, x\,\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$; $b)$ $\|\, \lambda x\,\| = |\,\lambda\,|\,\|\, x\,\|$; $c)$ $\|\, x+y\,\| \le \|\, x\,\| + \|\, y\,\|$. Если в множестве E имеют место условия 1)–7) и $a)$–$c)$, то множество E называется *линейным нормированным пространством* (пример: конечномерное векторное пространство).

Нормированное линейное пространство E называется *полным*, если из $\|\, x_n - x_m\,\| \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует сходимость по норме последовательности $\{\, x_n\,\}$ к некоторому элементу x_* этого пространства. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым* пространством или B–пространством.

Зададим на $X \subset E_1$ функцию (отображение) $F(x):\ F(x) : X \to E_2$, где E_1, E_2 — некоторые линейные нормированные пространства. Отображение $F(x)$ называют *оператором.* Оператор $F(x)$ называется *линейным*, если он аддитивен и однороден: $F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\, F(x_1) + \beta\, F(x_2)$, где α, β — скалярные величины. Для линейного оператора принята запись: $F(x) = Fx$. Оператор $F(x) : E_1 \to R = (-\infty, +\infty)$ называется *функционалом.*

Оператор $F(x)$ называется *непрерывным*, если он каждую сходящуюся (по норме в E_1) последовательность элементов переводит также в сходящуюся (по норме в E_2) последовательность элементов. Оператор $F(x)$ называется *ограниченным*, если он переводит каждое ограниченное (по норме) множество в ограниченное множество.

Линейный ператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен [57]. Пусть F — линейный непрерывный оператор; тогда $\exists\, K$ — положительное число такое, что $\forall\, x \in E_1$, на которых определен оператор F, имеет место неравенство

$$\|\, F(x)\,\| \le K\,\|\, x\,\|, \tag{$*$}$$

причем наименьшее из чисел K, при которых выполняется неравенство $(*)$, называется *нормой оператора* F и обозначается $\|\, F\,\|$:

$$\|\, F\,\| = \sup_{\|\, x\,\| \le 1} \|\, Fx\,\|. \tag{$**$}$$

Линейный оператор, действующий в конечномерном векторном пространстве E_n, может быть задан матрицей, а соотношение $(**)$ может служить определением нормы этой матрицы.

В дальнейшем надо иметь в виду следующие фундаментальные теоремы из функционального анализа, с помощью которых доказываются многие из упоминаемых здесь утверждений [10].

Теорема 4.16 (Теорема Банаха–Штейнгауза) *Если последовательность линейных ограниченных операций $\{\, F_n\,\}$, переводящих банахово пространство E_1 в линейное нормированное пространство E_2, ограничена в каждой точке, т.е.* $\sup_n\ \|\, F_n x\,\| < \infty$, *то нормы этих операций ограничены в совокупности:* $\|\, F_n\,\| \le M < \infty$, *где* $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 4.17 (Принцип сжатых отображений). *Пусть оператор F переводит шар T банахова пространства в себя и пусть выполнено условие*

$$\|\, F(x_1) - F(x_2)\,\| \le \alpha\,\|\, x_1 - x_2\,\|, \qquad \alpha \in (0, 1).$$

Тогда уравнение $F(x) = x$ имеет в шаре T единственное решение $\bar{x}$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Зададим абстрактную функцию $x(t)$ на числовой оси со значениями в банаховом пространстве E. Дадим определения производной и интеграла от функции $x(t)$. Производная (по Фреше) функции $x(t)$ в точке t_0 определяется по правилу

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{t \to t_0}\ \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

если указанный предел (в смысле сходимости по норме) существует. Определенный интеграл (по Бохнеру) от функции $x(t)$ определяется как предел интегральных сумм вида

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x(\tau_k)\,(t_{k+1} - t_k),$$

где $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, $t_k \le \tau_k \le t_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, при условии, что $n \to \infty$ и $\sup_k\ |\, t_{k+1} - t_k\,| \to 0$. Если этот предел от

S_n существует и не зависит от способа деления промежутка $[\alpha, \beta]$ на частичные отрезки, равно как и от способа выбора точек τ_k на этих частичных отрезках, то тогда говорят, что интеграл от функции $x(t)$ по промежутку $[\alpha, \beta]$ существует и обозначается символом $\int_\alpha^\beta x(t)\,dt$.

Определение интеграла (по Стилтьесу) включает в себя следующие положения. Пусть E — банахово пространство, $G(t)$ — непрерывный по t линейный оператор: $G(t) : E \to E$, $g(t)$ — функция с ограниченной вариацией $V_\alpha^\beta\, g(t)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$:

$$V_\alpha^\beta\, g(t) = \sup_{[\alpha,\beta]} \sum_{k=0}^{n-1} \| g(t_{k+1}) - g(t_k) \|,$$

где $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$.

Составим интегральную сумму вида

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} G(\tau_k)\left[g(t_{k+1} - g(t_k) \right], \qquad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Если существует предел S_n при $n \to \infty$, $\sup_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$, не зависящий от способа разбиения промежутка $[\alpha, \beta]$ на частичные отрезки, то этот предел является интегралом Стилтьеса от оператора $G(t)$ по функции $g(t)$ и обозначается $\int_\alpha^\beta G(t)\,dg$. Если функция $g(t)$ дифференцируемая, то $\int_\alpha^\beta G(t)\,dg = \int_\alpha^\beta G(t)\,g'(t)\,dt$. Добавим к сказанному, что имеют место неравенства

$$1) \left\| \int_\alpha^\beta G(t)\,dg \right\| \le M\, V_\alpha^\beta\, g(t), \qquad M \equiv \sup_{\alpha \le t \le \beta} \| G(t) \|,$$

$$2) \left\| \int_\alpha^\beta G(t)\,dg \right\| \le \int_\alpha^\beta \| G(t) \|\,dv, \qquad v(t) = V_\alpha^t\, g(t).$$

Перейдем к изучению некоторых типов ДУ и свойствам их решений в банаховом пространстве. Пусть каждому вещественному значению t поставлен в соответствие оператор $X(x,t) : E \to E$.

Тогда можно рассмотреть ДУ

$$\dot{x} = X(x,t), \tag{4.20}$$

где через $\dot{x}$ обозначена производная абстрактной функции $x(t)$ по t. Введем начальное условие $x(t_0) = x_0$. Решение уравнения (4.20), очевидно, должно быть и решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X[\,x(t),\, t\,]\,dt.$$

Зададим область D : $\| x - x_0 \| \le r$, $|t - t_0| \le T$. Будем считать, что в D операторная функция $X(x,t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$\| X(x,t) - X(y,t) \| \le L \| x - y \| \tag{4.21}$$

с некоторой константой $L > 0$. С учетом непрерывности $X(x,t)$ функция $\| X(x_0,t) \|$ ограничена на отрезке $|t - t_0| \le T$. Пусть $M_0 = \sup \| X(x_0,t) \|$ на этом отрезке. Из неравенства (4.21) вытекает

$$\| X(x,t) \| \le \| X(x_0,t) \| + L \| x - x_0 \| \le M_0 + rL.$$

Следовательно, полагая $M = M_0 + rL$, имеем в области D неравенство: $\| X(x,t) \| \le M$. Наконец, с помощью принципа сжатых отображений можно получить следующую теорему существования и единственности решения уравнения (4.20):

Теорема 4.18. *Уравнение* (4.20) *при указанных выше условиях имеет единственное решение* $x(t)$, *удовлетворяющее условию* $x_0 = x(t_0)$, *причем решение* $x(t)$ *определено на интервале* $|t - t_0| < rM^{-1}$.

Приведем различные признаки продолжаемости решений.

Теорема 4.19. *Если в области* $\| x - x_0 \| \le r < \infty$, $t \ge t_0$ *выполнены неравенства:* (4.21) *и* $\| X(x_0,t) \| \le N < \infty$, *то всякая траектория, не выходящая из некоторой подобласти* $\| x - x_0 \| \le r_1 < r$, *продолжима на бесконечный интервал времени* $t \in [t_0, \infty)$.

Теорема 4.20. *Пусть при* $\| x \| < \infty$, $t \ge t_0$ *выполнено неравенство:* $\| X(x,t) \| \le L(\| x \|)$, *где* $L(r)$ — *непрерывная функция,* *обладающая свойством*

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{L(r)} \to \infty \qquad \text{при} \qquad r \to \infty. \tag{4.22}$$

Тогда всякое решение уравнения (4.20) *может быть продолжено на бесконечный интервал времени* $t \in [\, t_0, \infty)$.

Теорема 4.21 (Теорема Красносельского–Крейна). *Пусть существует функционал* $\Phi(x)$, *обладающий свойством*

$$\lim_{\|\, x\, \| \to \infty} \Phi(x) = \infty, \qquad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} \le L[\, \Phi(x)\,]$$

при $t \ge t_0$, *где через* $d\Phi/dt$ *обозначена производная* $\Phi(x)$ *вдоль траекторий уравнения* (4.20), *а функция* $L(r)$ *удовлетворяет соотношению* (4.22). *Тогда всякое решение уравнения* (4.20) *будет продолжаемым на интервале* $t \in [\, t_0, \infty)$.

Приведем далее несколько лемм об интегральных оценках.

