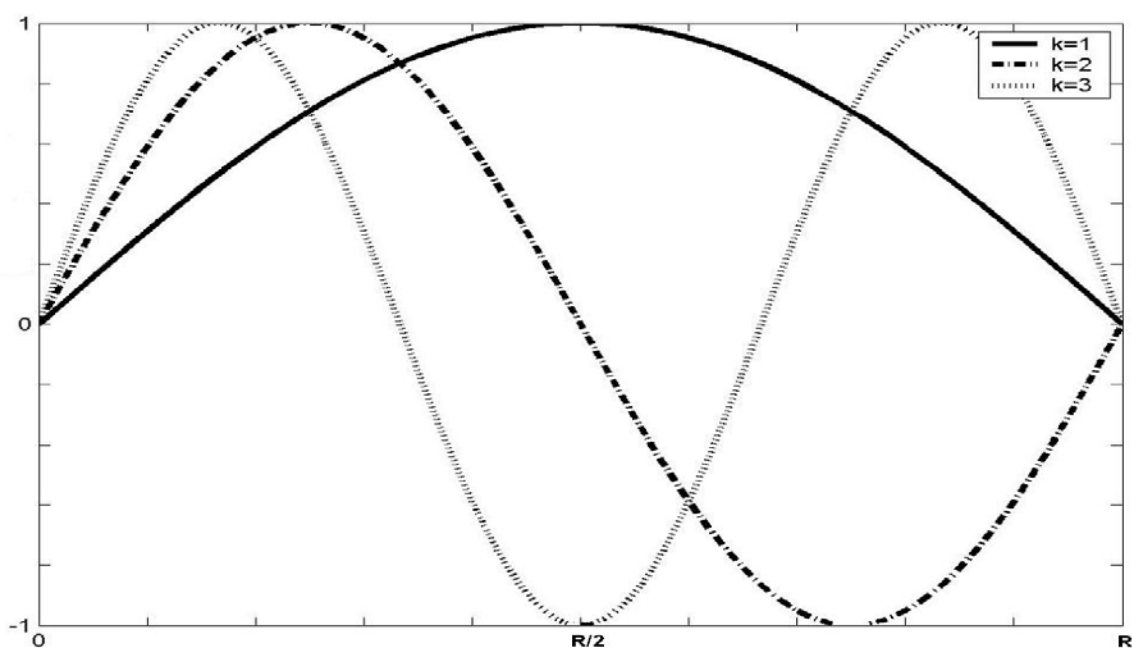


В.И. Егоров

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.И. Егоров

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Учебное пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2015

Егоров В.И. Аналитические методы решения задач теплопроводности. Учебное пособие. – Университет ИТМО, 2015. – 38 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Специальные разделы физики» Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для бакалавров по направлению подготовки 16.03.01– «Техническая физика» для бакалавров по направлению подготовки 14.03.01 – «Ядерная энергетика и теплофизика». В настоящее издание вошли лекции, посвященные элементам математической физики для процессов теплопроводности.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета лазерной и световой инженерии 10 ноября 2015 года, протокол №11.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО - становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2015
© Егоров В.И., 2015

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....	5
2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	9
3. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.....	10
4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ. ФОРМУЛА Д'АЛАМБЕРА.....	13
5. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ФУРЬЕ).....	17
6. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ...	22
7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ.....	25
8. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.....	27
9. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИИ И ЧИСЕЛ.....	28
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Математическая физика - теория математических моделей физических явлений. Методы математической физики начали интенсивно разрабатываться в трудах И. Ньютона по созданию основ классической механики, всемирного тяготения, теории света. Дальнейшее развитие методов математической физики и их успешное применение при изучении математических моделей различных физических явлений связаны с именами Я. Лагранжа, Л. Эйлера, Н. Фурье, К. Гаусса, Б. Римана. Большой вклад в развитие методов математической физики внесли М.В. Остроградский, А.М. Ляпунов и В.А. Стеклов.

Начиная со второй половины XIX в., методы математической физики применялись для изучения математических моделей физических явлений, связанных с различными физическими ПОЛЯМИ и волновыми процессами в электродинамике, акустике, теории упругости, гидро- и аэродинамике и ряде других направлений исследований физических явлений в сплошных средах. Математические модели подобных явлений наиболее часто описываются при помощи дифференциальных уравнений в частных производных.

Помимо дифференциальных уравнений математической физики при описании математических моделей используются интегральные и интегродифференциальные уравнения, вариационные и теоретико-вероятностные методы, теория потенциала, методы теории функций комплексного переменного. В связи с бурным развитием вычислительной математики особое значение для исследования математических моделей физики приобретают прямые численные методы, основанные на применении ЭВМ.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Постановка задач математической физики заключается в построении математических моделей, описывающих основные закономерности изучаемых физических явлений, и выводе уравнений (дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных или алгебраических), которым удовлетворяют величины, характеризующие физический процесс. При этом исходят из основных физических законов, учитывающих только наиболее существенные черты явления, отвлекаясь от его второстепенных характеристик. Такими законами являются обычно законы Ньютона и законы сохранения (например, количества движения, энергии, числа частиц и т.д.).

В качестве примера рассмотрим вывод уравнения колебаний струны. Струной называется упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу, но оказывающая сопротивление растяжению. Нитью иногда можно считать стержень, диаметр которого мал по сравнению с длиной. Отсутствие сопротивления изгибу математически выражается в том, что напряжения T , возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю (рис. 1).

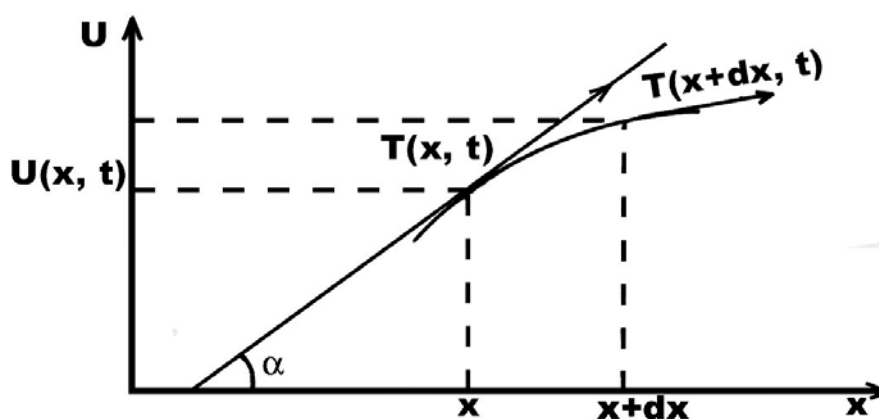


Рис. 1

Пусть в плоскости (x, u) струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x . Величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t обозначим через $u(x, t)$, так что $u(x, t)$ есть уравнение струны в момент времени t . Ограничиваясь рассмотрением лишь малых колебаний струны, будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x.$$

Любой участок струны (a, b) после отклонения от положения равновесия в рамках принятого приближения не изменит своей длины

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + u_x^2} dx \cong b - a$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения $|T(x,t)|$ будет описываться постоянной, не зависящей от x и t : $|T(x,t)| = T_0$. Обозначим через $F(x,t)$ плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленная перпендикулярно оси x . Наконец, пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны в точке x следовательно, $\rho(x)dx$ — масса элемента $(x, x+dx)$ струны.

