МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.Н. Кудашов

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

УДК 681.3.06

Кудашов В.Н. Линейные разностные уравнения: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО; ИХиБТ, 2015. – 39 с.

Рассматриваются основные понятия теории линейных разностных уравнений, естественным образом возникающих при использовании приближенных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложения во многих областях естествознания при моделировании поведения систем различной природы.

Рассчитано на магистрантов направлений 15.04.02 Технологические машины и оборудование, 16.04.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения, 23.04.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, изучающих дисциплину «Вычислительная гидрогазодинамика, тепломассообмен и компьютерный инжиниринг», очной формы обучения.

Рецензент: кандидат техн. наук А.В. Зайцев

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

1. Общая теория линейных разностных уравнений

1.1. Основные определения

Обозначим через $\mathbb{N}_0$ множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ множество натуральных чисел. Пусть $f(s)$, $a_k(s)$, $k = 0, \ldots, n$, функции, заданные на множестве $\mathbb{N}_0$, причём $a_0(s) \neq 0$ и $a_n(s) \neq 0$ для любого $s \in \mathbb{N}_0$. Уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = f(s) \tag{1.1}$$

называется *линейным разностным уравнением порядка n.*

Функции $a_0(s)$, $\ldots$, $a_n(s)$ называются коэффициентами уравнения (1.1), функция $f(s)$ называется правой частью (1.1).

Если $f(s) = 0$ для любого $s \in \mathbb{N}_0$, то уравнение (1.1), называется *однородным* уравнением, в противном случае уравнение (1.1) называется *неоднородным.*

Нормальной линейной системой разностных уравнений порядка $n \geq 2$ называется система n линейных разностных уравнений вида

$$x_i(s+1) = \sum_{k=0}^{n} a_{ij}(s)\, x_j(s) = f_i(s), \tag{1.2}$$

где $x_1(s)$,..., $x_n(s)$ — неизвестные функции $s \in \mathbb{N}_0$; $a_{ij}(s)$ — заданные функции $s \in \mathbb{N}_0$, называемые коэффициентами системы; $f_i(s)$ — заданные функции $s \in \mathbb{N}_0$, называемые свободными членами системы; матрица коэффициентов $a_{ij}(s)$ системы является невырожденной для всех $s \in \mathbb{N}_0$.

Представим нормальную линейную систему разностных уравнений в матричном виде. Положим для всех $s \in \mathbb{N}_0$

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}, \quad A(s) = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \ldots & a_{1n}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \ldots & a_{2n}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(s) & a_{n2}(s) & \ldots & a_{nn}(s) \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях нормальная система (1.2) запишется в следующем компактном виде:

$$A(s)\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{f}(s), \tag{1.3}$$

причём $\det A \neq 0$ при любых $s \in \mathbb{N}_0$.

Линейная система (1.3) называется *однородной*, если $\boldsymbol{f}(s)$ для любых $s \in \mathbb{N}_0$. В противном случае линейная система (1.3) называется *неоднородной*.

Нормальная линейная система разностных уравнений (1.3) с начальным условием

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \tag{1.4}$$

называется *разностной задачей Коши для системы.*

Условие (1.4) эквивалентно n условиям

$$x_1(0) = u_1,\ f_2(0) = x_2, \ldots,\ x_n(0) = u_n,$$

Теорема 1.1. *Решение разностной задачи Коши* (1.3), (1.4) *для нормальной системы линейных разностных уравнений существует и единственно.*

Доказательство. *Существование.* Из (1.3) и (1.4) последовательно получаем:

$$\boldsymbol{x}(1) = A(0)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(0),$$
$$\boldsymbol{x}(2) = A(1)\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{f}(1) = A(1)A(0)\boldsymbol{u} + A(1)\boldsymbol{f}(0) + \boldsymbol{f}(1).$$

Методом математической индукции можно убедиться в том, что для любого $s \in \mathbb{N}_0$

$$\boldsymbol{x}(s) = \prod_{j=0}^{s-1} A(j)\boldsymbol{u} + \prod_{j=1}^{s-1} A(j)\boldsymbol{f}(0) + \prod_{j=2}^{s-1} A(j)\boldsymbol{f}(1) +$$
$$+ \ldots + A(s-1)\boldsymbol{f}(s-2) + \boldsymbol{f}(s-1). \tag{1.5}$$

Единственность. Пусть $\boldsymbol{x}^{(1)}(s)$ $\boldsymbol{x}^{(2)}(s)$ какие-либо два решения задачи Коши (1.3), (1.4). Разность

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}^{(2)}(s) - \boldsymbol{x}^{(1)}(s)$$

является решением задачи Коши

$$\boldsymbol{x}(s+1) = A(s)\boldsymbol{x}(s), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}.$$

Из выведенной выше формулы (1.5) следует, что $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{0}$ для всех $s \in \mathbb{N}_0$.

Обратно, пусть $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{0}$ для всех $s \geq 1$ решение системы (1.3). Покажем, что для него начальным значением служит $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Из формулы (1.5) получаем алгебраическую систему уравнений для $\boldsymbol{u}$ вида

$$\prod_{j=0}^{s-1} A(j)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$$

Так как по условию $\det A(s) \neq 0$ для любых $s \in \mathbb{N}_0$, то матрица

$$\prod_{j=0}^{s-1} A(j)$$

невырождена для всех $s \in \mathbb{N}_0$. Следовательно $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{x}(s)$, $\boldsymbol{y}(s)$ какие-либо два решения системы* (1.3). *Если $\boldsymbol{x}(s_0) = \boldsymbol{y}(s_0)$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{N}_0$, то $\boldsymbol{x}(s)$ и $\boldsymbol{y}(s)$ совпадают, т. е. $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{y}(s)$ для всех $s \in \mathbb{N}_0$.*

Если начальное значение $\boldsymbol{u}$ не задано, то из формулы (1.5)

$$\boldsymbol{x}(s) = \prod_{j=0}^{s-1} A(j)\boldsymbol{c} + \sum_{k=0}^{s-2} \prod_{j=k+1}^{s-1} A(j)\boldsymbol{f}(k) + \boldsymbol{f}(s-1), \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{c}$ — произвольный n-мерный числовой вектор.

Формула (1.6) представляет собой формулу общего решения нормальной линейной системы разностных уравнений порядка n.

Линейное разностное уравнение (1.1) с начальными условиями

$$y(0) = u_0,\ y(1) = u_1, \ldots,\ y(n-1) = u_{n-1} \tag{1.7}$$

называется *разностной задачей Коши.*

Линейное разностное уравнение (1.1) сводится к нормальной системе (1.3). Положим

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{pmatrix} y(s) \\ y(s+1) \\ \vdots \\ y(s+n-1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1.1) запишется как (1.3) с матрицей

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ b_0(s) & b_1(s) & b_2(s) & \ldots & b_{n-2}(s) & b_{n-1}(s) \end{pmatrix},$$

где $b_j(s) = (-1)^n a_j(s)/a_n(s)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. При этом для любого $s \in \mathbb{N}_0$

$$\det A(s) = (-1)^n a_0(s)/a_n(s) \neq 0.$$

Из вышесказанного следует теорема.

Теорема 1.2. *Решение разностной задачи Коши* (1.1), (1.7) *существует и единственно.*

1.2. Линейные однородные разностные уравнения

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение n-го порядка

$$a_n(s)\, y(s+n) + \ldots + a_0(s)\, y(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = 0. \tag{1.8}$$

Теорема 1.3. *Если* $y_1(s)$, …, $y_p(s)$ *— решения уравнения* (1.8), *то функция*

$$y(s) = C_1 y_1(s) + \ldots + C_p y_p(s), \tag{1.9}$$

где C_1, …, C_p *произвольные константы, является решением уравнения* (1.8).

