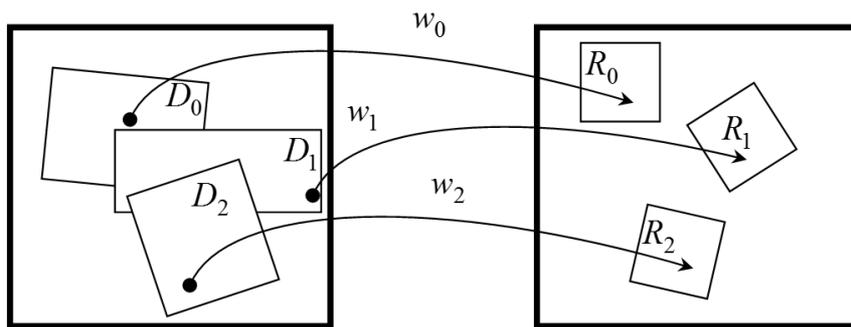


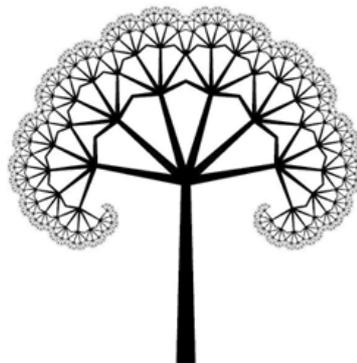
М.А. Волынский, И.П. Гуров, П.А. Ермолаев

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ФОТОНИКИ

Учебно-методическое пособие по практическим работам



ITMO UNIVERSITY
ITMO UNIVERSITY



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

М.А. Волынский, И.П. Гуров, П.А. Ермолаев

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ФОТОНИКИ

**Учебно-методическое пособие по
практическим работам**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2015

Волынский М.А., Гуров И.П., Ермолаев П.А. Методы компьютерной фотоники. Учебно-методическое пособие по практическим работам. – СПб: Университет ИТМО, 2014. – 54 с.

Рассмотрены методы компьютерной обработки, часто используемые в различных приложениях компьютерной фотоники, в том числе алгоритмы улучшения качества изображений, коррекции влияния оптических aberrаций, сжатия информации.

Пособие адресовано студентам, обучающимся по направлению 12.04.03 – "Фотоника и оптоинформатика", а также аспирантам и специалистам, интересующимся проблематикой компьютерной фотоники.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета Фотоники и оптоинформатики, протокол № 7 от 25 мая 2015 г.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2015

©Волынский Максим Александрович, 2015

©Гуров Игорь Петрович, 2015

©Ермолаев Петр Андреевич, 2015

Оглавление

Введение.....	4
Работа 1. Методы восстановления искаженных изображений.....	7
Работа 2. Алгоритмическая коррекция aberrаций в оптических системах	17
Работа 3. Исследование свойств преобразования Гильберта	23
Работа 4. Фрактальное сжатие изображений.....	34
Приложение. Пример оформления отчета по практической работе.....	47

Введение

Информационные технологии составляют одно из основных направлений развития современного общества. В технических системах информация передается при помощи сигналов. Основным видом сигналов являются электрические сигналы, однако в последнее время всё большее распространение получают оптические сигналы, например, в волоконно-оптических линиях передачи информации. Двумерные сигналы представляют пространственное распределение интенсивности света в изображениях различных объектов и являются весьма информативными. Развитие компьютерных технологий, систем регистрации изображений и визуализации данных определяют новые возможности информационных систем с использованием многомерных оптических сигналов.

Современные информационные системы основываются на принципах фотоники – области науки и технологий, которая связана с использованием светового излучения (или потока фотонов) в оптических элементах, устройствах и системах, в которых генерируются, преобразуются, распространяются и детектируются оптические сигналы, а также производится их запись или отображение. Активное развитие фотоники при интеграции с компьютерными технологиями создает качественно новые возможности информационных систем применительно к решению широкого круга задач, определяемых приоритетными направлениями развития науки и критических технологий.

Методы компьютерной фотоники включают формирование и регистрацию оптических сигналов, преобразования оптической информации, ее обработку, представление и визуализацию. В отличие от традиционных систем, основанных главным образом на формировании и обработке одномерных сигналов, современные системы компьютерной фотоники обеспечивают получение и совместный анализ последовательности изображений, в том числе в динамическом режиме. При этом рассматриваются многомерные сигналы.

В системах компьютерной фотоники оптическая система осуществляет первичное преобразование оптического излучения (формирование изображения, оптическую спектральную фильтрацию и т.д.). Фотоэлектрический преобразователь выполняет функцию преобразования распределения интенсивности излучения в пространстве изображений в электрические сигналы, как правило, пропорциональные значениям интенсивности излучения.

Анализ проблемы создания систем компьютерной фотоники показывает, что использование систем с многоэлементными приемниками излучения в сочетании с современными алгоритмами обработки многомерных сигналов позволяет успешно решать различные задачи при широких функ-

циональных возможностях и высокой информативности получаемых данных.

Проблематика методов компьютерной фотоники определяет важность рассмотрения процессов формирования многомерных сигналов, математических методов и алгоритмов обработки информации в компьютерной фотонике. Решение задач в области компьютерной фотоники возможно, как правило, при понимании физических процессов формирования изображений.

В первой практической работе рассматриваются методы алгоритмической коррекции искажений на изображениях, обусловленных влиянием функции рассеяния точки. Если функция рассеяния точки является пространственно-инвариантной, то возможно использовать для корректировки искажений методы на основе обратной свертки искаженного изображения с искажающей функцией, информацию о которой можно получить путем анализа физических процессов формирования искаженных изображений.

Помимо линейных пространственно-инвариантных искажений в реальных оптических системах присутствуют aberrации. Традиционно компенсация aberrаций сводится к специальным методам проектирования оптических систем, что, однако, увеличивает их стоимость. С развитием вычислительной техники появилась возможность алгоритмической компенсации некоторых видов оптических aberrаций, что снижает требования к элементной базе систем формирования изображений и, как следствие, снижает их стоимость. Исследованию методов алгоритмической коррекции aberrаций посвящена вторая практическая работа.

Третья практическая работа посвящена исследованию свойств преобразования Гильберта, позволяющего получить аналитическое дополнение для оптических сигналов, что играет важную роль при обработке данных в системах компьютерной фотоники с когерентным освещением (в частности, в интерферометрических системах). Более того, преобразование Гильберта (и его модификация – преобразование Гильберта-Хуанга) часто используется и в методах обработки некогерентных изображений.

Важным направлением развития систем компьютерной фотоники является разработка методов представления, хранения, эффективного сжатия и передачи многомерных данных. Фрактальное сжатие является одним из популярных методов. Более того, фрактальные методы часто используются при анализе одномерных и многомерных оптических сигналов, в алгоритмах обработки изображений (например, в методах сегментации изображений на основе локальной фрактальной размерности). Исследованию алгоритмов фрактального сжатия многомерных данных посвящена четвертая практическая работа.

Решение проблемы синтеза и практической реализации методов компьютерной фотоники основывается на современных разработках в области высоких технологий, достижениях прикладной математики, фотоники и

микроэлектроники. Формирование профессиональных компетенций в указанной области достигается в том числе при выполнении предложенных в пособии практических работ в соответствии с направлением подготовки «Фотоника и оптоинформатика».

Работа 1. Методы восстановления искаженных изображений

Цель работы: изучение методов восстановления информации, содержащейся в дефокусированных и смазанных изображениях.

Задания по работе

1. Изучить теоретическую часть работы.
2. Осуществить моделирование искажений исходного изображения с применением различных искажающих функций.
3. Написать компьютерную программу, реализующую алгоритмы восстановления искаженных изображений.
4. Провести апробацию реализованных алгоритмов на нескольких тестовых изображениях, подвергнутых различным типам искажения.
5. Сравнить результаты работы реализованных алгоритмов.

1.1 Теоретическая часть

Искажение и улучшение изображений

Задачи коррекции искажений на цифровых изображениях с целью восстановления информации об исходном объекте занимают важное место в компьютерной фотонике. В их круг входит улучшение качества цифровых фотографий, полученных в условиях нестабильности пространственного положения регистрирующего устройства, аэрокосмических снимков, а также улучшение разрешения биомедицинских изображений (например, изображений, получаемых в оптической когерентной томографии). Пример искаженного изображения представлен на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Примеры идеального (а) и искаженного (б) изображений

Математически пространственно-инвариантное искажение изображений можно представить как результат свертки идеального изображения $f(x, y)$ с некоторой искажающей функцией $h(x, y)$ в условиях влияния случайных помех $n(x, y)$. В области независимых переменных регистрируемое изображение можно представить в виде

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) + n(x, y), \quad (1.1)$$

где $g(x, y)$ – искаженное изображение, $n(x, y)$ – аддитивный шум, знак \otimes обозначает операцию свертки.

Процесс улучшения изображения заключается в нахождении оценки изображения $\hat{f}(x, y)$, наиболее близкой к оригиналу. Качество восстановления зависит от имеющейся информации об искажающей функции и характеристиках шума в (1.1).

На рис. 1.1 представлена модель процесса искажения и восстановления изображений.

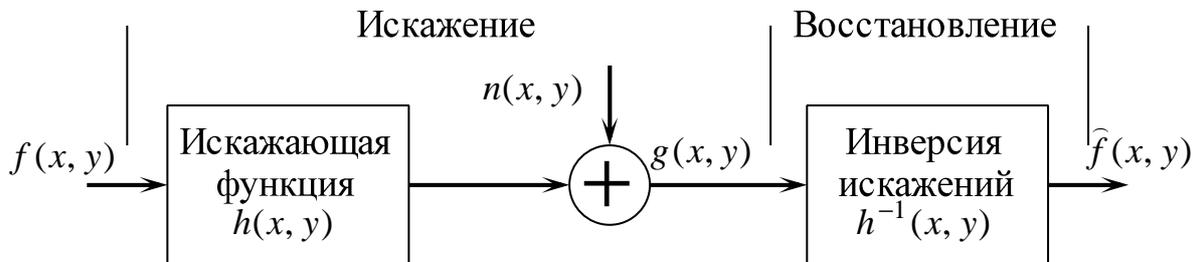


Рис. 1.2. Схема процесса искажения и последующей коррекции изображений

Далее рассматриваются методы улучшения искаженных изображений с учетом воздействия аддитивного шума.

Инверсная фильтрация

Простейшим методом восстановления исходного изображения является применение свертки искаженного изображения с функцией, обратной искажающей. Такой подход называется инверсной фильтрацией.

В частотной области свертка исходного изображения с искажающей функцией в (1.1) может определяться как произведение их спектров

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v), \quad (1.2)$$

где $G(u, v)$, $F(u, v)$ и $H(u, v)$, соответственно, спектры функций $g(x, y)$, $f(x, y)$ и $h(x, y)$, u и v – пространственные частоты. Если искажающая функция известна, то спектр восстановленного изображения $\hat{f}(x, y)$ может быть найден при помощи обратной свертки, которая в частотной области может быть записана как

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = \frac{F(u, v)H(u, v)}{H(u, v)}, \quad H(u, v) \neq 0. \quad (1.3)$$

Восстановленное изображение может быть получено с помощью обратного преобразования Фурье от (1.3):

$$\hat{f}(x, y) = \text{FT}^{-1} \left\{ \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right\}. \quad (1.4)$$

где $\text{FT}^{-1}\{.\}$ – оператор обратного преобразования Фурье.

В случае влияния аддитивного шума в силу линейности оператора преобразования Фурье спектр искаженного изображения (1.2) принимает следующий вид

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v), \quad (1.5)$$

где $N(u, v)$ – спектр аддитивного шума. В этом случае обратная свертка (1.3) будет иметь вид

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}. \quad (1.6)$$

Ошибка, вносимая шумом и определяемая вторым слагаемым, особенно велика в области малых значений $H(u, v)$. Второе слагаемое в большинстве случаев оказывает существенное влияние на результат восстановления даже при точно известной искажающей функции. Таким образом, применение данного метода целесообразно только в случае отсутствия или незначительного влияния аддитивного шума.

Фильтрация Винера

Фильтрация Винера (также известная как фильтрация методом минимизации среднего квадратического отклонения) позволяет в отличие от описанного выше метода инверсной фильтрации учитывать не только свойства искажающей функции, но и статистические характеристики аддитивного шума. Данный метод основан на представлении изображения и влияющего на него аддитивного шума как двух случайных процессов. В этом случае задача восстановления сводится к минимизации среднего квадратического отклонения между исходным $f(x, y)$ и восстановленным $\hat{f}(x, y)$ изображениями:

$$\sigma = \sqrt{\text{M}\{(f(x, y) - \hat{f}(x, y))^2\}}, \quad (1.7)$$

где $\text{M}\{.\}$ – оператор математического ожидания по ансамблю изображений.

Метод фильтрации Винера корректен в случае выполнения следующих условий:

- 1) отсутствие корреляции между исходным изображением и аддитивным шумом;
- 2) нулевое среднее значение аддитивного шума;
- 3) линейная зависимость результата восстановления от искаженного изображения.