Составим теперь уравнение движения струны. На элемент $(x, x+dx)$ действует сила натяжения $T(x+dx,t) - T(x,t)$ и внешняя сила, сумма которых (согласно законам Ньютона) должна быть равна произведению массы этого элемента на ускорение. Проектируя это векторное равенство на ось u , получим

$$T_0 \sin \alpha \Big|_{x+dx} - T_0 \sin \alpha \Big|_x + F(x,t)dx = \rho(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Для малых значений угла α справедливо приближенное равенство $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, поэтому из формулы (1) имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{dx} \left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] + F(x,t), \quad (2)$$

т.е. $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$ (уравнение малых поперечных колебаний струны).

Если плотность постоянна $\rho(x) = \rho$, то уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (3)$$

где a^2 — квадрат скорости распространения звука, $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$;

f - приведенная сила, $f = \frac{F}{\rho}$.

Уравнение (3) называется однородным волновым уравнением, оно впервые было получено Ж. Д'Аламбером в 1747 г.

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний струны необходимо дополнительно задать величину

смещения u и скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ струны в начальный момент времени (начальные условия) и режим на концах струны (граничные условия).

Примеры граничных условий:

а) $u|_{x=x_0} = 0$, если конец струны x_0 закреплён;

б) $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0} = 0$, если конец x_0 свободен, в силу равенства $\overline{T}(x_0, t) = 0$.

Уравнение, подобное уравнению (2), описывает также малые поперечные колебания упругого стержня

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), \quad (4)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня;

$E(x)$ — модуль Юнга в точке x .

Аналогично выводится уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y)$$

Мембраной называется натянутая плоская плёнка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению. Мембраной можно считать плоскую пластину, толщина которой мала по сравнению с двумя другими измерениями.

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется двухмерным волновым уравнением.

Трёхмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f \quad (6)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие им потенциалы.

Процессы распространения теплоты в среде описываются следующим уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + f, \quad (7)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

a — коэффициент температуропроводности;

f — функция, характеризующая плотность источников теплоты.

Вывод уравнения (7) приведен в методических указаниях [1].

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распределения теплоты необходимо задать начальное распределение температуры u в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие).

Примеры граничных условий:

а) если на границе S поддерживается заданное распределение температур, то

$$u|_S = u_0; \quad (8)$$

б) если на S поддерживается заданный поток теплоты u_1 , то

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1, \quad (9)$$

где λ — коэффициент теплопроводности;

$\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по нормали к границе;

в) если на S происходит теплообмен согласно закону Ньютона, то

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(u - u_0)|_S = 0, \quad (10)$$

где α — коэффициент теплообмена;

u_0 — температура окружающей среды.

Для стационарных (независящих от времени) процессов $u(x,t)=u(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и при отсутствии внешних сил $F(x,T)=0$ волновое уравнение (6) принимает вид

$$\Delta u = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется уравнением Лапласа.

В курсе квантовой механики [2] выводится уравнение Шредингера, описывающее движение квантовой частицы массы m во внешнем силовом поле с потенциалом $U(x)$. Пусть $\psi(x,t)$ — волновая функция этой частицы, следовательно, $|\psi(x,t)|^2 dx$ есть вероятность того, что частица будет находиться в окрестности $d(x)$ точки x в момент времени t ; здесь dx — объем элемента $d(x)$. Тогда функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi, \quad (12)$$

где \hbar — постоянная планка; $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Рассматриваемые уравнения (волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных, общий вид которых

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x) \quad (13)$$

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для описания процессов различной физической природы, но имеющих общие характерные черты, применимы одни и те же математические модели. Например, математические задачи для уравнения (3), полученного первоначально для описания свободных колебаний однородной среды, применимы для описания различных волновых процессов в акустике, гидродинамике и других областях физики. Аналогично уравнение (11), которое было получено П. Лапласом в связи с построением теории тяготения, в дальнейшем нашло применение при решении многих задач электростатики, теории упругости, установившегося движения идеальной жидкости и т.д. Каждой математической модели физики соответствуют определенные физические процессы.

Прежде чем сформулировать математические постановки различных физических задач, сводящихся к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, необходимо классифицировать эти уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка для двух независимых переменных

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (14)$$

с непрерывными коэффициентами: $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$.

Сопоставим уравнению (14) квадратное уравнение

$$A(x, y) \cdot z^2 + B(x, y) \cdot z + C(x, y) = 0 \quad (15)$$

Свойства уравнения (15) зависят от знака дискриминанта $D = B^2 - 4AC$. Если $D > 0$, то уравнение (15) имеет два различных действительных корня $z_1 \neq z_2$, а уравнение (14) называется в этом случае уравнением гиперболического типа. Если $D = 0$, то уравнение (15) имеет один корень, а уравнение (14) является уравнением параболического типа. При $D < 0$ или комплексном D действительных корней у уравнения (15) нет, а уравнение (14) называется уравнением эллиптического типа.

Пример. Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ — эллиптического типа, волновое уравнение $u_{tt} = a^2 \Delta u$ — гиперболического типа и уравнение теплопроводности $u_t = a \Delta u$ — параболического типа.

Приведенная классификация зависит от точки (x, y) , так как коэффициенты A и B зависят от x и y . Например, уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

при $y < 0$ — гиперболического типа, при $y > 0$, а при $y = 0$ — параболического типа.

3. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Как отмечалось в п. 2, чтобы полностью описать, тот или иной физический процесс, необходимо (кроме самого уравнения, описывающего этот процесс) задать начальное состояние этого процесса (начальные условия) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (граничные условия). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Действительно,

даже для обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка общее решение зависит от произвольных постоянных. Для уравнений же в частных производных решение, вообще говоря, зависит от произвольных функций. Например, общее решение уравнения $u_{xy} = 0$ имеет вид $u(x, y) = f(x) + g(y)$, где f и g — произвольные дифференцируемые функции. Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются краевые условия (начальные и граничные). Соответствующая задача называется краевой задачей. Различают три типа краевых задач для дифференциальных уравнений:

а) задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область G задания уравнения совпадает со всем пространством R^n , граничные условия отсутствуют;

б) краевая задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе S области G , начальные условия, естественно, отсутствуют;

в) смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные и граничные условия.

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач.

Задача Коши. Для уравнения колебаний (6) гиперболического типа задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $U(x, y, z, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

и при $t=0$ начальным условиям:

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z); \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x, y, z). \quad (16)$$

Функции $U_0(x, y, z)$, $U_1(x, y, z)$ считаются известными и непрерывно дифференцируемыми.

Для уравнения теплопроводности (7) параболического типа задача Коши ставится так; найти функцию $U(x, y, z, t)$ удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$u_t = a \Delta u$$

и при $t > 0$ начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z). \quad (17)$$

Функция $U_0(x, y, z)$ считается непрерывной.

Краевая задача для уравнений эллиптического типа состоит в нахождении, функции $U(x,y,z)$, удовлетворяющей в области G уравнению (11) и граничному условию на границе S вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v, \quad (18)$$

где α, β, v заданные непрерывные функции на границе S .

