МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Ю. Григорьев, К.А. Григорьев, Д.П. Малявко

СОУДАРЕНИЕ ТЕЛ

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

УДК 531.8

Григорьев А.Ю., Григорьев К.А., Малявко Д.П. Соударение тел: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2015. – 43 с.

Рассмотрены вопросы соударения тел, особенности действия ударных сил, прямой центральный удар двух тел, опытное определение коэффициента восстановления при ударе. Даётся классификация связей при ударе. В качестве иллюстрации решены примеры действия ударных сил.

Предназначено для студентов направлений 14.03.01, 16.03.03, 23.03.03, 15.03.02, 19.03.02, 19.03.03, изучающих дисциплину «Теоретическая механика» всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Арет

Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

1. ЯВЛЕНИЯ УДАРА

Существуют такие движения тел, при которых скорости его точек изменяются непрерывно как по величине (модулю), так и по направлению. В этом случае конечные силы (например, сила тяжести) непрерывно изменяют скорости точек тела в течение некоторого конечного промежутка времени.

Иногда приходится встречаться с явлением, когда скорости точек тела изменяются на конечную величину за весьма малый промежуток времени, т.е. скачком.

Силы, изменяющие скорости точек тела в течение весьма малого промежутка времени, называются мгновенными или ударными силами. На самом деле мгновенных сил в природе нет.

Явление, при котором возникают мгновенные или ударные силы, называется ударом. Примерами такого явления могут служить: удар падающего стального шарика о стальную плиту, удар мяча о стену, столкновение движущихся тел, чрезвычайно быстрое наложение новой связи на движущееся тело и т.п.

Установлено, что основные законы механики применимы и к явлению удара.

По существу, явления удара вызываются очень большими силами, действующими в течение очень краткого промежутка времени. Опытные исследования показывают, что в обычных условиях время удара измеряется тысячными и даже десятитысячными долями секунд.

Ввиду затруднительности определения истинной продолжительности удара и последовательного изменения величины и направления ударных сил в течение удара при рассмотрении этих сил вместо действительной меры их интенсивности вводят только их суммарный и окончательный эффект.

Мгновенной (ударной) силой называется сила, которая, действуя в течение очень короткого промежутка времени, достигает при этом столь больших значений, что её импульс за время её действия является величиной конечной.

Основоположником аналитической теории соударения твёрдых тел является М.В. Остроградский. Он рассматривал удар как результат наложения нестационарных связей, быстро изменяющихся во времени.

Из сказанного следует, что признаками удара являются:

1) кратковременность явления;

2) резкое изменение скорости точек тела;

3) возникновение больших ударных сил.

Рассмотрим случай, когда модуль ударной $\vec{P}$ изменяется по закону, изображенному на рис. 1.

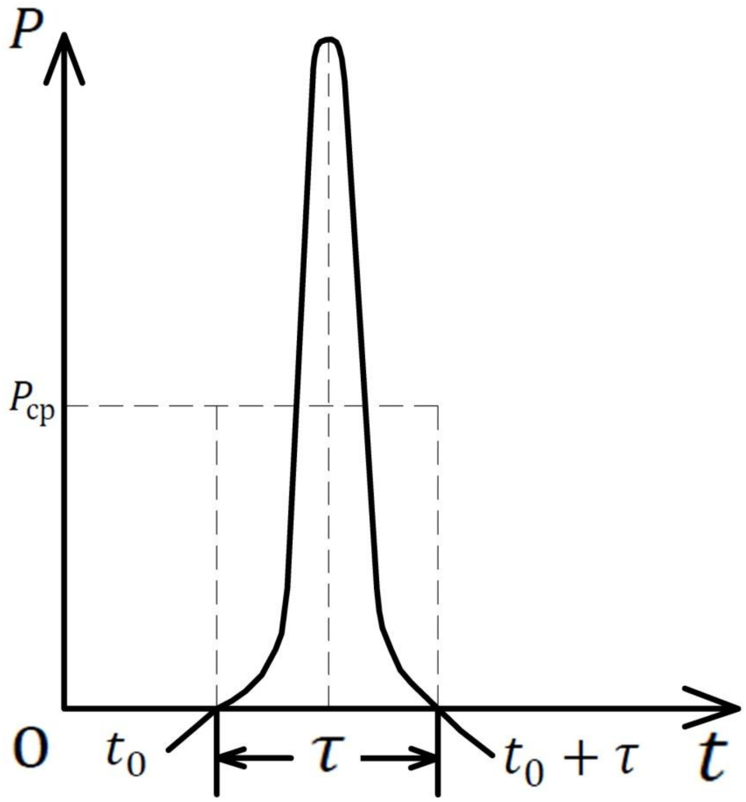

Рис. 1

Пусть $\vec{P}$ – ударная сила, $\vec{P}_{\text{ср}}$ – среднее значение ударной силы, τ – время действия этой силы.

Тогда импульс ударной силы за промежуток времени τ

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{P}dt = \vec{P}_{\text{ср}}\tau \,, \qquad (1)$$

где $\vec{S}$ – конечная величина; время удара τ очень мало.

При конечной левой части равенства (1) это возможно, если величина ударной силы будет порядка $\frac{1}{\tau}$, т. е. она будет достигать большего значения.

2. ДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ СИЛЫ НА МАТЕРИАЛЬНУЮ ТОЧКУ

Рассмотрим движение материальной точки M (рис. 2). Пусть на участке AB действовали конечные силы, равнодействующую которых обозначим $\vec{P}_k$.

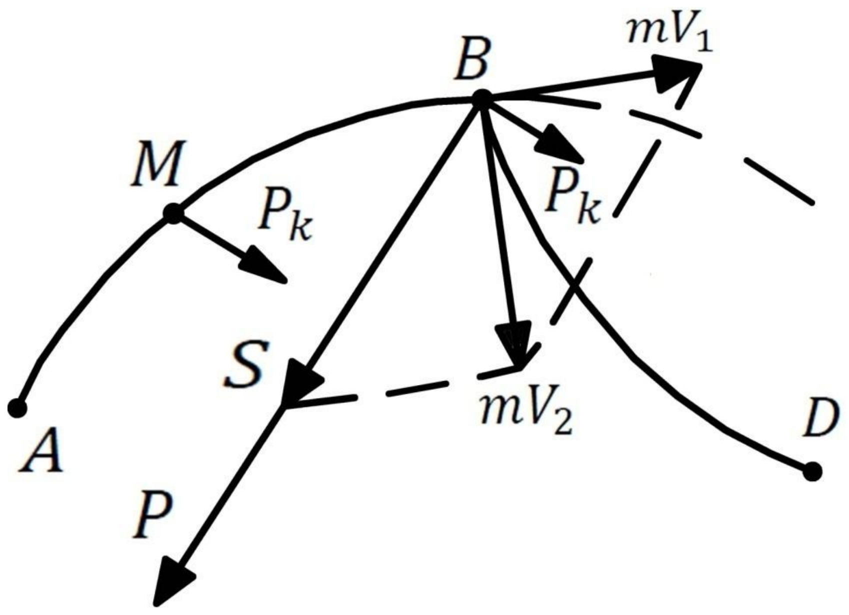

Рис. 2

Предположим, что в некоторый момент t_1 на точку M, занимавшую положение B, дополнительно начала действовать ударная сила $\vec{P}$, прекратившая своё действие в момент $t_2 = t_1 + \tau$, где τ – время удара.

Определяя изменение количества движение материальной точки за промежуток времени τ и обозначая через $\vec{S}$ и $\vec{S}_k$ импульсы сил $\vec{P}$ и $\vec{P}_k$ за тот же промежуток времени, по теореме изменения количества движения материальной точки получим

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{S} + \vec{S}_k. \tag{2}$$

Импульс конечных сил $\vec{S}_k$ за малый промежуток времени τ будет величиной того же порядка малости, что и τ, а потому им можно пренебречь по сравнению с конечным импульсом $\vec{S}$ ударной силы $\vec{P}$.

При этом уравнение (2) принимает вид

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{S}, \tag{3}$$

или

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \frac{\vec{S}}{m}. \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что результатом действия мгновенной силы за время τ является конечное изменение скорости движения точки.

В положении *B* точка получает конечное изменение скорости от $\vec{V}_1$ до $\vec{V}_2$. Поэтому в положении *B,* где действовала ударная сила, происходит резкое изменение траектории точки. После прекращения действия ударной силы точка продолжает двигаться (на участке *BD*) под действием равнодействующей конечных сил $\vec{P}_k$.

Обозначим вектор перемещения точки за время удара τ через $\overrightarrow{MM_1}$, тогда вектор средней скорости за время удара *BD*

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\tau}.$$

Перемещение же

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{V}_{\text{ср}} \cdot \tau\,, \tag{5}$$

где $\vec{V}_{\text{ср}}$ – конечная величина; τ – очень мало, а значит, перемещение точки во время удара $\overrightarrow{MM_1}$ также мало. Следовательно, перемещением точки за время удара можно пренебречь.