Доказательство. Подставим (1.9) в уравнение (1.8):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = \sum_{k=0}^{n} a_k(s) \sum_{i=1}^{p} C_i y_i(s+k) = \sum_{l=1}^{p} C_i \sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y_i(s+k) = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что функции $y_i(s)$ являются решениями уравнения (1.8). Следовательно, $y(s)$ удовлетворяет уравнению (1.8).

Обозначим через $\Delta_s(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ определитель

$$\Delta_s(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_1(s+1) & \ldots & y_1(s+p-1) \\ y_2(s) & y_2(s+1) & \ldots & y_2(s+p-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_p(s) & y_p(s+1) & \ldots & y_p(s+p-1) \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть* $y_1(s)$, …, $y_n(s)$ *— решения уравнения* (1.8). *Определитель* $\Delta_s(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *либо равен нулю тождественно по* s, *либо отличен от нуля для всех* $s \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Так как $y_1(s)$, …, $y_n(s)$ — решения уравнения (1.8), то справедливы равенства

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(s)\, y_k(s+i) = -a_n(s)\, y_k(s+n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Запишем эти равенства в матричном виде $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ равны

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_0(s) \\ a_1(s) \\ \ldots \\ a_{n-1}(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -a_n(s)\, y_1(s+n) \\ -a_n(s)\, y_2(s+n) \\ \ldots \\ -a_n(s)\, y_n(s+n) \end{pmatrix},$$

а матрица A представляется в виде

$$A = \begin{pmatrix} y_1(s) & y_1(s+1) & \dots & y_1(s+n-1) \\ y_2(s) & y_2(s+1) & \dots & y_2(s+n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(s) & y_n(s+1) & \dots & y_n(s+n-1) \end{pmatrix}.$$

Выразим $a_0(s)$ из этой системы по формулам Крамера (прил. 1). Получим

$$a_0(s)\,\Delta_s(y_1,\dots,y_n) = -\,a_n(s) \begin{vmatrix} y_1(s+n) & y_1(s) & \dots & y_1(s+n-1) \\ y_2(s+n) & y_2(s) & \dots & y_2(s+n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(s+n) & y_n(s) & \dots & y_n(s+n-1) \end{vmatrix}.$$

После $(n-1)$ - й перестановки столбцов определителя в правой части получим

$$\begin{vmatrix} y_1(s+n) & y_1(s) & \dots & y_1(s+n-1) \\ y_2(s+n) & y_2(s) & \dots & y_2(s+n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(s+n) & y_n(s) & \dots & y_n(s+n-1) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} y_1(s+1) & \dots & y_1(s+n) \\ y_2(s+1) & \dots & y_2(s+n) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n(s+1) & \dots & y_n(s+n) \end{vmatrix}.$$

В результате получаем формулу

$$a_0(s)\,\Delta_s(y_1,y_2,\dots,y_n) = (-1)^n a_n(s)\,\Delta_{s+1}(y_1,y_2,\dots,y_n). \tag{1.10}$$

Утверждение леммы легко следует из полученной формулы и условий $a_0(s) \neq 0$, $a_n(s) \neq 0$ для любых $s \in \mathbb{N}_0$.

Функции $y_1(s)$, $y_2(s)$, ..., $y_p(s)$, заданные на $\mathbb{N}_0$, называются *линейно зависимыми*, если существуют константы C_1, ..., C_p, не все не равные нулю, такие, что

$$C_1 y_1(s) + C_2 y_2(s) + \ldots + C_p y_p(s) = 0, \quad s \in \mathbb{N}_0.$$

В противном случае функции $y_1(s)$, $y_2(s)$, ..., $y_p(s)$ называются *линейно независимыми*.

Лемма 2. *Если $y_1(s)$, ..., $y_n(s)$ — линейно независимые решения уравнения* (1.8), *то определитель $\Delta_s(y_1,y_2,\dots,y_n)$ не равен нулю для всех $s \in \mathbb{N}_0$.*

Доказательство. Пусть $y_1(s)$, ..., $y_n(s)$ — линейно независимые решения уравнения (1.8). Предположим, что $\Delta_s(y_1,y_2,\dots,y_n)$ равен нулю для некоторого значения s. Из леммы 1 следует, что тогда $\Delta_s(y_1, y_2, \dots, y_n)$ равен нулю тождественно по s. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} C_1y_1(0) + C_2y_2(0) + \ldots + C_ny_n(0) = 0, \\ C_1y_1(1) + C_2y_2(1) + \ldots + C_ny_n(1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1(n-1) + C_2y_2(n-1) + \ldots + C_ny_n(n-1) = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Так как определитель этой системы $\Delta_0(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, то найдутся постоянные C_1, ..., C_n, не все равные нулю, удовлетворяющие системе. Таким образом, при найденных C_1, ..., C_n

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(s) = 0, \tag{1.12}$$

для $s = 0, \dots, n-1$. Так как $y_k(s)$ решение (1.8), то

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(0)\, y_k(i) = 0.$$

Умножим это равенство на C_k и просуммируем по k. Получим

$$0 = \sum_{k=1}^{n} C_k \sum_{i=0}^{n} a_i(0)\, y_k(i) = \sum_{i=0}^{n} a_i(0) \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(i) = a_n(0) \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(n).$$

Так как $a_n(0) \neq 0$, то равенство (1.11) справедливо при $s = n$. Продолжая таким же образом, мы видим, что (1.11) выполнено при любых $s \in \mathbb{N}_0$. Противоречие с предположением линейной независимости функций $y_1(s)$, ..., $y_n(s)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 3. *Если для решений $y_1(s)$, ..., $y_n(s)$ уравнения* (1.8), *определитель $\Delta_s(y_1, y_2, \dots, y_n)$ не равен нулю хотя бы для одного значения s, то $y_1(s)$, ..., $y_n(s)$ — линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\Delta_s(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ для некоторого s. Из леммы 1 следует, что $\Delta_s(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ для любых s. Предположим, что $y_1(s)$, ..., $y_n(s)$ — линейно зависимы. Следовательно, существуют константы C_1, ..., C_n, не все равные нулю, такие, что справедливо равенство (1.12) при любом s. В частности эти константы удовлетворяют системе (1.11). Её определитель $\Delta_0(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ и поэтому (1.11) имеет единственное тривиальное решение $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Противоречие.

1.3. Теоремы о решениях линейного уравнения

Здесь мы будем рассматривать линейное разностное уравнение порядка n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = f(s) \tag{1.13}$$

и соответствующее однородное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = 0. \tag{1.14}$$

Теорема 1.4. *Если $y_1(s)$, $y_2(s)$,..., $y_n(s)$ — линейно независимые решения уравнения* (1.14), *то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y(s) = C_1 y_1(s) + C_2 y_2(s) + \ldots + C_n y_n(s), \tag{1.15}$$

где C_1, C_2,..., C_n — произвольные постоянные.

Доказательство. В силу теоремы 1.1 функция $y(s)$, определённая формулой (1.15), есть решение уравнения (1.14). Покажем теперь, что любое решение (1.14) представляется в виде (1.15).