Лемма 4.1. *Пусть* $u(t)$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая при* $t > t_0$ *двойному неравенству*

$$0 < u(t) < \delta + \int\limits_{t_0}^{t} [\, \eta + L\, u(t)\,]\, dt,$$

где δ, η, L — *постоянные, причем* $\delta, \eta \ge 0$, $L > 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$u(t) < \eta L^{-1} \left[\, e^{L\,(t-t_0)} - 1\, \right] + \delta\, e^{L\,(t-t_0)}.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $u(t)$, $f(t)$ — *скалярные, неотрицательные, интегрируемые на промежутке* $t \in [\, t_0,\, t_0 + T\,]$ *функции. Пусть, помимо этого,* $K(t,s)$ — *скалярная, неотрицательная функция, ограниченная при* $t_0 \le s \le t \le t_0 + T$. *Если имеет место неравенство*

$$u(t) \le f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\, u(s)\, ds,$$

то справедливо неравенство: $u(t) \le \psi(t)$, $t \in [\, t_0,\, t_0 + T\,]$, *где* $\psi(t)$ — *решение интегрального уравнения*

$$\psi(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\, \psi(s)\, ds.$$

Лемма 4.3. *Пусть* $u(t)$, $f(t)$ — *неотрицательные, интегрируемые при* $t \in [\, t_0,\, t_0 + T\,]$ *функции,* L — *положительная постоянная. Если выполнено неравенство*

$$u(t) \le f(t) + L \int\limits_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \tag{4.23}$$

то имеет место неравенство

$$u(t) \le f(t) + L \int\limits_{t_0}^{t} e^{L\,(t-s)}\, f(s)\, ds.$$

Лемма 4.4. *Если при выполнении условий предыдущей леммы* $f(t)$ *является функцией ограниченной вариации при* $t \in [\, t_0,\, t_0 + T\,]$, *то из неравенства* (4.23) *следует*

$$u(t) \le f(t_0)\, e^{L\,(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{L\,(t-s)}\, d\, f(s),$$

где интеграл в правой части есть интеграл Стилтьеса. Если функция $f(t)$ *дифференцируема, то справедливо неравенство*

$$u(t) \le f(t_0)\, e^{L\,(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{L\,(t-s)}\, f'(s)\, ds.$$

Наряду с уравнением (4.20) рассмотрим также уравнение

$$\dot{y} = X(y,t) + R(y,t). \tag{4.24}$$

Будем считать, что в области $D: \ \|x\| \le r,\ t \in [\,t_0,\, t_0+T\,]$ имеют место неравенства

$$\|X(x,t) - X(y,t)\| \le L\,\|x-y\|, \qquad \|R(x,t)\| \le \eta(t),$$

где $\eta(t)$ — непрерывная при $t \in [\,t_0,\, t_0{+}T\,]$ функция, которые в совокупности с условиями непрерывности операторов $X(x,t)$ и $R(x,t)$ в области D обеспечивают существование решений уравнений (4.20), (4.24). Тогда при $t \in [\,t_0,\, t_0+T\,]$ справедлива оценка (подробности ее вывода см. в работе [10]):

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x_0 - y_0\|\, e^{L\,(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{L\,(t-s)}\,\eta(s)\,ds.$$

4.3.2. Устойчивость решений нелинейных уравнений. Перейдем к рассмотрению некоторых вопросов устойчивости решений нелинейных ДУ. Пусть имеется уравнение

$$\dot{x} = A(t)\,x + R(x,t), \tag{4.25}$$

где $A(t)$ — линейный ограниченный оператор, непрерывный по t, функция $R(x,t)$ удовлетворяет в области $D: \ \|x\| \le H,\ t \in [0,\infty)$ условию

$$\|R(x,t)\| \le L\,\|x\|. \tag{4.26}$$

В уравнении

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{4.27}$$

через $W(t,\tau)$ обозначим оператор Коши: $W(t,\tau) = U(t)\,U^{-1}(\tau)$, где $U(t)$ — операторная функция со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов такая, что $\dot{U} = A(t)\,U,\, U(0) = I$. Свойство оператора Коши: $W(t,t_1)\,W(t_1,t_0) = W(t,t_0)$. Решение уравнения (4.27) можно записать в виде: $x(t) = W(t,t_0)\,x_0$, где $x_0 = x(t_0)$. Предположим также, что имеет место неравенство

$$\|W(t,t_0)\| \le B\,e^{-\alpha\,(t-t_0)}, \tag{4.28}$$

где $\alpha, B > 0$ — постоянные, не зависящие от t_0. Условие (4.28) — это условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения

уравнения (4.27). Следующая теорема представляет собой теорему об устойчивости по первому приближению.

Теорема 4.22. *Если выполнены условия* (4.26) *и* (4.28) *и если, кроме того, постоянные α, B, L удовлетворяют неравенству*

$$\lambda = \alpha - BL > 0, \tag{4.29}$$

то нулевое решение уравнения (4.25) *будет экспоненциально устойчивым.*

Из этой теоремы вытекает следствие: если выполнено условие (4.28) и неравенство $\|F(t)\| \le L,\ t \in [0,\infty)$, для некоторого линейного оператора $F(t)$ и если, кроме того, величины α, B, L удовлетворяют условию (4.29), то нулевое решение ДУ: $\dot{x} = \big[\,A(t){+}F(t)\,\big]\,x$ экспоненциально устойчиво.

Далее затронем ряд вопросов устойчивости нулевого решения уравнения (4.25) при постоянно действующих возмущениях. Вместе с уравнением (4.25) рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(t)\,x + R(x,t) + u(x,t). \tag{4.30}$$

Пусть, как и ранее, в области D выполнены условия (4.26), (4.28), (4.29). Предположим также, что в области D функция $u(x,t)$ удовлетворяет ограничению

$$\|u(x,t)\| \le r(t), \tag{4.31}$$

где $r(t)$ — функция, интегрируемая на любом конечном интервале времени. Примем функцию $u(x,t)$ за постоянно действующее возмущение. Обозначим

$$h_0 = \sup_{t\ge 0}\ r(t), \quad h_1 = \sup_{t\ge 0}\ \int\limits_{t}^{t+1} r(\tau)\,d\tau, \quad h_2 = \sup_{t\ge 0}\left(\int\limits_{t}^{t+1} r^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Определение 4.11. *Пусть $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, h, \delta > 0$ — числа такие, что для решений уравнения* (4.30) *имеет место неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \ge 0$, если только $\|x(0)\| < \delta$ и выполнено одно из условий:*

$$a)\ h_0 \le h, \qquad b)\ h_1 \le h, \qquad c)\ h_2 \le h.$$

Тогда будем говорить, что нулевое решение уравнения (4.25) *устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в случае* a), *ограниченных в среднем в случае* b), *ограниченных в среднеквадратическом в случае* c).

Приведем леммы об оценках, с помощью которых доказываются последующие теоремы.

Лемма 4.5. *Всякое решение уравнения* (4.30) *удовлетворяет оценке*

$$\| x(t) \| \leq B \left[\Phi_1(t) + \Phi_2(t) \right],$$

где обозначено с учетом того, что $x_0 = x(0)$, $\lambda = \alpha - BL$:

$$\Phi_1(t) = e^{-\lambda t} \| x_0 \|, \qquad \Phi_2(t) = e^{-\lambda t} \int\limits_0^t e^{\lambda s} r(s)\, ds.$$

Лемма 4.6. *Имеют место при* $t \geq 0$ *следующие оценки:*

$$\Phi_2(t) \leq \frac{h_0}{\lambda}, \qquad \Phi_2(t) \leq \frac{h_1 e^{\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}, \qquad \Phi_2(t) \leq \frac{h_2}{1 - e^{-\lambda}} \left(\frac{e^{2\lambda} - 1}{2\lambda} \right)^{1/2}.$$

Приведем теперь теорему об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 4.23. *Пусть в* ε*–окрестности точки* $x = 0$ *выполнены условия* (4.26), (4.28), (4.29), (4.31) *и одно из следующих неравенств:*

$$h_0 < \frac{\varepsilon \lambda}{2B}, \qquad h_1 < \frac{\varepsilon \left(1 - e^{-\lambda}\right)}{2Be^{\lambda}}, \qquad h_2 < \frac{\varepsilon \left(1 - e^{-\lambda}\right)}{2B} \left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda} - 1} \right)^{1/2}.$$

Тогда всякое решение уравнения (4.30), *определенное условием* $\| x_0 \| < \varepsilon/(2B)$, *будет удовлетворять при* $t \geq 0$ *неравенству* $\| x(t) \| < \varepsilon$.

Следующую теорему можно назвать теоремой о диссипативной устойчивости.

Теорема 4.24. *Пусть в* ε*–окрестности точки* $x = 0$ *выполнены условия* (4.26), (4.28), (4.29), (4.31) *и одно из неравенств*

$$h_0 < \frac{\rho\delta\lambda}{B}, \qquad h_1 < \frac{\rho\delta\left(1 - e^{-\lambda}\right)}{Be^{\lambda}}, \qquad h_2 < \frac{\rho\delta\left(1 - e^{-\lambda}\right)}{B} \left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda} - 1} \right)^{1/2},$$

где $0 < \rho < 1$ *и* $0 < \delta < \varepsilon/(2B)$. *Тогда* $\exists\, T > 0$ *— число такое, что при* $t > T$ *и* $\| x_0 \| < \delta$ *решение* $x(t)$ *уравнения* (4.30) *удовлетворяет неравенству* $\| x(t) \| < \delta$.

Вернемся к уравнению (4.30) в предположении, что операторная функция $A(t)$ и функции $R(x,t)$, $u(t)$ являются непрерывными и периодическими по t с периодом ω. Заменой $t = \tau\omega$ можно добиться того, чтобы период $\omega = 1$. Пусть, как и прежде, оператор Коши $W(t,\tau)$ уравнения (4.27) удовлетворяет условию (4.28), а функция $R(x,t)$ удовлетворяет в области D условию Липшица: $\| R(x,t) - R(y,t) \| \leq L \| x - y \|$.

Полагая, что $R(0,t) = 0$ при $t \geq 0$, считаем выполненным условие (4.26). Пусть числа α, β, L удовлетворяют условию (4.29), а функция $u(t)$ — условию (4.31). Считая в условии (4.31) $r(t) = \| u(t) \|$, имеем функцию $r(t)$ также периодической по t.