Таким образом, приходим к выводам:

1) действием конечных (не мгновенных) сил за время удара можно пренебречь;

2) перемещение материальной точки за время удара можно не учитывать;

3) результат действия ударной силы на материальную точку выражается в конечном изменении вектора ее скорости за время удара.

3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УДАРЕ

Действием конечных сил за время удара пренебрегаем. Ударные силы, действующие на точки системы, разделим на внешние и внутренние.

Для каждой точки системы

$$m_i\left(\vec{U}_i - \vec{V}_i\right) = \vec{S}_i^{\varepsilon} + \vec{S}_i^{j} \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n)}, \tag{6}$$

где $\vec{V}_i$ и $\vec{U}_i$ – скорости точки системы в начале и конце удара; $\vec{S}_i^{\varepsilon}$ и $\vec{S}_i^{j}$ – равнодействующие внешних и внутренних ударных импульсов, приложенных к точке; m_i – масса точки.

Суммируя равенства (6) по всем точкам системы, получим

$$\sum m_i\vec{U}_i - \sum m_i\vec{V}_i = \sum\vec{S}_i^{\varepsilon} + \vec{S}_i^{j},$$

где $\sum m_i\vec{U}_i = \vec{K}$ и $\sum m_i\vec{V}_i = \vec{K}_0$ – количество движения системы в конце и начале удара.

По свойству внутренних сил $\sum\vec{S}_i^{j} = 0$.

Следовательно,

$$\vec{K} - \vec{K} = \sum\vec{S}_i^{\varepsilon} . \qquad (7)$$

Изменение количества движения механической системы за время удара равно геометрической сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

Уравнению (7) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} K_x - K_{x0} &= \sum S_{ix}^{\varepsilon}\ ; \\ K_y - K_{y0} &= \sum S_{iy}^{\varepsilon}; \\ K_z - K_{z0} &= \sum S_{iz}^{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Изменение проекций количества движения механической системы на любую ось равно сумме проекций на ту же ось всех внешних сил ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

Выражая количество движения системы через массу всей системы m и скорости центра масс системы $\vec{V}_c$ и $\vec{U}_c$, получим

$$m\vec{U}_c - m\vec{V}_c = \sum\vec{S}_i^{\varepsilon}. \qquad (9)$$

Равенство (9) определяет изменение скорости центра масс системы при ударе.

При отсутствии равнодействующей внешних ударных импульсов из равенств (7) и (9) следует: если $\sum\vec{S}_i^{\varepsilon} = 0$, то $\vec{K} = \vec{K}_0$ и $\vec{U}_c = \vec{V}_c$.

Если геометрическая сумма внешних ударных импульсов, приложенных к системе, равна нулю, то количество движения системы и скорость центра масс ее при ударе не изменяются.

4. ПРЯМОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ

Общая нормаль AB (рис. 3, б) к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения называется *линией удара*. Движение тел предполагаем поступательным и для определенности допустим, что $\vec{V}_1 > \vec{V}_2$. Удар называется центральным, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

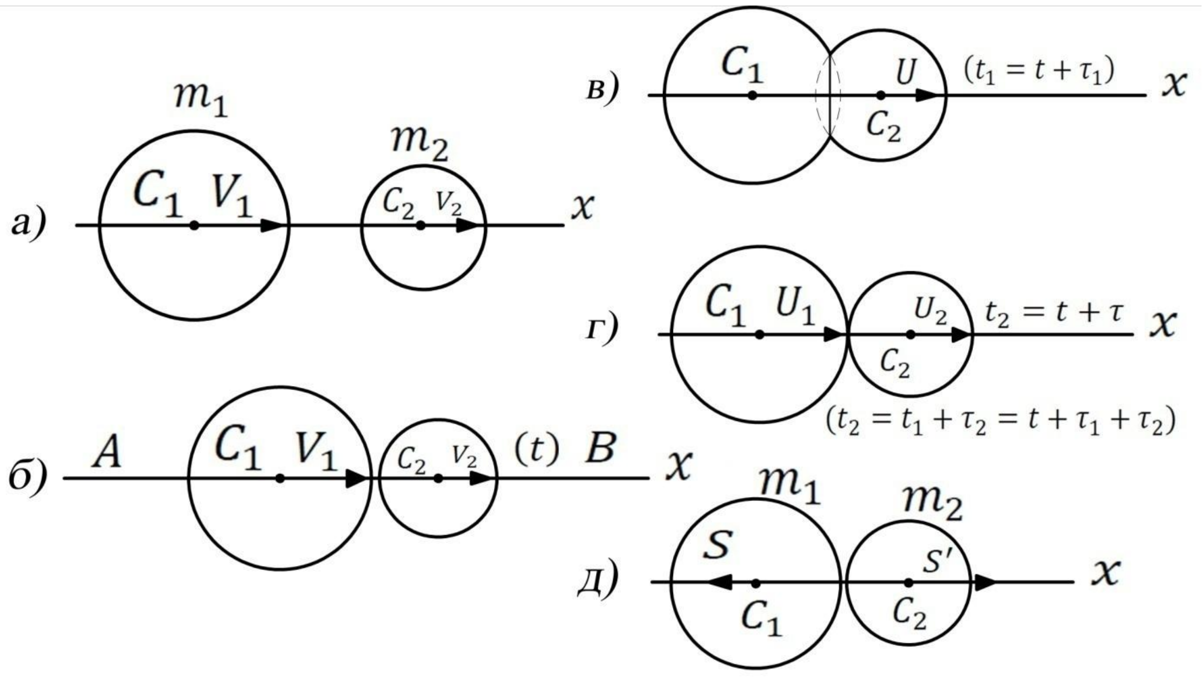

Рис. 3

Центральный удар называется прямым, если скорости центров масс соударяющихся тел в начале удара направлены по линии удара.

При соударении двух тел различают две фазы удара.

Первая фаза удара начинается в момент времени t – момент соприкосновения тел. При этом скорости тел будут $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ (см. рис. 3, б)

Первая фаза удара заканчивается в момент времени $t_1 = t + \tau_1$ – момент наибольшей деформации соударяющихся тел.

При этом у тел будет общая скорость $\vec{U}$ (см. рис. 3, в). Начиная с этого момента происходит восстановление первоначальной формы тел за счет накопившейся в них потенциальной энергии упругой деформации.

Вторая фаза удара начинается в момент $t_1 = t + \tau_1$ (окончание первой фазы удара) – момент наибольшей деформации (см. рис. 3, в) и заканчивается в момент $t_2 = t_1 + \tau_2$ – момент полного и частичного восстановления тел. При этом скорости тел будут $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$.

При дальнейшем рассмотрении все векторные равенства будут проектироваться на ось x (линию удара).

Рассмотрим первую фазу удара (см. рис. 3, б, в) в промежутке времени от t до $t_1 = t + \tau_1$. Возникающие при этом ударные импульсы $\vec{S}_I$ и $\vec{S}_I'$ будут равными по модулю, но обратными по направлению (действие и противодействие). Импульс $\vec{S}_I$ приложен к первому телу, а импульс $\vec{S}_I'$ приложен ко второму телу. Если рассматривать каждое тело в отдельности, то эти импульсы будут внешними. Если в рассматриваемый объект включить оба тела, то эти импульсы будут внутренними.

Включая в объект рассмотрения оба тела, согласно равенству (8), получим

$$(m_1 + m_2)U - (m_1V_1 + m_2V_2) = 0,$$

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)U,$$

откуда

$$U = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}, \tag{10}$$

где U – скорость соударяющихся тел в конце первой фазы удара; она же в начале второй фазы удара.

Определим импульсы ударных сил $S_I' = -S_I$ за время первой фазы удара τ_1, для чего рассмотрим каждое тело в отдельности.

Применяя равенство (8), получим для первого и второго тел

$$\left.\begin{aligned} m_1(U - V_1) = -S_I; \\ m_2(U - V_2) = S_I'. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Вставив в равенство (11) значение U из выражения (10), найдем модули ударных импульсов первой фазы:

$$\vec{S}_I' = m_2\left(\frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} - V_2\right) = \frac{m_1m_2(V_1 - V_2)}{m_1 + m_2}. \tag{12}$$

Для второй фазы удара (см. рис. 3, в, г) по аналогии будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} m_1(U_1 - U) = -S_{II}; \\ m_2(U_2 - U) = S_{II}'. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В уравнения (13) входят три неизвестные величины U_1, U_2 и S_{II}. Для возможности решения задачи необходимо составить еще одно уравнение, характеризующее упругие свойства соударяющихся тел.

Упругие свойства соударяющихся тел могут быть выражены равенством

$$\frac{S_{II}}{S_I} = k \quad \text{и} \quad \frac{S_{II}'}{S_I'} = k; \quad S = S_I + S_{II} = (1 + k)S_I, \tag{14}$$

где k – коэффициент восстановления; S – ударный импульс за весь период упругого удара.