Пусть $u(s)$ — произвольное решение уравнения (1.14). В силу теоремы 1.1 оно полностью определяется заданием начальных значений в n точках: $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(n-1)$. Подберём константы C_1, C_2,..., C_n в (1.15) так, чтобы получившаяся функция $y(s)$ имела те же начальные условия. Получаем систему уравнений для нахождения C_1, C_2,..., C_n.

$$\begin{cases} C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) + \ldots + C_n y_n(0) = u(0), \\ C_1 y_1(1) + C_2 y_2(1) + \ldots + C_n y_n(1) = u(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1(n-1) + C_2 y_2(n-1) + \ldots + C_n y_n(n-1) \;= u(n-1). \end{cases}$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы равен $\Delta_0(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Так как, функции $y_1(s)$, $y_2(s)$,..., $y_n(s)$ — линейно независимы, то в силу леммы 2 $\Delta_0(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ и система разрешима при любой правой части. Таким образом, функция $y(s)$ при найденных C_1, C_2,..., C_n имеет те же начальные условия, что и функция $u(s)$:

$$y(s) = u(s), \quad s = 1, \ldots, n-1.$$

Из теоремы 1.1 следует, что $y(s) = u(s)$ для любых $s \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1.5. *Общее решение уравнения* (1.13) *представляется в виде*

$$y(s) = y_0(s) + y_1(s), \tag{1.16}$$

где $y_0(s)$ *есть общее решение однородного уравнения* (1.14), *а* $y_1(s)$ — *какое-либо частное решение уравнения* (1.13).

Доказательство. Пусть $y(s)$ произвольное решение уравнения (1.13) и $y_1(s)$ его частное решение. Рассмотрим функцию $y_0(s) = y(s) - y_1(s)$. Очевидно, что $y_0(s)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.8). Осталось воспользоваться теоремой 1.3.

Следствие 1. *Общее решение неоднородного уравнения* (1.14) *имеет вид*

$$y(s) = y_1(s) + C_1 y_1(s) + \ldots + C_n y_n(s), \tag{1.17}$$

где $y_1(s)$ — *частное решение уравнения* (1.13), *а* $y_1(s)$, $\ldots$, $y_n(s)$ — *линейно независимые решения однородного уравнения* (1.14), C_1, $C_2, \ldots$, C_n — *произвольные постоянные.*

Следствие 2. *Если правая часть* $f(s)$ *уравнения* (1.13) *имеет вид*

$$f(s) = f^{(1)}(s) + f^{(2)}(s),$$

то частное решение (1.13) *можно представить в виде*

$$y_1(s) = y^{(1)}(s) + y^{(2)}(s),$$

где $y^{(1)}(s)$, $y^{(2)}(s)$ — *частные решения уравнения* (1.13) *с правыми частями* $f^{(1)}(s)$, $f^{(2)}(s)$.

1.4. Метод вариации постоянных

Выше было показано, что общее решение однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = 0 \tag{1.18}$$

имеет вид

$$y(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(s),$$

где $y_1(s)$, $\ldots$, $y_n(s)$ — линейно независимые решения (1.18), а C_1, $\ldots$, C_n — произвольные постоянные.

Будем теперь считать C_1, $\ldots$, C_n функциями $s \in \mathbb{N}_0$ и подберём их так, чтобы функция

$$y_1(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i(s) y_i(s) \tag{1.19}$$

удовлетворяла неоднородному уравнению

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y(s+k) = f(s). \tag{1.20}$$

Заметим, что каждая функция $C_i(s)$ определяется с точностью до постоянной, так как $y_i(s)$ — решение однородного уравнения (1.18).

Введём обозначения:

$$d_k(s) = \sum_{i=1}^{n} \big\{C_i(s+k) - C_i(s)\big\}\, y_i(s+k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Подставляя (1.19) в (1.20) и учитывая, что $y_i(s)$ удовлетворяют уравнению (1.18), получим

$$\begin{aligned} f(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k(s) y_1(s+k) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(s) \sum_{i=1}^{n} C_i(s+k) y_i(s+k) = \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(s) d_k(s) &+ \sum_{k=0}^{n} a_k(s) \sum_{i=1}^{n} C_i(s) y_i(s+k) = \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(s) d_k(s) &+ \sum_{i=1}^{n} C_i(s) \sum_{k=0}^{n} a_k(s) y_i(s+k) = \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(s) d_k(s) &= \sum_{k=1}^{n} a_k(s)\, d_k(s), \end{aligned}$$

так как $d_0(s) = 0$. Полученное соотношение будет выполняться для всех s, если положить

$$\begin{cases} d_k(s) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1; \\ d_n(s) = f(s)/a_n(s). \end{cases} \tag{1.21}$$

Итак, задача построения $C_1(s)$, …, $C_n(s)$ свелась к определению их из условий (1.21), которые должны выполняться тождественно по $s \in \mathbb{N}_0$.

Преобразуем систему уравнений (1.21). Обозначим $b_i(s) = C_i(s+1) - C_i(s)$, $i = 1$, …, n. Из определения $d_k(s)$ получим для $k = 1$, …, n:

$$\begin{aligned} d_k(s) - d_{k-1}(s+1) = \sum_{i=1}^{n} \big\{C_i(s+k) - C_i(s)\big\}\, y_i(s+k) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \big\{C_i(s+k) - C_i(s+1)\big\}\, y_i(s+k) = \sum_{k=1}^{n} b_i(s)\, y_i(s+k). \end{aligned}$$

Подставляя в данное выражение (1.21) и учитывая равенство $d_0(s) = 0$, получим

$$\begin{cases} b_1(s)y_1(s+1) + b_2(s)y_2(s+1) + \ldots + b_n(s)y_n(s+1) = 0, \\ b_1(s)y_1(s+2) + b_2(s)y_2(s+2) + \ldots + b_n(s)y_n(s+2) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1(s)y_1(s+n) + b_2(s)y_2(s+n) + \ldots + b_n(s)y_n(s+n) = \dfrac{f(s)}{a_n(s)}. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} y_1(s+1) & y_2(s+1) & \ldots & y_n(s+1) \\ y_1(s+2) & y_2(s+2) & \ldots & y_n(s+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1(s+n) & y_2(s+n) & \ldots & y_n(s+n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \ldots \\ b_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(s)/a_n(s) \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы равен

$$\mathcal{D}(s) = \Delta_{s+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

и, в силу линейной независимости y_1, y_2, $\ldots$, y_n, отличен от нуля. Следовательно, по формулам Крамера

$$\mathcal{D}(s)\, b_i(s) = \begin{vmatrix} y_1(s+1) & \ldots & 0 & \ldots & y_n(s+1) \\ y_1(s+2) & \ldots & 0 & \ldots & y_n(s+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_1(s+n) & \ldots & f(s)/a_n(s) & \ldots & y_n(s+n) \end{vmatrix} = (-1)^{n+i}\, \mathcal{D}_i(s)\, \frac{f(s)}{a_n(s)},$$

где $\mathcal{D}_i(s)$ получается из определителя $\mathcal{D}(s)$ вычёркиванием i-го столбца и последней строки. В результате

$$b_i(s) = C_i(s+1) - C_i(s) = (-1)^{n+i}\, \frac{f(s)\, \mathcal{D}_i(s)}{a_n(s)\, \mathcal{D}(s)}.$$

Используя полученное равенство, легко найти $C_i(s)$. Функции $C_i(s)$ определены с точностью до постоянной, поэтому можно положить $C_i(0) = 0$. Так как

$$C_i(s) = \sum_{k=0}^{s-1} \{C_i(k+1) - C_i(k)\} = \sum_{k=0}^{s-1} b_i(k),$$

то

$$C_i(s) = (-1)^{n+i} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f(k)\, \mathcal{D}_i(k)}{a_n(k)\, \mathcal{D}(k)}. \quad (1.23)$$

Запишем теперь решение неоднородного уравнения (1.20):

$$y_1(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i(s) y_i(s) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} y_i(s) \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f(k)\,\mathcal{D}_i(k)}{a_n(k)\,\mathcal{D}(k)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f(k)}{a_n(k)\,\mathcal{D}(k)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} y_i(s) \mathcal{D}_l(k).$$