В частотной области процесс фильтрации Винера выражается в форме

$$\begin{aligned}\hat{F}(u, v) &= \left[\frac{H^*(u, v)S_f(u, v)}{S_f(u, v)|H(u, v)|^2 + S_n(u, v)} \right] G(u, v) = \\ &= \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v),\end{aligned}\quad (1.8)$$

где $S_n(u, v)$ и $S_f(u, v)$ – спектральные плотности мощности шума и исходного изображения, соответственно, а звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения. Спектральные плотности $S_n(u, v)$ и $S_f(u, v)$ могут быть найдены при вычислении спектров шума $N(u, v)$ и исходного изображения $F(u, v)$ в соответствии с соотношениями

$$S_n(u, v) = \frac{1}{MN} \langle |N(u, v)|^2 \rangle, \quad (1.9)$$

$$S_f(u, v) = \frac{1}{MN} \langle |F(u, v)|^2 \rangle, \quad (1.10)$$

где $M \times N$ – размер изображений, угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

Если плотность мощности аддитивного шума равна нулю, то компонент (1.9) также принимает нулевое значение, и фильтрация Винера (1.8) сводится к инверсной фильтрации (1.3).

На практике часто невозможно оценить спектральные плотности (1.9) и (1.10), поскольку полезная составляющая и шум не наблюдаются раздельно. Вследствие этого используется аппроксимация фильтра Винера при помощи выражения

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + K} G(u, v), \quad (1.11)$$

где K – константа, выбираемая в зависимости от требований к результатам восстановления. Часто в качестве значения K используется отношение средней плотности мощности шума и исходного изображения.

Регуляризация Тихонова

Фильтр Винера является оптимальным линейным фильтром в статистическом смысле, т.е. в среднем результат восстановления при помощи данного фильтра будет наилучшим, однако это не означает, что результат будет таковым для каждого отдельного изображения. Метод регуляризации Тихонова (известный также как метод минимизации сглаживающего функционала со связью) позволяет в отличие от фильтрации Винера получать оптимальную оценку для каждого конкретного изображения. При

этом применение регуляризации Тихонова требует знания только статистических характеристик шума.

Уравнение (1.1), описывающее искажение исходного изображения, может быть записано в векторном виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad (1.12)$$

где \mathbf{g} – вектор размера MN , содержащий значения яркости всех пикселей искаженного изображения, выстроенные таким образом, что первые N элементов вектора содержат значения из первой строки изображения, вторые N элементов – из второй и так далее; \mathbf{f} – вектор размера MN , содержащий значения пикселей исходного изображения, расположенных в таком же порядке, как и в векторе \mathbf{g} , \mathbf{n} – вектор размера MN , представляющий аддитивный шум, \mathbf{H} – матрица размера $MN \times MN$, каждая строка которой состоит из дискретных значений искажающей функции $h(x, y)$.

Основным недостатком описанного выше метода инверсной свертки является его высокая чувствительность к аддитивному шуму. Этот недостаток преодолевается при помощи метода регуляризации Тихонова, который состоит в замене исходной задачи на задачу оптимизации (нахождения экстремума) некоторого функционала $C[f]$. В качестве такого функционала часто используют норму квадрата лапласиана

$$C[f] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\nabla^2 f(x, y))^2. \quad (1.13)$$

Лапласиан в (1.13) для двумерных изображений, как известно, определяется выражением

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (1.14)$$

В методе регуляризации Тихонова используется также дополнительное ограничение:

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\| = \|\mathbf{n}\|, \quad (1.15)$$

где $\hat{\mathbf{f}}$ – результат восстановления, $\|\mathbf{w}\|$ – евклидова норма вектора, определяемая как

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{w} = \sum_{i=0}^{m-1} w_i^2, \quad (1.16)$$

где m – количество элементов в векторе \mathbf{w} , i – номер компоненты вектора.

Решение задачи оптимизации (1.13) с условием (1.15) выражается в виде

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \lambda |P(u, v)|^2} \right] G(u, v), \quad (1.17)$$

где λ – параметр регуляризации, который должен быть выбран с учетом выполнения условия (1.15), $P(u, v)$ – спектр функции

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

представляющей собой дискретную аппроксимацию оператора Лапласа.

Отметим, что при обращении параметра регуляризации в ноль выражение (1.17) сводится к инверсной фильтрации (1.3).

На практике может быть осуществлен перебор значений параметра регуляризации λ до тех пор, пока не будет получен приемлемый результат, однако оптимальное решение может быть найдено только в том случае, если значение λ подобрано таким образом, чтобы выполнялось условие (1.15). Для этого можно определить вектор невязки как

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}. \quad (1.19)$$

Вектор восстановленного изображения $\hat{\mathbf{f}}$ является функцией от параметра регуляризации λ , следовательно, вектор невязки аналогично может быть определен как функция от этого параметра. При этом норма вектора невязки тоже является функцией от λ :

$$\phi(\lambda) = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|^2. \quad (1.20)$$

Можно показать, что функция (1.20) монотонна. Тогда задача регуляризации сводится к нахождению такого значения параметра λ , которое удовлетворяло бы условию

$$\|\mathbf{n}\|^2 - \alpha \leq \|\mathbf{r}\|^2 \leq \|\mathbf{n}\|^2 + \alpha, \quad (1.21)$$

где α – коэффициент, задающий требуемую точность выполнения условия (1.15). При $\alpha = 0$ выполняется равенство $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{n}\|^2$, что соответствует минимальной ошибке.

Подбор соответствующего параметра регуляризации ввиду монотонности функции (1.20) может быть легко осуществлен при помощи простого алгоритма, состоящего из следующих шагов:

- 1) задание начального значения параметра регуляризации λ ;
- 2) вычисление значения функции (1.20);
- 3) увеличение параметра регуляризации на некоторую величину, если $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\mathbf{n}\|^2 - \alpha$, и уменьшением его, если $\|\mathbf{r}\|^2 > \|\mathbf{n}\|^2 + \alpha$, до тех пор, пока условие (1.21) не выполнено.

Для подбора параметра регуляризации могут быть использованы и другие известные методы оптимизации, например, метод касательных Ньютона.

Вычисление $\|\mathbf{r}\|^2$ в представленном алгоритме может быть осуществлено в соответствии с выражением (1.16) как

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y), \quad (1.22)$$

где невязка $r(x, y)$ может быть получена как обратное преобразование Фурье от спектра $R(u, v)$, который с учетом линейности операции преобразования Фурье и уравнения (1.12) представляется как

$$R(u, v) = G(u, v) - H(u, v)\hat{F}(u, v). \quad (1.23)$$

Можно показать, что для вычисления нормы вектора аддитивного шума $\|\mathbf{n}\|^2$ необходимо знать только дисперсию σ^2 и среднее значение \bar{n} шума

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (n(x, y) - \bar{n})^2, \quad (1.24)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} n(x, y). \quad (1.25)$$

С учетом (1.16), (1.24) и (1.25) норма вектора аддитивного шума выражается как

$$\|\mathbf{n}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} n^2(x, y) = MN(\sigma^2 + \bar{n}^2). \quad (1.26)$$

Недостатком метода регуляризации Тихонова является большой размер матрицы \mathbf{H} (при $M = 256$ и $N = 256$, ее размер составляет 65536×65536), что приводит к высоким требованиям к объему используемой памяти. Кроме этого, матрица \mathbf{H} в ряде случаев оказывается плохо определенной, что является причиной некорректности решаемой задачи и неустойчивости решения к влиянию аддитивного шума \mathbf{n} .

В работе студентам предлагается реализовать вариант алгоритма без использования его представления в частотной области (1.17).

Алгоритм Люси-Ричардсона

Альтернативным подходом к восстановлению искаженных изображений является метод обратной свертки Люси-Ричардсона. Этот метод относится к классу нелинейных итерационных методов, которые в ряде случаев дают лучшие результаты, чем рассмотренные выше методы.

Алгоритм Люси-Ричардсона основан на максимизации правдоподобия, которое может быть достигнуто при выполнении условия сходимости последовательности итераций

$$\hat{f}_{k+1}(x, y) = \hat{f}_k(x, y) h(x, y) \frac{g(x, y)}{h(x, y) \hat{f}_k(x, y)}, \quad (1.27)$$

где $\hat{f}_k(x, y)$ – оценка оригинального изображения на шаге k , $h(x, y)$ – искажающая функция, $g(x, y)$ – искаженное изображение, k – номер итерации.

В качестве начального условия можно принять $\hat{f}_0(x, y) = g(x, y)$. Нелинейность метода обусловлена операцией деления с учетом значений $\hat{f}_k(x, y)$ в правой части (1.27).

В качестве критерия останова может использоваться малость изменения результата на последующей итерации.

Основным недостатком данного подхода является необходимость использования значительных вычислительных ресурсов для осуществления большого количества итераций (1.27).

Подходы к оценке вида искажающей функции

Описанные выше подходы к восстановлению искаженных изображений требуют априорного знания искажающей функции $h(x, y)$. На практике данная функция обычно точно не известна, что приводит к необходимости оценивать эту функцию. Существует несколько подходов к оцениванию функции $h(x, y)$:

- моделирование;
- прямое наблюдение;
- косвенное наблюдение.

Моделирование искажающей функции подразумевает ее расчет на основе информации о процессе формирования и регистрации изображения и параметрах регистрирующего устройства. Основной причиной, по которой данный подход редко применяется, является высокая сложность конструкции современных технических средств формирования и регистрации изображений, характеристики отдельных элементов которых не всегда известны с требуемой точностью.

Второй подход основывается на оценке искажающей функции путем прямого наблюдения. Для этого осуществляют регистрацию изображения одной точки на темном фоне. Полученное изображение точки и будет представлять искажающую функцию.

Чаще всего для оценки искажающей функции используется косвенное наблюдение, основанное на получении спектра искажающей функции из уравнения (1.3) путем деления спектра искаженного изображения на спектр исходного. Искажающая функция $h(x, y)$ тогда может быть найдена при помощи обратного преобразования Фурье в соответствии с соотношением

$$h(x, y) = \text{FT}^{-1} \frac{G(u, v)}{F(u, v)}, \quad F(u, v) \neq 0. \quad (1.28)$$

В последнее время широкое распространение получили так называемые методы слепой обратной свертки (англ. blind deconvolution). В этих методах осуществляется реконструкция функции h на основе анализа особенностей того или иного класса изображений. Например, для восстанов-

ления реальных изображений используется анализ распределения поля градиентов таких изображений, позволяющий сделать выводы о форме искажающей функции (например, о направлении движении камеры при съемке).

Применение методов слепой обратной свертки требует использования значительных вычислительных ресурсов (обработка изображения размером 1000×1000 пикселей может потреблять до гигабайта оперативной памяти).

1.2 Экспериментальная часть

1. Написать компьютерную программу, осуществляющую загрузку и заданное искажение исходного изображения.
2. Реализовать рассмотренные выше методы восстановления искаженных изображений.
3. Осуществить апробацию реализованных методов для восстановления искаженного изображения.
4. Качественно и количественно оценить результаты работы описанных методов. Оценка качества должна быть получена в виде значений дисперсии разности исходного и восстановленного изображений.
5. Оценить время работы реализованных алгоритмов.
6. Сделать выводы о применимости описанных методов для коррекции искажений на изображениях заданного вида. Оформить отчет по работе, в котором привести исходное изображение, искаженное при заданной искажающей функции изображение и результаты восстановления изображения при помощи реализованных методов с количественными оценками качества восстановления.

Вопросы для самопроверки

1. Опишите математическую модель процесса искажения изображений.
2. На чем основан метод инверсной фильтрации? При каких допущениях может быть использован данный метод?
3. Опишите процесс восстановления изображений при помощи фильтрации Винера. Какая модель изображения и шума лежит в основе данного подхода?
4. Сформулируйте сущность задачи оптимизации. Поясните особенности применения метода регуляризации Тихонова для восстановления изображений.
5. Каким образом осуществляется подбор параметра регуляризации при восстановлении изображений методом регуляризации Тихонова? Какие альтернативные подходы к подбору данного параметра могут быть использованы?

6. В чем заключается преимущество регуляризации Тихонова по сравнению с фильтрацией Винера? Какими недостатками обладает каждый из методов?
7. В чем заключается принципиальное отличие алгоритма Люси-Ричардсона от регуляризации Тихонова и фильтрации Винера?
8. Какие критерии останова могут быть использованы в алгоритме Люси-Ричардсона?
9. Расположите описанные выше алгоритмы в порядке возрастания их времени работы.
10. Опишите возможные подходы к оценке искажающей функции.

Литература

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Том 2. – М.: Мир, 1982. – 479 с.
3. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.

Работа 2. Алгоритмическая коррекция aberrаций в оптических системах

Цель работы: ознакомление с различными видами aberrаций в оптических системах, их математическими моделями и практическая реализация метода алгоритмической коррекции дисторсии.

Задания по работе

1. Изучить теоретическую часть работы.
2. Осуществить моделирование искажений изображений, вызванных aberrациями различных типов.
3. Реализовать компьютерную программу, осуществляющую коррекцию дисторсии исходного изображения.
4. Провести апробацию реализованной программы на различных изображениях.