При этом равенства (13) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} m_1(U_1 - U) = -kS_I; \\ m_2(U_2 - U) = kS_I'. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Разделим первое и второе уравнения (11) соответственно на первое и второе уравнения (15):

$$\frac{U_1 - U}{U - V_1} = k \quad \text{и} \quad \frac{U_2 - U}{U - V_2} = k. \tag{16}$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} U_1 = U + k(U - V_1) = U(1 + k) - kV_1; \\ U_2 = U + k(u - V_2) = U(1 + k) - kV_2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Подставляя в равенства (17) U из формулы (10), получим

$$U_1 = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}(1 + k) - kV_1 =$$

$$= \frac{m_1V_1 + m_2V_2 + km_1V_1 + km_2V_2 - km_1V_1 - km_2V_1 + m_2V_1 - m_2V_1}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1V_1 + m_2V_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2V_1 - m_2V_2 + km_2V_1 - km_2V_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= V_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)(1 + k);$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 = V_1 - (1 + k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2); \\ U_2 = V_2 - (1 + k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Умножив равенства (18) на m_1 и m_2 и сложив их, получим

$$m_1U_1 + m_2U_2 = m_1V_1 + m_2V_2. \tag{19}$$

Количество движения соударяющихся тел остается неизменным, так как внутренние силы не изменяют его.

Из равенства (17) следует

$$U_1 - U_2 = -k(V_1 - V_2). \qquad (20)$$

Относительная скорость тел после удара прямо противоположна относительной скорости до удара и составляет некоторую дробную часть ее. Формула (20) выражает особую гипотезу Ньютона.

Из равенства (20) получим выражение для коэффициента восстановления:

$$k = -\frac{U_1 - U_2}{V_1 - V_2}. \qquad (21)$$

Коэффициент восстановления при ударе двух тел равен отношению модулей относительных скоростей тел после удара и до удара. Различают не вполне упругий удар, неупругий удар и абсолютно упругий удар.

При не вполне упругом ударе коэффициент восстановления $k < 1$. В этом случае скорости соударяющихся тел после удара и ударные импульсы определяются равенствами (10), (12), (14) и (18).

При неупругом ударе $k = 0$. Такой удар включает в себя лишь первую фазу удара.

В этом случае скорость соударяющихся тел после удара и ударный импульс определяются равенствами (10) и (12).

При абсолютно упругом ударе $k = 1$. В этом случае формулы (17) и (18), определяющие скорости тел после удара, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= 2U - V_1 = V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2); \\ U_2 &= 2U - V_2 = V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2). \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

В этом случае ударный импульс соударяющихся тел за весь период упругого удара ($k = 1$) с учетом формул (12) и (14)

$$S = S' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2). \qquad (23)$$

5. УДАР ТОЧКИ О СВЯЗЬ ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть шарик падает с высоты h_1 на массивную плиту. В момент соприкосновения шарика с плитой (рис. 4) происходит удар.

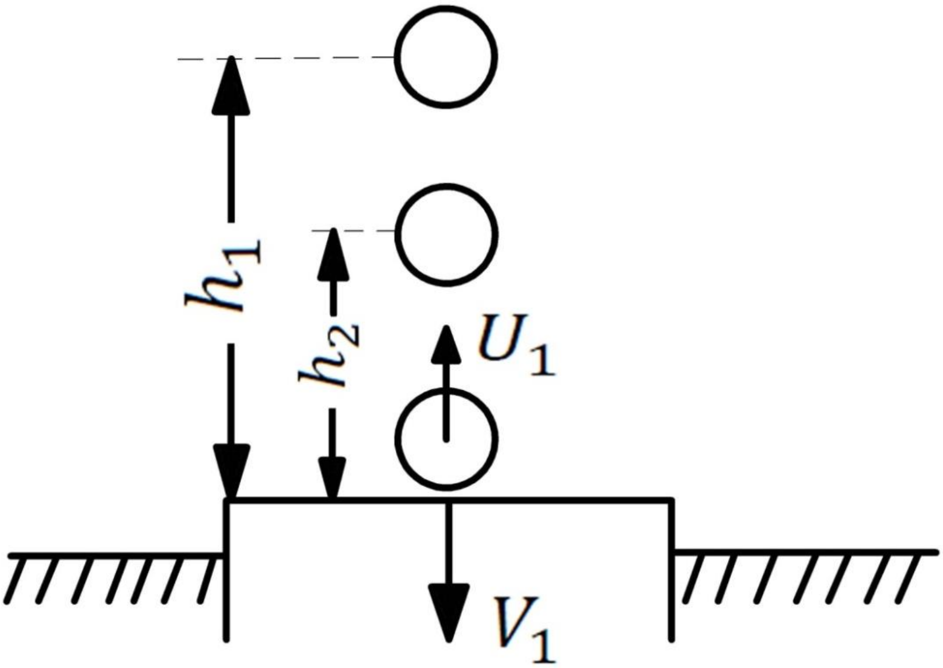

Рис. 4

Скорость шарика до удара

$$V_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

В течение первой фазы удара (за время τ_1) происходит деформация до тех пор, пока скорость шарика U в конце первой фазы удара не станет равной нулю, так как плита неподвижна и имеет большую массу.

В течение второй фазы удара (за время τ_2) под действием сил упругости шарик частично восстанавливает свою первоначальную форму и отделяется от плиты со скоростью

$$U_1 = -\sqrt{2gh_2}.$$

Из-за остаточных деформаций и нагревания шарика первоначальная кинетическая энергия шарика полностью не восстанавливается, поэтому модуль скорости $\vec{U}_1$ будет меньше модуля скорости $\vec{V}$.

Скорости массивной плиты до удара $\vec{V}_2$ и после удара $\vec{U}_2$ будут равны нулю.

По равенству (21) определим коэффициенты восстановления:

$$k = -\frac{U_1 - U_2}{V_1 - V_2} = -\frac{-\sqrt{2gh_2} - 0}{\sqrt{2gh_1} - 0} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \qquad (24)$$

Коэффициенты восстановления k зависят от упругих свойств материала соударяющихся тел и от скорости при ударе. Эти коэффициенты приводятся в справочниках. Например, средние значения коэффициента k при скорости V (м/с), таковы: для стали и пробки – 5/9, для слоновой кости – 8/9, для стекла – 15/16, для дерева – 1/2.

Рассмотрим удар шара о неподвижную гладкую поверхность (удар без трения) в случае, когда скорость его центра $\vec{V}$ образует с нормалью к поверхности угол падения α (рис. 5)

При отсутствии трения реакция поверхности направлена по нормали и ее проекция на касательную равна нулю.

На основании теоремы о проекции количества движения

$$mU_\tau - mV_\tau = 0,$$

$$U_\tau = V_\tau. \qquad (25)$$

Касательная составляющая скорости при ударе о гладкую неподвижную поверхность остается без изменений.