Внутренняя сумма легко вычисляется. Для этого разложим определитель по нижней строке:

$$\begin{vmatrix} y_1(k+1) & \dots & y_n(k+1) \\ y_1(k+2) & \dots & y_n(k+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(k+n-1) & \dots & y_n(k+n-1) \\ y_1(s) & \dots & y_n(s) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+l} y_i(k) \mathcal{D}_i(k).$$

Так как при $k+1 \le s \le k+n-1$ этот определитель равен нулю, то в результате получаем

$$\tilde{y}_1(s) = \sum_{k=0}^{s-n} \frac{\begin{vmatrix} y_1(k+1) & \dots & y_n(k+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(k+n-1) & \dots & y_n(k+n-1) \\ y_1(s) & \dots & y_n(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(k+1) & \dots & y_n(k+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(k+n) & \dots & y_n(k+n) \end{vmatrix}} \frac{f(k)}{a_i(k)}. \tag{1.24}$$

1.5. Линейные разностные уравнения 1-го порядка

Рассмотрим линейное разностное уравнение 1-го порядка

$$a_1(s+1)y(s+1) + a_0(s)y(s) = f(s). \tag{1.25}$$

Перепишем уравнение (1.25) в более удобном виде

$$y(s+1) - b(s)y(s) = g(s). \tag{1.26}$$

Нетрудно видеть, что функция $y(s) = Cv(s)$, где C — произвольная постоянная, а

$$v(s) = \prod_{k=0}^{s-1} b(k),$$

является общим решением однородного уравнения.

Ищем частное решение $y_1(s)$ уравнения (1.26) методом вариации постоянной. Положим

$$y_1(s) = C(s)v(s).$$

Имеем

$$\begin{aligned} y_1(s+1) &= C(s+1)v(s+1) = \{C(s+1) - C(s)\}v(s+1) + C(s)v(s+1) = \\ &= \{C(s+1) - C(s)\}v(s+1) + b(s)y_1(s). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство $v(s+1) = b(s)v(s)$. Из (1.26) следует, что $\{C(s+1) - C(s)\}v(s+1) = g(s)$. Следовательно, полагая $C(0) = 0$, получим

$$C(s) = \sum_{k=0}^{s-1} \{C(k+1) - C(k)\} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{g(k)}{v(k+1)}.$$

В результате общим решением уравнения (1.26) является

$$y(s) = \Big[C + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{g(k)}{v(k+1)}\Big] v(s), \quad v(s) = \prod_{k=0}^{s-1} b(k). \tag{1.27}$$

П р и м е р. Решить уравнение

$$y(s+2) - \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}\, y(s) = \frac{2s+4}{s+3}.$$

Функция $v(s)$ равна

$$\prod_{k=0}^{s-1} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} = (s+1)^2.$$

Теперь вычисляем сумму

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{s-1} \frac{2k+4}{k+3} \frac{1}{(k+1)^2} = 2\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \\ &= 2\sum_{k=0}^{s-1} \Big(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\Big) = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{s+2}\Big) = \frac{s}{s+2}. \end{aligned}$$

Следовательно, из формулы (1.27) получаем

$$y(s) = \Big(C + \frac{s}{s+2}\Big)(s+1)^2.$$

2. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Перед чтением этой главы рекомендуется ознакомиться с материалом прил. 2.

2.1. Комплексные уравнения

Рассмотрим линейное разностное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y(s+n) + a_{n-1} y(s+n-1) + \ldots + a_0 y(s) = 0. \tag{2.1}$$

Предполагается, что коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ являются комплексными числами.

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$v(s) = q^s,$$

где q — неизвестная комплексная величина.

Подставляя $v(s)$ в уравнение (2.1), получим

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k q^{s+k} = q^s \sum_{k=1}^{n} a_k q^k.$$

Значению $q = 0$ соответствует тривиальное решение $v(s) = 0$. Далее будем считать, что $q \neq 0$. Сокращая на q^s, получим

$$a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется *характеристическим уравнением* для (2.1).

Пусть q_1, q_2, $\ldots$, q_m, $1 \leq m \leq n$, корни уравнения (2.2) с соответствующими кратностями n_1, n_2, $\ldots$, n_m, причём

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n. \tag{2.3}$$

Случай простых корней. Пусть все корни характеристического уравнения простые. Тогда характеристическое уравнение имеет n различных корней q_1, q_2, $\ldots$, q_n. Им соответствует n решений уравнения (2.1):

$$v_k(s) = q_k^s, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Докажем, что решения (2.4) линейно независимы. В силу леммы 3 достаточно показать, что определитель $\Delta_s(v_1, \ldots, v_n)$ не равен нулю при $s = 0$. Имеем

$$\Delta_0(v_1, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} 1 & q_1 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & \ldots & q_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & q_n & \ldots & q_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Это определитель Вандермонда (прил. 3), следовательно,

$$\Delta_0(v_1, \ldots, v_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (q_j - q_i). \tag{2.5}$$

Из теоремы 1.2 следует, что общим решением уравнения (2.1) является функция

$$y(s) = C_1 q_1^s + C_2 q_2^s + \ldots C_n q_n^s. \tag{2.6}$$

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$y(s+2) - (i+2)y(s+1) + (i+1)y(s) = 0.$$

Нетрудно видеть, что характеристическое уравнение

$$q^2 - (i+2)q + i + 1 = 0$$

имеет корни $q_1 = 1$ и $q_2 = 1+i$. Поэтому общим решением является функция

$$y(s) = c_1 + c_2(1+i)^s.$$

Общий случай. Ограничимся кратким изложением результатов. Подробности можно найти в книгах [2], [3]. Пусть q_i корень уравнения (2.2) кратности n_i. Тогда n_i функций

$$v_{i1} = q_i^s, v_{i2} = s q_i^s, \ldots v_{in_i} = s^{n_i - 1} q_i^s. \tag{2.7}$$

будут решениями уравнения (2.1). Заметим, что если q_i простой корень, т. е. $n_i = 1$, то совокупность (2.7) сводится к одной функции $v_i(s) = q_i^s$.

В силу равенства (2.3) получаем n решений (2.1):

$$v_{ik} = s^{k-1} q_i^s, \quad k = 1, \ldots, n_i, \ i = 1, \ldots, m. \tag{2.8}$$

Функции $v_{ik}(s)$ линейно независимы, следовательно, в силу теоремы 1.2 общим решением уравнения (2.1) является функция

$$y(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} c_{ik} v_{ik}(s)$$

или

$$y(s) = \sum_{i=1}^{m} (c_{i1} + c_{i2}s + \ldots + c_{in_i} s^{n_i - 1})\, q_i^s. \tag{2.9}$$

П р и м е р 2. Решим уравнение

$$y(s+3) + 3y(s+1) - 2iy(s) = 0.$$

Нетрудно проверить, что характеристическое уравнение

$$q^3 + 3q - 2i = 0$$

имеет корень $q_1 = i$ кратности 2 и простой корень $q_2 = -2i$. Поэтому общим решением является функция

$$y(s) = (c_{11} + c_{12}s)\, i^s + c_2(-2i)^s.$$

2.2. Вещественные уравнения

Здесь будут рассматриваться линейные однородные уравнения (2.1) с постоянными вещественными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Нас интересуют вещественные решения (2.1).

Если характеристическое уравнение (2.2) имеет только вещественные корни, то общим решением уравнения (2.1) является функция (2.6) в случае простых корней или функция (2.9) в общем случае с вещественными константами C_i и C_{ik}.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение (2.2) имеет комплексные корни. Пусть $q = \alpha + i\beta$ — комплексный корень кратности m характеристического уравнения (2.2). Тогда m функций

$$y_k(s) = s^k q^s,\ k = 0, \ldots m-1, \tag{2.10}$$

являются комплексными функциями уравнения (2.1). В силу теоремы 3 прил. 2 комплексно сопряжённое $\bar{q} = \alpha - i\beta$ также является корнем характеристического уравнения (2.2) кратности m. Ему соответствует m функций

$$y_k(s) = s^k \bar{q}^s,\ k = 0, \ldots m-1, \tag{2.11}$$

комплексно сопряжённых к (2.10).