2.1 Теоретическая часть

Виды и математическое описание aberrаций

Aberrации оптической системы обусловлены отклонением хода лучей в реальной оптической системе от их хода в идеальной оптической системе.

Хроматические aberrации обычно вызваны дисперсией преломляющих материалов, что выражается, в частности, в различии фокусных расстояний для компонентов излучения с различной длиной волны (рис. 1.1). Как правило, лучи при коротковолновом излучении (синий цвет) преломляются сильнее, чем при длинноволновом (красный цвет).

Коррекция хроматических aberrаций достигается применением систем линз из различных марок стекла, обладающих разной дисперсией.

Геометрические aberrации определяются параметрами преломляющих элементов оптической схемы и изучаются в теории геометрических aberrаций. Существует несколько основных видов геометрических aberrаций:

- сферические;
- коматические;
- астигматизм;
- дисторсия.

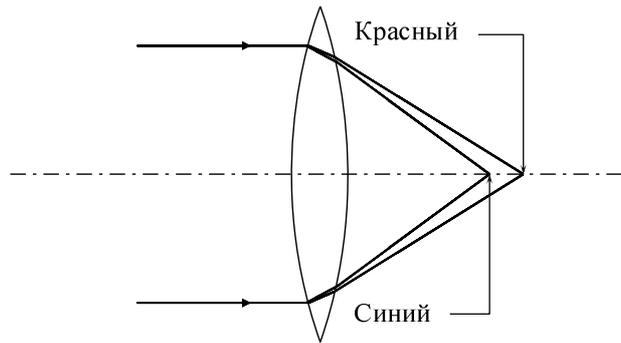


Рис. 2.1. Иллюстрация хроматических aberrаций

Сферические aberrации вызваны нарушением гомоцентричности пучков, исходящих от точечного источника, без нарушения их симметрии (рис. 2.2). В результате дальние от оптической оси лучи фокусируются на меньшем расстоянии от линзы, чем ближние. Для коррекции влияния этой aberrации обычно используют системы линз разного радиуса.

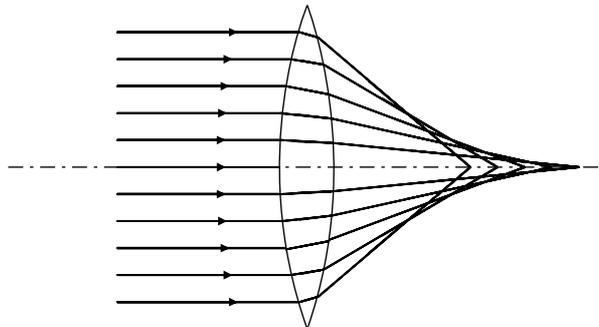


Рис. 2.2. Изменение фокусного расстояния линзы при сферических aberrациях

Коматические aberrации (кома) возникают в том случае, если излучение падает на линзу под небольшим углом к оптической оси (рис. 2.3), причем прошедшие лучи собираются не в одной точке, что обусловлено неравенством оптической длины пути различных зон линзы.

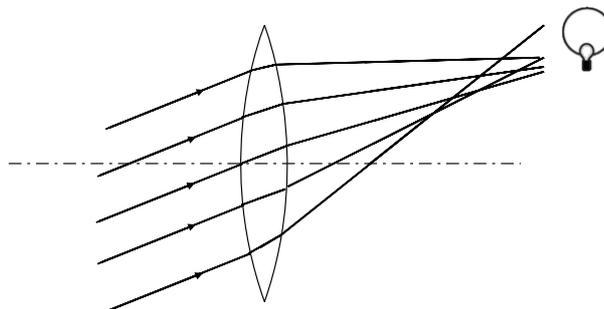


Рис. 2.3. Ход лучей в оптической системе при коматических aberrациях

Астигматические aberrации проявляются при различной фокусировке лучей, падающих на линзу в плоскостях, перпендикулярных оптической оси (рис. 2.4). Изображение точки принимает форму эллиптического пятна.

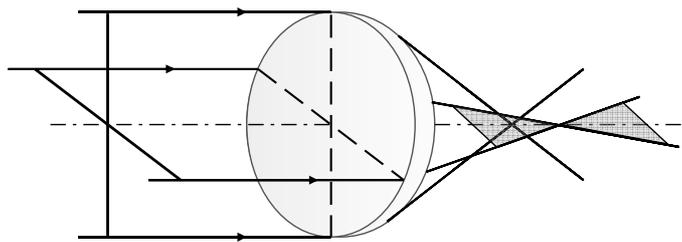


Рис. 2.4. Ход лучей в оптической системе при астигматических aberrациях

Дисторсия возникает в результате смещения относительно своего идеального положения точек, лучи от которых идут под небольшим наклоном к оптической оси системы (рис. 2.5). Эта aberrация наблюдается как сжатие изображения к центру (подушкообразная дисторсия) или расширение от центра (бочкообразная дисторсия). Дисторсия может возникать и в случае устранения всех упомянутых выше видов aberrаций.

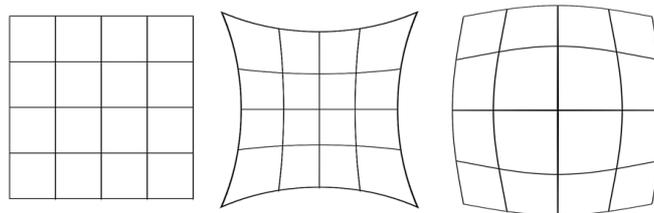


Рис. 2.5. Дисторсия на осесимметричном изображении. Неискаженное изображение, подушкообразная дисторсия, бочкообразная дисторсия

Помимо коррекции aberrаций путем внесения дополнительных элементов в оптическую схему используют также программные методы коррекции, которые позволяют при известных параметрах оптической системы устранять дефекты и искажения на цифровых изображениях. Большинство современных любительских фото- и видеокамер не имеют в своей конструкции высококачественных оптических элементов, что определяет их малую стоимость по сравнению с профессиональными моделями. Коррекция искажений, вызванных низким качеством используемых объективов, осуществляется в ряде случаев при помощи специального программного обеспечения.

Математическое описание aberrаций

Если в системе присутствуют несколько видов aberrаций, то описание отдельных aberrаций возможно при помощи разложения общей волновой aberrации в ряд по степенному базису, предложенному немецким физиком Ф.Л. фон Зейделем в XIX веке

$$\begin{aligned}
W(\rho_x, \rho_y) = & W_{00} + W_{40}(\rho_x^2 + \rho_y^2)^2 + W_{60}(\rho_x^2 + \rho_y^2)^3 + \dots \\
& + W_{31}(\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho_y + W_{51}(\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho_y^2 + \dots \\
& + W_{22}\rho_y^2 + W_{42}(\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho_y^2 + \dots,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где W_{nm} определяет вклад aberrации определенного типа и порядка, ρ_x и ρ_y представляют собой канонические (относительные) зрачковые координаты, которые определяются как

$$\rho_x = \frac{P_x}{A_x}, \quad \rho_y = \frac{P_y}{A_y}, \tag{2.2}$$

где P_x и P_y – реальные зрачковые координаты, определяющие положение луча в пучке, A_x и A_y – размеры апертуры, определяющие максимальные значения этих координат. Обычно выражение (2.1) представляют в полярных координатах:

$$\begin{aligned}
W(\rho, \varphi) = & W_{00} + W_{40}\rho^4 + W_{60}\rho^6 + \dots \\
& + W_{31}\rho^3 \cos \varphi + W_{51}\rho^5 \cos \varphi + \dots \\
& + W_{22}\rho^2 \cos^2 \varphi + W_{42}\rho^4 \cos^2 \varphi + \dots + W_{nm}\rho^n \cos^m \varphi.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В выражении (2.3) компонент W_{00} представляет постоянную (фооновую) составляющую изображения, $W_{40}\rho^4$ и $W_{60}\rho^6$ – сферические aberrации 3 и 5 порядка, $W_{31}\rho^3 \cos \varphi$ и $W_{51}\rho^5 \cos \varphi$ – кома 3 и 5 порядка, $W_{22}\rho^2 \cos^2 \varphi$ и $W_{42}\rho^4 \cos^2 \varphi$ – астигматизм 3 и 5 порядка.

Альтернативой разложению волновой aberrации в ряд по степенному базису Зейделя является ее разложение по полиномам Цернике, названным в честь лауреата Нобелевской премии по физике 1953 г. Ф. Цернике. Функция разложения aberrации по полиномам Цернике в полярных координатах имеет следующий вид:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_n \sum_m c_{nm} R_n^m(\rho) \cos(m\varphi), \tag{2.4}$$

где c_{nm} – коэффициенты, определяющие вклад соответствующей aberrации в общую волновую aberrацию, R_n^m – радиальные полиномы Цернике, зависящие только от ρ , которые определяются как

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k!((n+m)/2-k)!((n-m)/2-k)!} \rho^{n-2k}. \tag{2.5}$$

Основным преимуществом полиномов Цернике при анализе волновых aberrаций по сравнению с базисом Зейделя, является свойство их ортогональности на окружности с единичным радиусом. Использование полиномов Цернике обеспечивает следующие преимущества:

- уменьшение абсолютных значений коэффициентов разложения по полиномам Цернике с увеличением степени полиномов, что, как правило, обеспечивает сходимость полученного ряда;
- соответствие отдельных типов aberrаций отдельным слагаемым в ряде Цернике;
- устойчивость к погрешностям вычислений при численном моделировании волновых фронтов в оптических системах.

Алгоритм коррекции дисторсии

Пусть положение точки в плоскости, перпендикулярной оптической оси, задается вектором $\mathbf{r}(x, y)$, где x и y – пространственные координаты в этой плоскости.

В изображении, сформированном в идеальной оптической системе, положение каждой точки может быть описано вектором

$$\mathbf{R}(x, y) = b_0 \mathbf{r}(x, y), \quad (2.6)$$

где b_0 – коэффициент оптического увеличения.

Эффект дисторсии заключается в неправильном расположении точек на изображении относительно идеального. Компоненты вектора $\mathbf{R}(x, y)$ зависят от удаленности точки от оптической оси и коэффициентов дисторсии:

$$\mathbf{R}(x, y) = b_0 \mathbf{r}(x, y) + F_3 |\mathbf{r}|^2 \mathbf{r}(x, y) + F_5 |\mathbf{r}|^4 \mathbf{r}(x, y) + F_7 |\mathbf{r}|^6 \mathbf{r}(x, y) + \dots, \quad (2.7)$$

где F_3, F_5, F_7, \dots – коэффициенты дисторсии различных порядков, $|\mathbf{r}|$ – длина вектора $\mathbf{r}(x, y)$. От знака перед коэффициентом дисторсии зависит ее вид: подушкообразная или бочкообразная. В осесимметричных оптических системах присутствует дисторсия только нечетных порядков.

Дисторсия выше третьего порядка на практике наблюдается редко, поэтому в большинстве случаев можно пользоваться моделью

$$\mathbf{R}(x, y) = b_0 \mathbf{r}(x, y) + F_3 |\mathbf{r}|^2 \mathbf{r}(x, y). \quad (2.8)$$

Дисторсия на цифровых изображениях может быть скорректирована программными средствами. Наиболее простой способ коррекции дисторсии – это применение к искаженному изображению преобразования дисторсии с противоположным знаком.

При известных параметрах оптической системы, формирующей искаженные изображения, можно точно рассчитать параметры обратного преобразования, однако зачастую точная информация об искажениях отсутствует. В этом случае приходится осуществлять ручной или эвристический подбор корректирующего коэффициента дисторсии с использованием калибрующей сетки.

При проведении работы предлагается самостоятельно написать программу, реализующую преобразование дисторсии, провести подбор коэф-

фициентов, корректирующих искажения экспериментальных изображений, и оценить искажение, вызываемое дисторсией высших порядков.

2.2 Экспериментальная часть

1. Написать компьютерную программу, моделирующую разные виды aberrаций на цифровом изображении, используя степенной ряд (2.3) или ряд Цернике (2.4).
2. Написать программу, реализующую проявление дисторсии в соответствии с моделью (2.7).
3. Провести апробацию реализованного алгоритма на изображении калибровочной сетки. Убедиться в корректности результатов.
4. Оценить величину искажения изображения в зависимости от величины коэффициента дисторсии.
5. Осуществить коррекцию дисторсии на искаженных изображениях.
6. Сделать выводы и оформить отчет по результатам работы, содержащий примеры искаженных и обработанных изображений.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятию aberrации в оптической системе.
2. Перечислите основные виды aberrаций.
3. Каким образом осуществляется коррекция aberrаций в оптических системах?
4. В чем причина возникновения хроматических aberrаций?
5. В чем выражается подушкообразная и бочкообразная дисторсия?
6. Опишите известные методы математического описания aberrаций.
7. Какими преимуществами обладает использование разложения волновой aberrации в ряд по полиномам Цернике по сравнению с разложением в степенной ряд?
8. Как проявляется на изображениях влияние дисторсии высших порядков? В каких системах может присутствовать дисторсия четных порядков?