Теорема 4.25. *Пусть для уравнения* (4.30) *выполнены перечисленные выше условия и хотя бы одно из неравенств теоремы* 4.24. *Тогда* $\exists !\, z(t)$ *— периодическое решение уравнения* (4.30) *в области* $\| x \| \leq H/(2B)$. *Если* $x(t)$ *— любое другое решение этого уравнения такое, что* $\| x(0) \| \leq H/(2B)$, *то* $\| x(t) - z(t) \| \to 0$ *при* $t \to \infty$; *это значит, что периодическое решение* $z(t)$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Далее наряду с уравнением (4.20): $\dot{x} = X(x,t)$, где $X(0,t) = 0$, будем рассматривать уравнение (4.24): $\dot{y} = X(y,t) + R(y,t)$, предполагая, что выполнены условия, при которых существуют и продолжаемы решения обоих уравнений в области $D:\ \| x \| \leq M,\ t \in [\,0, \infty)$.

Напомним для удобства использования некоторые определения:

1. Положение равновесия $x = 0$ уравнения (4.20) называется *равномерно устойчивым по Ляпунову*, если $\forall\, \varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0\ \exists\, \delta > 0$ — число, зависящее только от ε, что из $\| x(t_0) \| < \delta$ следует $\| x(t) \| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

2. Положение равновесия $x = 0$ уравнения (4.20) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$, $t_0 \geq 0$ $\exists T > 0$ — число, зависящее только от ε и δ, и такое, что из $\| x(t_0) \| < \varepsilon$ следует $\| x(t_0 + T) \| < \delta$.

3. Точка $x = 0$ (здесь не предполагается, что эта точка является положением равновесия) называется *ε–устойчивой*, если $\exists \delta > 0$ такое, что из $\| x(t_0) \| < \delta$ следует $\| x(t) \| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

4. Положение равновесия $x = 0$ называется *экспоненциально устойчивым в малом*, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что любое решение $x(t)$ уравнения (4.20) при $\| x(t_0) \| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\| x(t) \| \leq B e^{-\alpha\,(t-t_0)} \, \| x(t_0) \|,$$

где $\alpha, B > 0$ не зависят от t_0.

Лемма 4.7. *Пусть $x(t)$ — решение уравнения* (4.20), *а $y(t)$ — решение уравнения* (4.24), *причем решение $x = 0$ уравнения* (4.20) *равномерно асимптотически устойчиво. Зададим согласно определениям 1. и 2. числа $\delta < \varepsilon$ и $T > 0$ такие" что из $\| x(t_0) \| < \delta$ следует: $\| x(t) \| < \varepsilon/2$ при $t \geq t_0$ и $\| x(t_0 + T) \| < \delta/2$. Пусть $x(t_0) = y(t_0)$. Тогда, если справедливо неравенство $\| y(t) - x(t) \| < \delta/2$ при $t \in [\, t_0,\, t_0 + T \,]$, $t_0 > 0$, то точка $x = 0$ будет ε–устойчивой по отношению к системе* (4.24).

Лемма 4.8. *Если при $x(t_0) = y(t_0)$, $t \in [\, t_0,\, t_0 + T \,]$ имеет место неравенство $\| x(t) - y(t) \| \leq \| x(t_0) \|/4$, где $t_0 > 0$ и точка $x = 0$ экспоненциально устойчива в малом для уравнения* (4.20), *то эта точка будет экспоненциально устойчивой в малом и для уравнения* (4.24).

Пусть далее в области D функция $X(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица вида (4.21), а функция $R(x, t)$ — условию $\| R(x, t) \| < \eta$, где η — положительная постоянная.

Теорема 4.26. *Если нулевое решение уравнения* (4.20) *равномерно асимптотически устойчиво, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\eta > 0$ — числа такие, что для любого решения $y(t)$ уравнения* (П4.24) *из неравенств $\| R(x, t) \| < \eta$ и $\| y(t_0) \| < \delta$ следует при $t \geq t_0$ неравенство $\| y(t) \| < \varepsilon$.*

Теорема 4.27. *Пусть в области D выполнено условие* (4.21) *и условие $\| R(x, t) \| \leq M \| x \|$. Тогда, если нулевое решение уравнения* (П4.20) *экспоненциально устойчиво в малом, то при достаточно малом значении M нулевое решение уравнения* (4.24) *также будет экспоненциально устойчивым в малом.*

4.4 Устойчивость стохастических систем

Обратимся к рассмотрению вопросов устойчивости систем вида $\dot{x} = F(x, t) + \sigma(x, t)\,\xi(t)$ в n–мерном евклидовом пространстве E_n в случае, когда $\xi(t)$ — так называемый *процесс белого шума*, т.е. гауссовский процесс, для которого $M\,\xi(t) = 0$, $M[\,\xi(s)\,\xi(t)\,] = \delta(t - s)$, где $M\,\xi(t)$ — математическое ожидание $\xi(t)$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Нас будут интересовать свойства решений этой системы, которые можно получить с помощью функции Ляпунова укороченной системы $\dot{x} = F(x, t)$.

Предполагается, что с основными понятиями и конструкциями теории вероятностей и теории случайных процессов читатель знаком в объеме материала технического вуза (см., например, книгу [134] и соответствующую библиографию), поэтому подробно останавливаться на вероятностных основах не будем, а будем лишь давать соответствующие определения и пояснения тем или иным терминам по мере надобности и реферативно изложим некоторые результаты, относящиеся к устойчивости решений стохастических ДУ, содержащихся в работе [145].

4.4.1. Устойчивость. Изучим условия устойчивости некоторого частного решения $y = y(t, \omega)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = G[\, x, t,\, \xi(t, \omega) \,], \tag{4.32}$$

где $\omega \in \Omega$, $(\omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, Ω — множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ–алгебра подмножеств (событий) в Ω, P — вероятностная мера (вероятность), определенная на элементах множества $\mathcal{F}$.

Обычно с помощью новых переменных, равных отклонениям координат возмущенного движения от невозмущенного, сводят задачу к задаче об устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ уравнения вида (4.32), где $G[\,0, t,\, \xi(t,\omega)\,] \equiv 0$.

Имеется большое разнообразие в вероятностном смысле понятия устойчивости. Приведем лишь некоторые определения, представляющие наибольший практический интерес. Решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (4.32) назовем:

1. Устойчивым (слабо) по вероятности при $t \geq t_0$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\delta > 0\ \exists r > 0$ такое, что при $t \geq t_0$, $\|\, x_0 \,| < r$:

$$P\big(|\, x(t,\omega,t_0,x_0)\,| > \varepsilon\big) < \delta. \tag{4.33}$$

2. Асимптотически устойчивым (слабо) по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, $\forall \varepsilon > 0\ \exists r = r(\varepsilon)$ такое, что при $t \to \infty$:

$$P\big(|\, x(t,\omega,t_0,x_0)\,| > \varepsilon\big) \to 0, \qquad \text{если} \qquad |\, x_0 \,| < r.$$

3. p–устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0$ такое, что при $t \geq t_0$, $|\, x_0 \,| < r$:

$$M\,|\, x(t,\omega,t_0,x_0)\,|^p < \varepsilon, \qquad p > 0.$$

4. Асимптотически p–устойчивым, если оно p–устойчиво и, кроме того, для достаточно малых $|\, x_0 \,|$:

$$M\,|\, x(t,\omega,t_0,x_0)\,|^p \to \infty \qquad \text{при} \qquad t \to \infty.$$

5. Устойчивым по вероятности в целом, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, $\forall x_0, \varepsilon > 0, \delta > 0$ можно указать $T = T(x_0, \varepsilon, \delta)$ такое, что при $t > T$ имеет место соотношение (4.33). Аналогично определяется асимптотическая устойчивость по вероятности и p–устойчивость в целом.

6. Экспоненциально p–устойчивым, если $\exists A > 0$, $\alpha > 0$ — такие постоянные, что

$$M\,|\, x(t,\omega,t_0,x_0)\,|^p \leq A\,|\, x_0 \,|^p\, e^{-\alpha\,(t-t_0)}.$$

7. Устойчивым с вероятностью 1 в том или ином смысле, если все траектории, кроме, может быть, множества траекторий вероятности 0, устойчивы в соответствующем смысле.

Заметим, что из неравенства Чебышева вытекает, что из (асимптотической) p–устойчивости тривиального решения при бóльших p следует (асимптотическая) p–устойчивость при меньших p и устойчивость по вероятности. Помимо этого, решение может быть (асимптотически) p–устойчивым при некотором p и не быть (асимптотически) p–устойчивым при $p_1 > p$. При $p = 2$ устойчивость называют устойчивостью в среднем квадратическом.

Ограничимся здесь рассмотрением условий устойчивости систем вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t) + \sigma(x,t)\,\xi(t,\omega), \qquad F(0,t) \equiv 0, \qquad \sigma(0,t) \equiv 0, \tag{4.34}$$

Ниже будут даны достаточные условия устойчивости с помощью функции Ляпунова укороченной системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t). \tag{4.35}$$

Будем предполагать при этом, что все рассматриваемые функции Ляпунова положительно определены равномерно по t :

$$\inf_{t>0,\, \|\, x\,| > r} V(x,t) = V_r > 0, \qquad r > 0. \tag{4.36}$$

Введем также обозначение

$$B = \sup_{t>0,\, x_i \in E_n} \frac{|\, V(x_2,t) - V(x_1,t)\,|}{|\, x_2 - x_1 \,|}.$$

Теорема 4.28. *Предположим, что для системы* (4.35) $\exists\, V(x,t) \in C_0$ *— функция Ляпунова, удовлетворяющая условию* (4.36) *и условиям*

$$V(0,t) \equiv 0, \qquad \frac{dV}{dt} \leq -\,c_1 V, \qquad \|\,\sigma\,\| \leq c_2 V, \tag{4.37}$$

где $c_i > 0$ — постоянные. Пусть, далее, процесс $|\,\xi(t,\omega)\,|$ удовлетворяет закону больших чисел и условию:

$$\sup_{t>0}\ M\,|\,\xi(t,\omega)\,| < \frac{c_1}{B c_2}.$$

Тогда тривиальное решение системы (4.34) *асимптотически ус-тойчиво по вероятности в целом. Если же процесс* $|\,\xi(t,\omega)\,|$ *удовлетворяет усиленному закону больших чисел, то те же условия обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом решения* $x=0$ *с вероятностью* 1.

