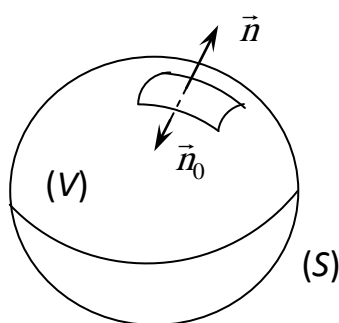


**В.И. Егоров**

**ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**



**Санкт-Петербург**

**2015**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**В.И. Егоров**

**ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

**Учебное пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**

**2015**

**Егоров В.И. Точные методы решения задач теплопроводности. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 60 с.**

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Специальные разделы физики» Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для бакалавров по направлению подготовки 16.03.01– «Техническая физика» и программой курса Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для бакалавров по направлению подготовки 14.03.01 – «Ядерная энергетика и теплофизика». В настоящее издание вошли лекции, посвященные элементам математической физики для процессов теплопроводности.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета лазерной и световой инженерии 10 ноября 2015 года, протокол №11.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО - становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2015

© Егоров В.И., 2015

**Егоров В. И. Точные методы решения задач теплопроводности. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 58 с.**

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Специальные разделы физики» Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для бакалавров по направлению подготовки 16.03.01– «Техническая физика» для бакалавров по направлению подготовки 14.03.01 – «Ядерная энергетика и теплофизика». В настоящее издание вошли лекции, посвященные элементам математической физики для процессов теплопроводности.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета лазерной и световой инженерии 10 ноября 2015 года, протокол №11.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО - становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2015  
© Егоров В.И., 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	4
Раздел 1. Понятие об уравнениях математической физики.....	5
Раздел 2. Вывод уравнения теплопроводности.....	8
Раздел 3. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях первого рода.....	12
Раздел 4. Анализ полученного решения. Среднеобъемная температура. Расход тепла.....	19
Раздел 5. Граничное условие третьего рода.....	24
Раздел 6. Вспомогательные задачи.....	26
Раздел 7. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях третьего рода.....	29
Раздел 8. Температурное поле шара и бесконечного цилиндра при граничных условиях первого рода.....	37
Литература.....	40
Приложение.....	41

## Введение

Настоящее учебное пособие составляет часть методического обеспечения учебного курса «Специальные разделы высшей и вычислительной математики», который читается студентам кафедры Компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга НИУ ИТМО с 1993 года.

В пособии рассмотрен метод разделения переменных для решения стационарных одномерных задач теплопроводности для неограниченной пластины при граничных условиях первого и третьего рода, для бесконечного цилиндра и шара при граничных условиях третьего рода.

В пособии содержатся таблицы и номограммы, необходимые студентам для выполнения расчетных заданий.

## Раздел 1. Понятие об уравнениях математической физики

Предметом теории уравнений математической физики является изучение математических дифференциальных уравнений, описывающих различные физические явления.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция зависит от одной переменной, математическая физика изучает уравнения в частных производных, то есть такие уравнения, решением которых являются функции, зависящие от нескольких переменных.

Так, например,

$$Y \frac{\partial U}{\partial x} + X \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad - \text{уравнение в частных производных первого}$$

порядка,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad - \text{уравнение в частных производных второго}$$

порядка.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f(y), \tag{1.1}$$

где  $U=U(x,y)$ . Все функции, удовлетворяющие уравнению (1.1), имеют вид

$$U(x, y) = \int f(y)dy + \Psi(x), \tag{1.2}$$

где  $\Psi(x)$  – произвольная функция от  $x$ . Это легко проверить непосредственной подстановкой.

Итак, решение (1.2) уравнения (1.1) содержит одну произвольную функцию, а, как известно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную. По аналогии решение (1.2) называется общим решением уравнения (1.1).

Большая часть задач математической физики связана с решением линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных

производных. Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка вида

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + FU = 0, \quad (1.3)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  – постоянные числа.

Как и обыкновенные линейные однородные уравнения, уравнение (1.3) обладает свойством суперпозиции: если каждая из функций  $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, U_n(x, y)$  является решением уравнения (1.3), то их линейная комбинация  $C_1 U_1(x, y) + C_2 U_2(x, y) + \dots + C_n U_n(x, y)$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные, тоже является решением этого уравнения. Это можно проверить непосредственной подстановкой. Но в отличие от обыкновенного линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка, которое имеет ровно  $n$  линейно независимых частных решений, а их линейная комбинация дает общее решение, линейное однородное решение в частных производных может иметь бесчисленное множество линейно независимых решений  $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, U_n(x, y)$ .

Составим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i U_i(x, y). \quad (1.4)$$

Так как уравнение (1.3) линейное, то, если ряд (1.4) сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $y$ , то он будет общим решением уравнения (1.3). Укажем основные типы уравнений математической физики для случая функций двух независимых переменных.

1. Уравнение параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

К решению этого уравнения приводят распространение теплоты, потому его называют уравнением теплопроводности или уравнением Фурье.

2. Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$



Это уравнение называют волновым уравнением или уравнением колебания струны, так как оно описывает поперечные колебания струны, продольные колебания стержня и так далее.

### 3. Уравнение эллиптического типа – уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (1.7)$$

К исследованию этого уравнения приводят решения задач о стационарном тепловом состоянии, гидродинамики, диффузии и других.

Названия типов этих уравнений даны по аналогии с названиями кривых второго порядка.

В данном пособии мы будем подробно рассматривать только задачи, связанные с распространением теплоты, потому приведем вывод уравнения теплопроводности.

## Раздел 2. Вывод уравнения теплопроводности

Пусть  $t(x, y, z, \tau)$  – температура,  $\tau$  – время,  $dS$  – элемент площади поверхности тела,  $\vec{n}_0$  – орт нормали к поверхности, направленный по направлению потока теплоты, то есть в сторону уменьшения температуры.

Тогда  $\frac{\partial t}{\partial \vec{n}_0} < 0$ .

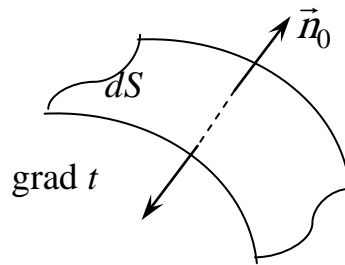


Рис.2.1. Нормаль к поверхности и градиент температуры.

Производная  $\frac{\partial t}{\partial \vec{n}_0}$  равна проекции  $grad\ t$  на направление  $\vec{n}_0$ , то есть

$$\frac{\partial t}{\partial \vec{n}_0} = grad_{\vec{n}_0} t \quad (2.1)$$

По закону (гипотезе) Фурье количество теплоты, протекающее через поверхность  $dS$  за время  $d\tau$  в направлении  $\vec{n}_0$  равно

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial \vec{n}_0} dS d\tau \quad (2.2)$$

где  $\lambda > 0$  – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности, Вт/м<sup>2</sup>·К или ккал/м<sup>2</sup>·ч·К.

Для определенности рассмотрим случай, когда тело (V), ограниченное поверхностью (S), нагревается, тогда  $\vec{n}_0$  – орт внутренней нормали.

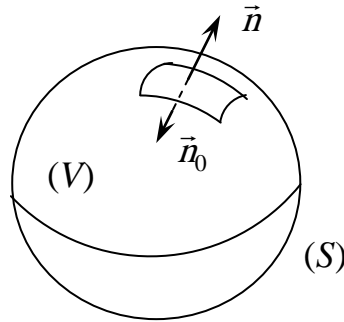


Рис.2.2. Внешняя и внутренняя нормали к поверхности.

Возьмем орт внешней нормали  $\vec{n} = -\vec{n}_0$ . Из (2.1) и (2.2) получим

$$dQ = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{n}} t dS d\tau. \quad (2.3)$$

Количество теплоты, протекающее через всю поверхность (S) за время  $d\tau$ , равно

$$Q = d\tau \iint_{(S)} \lambda \operatorname{grad}_{\vec{n}} t dS \quad (2.4)$$

По теореме Гаусса-Остроградского поток вектора  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность (S) равен

$$\iint_{(S)} a_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV \quad (2.5)$$

Применяя эту теорему, получим

$$Q = d\tau \iint_{(S)} \lambda \operatorname{grad}_{\vec{n}} t dS = d\tau \iiint_{(V)} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) dV \quad (2.6)$$

За счет поглощаемой теплоты тело нагревается. Пусть за время  $d\tau$  температура элемента объема  $dV$  повысилась на  $dt$ . При этом поглощается количество теплоты

$$c\rho dV dt = c\rho dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau,$$

где  $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $C$  – удельная теплоемкость,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$  или  $\text{ккал}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , которые предполагаем постоянными.

Общее количество теплоты, поглощаемое всем телом ( $V$ ) за время  $d\tau$ , равно

$$Q = d\tau \iiint_{(V)} c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV. \quad (2.7)$$

Приравнивая правые части равенств (2.6) и (2.7), получим

$$\iiint_{(V)} c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = \iiint_{(V)} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) dV,$$

или

$$\iiint_{(V)} \left( c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) \right) dV = 0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольного объема ( $V$ ), где происходит теплообмен, а это возможно в том и только в том случае, если подинтегральная функция равна нулю. Отсюда следует равенство

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) \quad (2.8)$$

Будем считать  $\lambda$  постоянным. Тогда

$$\lambda \operatorname{grad} t = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \bar{i} + \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \bar{j} + \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \bar{k},$$

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

и уравнение (2.8) можно записать в виде

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

Выражение  $\frac{\lambda}{c\rho} = a$  называют коэффициентом

температуропроводности. Тогда уравнение (2.9) примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

Это уравнение теплопроводности в случае, когда теплофизические характеристики постоянные, а температура зависит от времени и трех координат.

В случае одномерной задачи, когда  $t=t(x, \tau)$ , получим уравнение

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right). \quad (2.11)$$

Это уравнение теплопроводности для теплоизолированного стержня, для неограниченной пластины.

Под неограниченной пластиной понимают пластину, толщина которой конечна, а длина и ширина неограниченны. На практике можно считать, что эти условия выполнены, если длина и ширина велики по сравнению с толщиной. Ниже будут подробно рассмотрены задачи именно для такой пластины.

Но для решения каждой конкретной задачи, кроме дифференциального уравнения, должны быть заданы условия, специфические именно для задачи.

Так, чтобы найти температурное поле тела в любой момент времени, нужно знать распределение температуры распределение температуры в начальный момент времени, начальные условия и закон взаимодействия тела с окружающей средой, граничные условия.

При решении задач мы будем использовать граничные условия двух типов:

1. Граничное условие первого рода, когда задана температура поверхности тела в любой момент времени.
2. Граничное условие третьего рода, когда известна температура среды, а на поверхности тела происходит конвективный теплообмен (об этом граничном условии ниже будет сказано подробнее).

### Раздел 3. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях первого рода

Пусть неограниченная пластина толщиной  $2R$  с постоянной начальной температурой  $t_H$  охлаждается при условии, что на ее поверхностях в течение всего процесса охлаждения поддерживается температура равная нулю. Требуется определить температуру  $t(x, \tau)$  в любой точке  $x$  в любой момент времени  $\tau$ .

Нулевая температура поверхностей позволяет упростить решение задачи. В дальнейшем этим решением легко воспользоваться и в случае, когда температура поверхностей отлична от нуля.

Итак, нужно найти функцию  $t(x, \tau)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right); \quad (3.1)$$

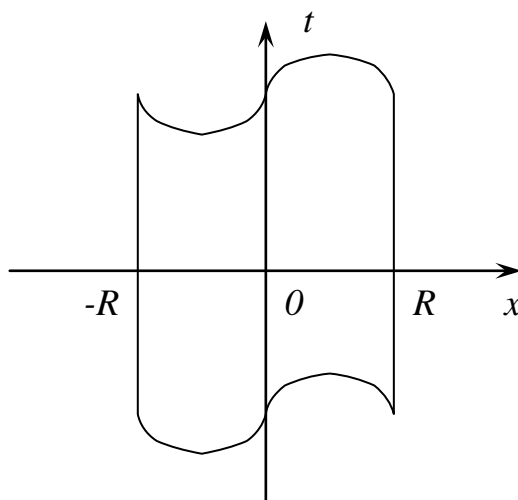


Рис.3.1. Расположение системы координат в неограниченной пластине.

Начальному условию

$$t(x, 0) = t_H; \quad (3.2)$$

граничным условиям

$$t(R, \tau) = 0, \quad (3.3)$$

$$t(-R, \tau) = 0. \quad (3.4)$$

Это однородная задача, так как граничные условия однородные,  $t(x, \tau) = 0$  им удовлетворяет.

Условие (3.4) можно заменить следующим

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (3.5)$$

что означает отсутствие потока тепла в плоскости  $x=0$  и следует из симметрии температурного поля пластины в заданных условиях.

Одним из способов решения задач подобного типа является метод разделения переменных или метод Фурье, которым мы и воспользуемся для решения поставленной задачи (3.1)-(3.5). Метод состоит в том, что ищется решение уравнения (3.1) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$t(x, \tau) = T(\tau) \cdot X(x). \quad (3.6)$$

Подставив эту функцию в уравнение (3.1), получим  $X T' = a X'' T$  или

$$\frac{T'}{T} = a \frac{X''}{X} \quad (3.7)$$

Равенство (3.7) должно быть тождеством. Это возможно только в том случае, если обе его части равны одному и тому же постоянному числу, которое можно обозначить  $-an^2$ ,

Здесь  $a$  – коэффициент температуропроводности, а  $n$  – неизвестное пока число. Итак, требуется решить два уравнения:

$$\frac{T'}{T} = -an^2, \quad aX'' = -an^2 X \quad (3.8)$$

Решение первого из них имеет вид

$$T = C e^{-an^2 \tau} \quad (3.9)$$

Знак минус перед  $an^2$  выбран потому, что показатель степени в (3.9) должен быть отрицательным, так как иначе  $t(x, \tau)$  неограниченно возрастала бы при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Второе из уравнений гармонических колебаний  $X'' + n^2 X = 0$ , а его решением является

$$X = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx \quad (3.10)$$

Перемножив  $T$  и  $X$  из (3.9) и (3.10) и обозначив произвольные постоянные  $C_1=A$ ,  $C_2=B$ , получим решение уравнения (3.1) в виде

$$t(x, \tau) = e^{-an^2\tau} (A \cos nx + B \sin nx) \quad (3.11)$$

Выражение для  $t(x, \tau)$  из (3.11) удовлетворяет уравнению (3.1) при любых значениях произвольных постоянных  $n$ ,  $A$  и  $B$ , для определения используем (3.2), (3.3), и (3.5).

Из условия (3.5)

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} = e^{-an^2\tau} (-An \sin nx + Bn \cos nx) \Big|_{x=0} = 0$$

или  $e^{-an^2\tau} Bn = 0$ .

Отсюда  $B=0$ , так как при  $n=0$  получили бы  $t=const$ .