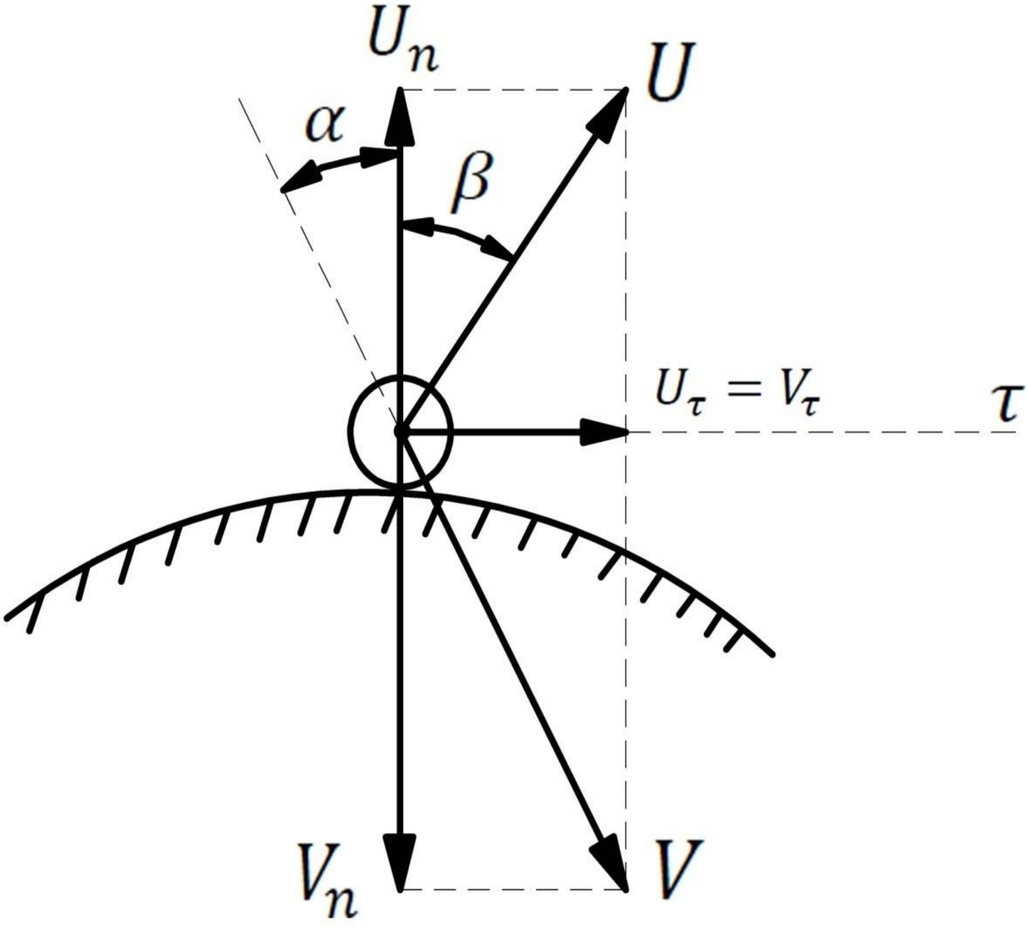

Рис. 5

В рассматриваемом случае коэффициент восстановления

$$k = -\frac{U_n}{V_n}, \quad U_n = -kV_n. \tag{26}$$

Принимая во внимание равенства (25) и (26), получим

$$\left.\begin{aligned} U \cdot \sin\beta &= V \cdot \sin\alpha; \\ U \cdot \cos\beta &= -kV \cdot \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Возведя равенства (27) в квадрат и сложив их, получим скорость шара после удара:

$$U = V\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}. \qquad (28)$$

Разделив равенства (27), имеем

$$\text{tg}\beta = \frac{1}{k}|\text{tg}\alpha|,$$

$$k = \frac{|\text{tg}\alpha|}{\text{tg}\beta}. \qquad (29)$$

При не вполне упругом ударе $k < 1$ и $\text{tg}\beta > \text{tg}\alpha$, $\beta > \alpha$, т.е. угол отражения больше угла падения. В случае абсолютно упругого удара $k = 1$, $\text{tg}\beta = \text{tg}\alpha$ и $\beta = \alpha$, т.е. угол отражения равен углу падения. При неупругом ударе $k = 0, \text{tg}\alpha \neq 0$, $\text{tg}\beta = \infty$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$, т.е. после удара о поверхность шар не отражается, а начинает двигаться по касательной.

6. ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ УДАРЕ ДВУХ ТЕЛ ТЕОРЕМА КАРНО

Рассмотрим совместно равенства (19) и (20). Возведем их в квадрат и, умножив второй результат на $m_1 m_2$, сложим; добавим к правой части члены

$$m_1 m_2(V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2) - m_1 m_2(V_1 - V_2)^2;$$

$$(m_1 m_2)(m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2) =$$

$$= (m_1 m_2)(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) - (1 - k^2)m_1 m_2(V_1 - V_2)^2.$$

Последнее равенство делим на $2(m_1 + m_2)$ и, преобразовывая его, получим

$$\left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}\right) = (1 - k^2)\frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Обозначая кинетическую энергию соударяющихся тел до удара T_0 и после удара T, получим

$$T_0 - T = (1 - k^2)\frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (30)$$

Равенство (30) выражает собой потерю кинетической энергии при ударе. Из данной формулы следует, что при абсолютно упругом ударе $(k = 1)$ $T_0 - T = 0$, т.е. потери кинетической энергии не происходят.

При неупругом ударе $(k = 0)$ формула (30) принимает вид

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (31)$$

В выражениях (30) и (31) потеря кинетической энергии соударяющихся тел выражена через скорости, которыми обладали тела до удара.

Получим другой вид формул потери кинетической энергии. Преобразуем формулы (18):

$$V_1 - U_1 = (1 + k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2);$$
$$V_2 - U_2 = -(1 + k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2).$$

Возведем эти равенства в квадрат, умножим полученные результаты на m_1 и m_2 и, сложив равенства, получим

$$m_1(V_1 - U_1)^2 + m_2(V_2 - U_2)^2 = (1 + k)^2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)^2.$$

Сделав подстановку в равенство (30), получаем

$$T_0 - T = (1-k^2)\frac{1}{2}\frac{m_1(V_1-U_1)^2 + m_2(V_2-U_2)^2}{(1+k)^2};$$

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{m_1(V_1-U_1)^2}{2} + \frac{m_2(V_2-U_2)^2}{2}\right]. \qquad (32)$$

В выражении (32) величины $(V_1 - U_1)$ и $(V_2 - U_2)$ представляют собой скорости, потерянные телами при ударе.

Равенство (32) можно сформулировать так: кинетическая энергия, потерянная телами при не вполне упругом ударе $(k < 1)$, составляет дробную часть кинетической энергии тел, соответствующей их потерянным скоростям.

Сама дробь равна $\frac{1-k}{1+k}$.

При неупругом ударе ($k = 0$ и $U_1 = U_2 = U$) формула (32) принимает вид

$$T_0 - T = \frac{m_1(V_1-U)^2}{2} + \frac{m_2(V_2-U)^2}{2}. \qquad (33)$$

Равенство (33) выражает теорему Карно: кинетическая энергия, потерянная телами при неупругом ударе, равна кинетической энергии тел, соответствующей их потерянным скоростям.

Формулу (33) можно получить и иным путем.

Потеря кинетической энергии при неупругом ударе

$$T_0 - T = \left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 U^2}{2} + \frac{m_2 U^2}{2}\right). \qquad (33a)$$

Уравнение (10) перепишем в таком виде:

$$0 = m_1 U + m_2 U - m_1 V_1 - m_2 V_2. \qquad (33б)$$

Сложив равенства (33а) и (33б), предварительно умножим равенство (33б) на U:

$$T_0 - T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{m_1 U^2}{2} + \frac{m_2 U^2}{2} - m_1 V_1 U - m_2 V_2 U.$$

Преобразовывая, получаем

$$T_0 - T = \frac{m_1 (V_1 - U)^2}{2} + \frac{m_2 (V_2 - U)^2}{2}. \qquad (34)$$

Теорему Карно (34) можно сформулировать еще следующим образом: если первоначальные связи и связи, внезапно наложенные, сохраняются после удара и число их таково, что система обращается в систему с полными связями, т.е. имеет одну степень свободы, то кинетическая энергия, потерянная за время удара, равна кинетической энергии, которую имела бы система, если бы скорость каждой точки равнялась ее потерянной скорости. При сохраняющихся связях коэффициент восстановления $k = 0$.

7. СВЯЗИ ПРИ УДАРЕ

Следует отметить, что рассматривая явление удара, мы не встречаемся с принципиально новыми видами связей, которые не вошли бы в принятые классификации связей.

При действии ударных сил есть известная специфика, так как на объект (тело) внезапно могут накладываться новые, не существовавшие ранее связи или разрушаться старые, существовавшие связи.

Рассмотрим связи, которые имеют место при ударе. В момент удара могут существовать связи сохраняющиеся и несохраняющиеся.

Сохраняющиеся связи – связи, которые, существуя в момент удара, будут существовать и непосредственно после него. Действительное перемещение, следующее сразу же после удара, допускается этими связями.

Несохраняющиеся связи – связи, которые, существуя в момент удара, не будут существовать после него. Действительное перемещение, следующее сразу же после удара, не принадлежит к числу перемещений, допускаемых этой связью.

Все связи, существующие в момент удара, могут быть разделены на категории:

1) связи, существующие до, во время и после удара;

2) связи, возникающие во время удара, сохраняющиеся после него, но не существовавшие до удара;

3) связи, существовавшие до удара, существующие во время него, но не сохраняющиеся после удара;

4) связи, существующие только во время удара, но отсутствующие до и после удара.

Первые две категории содержат сохраняющиеся связи, а две остальные – несохраняющиеся связи.

8. ПРИМЕРЫ ДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ СИЛ

ПРИМЕР 1. Шар массой $m_1 = 4$ кг ударяется о неподвижный шар массой $m_2 = 10$ кг. Определить скорость первого шара до удара V_1 и модуль ударного импульса, если после неупругого удара их общая скорость $U = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (рис. 6). Найти потерю кинетической энергии при ударе.