Выделяют следующие типы граничных условий (18):

- Граничные условия первого рода ($\alpha=1, \beta=0$)

$$u \Big|_S = u_0. \quad (19)$$

- Граничные условия второго рода ($\alpha=0, \beta=1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1. \quad (20)$$

Граничные условия третьего рода ($\beta=1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \Big|_S = u_2. \quad (21)$$

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами первого, второго и третьего рода.

Для уравнения Лапласа (11) краевая задача первого рода

$$\Delta u = f, \quad u \Big|_S = u_0 \quad (22)$$

называется задачей Дирихле;

краевая задача второго рода

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1$$

— задачей Неймана.

Смешанная задача. Для уравнения колебаний (6) гиперболического типа смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $U(x,y,z,t)$ удовлетворяющую уравнению (13) и начальным условиям (7) в области G при $t=0$, граничному условию (18) при $t>0$ на границе S . При этом необходимо условие согласованности в начальный момент времени $t=0$ на границе S

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v \Big|_{t=0}.$$

Аналогично для уравнения теплопроводности (7) параболического типа смешанная задача ставится так: найти функцию $U(x,y,z,t)$, удовлетворяющую уравнению (7), начальному условию (17) и граничному условию (18).

Поскольку задачи математической физики описывают реальные физические процессы, то математическая постановка этих задач должна удовлетворять естественным требованиям; решение должно существовать, быть единственным и непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, коэффициентов уравнения, свободного члена и т.д.).

Непрерывная зависимость решения от данных задачи означает, что при малых изменениях данных задачи решение изменяется мало. Требование непрерывной зависимости решения обуславливается тем, что данные физической задачи, как правило, определяются из эксперимента приближенно, поэтому нужно быть уверенным, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям, называется корректно поставленной. Нахождение корректных постановок задач математической физики и методов их решений (точных или приближенных) и составляет основное содержание математической физики.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ. ФОРМУЛА Д'АЛАМБЕРА

Задача о колебаниях бесконечной струны состоит в нахождении функции $U(x,t)$, непрерывной в области $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ и удовлетворяющей уравнению

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \tag{23}$$

а также начальным условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{24}$$

Произведем в уравнении (23) замену независимых переменных по формулам, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между точками (ξ, η) , (x, y) соответствующих областей. Тогда по формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение (23) и объединяя члены с одинаковыми производными, получим преобразованное уравнение

$$\begin{aligned} & \left[a^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \left[a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left[a^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \\ & + \left(a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (26)$$

Для упрощения уравнения (26) выберем точки ξ и η такими, что коэффициенты при вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ обращаются в нуль:

$$a^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2, \quad a^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2.$$

Разрешим эти уравнения относительно $\frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial \eta}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial \eta}{\partial t} = \pm \frac{1}{a}. \quad (27)$$

На линиях уровня функций $\xi(x, t) = c_1$, $\eta(x, t) = c_2$, по правилу дифференцирования неявной функции $\frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial t}{\partial x}$ уравнения в частных производных (27) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{a}. \quad (28)$$

Уравнения (28) называются дифференциальными уравнениями характеристик. Их общие интегралы $x - at = c_1$, $x + at = c_2$ образуют два семейства кривых, называемых характеристиками уравнения (23).

В соответствии с получениями формулами для новых независимых переменных:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

уравнение (26) принимает очень простой вид

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{29}$$

Последовательно интегрируя уравнение (29) по ξ и η , получаем

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + F(\eta) = \Phi(x - at) + F(x + at), \tag{30}$$

где $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ — произвольные функции.

В начальный момент времени $t=0$ функция $u(x,0) = \Phi(x) + F(x)$, а ее производная $u_t(x,0) = -a\Phi'(x) + aF'(x)$. Среди решений вида (30) найдем такое, которое удовлетворяет начальным условиям (24). Для этого необходимо найти Φ и F из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) = \Phi(x) + F(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = -a\Phi'(x) + aF'(x). \end{cases}$$

Интегрируя последнее тождество, получим два уравнения для определения функций Φ и F :

$$\begin{aligned} \Phi(x) + F(x) &= \varphi(x), \\ -\Phi(x) + F(x) &= \frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + c, \end{aligned}$$

из которых находим:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz + \frac{c}{2}, \\ \Phi(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти функции в формулу (30), получаем формулу Д'Аламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz \quad (31)$$

Функцию $\Phi(x-at)$ в физике называют распространяющейся волной. Профили отклонений, определяемые этой функцией в различные моменты времени t , изображены на рис.2. Если в начальный момент времени $t=0$ максимум функции $\Phi(x)$ находился в точке $x=0$, то в момент времени t максимум функции $\Phi(x-at)$ будет находиться в точке $x=at$. Аналогичные рассуждения применимы и для любой другой точки профиля $\Phi(x)$.

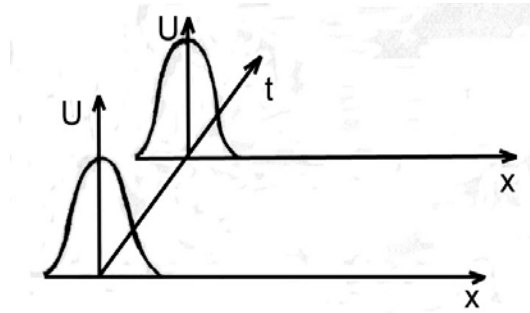


Рис. 2.

Таким образом, функция $\Phi(x-at)$ представляет собой неизменный профиль $\Phi(x)$, перемещающийся вправо со скоростью a (распространяющаяся волна). Функция $F(x+at)$ описывает волну, распространяющуюся влево со скоростью a .

Пусть функция $\varphi(x)$ отлична от нуля только в промежутке $[x_1, x_2]$, а $\psi(x) = 0$. Характеристики $x \pm at = x_1$, $x \pm at = x_2$ представляют собой передний и задний фронты волн, распространяющихся вправо и влево. Эти линии разбивают плоскость (x, t) на области I-VI (рис. 3).

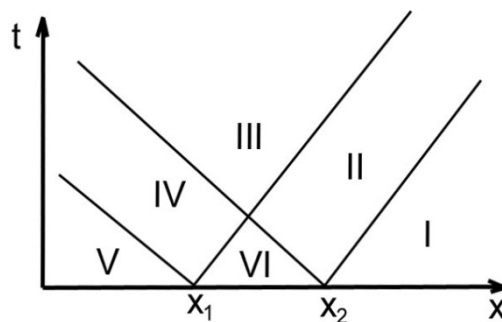


Рис. 3.

Области I и V состоят из точек x, t , которые находятся впереди волн, бегущих вправо (область I) и влево (область V). В области VI имеются обе волны, в области II — волна, распространяющаяся вправо, в области IV — волна, распространяющаяся влево.