Подставив  $B=0$  в (3.11), получим решение в виде

$$t(x, \tau) = Ae^{-an^2\tau} \cos nx = 0 \quad (3.12)$$

Воспользуемся теперь условием (3.3)  $t(R, \tau)=0$ ,  $t(R, \tau) = Ae^{-an^2\tau} \cos nR = 0$ . Коэффициент  $A \neq 0$ , т.к. иначе получили бы тривиальное решение  $t(x, \tau)=0$ , следовательно,

$$\cos nR = 0. \quad (3.13)$$

Это уравнение, называемое характеристическим уравнением задачи, имеет, бесчисленное множество корней. Обозначив  $nR = \mu$ , получим

$$nR = \mu = \frac{(2k-1)\pi}{2}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm K$$

Каждому значению  $K$  соответствует свой корень  $\mu_k$ ,

$$\mu_k = n_k R = \frac{(2k-1)\pi}{2}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm K \quad (3.14)$$



Обозначим  $an^2_k = \frac{a(2k-1)^2 \pi^2}{4R^2} = \lambda_k$ .

Числа  $\lambda_k$  называются собственными (характеристическими) числами задачи, а функции  $\cos n_k x = \cos \sqrt{\frac{\lambda_k}{a}} x$  называются собственными функциями задачи. При  $k = 1, 2, \dots$  все собственные функции различны. Если же взять  $k = 0, -1, -2, \dots$ , то новых собственных функций не получим. Таким образом, нашлось множество функций вида (3.12)

$$t_k(x, \tau) = A_k e^{-\frac{a\mu_k^2 \tau}{R^2}} \cos \frac{\mu_k x}{R}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\mu_k$  определяются формулой (3.14).

Так как уравнение (3.1) линейное, то оно обладает свойством суперпозиции и ряд

$$t(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a\mu_k^2 \tau}{R^2}} \cos \frac{\mu_k x}{R} \quad (3.15)$$

является решением этого уравнения, если он сходится и его можно почленно дифференцировать два раза по  $x$  и один раз по  $\tau$ .

Допустим, что эти условия выполнены. Решение (3.15) удовлетворяет граничным условиям (3.3) и (3.5), так как каждый член ряда удовлетворяет этим условиям.

Вычислим коэффициент  $A_k$ , используя условие (3.2), из которого при  $\tau=0$  следует

$$t_H = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\mu_k x}{R} \quad (3.16)$$

Покажем, что система функций  $\cos \mu_k \frac{x}{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ортогональна на  $[0, R]$ .

Пусть  $i \neq k$ . Вычислим интеграл

$$\int_0^R \cos \mu_k \frac{x}{R} \cos \mu_i \frac{x}{R} dx = \frac{1}{2} \int_0^R \left( \cos(\mu_k - \mu_i) \frac{x}{R} + \cos(\mu_k + \mu_i) \frac{x}{R} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\mu_k - \mu_i)R}{\mu_k - \mu_i} + \frac{\sin(\mu_k + \mu_i)R}{\mu_k + \mu_i} \right) = 0$$

так как  $\mu_k \pm \mu_i = \frac{\pi}{2}((2k-1) \pm (2i-1))$  есть число кратное  $\pi$ .

Так как  $t(x,0)=t_H$  удовлетворяет на  $[0,R]$  условиям Дирихле (она в данном случае постоянна), то (3.16) – это ряд Фурье для  $t_H$ , коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{\int_0^R t_H \cos \mu_k \frac{x}{R} dx}{\int_0^R \cos^2 \mu_k \frac{x}{R} dx}. \quad (3.17)$$

Если начальная температура непостоянна и условие (3.2) имеет вид  $t(x,0)=f(x)$ , где  $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле, то

$$A_k = \frac{\int_0^R f(x) \cos \mu_k \frac{x}{R} dx}{\int_0^R \cos^2 \mu_k \frac{x}{R} dx}.$$

Вычислим интегралы, входящие в (3.17):

$$\int_0^R t_H \cos \mu_k \frac{x}{R} dx = t_H \frac{R}{\mu_k} \sin \mu_k = (-1)^{k+1} \frac{2t_H R}{(2k-1)\pi}$$

$$\int_0^R \cos^2 \mu_k \frac{x}{R} dx = \frac{1}{2} \int_0^R (1 + \cos 2\mu_k \frac{x}{R}) dx = \frac{1}{2} R.$$

Итак,  $A_k = (-1)^{k+1} \frac{4t_H}{(2k-1)\pi}$

Подставив эти значения  $A_k$  в (3.15), получим окончательное решение задач в виде:

$$t(x, \tau) = \frac{4t_H}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{\mu_k^2 a \tau}{R^2}} \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (3.18)$$

Можно показать, что этот ряд сходится при любом  $x \in [-R, R]$  и любом  $\tau$ .

Как уже было сказано выше, решение получено при условии, что ряд можно почленно дифференцировать. Достаточным условием для возможности дифференцирования и интегрирования ряда является существование числового знакоположительного сходящегося ряда, мажорантного для ряда (3.18).

В учебниках по математической физике, например в [1], доказывается, что такой ряд существует.

Выше была рассмотрена задача для случая, когда температура поверхностей пластины равна нулю. Пусть теперь на поверхностях температура постоянна и  $t_c \neq 0$ . Тогда вместо (3.1)...(3.4) получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right), \quad (3.19)$$

$$t(x, 0) = t_H, \quad (3.20)$$

$$t(R, \tau) = t_c, \quad (3.21)$$

$$t(-R, \tau) = t_c. \quad (3.22)$$

Задача (3.19)...(3.22) – неоднородная,  $t(x, \tau) = 0$  не удовлетворяет граничным условиям. Сделаем замену переменной так, чтобы граничные условия стали однородными. Для этого положим  $V(x, \tau) = t(x, \tau) - t_c$ . Тогда задача примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \quad (3.23)$$

$$V(x, 0) = t(x, 0) - t_c = t_H - t_c, \quad (3.24)$$

$$V(R, \tau) = 0, \quad (3.25)$$

$$V(-R, \tau) = 0. \quad (3.26)$$

Решение для задачи (3.23)...(3.26) можно записать, воспользовавшись формулой (3.18), полученной для аналогичной задачи (3.1)...(3.4), но роль  $t_H$  теперь играет  $t_H - t_c$ , и получим решение

$$V(x, \tau) = t(x, \tau) - t_c = \frac{4(t_H - t_c)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{\mu_k^2 a \tau}{R^2}} \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (3.27)$$

Отсюда, подставив значение  $\mu_k$  из (3.14), получим:

$$t(x, \tau) = t_c + \frac{4(t_H - t_c)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 a \tau}{4R^2}} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2R}. \quad (3.28)$$

## Раздел 4. Анализ полученного решения. Среднеобъемная температура. Расход тепла.

Из выражения (3.28) следует, что температура является функцией нескольких аргументов.

Чтобы решение записать в более удобной форме и при этом уменьшить число переменных, введем следующие значения

$$\Theta(x, \tau) = \frac{t(x, \tau) - t_c}{t_H - t_c}, \quad (4.1)$$

относительная температура,  $0 \leq \Theta \leq 1$ ;

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2}, \quad (4.2)$$

критерий Фурье;

$$\frac{x}{R} - \text{относительная координата, } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1.$$

Все эти величины безразмерные. Тогда выражение (3.28) запишется в виде

$$\Theta(x, \tau) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4} Fo} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2} \cdot \frac{x}{R} \quad (4.3)$$

Относительная температура является функцией только двух переменных,  $\Theta = f\left(Fo, \frac{x}{R}\right)$ . Быстрота сходимости ряда (4.3) в основном зависит от величины  $Fo$ . Если  $Fo$  достаточно велико, то ряд сходится быстро и для вычисления  $\Theta$  достаточно одного - двух членов ряда. Так, если  $Fo \geq 0,4$ , то можно взять один член ряда, если не требуется большая точность вычислений  $\Theta$ . Если  $Fo$  мало, то приходится брать несколько членов ряда. Заметим, что решение рассмотренной задачи другим способами позволяет получить выражение для  $t(x, \tau)$  удобное именно для малых значений  $Fo$  [3].

Запишем (4.3) в развернутом виде

$$\Theta = \frac{4}{\pi} \left( \cos \frac{\pi x}{2R} e^{-\frac{\pi^2 F_0}{4}} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2R} e^{-\frac{9\pi^2 F_0}{4}} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2R} e^{-\frac{25\pi^2 F_0}{4}} - \dots \right)$$

и рассмотрим несколько примеров.

### Пример 1.

Вычислить температуру осевой плоскости  $x=0$ , если  $F_0=0,6$

$$\Theta = \frac{4}{\pi} \left( e^{-\frac{\pi^2 \cdot 0,6}{4}} - \frac{1}{3} e^{-\frac{9\pi^2 \cdot 0,6}{4}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{25\pi^2 \cdot 0,6}{4}} - \dots \right)$$

Первый член ряда  $e^{-\frac{\pi^2 \cdot 0,6}{4}} = e^{-0,15\pi^2} = 0,2276$ , второй член  $e^{-\frac{9\pi^2 \cdot 0,6}{4}} = e^{-1,35\pi^2} < 0,000002$  мал, поэтому можно ограничиться одним членом ряда

$$\Theta = \frac{4}{\pi} 0,2276 = 0,2897.$$

### Пример 2.

Вычислить относительную температуру пластин, если  $F_0=0,05$  и  $\frac{x}{R} = 0,5$ .

Чтобы получить три верных значащих цифры, приходится брать четыре члена ряда

$$\Theta = \frac{4}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{4} e^{-0,0125\pi^2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4} e^{-0,1125\pi^2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{4} e^{-0,3125\pi^2} - \frac{1}{7} \cos \frac{7\pi}{4} e^{-0,45\pi^2} \right) =$$

$$1,273 \cdot 0,7071 \left( 0,8839 + \frac{1}{3} 0,3295 - \frac{1}{5} 0,04576 - \frac{1}{7} 0,0237 \right) = 0,886$$

### Пример 3.

Пусть имеется пластина толщиной  $2R=0,2$  м,  $t_H=35$  °С,  $t_C = 5$  °С,  $a=0,0005$  м<sup>2</sup>/ч.

Найти температуру в центре пластины через 10 часов после начала охлаждения.

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0,0005 \cdot 10}{0,01} = 0,5$$

Так как значение  $Fo$  достаточно велико, ограничимся одним членом ряда,  $\Theta = \frac{4}{\pi} e^{\frac{-\pi^2 0,5}{4}} \cos 0 = 0,3707$ .

$$\Theta = \frac{t - t_C}{t_H - t_C}, \quad 0,3707 = \frac{t - 5}{35 - 5}, \quad \text{откуда } t = 16,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Решение в виде ряда (3.28) или (4.3) позволяет, взяв один или несколько членов ряда, найти температуру пластины в заданной точке в любой момент времени.

Часто приходится решать и другие задачи, например, найти время  $\tau$  достижения в определенной точке заданной температуры или найти точку  $x$ , где в заданный момент времени будет достигнута заданная температура. Для решения на практике таких задач, чтобы избежать громоздких расчетов, пользуются готовыми графиками, составленными по формуле (4.7). Такие графики (номограммы) приведены во всех учебниках по теплопроводности [3,4], а у нас даны на рис. 4.1 (см. Приложение).

На оси ординат отложены значения  $\Theta$ . Чтобы иметь возможность поместить значения  $Fo$  на оси абсцисс в возможно большем диапазоне, на этой оси принята не равномерная, а логарифмическая шкала.

На рис 4.1 (см. Приложение) приведены графики зависимости  $\Theta$  от  $Fo$  для различных значений величины  $1 - \frac{x}{R}$ .

Рассмотрим пример использования номограммы.

#### Пример 4.

Определить через сколько времени в точке  $x=0,07$  м температура будет равна  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ , если  $R=0,1$  м,  $t_H=35 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $t_C=0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $a=0,0005 \text{ м}^2/\text{ч}$ . Тогда  $\frac{x}{R} = 0,70$ ;  $1 - \frac{x}{R} = 0,30$ ;  $\Theta = \frac{20 - 0}{35} = 0,57$ .

На кривой для  $1 - \frac{x}{R} = 0,3$  найдем точку с ординатой  $\Theta=0,57$ . Ее абсцисса  $Fo \approx 0,073$ , откуда

$$\tau = \frac{Fo \cdot R^2}{a} = \frac{0,073 \cdot 0,225}{0,0005} = 3,3 \text{ часа.}$$

При решении многих задач теплопередачи требуется вычислять количество теплоты, которое отдает тело при охлаждении, а для этого нужно знать среднеобъемную температуру тела в заданный момент времени. Если температура тела зависит от трех координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $\tau$ , то среднеобъемная температура вычисляется по формуле

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} t(x, y, z, \tau) dV. \quad (4.4)$$

В случае неограниченной пластины толщиной  $2R$  при симметричном распределении температуры

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{R} \int_0^R t(x, \tau) dx, \quad (4.5)$$

а относительная среднеобъемная температура

$$\bar{\Theta}(\tau) = \frac{\bar{t}(\tau) - t_C}{t_H - t_C} = \frac{1}{R} \int_0^R \Theta(x, \tau) dx. \quad (4.6)$$

Подставив в (4.6) выражение для  $\Theta$  из (4.3) и интегрируя почленно ряд (это возможно в силу замечания, сделанного в параграфе 3), получим

$$\bar{\Theta}(\tau) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 Fo}{4}} \quad (4.7)$$

В этом ряде практически можно ограничиться одним членом, тогда  $Fo \geq 0,1$ . Если начальная температура тела постоянна и равна  $t_H$ , то количество теплоты, отданное телом при его охлаждении от  $t_H$  до среднеобъемной температуры  $t$ , равно

$$Q_V = c\rho V(t_H - \bar{t}), \quad (4.8)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $V$  – объем.



### Пример 5.

Определить количество теплоты, отданное 1 м<sup>3</sup> пластины при охлаждении в течение 10 часов, если  $R=0,1$  м,  $a=0,0005$  м<sup>2</sup>/ч,  $t_H=40$  °С,  $t_C=5$  °С,  $\rho=1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $C=0,8$  ккал/кг·К =  $0,8 \cdot 4,1868 \cdot 10^3$  Дж/кг·К.

$$F_0 = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0,0005 \cdot 10}{0,01} = 0,5 \quad ; \quad \bar{\Theta} = \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4} \cdot 0,5} = 0,236$$

$$\frac{\bar{t} - 5}{40 - 5} = 0,236; \quad \bar{t} = 13,3 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$Q_V = 0,8 \cdot 4,1868 \cdot 1000 \cdot 1(40 - 13,3) = 89 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 21 \cdot 10^3 \text{ ккал.}$$

## Раздел 5. Граничное условие третьего рода

Как уже отмечалось, по закону Фурье количество теплоты, протекающее через элемент поверхности  $ds$  за время  $d\tau$ , равно

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} ds d\tau. \quad (5.1)$$

По закону Ньютона количество теплоты, которым тело обменивается со средой, равно

$$dQ = \alpha(t_C - t_{II}) ds d\tau \quad \text{в случае нагревания,} \quad (5.2)$$

$$dQ = \alpha(t_{II} - t_C) ds d\tau \quad \text{в случае охлаждения,} \quad (5.3)$$

где  $t_C$  - температура среды,

$t_{II}$  - температура поверхности,

$\alpha$  - коэффициент теплоотдачи теплообмена, Вт/(м<sup>2</sup>·К) или ккал/(м<sup>2</sup>·К).