Следующая лемма позволит заменить $2m$ комплексных решений (2.10) и (2.12) на $2m$ вещественных решений.

Лемма. *Функция $y_k(s) = u_k(s) + iv_k(s)$, $u_k(s) = \mathtt{Re}\, y_k(s)$, $v_k(s) = \mathtt{Im}\, y_k(s)$, комплексное решение уравнения* (2.1) *тогда и только тогда, когда функции $u_k(s)$ и $v_k(s)$ — решения уравнения* (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим комплексное число q в тригонометрической форме

$$q = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \rho = |\,q\,|.$$

По теореме Муавра

$$y_k(s) = s^k q^s = s^k \rho^s(\cos s\varphi + i \sin s\varphi),\ k = 0, \dots m - 1.$$

Из леммы следует, что $2m$ функций

$$u_k(s) = s^k \rho^s \cos s\varphi,\ v_k(s) = s^k \rho^s \cos s\varphi,\ k = 0, \dots m - 1, \qquad (2.12)$$

являются вещественными решениями уравнения (2.1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y(s+3) + y(s+2) + y(s+1) + y(s) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$q^3 + q^2 + q + 1 = 0$$

имеет один вещественный корни $q_1 = -1$ и два простых комплексно сопряжённых корня $q_2 = i$, $q_3 = -i$. Поэтому общим комплексным решением является функция

$$y_c(s) = C_1(-1)^s + C_2 i^s + C_3(-i)^s.$$

Для получения вещественного решения запишем корень q_2 в тригонометрической форме:

$$q_2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, комплексно сопряжённым корням q_2 и q_3 соответствуют два вещественных решения

$$\cos\frac{\pi s}{2},\ \sin\frac{\pi s}{2}.$$

Общим вещественным решением будет функция

$$y(s) = C_1(-1)^s + C_2 \cos\frac{\pi s}{2} + C_3 \sin\frac{\pi s}{2}.$$

Пример 2. Решим уравнение 4-го порядка

$$y(s+4) + 4y(s+3) + 8y(s+2) + 8y(s+1) + 4y(s) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$q^4 + 4q^3 + 8q^2 + 8q + 4 = 0$$

имеет два комплексно сопряжённых корня $-1 \pm i$ кратности 2. Общим комплексным решением является функция

$$y_c(s) = (C_{11} + C_{12}s)(-1+i)^s + (C_{21} + C_{22}s)(-1-i)^s.$$

Представим $1+i$ в тригонометрической форме:

$$1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big).$$

Получаем четыре вещественных решения:

$$s^{k-1}2^{s/2}\cos\frac{3\pi s}{4},\ s^{k-1}2^{s/2}\sin\frac{3\pi s}{4},\ k = 1, 2.$$

Общим вещественным решением будет функция

$$y(s) = (C_{11} + C_{12}s)\,2^{s/2}\cos\frac{3\pi s}{4} + (C_{21} + C_{22}s)\,2^{s/2}\sin\frac{3\pi s}{4}.$$

2.3. Неоднородные уравнения

Запишем линейное разностное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y(s+n) + a_{n-1}y(s+n-1) + \ldots + a_0 y(s) = f(s). \tag{2.13}$$

Приведём теоремы [5], позволяющие находить частное решение неоднородного уравнения (2.13) для правой части специального вида.

Теорема 2.1. *Пусть в уравнении* (2.13)

$$f(s) = P_m(s)\,\mu^s, \tag{2.14}$$

где $P_m(s)$ — заданный многочлен степени m с вещественными коэффициентами, а μ — заданное вещественное число.

Если число μ не является корнем характеристического уравнения (2.2), *то для уравнения* (2.13) *существует частное решение*

$$y_{\text{час}}(s) = Q_k(s)\,\mu^s, \tag{2.15}$$

где $Q_k(s)$ — многочлен степени k.

Если μ — корень характеристического уравнения (2.2) *кратности m, то для уравнения* (2.13) *существует частное решение*

$$y_{\text{час}}(s) = s^m Q_k(s)\,\mu^s, \tag{2.16}$$

где $Q_k(s)$ — многочлен степени k.

Указанный в теореме 2.1 многочлен $Q_k(s)$ находят методом неопределённых коэффициентов.

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$y(s+2) + y(s+1) - 2y(s) = 2^s s.$$

Характеристическое уравнение

$$q^2 + q - 2 = 0$$

имеет корни $q_1 = 1$ и $q_2 = -2$. Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{час}}(s) = (As + B)\, 2^s$$

с неопределёнными коэффициентами A и B. Подставляем $y_{\text{час}}(s)$ в уравнение. Имеем

$$(A(s+2)+B)\, 2^{s+2} - 4(A(s+1)+B)\, 2^{s+1} + 3(As+B)\, 2^s = (4As+10A+4B)\, 2^s = 2^s s.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получим два уравнения с неизвестными A и B: $4A = 1$, $10A+4B = 0$. Следовательно, $A = 1/4$, $B = -5/8$. Запишем общее решение:

$$y(s) = C_1 + C_2(-2)^s + (2s-5)\, 2^{s-3}.$$

П р и м е р 2. Решим уравнение

$$y(s+2) - 2y(s+1) + y(s) = 2.$$

Характеристическое уравнение

$$q^2 - 2q + 1 = 0$$

имеет корень $q_1 = 1$ кратности 2. Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{час}}(s) = As^2$$

с неопределённым коэффициентом A. Подставляем $y_{\text{час}}(s)$ в уравнение. Имеем

$$A((s+2)^2 - 2(s+1)^2 + s^2) = 2A.$$

Следовательно, $A = 1$ и общее решение

$$y(s) = C_1 + C_2 s + s^2.$$

Теорема, аналогичная теореме 2.1, справедлива и для комплексных уравнений.

Теорема 2.2. *Пусть в уравнении* (2.13)

$$f(s) = P_m(s)\,\lambda^s, \tag{2.17}$$

где $P_m(s)$ — заданный многочлен степени m с вещественными коэффициентами, а λ — заданное комплексное число.

Если число λ не является корнем характеристического уравнения (2.2), *то для уравнения* (2.13) *существует комплексное частное решение*

$$y_{\text{час}}(s) = Q_k(s)\,\lambda^s, \tag{2.18}$$

где $Q_k(s)$ — многочлен степени k.

Если λ — корень характеристического уравнения (2.2) *кратности m, то для уравнения* (2.13) *существует комплексное частное решение*

$$y_{\text{час}}(s) = s^m Q_k(s)\,\lambda^s, \tag{2.19}$$

где $Q_k(s)$ — многочлен степени k.

Теорема 2.3. *Пусть в уравнении* (2.13)

$$f(s) = |\lambda|^s \big(P_k(s)\cos\alpha s + Q_k(s)\sin\alpha s\big), \tag{2.20}$$

где $P_k(s)$ и $Q_k(s)$ — заданные многочлены степени не больше k с вещественными коэффициентами.

Если число $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + \sin\alpha)$ не является корнем характеристического уравнения (2.2), *то для уравнения* (2.13) *существует частное решение вида*

$$y_{\text{час}}(s) = |\lambda|^s \big(T_k(s)\cos\alpha s + U_k(s)\sin\alpha s\big), \tag{2.21}$$

где $T_k(s)$ и $U_k(s)$ — заданные многочлены степени не больше k с вещественными коэффициентами.