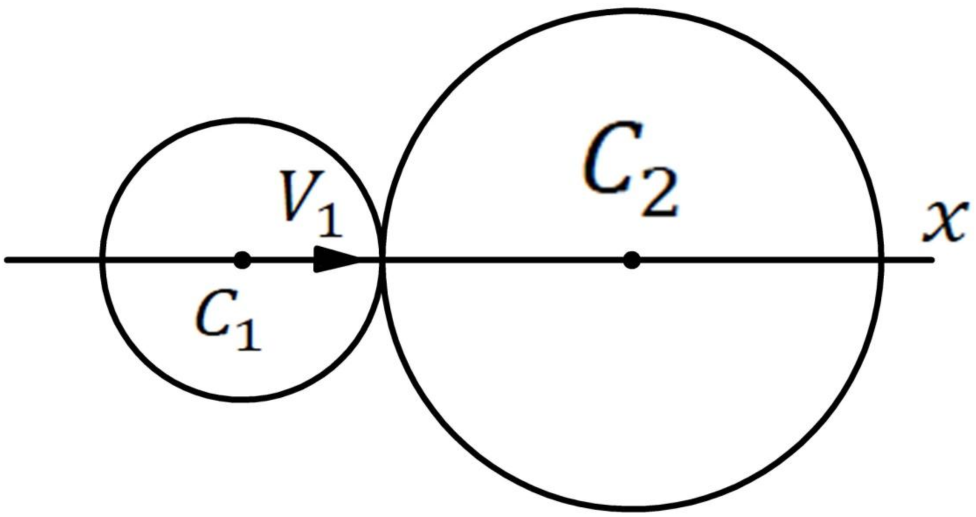

Рис. 6

Неупругий удар включает в себя лишь первую фазу удара (коэффициент восстановления $k = 0$). По равенству (10)

$$U = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2};$$

$$2 = \frac{4 \cdot V_1 + 10 \cdot 0}{4 + 10} = \frac{4V_1}{14};$$

$$V_1 = \frac{2 \cdot 14}{4} = 7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Модуль ударного импульса по равенству (12)

$$S = \frac{m_1m_2(V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 10(7 - 0)}{(4 + 10)} = 20\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}\ .$$

Потеря кинетической энергии по равенству (33)

$$T_0 - T = \frac{m_1(V_1 - U)^2}{2} + \frac{m_2(V_2 - U)^2}{2};$$

$$T_0 - T = \frac{4(7 - 2)^2 + 10(0 - 2)^2}{2} = 70\ \text{Дж}.$$

Потерю кинетической энергии можно определить и по равенству (31):

$$T_0 - T = \frac{m_1m_2(V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{4 \cdot 10(7 - 0)^2}{2 \cdot (4 + 10)} = 70\ \text{Дж}.$$

ПРИМЕР 2. Скорости двух шаров, двигающихся навстречу друг другу, равны $V_1 = 9\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $V_2 = 12\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Масса первого шара $m_1 = 16$ кг. Определить массу второго шара m_2, величину ударного импульса S и потерю кинетической энергии при ударе, если после неупругого удара шары остановились (рис. 7).

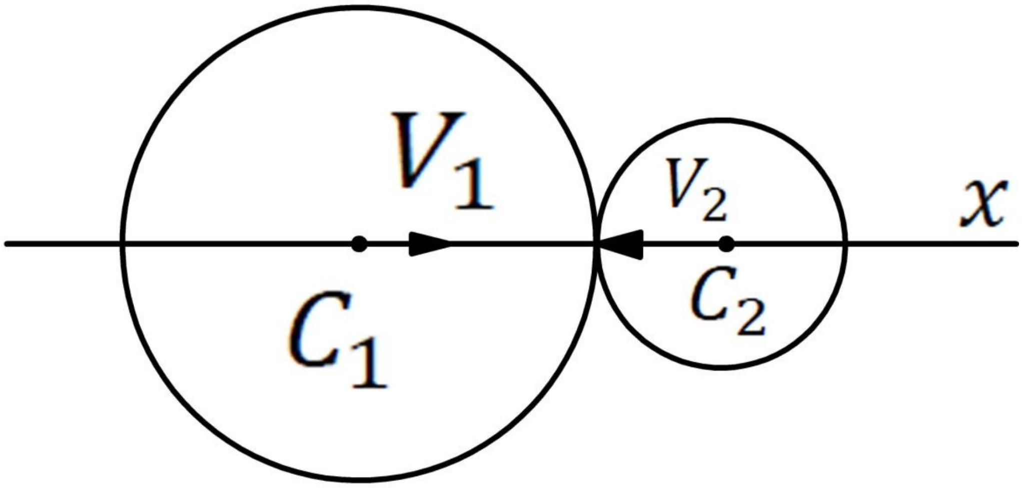

Рис. 7

Равенство (10) при условии $U = 0$ принимает вид

$$m_1V_1 + m_2V_2 = 0; \quad 16 \cdot 9 + P_2(-12) = 0.$$

Откуда

$$m_2 = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ кг}.$$

Величина ударного импульса, согласно равенству (12),

$$S = \frac{m_1m_2(V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} = \frac{16 \cdot 12[9 - (-12)]}{16 + 12} = 144\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 144 \text{ Н} \cdot \text{с}$$

Потеря кинетической энергии по формуле (33)

$$T_0 - T = \frac{m_1(V_1 - U)^2 + m_2(V_2 - U)^2}{2} =$$

$$= \frac{16(9-0)^2 + 12(-12-0)^2}{2} = 1512 \text{ Дж.}$$

В этом случае потерянной оказалась вся кинетическая энергия, которой обладали шары до удара.

Определив потерю кинетической энергии по равенству (31), мы получим тот же результат:

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2g(P_1 + P_2)} = \frac{16 \cdot 12[9-(-12)]^2}{2(16+12)} = 1512 \text{ Дж.}$$

ПРИМЕР 3. Шары, масса которых $m_1 = 120$ кг и $m_2 = 56$ кг, движутся в одном направлении со скоростями $V_1 = 8\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $V_2 = 6\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (рис. 8). Коэффициент восстановления при ударе $k = 0{,}84$. Определить скорости шаров U_1 и U_2 после удара, величины ударных импульсов первой фазы удара S_I и ударный импульс S за весь период упругого удара. Найти потерю кинетической энергии при ударе.

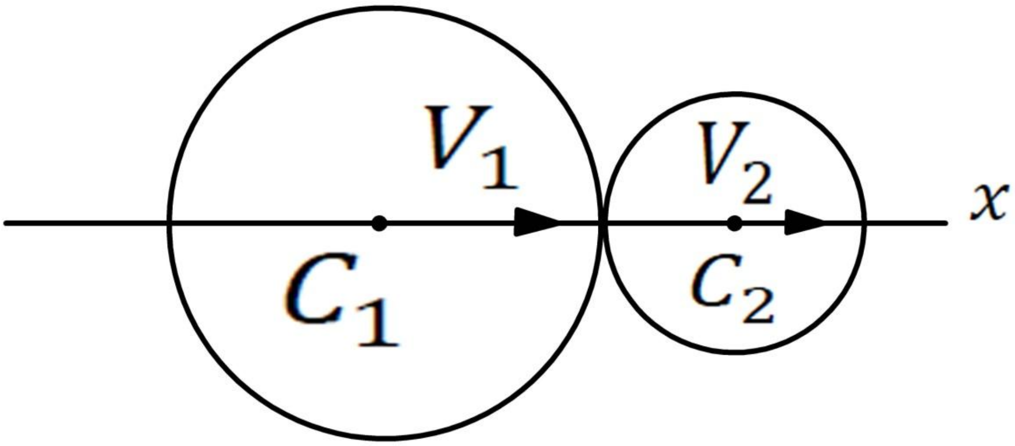

Рис. 8

По равенству (10) определяем скорость шаров в конце первой фазы удара:

$$U = \frac{120 \cdot 8 + 56 \cdot 6}{120 + 56} = 7{,}36\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорости шаров после удара определяются по равенствам (17):

$$U_1 = 7{,}36 \cdot 1{,}84 - 0{,}84 \cdot 8 = 6{,}82\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$
$$U_2 = 7{,}36 \cdot 1{,}84 - 0{,}84 \cdot 6 = 8{,}50\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ударный импульс первой фазы удара по равенству (12)

$$S_I = \frac{120 \cdot 56(8-6)}{120+56} = 76{,}36\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 76{,}36\ \text{Н} \cdot c.$$

Ударный импульс на весь период упругого удара по формуле (14)

$$S = (1+k)S_I = (1+0{,}84)76{,}36 = 140{,}51\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Потеря кинетической энергии при ударе определится по равенству (30):

$$T_0 - T = (1-0{,}84)^2\,\frac{120 \cdot 56(8-6)^2}{2(120+56)} = 22{,}48\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{c^2} = 22{,}48\ \text{Дж}.$$

Эта энергия расходуется на остаточные деформации и нагревание тел за время удара.

Потерю кинетической энергии за первую фазу удара можно определить по формуле (30), полагая $K = 0$:

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{120 \cdot 56(8-6)^2}{2(120+56)} =$$

$$= 76{,}36\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{c^2} = 76{,}36\ \text{Дж},$$

где T_0 и T — кинетическая энергия соударяющихся тел в начале и в конце первой фазы удара.