Приравняв правые части (5.1) и (5.2), а затем (5.1) и (5.3), получим граничные условия третьего рода

$$\left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_{II} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{II} - t_C) \quad \text{в случае охлаждения,} \quad (5.4)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_{II} = \frac{\alpha}{\lambda} (t_{II} - t_C) \quad \text{в случае нагревания.} \quad (5.5)$$

Здесь производная  $\frac{\partial t}{\partial n}$  вычислена на поверхности.

Запишем эти два условия для обеих поверхностей неограниченной пластины.

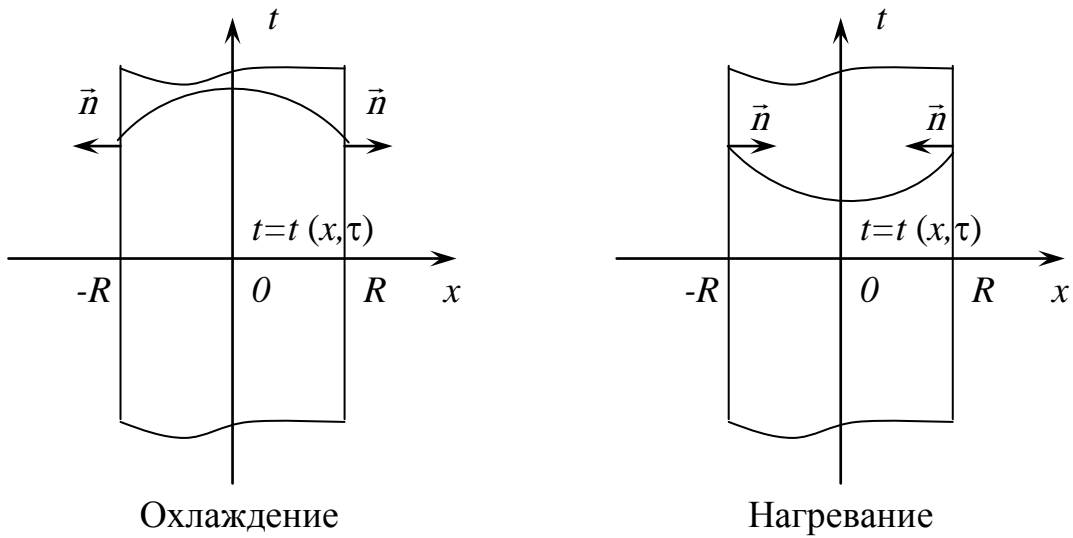


Рис. 5.1. Направления нормалей к изотермическим поверхностям.

В случае охлаждения  $\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{x=-R} = -\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=-R}$ ;  $\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{x=R} = \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=R}$ .

В случае нагревания  $\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{x=-R} = \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=-R}$ ;  $\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{x=R} = -\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=R}$ .

Учитывая эти выражения и условия (5.4) и (5.5), получим, что граничные условия третьего рода для одной поверхности пластины записываются одинаково и в случае охлаждения, и в случае нагревания, а именно

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t(R, \tau) - t_c), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=-R} = \frac{\alpha}{\lambda} (t(-R, \tau) - t_c). \quad (5.7)$$

## Раздел 6. Вспомогательные задачи

### Задача 1.

Найти положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{B}, \quad (6.1)$$

где  $B$  – постоянное число,  $B > 0$ .

Это уравнение можно решить только приближенно. Построим графики функций

$$y = \operatorname{ctg} \mu \text{ и } y = \frac{\mu}{B}.$$

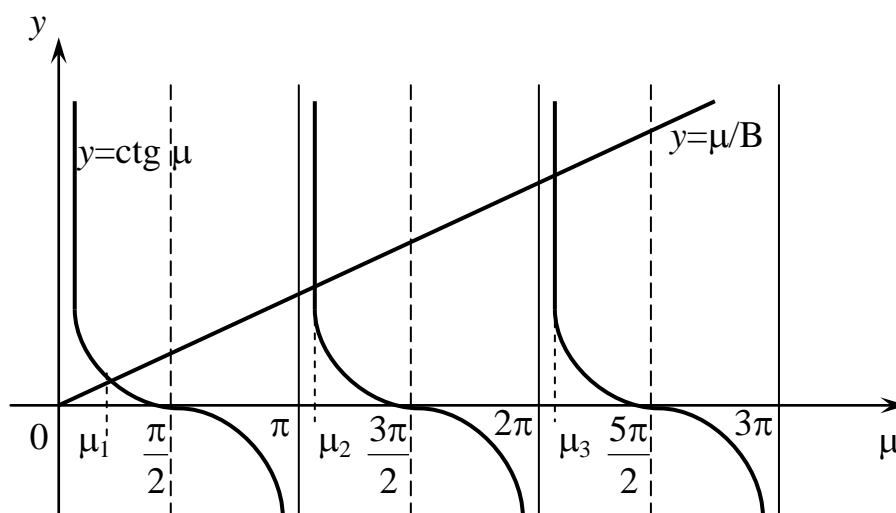


Рис.6.1. Графическое решение трансцендентного уравнения 6.1.

Из этого рисунка видно, что уравнение имеет бесчисленное, но счетное множество корней  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n, \dots$ . Очевидно, что  $\mu_n \rightarrow \pi(n-1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , так что при больших значениях  $n$   $\mu_n \approx \pi(n-1)$ . Но нас будут интересовать именно первые корни уравнения (6.1). Их можно вычислить приближенно. Таблица первых шести корней этого уравнения в зависимости от  $B$  приведена, например, в [3]. В дальнейшем и мы приведем такую таблицу.

### Задача 2.

Показать, что система функций  $\cos \mu_1 \frac{x}{R}, \cos \mu_2 \frac{x}{R}, \dots, \cos \mu_k \frac{x}{R}, \dots$ , где  $\mu_k$  - корни уравнения (6.1), ортогональна на  $[-R, R]$ .

Уравнение (6.1) можно записать в виде

$$\mu \sin \mu = B \cos \mu. \quad (6.2)$$

Пусть  $k \neq i$ . Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \cos \mu_k \frac{x}{R} \cos \mu_i \frac{x}{R} dx &= \int_0^R \left( \cos(\mu_k - \mu_i) \frac{x}{R} + \cos(\mu_k + \mu_i) \frac{x}{R} \right) dx = \\ &= \frac{R}{\mu_k - \mu_i} \sin(\mu_k - \mu_i) + \frac{R}{\mu_k + \mu_i} \sin(\mu_k + \mu_i) = \\ &= \frac{R}{\mu_k^2 - \mu_i^2} \left( (\mu_k + \mu_i) \sin(\mu_k - \mu_i) + (\mu_k - \mu_i) \sin(\mu_k + \mu_i) \right) = \\ &= \frac{R}{\mu_k^2 - \mu_i^2} \left( \mu_k (\sin(\mu_k - \mu_i) + \sin(\mu_k + \mu_i)) + \mu_i (\sin(\mu_k - \mu_i) - \sin(\mu_k + \mu_i)) \right) = \\ &= \frac{R}{\mu_k^2 - \mu_i^2} (2\mu_k \sin \mu_k \cos \mu_i - 2\mu_i \sin \mu_i \cos \mu_k) = \\ &= \frac{R}{\mu_k^2 - \mu_i^2} (2B \cos \mu_k \cos \mu_i - 2B \cos \mu_i \cos \mu_k) = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение записано из условия (6.2). Таким образом, доказано, что система функций ортогональна на  $[-R, R]$ .

### Задача 3.

Разложить функцию  $f(x)$ , заданную на  $[-R, R]$ , в ряд Фурье по системе функций  $\cos \mu_k \frac{x}{R}, k = 1, 2, \dots$ , где  $\mu_k$  - корни уравнения (6.1).

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле, то её можно разложить в ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos \mu_k \frac{x}{R}, \quad (6.3)$$

где

$$B_k = \frac{\int_{-R}^R f(x) \cos \mu_k \frac{x}{R} dx}{\int_{-R}^R \cos^2 \mu_k \frac{x}{R} dx}. \quad (6.4)$$

Знаменатель равен

$$\int_{-R}^R \cos^2 \mu_k \frac{x}{R} dx = \int_0^R (1 + \cos 2\mu_k \frac{x}{R}) dx = R \frac{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}{\mu_k}.$$

Пусть, в частности,  $f(x) = t_H$ , где  $t_H$  - постоянное число. В этом случае числитель формулы (6.4) равен

$$\int_{-R}^R t_H \cos \mu_k \frac{x}{R} dx = 2t_H \frac{R}{\mu_k} \sin \mu_k.$$

Тогда

$$B_k = \frac{2t_H \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}, \quad (6.5)$$

$$t_H = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (6.6)$$

## Раздел 7. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях третьего рода

Пластина толщиной  $2R$  с постоянной начальной температурой охлаждается в среде, температура которой  $t_C = 0$ . На поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен. Найти температуру  $t(x, \tau)$ .

Для этого нужно решить следующую задачу

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad (7.1)$$

$$t(x, 0) = t_H; \quad (7.2)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} t(R, \tau); \quad (7.3)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=-R} = -\frac{\alpha}{\lambda} t(-R, \tau), \quad (7.4)$$

где (7.3) и (7.4) – граничные условия третьего рода при  $t_C = 0$ .

Вместо условия (7.4) можно взять следующее

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (7.5)$$

Как было показано в параграфе 3, решение уравнения (7.1) имеет вид

$$t(x, \tau) = e^{-an^2\tau} (B \cos nx + A \sin nx).$$

Из условия (7.5)

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = e^{-an^2\tau} (-Bn \sin nx + An \cos nx) \Big|_{x=0} = e^{-an^2\tau} An = 0,$$

откуда  $A=0$ . Тогда решение уравнения (7.1) при условии (7.5) будет записано в виде

$$t(x, \tau) = B e^{-an^2\tau} \cos nx. \quad (7.6)$$

Используем теперь граничное условие (7.3). Так как  $\frac{\partial t}{\partial x} = -Be^{-an^2\tau} n \sin nx$ , то из (7.3) и (7.6) получим

$$nR \sin nR = \frac{\alpha R}{\lambda} \cos nR. \quad (7.7)$$

Обозначим  $nR = \mu$ . Выражение  $\frac{\alpha R}{\lambda} = Bi$  называется критерием Био и является безразмерной величиной. Тогда из (7.7) следует, что  $\mu \sin \mu = B \cos \mu$  или

$$ctg \mu = \frac{\mu}{Bi}, \quad (7.8)$$

а это есть рассмотренное уже уравнение (6.1) при  $B=Bi$ . Оно называется характеристическим уравнением решаемой задачи, а его корни – собственными (характеристическими) числами. Было показано, что уравнение (7.8) имеет бесчисленное множество корней  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ . Имеются таблицы нескольких первых корней в зависимости от значений  $Bi$ . Таким образом, корни уравнения (7.8) считаем известными. Но так как их бесчисленное множество и

$$\mu_k = n_k R, (k = 1, 2, \dots), \quad (7.9)$$

то и решений вида (7.6) имеется бесчисленное множество

$$t_k(x, \tau) = B_k e^{-\mu_k^2 \frac{a\tau}{R^2}} \cos \mu_k \frac{x}{R}, (k = 1, 2, \dots).$$

Как уже отмечалось в параграфе 3, сумма этих решений тоже является решением задачи. Тогда

$$t(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\mu_k^2 \frac{a\tau}{R^2}} \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (7.10)$$

Для вычисления  $B_k$  используем условие (7.2), откуда следует, что



$$t_H = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (7.11)$$

Этот ряд совпадает с рядом (6.6), коэффициенты которого даны формулой (6.5) и имеют вид

$$B_k = \frac{2t_H \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}. \quad (7.12)$$

Подставив их в (7.10) и обозначив

$$A_k = \frac{2 \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}, \quad (7.13)$$

Получим решение задачи (7.1)...(7.4)

$$t(x, \tau) = t_H \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\mu_k^2 \frac{a\tau}{R^2}} \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (7.14)$$

Если  $t_c \neq 0$  и постоянна, то сделав, как и в параграфе 2, подстановку и используя те же обозначения, получим решение задачи в безразмерной форме

$$\theta = \frac{t(x, \tau) - t_c}{t_H - t_c} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\mu_k^2 Fo} \cos \mu_k \frac{x}{R}. \quad (7.15)$$

Здесь  $\mu_k$  и  $A_k$  зависят от значений  $Bi$ .

В таблице 7.1 приводятся значения  $\mu_k$  и  $A_k$  для ряда значений  $Bi$  при  $k=1,2,3$ .

Таблица 7.1

Значения корней уравнения  $ctg \mu = \frac{h}{Bi}$  и коэффициентов  $A_k$  ряда(7.15)

$Bi$	$\mu_1$	$A_1$	$\mu_2$	$A_2$	$\mu_3$	$A_3$
0	0,0000	1,0000	3,1416	0,0000	6,2832	0,0000
0,1	0,3111	1,0159	3,1731	-0,0197	6,2991	0,0050
0,2	0,4328	1,0312	3,2039	-0,0381	6,3148	0,0100
0,3	0,5218	1,0450	3,2341	-0,0555	6,3305	0,0148
0,4	0,5932	1,0581	3,2636	-0,0719	6,3461	0,0196
0,5	0,6533	1,0701	3,2923	-0,0873	6,3616	0,0243
0,6	0,7051	1,0813	3,3204	-0,1025	6,3770	0,0289
0,7	0,7506	1,0918	3,3477	-0,1154	6,3923	0,0335
0,8	0,7910	1,1016	3,3744	-0,1282	6,4074	0,0379
0,9	0,8274	1,1107	3,4003	-0,1403	6,4224	0,0423
1,0	0,8603	1,1192	3,4256	-0,1517	6,4373	0,0466
1,5	0,9882	1,1537	3,5422	-0,2013	6,5097	0,0667
2,0	1,0769	1,1784	3,6436	-0,2367	6,5783	0,0848
3,0	1,1925	1,2102	3,8088	-0,2881	6,7040	0,1154
4,0	1,2646	1,2287	3,9352	-0,3215	6,8140	0,1396
5,0	1,3138	1,2403	4,0336	-0,3442	6,9096	0,1588
6,0	1,3496	1,2478	4,1116	-0,3604	6,9924	0,1740
8,0	1,3978	1,2569	4,2264	-0,3812	7,1263	0,1959
10,0	1,4289	1,2612	4,3058	-0,3934	7,2281	0,2104
100,1	1,5552	1,2731	4,6658	-0,4239	7,7764	0,2539
$\infty$	1,5708	1,2732	4,7124	-0,4244	7,8540	0,2546

Так как  $\mu_k$  и  $A_k$  зависят от  $Bi$ , то  $\theta = f(Fo, \frac{x}{R}, Bi)$  так что нельзя составить одну номограмму для всех случаев, как это было сделано в параграфе 3, где  $\theta = f(Fo, \frac{x}{R})$ . В практических задачах обычно интересно знать температуру поверхности ( $x=R$ ) и температуру центра ( $x=0$ ). Именно для этих случаев и составлены номограммы, которые мы приводим на рис. 2 и 3.