Поясним формулировку:

1) C_0 — класс функций $V(t,x)\in C$, удовлетворяющих глобальному условию Липшица;

2)
$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}F_i(x,t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{\partial V}{\partial x},F\right);$$

3) говорят, что случайный процесс $\xi(t,\omega)$ при $t\geq t_0$ удовлетворяет закону больших чисел, если $\forall\,\varepsilon,\delta>0\ \exists\,T>0$ такое, что при $t>T$:

$$P\left(\left|\,\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t_0+t}\xi(s,\omega)\,ds-\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t_0+t}M\xi(s,\omega)\,ds\,\right|>\delta\right)<\varepsilon;$$

4) случайный процесс $\xi(t,\omega)$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, если

$$P\left(\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t_0+t}\xi(s,\omega)\,ds-\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t_0+t}M\xi(s,\omega)\,ds\ \xrightarrow[t\to\infty]{}\ 0\right)=1.$$

Модельный пример. Снять требование применимости к процессу $|\,\xi(t,\omega)\,|$ закона больших чисел нельзя. Это хорошо видно на примере уравнения
$$\frac{dx}{dt}=(-\,a+\xi)\,x,$$
где $a>0$, причем случайная величина ξ может принимать сколь угодно большие положительные значения. Какой бы малой ни была величина $M|\,\xi\,|$ решение

$$x(t,\omega)=x_0\,e^{(-\,a+\xi)\,t}$$

этого уравнения стремится к ∞ с вероятностью $p=P(\xi>a)$.

Теорема 4.29. *Пусть для системы* (4.35) $\exists\,V(x,t)\in C_0$ — *функция Ляпунова, для которой выполнены соотношения* (4.37) *и неравенство:* $V(x,t)>c\,|\,x\,|$, $c>0$, *а процесс* $\xi(t,\omega)$ *таков, что для некоторых постоянных* $k_1,k_>0$ *и* $t>0$:

$$M\,\exp\left(k_1\int\limits_0^t|\,\xi(s,\omega)\,|\,ds\right)\leq\exp\,(k_2t),$$

причем постоянные k_i,c_i,B *связаны неравенством:* $Bk_2c_2\leq k_1c_1$. *Тогда решение* $x(t)\equiv 0$ *системы* (4.34) p*–устойчиво при* $p\leq k_1/(Bc_2)$. *Если же выполнено строгое неравенство:* $Bk_2c_2<k_1c_1$, *то при тех же* p *решение экспоненциально* p*–устойчиво.*

4.4.2. Устойчивость систем стохастических уравнений. Ниже изучаются некоторые вопросы теории устойчивости *стохастических ДУ Ито*, а именно, рассматривается система вида

$$d\,X(t)=b(t,X)\,dt+\sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t,X)\,d\,\xi_r(t),\tag{4.38}$$

где считается, что $X(t)$, $b(t,x)$ и $\sigma_r(t,x)$ — векторы из E_n, $\xi_r(t)$ — независимые винеровские процессы. Под *винеровским процессом* понимают процесс броуновского движения с гауссовской переходной плотностью и независимыми приращениями (производная по времени от винеровского процесса дает *белый шум*). Перечислим свойства винеровского процесса $\xi(t)$: 1) $M\,\xi(t)=0$; 2) $M\,\xi(s)\,\xi(t)=\min\,(s,t)$; 3) траектории $\xi(t,\omega)$ непрерывны при $t\in[\,0,\infty)$ для почти всех ω.

Предположим также, что коэффициенты b и σ_r непрерывны по t и удовлетворяют условию Липшица по x в каждой ограниченной по x области, т.е.

$$\sum_{r=1}^{k}|\,\sigma_r(t,x)-\sigma_r(t,y)\,|+|\,b(t,x)-b(t,y)\,|<B\,|\,x-y\,|,$$

где $B>0$ — некоторая постоянная. Как и ранее, ограничимся составлением условий устойчивости тривиального решения $X(t)\equiv 0$, ввиду чего будем считать, что $b(t,0)\equiv 0$, $\sigma_r(t,0)\equiv 0$.

Приводимые далее теоремы являются естественным обобщением теорем второго метода Ляпунова об устойчивости на стохастические системы. Обозначим: U — некоторая область в пространстве $E = I \times E_n$, $I = \{\, t > 0 \,\}$, через $U^{\varepsilon}(0)$ обозначим множество $U^{\varepsilon}(0) = \{\, (t,x) : \ |\, x \,| < \varepsilon \,\}$. Будем говорить, что функция $V(t,x)$ принадлежит классу $C_2^0(U)$, т.е. $V(t,x) \in C_2^0(U)$, если она дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз по t в области U.

Решение $X(t,\omega)$ уравнения (4.38) называется *устойчивым по вероятности* при $t \geq 0$, если $\forall\, s \geq 0$, $\varepsilon > 0$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{x \to 0} P\left(\sup_{t > s} |\, X(t) \,| > \varepsilon \right) = 0.$$

Напомним, что функция $V(t,x)$ называется *положительно определенной в смысле Ляпунова* в окрестности множества $x = 0$, если $V(t,0) = 0$ и в этой окрестности $V(t,x) > W(x)$, причем $W(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Теорема 4.30 (Теорема Хасьминского). *Пусть в области* $\{\, t > 0 \,\} \times U = U_1$, *содержащей прямую* $x = 0$, $\exists\, V(t,x) \in C_2^0(U_1)$ *— непрерывная положительно определенная в смысле Ляпунова функция, удовлетворяющая при* $x \neq 0$ *условию*

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\, \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j} \leq 0. \tag{4.39}$$

Тогда тривиальное решение уравнения (4.38) *устойчиво по вероятности.*

Сделаем пояснение. Фигурируемый в неравенстве (4.39) символ LV означает применение так называемого производящего дифференциального оератора L к функции $V(t,x)$ по указанной в (4.39) формуле. Здесь $a_{ij}(t,x)$ — это элементы матрицы $A(t,x)$ такой, что $\forall\, \lambda \in E_n$:

$$\big(A(t,x)\, \lambda,\, \lambda\big) = \sum_{r=1}^{k} \big(\sigma_r(t,x),\, \lambda\big)^2.$$

Матрица $A(t,x)$ называется *матрицей диффузии*, вектор $b(t,x)$ — *вектором сноса.*

Решение $X(t) \equiv 0$ уравнения (4.38) называется *асимптотически устойчивым по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{x \to 0} P\left(\lim_{t \to \infty} X(t) = 0 \right) = 1.$$

Сформулируем *условие* D: решение уравнения (4.38), начинающееся в области $\varepsilon < |\, x \,| < r$, с вероятностью 1 выходит на границу этой области за конечное время, каковы бы ни были достаточно малые $r > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Теорема 4.31. *Пусть* $\exists\, V(t,x) \in C_2^0\big(\{\, t > 0 \,\} \times U\big)$ *— положительно определенная, допускающая бесконечно малый высший предел функция, удовлетворяющая условию* $LV \leq 0$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* D. *Тогда решение* $X \equiv 0$ *уравнения* (4.38) *асимптотически устойчиво по вероятности.*

Теорема 4.32. *Пусть* $\exists\, V(t,x) \in C_2^0\big(\{\, t > 0 \,\} \times U_r\big)$, *где* $U_r = \{\, |\, x \,| < r \,\}$ *— достаточно малая окрестность точки* $x = 0$; $V(t,x)$ *— функция, удовлетворяющая условиям*

$$1)\ LV \leq o \quad \text{при} \quad x \in U_r,\ x \neq 0; \quad 2)\ \lim_{x \to 0} \inf_{t > 0} V(t,x) = \infty. \tag{4.40}$$

Тогда в предположении, что выполнено условие D, *решение* $X(t) \equiv 0$ *уравнения* (4.38) *неустойчиво по вероятности. Более того, в этом случае*

$$P\left(\sup_{t > 0} |\, X(t) \,| < r \right) = 0, \qquad x \in U_r.$$

Решение $X(t) \equiv 0$ уравнения (4.38) называется (*асимптотически*) *устойчивым в целом*, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, $\forall\, x$

$$P\left(\lim_{t \to \infty} X(t) = 0 \right) = 1.$$

Теорема 4.33. *Для устойчивости в целом решения* $X(t) \equiv 0$ *уравнения* (4.38) *достаточно, чтобы оно было равномерно устойчиво по вероятности и, кроме того, процесс* $X(t)$ *был возвратен по отношению к области* $|\, x \,| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Следующая теорема обобщает теорему Барбашина–Красовского [12] на стохастические уравнения.

Теорема 4.34. *Для того, чтобы решение* $X(t) \equiv 0$ *уравнения* (4.38) *было устойчиво в целом, достаточно, чтобы* $\exists\, V(t,x) \in C_2^0(E)$ *— положительно определенная функция, допускающая бесконечно малый высший предел и такая, что функция* LV *отрицательно определена, причем* $\inf_{t>0}\ V(t,x) \to \infty$ *при* $|\,x\,| \to \infty$.

Модельный пример. Рассматривается система

$$dX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X\,dt + \sigma(X_1, X_2)\,d\xi(t), \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Видно, что положение этой системы в отсутствии случайных возмущений, т.е. когда $\sigma \equiv 0$, устойчиво, но не асимптотически. Производящий дифференциальный оператор здесь имеет вид

$$L = x_2\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\,\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\,\sigma^2(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Для функции $V(x) = -\ln(x_1^2 + x_2^2)$ выполнены условия (4.40) из теоремы 4.32. Значит, данная система неустойчива, если только $\sigma(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Этот пример [145] наглядно демонстрирует, что неасимптотическая устойчивость детерминированной системы переходит в неустойчивость при наличии белого шума с интенсивностью, стремящейся к нулю сколь угодно быстро при $x \to 0$.