Потерю кинетической энергии за первую фазу удара можно также определить по теореме Карно (32), полагая K=0:

$$T_0 - T = \frac{m_1 (V_1 - U)^2}{2} + \frac{m_2 (V_2 - U)^2}{2} =$$

$$= \frac{120(8-7{,}36)^2 + 56(6-7{,}36)^2}{2} = 76{,}36\ \text{Дж}.$$

Как и следовало ожидать, результаты подсчетов совпадают.

Потерю кинетической энергии за вторую фазу удара определим по теореме Карно (32):

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} - \left[\frac{m_1 (U - U_1)^2}{2} + \frac{m_2 (U - U_2)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1-0{,}84}{1+0{,}84}\left[\frac{120(7{,}36-6{,}82)^2}{2} + \frac{56(7{,}36-8{,}5)^2}{2}\right] = 4{,}69\ \text{Дж},$$

где T_1, T_2 — кинетическая энергия соударяющихся тел в конце первой фазы удара (в начале второй фазы удара) и в конце второй фазы удара (в конце удара).

В общем же кинетическая энергия за время второй фазы приросла за счет частично упругого восстановления формы соударяющихся тел.

Это приращение кинетической энергии определится разностью потерь ее за первую и вторую фазы и потерь за все время удара, т.е.

$$76{,}36 + 4{,}69 - 22{,}48 = 58{,}57 \text{ Дж.}$$

Всего за счет упругого восстановления тел кинетическая энергия возросла на 58,57 Дж.

ПРИМЕР 4. Решить предыдущий пример, предполагая, что до удара шары двигались навстречу друг другу (рис. 9)

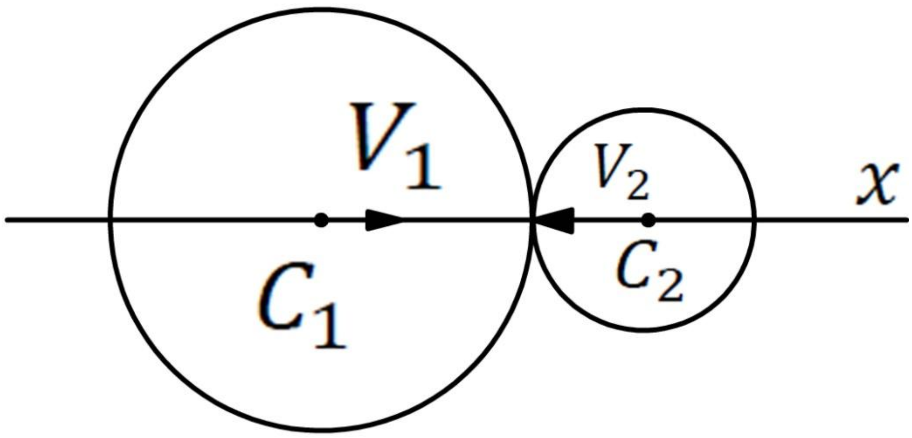

Рис. 9

Скорость шаров в конце первой фазы удара (10)

$$U = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} = \frac{120 \cdot 8 - 56 \cdot 6}{120 + 56} = 3{,}55\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорости шаров после удара (17)

$$U_1 = U(1 + k) - kV_1 = 3{,}55(1 + 0{,}84) - 0{,}84 \cdot 8 = -0{,}20\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$
$$U_2 = U(1 + k) - kV_2 = 3{,}55(1 + 0{,}84) - 0{,}84(-6) = 11{,}57\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знаки скоростей U_1, U_2 указывают, что после удара шары будут двигаться в разные стороны: первый шар налево, а второй шар направо.

Величина ударного импульса первой фазы удара (12)

$$S_I = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} = \frac{120 \cdot 56[8 - (-6)]}{120 + 56} =$$

$$= 534{,}55 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 534{,}55 \text{ Н} \cdot c.$$

Величина ударного импульса за весь период упругого удара (14)

$$S = (1 + k) S_I = (1 + 0{,}84) 534{,}55 = 983{,}56 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Потеря кинетической энергии при ударе (30)

$$T_0 - T = (1 - k)^2 \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= (1 - 0{,}84)^2 \frac{120 \cdot 56[8 - (-6)]^2}{2(120 + 56)} = 1101{,}59 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 1101{,}59 \text{ Дж}.$$

ПРИМЕР 5. Вагонетка массой $m_1 = 1600$ кг набегает со скоростью $V_1 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ на неподвижно стоящую пустую вагонетку, масса которой $m_2 = 1200$ кг. Определить скорости вагонетки после удара и потерю кинетической энергии после удара, если коэффициент восстановления $k = 0{,}65$. Здесь имеет место не вполне упругий удар.

Обозначив скорости вагонеток после удара через U_1 и U_2, учитывая, что скорость второй вагонетки до удара $V_2 = 0$, по уравнениям (18) получим

$$U_1 = 20 - (1 + 0{,}65) \frac{1200}{1200 + 1600} \cdot 20 = 5{,}86 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$U_2 = (1+0{,}65)\frac{1600}{1200+1600}\cdot 20 = 18{,}86\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Потерю кинетической энергии при ударе определяем по равенству (30):

$$T_0 - T = (1-0{,}65^2)\frac{1600\cdot 1200\cdot 20^2}{2(1600+1200)} = 79200\ \text{Дж}.$$

ПРИМЕР 6. На груженую вагонетку массой $m_2 = 280$ кг, стоящую на горизонтальном рельсовом пути, наталкивается порожняя вагонетка массой $m_1 = 140$ кг со скоростью $V_1 = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. После столкновения вагонетки движутся вместе. Найти скорость U вагонеток после столкновения и потерю кинетической энергии.

Скорость вагонеток после столкновения определится по формуле (10):

$$U = \frac{140\cdot 2}{140+280} = 0{,}67\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Так как удар неупругий ($k = 0$), то потеря кинетической энергии при ударе определится выражением (31):

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 V_1^2}{2(m_1+m_2)};$$

$$T_0 - T = \frac{140\cdot 280\cdot 2^2}{2\,(140+280)} = 186{,}7\ \text{Дж}.$$

ПРИМЕР 7. При данных примера 6 найти скорости вагонеток после столкновения, считая удар абсолютно упругим.

Так как удар абсолютно упругий, то коэффициент восстановления k = 1.

Скорости вагонеток после удара определятся равенствами (22):

$$U_1 = 2 - \frac{2 \cdot 280}{140 + 280} \cdot 2 = -0{,}67\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$U_2 = \frac{2 \cdot 140}{140 + 280} \cdot 2 = 1{,}33\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Следовательно, относительная скорость тел после удара прямо противоположна относительной скорости до удара и равна ей. Это видно из равенства (20), при k = 1.

В нашем случае относительная скорость до удара

$$V_1 - V_2 = 2 - 0 = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

и относительная скорость после удара

$$U_1 - U_2 = -0{,}67 - 1{,}33 = -2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Потери кинетической энергии в этом случае не будет.

Согласно равенству (30), при k = 1,

$$T_0 - T = 0.$$

ПРИМЕР 8. Шар массой $m_1 = 10$ кг, падая с высоты $H = 1{,}6$ м на неподвижную плиту массой $m_2 = 50$ кг, отскакивает вверх на высоту $h = 0{,}1$ м (рис. 10). Определить коэффициент восстановления k, величины ударных импульсов первой фазы удара S_{I}, второй фазы удара S_{II}, за весь период удара S. Найти также потерю кинетической энергии за первую и вторую фазы удара.

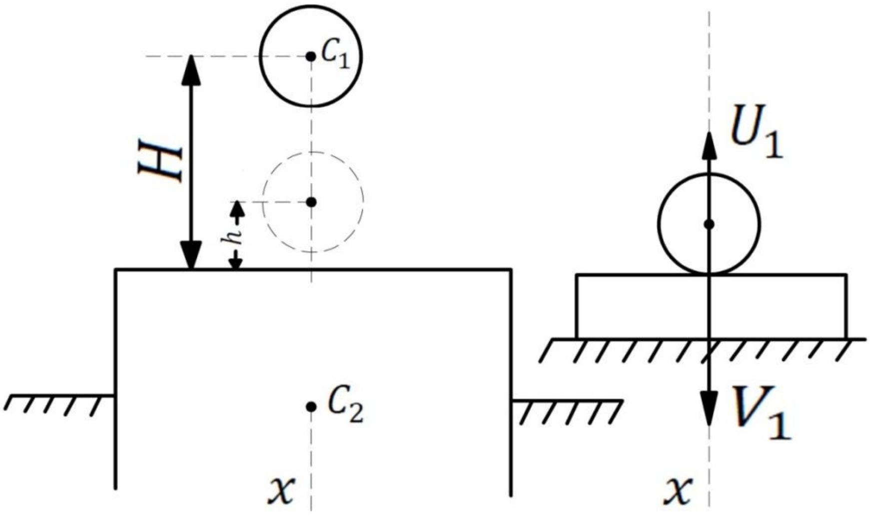

Рис. 10

Определяем общую скорость U тел в конце первой фазы удара по равенству (10)

$$U = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1V_1 + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2},$$