В качестве примера рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника. Эта форма получится, если оттянуть струну в середине отрезка (x_1, x_2) , придерживая ее в точках x_1 и x_2 . На рис. 4 изображены последовательные положения этой струны через моменты времени

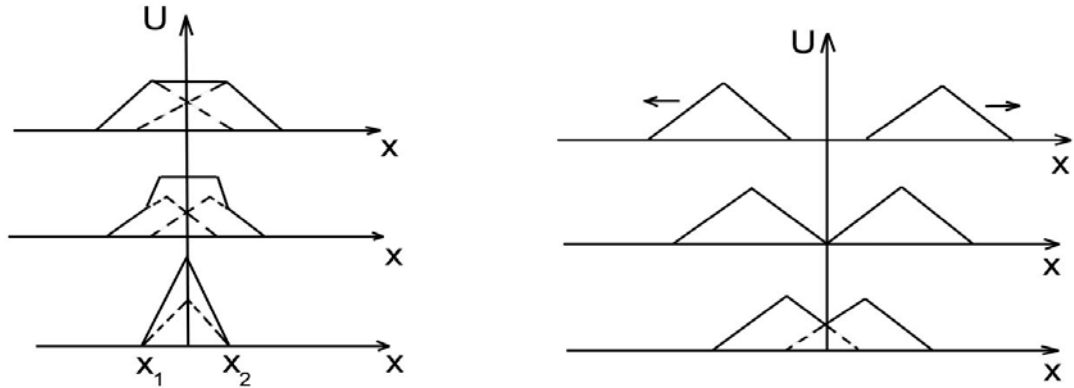


Рис. 4

Списанный выше метод построения решения задачи Коши называется методом характеристик или методом бегущих волн. Он применим также при решении задачи Коши для двух- и трехмерного волнового уравнения, а также смешанной задачи для полупрямой с граничными условиями первого и второго рода.

5. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ФУРЬЕ)

Типичными задачами, которые решаются методом разделения переменных, являются смешанные задачи для уравнений гиперболического и параболического типов. Суть метода лучше всего можно понять на простейшей из них — однородной краевой задаче для волнового уравнения.

Пусть требуется найти функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую уравнению колебаний

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (32)$$

граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (33)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (34)$$

Задача (32)-(34) возникает при описании колебаний струны длиной l с закрепленными концами.

Уравнение (32) и граничные условия (33) линейные и однородные. Следовательно, если u_1 и u_2 есть решения уравнения (32), удовлетворяющие условиям (33), то и функция

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

где c_1 и c_2 — константы, будет также решением уравнения (32), удовлетворяющим условию (33).

Попробуем с помощью всех линейно независимых частных решений описанного типа удовлетворить и начальным данным. Для этого будем искать частные решения уравнения (32), являющиеся произведением двух функций, одна из которых зависит только от координаты x , а вторая — только от времени t

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (35)$$

Подставляя функцию $X \cdot T$ в уравнение (32) и деля обе части уравнения на $a^2 X T$, получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \quad (36)$$

В равенстве (36) слева стоит функция только x , а справа — только t . Это равенство может быть тождеством тогда и только тогда, когда обе дроби X''/X и $T''/a^2 T$ не зависят ни от x , ни от t , т.е. равны одной и той же константе $-\lambda$:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda.$$

Таким образом, должны выполняться тождества:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0 \quad (37)$$

Общие решения дифференциальных уравнений (37) имеют вид:

$$X = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad T = D \sin \sqrt{\lambda} a t + C \cos \sqrt{\lambda} a t. \quad (38)$$

На этом этапе вычислений найдены функции, удовлетворяющие уравнению (32). Найдем коэффициенты A и B из граничного условия (33). Из

условия на левом конце находим $A=0$. Следовательно, $X(x) = B \sin \sqrt{\lambda}x$ и $B \neq 0$ (если $B=0$ то $X=0$, а такое решение описывает отсутствие колебаний). Из условия на правом конце находим $B \sin \sqrt{\lambda}l = 0$. Отсюда $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$, следовательно, $\sqrt{\lambda}l = \pi n$ и

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n=1, 2, 3\dots).$$

Таким образом, частными решениями уравнения (32), удовлетворяющими только граничным условиям (33), являются функции вида

$$u_n(x, t) = \left(C_n \cos \frac{\pi n}{l} at + D_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (39)$$

Движения, описываемые такими функциями, называются собственными колебаниями или стоячими волнами: $u_1(x, t)$ — основной тон, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, ... — обертоны. Числа λ_1 , λ_2 , ... называются собственными значениями, а $\sqrt{\lambda_1}a$, $\sqrt{\lambda_2}a$ — частотами собственных колебаний.

Частоты собственных колебаний не зависят от начальных условий, т.е. не зависят от способа возбуждения струны. Они характеризуют свойства самой колеблющейся системы и определяются материальными постоянными системы (например, скоростью звука в среде a), геометрическими факторами и режимом на границе.

В силу линейности и однородности уравнения (32) сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{\pi n}{l} at + D_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (40)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (33). Теперь осталось подобрать коэффициенты C_n и D_n , таким образом, чтобы полученное решение (40) удовлетворяло и начальным условиям.

Подставим ряд (40) в начальные условия (34). Получим два равенства:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\pi n a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \quad (41)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \leq x \leq l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где b_n — коэффициент Фурье, $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$.

Сравнение рядов Фурье для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с рядом (40) показывает, что для выполнения начальных условий следует положить:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad D_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (42)$$

Таким образом, решение задачи (32)-(34) представлено в виде ряда (40), коэффициенты которого определяются формулами (42). Сходимость ряда (40) рассматривается в книге [4].

Задача. Найти колебания струны, которые возбуждены начальными условиями, с жестко закрепленными концами $x=0$, $x=l$, изображенными на рис. 5.

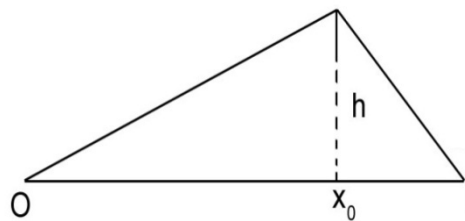


Рис. 5.

Начальные скорости равны нулю. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} \cdot x, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, \end{cases} \quad 0 < x \leq x_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x_0 \leq x < l,$$

является ряд (40)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{\pi n}{l} at + D_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Так как в начальный момент времени скорость $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ равна тождественно нулю, то все коэффициенты $D_n = 0$. Для нахождения коэффициентов $C_n = 0$ вычисляем интеграл (42)

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,0) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{h}{x_0} \cdot x \sin \frac{\pi n}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{h(l-x)}{l-x_0} \sin \frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$\frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l-x_0) n^2} \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

В результате в любой момент времени t отклонение струны определяется по формуле

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n x_0}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n}{l} at.$$

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессах распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наложением простых тонов, соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тона не является операцией только математического характера. Выделение простых тонов можно провести экспериментально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией, и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создать струна, определяется самой низкой собственной частотой струны $\omega_1 = \frac{\pi}{l} a = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ и называется основным тоном струны. Основной тон определяется длиной струны, ее натяжением T и плотностью ρ . Зависимость основного тона от характеристик среды имеет место при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах. Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то

звук ее резко меняется, и она звучит в октаву к своему тону. Этот прием изменения тона носит название флажолета. С точки зрения теории колебания струн это явление объясняется уменьшением длины струны в два раза и соответствующим удвоением частоты.

6. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

При решении различных физических задач (задачи о колебаниях круглой пластины, об остывании круглого цилиндра) удобно использовать полярную (или цилиндрическую) систему координат. Для нахождения решений соответствующих уравнений математической физики необходимо знать вид уравнения в полярной системе координат.

При решении уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (43)$$

от декартовых координат x, y перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= \rho \cos \varphi, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Обратимся к формуле (27), которая позволяет находить выражения для вторых производных в новой системе координат. С учетом равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\rho}, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\rho}, & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{\rho^3}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{\rho^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{\rho^2}, & \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{\rho^3} \end{aligned}$$

можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{x^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{y^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{y^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{x^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Уравнение Лапласа получим, если сложим полученные соотношения для u_{xx} и u_{yy} и приравняем сумму к нулю. После достаточно простых алгебраических преобразований приводим уравнение Лапласа к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (44)$$

Уравнение Лапласа (11) в цилиндрической системе координат ρ, φ, z получим из уравнения (44), добавив в его левую часть вторую производную по z

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Решения уравнения (44), которые не зависят от полярного угла φ , должны удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 \quad (45)$$

Аналогичный вывод может быть проведен и для получения уравнения Лапласа в сферической системе координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

Выпишем только обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют решения уравнения Лапласа, независимые от углов θ и φ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (46)$$

Пример. Найти стационарное распределение температуры в области между двумя поверхностями, температуры которых T_1 и T_2 поддерживаются постоянными, если эти поверхности есть:

- а) плоскости, расстояние между которыми равно l .
- б) цилиндры радиусов R_1 и R_2 .
- в) сферы радиусов R_1 и R_2 .

Решение.

а) из физических соображений ясно, что температура в области между двумя пластинами зависит только от одной координаты x — расстояния от

первой пластины. Так как рассматривается стационарная задача, то функция $u(x)$ должна удовлетворять одномерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (47)$$

и граничным условиям первого рода

$$u(0) = T_1, \quad u(l) = T_2.$$

Общее решение уравнения (47) имеет вид $u(x) = c_1 x + c_2$; произвольные постоянные находятся из граничных условий. В результате получаем

$$u(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l}.$$

б) и в) требуется найти решения уравнения Лапласа, независимые от углов θ и φ , в полярной и сферической системах координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$u(R_1) = T_1, \quad u(R_2) = T_2.$$

Общие решения уравнений (48) имеют вид

$$\text{б) } u(\rho) = c_1 + c_2 \ln \rho,$$

$$\text{в) } u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}.$$

Произвольные постоянные однозначно определяются из граничных условий, и окончательные формулы принимают вид:

$$\text{б) } u(\rho) = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln \frac{\rho}{R_1} + T_1,$$

$$\text{в) } u(r) = \frac{T_2 - T_1}{R_2 - R_1} \frac{R_1 R_2}{r} + \frac{T_2 R_2 - T_1 R_1}{R_2 - R_1}.$$

7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ

Задача о распространении температурных волн в почве является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы.

Температура на поверхности земли носит, как известно, ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Обратимся к задаче о распространении периодических температурных колебаний в почве, которую будем рассматривать как однородное полупространство $0 \leq x < \infty$.

Эта задача является характерной задачей без начальных условий, так как при многократном повторении температурных изменений на поверхности на них меньше влияет начальная температура, чем другие факторы (например, неоднородность почвы), влиянием которых пренебрегаем.

Таким образом, приходим к следующей задаче: найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (49)$$

удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = A_0 \cos \omega t. \quad (50)$$

Решение задачи (49), (50) будем искать в виде суммы колебаний с частотой ω

$$u(x, t) = A(x) \cos \omega t + B(x) \sin \omega t, \quad (51)$$

где коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ пока не определены. Подставим разложение (51) в уравнение (49)

$$-A(x) \omega \sin \omega t + B(x) \omega \cos \omega t = a^2 (A''(x) \cos \omega t + B''(x) \sin \omega t).$$

Приравняем в получившемся равенстве коэффициенты при линейно независимых функциях $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} a^2 A'' - \omega B = 0, \\ a^2 B'' + \omega A = 0. \end{cases}$$

Перейдем от системы дифференциальных уравнений к уравнению четвертого порядка

$$a^4 A^{(IV)} + \omega^2 A = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} A(x) = & \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right) \cdot \left(\cos\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a} c_1 + \sin\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a} c_2\right) + \\ & + \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right) \left(c_3 \cos\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a} + c_4 \sin\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (52)$$

Обратимся теперь к граничным условиям. Условию ограниченности удовлетворяют только решения с $c_3 = c_4 = 0$, а условию (50) на границе — решения с $c_1 = 0$, а $c_2 = A_0$.

Таким образом, решение поставленной задачи получаем в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & A_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right) \cdot \left(\cos\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a} \cos \omega t + \sin\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a} \sin \omega t\right) = \\ = & A_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (53)$$

На основании полученного решения (53) можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве.

Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве устанавливаются колебания температуры с тем же периодом, причем:

1. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с увеличением глубины

$$A(x) = A_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{x}{a}\right),$$

т.е. если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии (первый закон Фурье).

2. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время τ запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \frac{x}{a}$$

- (второй закон Фурье).

3. Глубина проникновения температуры в почву зависит от периода колебаний на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды

$$\frac{A(x)}{A_0} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right).$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1 и T_2 , глубины x_1 и x_2 , на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением $x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} x_1$ (третий закон Фурье).

Так, например, сравнение суточных и годовых колебаний, для которых $T_2 = 365,25T_1$, показывает, что $x_2 = \sqrt{365,25} x_1 \approx 19,2x_1$, т.е. глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности в 19.2 раза больше проникновения суточных колебаний.

Следует заметить, что изложенная здесь теория относится к распространению теплоты в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, неучитываемое этой теорией.

Температуропроводность является одной из характеристик тела, важных для изучения его физических свойств, а также для различных технических расчетов. На изучении распространения температурных волн в стержнях основан один из методов определения температуропроводности.

8. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Краевая задача – дифференциальное уравнение (система дифференциальных уравнений) с заданными линейными соотношениями между значениями искомых функций на начале и конце интервала интегрирования.

Задача Штурма-Лиувилля формируется следующим образом – найти такие значения параметра γ при которых существуют нетривиальные (тождественно не равные нулю) решения дифференциального уравнения (54), удовлетворяющие однородным граничным условиям (55)

$$\nabla^2 U(x_i) + \gamma^2 U(x_i) = 0 \quad a < x_i < b, \quad (54)$$

где x_i - пространственные координаты;

$U(x_i)$ - собственная функция.

Однородные граничные условия:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial n_j} + h_j U \right]_S = 0 \quad (55)$$

Собственными функциями краевой задачи называется тождественно не равное нулю решение задачи (54) - (55).

Из постановки задачи вытекает, что собственные функции могут быть найдены с точностью до постоянного множителя. Поэтому для определенности и удобства последующего использования вводится понятие нормированных собственных функций:

$$\bar{U}(x_i) = \frac{1}{\|U\|} U(x_i); \quad \|U\|^2 = \int_V U^2(x_i) dV.$$

Концы интервала (a, b) могут быть как обыкновенными точками, так и особыми (сингулярными).