Насколько быстро сходится ряд (7.15), зависит теперь не только от значений  $Fo$ , но и от значений  $Bi$  (от значений  $\frac{x}{R}$  сходимость ряда зависит

меньше, так как  $\left| \cos \mu_k \frac{x}{R} \right| \leq 1$ ). Так, если  $Bi \rightarrow \infty$ , температура поверхности становится равной температуре среды и граничное условие

третьего рода переходит в условие первого рода. Это означает, что при большом значении  $\alpha$ , а следовательно, и  $Bi$ , когда  $Bi \geq 100$ , для вычисления  $\theta$  можно пользоваться формулой (4.3).

Рассмотрим несколько примеров.

### Пример 1.

Вычислить относительную температуру поверхности ( $x=R$ ), если  $Bi=3$ ,  $Fo=0,7$ .

Значения  $\mu_k$  и  $A_k$  берём из таблицы 7.1. Тогда

$$e^{-\mu_1^2 Fo} = e^{-1,1925^2 \cdot 0,7} = 0,3696, \quad e^{-\mu_2^2 Fo} = e^{-3,8088^2 \cdot 0,7} = 0,00004.$$

Так как второе слагаемое мало по сравнению с первым, ограничимся одним членом ряда

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1^2 Fo} \cos \mu_1 \frac{x}{R} = 1,2102 e^{-1,1925^2 \cdot 0,7} \cdot \cos 1,1925 = 0,1652.$$

### Пример 2.

Вычислить относительную температуру центра пластины ( $x=0$ ), если  $Bi=3$ ,  $Fo=0,3$ .

$$\text{Тогда } e^{-\mu_1^2 Fo} = e^{-1,1925^2 \cdot 0,3} = 0,6527,$$

$$e^{-\mu_2^2 Fo} = e^{-3,8088^2 \cdot 0,3} = 0,0129,$$

$$e^{-\mu_3^2 Fo} = e^{-6,704^2 \cdot 0,3} < 0,000002.$$

Здесь возьмём два члена ряда

$$\theta = 1,2102 \cdot 0,6527 + 0,2881 \cdot 0,0129 = 0,797.$$

Для следующего примера используем номограммы, приведённые на рис. 7.1 и 7.2 (см. Приложение).

### Пример 3.

Определить температуру поверхности  $t_{II}$  и температуру центра  $t_{II}$  пластины через 10 часов после начала охлаждения, если  $R=0,1$  м,  $a = 0,0005$  м<sup>2</sup>/ч,  $t_H = 40^\circ\text{C}$ ,  $t_C = 5^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 8$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\lambda = 0,4$  Вт/(м<sup>2</sup>·К).

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0,0005 \cdot 10}{0,01} = 0,5; \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0,1}{0,4} = 2.$$

На рисунке 7.1 на кривой  $Bi=2$  находим точку  $A$  с абсциссой  $Fo=0,5$ . Её ордината  $\theta_{II} = 0,30$ ;  $\frac{t_{II} - 5}{40 - 5} = 0,30$ . Отсюда  $t_{II} = 15^\circ\text{C}$ .

На рисунке 7.2 таким же образом находим точку  $B$ . Её ордината  $\theta_{II} = 0,65$ ;  $\frac{t_{II} - 5}{40 - 5} = 0,65$ , тогда  $t_{II} = 28^\circ\text{C}$ .

Найдём среднеобъёмную температуру пластины

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{1}{R} \int_0^R \theta(x, \tau) dx. \quad (7.16)$$

Подставляя сюда  $\theta(x, \tau)$  из (7.15) и интегрируя ряд почленно, получим

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\bar{t}(\tau) - t_C}{t_H - t_C} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\mu_k^2 Fo}, \quad (7.17)$$

$$\text{где } B_k = A_k \frac{\sin \mu_k}{\mu_k}.$$

В таблице 7.2 приведены значения первых трёх коэффициентов  $B_k$  для некоторых значений  $Bi$ . Значения  $\mu_k$  были уже даны в таблице 7.1.

Таблица 7.2

Значения коэффициентов  $B_k$ 

$Bi$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
0,1	1,0000	0,0002	0,0000
0,2	0,9995	0,0007	0,0000
0,3	0,9982	0,0016	0,0001
0,4	0,9973	0,0027	0,0002
0,5	0,9955	0,0040	0,0003
0,6	0,9939	0,0054	0,0004
0,7	0,9920	0,0070	0,0006
0,8	0,9903	0,0088	0,0007
0,9	0,9882	0,0105	0,0009
1,0	0,9862	0,0124	0,0011
1,5	0,9749	0,0220	0,0023
2,0	0,9635	0,0313	0,0037
5,0	0,9130	0,0664	0,0135
10,0	0,8743	0,0839	0,0236
$\infty$	0,8106	0,0901	0,0324

**Пример 4.**

Определить количество теплоты, которое теряется 1 м<sup>3</sup> пластины при охлаждении в течение 10 часов, если  $R=0,1$  м,  $t_H = 40^\circ\text{C}$ ,  $t_C = 5^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 0,8$  ккал/(кг·К) =  $0,8 \cdot 4,1868 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К),  $\alpha = 8$  ккал/(м<sup>2</sup>·ч·К) =  $8 \cdot 1,163$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\lambda = 0,4$  ккал/(м·ч·К) =  $0,4 \cdot 1,163$  Вт/(м·К).

Отсюда

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{0,4 \cdot 1,163 \cdot 3600}{0,8 \cdot 4,1868 \cdot 10^6} = 0,5 \text{ м}^2/\text{ч};$$

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0,0005 \cdot 10}{0,01} = 0,5; \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0,1}{0,4} = 2.$$

Так как значение  $Fo$  достаточно большое, то в ряде (7.17) можно взять один член ряда. Из таблицы 7.2 для  $Bi = 2$   $B_1 = 0,9635$ , а из таблицы 7.1  $\mu_1 = 1,0769$ .

Тогда

$$\bar{\theta} = 0,9635 \cdot e^{-1,0769^2 \cdot 0,5} = 0,5416; \quad \frac{\bar{t} - 5}{40 - 5} = 0,5416; \quad \bar{t} = 24^\circ \text{C}.$$

По формуле (4.8) количество теплоты

$$Q_V = c\rho V(t_H - \bar{t}) = 0,8 \cdot 4,1868 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot (40 - 24) = 53,5 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 12,8 \cdot 10^3 \text{ ккал}.$$

Ниже приводятся варианты индивидуальных заданий, которые выполняются студентами по материалу, изложенному в настоящем параграфе.

### Задание.

Пластина толщиной  $2R$  с начальной температурой  $t_H$  охлаждается в среде с температурой  $t_C$ . Вычислить температуру поверхности  $t_{II}$  и температуру центра  $t_{II}$  через время  $\tau$  после начала охлаждения, а также количество теплоты, выделенное при этом объемом  $V$ .

Для вычисления  $t_{II}$  и  $t_{II}$  воспользоваться: 1) аналитическим решением (7.15); 2) номограммами на рис. 7.1 и 7.2 (см. Приложение).

При этом значения части исходных данных общие для всех вариантов:

$$\alpha = 8 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К}) = 8 \cdot 1,163 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}),$$

$$\lambda = 0,4 \text{ ккал}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{К}) = 0,4 \cdot 1,163 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$c = 0,8 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 0,8 \cdot 4,1868 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$a = 0,0005 \text{ м}^2/\text{ч}, \quad t_H = 35^\circ \text{C}, \quad t_C = 0^\circ \text{C}, \quad \rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad V = 1 \text{ м}^3.$$

Далее для различных вариантов приводятся значения  $\tau$  и  $R$ .

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,01 \text{ м};$   | 2. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,015 \text{ м};$   |
| 3. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,02 \text{ м};$   | 4. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,025 \text{ м};$   |
| 5. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,03 \text{ м};$   | 6. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,025 \text{ м};$   |
| 7. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,03 \text{ м};$   | 8. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,035 \text{ м};$   |
| 9. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,04 \text{ м};$   | 10. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,045 \text{ м};$  |
| 11. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,05 \text{ м};$  | 12. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,075 \text{ м};$  |
| 13. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,1 \text{ м};$   | 14. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,15 \text{ м};$   |
| 15. $\tau = 5 \text{ ч}, R = 0,2 \text{ м};$   | 16. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,025 \text{ м};$ |
| 17. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,03 \text{ м};$ | 18. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,035 \text{ м};$ |
| 19. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,04 \text{ м};$ | 20. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,045 \text{ м};$ |
| 21. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,05 \text{ м};$ | 22. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,075 \text{ м};$ |
| 23. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,1 \text{ м};$  | 24. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,15 \text{ м};$  |
| 25. $\tau = 10 \text{ ч}, R = 0,2 \text{ м};$  |   |

Значения  $\mu_k$  и  $A_k$  из (7.15) для соответствующих значений даны в таблице 7.1, а значения  $B_k$  из (7.17) – в таблице 7.2.

## Раздел 8. Температурное поле шара и бесконечного цилиндра при граничных условиях третьего рода

Пусть шар радиусом  $R$  или бесконечно длинный цилиндр радиусом  $R$  с постоянной начальной температурой  $t_H$  охлаждается в среде с постоянной температурой  $t_C$  при условии, что на поверхности тела происходит конвективный теплообмен (задача симметричная).

Требуется найти температуру  $t(r, \tau)$  в любой точке  $r$  через время  $\tau$  после начала охлаждения.

Можно показать, что, решая задачу тем же методом, который использовался для случая бесконечной пластины, решения задачи получим следующие.

Для шара

$$\theta = \frac{t(r, \tau) - t_C}{t_H - t_C} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{R \sin \mu_k \frac{r}{R}}{r \mu_k} \cdot e^{-\mu_k^2 Fo}, \quad (8.1)$$

где  $\mu_k$  - корни характеристического уравнения

$$tg \mu = -\frac{\mu}{Bi - 1}, \quad (8.2)$$

а коэффициенты  $A_k$  зависят от  $\mu_k$ .

Значения  $\mu_k$  и  $A_k$  при  $k=1,2,3$  для некоторых значений приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1  
Значения корней уравнения (8.2) и коэффициентов  $A_k$  из (8.1)

$Bi$	$\mu_1$	$A_1$	$\mu_2$	$A_2$	$\mu_3$	$A_3$
0,1	0,5423	1,0297	4,5157	-0,0454	7,7382	0,0260
0,2	0,7593	1,0592	4,5379	-0,0894	7,7511	0,0520
0,3	0,9208	1,0880	4,5601	-0,1345	7,7641	0,0779
0,4	1,0528	1,1164	4,5822	-0,1781	7,7770	0,1036
0,5	1,1656	1,1440	4,6042	-0,2216	7,7899	0,1292
0,6	1,2644	1,1713	4,6261	-0,2633	7,8028	0,1541
0,7	1,3525	1,1978	4,6479	-0,3048	7,8156	0,1799
0,8	1,4320	1,2237	4,6696	-0,3455	7,8284	0,2050
0,9	1,5044	1,2488	4,6911	-0,3854	7,8412	0,3399
1,0	1,5708	1,2732	4,7124	-0,4244	7,8540	0,2546
1,5	1,8366	1,3848	4,8158	-0,6067	7,9171	0,3752

$Bi$	$\mu_1$	$A_1$	$\mu_2$	$A_2$	$\mu_3$	$A_3$
2,0	2,0288	1,4793	4,9132	-0,7673	7,9787	0,4899
5,0	2,5704	1,7870	5,3540	-1,3733	8,3029	1,0363
10,0	2,8363	1,9249	5,7172	-1,7381	8,6587	1,5141
$\infty$	3,1416	2,0000	6,2832	-2,0000	9,4248	2,0000

Для цилиндра

$$\theta = \frac{t(r, \tau) - t_C}{t_H - t_C} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\mu_k^2 Fo} \cdot J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right), \quad (8.3)$$

где  $\mu_k$  - корни характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}, \quad (8.4)$$

а коэффициенты  $A_k$  в (8.3) зависят от  $\mu_k$ . Их значения при  $k=1,2,3$  для ряда значений  $Bi$  приводятся в таблице 8.2.

Таблицы значений функций Бесселя  $J_0(\mu)$  и  $J_1(\mu)$  имеются в различных справочниках, например в [5,6].

Таблица 8.2  
Значения корней уравнения (8.4) и коэффициентов  $A_k$  из (8.3)

$Bi$	$\mu_1$	$A_1$	$\mu_2$	$A_2$	$\mu_3$	$A_3$
0,1	0,4417	1,0245	3,8577	-0,0333	7,0298	0,0135
0,2	0,6170	1,0482	3,8835	-0,0653	7,0440	0,0269
0,3	0,7465	1,0711	3,9091	-0,0972	7,0582	0,0401
0,4	0,8516	1,0931	3,9344	-0,1277	7,0723	0,0582
0,5	0,9408	1,1142	3,9594	-0,1571	7,0864	0,0662
0,6	1,0184	1,1345	3,9841	-0,1857	7,1004	0,0790
0,7	1,0873	1,1539	4,0085	-0,2132	7,1143	0,0917
0,8	1,1490	1,1724	4,0325	-0,2398	7,1282	0,1043
0,9	1,2048	1,1902	4,0562	-0,2654	7,1421	0,1167
1,0	1,2558	1,2071	4,0795	-0,2901	7,1558	0,1289
1,5	1,4569	1,2807	4,1902	-0,4008	7,2233	0,1877
2,0	1,5994	1,3377	4,2910	-0,4923	7,2884	0,2422
5,0	1,9898	1,5029	4,7131	-0,7973	7,6177	0,4842
10,0	2,1795	1,5677	5,0332	-0,9575	7,9569	0,6784
$\infty$	2,4048	1,6021	5,5201	-1,0648	8,6537	0,8558



На рис.8.1...8.4 (см. Приложение) даны графики зависимостей относительной температуры поверхности  $\theta_{\Pi}$  и относительной температуры центра  $\theta_{Ц}$  от  $Fo$  для различных значений  $Bi$ .