Решение $X(t) \equiv 0$ системы (4.38) в E_n называется:

1) p–устойчивым, $p > 0$, при $t \geq 0$, если

$$\sup_{|\,x\,| \leq \delta,\, t \geq s} M\,|\,X(t)\,|^p \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \quad \text{и} \quad s \geq 0;$$

2) асимптотически p–устойчивым, если оно p–устойчиво и, кроме того, $M\,|\,X(t)\,|^p \to 0$ при $t \to \infty$;

3) экспоненциально p–устойчивым, если при некоторых постоянных $A > 0$, $\alpha > 0$:

$$M\,|\,X(t)\,|^p \leq A\,|\,x\,|^p \exp\left[\,-\alpha\,(t-s)\,\right], \quad t \geq s.$$

Заметим, что p–устойчивость при $p = 1$ называется устойчивостью в среднем, а при $p = 2$ — устойчивостью в среднеквадратическом. Следующие две теоремы можно назвать *теоремами Невельсона–Хасьминского* [96] об условиях экспоненциальной p–устойчивости стохастических систем в терминах функций Ляпунова.

Теорема 4.35. *Для экспоненциальной* p*–устойчивости тривиального решения системы* (4.38) *при* $t \geq 0$ *достаточно, чтобы* $\exists\, V(t,x) \in C_2^0(E)$ *— функция, удовлетворяющая неравенствам*

$$k_1\,|\,x\,|^p \leq V(t,x) \leq k_2\,|\,x\,|^p, \qquad LV(t,x) \leq -\,k_3\,|\,x\,|^p, \tag{4.41}$$

где $k_1, k_2, k_3 > 0$ *— некоторые постоянные.*

Теорема 4.36. *Если решение* $X(t) \equiv 0$ *системы* (4.38) *экспоненциально* p*–устойчиво, а коэффициенты* b *и* σ_r *имеют непрерывные ограниченные производные по* x *до второго порядка, то* $\exists\, V(t,x) \in C_2^0(E)$ *— функция, удовлетворяющая неравенствам* (4.41) *и неравенствам*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| < k_4\,|\,x\,|^{p-1}, \qquad \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| < k_4\,|\,x\,|^{p-2}$$

при некотором $k_4 > 0$.

При изучении стабилизационных свойств стохастических систем может быть полезна следующая лемма.

Лемма 4.9. *Пусть коэффициенты* $b(t,x)$, $\sigma_r(t,x)$ *исходной системы* (4.38) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.36, *причем*

$$\int\limits_s^{\infty} M\,|\,X(t)\,|^p\,dt < \infty,$$

где $t \geq s \geq 0$. *Тогда* $\lim_{t\to\infty}\ M\,|\,X(t)\,|^p = 0$.

Задачи и упражнения

Представляем подборку задач и ряд упражнений по изложенному ранее материалу. Предполагается при этом, что сами задачи являются естественным теоретическим продолжением этого материала, включают в себя довольно подробное изложение рассматриваемой отдельной проблемы. Это изложение сопровождается постановкой вопроса, предназначенного для решения. Что же касается упражнений, то они представляют собой небольшие тестовые задания по усвоению теории и умению эту теорию применять на практике. Все упражнения для удобства пользования снабжены ответами.

ЗАДАЧИ. Задачи 1–4 соответствуют Главам 1–4.

1. Диагонализация переменных матриц. Рассматривается система ДУ вида [15]:

$$\dot{y} = \big[\, A + B(t) \,\big]\, y,$$

где A — постоянная матрица, $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Ставится задача о приведении к диагональному виду матрицы $A + B(t)$ для последующего решения исходного уравнения. Пусть характеристические числа матрицы A различны.

Покажем, что характеристические числа матрицы $A + B(t)$ также различны для достаточно больших значений t. Пусть $f(\lambda, t)$ — характеристический многочлен матрицы $A + B(t)$: $f(\lambda, t) = \det\big(A + B(t) - \lambda E\big)$, при этом, $f(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A, $f(\lambda) = f(\lambda, \infty)$. Будем считать, что характеристические числа λ_1, ..., λ_n матрицы A различны. Тогда в комплексной плоскости λ можно построить окружности c_j с центрами λ_j, которые попарно не имеют общих внутренних точек.

Из теории функций комплексного переменного известно, что число корней уравнения $f(\lambda, t) = 0$ внутри каждой окружности

c_j определяется формулой

$$N_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{\partial f(\lambda, t)/\partial\lambda}{f(\lambda, t)}\, d\lambda, \qquad i^2 = -1.$$

В нашем случае $f(\lambda, t) = f(\lambda) + g(\lambda, t)$, где $g(\lambda, t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно на каждой окружности c_j. Поэтому при $t \geq t_0$ функция $f(\lambda, t)$ не имеет корней на c_j. Поскольку

$$f_\lambda = f'(\lambda) + g_\lambda, \quad f_\lambda = f_\lambda(\lambda, t), \quad f'(\lambda) = d\, f(\lambda)/d\lambda, \quad g_\lambda = g_\lambda(\lambda, t),$$

то

$$N_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \left[\frac{f'(\lambda) + g_\lambda}{f(\lambda) + g} \right] d\lambda \; =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{f'(\lambda)\, d\lambda}{f(\lambda)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{f(\lambda)\, g_\lambda - f'(\lambda)\, g}{f(\lambda)\, f(\lambda, t)}\, d\lambda.$$

Поскольку величина $|\, f(\lambda)\, f(\lambda, t)\, |$ равномерно ограничена снизу на c_j положительной константой, а $g, g_\lambda \to 0$ при $t \to \infty$, то для $t \geq t_0$ имеем: $N_j(t) = 1 + o(1)$. Здесь $o(1) \sim \alpha \cdot 1$, где $\alpha \to 0$ (бесконечно малая). Так как $N_j(t)$ — это целое число, то отсюда получим, что $N_j(t) = 1$ для $t \geq t_0$. Это показывает, очевидно, различие характеристических чисел матрицы $A + B(t)$ при больших t.

Далее, для $t \geq t_0$ имеем

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_j} \frac{\lambda\, f_\lambda(\lambda, t)\, d\lambda}{f(\lambda, t)},$$

откуда следует, что если матрица $B(t)$ непрерывна при $t \geq t_0$, то и функции $\lambda_j(t)$ непрерывны и $\lambda_j(t) \to \lambda_j$ при $t \to \infty$. Аналогичным свойством обладают $\lambda_j(t)$, если $B(t)$ непрерывно дифференцируема или кусочно гладкая.

Заметим, что коэффициентами при различных степенях λ в многочлене $f(\lambda, t)$ служат многочлены от элементов матрицы $B(t)$. Поэтому, если $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, сверх того,

$\int_{t_0}^{\infty} \| \, d\, B(t)/dt \, \| \, dt < \infty$, то

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left| \frac{d\,\lambda_j(t)}{dt} \right| dt < \infty.$$

Используя все эти данные, требуется показать, что найдется такая матрица $T(t)$, что замена переменной по формуле $y = T(t)\, z$ переводит уравнение

$$\dot{y} = \big[\, A + B(t) \,\big]\, y$$

в уравнение

$$\dot{z} = \big[\, L(t) + C(t) \,\big]\, z,$$

где

$$L(t) = T^{-1}(t) \, \big[\, A + B(t) \,\big] \, T(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \, ..., \, \lambda_n(t)\big).$$

При этом

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \| \, C(t) \, \| \, dt < \infty, \qquad \int\limits_{t_0}^{\infty} \left\| \frac{dT(t)}{dt} \right\| dt < \infty,$$

где $T(t) \to T$ при $t \to \infty$, $\det T \neq 0$, T — некоторая постоянная матрица.

2. Влияние вибрации точки подвеса на устойчивость равновесия маятника. Рассматривается задача о характере влияния вертикальных колебаний точки подвеса на устойчивость равновесия маятника [58, 92].

Пусть материальная точка массой m укреплена на конце невесомого стержня длины l, который может вращаться вокруг горизонтальной оси Ox, O — точка подвеса. Очевидно, что этот маятник имеет два положения равновесия — нижнее устойчивое и верхнее неустойчивое.

Сначала изучим колебания около нижнего устойчивого положения равновесия. К силе тяжести маятника mg добавим переносную силу инерции $\Phi_e = -\,m\ddot{y}(t)$, где $y = y(t)$ — закон движения точки подвеса O; Oy — ось СК, направленная вертикально вниз. Согласно

теореме об изменении момента количества движения относительно оси вращения маятника можем написать

$$\frac{d\,(ml^2\dot{\varphi})}{dt} = -\,m\,(g - \ddot{y})\sin\varphi, \tag{1}$$

где φ — угол отклонения стержня от оси Oy.

Будем считать, что точка подвеса маятника колеблется по гармоническому закону $y = a\cos\omega t$, где ω — частота колебаний. В этом случае для малых значений φ уравнение (1) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{a\omega^2}{l}\cos\omega t \right) \varphi = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) — это *уравнение Матье*, которое может быть приведено к канонической форме: $d^2x/d\tau^2 + (\delta + \varepsilon\cos\tau)\, x = 0$ с помощью подстановки $\omega t = \tau$. В результате получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau \right) \varphi = 0, \tag{3}$$

где $\delta = g/(l\omega^2)$, $\varepsilon = a/l$.

Требуется показать, что при малых ε наступает параметрический резонанс вблизи значений $\delta = k^2/4$, где k — целое положительное число.

Если это так, то при частоте вертикальных колебаний точки подвеса, близкой к значениям $\omega = (2/k)\sqrt{g/l}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, устойчивое нижнее положение маятника сделается неустойчивым. Отметим, что частота свободных колебаний маятника равна $\sqrt{g/l}$ (когда отсутствует вибрация точки подвеса). Значит, обычный резонанс (точка подвеса O совершает не вертикальные, а горизонтальные колебания) будет наблюдаться только при частоте $\sqrt{g/l}$. Итак, устойчивость нижнего положения маятника может быть нарушена вертикальными колебаниями точки подвеса.