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. 2-е изд. – М: Наука, 1973. – 713 с.
2. Родионов С.А. Основы оптики. Конспект лекций. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. –167 с.
3. Форсайт Д., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. – М: Вильямс, 2004. – 928 с.
4. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.

Работа 3. Исследование свойств преобразования Гильберта

Цель работы: изучение свойств преобразования Гильберта применительно к аналитическим сигналам в оптике и его программная реализация.

Задания по работе

1. Изучить теоретическую часть работы.
2. Написать компьютерную программу, реализующую дискретное преобразование Гильберта при помощи одного из предложенных методов.
3. Исследовать свойства дискретного преобразования Гильберта.

3.1 Теоретическая часть

Понятие аналитического сигнала и преобразование Гильберта

При обработке оптической информации важную роль играет понятие аналитического сигнала – представления исходного действительного сигнала $c(x)$ в виде комплекснозначной функции

$$z(x) = c(x) + js(x), \quad (3.1)$$

где j – мнимая единица, а $s(x)$ – ортогональное дополнение исходного сигнала, которое может быть получено при помощи преобразования Гильберта $\text{HT}\{.\}$, а именно

$$s(x) = \text{HT}\{c(x)\}. \quad (3.2)$$

Амплитуда $A(x)$ и фаза $\theta(x)$ сигнала вычисляются как модуль и аргумент сигнала $z(x)$, соответственно.

Представление действительного сигнала $c(x)$ в форме аналитического сигнала $z(x)$ позволяет исключить из спектра компоненты, соответствующие отрицательным частотам, что вдвое уменьшает диапазон частот, используемый для передачи данных. Это возможно в силу свойств эрмитовой симметрии спектра действительного сигнала:

$$C(-f) = C^*(f), \quad (3.3)$$

где $C(f)$ – спектр сигнала $c(x)$, полученный при помощи прямого преобразования Фурье $\text{FT}\{.\}$, т.е.

$$C(f) = \text{FT}\{c(x)\}, \quad (3.4)$$

символ «*» обозначает комплексное сопряжение.

Преобразование Гильберта, названное в честь немецкого математика Д. Гильберта (1862–1943 гг.), можно аналитически определить как

$$\text{HT}\{c(x)\} = c(x) \otimes \left(\frac{1}{\pi x} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(u)}{x-u} du, \quad (3.5)$$

где символ « \otimes » обозначает операцию свертки, функция $(1/\pi x)$ является ядром преобразования Гильберта, u – переменная интегрирования.

По теореме о свертке преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению спектров этих функций. Применительно к (3.5) можно записать

$$\text{FT}\left\{c(x) \otimes \frac{1}{\pi x}\right\} = \text{FT}\{c(x)\} \text{FT}\left\{\frac{1}{\pi x}\right\} = C(f)H(f). \quad (3.6)$$

где

$$H(f) = \text{FT}\left\{\frac{1}{\pi x}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi x} \exp(-j2\pi fx) dx. \quad (3.7)$$

Использование формулы Эйлера позволяет представить выражение (3.7) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi x} \exp(-j2\pi fx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi x} \cos(2\pi fx) dx - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi x} \sin(2\pi fx) dx. \quad (3.8)$$

Так как ядро преобразования Гильберта представляет собой нечетную функцию, а интегрирование в (3.8) производится по всей оси в области независимой переменной, то можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi x} \cos(2\pi fx) dx = 0. \quad (3.9)$$

При этом

$$\text{FT}\left\{\frac{1}{\pi x}\right\} = \frac{-j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi fx)}{x} dx = \frac{-j}{\pi} \pi \text{sgn}(f) = -j \text{sgn}(f), \quad (3.10)$$

где $\text{sgn}(f)$ – функция знака (сигнум-функция), определяемая как

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } f > 0 \\ 0 & \text{при } f = 0. \\ -1 & \text{при } f < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

На рис. 3.1 представлены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики, соответствующие преобразованию Гильберта. Видно, что в результате преобразования Гильберта осуществляется сдвиг фазы исходного сигнала на $\pi/2$ на всех частотах f , а также исключается его постоянная составляющая, что обеспечивается нулевым коэффициентом передачи на нулевой частоте.

Ниже перечислены некоторые полезные свойства преобразования Гильберта.

1. Линейность

Результатом преобразования Гильберта суммы сигналов, взятых с некоторыми постоянными коэффициентами a и b , является сумма преобразований Гильберта этих сигналов с теми же коэффициентами.

$$\text{HT}\{ac_1(x) + bc_2(x)\} = as_1(x) + bs_2(x). \quad (3.12)$$

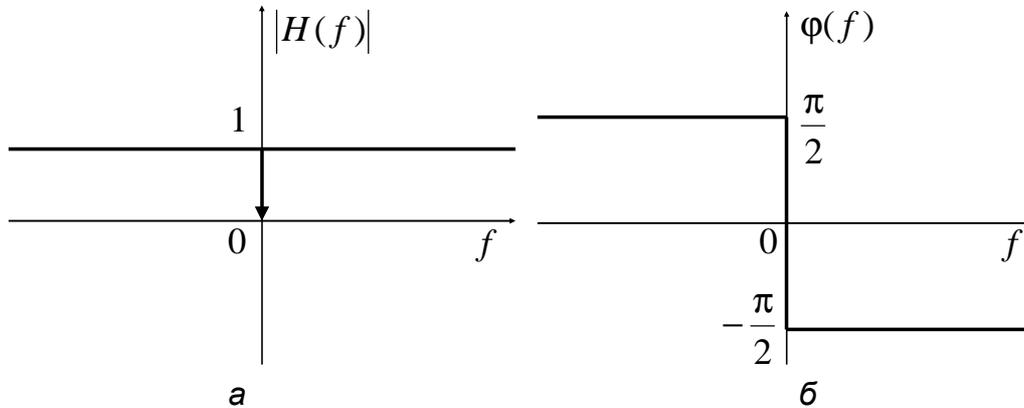


Рис. 3.1. Амплитудно-частотная (а) и фазо-частотная (б) характеристики соответствующие преобразованию Гильберта

2. Свойство сдвига

Сдвиг аргумента сигнала на некоторую величину влечет сдвиг результата преобразования Гильберта этого сигнала по независимой переменной на эту же величину.

$$\text{HT}\{c(x - a)\} = s(x - a). \quad (3.13)$$

3. Свойство подобия

При масштабировании исходного сигнала по независимой переменной результат преобразования Гильберта этого сигнала масштабируется таким же образом, а именно

$$\text{HT}\{c(ax)\} = s(ax). \quad (3.14)$$

4. Повторное преобразование Гильберта

В результате последовательного выполнения двух преобразований Гильберта фаза сигнала изменяется на π , что ведет к перемене знака исходного сигнала в соответствии со следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \text{HT}\{s(x)\} &= \text{FT}^{-1}\{H(f)C(f)\} = \\ &= \text{FT}^{-1}\{H(f)H(f)C(f)\} = \text{FT}^{-1}\{-C(f)\} = -c(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

5. Обратное преобразование Гильберта

Используя предыдущее свойство (3.15), можно получить выражение для обратного преобразования Гильберта.

$$c(x) = \text{HT}^{-1}\{s(x)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x - u} du = s(x) \otimes \left(-\frac{1}{\pi x}\right) = -\text{HT}(s(x)). \quad (3.16)$$

6. Преобразование Гильберта четных и нечетных функций

Если исходный сигнал $c(x)$ представляет собой четную или нечетную функцию, то результатом преобразования Гильберта такого сигнала будет нечетная и четная функция, соответственно.

7. Энергетическое свойство

Под энергетическим свойством понимают равенство интеграла квадрата исходной функции $c(x)$ и результата ее преобразования Гильберта $s(x)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) dx. \quad (3.17)$$

В силу теоремы Парсеваля интеграл квадрата некоторой функции равен интегралу квадрата модуля его спектра:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |C(f)|^2 df, \quad (3.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (3.19)$$

Следующее равенство выполняется по определению и в силу (3.18)–(3.19) влечет за собой и выполнение (3.17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (3.20)$$

8. Ортогональность

Исходный сигнал и результат его преобразования Гильберта ортогональны друг другу, а именно

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x)s(x) dx = 0. \quad (3.21)$$

По теореме Парсеваля имеет место следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x)s(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C^*(f)S(f) df, \quad (3.22)$$

где $C^*(f)S(f)$ представляет собой нечетную функцию.

$$C^*(f)S(f) = (-j \operatorname{sgn} f) |C(f)|^2. \quad (3.23)$$

Результатом произведения четной и нечетной функции, как известно, является нечетная функция, следовательно (3.21) выполняется, так как интегрирование в (3.22) осуществляется по всей числовой оси.

9. Свойство модуляции

При модуляции информационный сигнал, как правило, имеет ограниченный спектр с максимальной частотой Ω , много меньшей, чем значения

несущей частоты f_0 . При этом в силу свойства б выполняются следующие равенства для амплитудно-модулированных сигналов

$$\text{НТ}\{A(x) \cos(2\pi f_0 x)\} = A(x) \sin(2\pi f_0 x), \quad (3.24)$$

$$\text{НТ}\{A(x) \sin(2\pi f_0 x)\} = -A(x) \cos(2\pi f_0 x). \quad (3.25)$$

где $A(x)$ – функция с ограниченным спектром.

10. Преобразование Гильберта свертки двух сигналов

Результат преобразования Гильберта от свертки двух сигналов представляет собой свертку одного из сигналов с ортогональным дополнением другого, что выражается соотношением

$$\text{НТ}\{c_1(x) \otimes c_2(t)\} = s_1(x) \otimes c_2(x) = c_1(x) \otimes s_2(x). \quad (3.26)$$

С учетом теоремы о свертке преобразования в (3.26) можно выразить как

$$s_1(x) \otimes c_2(x) = \text{FT}^{-1}\{[-j \operatorname{sgn} f]C_1(f)C_2(f)\} = \text{FT}^{-1}\{S_1(f)C_2(f)\}, \quad (3.27)$$

$$c_1(x) \otimes s_2(x) = \text{FT}^{-1}\{C_1(f)[(-j \operatorname{sgn} f)C_2(f)]\} = \text{FT}^{-1}\{C_1(f)S_2(f)\}, \quad (3.28)$$

что подтверждает справедливость (3.26).

Вычисление преобразования Гильберта

На практике вычисление преобразования Гильберта чаще всего осуществляется при помощи получения спектра аналитического сигнала, который содержит ненулевые значения только на положительных частотах.

Спектр аналитического сигнала согласно (3.1) имеет вид

$$Z(f) = \text{FT}^{-1}\{z(x)\} = C(f) + jS(f) = C(f) + jH(f)C(f). \quad (3.29)$$

С учетом выражения (3.10) можно переписать (3.29) как

$$Z(f) = (1 + \operatorname{sgn}(f))C(f) = B(f)C(f), \quad (3.30)$$

где множитель $B(f)$ представляет собой частотную характеристику идеального фильтра, осуществляющего приведение некоторого сигнала к его аналитическому представлению (рис. 3.2):

$$B(f) = \begin{cases} 2, & \text{при } f > 0, \\ 0, & \text{при } f \leq 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

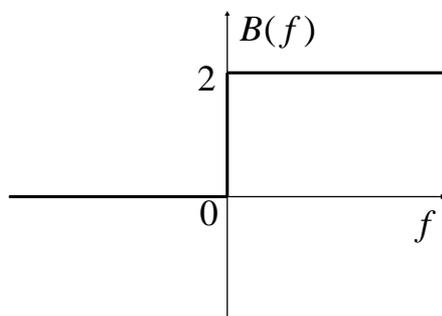


Рис. 3.2. Частотная характеристика фильтра, приводящего сигнал к его аналитическому представлению

Действительная и мнимая части аналитического сигнала с учетом (3.31)–(3.33) выражаются как удвоенные значения действительной и мнимой части обратного преобразования Фурье на положительных частотах в соответствии с формулами

$$c(x) = \operatorname{Re}\left[2 \int_0^{\infty} C(f) \exp(j2\pi fx) df\right], \quad (3.32)$$

$$s(x) = \operatorname{Im}\left[2 \int_0^{\infty} C(f) \exp(j2\pi fx) df\right]. \quad (3.33)$$

Для дискретного сигнала, содержащего N отсчетов, аналитический сигнал может быть получен с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ). В этом случае выражения (3.32)–(3.33) принимают вид:

$$c_m = \operatorname{Re}\left[2\Delta f \sum_{k=1}^{N/2} C_k \exp\left(j\frac{2\pi mk}{N}\right)\right] + C_0\Delta f, \quad (3.34)$$

$$s_m = \operatorname{Im}\left[2\Delta f \sum_{k=1}^{N/2} C_k \exp\left(j\frac{2\pi mk}{N}\right)\right], \quad (3.35)$$

где c_m и C_k – дискретные отсчеты сигнала и спектра, соответственно:

$$c_m = c(m\Delta x), \quad (3.36)$$

$$C_k = C(k\Delta f), \quad (3.37)$$

Δx – шаг дискретизации по независимой переменной, $\Delta f = 1/N\Delta x$ – шаг дискретизации по частоте.