Если $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + \sin\alpha)$ — корень характеристического уравнения (2.2) *кратности m, то для уравнения* (2.13) *существует частное решение*

$$y_{\text{час}}(s) = s^m|\lambda|^s \big(T_k(s)\cos\alpha s + U_k(s)\sin\alpha s\big), \tag{2.22}$$

где $T_k(s)$ и $U_k(s)$ — заданные многочлены степени не больше k с вещественными коэффициентами.

П р и м е р 3. Решим уравнение

$$y(s+2) + y(s) = 2\cos\frac{\pi s}{4}.$$

Характеристическое уравнение

$$q^2 + 1 = 0$$

имеет два простых корня $\pm i$. Согласно теореме 2.3, частное решение ищем в виде

$$y_{\text{час}}(s) = A \sin \frac{\pi s}{4} + B \cos \frac{\pi s}{4}$$

с неопределёнными коэффициентами A и B. Подставляем $y_{\text{час}}(s)$ в уравнение. Получим

$$(B - A) \sin \frac{\pi s}{4} + (A + B) \cos \frac{\pi s}{4} = 2 \cos \frac{\pi s}{4}.$$

Следовательно, $A = B = 1$ и общее решение

$$y(s) = C_1 \sin \frac{\pi s}{2} + C_2 \cos \frac{\pi s}{2} + \sin \frac{\pi s}{4} + \cos \frac{\pi s}{4}.$$

3. Метод прогонки

3.1. Метод прогонки для трёхточечных уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \quad 1 \le i \le N-1, \\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N. \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой системе $N+1$ уравнение с $N+1$ неизвестной: $y_0, \ldots, y_N$.

Запишем (3.1) в матричном виде. Пусть $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_N)^T$ — вектор-столбец неизвестных и $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_N)^T$ — вектор-столбец правых частей. Тогда

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}, \tag{3.2}$$

где A — квадратная $(N+1) \times (N+1)$ матрица,

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_N & c_N \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A трёхдиагональная.

Обозначим $\alpha_1 = b_0/c_0$, $\beta_1 = f_0/c_0$. Из первого уравнения системы (3.1) следует, что

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1.$$

Будем искать решение в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.3}$$

Коэффициенты α_i, β_i, кроме α_1, β_1, неизвестны.

Имеем

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= \alpha_i y_i + \beta_i = \alpha_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) = \\ &= \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i+1} + (\alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i). \end{aligned}$$

Теперь подставим полученное выражение и выражение (3.3) в соответствующее уравнение системы (3.1). Получаем

$$(-a_i\alpha_i\alpha_{i+1} + c_i\alpha_{i+1} - b_i)\, y_{i+1} + (-a_i\alpha_i\beta_{i+1} - a_i\beta_i + c_i\beta_{i+1} - f_i) = 0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{gathered} \alpha_{i+1}(c_i - a_i\alpha_i) - b_i = 0, \\ \beta_{i+1}(c_i - a_i\alpha_i) - a_i\beta_i - f_i = 0. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i}. \tag{3.4}$$

Так как α_1, β_1 известны, то по полученным формулам находим остальные коэффициенты α_i, β_i.

Коэффициенты α_i, β_i называются *прогоночными коэффициентами*, а их поиск по формулам (3.4) называется *прямой прогонкой*.

Рассмотрим последнее уравнение системы (3.1): $a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N$. Так как $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$, то

$$-a_N(\alpha_N y_N + \beta_N) + c_N y_N = f_N.$$

Откуда следует, что

$$y_N = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N}. \tag{3.5}$$

Зная y_N, по формулам (3.3) находят остальные y_i. Сначала находим y_{N-1}, затем y_{N-2} и т. д. Описанный процесс нахождения y_i называется *обратной прогонкой*.

3.2. Устойчивость метода прогонки

В расчётных формулах (3.3) – (3.5) присутствует операция деления, поэтому метод прогонки неприменим при обращении какого-либо знаменателя в нуль. Будем говорить, что метод прогонки *корректен*, если

$$c_i - a_i\alpha_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Рассмотрим формулы (3.3). Предположим, что прогоночные коэффициенты α_i и β_i найдены точно, а при вычислении y_N была допущена погрешность ε_N, т. е.

$$\tilde{y}_N = y_N + \varepsilon_N.$$

Из (3.3) следует, что

$$\tilde{y}_{N-1} = \alpha_N\tilde{y}_N + \beta_N = \alpha_N y_N + \beta_N + \alpha_N\varepsilon_N.$$

Следовательно, $\varepsilon_{N-1} = \alpha_N\varepsilon_N$ и вообще $\varepsilon_i = \alpha_{i+1}\varepsilon_{i+1}$. Таким образом, мы видим, что если все $|\alpha_i| > 1$, то при больших N погрешность может быть очень большой.

Будем говорить, что алгоритм метода прогонки *устойчив*, если

$$|\alpha_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Приведём достаточные условия корректности и устойчивости алгоритма метода прогонки [3].

Теорема. *Пусть коэффициенты системы* (3.1) *удовлетворяют условиям*

$$|b_0| \geq 0,\ |a_N| \geq 0,\ |c_0| > 0,\ |c_N| > 0,\ |a_i| > 0,\ |b_i| > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.6}$$

$$|c_0| \geq |b_0|,\ |c_N| \geq |b_N|, \tag{3.7}$$

причём хотя бы в одном из неравенств (3.6) *или* (3.7) *выполняется строгое неравенство. Тогда для алгоритма метода прогонки имеют место корректность и устойчивость.*

3.3. Реализация метода прогонки на ForTran

Решаем систему

$$\begin{cases} c_0y_0 - b_0y_1 = f_0, \\ -a_iy_{i-1} + c_iy_i - b_iy_{i+1} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ -a_Ny_{N-1} + c_Ny_N = f_N. \end{cases} \tag{3.8}$$

Алгоритм метода прогонки

1. Полагаем
$$\alpha_1 = b_0/c_0, \quad \beta_1 = f_0/c_0. \tag{3.9}$$

2. Находим остальные прогоночные коэффициенты (прямая прогонка):
$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \ \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad 1 \le i \le N-1. \tag{3.10}$$

3. Находим y_N по формуле
$$y_N = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N}. \tag{3.11}$$

4. Находим остальные y_i (обратная прогонка):
$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 0. \tag{3.12}$$

Ниже приведён текст подпрограммы, реализующей алгоритм метода прогонки.

```
Subroutine Progonka(a,b,c,f,y,N)
   real(4) a(N), b(0:N-1), c(0:N), f(0:N)
   real(4) y(0:N)
   real(4) alfa(N), beta(N), tmp
!!! Прямая прогонка
   alfa(1) = b(0)/c(0); beta(1) = f(0)/c(0)
   do j = 1, N-1
       tmp = c(j) - a(j)*alfa(j)
       alfa(j+1) = b(j)/tmp
       beta(j+1) = (f(j) + a(j)*beta(j))/tmp
   end do
!!! Обратная прогонка
   y(N) = (f(N) + a(N)*beta(N))/(c(N) - a(N)*alfa(N))
   do j = N, 1, -1
       y(j-1) = alfa(j)*y(j) + beta(j)
   end do
End Subroutine Progonka
```

3.4. Краевые задачи для ОДУ 2-го порядка

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка
$$-(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b). \tag{3.13}$$

На функции $k(x)$, $q(x)$ обычно накладывают следующие условия:

$$k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Первая краевая задача состоит в нахождении решения дифференциального уравнения (3.13), удовлетворяющего краевым условиям

$$u(a) = \mu_1, \quad u(b) = \mu_2. \tag{3.14}$$

Вторая краевая задача состоит в нахождении решения дифференциального уравнения (3.13), удовлетворяющего краевым условиям

$$k(a)u'(a) = \mu_1, \quad -k(b)u'(b) = \mu_2. \tag{3.15}$$

Третья краевая задача состоит в нахождении решения дифференциального уравнения (3.13), удовлетворяющего краевым условиям

$$k(a)u'(a) - \sigma_1 u(a) = -\mu_1, \quad -k(b)u'(b) - \sigma_1 u(b) = -\mu_2. \tag{3.16}$$

Константы должны удовлетворять условиям $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$, причём $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0$ при $q(x) \equiv 0$. Кроме того, возможны любые комбинации краевых условий.