### Задание.

Шар и цилиндр радиусом  $R$  с начальной температурой  $t_H$  охлаждаются в среде с температурой  $t_C$ . Вычислить температуру поверхности  $t_{\Pi}$  и температуру центра  $t_{Ц}$  через время  $\tau$  после начала охлаждения. Для вычисления  $t_{\Pi}$  и  $t_{Ц}$  воспользоваться:

- 1) аналитическими решениями (8.1) и (8.3);
- 2) номограммами на рис. 8.1...8.4 (см. Приложение).

При этом взять следующие значения исходных данных:

$$\alpha = 8 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К}) = 8 \cdot 1,163 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}),$$

$$\lambda = 0,4 \text{ ккал}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{К}) = 0,4 \cdot 1,163 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$c = 0,8 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 0,8 \cdot 4,1868 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$a = 0,0005 \text{ м}^2/\text{ч}, t_H = 35^\circ \text{C}, t_C = 0^\circ \text{C}.$$

Значения  $\tau$  и  $R$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,01 \text{ м};$   | 2. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,015 \text{ м};$  |
| 3. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,02 \text{ м};$   | 4. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,025 \text{ м};$  |
| 5. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,03 \text{ м};$   | 6. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,035 \text{ м};$  |
| 7. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,04 \text{ м};$   | 8. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,045 \text{ м};$  |
| 9. $\tau = 1 \text{ ч}, R = 0,05 \text{ м};$   | 10. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,02 \text{ м};$  |
| 11. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,025 \text{ м};$ | 12. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,03 \text{ м};$  |
| 13. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,035 \text{ м};$ | 14. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,04 \text{ м};$  |
| 15. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,045 \text{ м};$ | 16. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,05 \text{ м};$  |
| 17. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,075 \text{ м};$ | 18. $\tau = 2 \text{ ч}, R = 0,1 \text{ м};$   |
| 19. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,03 \text{ м};$  | 20. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,035 \text{ м};$ |
| 21. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,04 \text{ м};$  | 22. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,045 \text{ м};$ |
| 23. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,05 \text{ м};$  | 24. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,075 \text{ м};$ |
| 25. $\tau = 3 \text{ ч}, R = 0,1 \text{ м}.$   |  |

## Литература

1. Тихонов С.В., Самарский А.А. Уравнение математической физики. – М.: Главиздат, 1953. - 680 с.
2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
4. Аналитическое исследование технологических процессов обработки мяса холодом. Под ред. Головкина Н.А., Юшкова П.П. – М.: ЦНИИТЭИ, 1979. – 183 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980. – 975 с.
6. Сегал В.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Изд-во АН СССР, 1948 – 450 с.

## **Приложение**



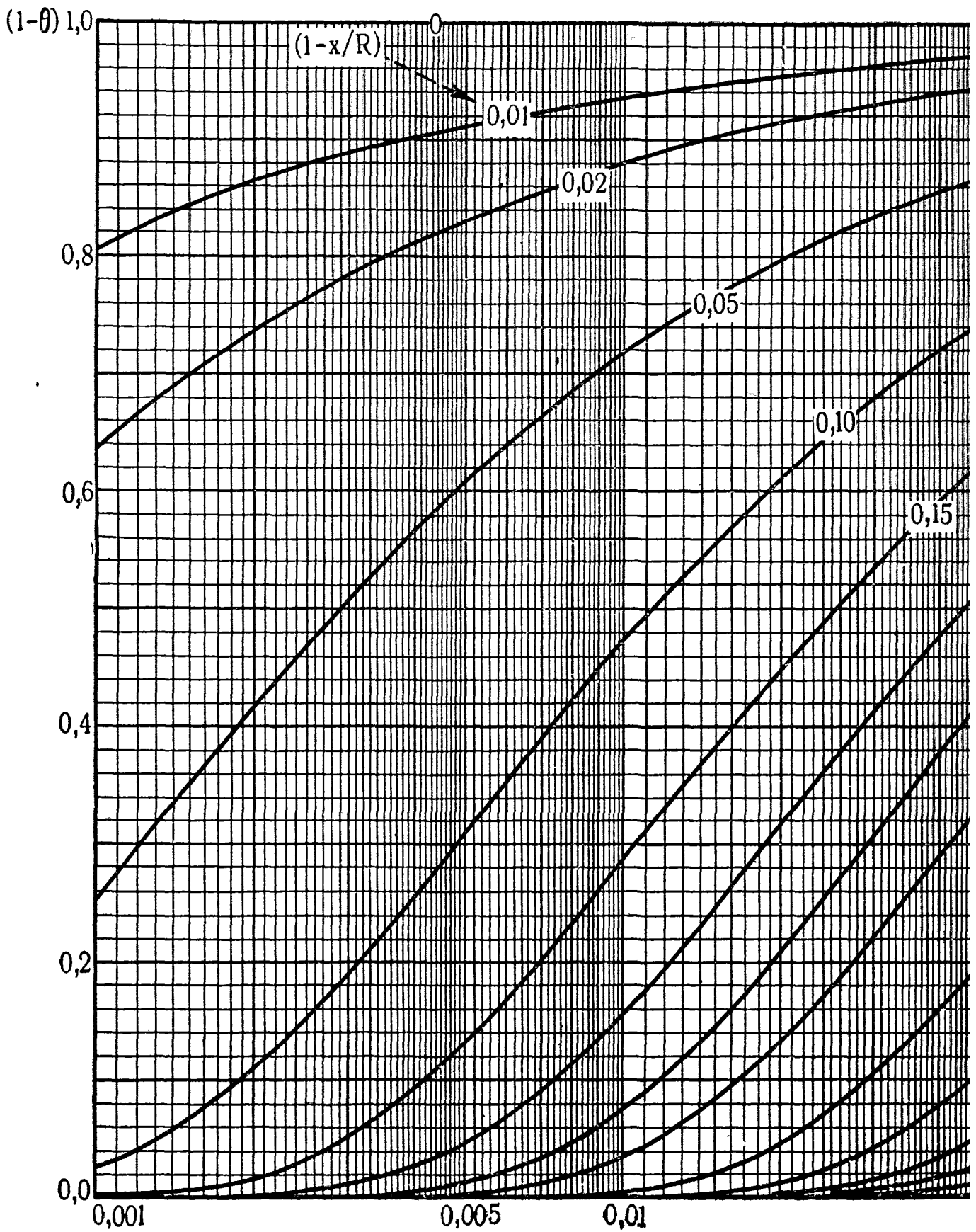


Рис.4.1(а). Зависимость избыточной температуры  $(T_0-T)/(T_0-T_c)=(1-\theta)$  от числа Фурье  $Fo$  в случае пластины.

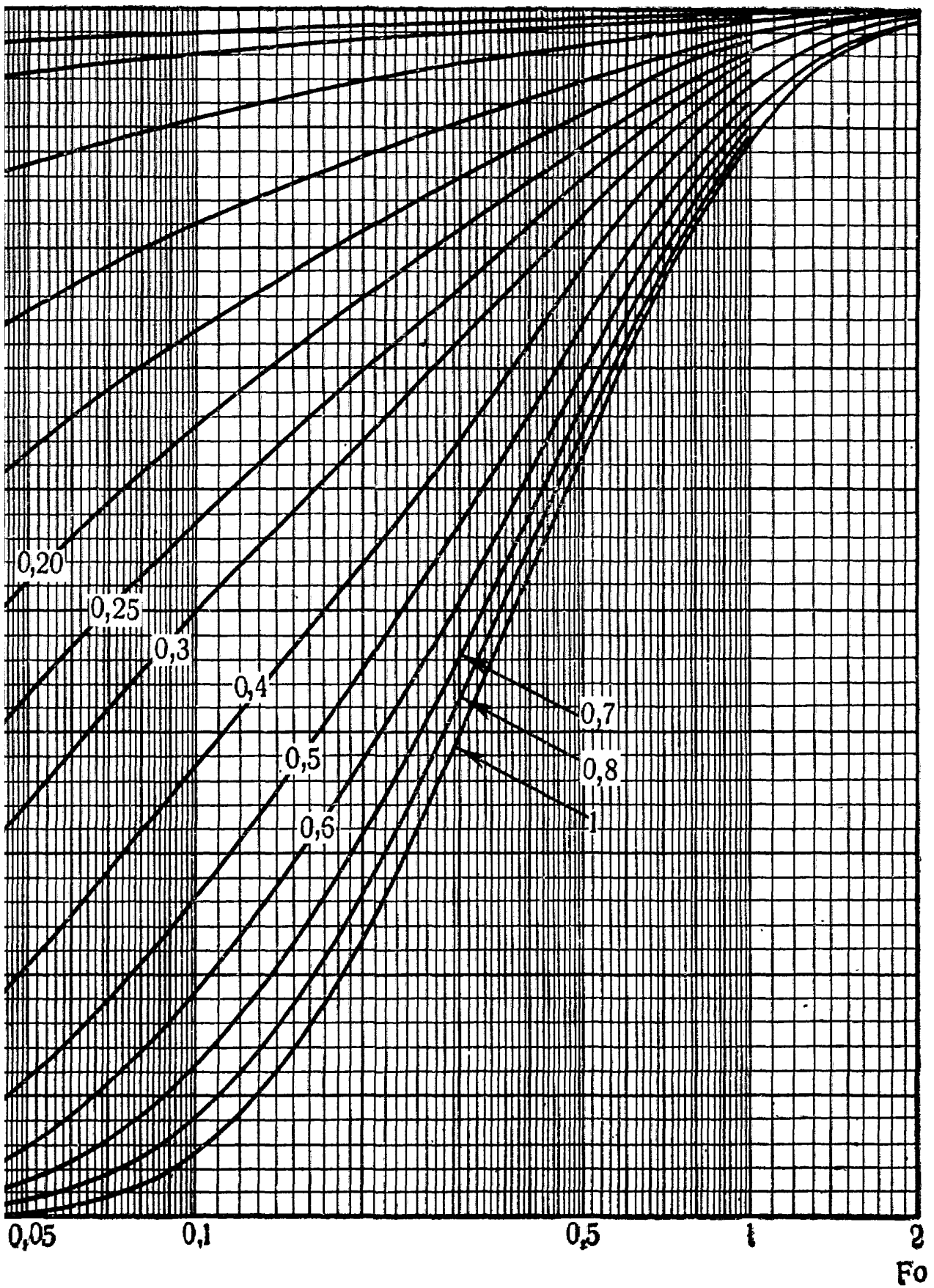


Рис.4.1(б). Зависимость избыточной температуры  $(T_0 - T) / (T_0 - T_c) = (1 - \theta)$  от числа Фурье  $Fo$  в случае пластины.

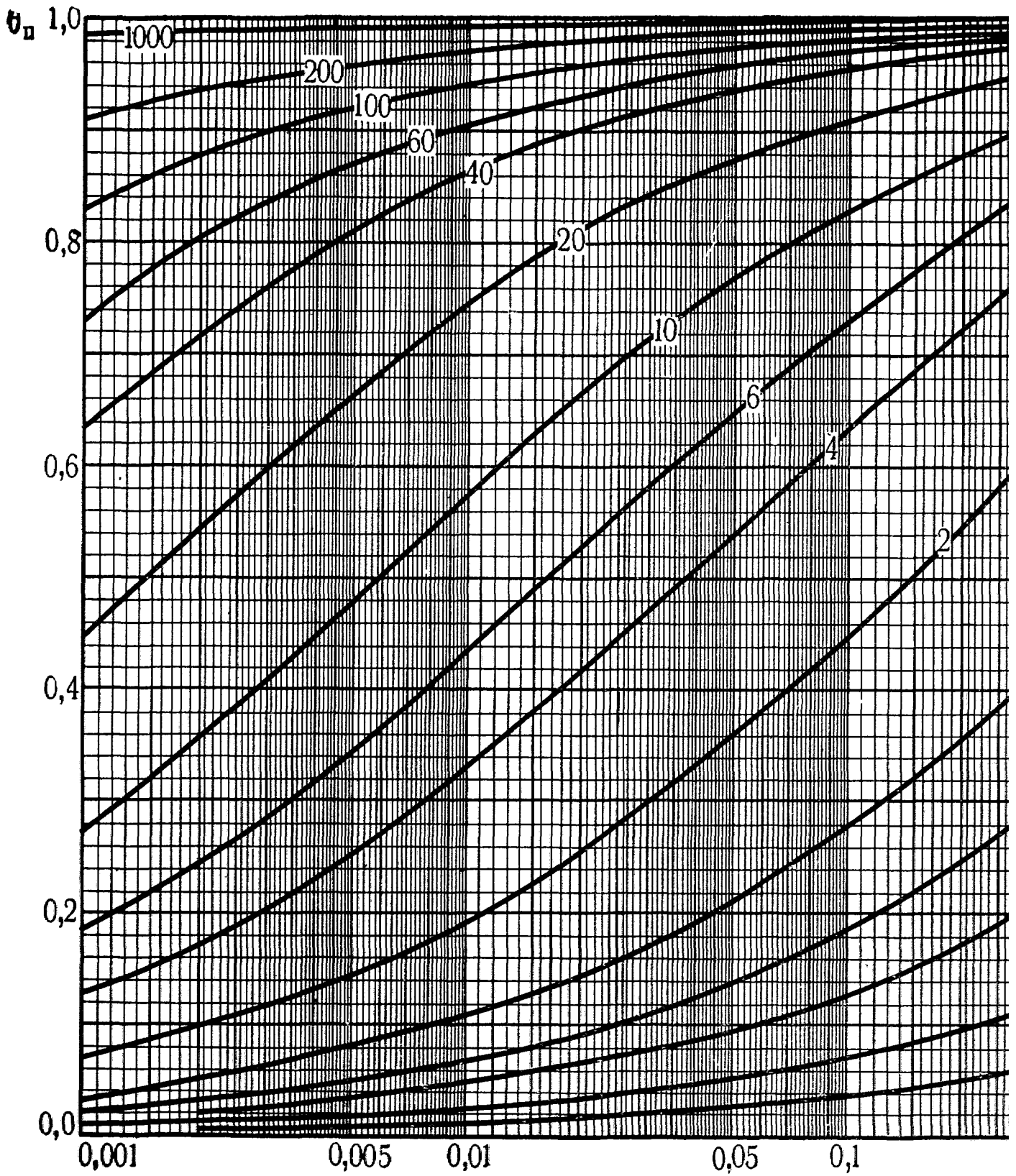


Рис.7.1(а). Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_n$  на поверхности пластины для больших значений критерия  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1000$ ).