Вычисление преобразования Гильберта при помощи алгоритмов быстрого преобразования Фурье

Вычисления по формулами (3.34)–(3.35) могут быть оптимизированы по скорости при помощи алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Наиболее распространенным алгоритмом БПФ является алгоритм Кулли-Тьюки. Он основывается на замене ДПФ одной большой последовательности дискретных отсчетов c_m на несколько ДПФ подпоследовательностей, размер которых меньше, чем размер исходной. Такой способ разбиения большой задачи на несколько подзадач меньшей размерности позволяет значительно сократить время вычисления полного ДПФ, что обусловило широкое распространение алгоритма БПФ для решения многочисленных задач обработки дискретных сигналов.

При использовании ДПФ последовательность C_k получают согласно выражению

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} c_m W_N^{mk}, \quad (3.38)$$

где

$$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right). \quad (3.39)$$

В алгоритме Кули-Тьюки осуществляют разбиение исходной последовательности c_m длиной N на подпоследовательности c_{2m} и c_{2m+1} длиной $N/2$, одна из которых содержит в себе четные, а другая нечетные отсчеты исходной последовательности. Схема разбиения представлена на рис. 3.3.

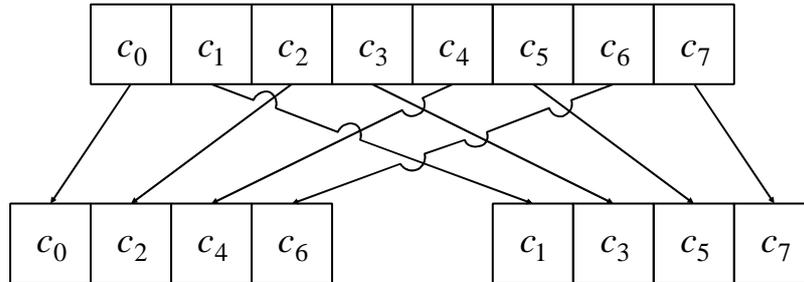


Рис. 3.3. Схема разбиения исходной последовательности отсчетов на четную и нечетную подпоследовательности

С учетом разбиения результат ДПФ первой половины последовательности C_k , $k = 0..N/2-1$ можно представить в форме

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{m=0}^{N/2-1} c_m W_N^{mk} = \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2m} W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2m+1} W_N^{(2m+1)k} = \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2m} W_N^{2mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2m+1} W_N^{2mk}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Поскольку

$$W_N^{2mk} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot 2mk\right) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N/2} mk\right) = W_{N/2}^{mk} \quad (3.41)$$

результат ДПФ первой половины исходной последовательности может быть записан в виде суммы двух результатов ДПФ последовательностей размера $N/2$

$$C_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{1,m} W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2,m} W_{N/2}^{mk} = C_{1,k} + W_N^k C_{2,k}, \quad (3.42)$$

где $c_{1,m}$ – подпоследовательность, содержащая четные отсчеты исходного сигнала, $c_{2,m}$ – подпоследовательность, содержащая нечетные отсчеты исходного сигнала, $C_{1,k}$ и $C_{2,k}$ – соответственно спектры этих подпоследовательностей.

Если размер исходной последовательности равен 2^L , то такое разбиение можно производить $L - 1$ раз.

Вторая половина спектра $C_{k+N/2}$, $k = 0..N/2-1$ с учетом (3.44) может быть представлена в форме

$$\begin{aligned}
C_{k+N/2} &= \sum_{m=0}^{N-1} c_m W_N^{m(k+N/2)} = \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2m} W_{N/2}^{m(k+N/2)} + W_N^{(k+N/2)} \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2m+1} W_{N/2}^{m(k+N/2)}. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Коэффициенты $W_{N/2}^{m(k+N/2)}$ и $W_N^{(k+N/2)}$ в уравнении (3.43) могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}
W_{N/2}^{m(k+N/2)} &= W_{N/2}^{mk} W_{N/2}^{mN/2} = W_{N/2}^{mk} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N/2} mN/2\right) = \\
&= W_{N/2}^{mk} \exp(-j2\pi m) = W_{N/2}^{mk}, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_N^{(k+N/2)} &= W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} mN/2\right) = \\
&= W_N^k \exp(-j\pi m) = -W_N^k. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

С учетом (3.44) и (3.45) выражение для значений второй половины спектра примет вид

$$C_{k+N/2} = \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{1,m} W_{N/2}^{mk} - W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} c_{2,m} W_{N/2}^{mk} = C_{1,k} - W_N^k X_{2,k}. \quad (3.46)$$

Окончательно результат ДПФ исходной последовательности представляется как

$$C_k = C_{1,k} + C_{2,k} W_N^k, \quad (3.47)$$

$$C_{k+N/2} = C_{1,k} - C_{2,k} W_N^k, \quad (3.48)$$

где $k = 0..N/2-1$. Уравнения (3.47) и (3.48) описывают процедуру объединения, которая иллюстрируется схемой, представленной на рис. 3.4.

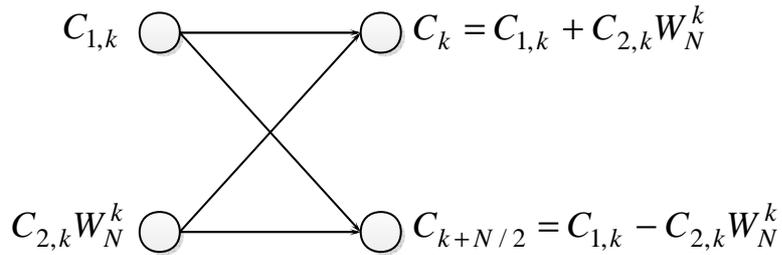


Рис. 3.4. Схема процедуры объединения в БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени

На рис. 3.5 показана схема БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени для сигнала, состоящего из восьми дискретных отсчетов.

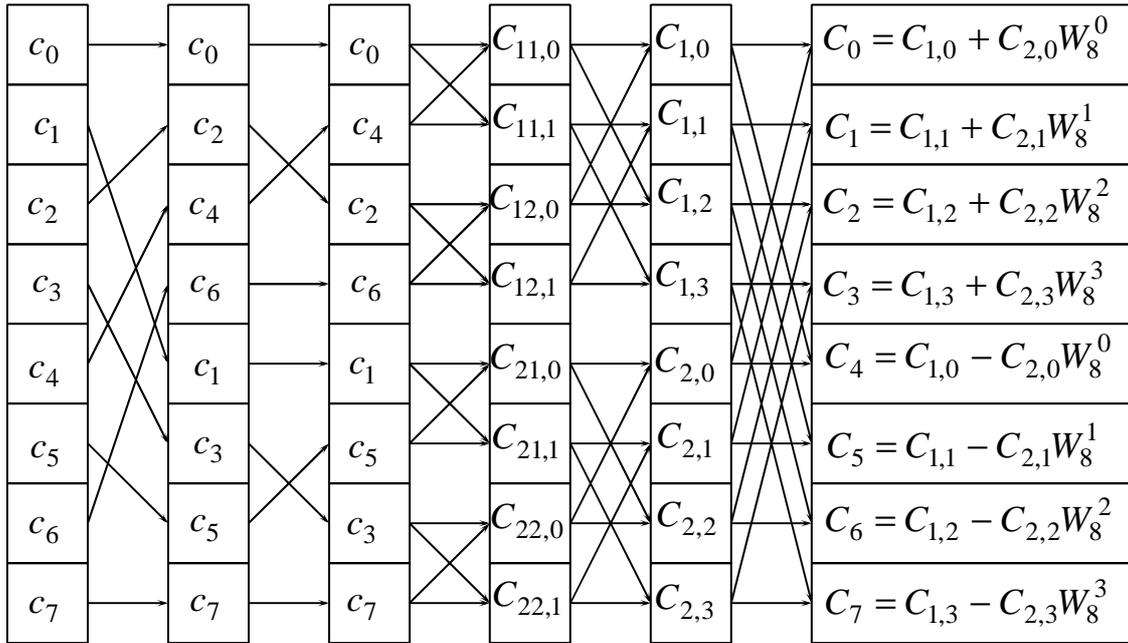


Рис. 3.5. Схема вычисления БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени

На первых двух этапах обработки последовательности, представленной на рис. 3.5, осуществляется двоично-инверсная перестановка отсчетов исходного сигнала. Разбиение осуществляется до тех пор, пока размер всех полученных подпоследовательностей не станет равным 2. Далее с использованием схемы объединения, показанной на рис. 3.4, с учетом (3.47) и (3.48) осуществляется объединение подпоследовательностей, полученных на предыдущем этапе. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут получены значения спектра $C_0..C_7$, как это показано на рис. 3.5.

В описанном алгоритме ДПФ исходного сигнала, содержащего N отсчетов, сводится к двум ДПФ подпоследовательностей, содержащих по $N/2$ отсчетов. Таким образом, для выполнения алгоритма на каждом этапе объединения требуется N комплексных сложений и $N/2$ комплексных умножений. Количество объединений равняется $L = \log_2 N$. С учетом этого можно заключить, что для выполнения БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени требуется $N \log_2 N$ комплексных сложений и $(N/2) \log_2 N$ комплексных умножений. Для выполнения классического ДПФ с использованием (3.38) требуется N^2 комплексных сложений и умножений.

Применение описанного алгоритма значительно сокращает время, необходимое для вычисления ДПФ. Например, расчет ДПФ сигнала, содержащего 1024 отсчета, при помощи классического алгоритма (3.38) потребуются 1048576 комплексных умножений, в то время как использование БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени позволяет сократить количество требуемых комплексных умножений до 5120, что дает выигрыш в скорости примерно в 200 раз.

3.2 Экспериментальная часть

1. Написать программу, реализующую дискретное преобразование Гильберта вещественного гармонического сигнала.
2. Провести апробацию реализованного алгоритма на нескольких сигналах с изменяющейся огибающей и фазой.
3. Восстановить огибающую и фазу исходного сигнала, используя его представление в форме аналитического сигнала.
4. Провести апробацию реализованного алгоритма на сигналах с добавлением аддитивного шума, имеющего нормальное распределение с нулевым средним.
5. Оценить влияние шума на результаты восстановления огибающей и фазы модельного сигнала.
6. Оценить время работы алгоритма в зависимости от количества отсчетов в обрабатываемом сигнале.
7. Сделать выводы и оформить отчет, в котором отобразить полученные результаты преобразования Гильберта модельных сигналов и результаты восстановления огибающей и фазы этих сигналов.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение преобразованию Гильберта.
2. Что означает понятие аналитической функции и аналитического сигнала?
3. Что такое ортогональное дополнение сигнала?
4. Аналитически покажите справедливость свойства линейности преобразования Гильберта.
5. Почему последовательное применение двух преобразований Гильберта приводит к перемене знака исходного сигнала?
6. Как связаны между собой спектры исходного сигнала и его ортогонального дополнения?
7. Каким образом можно повысить скорость вычисления преобразования Гильберта?
8. Каким образом алгоритм Кули-Тьюки позволяет увеличить быстродействие ДПФ?
9. Объясните структуру алгоритма Кули-Тьюки.

Литература

1. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.

2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы, 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1988. – 446 с.
3. Sundararajan D. The Discrete Fourier Transform. Theory, Algorithms and Applications. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001. – 390 p.

Работа 4. Фрактальное сжатие изображений

Цель работы: ознакомление с методикой фрактального сжатия изображений и реализация простейшего алгоритма фрактального сжатия.

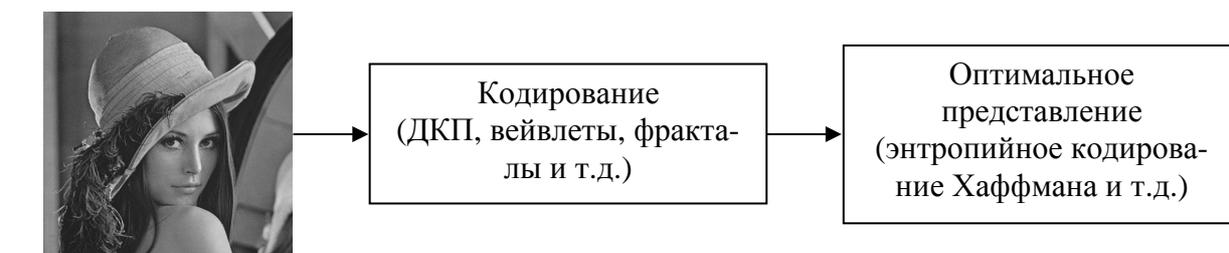
Задания по работе

1. Изучить теоретическую часть работы.
2. Написать компьютерную программу, реализующую алгоритм фрактального кодирования и декодирования изображений.
3. Провести апробацию программы на нескольких изображениях и оценить коэффициент сжатия и качество декодирования.
4. Сравнить полученные результаты сжатия с результатами применения классических методов.