На отрезке $[a, b]$ рассмотрим равномерную сетку ω, т. е. множество точек

$$\omega = \{x_i = a + ih : \ i = 0, 1, \ldots, N\}, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Аппроксимируем ОДУ (3.13) во внутренних узлах сетки ω разностным уравнением. Обозначим $u_i = u(x_i)$, $u_i' = u'(x_i)$, $u_i'' = u''(x_i)$, $u_i''' = u'''(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu(x) = (k(x)u'(x))'. \tag{3.17}$$

Заменим выражение (3.17) разностным отношением

$$(L_h u)_i = \frac{1}{h}\left(p_{i+1}\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right), \tag{3.18}$$

где p_i — сеточная функция.

Найдём условия, которым должна удовлетворять функция p_i для того, чтобы отношение $L_h u_i$ аппроксимировало выражение Lu в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, со вторым порядком точности, т. е.

$$(L_h u)_i - Lu(x_i) = O(h^2). \tag{3.19}$$

Из формулы Тейлора следует

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}\,u_i'' + \frac{h^3}{6}\,u_i''' + O(h^4),$$
$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}\,u_i'' - \frac{h^3}{6}\,u_i''' + O(h^4).$$

Поэтому

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u_i' + \frac{h}{2}\,u_i'' + \frac{h^2}{6}\,u_i''' + O(h^3),$$
$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u_i' - \frac{h}{2}\,u_i'' + \frac{h^2}{6}\,u_i''' + O(h^3).$$

Подставляя полученные формулы в (3.18), получим

$$L_h u = \frac{p_{i+1} - p_i}{h}\,u_i' + \frac{p_{i+1} + p_i}{2}\,u_i'' + \frac{h(p_{i+1} - p_i)}{6}\,u_i''' + O(h^2).$$

С другой стороны,

$$Lu(x) = (k(x)u'(x))' = k(x)u''(x) + k'(x)u'(x).$$

Следовательно,

$$L_h u - Lu(x_i) = \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h} - k_i'\right) u_i' + \left(\frac{p_{i+1} + p_i}{2} - k_i\right) u_i'' + \\ + \frac{h(p_{i+1} - p_i)}{6}\,u_i''' + O(h^2). \qquad (3.20)$$

Из полученного соотношения видно, что (3.19) справедливо, если выполнены условия

$$\frac{p_{i+1} - p_i}{h} = k_i' + O(h^2), \quad \frac{p_{i+1} + p_i}{2} = k_i + O(h^2). \qquad (3.21)$$

Условия (3.21) являются достаточными условиями второго порядка аппроксимации. При их выводе предполагалось, что функция $u(x)$ имеет непрерывную четвертую производную и $k(x)$ — дифференцируемая функция. Нетрудно показать, что условиям (3.21) удовлетворяют, например, следующие функции:

$$p_i = \frac{k(x_{i-1}) + k(x_i)}{2}, \quad p_i = k(x_i - h/2), \quad p_i = \sqrt{k(x_{i-1})k(x_i)}. \qquad (3.22)$$

В результате ОДУ 2-го порядка (3.13) во внутренних точках равномерной сетки ω было заменено на разностное уравнение

$$-(L_h u)_i + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

или

$$-p_iu_{i-1} + (p_i + p_{i+1} + h^2q_i)u_i - p_{i+1}u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3.23}$$

с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$.

Рассмотрим краевые условия. Краевое условие (3.14) удовлетворяется точно:

$$u_0 = \mu_1, \quad u_N = \mu_2. \tag{3.24}$$

В случае краевых условий второго и третьего рода (3.15), (3.16) необходимо выразить производную $u'(a) = u'_0$ через u_0, u_1 и производную $u'(b) = u'_N$ через u_{N-1}, u_N.

Рассмотрим левое краевое условие. По формуле Тейлора

$$u_{a+h} = u(a) + hu'(a) + \frac{h^2}{2}u''(a) + O(h^3)$$

или

$$u_1 = u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 + O(h^3). \tag{3.25}$$

Значение $u''(a) = u''_0$ выразим из уравнения (3.13):

$$-k_0u''_0 - k'_0u'_0 + q_0u_0 = f_0.$$

Откуда

$$u''_0 = \frac{q_0u_0 - k'_0u'_0 - f_0}{k_0}. \tag{3.26}$$

Подставим полученное значение u''_0 в (3.25) и выразим оттуда u'_0 через u_0, u_1.

Аналогично поступаем и с правым краем. Вместо выражения (3.25) надо использовать формулу

$$u_{N-1} = u_N - hu'_N + \frac{h^2}{2}u''_N + O(h^3), \tag{3.27}$$

а вместо (3.26) — формулу

$$u''_N = \frac{q_Nu_N - k'_Nu'_N - f_N}{k_N}. \tag{3.28}$$

Заметим, что формулы (3.26) и (3.28) можно использовать лишь при $k_0 = k(0) \neq 0$ и $k_N = k(b) \neq 0$. Эти условия выполняются автоматически при $k(x) \geq c_1 > 0$.

Таким образом, краевые задачи (3.14) – (3.16) сведены к системе уравнений (3.1). Порядок аппроксимации при этом $O(h^2)$.

3.5. Пример ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)\, u'' + 2xu' + x = 0. \tag{3.29}$$

Найдём общее решение (3.29). Имеем $[(1 + x^2)\, u']' = -x$.

Следовательно, $(1+x^2)\, u' = -x^2/2+A$, где A — постоянная интегрирования. Таким образом,

$$u' = -\frac{1}{2} + \frac{A}{(1 + x^2)}.$$

Интегрируя, получаем общее решение уравнения (3.29):

$$u(x) = B - \frac{x}{2} + A \operatorname{arctg} x, \tag{3.30}$$

где A, B — произвольные константы.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение (3.29) на отрезке $[0, 1]$. Справедливы равенства

$$u(0) = B - \frac{1}{2},\ u'(0) = A - \frac{1}{2},\ u(1) = B - \frac{1}{2} + \frac{\pi A}{4},\ u'(1) = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}. \tag{3.31}$$

Используя (3.31), нетрудно проверить, что решением уравнения (3.29), удовлетворяющего краевым условиям

$$u(0) = \frac{1}{2},\ u(0) = \pi, \tag{3.32}$$

является функция

$$u_1(x) = \frac{1}{2}\,(1 - x) + 4 \operatorname{arctg} x. \tag{3.33}$$

Аналогично функция

$$u_2(x) = \frac{1}{2}\,(1 - x) + \operatorname{arctg} x \tag{3.34}$$

удовлетворяет уравнению (3.29) и краевым условиям

$$u'(0) = u(0),\ u'(1) = 0. \tag{3.35}$$

Краевые условия (3.32) относятся к краевым условиям 1-го рода, краевые условия (3.35) — 3-го рода.

Будем рассматривать уравнение (3.29) на отрезке $[0, 1]$. Зададим равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = ih : i = 0, \dots, N\}$ и обозначим $u_i = u(x_i)$. Во внутренних узлах сетки, в соответствии с (3.23), получаем

$$-p_i u_{i-1} + (p_i + p_{i+1})u_i - p_{i+1}u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{3.36}$$

В качестве p_i возьмём второе из выражений (3.22):

$$p_i = k(x_i - h/2), \quad i = 1, \dots, N.$$

Погрешность аппроксимации равна $O(h^2)$.