Различают задачи двух типов – регулярную задачу и сингулярную задачу. Задача Штурма-Лиувилля называется регулярной, если интервал (a, b) конечен, концы интервала (a, b) - обыкновенные точки рассматриваемого уравнения. Задача называется сингулярной, если хотя бы одно из этих условий не выполнено. Сингулярная задача может быть с одним или двумя сингулярными концами. Характер однородных граничных условий регулярной и сингулярной задач разный.

Граничная задача, в которой решения уравнения (54) удовлетворяют однородным линейным граничным условиям с вещественными коэффициентами называют задачей Штурма-Лиувилля.

Сформулируем типовые граничные условия. В регулярной задаче различают:

- граничные условия первого рода

$$U(a) = 0, U(b) = 0;$$

- граничные условия второго рода

$$U'(a) = 0, U'(b) = 0;$$

- граничные условия третьего рода

$$U'(a) - h_a U(a) = 0, U'(b) - h_b U(b) = 0, h_a, h_b \geq 0;$$

- граничные условия четвертого рода

$$U(a) = U(b), U'(a) = U'(b), p(a) = p(b).$$

Задача Штурма – Лиувилля формируется в соответствии с исходной краевой задачей.

Собственными значениями (собственными числами) краевой задачи называются такие значения γ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (54)-(55).

Для регулярной задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями первого, второго, третьего и четвертого рода имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Все собственные значения регулярной задачи Штурма-Лиувилля вещественны.

Теорема 2. Все собственные значения регулярной задачи Штурма-Лиувилля ограничены снизу.

Некоторые свойства собственных значений регулярной задачи Штурма-Лиувилля

1. Каждому собственному числу отвечает в точности одномерное подпространство собственных функций. Действительно, в противном случае уравнение (1) при данном собственном значении γ имело бы по крайней мере два линейно независимых решения, удовлетворяющих краевым условиям. Это означало бы, поскольку множество его (уравнения) решений двумерно, что любое решение этого уравнения обращается в нуль на концах промежутка (a, b) .

2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

3. Все собственные значения вещественные.

9. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИИ И ЧИСЕЛ

Пример 1.

Рассмотрим охлаждение неограниченной пластины толщиной R при постоянной начальной температуре T_n . (рис. 6) Нормаль пластины совпадает с осью OX . На ее боковых поверхностях в течение всего процесса поддерживаются температуры ($T_{1(x=0)}$ и $T_{2(x=R)}$).

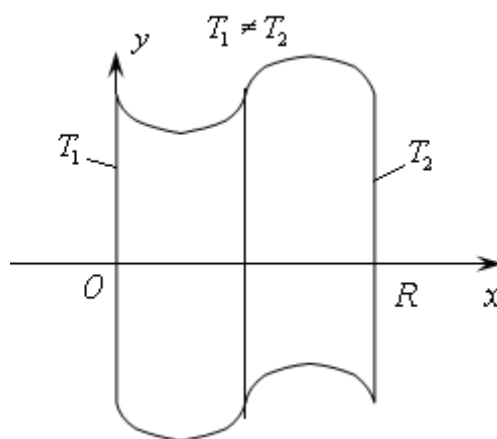


Рис. 6 Расположение системы координат в неограниченной пластине.

Требуется определить температуру $T(x, \tau)$ в любой точке x в любой момент времени τ .

Так как температуры на поверхностях различны, то определяющим размером задачи является вся толщина пластины R (температурное поле не будет симметричным относительно центра пластины). Такие условия называются граничными условиями первого рода.

Итак, нужно найти функцию $T(x, \tau)$, удовлетворяющую следующим условиям:

уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

начальному условию

$$T(x, 0) = T_H;$$

граничным условиям

$$T(0, \tau) = T_1,$$

$$T(R, \tau) = T_2.$$

Задача Штурма-Лиувилля для уравнения теплопроводности имеет вид однородного дифференциального уравнения II порядка:

$$U''_{xx} + \gamma U = 0 \tag{56}$$

Однородные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} U|_{x=0} &= 0 \\ U|_{x=R} &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Задача является однородной, так как граничные условия однородные
Решение уравнения (56)

$$U = C_1 \cos(\gamma x) + C_2 \sin(\gamma x),$$

где γ -собственные значения.

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 .
При $x=0$

$$C_1 \cos(\gamma \cdot 0) + C_2 \sin(\gamma \cdot 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

При $x=R$

$$C_1 \cos(\gamma \cdot R) + C_2 \sin(\gamma \cdot R) = 0;$$

$$C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin(\gamma R) = 0;$$

$\gamma = \frac{\pi \cdot k}{R}, k = 1, 2, \dots$ - собственные значения краевой задачи

$U = \sin\left(\frac{\pi k}{R} x\right), k = 1, 2, \dots$ - собственные функции краевой задачи

$$\|U^2\| = \int_0^R U^2 dx = \int_0^R \sin^2\left(\frac{\pi k}{R} x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^R (1 - \cos(2 \cdot \frac{\pi k}{R} x)) dx = \frac{R}{2} - \frac{1}{4\gamma} \sin(2 \cdot \frac{\pi k}{R} R)$$

$$\frac{1}{4\gamma} \sin(2 \cdot \frac{\pi k}{R} R) = 0 \quad \text{при любом } k$$

$$\|U^2\| = \frac{R}{2} \Rightarrow \bar{U}_n = \sqrt{\frac{2}{R}} \sin\left(\frac{\pi k}{R} x\right), k = 1, 2, \dots - \text{нормированная собственная}$$

функция

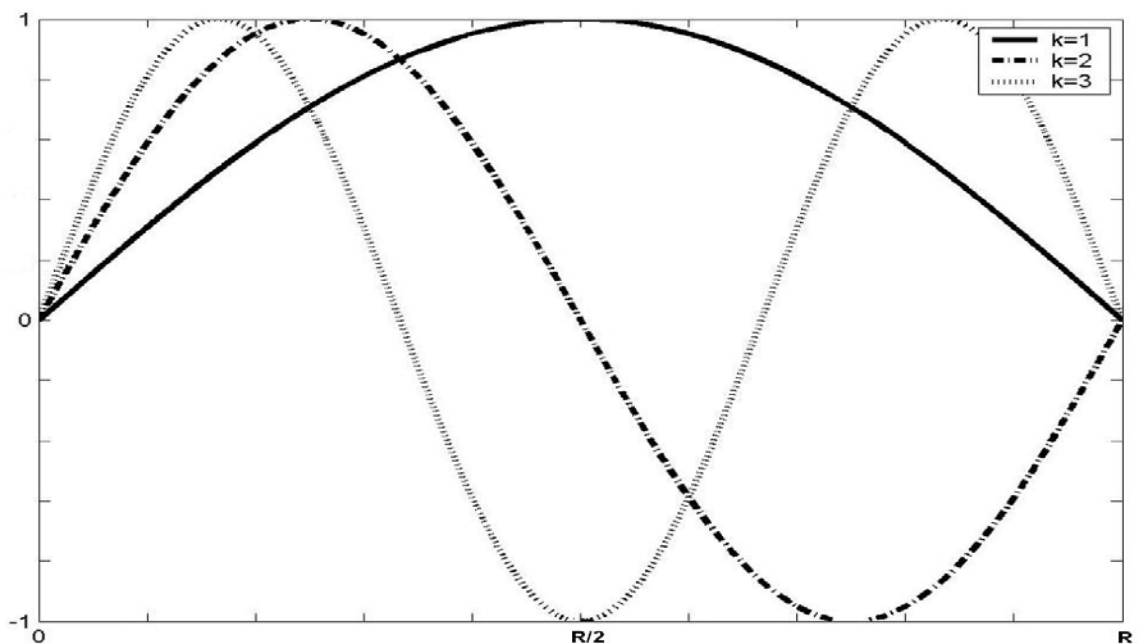


Рис.7 Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для неограниченной пластины с несимметричными граничными условиями первого рода на боковых поверхностях

Пример 2.