4.1 Теоретическая часть

Методы сжатия изображений

Развитие интернета и беспроводных коммуникаций, а также повсеместное распространение портативных устройств, функциональность которых включает возможности регистрации, хранения и передачи информации, определяют актуальность развития методов сжатия информации. На рис. 4.1 представлена общая схема процесса сжатия изображений.



Исходное изображение

Рис. 4.1. Схема процесса сжатия изображений

Алгоритмы сжатия изображений подразделяют на две группы – сжатие без потерь и с потерями. Алгоритмы сжатия без потерь осуществляют кодирование данных на основе поиска соответствий между соседними пикселями и оптимизации длины кодов для различных значений яркости на основе вероятности их появления в изображении. Алгоритм кодирования длин серий, позволяющий экономно кодировать последовательности пикселей с одинаковыми значениями яркости, и алгоритмы энтропийного кодирования, такие как алгоритм Хаффмана, могут служить примерами та-

ких алгоритмов. Наиболее распространенным стандартом сжатия изображений без потерь является формат PNG, в котором для сжатия используется комбинация алгоритмов кодирования длин серий и энтропийного кодирования. Алгоритмы сжатия без потерь могут дополнительно применяться к результатам сжатия с потерями для увеличения степени сжатия.

Алгоритмы сжатия растровых изображений с потерями используют особенности человеческого восприятия. Алгоритмы этой группы основываются на удалении части данных об изображении, которые не оказывают значительного влияния на результаты восприятия изображения человеком.

Простейшим примером сжатия с потерями может служить метод на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ), заключающийся в сохранении информации только о низкочастотных составляющих изображения. С увеличением количества отбрасываемых высокочастотных компонентов качество восстановленного изображения снижается, однако при небольших коэффициентах сжатия это остается практически незаметным для пользователя. Алгоритмы на основе ДПФ не используются непосредственно на практике из-за необходимости хранить информацию о комплексном спектре.

В стандарте сжатия JPEG вместо ДПФ используется дискретное косинусное преобразование (ДКП). Альтернативным методом сжатия с потерями является стандарт JPEG2000, использующий дискретное вейвлет-преобразование. Для сжатия видеопотока часто используют стандарт MPEG, который учитывает малое изменение изображения от кадра к кадру.

Перспективным методом сжатия растровых изображений с потерями можно считать метод фрактального сжатия, основанный на поиске самоподобных структур на изображении, преимуществом которого являются значительно более высокая степень компрессии данных по сравнению с амплитудными методами. Основной проблемой методов фрактального сжатия является сравнительно большое время кодирования изображений, на снижение которого направлены исследования в данной области.

Основы фрактального представления изображений

В 1975 году Б. Мандельброт ввел термин «фрактал» (лат. *fractus* – сломанный, разбитый) для описания множеств, обладающих свойством самоподобия (однородности в различных шкалах измерения, то есть независимости формы от масштаба). Многие фракталы могут быть получены в результате некоторого бесконечно повторяющегося итерационного процесса.

Примером фрактального изображения может служить одуванчик (рис. 4.2), представляющий собой многократное отображение исходного изображения в различных масштабах.

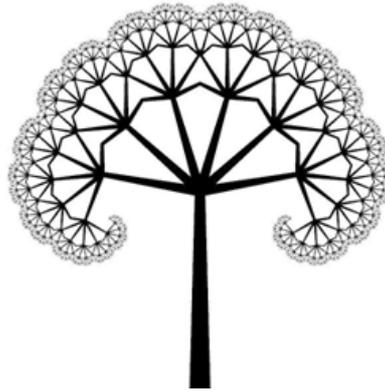


Рис. 4.2. Пример фрактального изображения

Изображение на рис. 4.2 может быть построено в соответствии с набором правил, описывающих повторение фигуры ствола одуванчика. В данном случае в качестве такого набора можно принять преобразования поворота и масштабирования. Коэффициенты, определяющие эти преобразования, содержатся всего в нескольких числах с плавающей точкой, что занимает значительно меньше памяти, чем растровое представление изображения.

Идея фрактального сжатия изображений заключается в решении обратной задачи – нахождении такого набора преобразований, многократное применение которого позволяло бы построить исходное изображение. Данный подход хорошо работает при сжатии изображений, обладающих свойством самоподобия (например, изображения на рис. 4.2), однако произвольные изображения, вообще говоря, не обладают этим свойством. Современные методы фрактального сжатия используют свойство подобия между фрагментами исходного изображения.

Пространство Хаусдорфа. Системы итерируемых функций

Прежде чем рассматривать процесс кодирования растровых изображений в градациях серого рассмотрим более простой случай – фрактальное представление бинарных изображений.

Известно, что расстояние между двумя точками $x(x_1, x_2)$ и $y(y_1, y_2)$ в пространстве \mathbf{R}^2 может быть задано соотношением

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad (4.1)$$

причем данная мера полностью удовлетворяет свойствам метрики в метрическом пространстве:

- равенству расстояний от x до y и от y до x , то есть $d(x, y) = d(y, x)$;
- равенству нулю расстояния от точки до самой себя, $d(x, x) = 0$;
- условию отсутствия более короткого пути между x и y через промежуточную точку, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

- конечности и положительности расстояния между двумя разными точками $0 < d(x, z) < \infty$.

Пусть бинарное изображение – это множество точек в замкнутом и ограниченном подмножестве пространства (\mathbf{R}^2, d) , где d задает евклидову метрику (4.1). Определим такое метрическое пространство, в котором точками пространства являются не отдельные точки, а бинарные изображения. Пусть $H(\mathbf{X})$ – пространство, состоящее из компактных подмножеств полного метрического пространства (\mathbf{X}, d) . Тогда каждая точка пространства $H(\mathbf{X})$ является компактным подмножеством \mathbf{X} . По теореме Больцано-Вейерштрасса любое замкнутое и ограниченное подмножество евклидова пространства является компактным, то есть таким множеством, в котором каждая бесконечная последовательность $\{x_i, i \in \mathbf{R}\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в точке x_0 этого множества.

Расстояние между точкой $x \in \mathbf{X}$ и компактным множеством $B \in H(\mathbf{X})$ может быть задано как кратчайшее расстояние между x и произвольной точкой из B :

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}. \quad (4.2)$$

Тогда расстояние между множествами A и B ($A, B \in H(\mathbf{X})$) можно определить как максимальное расстояние между некоторой точкой из A до ближайшей к ней точки из B ,

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}, \quad (4.3)$$

где точка $x \in A$ выбирается в соответствии с условием максимизации этого расстояния. Существование и конечность этих расстояний определяется компактностью A и B .

Видно, что в общем случае такое определение расстояния между компактными подмножествами евклидова пространства не является метрикой, так как $d(A, B) \neq d(B, A)$. Метрика в таком пространстве может быть введена путем добавления следующего условия

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}. \quad (4.4)$$

Видно, что (4.4) является метрикой на $H(\mathbf{X})$, так как выполняется условие $h(A, B) = h(B, A)$. Такая метрика называется метрикой Хаусдорфа, а метрическое пространство $(H(\mathbf{X}), h)$ – метрическим пространством Хаусдорфа (см. рис. 4.3). Метрическое пространство Хаусдорфа является полным.

Сжимающим отображением в метрическом пространстве называют такое преобразование $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$, в результате применения которого расстояние между точками этого пространства изменяется в α раз (при этом $0 < \alpha < 1$):

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y). \quad (4.5)$$

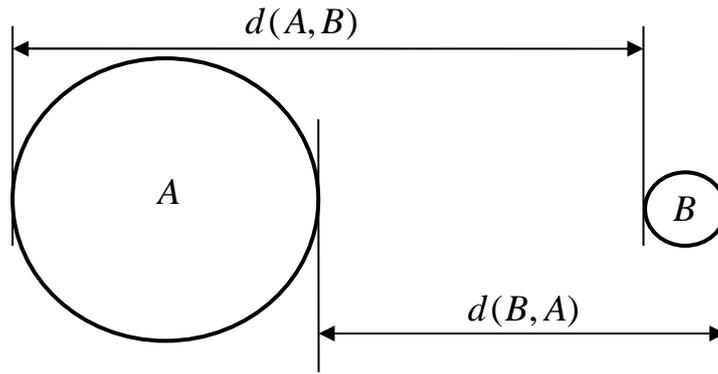


Рис. 4.3. Иллюстрация к определению расстояний между множествами в пространстве Хаусдорфа

По теореме о сжимающих отображениях любое сжимающее отображение f в полном метрическом пространстве имеет одну и только одну неподвижную точку (аттрактор) x_f и при бесконечном применении такого отображения все точки данного метрического пространства $x \in \mathbf{X}$ сходятся к этой точке:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f. \quad (4.6)$$

Сжимающими отображениями в пространстве Хаусдорфа является особый вид функций, которые могут быть определены как конечные наборы сжимающих отображений $W = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ в пространстве (\mathbf{X}, d) , воздействующих на компактные подмножества этого пространства (т.е. на точки в пространстве Хаусдорфа)

$$W(B) = w_0(B) \cup w_1(B) \cup \dots \cup w_{n-1}(B) = \bigcup_{i=0}^{n-1} w_i(B). \quad (4.7)$$

Набор преобразований W осуществляет отображение пространства $H(\mathbf{X})$ в себя, следовательно, является сжимающим отображением на $(H(\mathbf{X}), h)$. Система итерируемых функций (СИФ) состоит из полного метрического пространства $(H(\mathbf{X}), h)$ и набора сжимающих отображений W . Аттрактором СИФ является изображение (точка в пространстве Хаусдорфа).

М. Барнсли был предложен аналог теоремы о сжимающих отображениях для точек в пространстве Хаусдорфа, названный им теоремой коллажа. Эта теорема утверждает, что если задать набор сжимающих отображений W такой, что эти отображения покрывают некоторое изображение без значительного перекрытия друг с другом, то аттрактор этой СИФ близок к исходному изображению в пространстве Хаусдорфа. Фактически теорема коллажа позволяет представить некоторое изображение в виде фрактала и дает рецепт по созданию СИФ, сходящейся к такому изображению.

Обычно в качестве сжимающих отображений для построения СИФ используется группа преобразований, включающая в себя перемещения в плоскости изображения, масштабирование с коэффициентом меньше единицы, поворот и зеркальное отражение. Представление изображений в виде набора коэффициентов некоторого ограниченного количества преобразований, позволяющих построить изображение, значительно более экономно, чем растровое представление.

Сжатие изображений в градациях серого. Системы итерируемых кусочно-определенных функций

Для рассмотрения изображений в градациях серого необходимо определить полное метрическое пространство изображений \mathbf{F} . Представляя такие изображения как вещественные функции $f(x, y)$, определенные в единичном квадрате, можно определить метрику в пространстве изображений в градациях серого как

$$d(f, g) = \sqrt{\int \int |f(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy}, \quad (4.8)$$

где I^2 – площадь единичного квадрата, на котором определены функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Так как пространство \mathbf{F} является полным метрическим пространством, в нем выполняется теорема о сжимающих отображениях.

При переходе в дискретную форму представления изображений, метрика (4.8) принимает вид

$$d(f, g) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} |f(x_i, y_j) - g(x_i, y_j)|^2}, \quad (4.9)$$

где n и m – размеры изображений в пикселях по горизонтали и вертикали, а i и j – индексы. Выражение (4.9) носит название среднеквадратической метрики.

Системы итерируемых функций позволяют эффективно кодировать фрактальные изображения, но большинство реальных изображений не обладают свойством самоподобия. В 1992 году А. Жакин предложил методику кодирования таких изображений. Она основана на свойстве самоподобия между отдельными частями изображения, а не между частью и целым.

Изображение в градациях серого, близкое к исходному по метрике (4.9), является аттрактором особой СИФ – системы итерируемых кусочно-определенных функций (СИКОФ). СИКОФ состоит из полного метрического пространства изображений в градациях серого и набора преобразований $\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ переводящих области $\{D_0, D_1, \dots, D_{n-1}\}$, называемые доменными блоками, в области $\{R_0, R_1, \dots, R_{n-1}\}$, называемые ранговыми блоками (рис. 4.4).

При использовании декартовых координат пространственная составляющая некоторого преобразования (составляющая, отвечающая за преоб-

разование координат некоторой точки в плоскости изображения) может быть выражена в форме

$$\tilde{w}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_i \mathbf{r} + \mathbf{t}_i, \quad (4.10)$$

где i – номер преобразования координат, $\mathbf{r} = (x, y)^T$ – вектор, содержащий координаты некоторой точки на изображении, \mathbf{A}_i – матрица поворота, \mathbf{t}_i – вектор смещения. Помимо пространственных преобразований при фрактальном сжатии преобразования дополняются масштабированием и сдвигом по яркости:

$$w_i(f(\mathbf{r})) = s_i f(\tilde{w}_i^{-1}(\mathbf{r})) + o_i, \quad (4.11)$$

где s_i – коэффициент масштабирования по яркости, управляющий контрастом, \tilde{w}_i^{-1} – обратное преобразование координат, o_i – сдвиг по яркости.