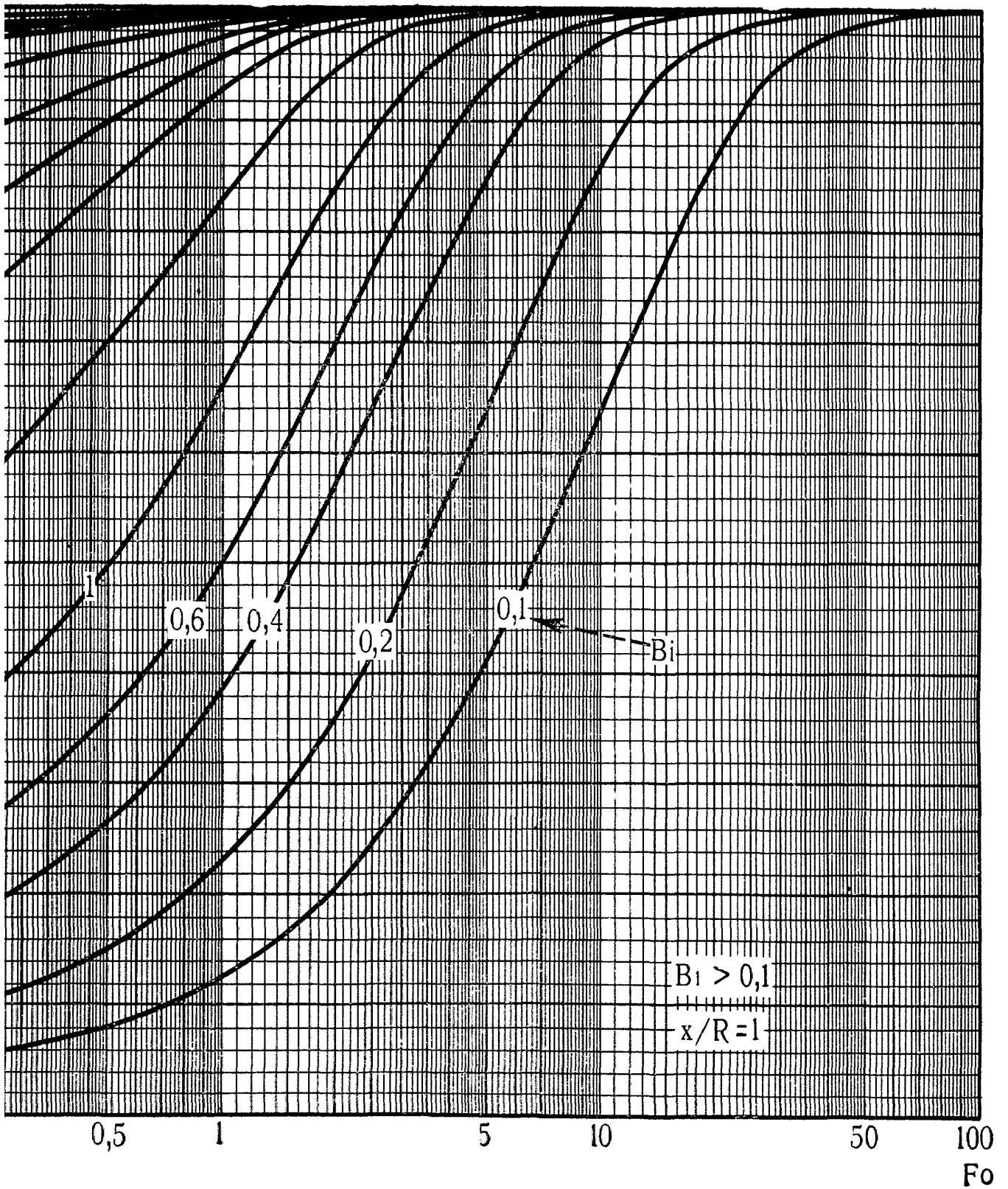


Рис.7.1(б). Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{\pi}$  на поверхности пластины для больших значений критерия  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1000$ ).



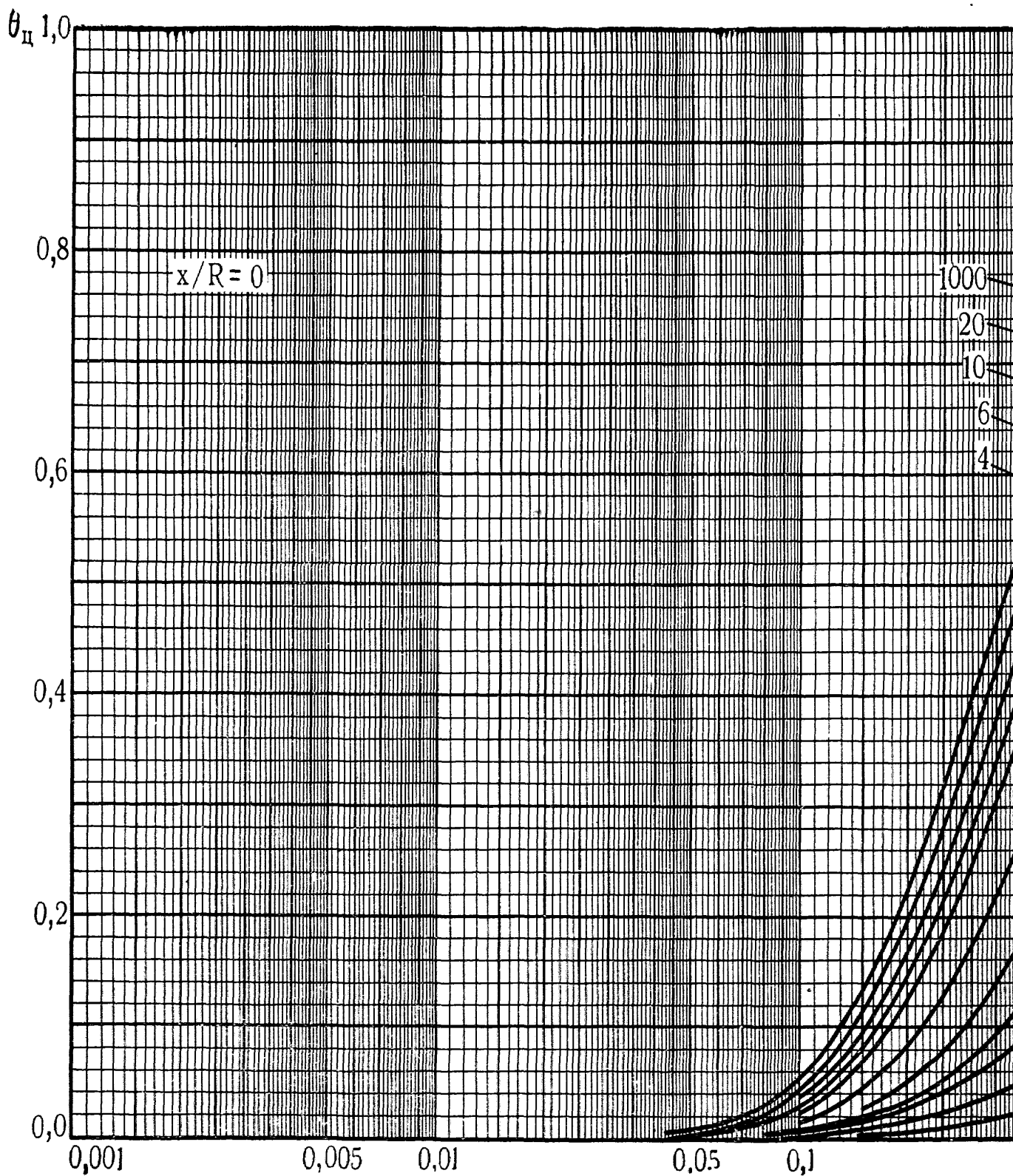


Рис.7.2(а). Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_n$  в середине пластины для больших значений  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1000$ ).

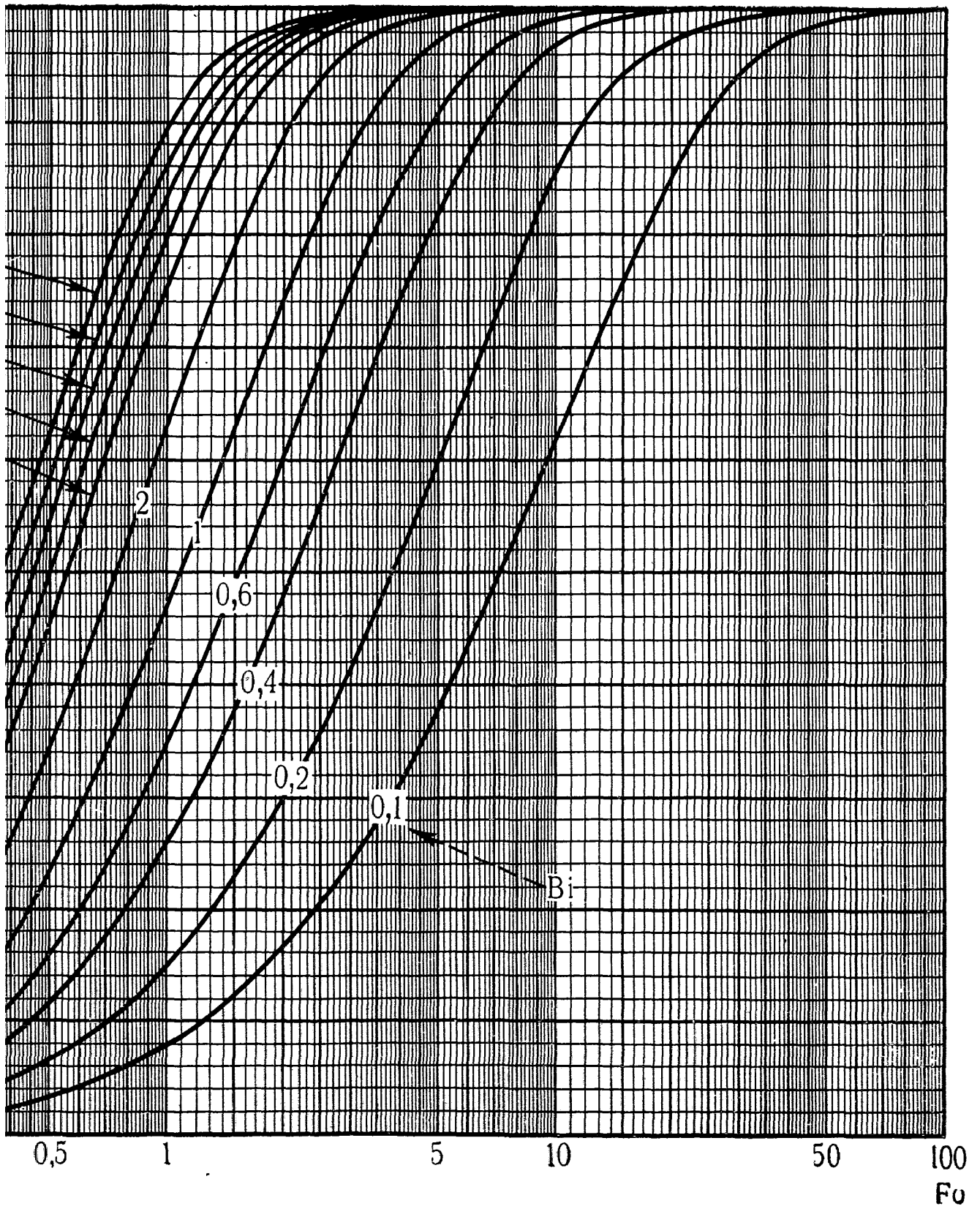


Рис.7.2(б). Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{\text{п}}$  в середине пластины для больших значений  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1000$ ).

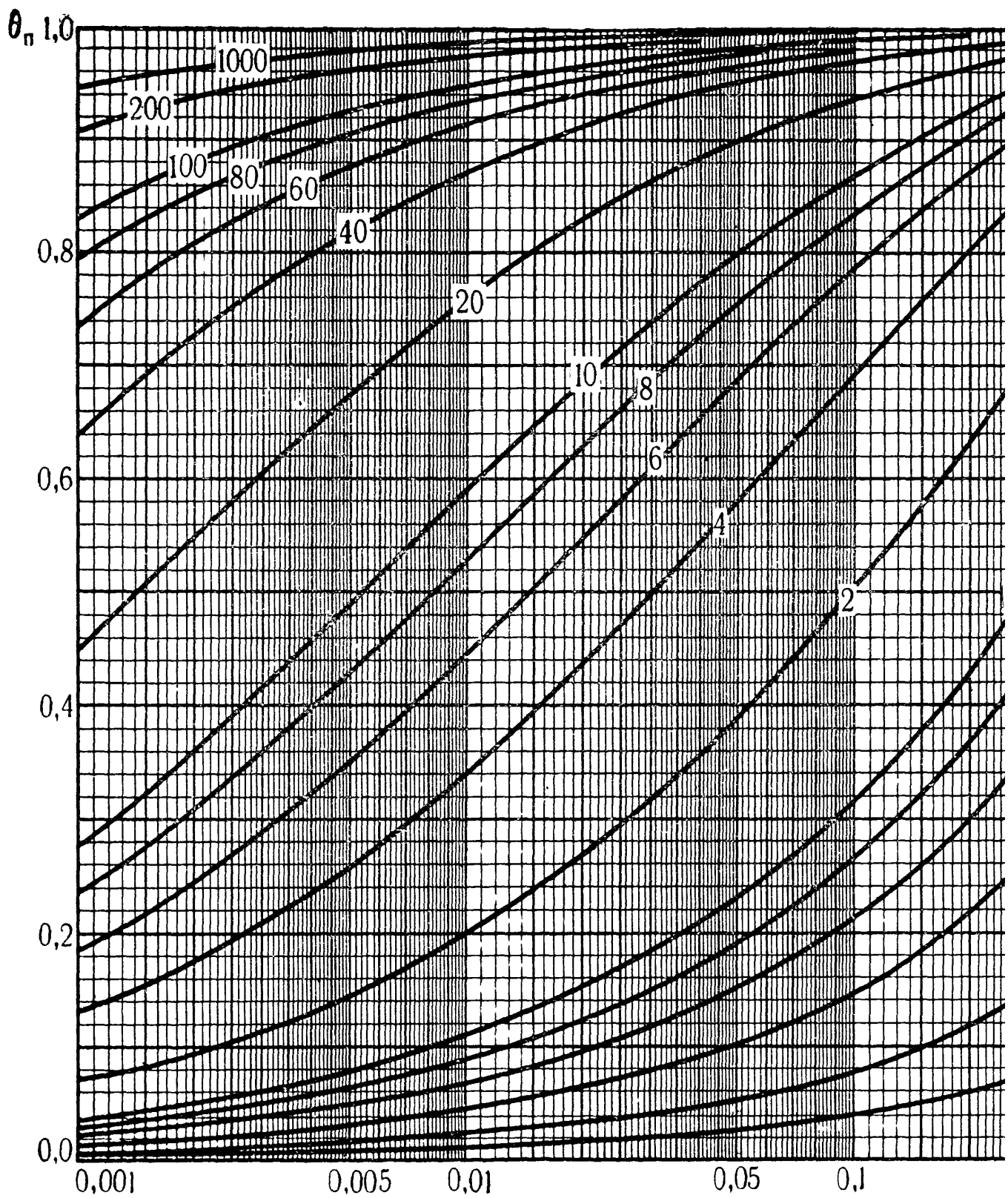


Рис.8.1(а). Графики для определения относительной избыточной температуры на поверхности цилиндра  $\theta_n$  для значений  $Bi$  от 0,1 до 1000.