Рассмотрим охлаждение неограниченной пластины толщиной $2R$ при постоянной начальной температуре T_H (рис. 8). Нормаль пластины совпадает с осью OX . На ее боковых поверхностях заданы граничные условия III рода с равными коэффициентами теплоотдачи ($\alpha_{1(x=0)}$ и $\alpha_{2(x=R)}$) при постоянной температуре среды T_c .

Требуется определить температуру $T(x, \tau)$ в любой точке x в любой момент времени τ .

В силу симметрии воздействий относительно центра пластины температурное поле будет симметричным, поэтому целесообразно рассматривать половину пластины.

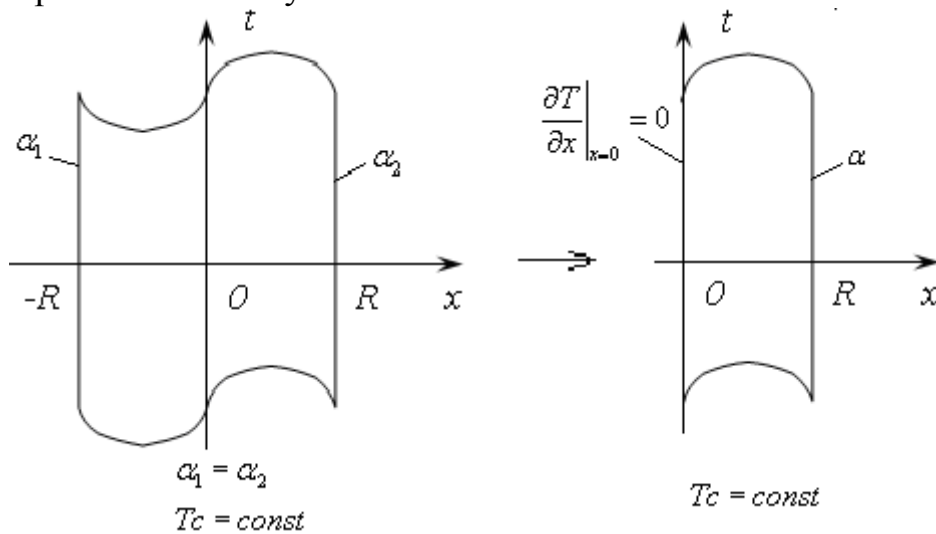


Рис. 8 Расположение системы координат в неограниченной пластине.

Найдем функцию $T(x, \tau)$, удовлетворяющую следующим условиям: уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

начальному условию

$$T(x, 0) = T_H \tag{3.2}$$

граничным условиям

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ \left. \frac{dT}{dx} + h \cdot T \right|_{x=R} = 0, h = \frac{\alpha}{\lambda} \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля для уравнения теплопроводности имеет вид однородного дифференциального уравнения II порядка:

$$U''_{xx} + \gamma U = 0 \quad (58)$$

$$\text{Однородные граничные условия} \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ \left. \frac{dU}{dx} + h \cdot U \right|_{x=R} = 0, h = \frac{\alpha}{\lambda} \end{cases} \quad (59)$$

Задача является однородной, так как граничные условия однородные. Решение уравнения (58)

$$U = C_1 \cos(\gamma x) + C_2 \sin(\gamma x),$$

где γ -собственные значения.

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 .

$$U' = \gamma C_1 \sin(\gamma x) - \gamma C_2 \cos(\gamma x)$$

При $x=0$

$$U' = \gamma C_1 \sin(\gamma \cdot 0) - \gamma C_2 \cos(\gamma \cdot 0)$$

$$U' \Big|_{x=0} = -\gamma C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

При $x=R$

$$\gamma C_1 \sin(\gamma R) + h C_1 \cos(\gamma R) = 0$$

$$C_1 \neq 0$$

$$1 + \frac{h}{\gamma} \text{ctg}(\gamma R) = 0$$

$$\text{ctg}(\gamma R) = \frac{\gamma}{h}, \gamma > 0$$

$$U = \cos(\gamma x)$$

$$\begin{aligned}
\|U^2\| &= \int_0^R U^2 dx = \int_0^R \cos^2(\gamma x) dx = \frac{1}{2} \int_0^R (1 + \cos(2\gamma x)) dx = \\
&= \frac{R}{2} + \frac{1}{4\gamma} \sin(2\gamma R) = \frac{R}{2} + \frac{1}{2\gamma} \sin(\gamma R) \cdot \cos(\gamma R) = \\
&= \frac{R}{2} + \frac{1}{2\gamma} \sin\left(R \cdot \operatorname{arccctg}\left(\frac{\gamma R}{h}\right)\right) \cdot \cos\left(R \cdot \operatorname{arccctg}\left(\frac{\gamma R}{h}\right)\right) = \\
&= \frac{R}{2} + \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{\gamma R}{h\left(1 + \frac{\gamma^2 R^2}{h^2}\right)} = \frac{R}{2} \left(\frac{h^2 + \gamma^2 R^2 + h \cdot R}{h^2 + \gamma^2 R^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\|U^2\| = \frac{R}{2} \left(\frac{h^2 + \gamma^2 R^2 + h \cdot R}{h^2 + \gamma^2 R^2} \right)$$

Пример 3

Рассмотрим охлаждение неограниченной пластины толщиной R при постоянной начальной температуре T_H (рис. 9). Нормаль пластины совпадает с осью OX . На одной ее поверхности задано граничное условие первого рода, а на другой - условие адиабатичности.

Требуется определить температуру $T(x, \tau)$ в любой точке x в любой момент времени τ .

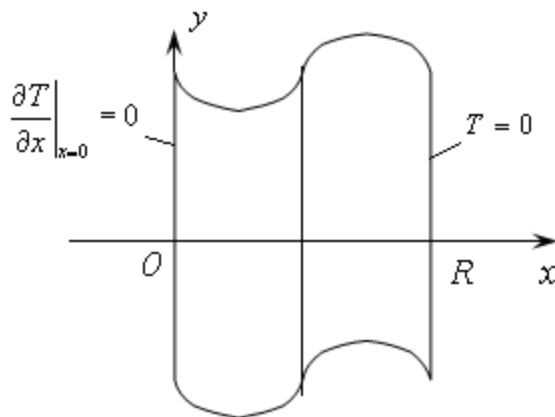


Рис. 9 Расположение системы координат в неограниченной пластине.