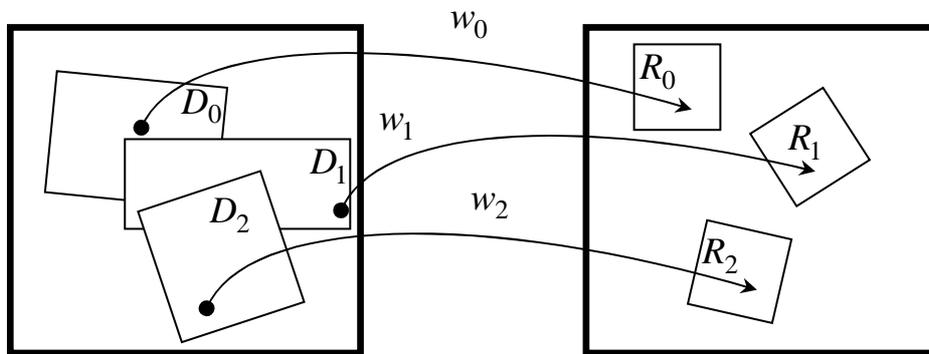


Рис. 4.4. Иллюстрация преобразования доменных блоков в ранговые

Для изображений в градациях серого существуют аналоги теоремы о сжимающих отображениях и теоремы коллажа. Из этих теорем следует, что:

- существует такой набор сжимающих отображений, полностью покрывающий изображение (рис. 4.5), неподвижной точкой которого является изображение, близкое к исходному;
- можно построить такую СИКОФ, которая сходится к аттрактору за малое число итераций (в идеальном случае за одну). Для этого при поиске сжимающих отображений необходимо искать такие отображения доменных блоков в ранговые, которые наилучшим образом покрывают ранговый блок по метрике (4.9).

Алгоритм фрактального сжатия включает следующие этапы:

- 1) разбиение изображения на неперекрывающиеся ранговые блоки (форма и размер блоков могут варьироваться);
- 2) покрытие изображения последовательностью перекрывающихся доменных блоков (количество этих блоков в зависимости от размера изображения и ограничений на их форму может достигать сотен ты-

сяч, что является причиной большого времени работы алгоритмов фрактального кодирования);

- 3) подбор для каждого рангового блока соответствующего доменного блока и сжимающего отображения, которое обеспечивало бы наилучшее покрытие данного блока по метрике (4.9) (обычно подбирается преобразование вида (4.10)–(4.11));
- 4) в случае недостаточного соответствия осуществляется дополнительное разбиение ранговых блоков на более мелкие.

Процесс повторяется до тех пор, пока не будут достигнуты требуемое соответствие или минимальный размер ранговых блоков. Одной из распространенных схем адаптивного разбиения на ранговые блоки является метод квадродерева, рассмотренный ниже.

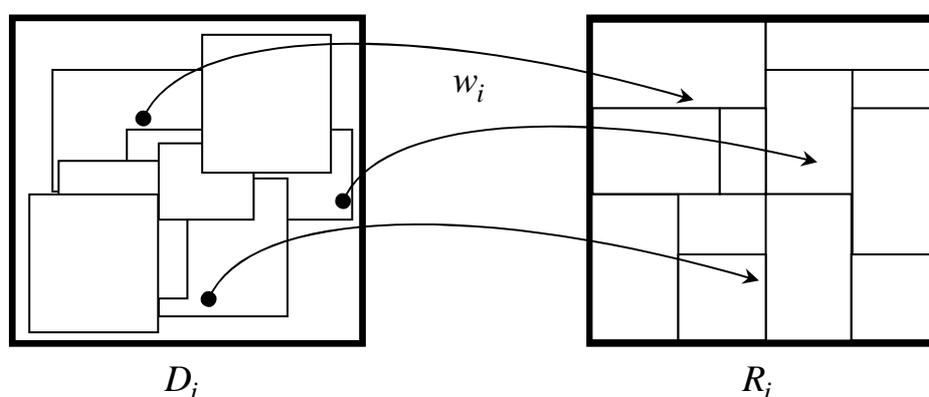


Рис. 4.5. Пример плотного покрытия изображения ранговыми блоками, которые являются результатом сжимающих отображений доменных блоков

Декодирование изображения осуществляется применением набора сжимающих отображений к некоторому начальному изображению до тех пор, пока изображение не перестанет изменяться. Обычно для этого достаточно 15-20 итераций.

Разбиение на ранговые блоки. Метод квадродерева

В случае, когда не достигнуто достаточное соответствие между доменными и ранговыми блоками в процессе фрактального кодирования требуется произвести дополнительное разбиение ранговых блоков, покрывающих изображение. Одним из распространенных методов такого разбиения является метод квадродерева (рис. 4.6).

В этом методе сначала осуществляется грубое разбиение изображения, например, на четыре одинаковые неперекрывающиеся области, представляющие собой первичные ранговые блоки. Если допустимая погрешность сопоставления наилучшего доменного блока ранговому превышена – данный блок разбивается еще на четыре равных блока, и поиск оптимальных сопоставлений осуществляется для блоков меньшего размера. Этот процесс продолжается до тех пор, пока точность сопоставления всех бло-

ков не станет соответствовать заданным критериям или пока не достигнута максимальная глубина квадродерева – максимальное количество разбиений блока.

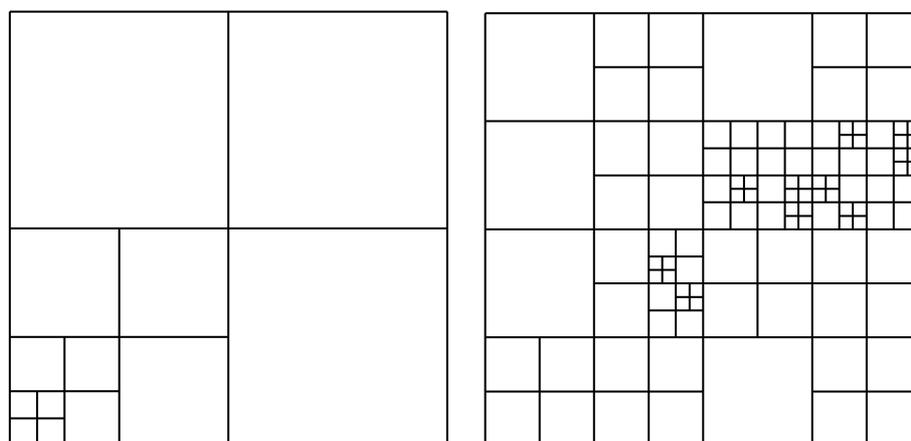


Рис. 4.6. Примеры разбиения изображения на ранговые блоки методом квадродерева. Глубина квадродерева равна четырем (справа) и пяти (слева)

При уменьшении величины допустимой погрешности и увеличении максимальной глубины квадродерева увеличивается не только качество восстанавливаемого изображения, но и количество ранговых блоков, что ведет к снижению коэффициента сжатия. В предельном случае размер рангового блока может равняться одному пикселю, что, очевидно, ведет к увеличению количества памяти, необходимой для представления сжатого изображения. Обычно при кодировании максимальная глубина квадродерева не превышает семи.

Упрощенный алгоритм фрактального сжатия

В данной работе предлагается реализовать упрощенный вариант алгоритма фрактального сжатия изображений, позволяющий ознакомиться с основными особенностями фрактального сжатия. Данный алгоритм имеет следующие ограничения:

- все доменные и ранговые блоки являются квадратами и имеют фиксированный размер;
- площадь доменной области ровно в четыре раза превышает площадь ранговой области;
- при переводе доменных областей в ранговые наряду с масштабированием в два раза доступны только восемь преобразований: отсутствие преобразования, зеркальное отражение, повороты исходного и зеркально отраженного блока на 90, 180 и 270 градусов;
- коэффициент изменения яркости фиксирован и находится в диапазоне от 0 до 1.

Преимуществом данного алгоритма являются малые требования к вычислительным ресурсам в совокупности с достаточно компактным представлением результатов кодирования.

Результат кодирования можно представить в текстовом файле, в котором каждая строка отвечает за определенный ранговый блок и содержит:

- координаты рангового блока;
- координаты доменного блока, соотнесенного с ранговым на этапе кодирования;
- номер преобразования (от 0 до 7 по количеству доступных преобразований);
- сдвиг по яркости для рассматриваемой пары блоков.

Заголовок текстового файла должен содержать также информацию о размере изображения.

Сдвиг по яркости между двумя блоками может быть выражен как среднее значение разности пикселей преобразованного доменного и рангового блока

$$q = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} r_{ij} \right], \quad (4.12)$$

где n – сторона рангового блока в пикселях, b_{ij} – яркость пикселя в доменном блоке, r_{ij} – яркость пикселя в ранговом блоке.

В качестве меры предлагается использовать дисперсию разности рангового и преобразованного доменного блоков

$$\Delta(R, D) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} ((r_{ij} - b_{ij}) - \bar{c})^2, \quad (4.13)$$

где R – ранговый блок, D – доменный блок после применения соответствующих преобразований, \bar{c} – среднее значение разности рангового и преобразованного доменного блоков, которое может быть вычислено как

$$\bar{c} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (r_{ij} - b_{ij}). \quad (4.14)$$

Алгоритм кодирования изображения представляется следующей последовательностью действий:

- 1) разбиение изображения на ранговые блоки;
- 2) подбор для каждого рангового блока такого доменного блока и преобразования, которые минимизировали бы меру (4.13);
- 3) сохранение параметров преобразования в текстовый файл (количество строк в этом файле равняется количеству ранговых блоков на изображении).

Для сравнения полученного коэффициента сжатия с коэффициентами, обеспечиваемыми стандартными алгоритмами, такими как JPEG, необходимо применить к результатам кодирования методы сжатия без потерь.

Такое сжатие можно осуществить при помощи одной из распространенных программ для архивирования данных (например, WinRAR или 7Zip).

Декодирование полученного изображения осуществляется следующим образом:

- 1) загрузка или генерация стартового изображения с заданными в заголовке текстового файла размерами;
- 2) разбиение изображения на ранговые блоки;
- 3) последовательное применение набора преобразований, записанных в текстовом файле в следующем порядке:
 - выбор i -ого рангового блока;
 - выбор соответствующего ему доменного блока (информация о соответствии хранится в текстовом файле);
 - выполнение соответствующих преобразований масштаба, поворота и сдвига по яркости для выбранного доменного блока;
- 4) сохранение результатов преобразований доменных блоков в области изображения, соответствующие ранговым блокам
- 5) повторение пунктов 3-4 до тех пор, пока изображение не перестанет изменяться.

Процесс декодирования изображения проиллюстрирован на рис. 4.7.

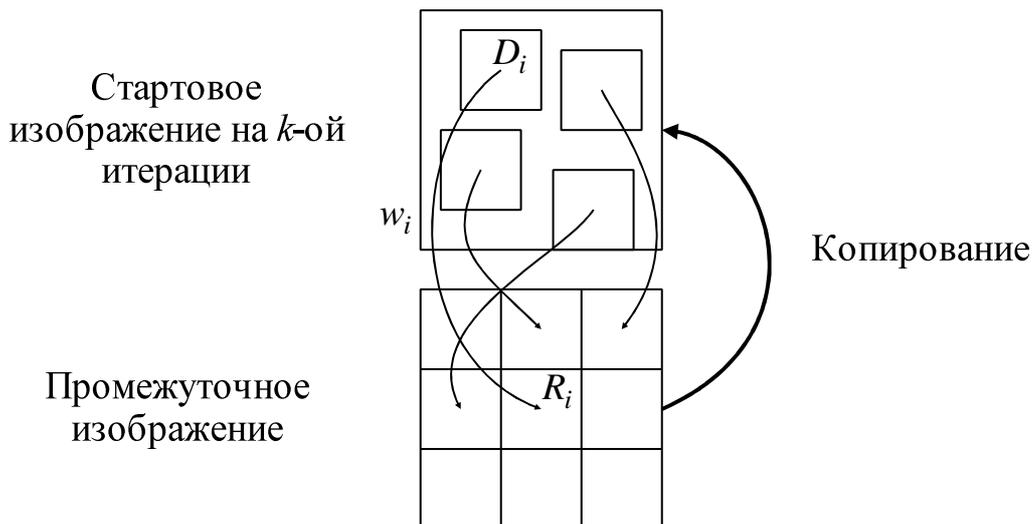


Рис. 4.7. Иллюстрация процесса декодирования изображения

Во избежание потерь информации при последовательном применении группы преобразований доменных блоков следует хранить в памяти промежуточные изображения.

4.2 Экспериментальная часть

1. Написать программу, реализующую фрактальное сжатие изображений в соответствии с приведенным алгоритмом.