Перейдем теперь к рассмотрению верхнего неустойчивого положения маятника. Меняя g на $-\,g$, получим уравнение движения (ось Oy направлена вертикально вверх):

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\left(-\frac{g}{l\omega^2}+\frac{a}{l}\cos\tau\right)\varphi=0,$$

где $\delta=-g/(l\omega^2)$, $\varepsilon=a/l$. Предположим, что амплитуда a колебаний точки подвеса O мала по сравнению с длиной маятника l, т.е. $\varepsilon\ll 1$.

Требуется показать, что в этом случае должны выполняться неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\delta<\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Если это так, то, внося в неравенства (4) значения δ и ε, получим

$$-\frac{a^2}{2l^2}<-\frac{g}{l\omega^2}<\frac{1}{4}-\frac{a}{2l},$$

или

$$\frac{2a-l}{4}<\frac{g}{\omega^2}<\frac{a^2}{2l}.$$

Видим, что при $a\ll l$ левое неравенство всегда выполняется; правое же неравенство приводится к виду: $a\omega>\sqrt{2gl}$. Следовательно, верхнее неустойчивое положение маятника может быть стабилизировано высокочастотными колебаниями точки подвеса O в том случае, если $\omega>\sqrt{2gl}/a$. Этот эффект впервые был установлен П.Л. Капицей в работе [58].

3. Оптимальное демпфирование переходных процессов. Рассматривается управляемая система [51]:

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(x_1,\,...,\,x_n,u_1,\,...,\,u_r,t),\qquad s=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Зададим начальную точку x_0 и начальный момент t_0. Тогда каждому управлению $u\in G$, где G — множество кусочно-непрерывных вектор-функций, отвечает движение

$$x=x(t,u,x_0,t_0), \tag{6}$$

проходящее через точку x_0 при $t=t_0$.

Зададим еще поверхность S в пространстве переменных $\{\,t,x_1,\,...,\,x_n\,\}$ с помощью уравнения

$$S(t,x_1,\,...,\,x_n)=0. \tag{7}$$

Требуется выбрать $u\in G$ так, чтобы интегральная кривая (6) системы (5) в некоторый момент t_1 достигала поверхности S (7) с учетом выполнения наложенных на x и u ограничений вида

$$V_j(x_1,\,...,\,x_n,u_1,\,...,\,u_r,t)\le 0,\qquad j=\overline{1,k}. \tag{8}$$

Помимо этого рассмотрим также функцию $V(t,x_1,\,...,\,x_n)$, определяющую каким-либо образом расстояние от переходного процесса x (6) до его желаемого конечного состояния на поверхности S. Цель управления состоит в уменьшении этого расстояния. Приходим тем самым к понятию *оптимального управления по отношению к демпфированию функции* V — это управление $u^0=(u_1^0,\,...,\,u_r^0)$, при котором функция V убывает вдоль траектории $x(t,u^0,x_0,t_0)=x^0(t,x_0,t_0)$, соответствующей этому управлению, наибольшим образом.

На движении (6) вычислим dV/dt в силу системы (5):

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\,f_s=W(t,x,u).$$

При $u=u_0$ необходимо, чтобы $\min_{u\in G}\,W(t,x,u)=W(t,x^0,u^0)$. Оптимальное управление u^0 по отношению к демпфированию функции V переводит точку $x_0^0=x^0(x_0,t_0)$ на поверхность S с учетом ограничений (8).

Пусть движение точки в фазовом пространстве с постоянной по величине и управляемой по направлению скоростью задается системой уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=u_s,\qquad \sum_{s=1}^{n}u_s^2=1. \tag{9}$$

Выберем $V(x)=\left(\sum_{s=1}^{n}x_s^2\right)^{1/2}$. Уравнение, оптимальное относительно демпфирования функции V, определяется в результате нахождения min–го возможного значения функции

$$W = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\, u_s, \tag{10}$$

откуда

$$u_s^0 = -\,\frac{x_s}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}}, \qquad s = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Надо показать, что при u_s^0 (11) движущаяся точка из любой заданной начальной точки $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ попадет в начало координат в момент, когда

$$t_* = r_* = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2\right)^{1/2}.$$

Указание: здесь система (9) при u_s^0 (11) имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = -\,\frac{x_s}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}}, \qquad s = \overline{1, n}$$

После домножения s–го уравнения на x_s, суммирования по s, получим

$$\frac{1}{2}\,\frac{dr^2}{dt} = -\,r, \qquad r^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

откуда, интегрируя, найдем, что $r = -t + r_*$.

Не трудно показать, что t_* — это наименьшее возможное время, за которое искомая точка может попасть из точки x_0 в начало координат, т.е. оптимальное по отношению к демпфированию функции V *управление* u^0 является в то же время и *оптимальным по быстродействию.* Напомним в этой связи, что управление $u = (u_1, ..., u_r)$ называется оптимальным по быстродействию, если среди управлений, переводящих начальную точку x_0 на поверхность S (например, в начало координат), оно доставляет времени перехода $T = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} d\tau$ наименьшее возможное значение.

4. Движение электрона в постоянном магнитном поле. Проведем исследование устойчивости движения электрона в постоянном магнитном поле [92].

В разделе 4.1.3, посвященном влиянию диссипативных и гироскопических сил, рассматривались системы, на которые помимо упомянутых сил действовали еще и потенциальные силы. Однако в данной задаче об электроне предполагается, что на систему действуют только гироскопические силы. Для решения этой задачи следует воспользоваться *теоремами Меркина* [92]:

Теорема 1. *Пусть на систему действуют только гироскопические силы, считая, что уравнения возмущенного движения приведены к форме:* $\ddot z + G\dot z = 0$. *Тогда невозмущенное движение* $z = 0$, $\dot z = 0$ *системы всегда устойчиво относительно скоростей.*

Отметим, что эта теорема, справедливая для линейной автономной (G — постоянная матрица) системы, справедлива также и для линейной неавтономной ($G = G(t)$) и нелинейной систем [92].

Обратим внимание также и на то, что устойчивость движения определяется не только устойчивостью в скоростях, но и устойчивостью в координатах. Речь об этом идет в следующей теореме.

Теорема 2. *Для того, чтобы невозмущенное движение линейной автономной системы* $\ddot z + G\dot z = 0$, *находящейся под действием одних гироскопических сил, было устойчивым относительно координат, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы гироскопических сил не равнялся нулю:* $\det G \neq 0$.

Отметим следствие, вытекающее из теоремы 2: если на систему действуют только гироскопические силы и она имеет нечетное число координат, то невозмущенное движение такой системы всегда неустойчиво (тогда $\det G \equiv 0$).

Рассмотрим теперь задачу об электроне. Пусть m — масса электрона, e — его заряд, H — вектор напряженности магнитного поля, c — электродинамическая постоянная, равная скорости света: $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Тогда векторное уравнение движения электрона при постоянном векторе H будет иметь вид

$$m\,\frac{dv}{dt} = \frac{e}{c}\,(v \times H), \tag{12}$$

где $v = v(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ — вектор скорости электрона. Требуется показать, что движение устойчиво относительно $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, двух координат, а относительно третьей координаты оно неустойчиво.

Запишем уравнение (12) через проекции на оси неподвижной СК:

$$m\,\frac{dv}{dt} - \frac{e}{c}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} - \frac{e}{c}\,H_z\,\dot{y} + \frac{e}{c}\,H_y\,\dot{z} = 0,\\ m\,\ddot{y} + \frac{e}{c}\,H_z\,\dot{x} - \frac{e}{c}\,H_x\,\dot{z} = 0,\\ m\,\ddot{z} - \frac{e}{c}\,H_y\,\dot{x} + \frac{e}{c}\,H_x\,\dot{y} = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Видим, что в этой системе матрица гироскопических сил G — это матрица сил, линейно зависящих от скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; это матрица кососимметричная: $G^* = -G$ — у нее по диагонали нули и $g_{ij} = -g_{ji}$. Поскольку другие силы отсутствуют, то в силу теоремы 2 следует вывод о том, что невозмущенное движение электрона устойчиво относительно $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, а на основании следствия из теоремы 2 оно неустойчиво по совокупности всех координат x, y, z (число координат равно трем).

Направим ось z параллельно вектору H; тогда $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H$. Уравнения (13) отсюда запишутся так:

$$m\ddot{x} - \frac{e}{c}\,H\dot{y} = 0, \qquad m\ddot{y} + \frac{e}{c}\,H\dot{x} = 0, \qquad m\ddot{z} = 0.$$

Первые два уравнения не зависят от третьего уравнения. Определитель матрицы гироскопических коэффициентов для этих двух уравнений равен

$$\begin{vmatrix} 0 & -(e/c)\,H \\ (e/c)\,H & 0 \end{vmatrix} = \frac{e^2}{c^2}\,H^2 \neq 0.$$

Можем сделать заключение согласно теореме 2 о том, что движение электрона устойчиво относительно координат x и y. Требуется показать, что движение по координате z неустойчиво.

УПРАЖНЕНИЯ. Предлагается вниманию для самостоятельного решения ряд задач по теории устойчивости [150]. Данные задачи решаются исключительно в рамках рассмотренных методов Ляпунова и их модификаций. Все задачи снабжены ответами.

1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\dot{x} = -2x - 3y + x^5, \qquad \dot{y} = x + y - y^5.$$

2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ системы

$$\dot{x} = x - y - z, \qquad \dot{y} = x + y - 3z, \qquad \dot{z} = x - 5y - 3z.$$

3. При каких значениях α точка покоя $x = 0, y = 0, z = 0$ системы

$$\dot{x} = \alpha x - y, \qquad \dot{y} = \alpha y - z, \qquad \dot{z} = \alpha z - x$$

устойчива?

4. При каких значениях α система

$$\dot{x} = y + \alpha x - x^5, \qquad \dot{y} = -x - y^5$$

имеет устойчивую точку покоя $x = 0$, $y = 0$?

5. К какому пределу стремится решение дифференциального уравнения

$$\mu\dot{x} = (x^2 + t^2 - 4)(x^2 + t^2 - 9), \qquad x(1) = 1$$

при $\mu \to 0$, $\mu > 0$, $t > 1$?