но $V_1 = \sqrt{2gH}$ и $U_1 = -\sqrt{2gh},$

поэтому

$$U = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2} = \frac{10\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6}}{10 + 50} = 0{,}93\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Коэффициент восстановления определяем по формуле (16), вставляя полученные выражения скоростей:

$$k = \frac{U_1 - U}{U - V_1} = \frac{U_1 - \dfrac{m_1V_1}{m_1 + m_2}}{\dfrac{m_1V_1}{m_1 + m_2} - V_1} = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2}\,\frac{U_1}{V_1}.$$

Вставляя значения скоростей $V_1 = \sqrt{2gH}$ и $U_1 = -\sqrt{2gh}$, получим

$$k = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 + m_2}{m_2}\sqrt{\frac{h}{H}}; \quad k = \frac{10}{50} + \frac{10 + 50}{50}\sqrt{\frac{0{,}1}{1{,}6}} = 0{,}5.$$

Величина импульса за первую фазу удара по формуле (12)

$$S_I = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2 (\sqrt{2gH} - V_2)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 50\ (\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6} - 0)}{10 + 50} = 46{,}7\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 46{,}7\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Величина импульса за вторую фазу удара по равенству (14)

$$S_{II} = k \cdot S_I = 0{,}5 \cdot 46{,}7 = 23{,}35\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 23{,}35\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Величина полного импульса за весь период удара

$$S = S_I + S_{II} = 46{,}7 + 23{,}35 = 70{,}05\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 70{,}05\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Определим потерю кинетической энергии за первую фазу удара. В конце первой фазы удара скорости соударяющихся тел будут одинаковыми и равными U. Коэффициент восстановления при рассмотрении лишь первой фазы удара равен нулю.

Потеря кинетической энергии за первую фазу удара по равенству (31)

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 \left(\sqrt{2gH} - 0\right)^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{10 \cdot 50 \cdot 2g \cdot 1{,}6}{2(10 + 50)} = 130{,}77\ \text{Дж},$$

где $T_1 -$ кинетическая энергия тела в конце первой фазы удара.

Потерю кинетической энергии за первую фазу удара можно также определить по теореме Карно, выраженной формулой (33):

$$T_0 - T_1 = \frac{m_1(V_1 - U)^2}{2} + \frac{m_2(V_2 - U)^2}{2} =$$

$$= \frac{10\left(\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6} - 0{,}93\right)^2 + 50(0 - 0{,}93)^2}{2} = 130{,}77 \text{ Дж.}$$

Как и следовало ожидать, результаты подсчетов совпадают.

Определим потерю кинетической энергии за все время удара. В примере рассматривается не вполне упругий удар (k=0,5), поэтому воспользуемся равенством (30):

$$T_0 - T = (1 - k^2)\frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{(1 - 0{,}5^2) \cdot 10 \cdot 50\left(\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6} - 0\right)^2}{2(10 + 50)} = 98{,}1 \text{ Дж.}$$

Потеря кинетической энергии за все время удара может быть найдена и по формуле (32), в которую надо подставить

$$V_1 = \sqrt{2gH},\ \ U_1 = -\sqrt{2gh},\ \ V_2 = 0.$$

Скорость плиты после удара определится по равенству (17):

$$U_2 = U(1 + k) - kV_2 = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}(1 + k) - k \cdot 0 = (1 + k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}V_1.$$

Вставляя эти значения в равенство (32), получим

$$T_0 - T =$$

$$= \frac{1 - k}{1 + k}\left[\frac{m_1\left[\sqrt{2gH} - \left(-\sqrt{2gh}\right)\right]^2 + m_2\left[0 - (1 + k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gH}\right]^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1 - k}{1 + k}\left[m_1\left(H + h + 2\sqrt{hH}\right) + (1 + k)^2\frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot H\right] \cdot g.$$

Подставив численные значения величин, получим

$$T_0 - T =$$

$$= \frac{1 - 0,5}{1 + 0,5}\left[10\left(1,6 + 0,1 + 2\sqrt{1,6 \cdot 0,1}\right) + \frac{(1 + 0,5)^2 \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot 1,6}{(10 + 50)^2}\right] \cdot 9,81 =$$

$$= \frac{0,5}{1,5}\left[10 \cdot 2,5 + \frac{1,5^2 \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot 1,6}{60^2}\right] \cdot 9,81 = 98,1 \text{ Дж.}$$

Как и следовало ожидать, потеря кинетической энергии тела за все время удара, подсчитанная по формулам (30) и (32), оказалось одной и той же. Следовательно, кинетическая энергия соударяющихся тел в конце первой фазы удара T_1 меньше кинетической энергии тел в конце удара T. Это обстоятельство объясняется тем, что во второй фазе удара кинетическая энергия возрастает по сравнению с кинетической энергией в конце первой фазы удара за счет частично упругого восстановления формы соударяющихся тел.

В нашем примере (за счет второй фазы удара) кинетическая энергия возросла по сравнению с первой фазой удара за счет упругого восстановления тел на 32,67 Дж.

ПРИМЕР 9. Материальная точка, масса которой равна единице, движется по закону $x = at$; $y = bt$; $z = ct$; где a, b, c – постоянные величины. Материальная точка подчинена неудерживающей нестационарной связи, уравнение которой

$$f = R^2 - (x - \mu t)^2 - y^2 - z^2 \geq 0,$$

где R и μ − постоянные величины.

В момент t = 0 точка находится не на связи, т.е. связь в это время не действует.

Определить проекции скорости после удара и модуль полного импульса реакции за время удара, если коэффициент восстановления равен K.

Из уравнения связи видно, что она движется внутри сферы радиусом R при ослабленной связи.

Наступает момент, когда точка попадает на связь: связь начинает действовать и в этот момент происходит удар.

Определим момент t_0 прихода точки на связь. Для этого необходимо решить уравнение $f = 0$, подставив коэффициенты движущейся точки $x_0 = at_0$; $y_0 = bt_0$; $z_0 = ct_0$:

$$R^2 - [(a - \mu)^2 + b^2 + c^2] \cdot t_0^2.$$

Откуда

$$t_0 = \frac{R}{\sqrt{(a - \mu)^2 + b^2 + c^2}}.$$

Проекции скорости точки до удара:

$$V_{1x} = \dot{x} = a;\ \ V_{1y} = \dot{y} = b;\ \ V_{1z} = \dot{z} = c.$$

Проекции скорости точки в конце первой фазы удара:

$$U_x = \mu, \qquad U_y = 0, \qquad U_z = 0.$$

При этом связь ослабевает и перестает действовать, т.е. точка покидает сферу. Этот результат получим из формулы (10), положив V_1 равным a, b, c и $V_2 = 0$ (скорость сферы), $m_1 = 1,\ m_2 = \infty$.

Разделив предварительно числитель и знаменатель равенства (10) на m_2 и учитывая, что ${}^{m_1}/_{m_2} = 0$, получим $U_z = 0,\ U_y = 0$.

Что же касается проекции скорости на ось x, то она должна быть равной μ, так как в этот момент связь еще не действует, сообщая точке скорость минус μ и, следовательно, абсолютная скорость точки по оси x равна нулю (точка освобождается от связи).

Определим модуль импульса реакции за первую фазу удара согласно первому равенству (11):

$$S_{xI} = 1(\mu - a) = |a - \mu|,$$

$$S_{yI} = 1(0 - b) = |b|,$$

$$S_{zI} = 1(0 - c) = |c|,$$

$$S_I = \sqrt{S_{xI}^2 + S_{yI}^2 + S_{zI}^2} = \sqrt{(a - \mu)^2 + b^2 + c^2}.$$

Модуль полного импульса реакции за время удара определится по равенству (14):

$$S = S_I + S_{II} = (1 + k)S_I = (1 + k)\sqrt{(a - \mu)^2 + b^2 + c^2}.$$

Проекции скорости точки после удара определяются по первому равенству (17):

$$U_{1x} = U_x(1 + k) - kV_{1x} = \mu(1 + k) - ka;$$

$$U_{1y} = -kb;$$

$$U_{1z} = -kc.$$

9. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ КОСОЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ

Если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара, а скорость центра масс хотя бы одного тела не расположена вдоль прямой удара, то такой центральный удар называется *косым* (рис. 11).