2. Проверить правильность работы алгоритма, осуществляя многократное применение набора найденных преобразований к различным стартовым изображениям. Удостовериться, что результат декодирования не зависит от стартового изображения.
3. Оценить коэффициент сжатия изображения, используя для компактного представления текстовой информации один из стандартных архиваторов, например WinRAR. Сравнить полученные результаты с результатами сжатия при помощи стандартных алгоритмов, например JPEG и JPEG2000.
4. Оценить влияние размеров ранговых и доменных блоков на время фрактального кодирования, коэффициент сжатия и СКО разности между исходным и декодированным изображениями.
5. Сделать выводы и оформить отчет по результатам работы, в котором отобразить результаты декодирования изображений с использованием различных размеров ранговых и доменных блоков, графики зависимости коэффициента сжатия и погрешности сжатия от размера ранговых и доменных блоков.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения понятиям фрактала и системы итерируемых функций.
2. Что такое пространство Хаусдорфа? Как задается метрика в пространстве Хаусдорфа?
3. О чем говорит теорема о сжимающих отображениях? Как утверждения этой теоремы используются во фрактальном сжатии?
4. Как задается метрика в пространстве изображений в градациях серого?
5. В чем отличие между СИФ и СИКОФ?
6. Как происходит разбиение изображения на доменные и ранговые блоки? Сколько доменных блоков можно выделить на изображении?
7. Опишите процесс разбиения изображения на ранговые блоки методом квадродерева. В каких случаях следует прибегать к этому методу?

Литература

1. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М: Постмаркет, 2000. – 352 с.
2. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие. – М: Издательство Триумф, 2003. – 320 с.
3. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.

4. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.

Приложение. Пример оформления отчета по практической работе

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное автономное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
Информационных технологий, механики и оптики
Факультет Фотоники и оптоинформатики
Кафедра Компьютерной фотоники и видеоинформатики

Дисциплина: Методы компьютерной фотоники

Отчет

по практической работе №__
Название практической работы

Выполнил: Иванов И.И.
студ. гр. 4352
Преподаватель: Петров П.П.

Санкт-Петербург
2015

Цель работы: изучение правил оформления отчетов по практическим работам в рамках дисциплины «Методы компьютерной фотоники».

Задачи, решаемые в работе:

1. Изучение структуры отчета по практической работе.
 2. Ознакомление с правилами оформления формул, рисунков и таблиц.
 3. Задача 3.
- ...

Теоретическая часть

Структура отчета по практической работе

Отчет по практической работе должен содержать цель и список задач, решаемых в работе. При защите работы от студента требуется умение ясно изложить цель работы и описать задачи, решение которых приведет к ее достижению.

Теоретическая часть содержит сведения о предметной области, к которой относится работа, методах, алгоритмах, используемых при ее выполнении. Эта часть включается в текст работы по желанию студента. Если в теоретической части содержатся формулы, таблицы или рисунки, то они должны быть оформлены в соответствии с правилами, рассмотренными ниже.

В отчете обязательно должна содержаться экспериментальная или практическая часть, в которой должны быть отражены личные результаты студента, полученные им при выполнении работы. К таким результатам можно отнести графики, таблицы и изображения, полученные студентом в ходе выполнения моделирования или обработки данных в соответствии с задачами, поставленными в работе. Исходные данные, использованные студентом для апробации реализованных в ходе практической работы методов, также должны быть представлены в экспериментальной части.

В описании экспериментальной части должны содержаться пояснения, в том числе краткие выводы по промежуточным результатам работы. При необходимости можно привести пояснения к использованным студентом методам и алгоритмам.

Текст отчета по практической работе может быть использован студентом в процессе защиты.

Экспериментальная часть

Правила оформления текста

Отчет следует оформлять на бумаге формата А4. Поля могут быть выбраны произвольно, например, 25 мм по четырем сторонам листа. Реко-

мендуется при оформлении отчета использовать шрифт Times New Roman, размера 14 и полуторный интервал между строками. Обязательным требованием при оформлении текста является его выравнивание по ширине.

На рисунках в отчете могут быть представлены схемы, графики, изображения, модели исследуемых объектов и другая графическая информация. Ниже представлен пример оформления рисунка.

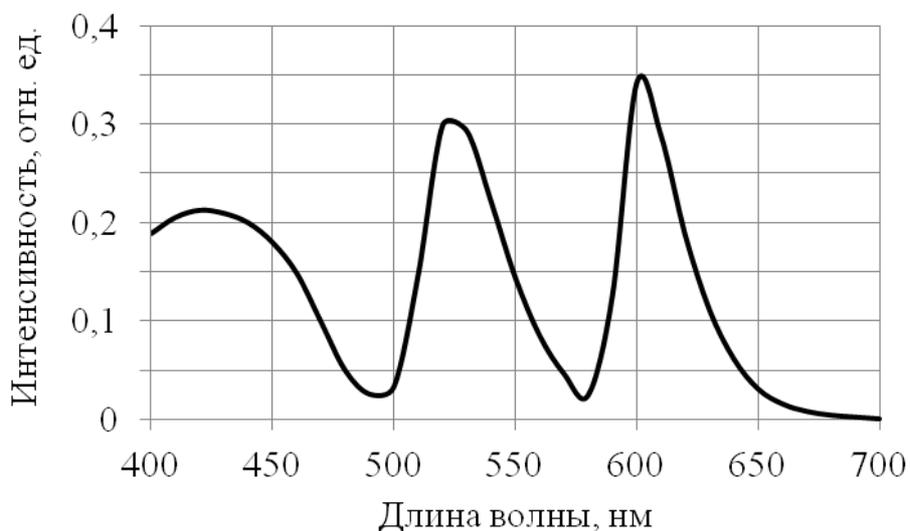


Рис. 1. Пример оформления рисунка

Координатные оси на графиках должны быть снабжены подписями.

Для наглядного оформления результатов моделирования и расчетов следует использовать таблицы. Ниже представлен пример оформления таблицы.

Таблица 1. Пример оформления таблицы

Количество отчетов в сигнале	Время работы алгоритма 1, с	Время работы алгоритма 2, с	Время работы алгоритма 3, с
100	0,1	0,1	0,1
200	0,2	0,4	0,1
300	0,3	0,9	0,2
400	0,4	1,6	0,3

На рисунки и таблицы обязательно должны присутствовать ссылки в тексте. Например "На рис. 1 изображен график зависимости ..." или "В табл. 2 приведены результаты экспериментальной оценки времени работы алгоритмов ...". Таблицы и рисунки должны быть снабжены подписями, отражающими их содержание.

Выводы

В выводах необходимо кратко пояснить полученные студентом в ходе практической работы результаты и следующие из них заключения, а также определить, достигнута ли поставленная в работе цель.

Ниже приведен пример вывода по практической работе:

"В ходе практической работы было проведено восстановление цветовой составляющей искусственной сцены по набору карт спектральной отражательной способности объектов этой сцены, исследованы представления цветов в цветовых пространствах CIE XYZ, RGB и Lab.

Показано, что при переводе из пространства XYZ в пространство RGB в области изображения могут наблюдаться так называемые метамерные цвета, то есть цвета, которые при количественном описании отличаются друг от друга, но воспринимаются человеческим глазом одинаково. Графики спектральной отражательной способности участков с такими цветами представлены в экспериментальной части настоящего отчета.

Для оценки различия между цветами на изображениях, полученных для разных типов источников излучения, было вычислено евклидово расстояние между точками, соответствующими этим цветам в пространствах RGB и Lab. Показано, что в пространстве RGB величина расстояния между этими точками может быть достаточно велика. В пространстве Lab незначительные различия между цветами соответствуют малому расстоянию между точками, характеризующими эти цвета, ввиду того, что в качестве координатных осей в пространстве Lab используются насыщенность, оттенок и яркость определенного цвета, а не "количество" того или иного цветового компонента в нем."

Листинг

В листинге следует размещать код программы, реализованной студентом в рамках практической работы. Листинг следует помещать на новой странице после основной части и выводов (в Microsoft Word для этого можно воспользоваться сочетанием клавиш Ctrl+Enter). При этом необходимо указать язык программирования, при помощи которого была реализована программа, а также список дополнительных библиотек, если они использовались.

При выполнении практических работ рекомендуется использовать математические пакеты, такие как MATLAB и MathCad, а также языки программирования высокого уровня.

В случае, если программа имеет модульную структуру, необходимо привести код каждого модуля с соответствующей пометкой. Ниже приведен пример оформления листинга программы на языке C++.

Файл "MyClass.h", содержащий описание класса MyClass

<Описание класса>

Файл "MyClass.cpp", содержащий определение методов класса MyClass

<Определение методов класса>

Файл "main.cpp", содержащий точку входа и реализацию алгоритма Кули-Тьюки

<Реализация алгоритма Кули-Тьюки>

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ФОТОНИКИ И ВИДЕОИНФОРМАТИКИ

Достижения в оптической науке, технике и технологиях за последние годы способствовали появлению нового направления – фотоники. Этот термин охватывает область науки и техники, связанную с использованием светового излучения (или потока фотонов) в оптических элементах, устройствах и системах.

На рубеже XX – XXI веков электронные информационные технологии достигли фундаментальных и технических пределов производительности при продолжающемся росте потребительского спроса на скорость и объем обрабатываемой и передаваемой информации. Решение данной проблемы потребовало разработки нового поколения информационно – телекоммуникационных систем, основанных на технологиях фотоники. В фотонике появилось новое динамично развивающееся направление, определяющее прогресс мировой науки и техники, – «оптоинформатика». Под «оптоинформатикой» понимают область науки и техники, связанную с исследованием, разработкой, созданием и эксплуатацией новых материалов, технологий, приборов и устройств, направленных на передачу, прием, обработку, хранение и отображение информации.

Изучение фотоники основывается на знании принципов формирования, преобразования, анализа изображений, теории построения информационных систем. Интеграция фотоники и компьютерных технологий позволяет создавать методы, которые возможно реализовать исключительно средствами компьютерной фотоники, обеспечивая развитие технологий качественно нового уровня.

По многим направлениям фотоники и оптоинформатики Россия находится на уровне промышленно – развитых стран (интегральная оптика, системы приема, обработки и отображения информации и др.), а, по некоторым – даже опережает. Приоритетными направлениями являются: волоконная оптика (работы академика Дианова Е.М. – ИОФ РАН), голография (академик Денисюк Ю.Н. – ГОИ им. С.И. Вавилова),

полупроводниковые лазеры (академик Алферов Ж.И – ФТИ РАН им. А.Ф. Иоффе), полифункциональные оптические материалы (академик Петровский Г.Т. – ГОИ им. С.И. Вавилова) и др.

Ввиду большого научного и практического значения направления "Фотоника и оптоинформатика", а также спроса на него на потребительском рынке, в 2002 г. в СПбГУ ИТМО был организован факультет «Фотоники и оптоинформатики» под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора С.А. Козлова. По инициативе профессорско-преподавательского состава, начиная с 2005 года, на факультете стала работать выпускающая кафедра «Компьютерной фотоники», которую возглавил доктор технических наук, профессор И.П. Гуров.

История кафедры началась в 1946 году. На всех этапах развития результаты научных исследований, проводимых сотрудниками кафедры, неизменно использовались в учебном процессе. Совершенствовались направления подготовки студентов, изменялось название кафедры, но всегда кафедра гордилась своими выпускниками.

Выпускники кафедры занимают видное место в оптической науке: академик РАН Ю.Н. Денисюк, изобретатель трехмерной голографии; член-корр. РАЕН, профессор Н.Г. Бахшиев, известный специалист в области спектроскопии межмолекулярных взаимодействий; Заслуженный деятель науки РФ, профессор Г.Н. Дульнев, крупный ученый в области теплофизики, долгие годы бывший ректором ЛИТМО; профессор И.М. Нагибина, исследования которой в области физической оптики получили широкое признание.

Одной из важнейших задач кафедры является организация учебного процесса и подготовка профессионалов в области компьютерной фотоники. Направление работы кафедры определяется развитием информационных технологий и компьютерных систем в области формирования, синтеза, обработки и анализа изображений на основе интеграции эффективных компьютерных систем с системами фотоники.

Проводимые исследования в области компьютерной обработки когерентных и некогерентных изображений обеспечивают решение научно-технических задач оптической томографии, цифровой голографии, синтеза, анализа, распознавания и классификации изображений.

Научным консультантом работ кафедры в области компьютерной обработки изображений – иконики – является член-корреспондент РАН М.М. Мирошников.

Кафедра проводит работы в рамках международных научных проектов в сотрудничестве с ведущими зарубежными университетами, институтами и исследовательскими лабораториями Италии, Финляндии, Франции, Германии, Великобритании, Японии, США и других стран в области оптической когерентной томографии для биомедицинских исследований, цифровой голографии для исследования микро- и нано-

структур, трехмерной фотографии микро- и макроскопических объектов, гиперспектральной обработки изображений.

В последнее время на кафедре активно развивается новое направление – видеоинформатика. Ввиду этого в 2010 году кафедра была переименована в кафедру Компьютерной фотоники и видеоинформатики. В 2011 году Университет получил статус Национального исследовательского университета, в этом есть и заслуга преподавательского коллектива кафедры Компьютерной фотоники и видеоинформатики. Эти обстоятельства позволяют обеспечивать и в дальнейшем подготовку высококлассных востребованных на рынке специалистов в области Компьютерной фотоники и видеоинформатики.

Волынский Максим Александрович
Гуров Игорь Петрович
Ермолаев Петр Андреевич

Методы и техника оптической томографии
Учебно-методическое пособие по лабораторным работам

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49