6. К какому пределу стремится решение дифференциального уравнения

$$\mu\dot{x} = x - t + 5, \qquad x(2) = 5$$

при $\mu \to 0$, $\mu > 0$, $t > 2$?

7. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы уравнений

$$\dot{x} = x + e^y - \cos y, \qquad \dot{y} = 3x - y - \sin y.$$

8. Устойчиво ли по отношению к постоянно действующим возмущениям решение $x = 0$, $y = 0$ системы уравнений

$$\dot{x} = -2y - x^5, \qquad \dot{y} = 5x - y^5\,?$$

9. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнения

$$d\,(\ddot{x})/dt + 5\ddot{x} + 2\dot{x} + 20 = 0\,?$$

10. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнения

$$d\,(\ddot{x})/dt + 5\ddot{x} + 6\dot{x} + x = 0\,?$$

11. Определить периодическое решение уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$ и исследовать его на устойчивость.

12. Устойчиво ли периодическое решение уравнения $d\,(\ddot{x})/dt + 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = \cos t\,$?

13. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = y^3 + x^5, \qquad \dot{y} = x^3 + y^5.$$

14. Исследовать на устойчивость решения системы уравнений

$$\dot{x} = 3y - 2x + e^t, \qquad \dot{y} = 5x - 4y + 2.$$

15. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$d\,(\ddot{x})/dt + 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 7\,\mathrm{sh}\,x = 0.$$

16. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x} + (\alpha - 1)\,\dot{x} + (4 - \alpha^2)\,x = 0,$$

где α — параметр.

17. Устойчиво ли тривиальное решение системы

$$\dot{X}(t) = A\,X(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

где $X(t)$ — вектор в трехмерном пространстве.

18. Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$\ddot{x} + 9x = \sin t.$$

19. Найти периодическое решение уравнения $d\,(\ddot{x})/dt + x = \cos t$ и исследовать его на устойчивость.

20. Найти область устойчивости уравнения

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (1 - \alpha)\,x = 0,$$

где α — параметр.

21. Задано уравнение

$$d\,(\ddot{x})/dt + \ddot{x} + \alpha^2\dot{x} + 5\alpha x = 0,$$

где α — параметр. Найти область устойчивости.

Ответы.

1. Точка покоя асимптотически устойчива.
2. Точка покоя неустойчива.
3. При $\alpha < -1/2$ точка покоя асимптотически устойчива, при $\alpha = -1/2$ устойчива, при $\alpha > -1/2$ неустойчива.
4. При $\alpha \le 0$ точка покоя асимптотически устойчива, при $\alpha > 0$ неустойчива.
5. При $1 < t < 2 : x(t, \mu) \to \sqrt{4 - t^2}$; при $2 < t < 3 : x(t, \mu) \to -\sqrt{9 - t^2}$; при $t > 3 : x(t, \mu) \to \infty$.
6. $x(t, \mu) \to \infty$.
7. Точка покоя неустойчива.
8. Точка покоя устойчива.
9. Точка покоя неустойчива.
10. Точка покоя устойчива.
11. Периодическое решение $x = (1/5)\sin t - (2/5)\cos t$ асимптотически устойчиво.

12. Все решения, в том числе и периодические, асимптотически устойчивы.

13. Точка покоя неустойчива; функция $v = x^4 - y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева.

14. Все решения неустойчивы.

15. Решение $x \equiv 0$ неустойчиво.

16. При $1 < \alpha < 2$ решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво; при $\alpha = 1$ и при $\alpha = 2$ решение $x \equiv 0$ устойчиво; при $\alpha > 2$ и при $\alpha < 1$ решение $x \equiv 0$ неустойчиво.

17. Решение $X(t) \equiv 0$ неустойчиво.

18. Все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.

19. Периодическое решение $x = (\cos t - \sin t)/2$ неустойчиво.

20. Область устойчивости $0 \leq \alpha \leq 1$, область асимптотической устойчивости $0 < \alpha < 1$.

21. Область устойчивости $\alpha \geq 5$, область асимптотической устойчивости $\alpha > 5$.

Список литературы

[1] *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем // Успехи матем. наук. — 1949. — Т. 4, вып. 4. — С. 186 – 188.

[2] *Айзерман М.А.* Теория автоматического регулирования. — М.: Наука, 1966. — 452 с.

[3] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 140 с.

[4] *Анапольский Л.Ю., Иртегов В.Д., Матросов В.М.* Способы построения функций Ляпунова // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Общая механика. — 1975. — Т. 2. — С. 53 – 112.

[5] *Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К. и др.* Устойчивость адаптивных систем. — М.: Мир, 1989. — 264 с.

[6] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи матем. наук. — 1963. — Т. 18, вып. 6. — с. 91 – 192.

[7] *Арнольд В.И.* Об устойчивости динамических систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 1. — С. 9 –12.

[8] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.

[9] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 3. — 304 с.

[10] *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.

[11] *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

[12] *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 86, № 3. — С. 453 – 456.

[13] *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

[14] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

[15] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 216 с.

[16] *Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 336 с.

[17] *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991. — 303 с.

[18] *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.

[19] *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.

[20] *Бромберг П.В.* Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. — М.: Оборонгиз, 1953. — 224 с.

[21] *Вайман М.Я.* Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. — М.: Машиностроение, 1981. — 126 с.

[22] *Валеев К.Г., Финин Г.С.* Построение функций Ляпунова. — Киев: Наукова думка, 1981. — 412 с.

[23] *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 335 с.

[24] *Воронов А.А.* Современное состояние и проблемы теории устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 5. — С. 5 – 28.

[25] *Габриелян М.С., Красовский Н.Н.* К задаче стабилизации механической системы // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, вып. 5. — С. 801 – 811.

[26] *Гальперин Е.А.* К задаче о стабилизации управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1964. — № 6. — С. 169 – 171.

[27] *Гальперин Е.А., Красовский Н.Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Прикладная математика и механика. — 1963. — Т. 27, вып. 6. — с. 988 – 1004.

[28] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.

[29] *Гантмахер Ф.Р., Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем // Тр. II Всесоюзн. съезда по теорет. и прикл. механике. — М.: Наука, 1965. — Вып. 1. — с. 30 – 63.

[30] *Гелиг А.Х.* Об устойчивости движения систем с неединственным положением равновесия // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 3. — С. 526 – 528.

[31] *Гелиг А.Х.* Об устойчивости нелинейных регулируемых систем с бесконечным числом степеней свободы // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, вып. 4. — с. 789 – 795.

[32] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[33] *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. — СПб.: Изд-во с.- Петербургск. ун-та, 1993. — 265 с.

[34] *Гельфанд И.М., Фомин с.В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. — 228 с.

[35] *Гихман И.И., Дороговцев А.Я.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Укр. матем. журнал. — 1965. — Т. 17, № 6. — С. 3 – 21.

[36] *Далецкий А.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

[37] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

[38] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. — М.: Наука, 1979. — 299 с.

[39] *Джури Э., Ли Б.* Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. 26, № 6. — С. 945 – 965.

[40] *Дубошин Г.Н.* Основы теории устойчивости движения. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1952. — 319 с.

[41] *Еругин Н.П.* Приводимые системы // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1946. — Вып. 13. — с. 3 – 96.

[42] *Еругин Н.П.* О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом // Прикладная математика и механика. — 1950. — Т. 14, вып. 5. — с. 459 – 512.

[43] *Еругин Н.П.* Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. — 1951. — Т. 15, вып. 2. — с. 227 – 236.

[44] *Еругин Н.П.* Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в целом // Прикладная математика и механика. — 1953. — Т. 17, вып. 4. — с. 389 – 400.

[45] *Еругин Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963. — 272 с.

[46] *Еругин Н.П.* Первый метод Ляпунова // Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1968. — Т. 1. — с. 67 – 86.

[47] *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. — 320 с.

[48] *Зубов В.И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. — 240 с.

[49] *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 631 с.

[50] *Зубов В.И.* Устойчивость движения. — М.: Высшая школа, 1973. — 272 с.

[51] *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Машиностроение, 1974. — 336 с.

[52] *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. — Л.: Судостроение, 1980. — 256 с.

[53] *Зубов В.И.* Интегральные уравнения для функции Ляпунова // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 314, № 4. — С. 780 – 782.

[54] *Зубов В.И.* Экспоненциальная асимптотическая устойчивость // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 4. — С. 411 – 413.

[55] *Зубов В.И.* Аналитическое построение функций Ляпунова // Докл. РАН. — 1994. — Т. 335, № 6. — С. 688 – 690.

[56] *Зубов В.И.* Процессы управления и устойчивость. — СПб.: НИИХ, 1999. — 325 с.

[57] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

[58] *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал эксп. и теорет. физики. — 1951. — Т. 21, вып. 5. — С. 588 – 598.

[59] *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. — М.: ВИНИТИ, 1983. — Итоги науки и техники. Общая механика. — Т. 6. — 132 с.

[60] *Карачаров К.А., Пилютик А.Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1962. — 243 с.

[61] *Кац И.Я.* Об устойчивости в целом стохастических систем // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, вып. 2. — с. 366 – 372.

[62] *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 27, вып. 5. — С. 809 – 823.

[63] *Коддингтон Е., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.

[64] *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

[65] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 212 с.

[66] *Красовский Н.Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова // Дополнение III к книге И.Г. Малкина "Теория устойчивости движения". — М.: Наука, 1966. — с. 463 – 474.

[67] *Крейн М.Г.* О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости // Успехи матем. наук. — 1948. — Т. 3, № 3. — С. 166 – 169.

[68] *Крейн М.Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. — 186 с.

[69] *Крейн с.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1968. — 464 с.

[70] *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. — М.: Мир, 1969. — 200 с.

[71] *Ла-Салль Ж., Лефшец с.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.

[72] *Леонов Г.А.* Устойчивость и колебания фазовых систем // Сибирск. матем. журнал. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1031 – 1052.