Найдем функцию $T(x, \tau)$, удовлетворяющую следующим условиям: уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

начальному условию $T(x, 0) = T_H$;

граничным условиям

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ T|_{x=R} = 0 \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля для уравнения теплопроводности имеет вид однородного дифференциального уравнения II порядка:

$$U''_{xx} + \gamma U = 0 \tag{60}$$

$$\text{Однородные граничные условия} \begin{cases} \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0 \\ U|_{x=R} = 0 \end{cases} \tag{61}$$

Задача является однородной, так как граничные условия однородные. Решение уравнения (60) $U = C_1 \cos(\gamma x) + C_2 \sin(\gamma x)$, где γ -собственные значения.

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 .

$$U' = \gamma C_1 \sin(\gamma x) - \gamma C_2 \cos(\gamma x)$$

При $x=0$

$$U' = \gamma C_1 \sin(\gamma \cdot 0) - \gamma C_2 \cos(\gamma \cdot 0)$$

$$U'|_{x=0} = -\gamma C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

При $x=R$

$$U|_{x=R} = C_1 \cos(\gamma R) = 0$$

$$C_1 \neq 0 \Rightarrow \cos(\gamma R) = 0$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2R}(2k-1), k = 1, 2, \dots - \text{собственные значения краевой задачи;}$$

$$U = \cos\left(\frac{\pi}{2R}(2k-1)x\right), k = 1, 2, \dots - \text{собственные функции краевой задачи;}$$

$$\|U^2\| = \int_0^R U^2 dx = \int_0^R \cos(\gamma x) dx = \frac{1}{2} \int_0^R (1 + \cos(2\gamma x)) dx =$$

$$\frac{R}{2} + \frac{1}{4\gamma} \sin(2\gamma R) = \frac{R}{2} + \frac{1}{4\gamma} \sin\left(2 \frac{\pi}{2R} (2k-1)R\right)$$

$$\frac{1}{4\gamma} \sin(\pi(2k+1)) = 0$$

$$\|U^2\| = \frac{R}{2}$$

$\bar{U}_n = \sqrt{\frac{2}{R}} \cos\left(\frac{\pi}{2R} (2k-1)x\right), k = 1, 2, \dots$ - нормированная собственная функция

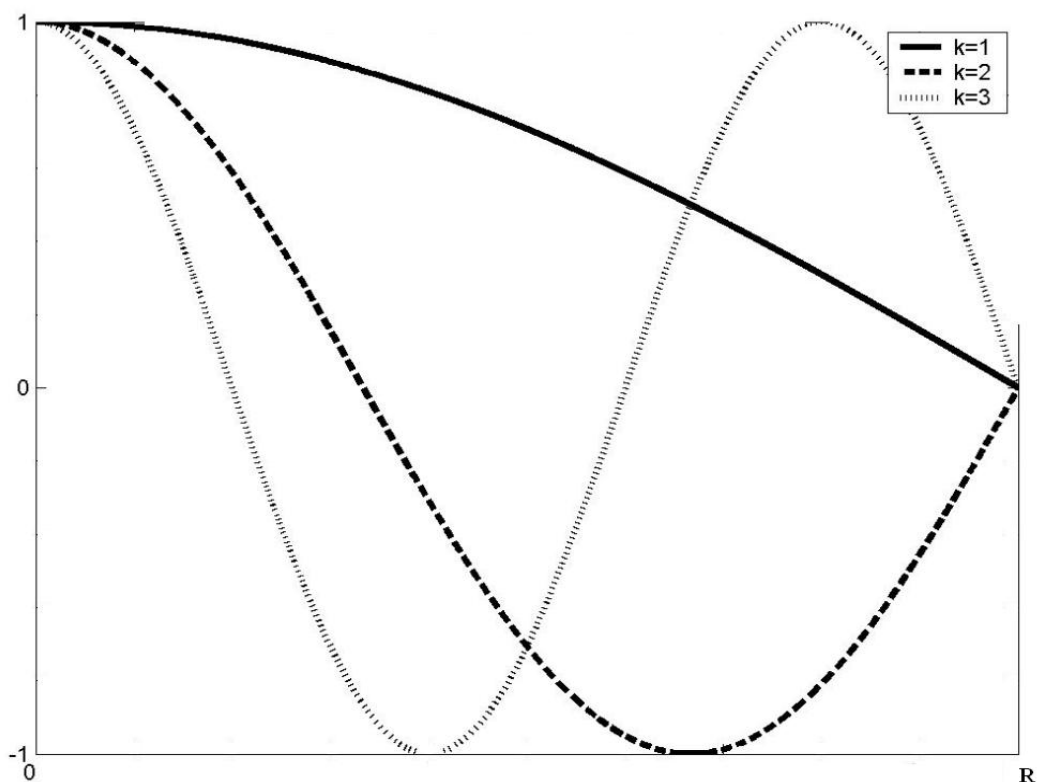


Рис. 10 Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для неограниченной пластины с граничными условиями адиабатичности и первого рода на боковых поверхностях

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М. Квантовая механика. — ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 800 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Издательство московского университета, 1999. — 799 с.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ И ЭНЕРГОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958). В 1954 году вышла в свет его монография «Регулярный тепловой режим». Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена. В начале 50-х годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов – оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора технических наук Дульнева Г.Н., возглавлявшего кафедру с 1958 года по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ признается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике. Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года – кафедрой теплофизики, с 1991 года – кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В.Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из которой вышли доктора наук А.Н.Гордов, А.И.Лазарев, Г.Н.Дульнев, Б.Н.Олейник, Е.С.Платунов, Н.А.Ярышев, В.Н.Васильев, Ю.П.Заричняк, А.В.Шарков и другие ученые-теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследовании термооптических явлений в космических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте «ВЕГА», при создании лазерного устройства в проекте «ФОБОС». Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов, работа которых использует явления сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работы по созданию принципиально новых композиционных материалов – особо прочных, термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых направлений, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением. На базе ведущихся на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году. В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению – «Техническая физика». В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров.

На кафедре ведется подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин». Сейчас коллектив кафедры продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведет поиск в новых областях науки и техники.

Университет ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ И ЭНЕРГОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958). В 1954 году вышла в свет его монография «Регулярный тепловой режим». Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена. В начале 50-х годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов – оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора технических наук Дульнева Г.Н., возглавлявшего кафедру с 1958 года по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ признается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике. Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года – кафедрой теплофизики, с 1991 года – кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В. Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из которой

вышли доктора наук А.Н. Гордов, А.И. Лазарев, Г.Н. Дульнев, Б.Н. Олейник, Е.С. Платунов, Н.А. Ярышев, В.Н. Васильев, Ю.П. Заричняк, А.В. Шарков и другие ученые-теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследовании термооптических явлений в космических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте «ВЕГА», при создании лазерного устройства в проекте «ФОБОС». Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов, работа которых использует явления сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работы по созданию принципиально новых композиционных материалов – особо прочных, термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых направлений, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением. На базе проводимых на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году. В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению – «Техническая физика». В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров.

На кафедре ведется подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин». Сейчас коллектив кафедры продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведет поиск в новых областях науки и техники.

Егоров Владимир Иванович

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49**