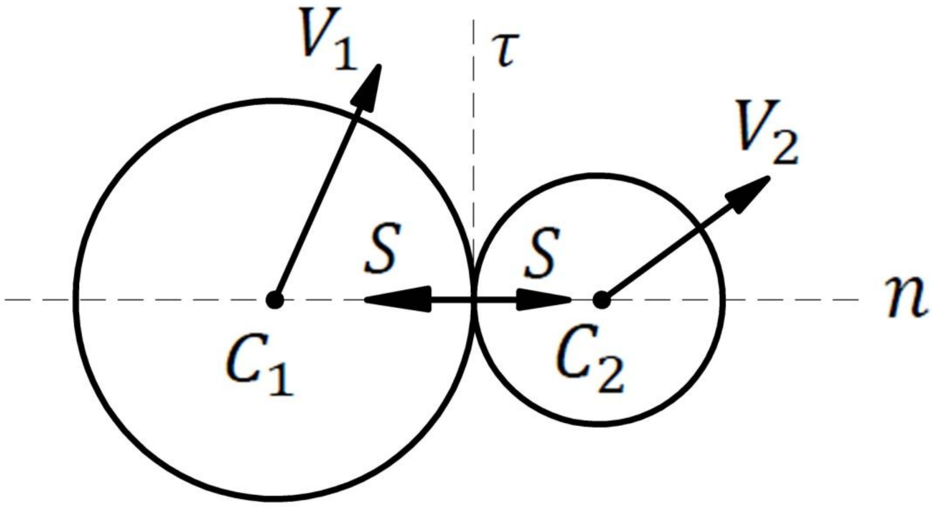

Рис. 11

При абсолютно гладких поверхностях соударяющихся тел ударные импульсы будут располагаться по линии удара.

По теореме об изменении количества движения для первого тела имеем

$$m_1 U_1 - m_1 V_1 = S. \qquad (35)$$

Спроецировав равенство (35) на общую касательную τ, получим

$$m_1 U_{1\tau} - m_1 V_{1\tau} = 0, \qquad (36)$$

откуда

$$U_{1\tau} = V_{1\tau}. \qquad (37)$$

Аналогично для второго тела

$$U_{2\tau} = V_{2\tau}\,. \qquad (38)$$

Из полученного результата следует, что проекции скоростей абсолютно гладких соударяющихся тел на ось, перпендикулярную линии удара, при ударе не изменяются. При этом изменяются только проекции скоростей тел на линию удара. В этом случае пользуются всеми равенствами, полученными для прямого центрального удара двух тел. В упомянутые равенства вместо скоростей тел нужно вставлять проекции скоростей тел на линию удара, т.е. V_{1n}, V_{2n}, U_{1n}, U_{2n}.

Если соударяющиеся тела будут не гладкими, то равенства (37) выполняться не будут. В этом случае в правой части уравнения (36) будет стоять ударный импульс сил трения.

Законы трения во время удара идентичны законам трения скольжения.

10. ПРИМЕР НА КОСОЙ УДАР

В момент столкновения двух абсолютно гладких шаров, движущихся поступательно, скорости их были $V_1 = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $V_2 = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и составляли с линией удара углы α_1 и α_2 (рис 12, а).

Определить скорости шаров после удара, считая удар абсолютно упругим, если масса шаров $m_1 = 16$ кг, $m_2 = 12$ кг, $\cos\alpha_1 = {}^4\!/_5$, $\cos\alpha_2 = {}^3\!/_5$. Также найти величину ударного импульса за время удара.

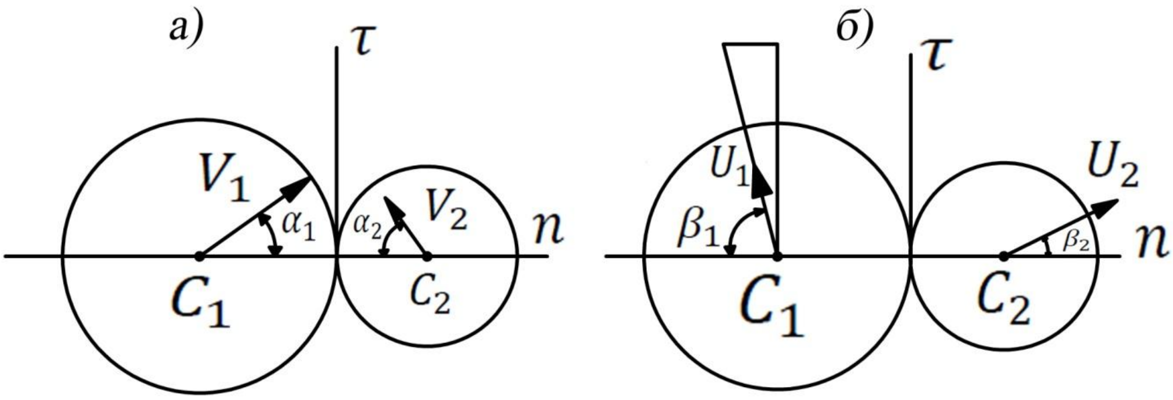

Рис. 12

В этом примере рассматривается косой удар. Вычислим проекции скоростей шаров до удара на нормаль n и касательную τ:

$$V_{1n} = V_1\cos\alpha_1 = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{2n} = -V_2\cos\alpha_2 = -5 \cdot \frac{3}{5} = -3\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{1\tau} = V_1\sin\alpha_1 = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{2\tau} = V_2\sin\alpha_2 = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Так как поверхности соударяющихся тел абсолютно гладкие, то проекции скоростей тел после удара на ось τ будут, по равенству (37), равны соответствующим проекциям скоростей шаров до удара:

$$U_{1\tau} = V_{1\tau} = 6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad U_{2\tau} = V_{2\tau} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проекции общей скорости шаров на ось n в конце первой фазы удара определятся по равенству (10):

$$U_n = \frac{m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{16 \cdot 8 + 12(-3)}{16 + 12} = 3{,}29\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проекции скоростей шаров на нормаль n в конце удара определятся равенствами (22), так как удар шаров абсолютно упругий, т.е. коэффициент восстановления K = 1:

$$U_{1n} = 2U_n - V_{1n} = 2 \cdot 3{,}29 - 8 = -1{,}42\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$U_{2n} = 2U_n - V_{2n} = 2 \cdot 3{,}29 — 3 = 9{,}58\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Как усматривается из равенства (20), при абсолютно упругом ударе (K = 1) относительная скорость соударяющихся тел после удара противоположна и равна относительной скорости до удара:

$$U_{1n} - U_{2n} = -(V_{1n} - V_{2n});$$

$$-1{,}42 - 9{,}58 = -[8 - (-3)];$$

$$-11 = -11.$$

Относительная скорость тел до удара $(V_{1n} - V_{2n}) = 11\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а относительная скорость тел после удара $(U_{1n} - U_{2n}) = -11\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Модули скоростей шаров в конце удара вычисляются по формулам

$$U_1 = \sqrt{U_{1\tau}^2 + U_{1n}^2 =} \sqrt{6^2 + 1{,}42^2} = 6{,}17\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$U_2 = \sqrt{U_{2\tau}^2 + U_{2n}^2} = \sqrt{4^2 + 9{,}58^2} = 10{,}38\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорости после удара изображены на чертеже (см. рис.12, б).
Углы β_1 и β_2 определяются по тангенсам:

$$\mathrm{tg}\beta_1 = \left|\frac{U_{1\tau}}{U_{1n}}\right| = \frac{6}{1{,}42} = 4{,}225; \quad \mathrm{tg}\beta_2 = \left|\frac{U_{2\tau}}{U_{2n}}\right| = \frac{4}{9{,}58} = 0{,}418.$$

Величина ударного импульса за время удара определится по равенству (14), при $K = 1$

$$S = (1 + k) \cdot S_I = (1 + 1)\, S_i = 2S_i,$$

где $S_i -$ ударный импульс первой фазы удара, вычисляемый по формуле (12):

$$S = 2S_I = \frac{2m_1m_2(V_{1n} - V_{2n})}{m_1 + m_2} = \frac{2P_1P_2(V_{1n} - V_{2n})}{g(P_1 + P_2)};$$

$$S = \frac{2 \cdot 16 \cdot 12[8 - (-3)]}{9{,}81(16 + 12)} = 15{,}38\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 15{,}38\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. Т. 2. Динамика: Учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.

Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.

Данник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. – Известия киевского политехнического института, 1910. – 272 с.

Кошевой А.К. Связи и их классификации. – Л.: ЛТИХП, 1968. – 52 с.

Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. I, II. – М.: Госиздат, 1955. – 596 с.

Maliavko D.P., Fedorova L.A., Eliseev A.M. Investigation of stress state for estimating the greatest stress in structures subject to creep = Исследование напряженных состояний конструкций в процессе ползучести с целью оценки наибольшего напряжения // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2014. № 2(20). P. 24.

Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие. 50-е изд., стер. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Ч. II. – М. – Л.: Госиздат, 1951. – 484 с.

Остроградский М.В. Об общей теории соударений // Записки Петербургской Академии Наук. 1864. Т. XI. 306 с.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общ. ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2004.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Статика, кинематика, динамика: Учеб. пособие для вузов. 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007. – 764 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Григорьев Александр Юрьевич
Григорьев Константин Александрович
Малявко Дмитрий Пантелеймонович

СОУДАРЕНИЕ ТЕЛ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
И.В. Гришко

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 23.12.2015. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,56. Печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 2,5
Тираж 100 экз. Заказ № С 89

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9