[73] *Леонов Г.А.* Глобальная устойчивость двумерных систем управления угловой ориентацией // Прикладная математика и механика. — 2000. — Т. 64, вып. 5. — с. 890 – 895.

[74] *Леонов Г.А.* Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, вып. 4. — с. 134 – 155.

[75] *Леонов Г.А.* Стабилизационная проблема Брокетта // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 5. — С. 190 – 193.

[76] *Леонов Г.А.* Введение в теорию управления. — СПб.: Изд-во с.- Петербургск. ун-та, 2004. — 218 с.

[77] *Леонов Г.А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. — СПб.: Изд-во с.-Петербургск. ун-та, 2004. — 142 с.

[78] *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб.: Наука, 2000. — 400 с.

[79] *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.: Изд-во с.- Петербургск. ун-та, 2002. — 308 с.

[80] *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. — М.: Физматгиз, 1962. — 483 с.

[81] *Лефшец с.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. — М.: Мир, 1967. — 183 с.

[82] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.-Л.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.

[83] *Лурье А.И., Розенвассер Е.Н.* О методах построения функции Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — 12 с.

[84] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.

[85] *Максимкин Н.Н.* Об экспоненциальной и асимптотической устойчивости // Метод функций Ляпунова в динамике нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. — с. 96 – 102.

[86] *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.

[87] *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 416 с.

[88] *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 458 с.

[89] Математическая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1985. — Т. 5. — 1248 с.

[90] *Матросов В.М.* К теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, вып. 6. — с. 885 – 895.

[91] *Матросов В.М.* Метод функций Ляпунова в системах с обратной связью // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 9. — С. 63 – 75.

[92] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1971. — 312 с.

[93] Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987. — 312 с.

[94] Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — 447 с.

[95] *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Абсолютная неустойчивость нелинейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 1. — С. 19 – 27.

[96] *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Об устойчивости стохастических систем // Проблемы передачи информации. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 76 – 91.

[97] *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: ЛВВИА им. Ф.А. Можайского, 1949. — 140 с.

[98] Нелинейная теория управления и ее приложения / Под ред. В.М. Матросова. — М.: Физматгиз, 2002. — 320 с.

[99] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 500 с.

[100] *Нечитайло А.В.* Условия абсолютной устойчивости и диссипативности регулируемых систем в классе нелинейностей с условием на производную // Сибирск. матем. журнал. — 1976. — № 5. — С. 1190 – 1193.

[101] *Петкевич В.В.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1981. — 496 с.

[102] *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С,Д,* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 260 с.

[103] *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Физматлит, 2009. — 207 с.

[104] *Плисс В.А.* Некоторые проблемы теории устойчивости в целом. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1958. — 183 с.

[105] *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964. — 367 с.

[106] *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1977. — 303 с.

[107] *Пожарицкий Г.К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // Прикладная математика и механика. — 1958. — Т. 22, вып. 2. — с. 145 – 154.

[108] *Поляхов Н.Н., Зегжда с.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 536 с.

[109] *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. — М.: Наука, 1976. — 447 с.

[110] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982. — 332 с.

[111] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с.

[112] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970. — 453 с.

[113] *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. — М.: Наука, 1981. — 176 с.

[114] Проблемы стабилизации управляемых движений / Под ред. Н.Н. Красовского // Дополнение к книге И.Г. Малкина: Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — с. 475 – 514.

[115] *Пятницкий Е.С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 6. — С. 5 – 36.

[116] *Пятницкий Е.С.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 1. — С. 5 – 15.

[117] *Пятницкий Е.С.* Критерий абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем второго порядка с одним нелинейным нестационарным элементом // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 1. — С. 5 – 16.

[118] *Пятницкий Е.С.* О существовании абсолютно устойчивых систем, для которых не выполняется критерий В.М. Попова // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 1. — С. 30 – 37.

[119] *Решетняк Ю.Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. — Новосибирск: Наука, 1982. — 229 с.

[120] *Розенвассер Е.Н.* Об абсолютной устойчивоси нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 1963. — № 3. — с. 304 – 313.

[121] *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. — М.: Наука, 1988. — 304 с.

[122] *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — 141 с.

[123] *Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1968. — Т. 1. — с. 7 – 66.

[124] *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // Прикладная математика и механика. — 1970. — Т. 34, вып. 3. — с. 440 – 456.

[125] *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 256 с.

[126] *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980. — 300 с.

[127] *Сиразетдинов Т.К.* К теории устойчивости процессов с распределенными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1967. — Т. 31, вып. 1. — С. 37 – 48.

[128] *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 1987. — 231 с.

[129] *Смирнов Е.Я.* Стабилизация программных движений. — СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 1997. — 306 с.

[130] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красов-ского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

[131] *Срагович В.Г.* Адаптивное управление. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

[132] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959. — 468 с.

[133] *Тертычный-Даури В.Ю.* Галамех: в 4-х томах. — Т. 1. Адаптивная механика. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2008. — 544 с.

[134] *Тертычный-Даури В.Ю.* Галамех: в 4-х томах. — Т. 2. Стохастическая механика. — М.: Изд-во физ.- мат. лит., 2008. — 576 с.

[135] *Фомин В.Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. — 236 с.

[136] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

[137] *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974. — 368 с.

[138] *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. — М.: Наука, 1990. — 293 с.

[139] *Фрадков А.Л.* Адаптивная стабилизация минимально-фазовых объектов с векторным входом без измерения производных от выхода // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 592 – 594.

[140] *Фурасов В.Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977. — 248 с.

[141] *Халилов З.И.* Об устойчивости решений уравнения в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 137, № 4. — С. 797 – 799.

[142] *Хасьминский Р.З.* Об устойчивости нелинейных стохастических систем // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, вып. 5. — с. 915 – 921.

[143] *Хасьминский Р.З.* Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных стохастических систем // Теор. вероятн. и ее примен. — 1967. — Т. 12, № 1. — С. 167 – 172.

[144] *Хасьминский Р.З.* Об устойчивости по первому приближению для стохастических систем // Прикладная математика и механика. — 1967. — Т. 31, вып. 6. — С. 1021 – 1027.

[145] *Хасьминский Р.З.* Устойчивость дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

[146] *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

[147] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. — 319 с.

[148] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 535 с.

[149] *Чурилов А.Н.* Частотная теорема и уравнение Лурье // Сибирск. матем. журнал. — 1979. — Т. 20, № 4. — С. 854 – 868.

[150] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

[151] *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304 – 1307.

[152] *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механике. — Казань: Казанск. авиац. ин-т, 1964. — с. 135 – 142.

[153] *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 278 – 281.

[154] *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости и диссипативности регулируемых систем с одной дифференцируемой нелинейностью // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 160, № 2. — С. 298 – 301.

[155] *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // Автоматика и телемеханика. — 1967. — № 6. — С. 5 – 30.

[156] *Якубович В.А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 12. — С. 5 – 14; 1971. — № 6. — С. 25 – 33.

[157] *Якубович В.А.* S–процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник Ленингр. ун-та. — 1971. — Вып. 1, № 1. — С. 62 – 77.

[158] *Aeyels D., Peuteman J.* On exponential stability of nonlinear time-varying differential equations // Automatica. — 1999. — V. 35. — P. 1091 – 1100.

[159] *Brockett R.W.* On the asymptotic properties of solutions of differential equations with multiple equilibria // J. Diff. Equations. — 1982. — V. 44. — P. 249 – 262.

[160] *Brockett R.W., Willems I.L.* Frequency domain stability criteria // IEEE Trans. Autom. Control. — 1965. — P. I. — V. AC-10, № 3. — P. 2 – 261; P. II. — V. AC-10, № 4. — P. 407 – 413.

[161] *Hahn W.* Stabilty of motion. — Berlin: Springer-Verlag, 1967. — 446 p.

[162] *Hille E.* Linear differential equations in Banach algebras // Proc. Int Sympos. Linear Spaces (Yerusalem, 1960). — N.Y., Oxford, London, Paris: Academic Press, Pergamon Press, 1967. — P. 263 – 273.

[163] *Kucera V., de Souza C.* A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability // Automatica. — 1995. — V. 31. — P. 1357 – 1359.

[164] *Kushner H.* On the stability of stochastic dynamical systems // Proc. of the Nat. Acad. of Sci., USA. — 1964. — V. 53, № 1. — P. 8 – 12.

[165] *Kushner H.* On the construction of stochastic Liapunov functions // IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — V. 10, № 4. — P. 477 – 478.

[166] *Leonov G.A., Noack A., Reitmann V.* Asymptotic orbital stability conditions for flows by estimates of singular values of the linearization // Nonlinear Analysis. — 2001. — V. 44. — P. 1057 – 1085.

[167] *Massera J.L.* On Lyapunovs condition of stability // Ann. of Math. — 1949. — № 3. — P. 705 – 721.

[168] *Moser J.* Stable and Random Motions in Dynamical Systems. — Princeton: Univ. Press, 1973. — № 77. — 198 p.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета — генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики — крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетм, Петербургским отделением Математического института им. В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. Рябова Анна Викторовна. Кандидат физико-математических наук, доцент, автор 30 научных печатных работ. Область научных интересов: качественная теория дифференциальных уравнений, методика преподавания высшей математики.

2. Тертычный (Тертычный-Даури) Владимир Юрьевич. Доктор физико-математических наук, профессор. Автор 120 научных печатных работ, в том числе 17 монографий, опубликованных в ведущих российских и зарубежных научных издательствах. Области научных интересов: классическая механика, гироскопия, теория устойчивости, канонические преобразования, адаптивное, оптимальное и стохастическое управление, робототехника, гипердинамика, космология и космодинамика, ядерная электродинамика.

Рябова Анна Викторовна
Тертычный-Даури Владимир Юрьевич

Элементы теории устойчивости

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка А.А. Ведяков
Дизайн обложки В.Ю. Тертычный-Даури

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Рябова Анна Викторовна
Тертычный-Даури Владимир Юрьевич

Элементы теории устойчивости

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка А.А. Ведяков
Дизайн обложки В.Ю. Тертычный-Даури

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49