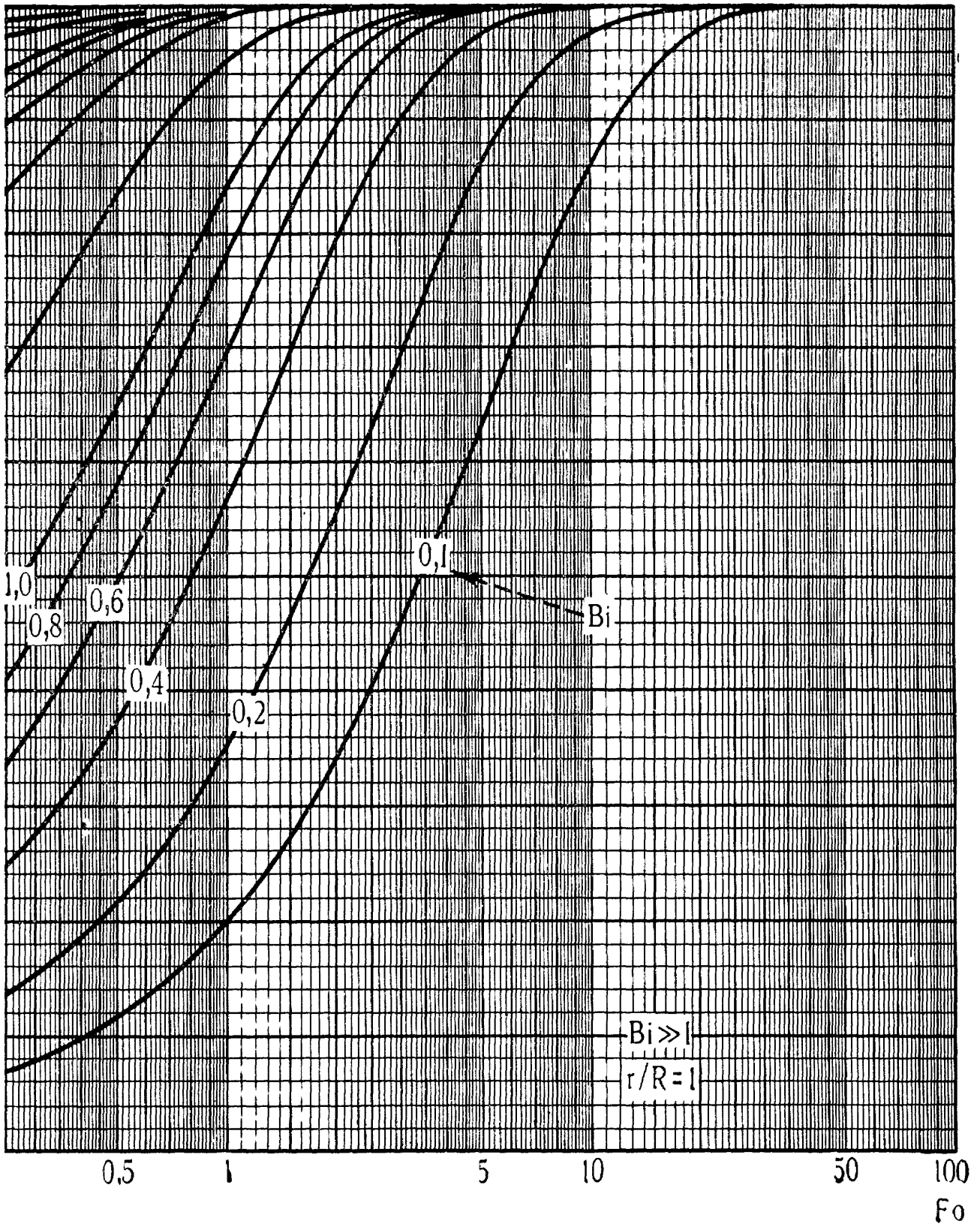


Рис.8.1(б). Графики для определения относительной избыточной температуры на поверхности цилиндра  $\theta_{\pi}$  для значений  $Bi$  от 0,1 до 1000.

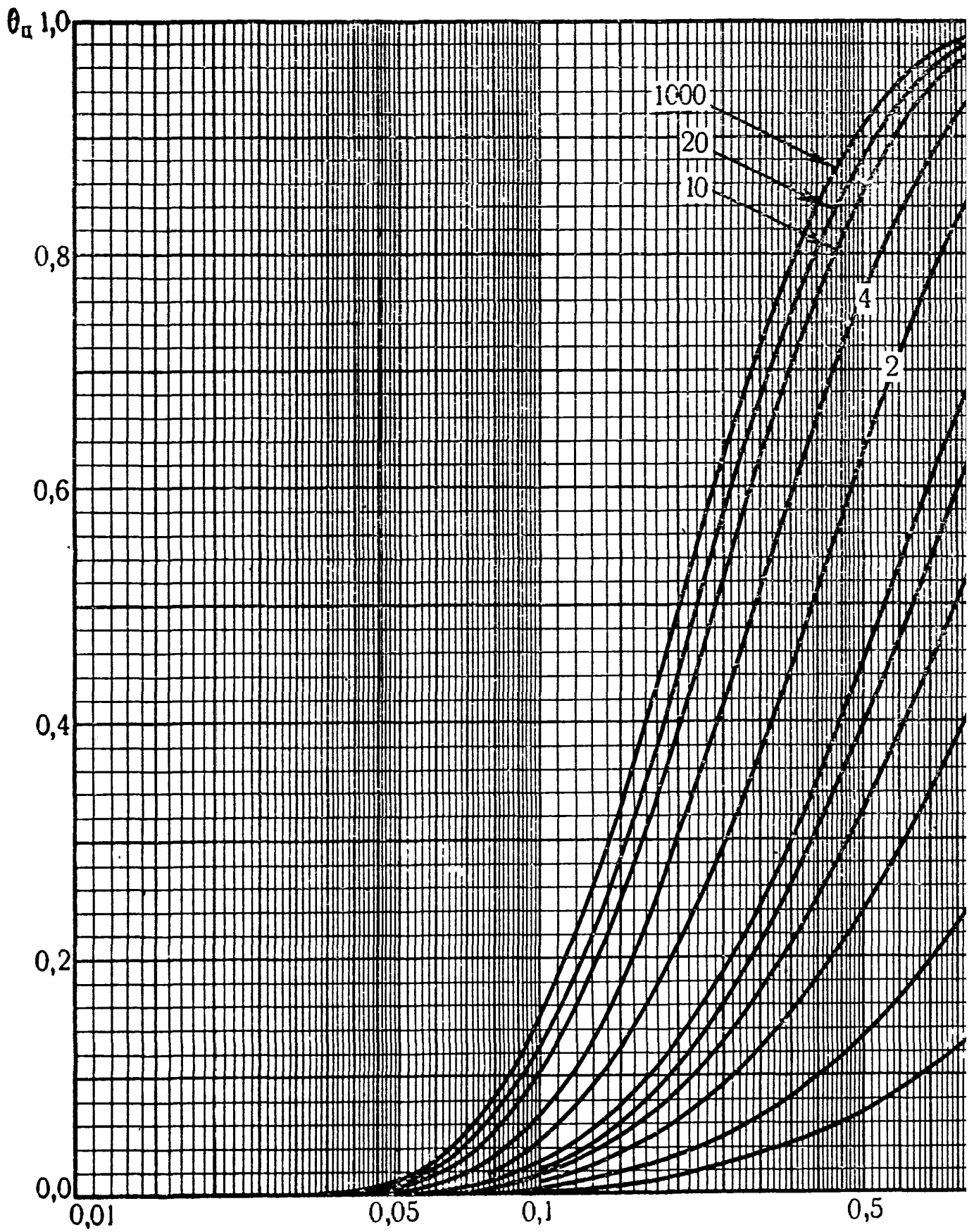


Рис.8.2(а). Графики для определения относительной избыточной температуры на оси цилиндра  $\theta_c$  для значений  $Bi$  от 0,1 до 1000.

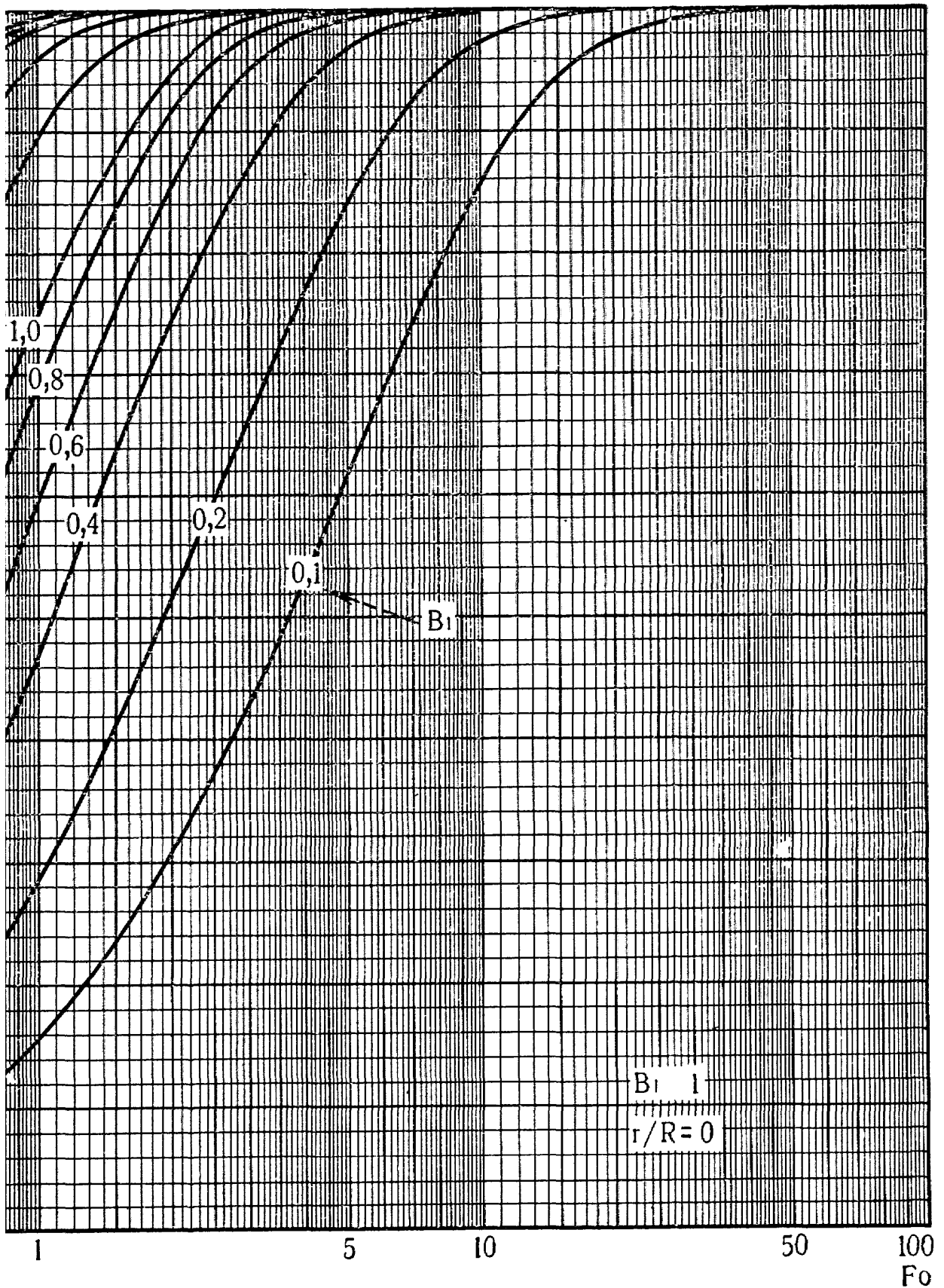


Рис.8.2(б). Графики для определения относительной избыточной температуры на оси цилиндра  $\theta_c$  для значений  $Bi$  от 0,1 до 1000.

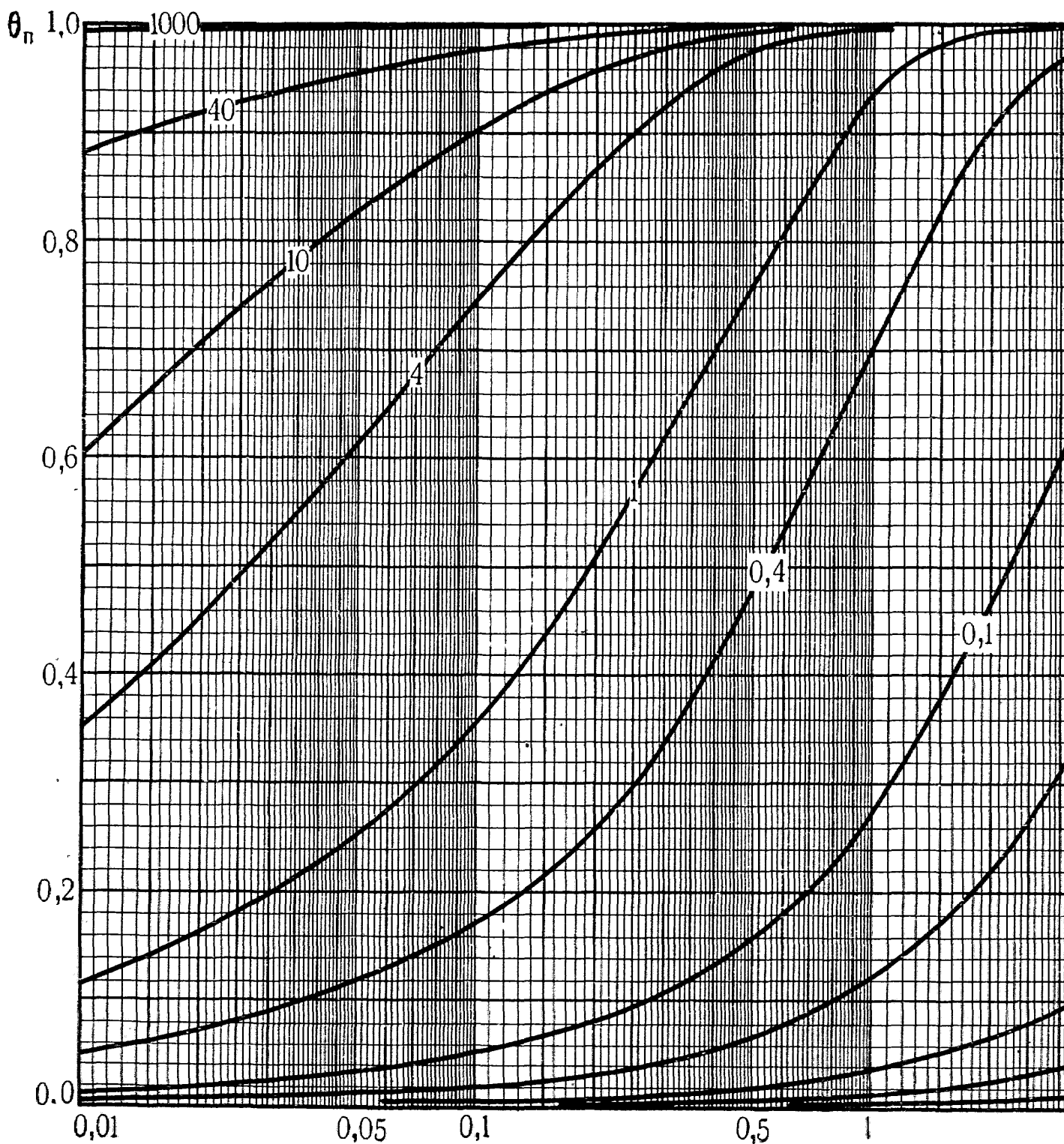


Рис.8.3(а). Графики для определения относительной избыточной температуры на поверхности шара.