Краевые условия (3.32) выполняются точно:

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_N = \pi. \tag{3.37}$$

Рассмотрим краевые условия (3.35). Из формулы Тейлора

$$u_1 = u(h) = u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O(h^3).$$

Из уравнения (3.29) следует, что $u''(0) = 0$. Поэтому, в силу условия $u'(0) = u(0)$,

$$u_1 = (1 + h)u_0. \tag{3.38}$$

При этом ошибка составляет $O(h^3)$.

На другом конце $u'(1) = 0$, т. е. $u'_N = 0$. По формуле Тейлора

$$u(1 - h) = u(1) - hu'(1) + \frac{h^2}{2}u''(1) + O(h^3).$$

Из уравнения (3.29) следует, что $u''(1) = -1/2$. Поэтому

$$u_{N-1} = u_N - h^2/4 \tag{3.39}$$

с точностью до $O(h^3)$.

3.6. Программа на ForTran

Мы свели уравнение (3.29) с краевыми условиями (3.32) и (3.35) к системам разностных уравнений. Система

$$\begin{cases} -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \quad 1 \le i \le N-1, \\ -y_0 = 1/2, \quad y_N = \pi \end{cases} \tag{3.40}$$

соответствует условиям (3.32). Система

$$\begin{cases} -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \quad 1 \le i \le N-1, \\ \; y_1 - (1+h) y_0 = 0, \quad y_N - y_{N-1} = h^2/4, \end{cases} \tag{3.41}$$

соответствует условиям (3.35).

Из (3.36) следует, что коэффициенты a_i, b_i, c_i равны

$$a_i = p_i, \; b_i = p_{i+1}, \; c_i = p_i + p_{i+1}, \quad 1 \le i \le N-1. \tag{3.42}$$

Необходимо задать a_N, b_0, c_0, c_N, f_0, f_N. Для системы (3.40) положим

$$\begin{gathered} b_0 = 0, \; c_0 = 2, \; f_0 = 1, \\ a_N = 0, \; c_N = 4, \; f_N = 4\pi. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Для системы (3.41) положим

$$\begin{gathered} b_0 = \frac{2}{1+h}, \; c_0 = 2, \; f_0 = 0, \\ a_N = 4, \; c_N = 4, \; f_N = h^2. \end{gathered} \tag{3.44}$$

Приводим текст программы.

```
Program Test_ODU
   integer, parameter :: N = 10
   real(4) a(N), b(0:N-1), c(0:N), f(0:N)
   real(4) y1(0:N), y3(0:N)
   real(4) p1, p2, h, x
   h = 1./N
   do i=1,N-1
      x = i*h
      p1 = g(x-h/2); p2 = g(x+h/2)
      a(i) = p1
      b(i) = p2
      c(i) = p1 + p2
      f(i) = x*h*h
   end do
   c(0) = 2.; c(N) = 4.
   !!!   Uslovija 1 roda
   b(0) = 0.;  a(N) = 0.;
   f(0) = 1.;  f(N) = 4*3.141592654
   call Progonka(a,b,c,f,y1,N)
   !!!   Uslovija 3 roda
```

```
   b(0) = 2./(1+h); a(N) = 4.;
   f(0) = 0.; f(N) = h*h
   call Progonka(a,b,c,f,y3,N)
   print*, '     Uslovija 1 roda              Uslovija 3 roda'
   print*, '-----------------------------------------------------'
   do i = 0, N
     write(*,11) y1(i), f1(i*h), y3(i), f3(i*h)
   end do
11 format(2x,f10.5,2x,f10.5,5x,'*',2x,f10.5,2x,f10.5)
    END

Function g(x)
   g = 1 + x*x
End Function

Function f1(x)
   f1 = (1-x)/2 + 4*atan(x)
End Function

Function f3(x)
   f3 = (1-x)/2 + atan(x)
End Function
```

После компиляции и запуска программы должны получиться следующие результаты.

```
       Uslovija 1 roda              Uslovija 3 roda
 ------------------------------------------------------
     0.50000     0.50000     *     0.49632     0.50000
     0.84890     0.84867     *     0.54596     0.54967
     1.18999     1.18958     *     0.59364     0.59740
     1.51636     1.51583     *     0.63765     0.64146
     1.82262     1.82203     *     0.67663     0.68051
     2.10517     2.10459     *     0.70969     0.71365
     2.36219     2.36168     *     0.73637     0.74042
     2.59331     2.59290     *     0.75659     0.76073
     2.79924     2.79896     *     0.77051     0.77474
     2.98140     2.98126     *     0.77850     0.78282
     3.14159     3.14159     *     0.78100     0.78540
```

Приложения

Приложение 1

Формулы Крамера

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{П.1.1}$$

Обозначим через Δ определитель матрицы коэффициентов системы (П.1.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть Δ_j — определитель, получаемый из определителя Δ, если в нём заменить числа j-го столбца, соответственно, на числа $b_1, \ldots, b_n$:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если определитель системы* (П.1.1) *не равен нулю, то данная система имеет единственное решение для любых* $b_1, \ldots, b_n$, *вычисляемое по формулам Крамера*:

$$x_j = \Delta_j/\Delta, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{П.1.2}$$

Приложение 2

Корни многочленов

Функция вида

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{П.2.1}$$

называется *многочленом*. Числа $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ называются *коэффициентами* многочлена $P(z)$. Если $a_n \neq 0$, то многочлен (П.2.1) имеет степень n, $\deg P = n$.

Число α называется *корнем* многочлена $P(z)$, если

$$P(\alpha) = 0.$$

Корень α называется корнем *кратности* m, $m \in \mathbb{N}$, если

$$P(z) = (z - \alpha)^m Q(z),$$

где $Q(z)$ — многочлен степени $(n - m)$ и $Q(\alpha) \neq 0$. При $m > 1$ корень α называется *кратным*, при $m = 1$ — *простым*.

Теорема 1. *Многочлен* (П.2.1) *степени n имеет ровно n корней с учётом их кратности, т. е. каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ все различные корни многочлена* (П.2.1) *степени n с кратностями $n_1, \ldots, n_m$. Тогда*

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)^{n_1} \ldots (z - \alpha_m)^{n_m}, \tag{П.2.2}$$

причём

$$n_1 + \ldots + n_m = n. \tag{П.2.3}$$

Многочлен с вещественными коэффициентами называется *вещественным* многочленом.

Теорема 3. *Если число α является корнем вещественного многочлена $P(z)$ кратности m, то и комплексно сопряжённое $\bar{\alpha}$ также является корнем $P(z)$ той же кратности m.*

Приложение 3
Определитель Вандермонда

Определителем Вандермонда называется определитель

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Определитель Вандермонда равен*

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Следствие. *Определитель Вандермонда V_n равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$ нет одинаковых.*

Список литературы

1. **Бугров С.Я., Никольский С.М.** Высшая математика. Т. 1: Учеб. для вузов. — М.: Дрофа, 2004.

2. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.

3. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

4. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные метолы. — М.: Наука, 1989.

5. **Романко В.К.** Разностные уравнения: Учеб. пособие. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.

6. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики: Учеб. — М.: Изд-во Моск. ун-та; Изд-во «Наука», 2004.

7. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики: Учеб. — М.: Наука, 1988.

8. **Кудашов В.Н.** Введение в численные методы: Пособие. — СПб.: СПбГУНиПТ, 2011.

Содержание

Кудашов Вячеслав Николаевич

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
В.Н. Кудашов

Работа выполнена в издательской системе LATEX

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 22.10.2015. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,33. Печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,25
Тираж 50 экз. Заказ № С 69

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9