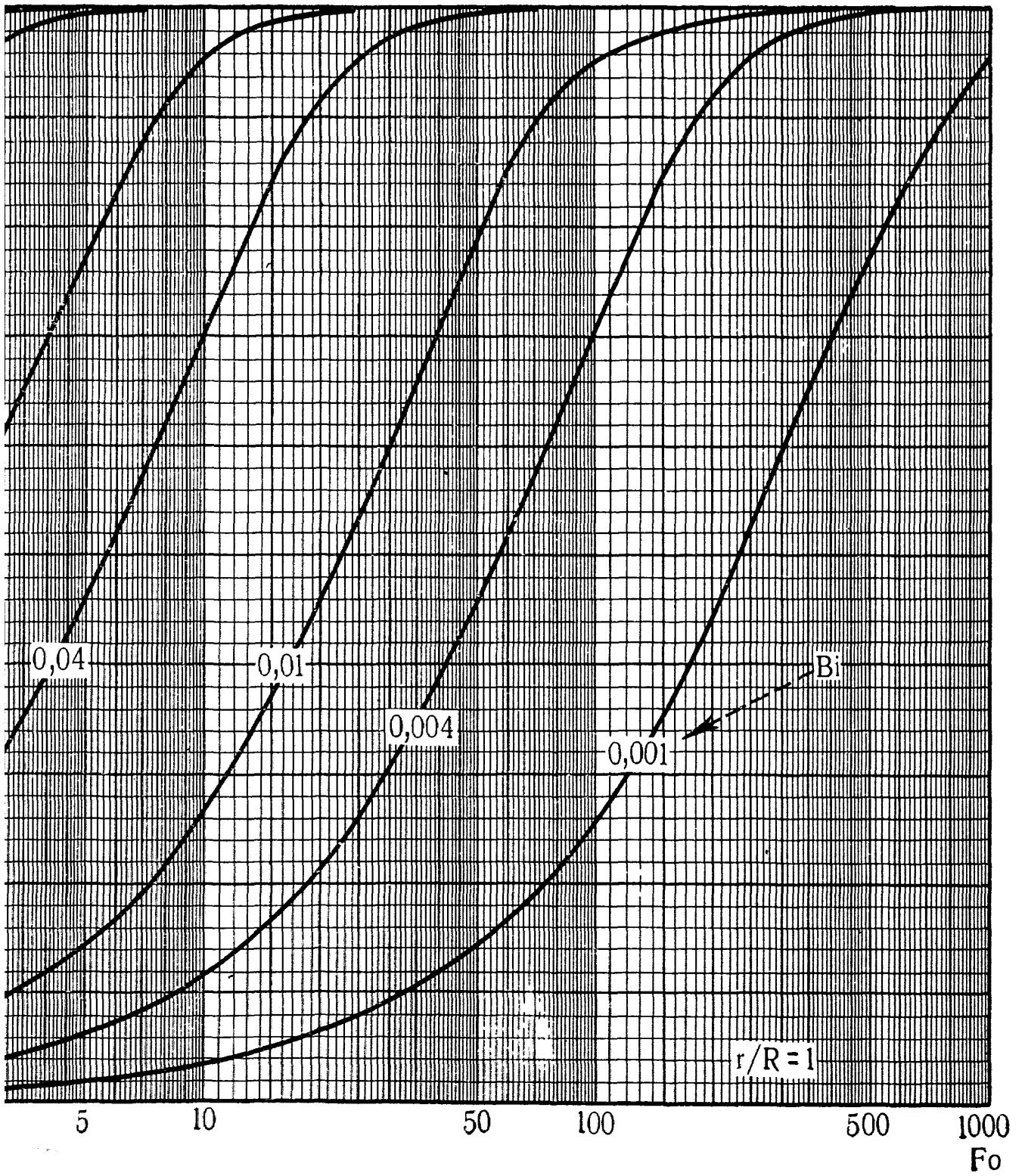


Рис.8.3(б). Графики для определения относительной избыточной температуры на поверхности шара.



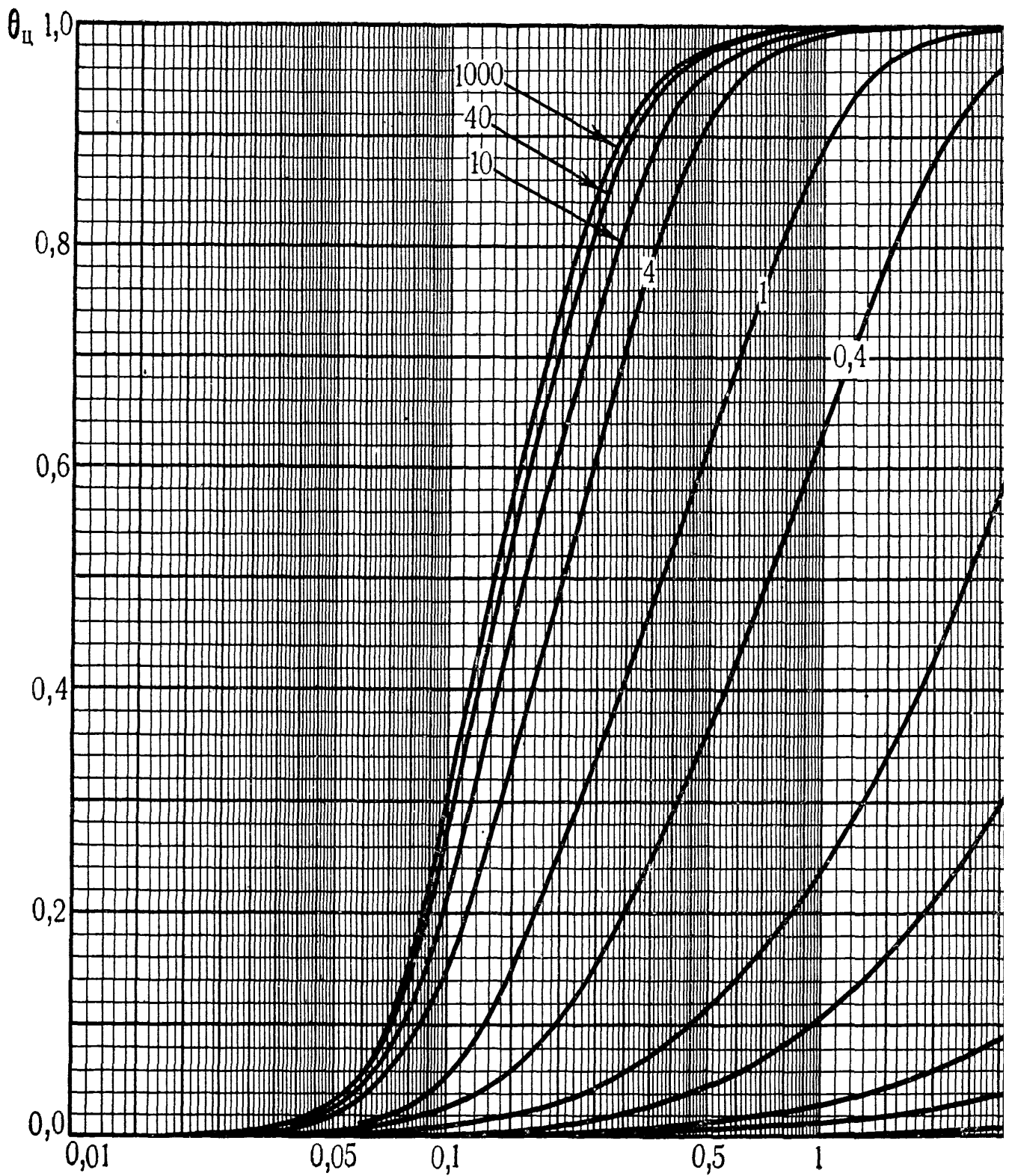


Рис.8.4(а). Графики для определения относительной избыточной температуры в центре шара.

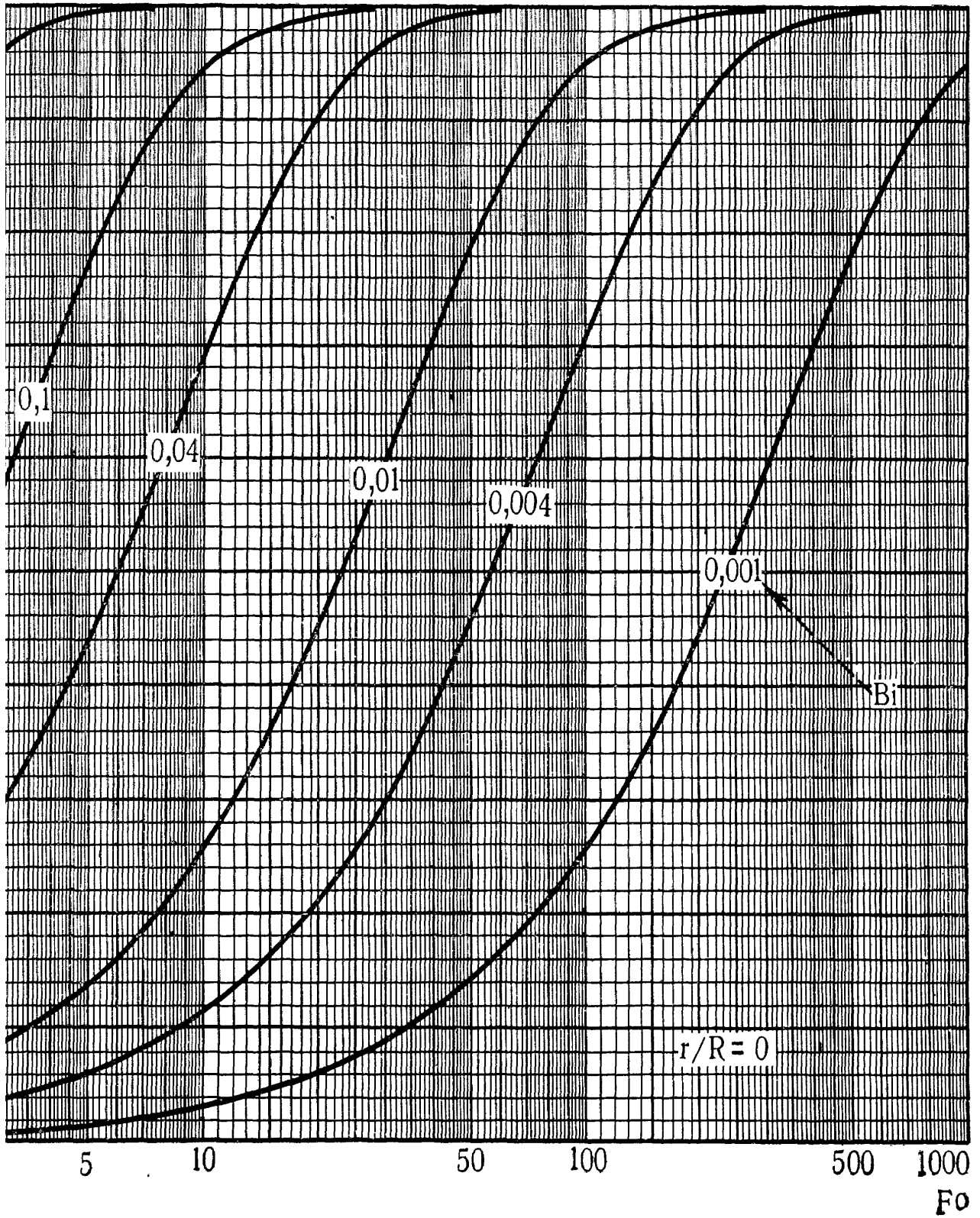


Рис.8.4(б). Графики для определения относительной избыточной температуры в центре шара.

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## **КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ И ЭНЕРГОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА**

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958). В 1954 году вышла в свет его монография «Регулярный тепловой режим». Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена. В начале 50-х годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов – оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора технических наук Дульнева Г.Н., возглавлявшего кафедру с 1958 года по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ признается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике. Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года – кафедрой теплофизики, с 1991 года – кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В.Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из которой вышли доктора наук А.Н.Гордов, А.И.Лазарев, Г.Н.Дульнев, Б.Н.Олейник, Е.С.Платунов, Н.А.Ярышев, В.Н.Васильев, Ю.П.Заричняк, А.В.Шарков и другие ученые-теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследовании термооптических явлений в космических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте «ВЕГА», при создании лазерного устройства в проекте «ФОБОС». Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов,

работа которых использует явления сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работы по созданию принципиально новых композиционных материалов – особо прочных, термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых направлений, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением. На базе ведущихся на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году. В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению – «Техническая физика». В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров.

На кафедре ведется подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин». Сейчас коллектив кафедры продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведет поиск в новых областях науки и техники.

Университет ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

## **КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ И ЭНЕРГОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА**

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958). В 1954 году вышла в свет его монография «Регулярный тепловой режим». Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена. В начале 50-х годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов – оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора технических наук Дульнева Г.Н., возглавлявшего кафедру с 1958 года по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ признается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике. Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года – кафедрой теплофизики, с 1991 года – кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В. Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из которой

вышли доктора наук А.Н. Гордов, А.И. Лазарев, Г.Н. Дульнев, Б.Н. Олейник, Е.С. Платунов, Н.А. Ярышев, В.Н. Васильев, Ю.П. Заричняк, А.В. Шарков и другие ученые-теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследовании термооптических явлений в космических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте «ВЕГА», при создании лазерного устройства в проекте «ФОБОС». Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов, работа которых использует явления сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работы по созданию принципиально новых композиционных материалов – особо прочных, термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых направлений, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением. На базе проводимых на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году. В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению – «Техническая физика». В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров.

На кафедре ведется подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин». Сейчас коллектив кафедры продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведет поиск в новых областях науки и техники.

**Редакционно-издательский отдел**

Университет ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский  
пр., 49



**Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49**