

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.Л. Лазарев

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Учебное пособие

*Рекомендовано учебно-методическим
объединением вузов Российской Федерации
по образованию в области радиотехники,
электроники, биомедицинской техники
и автоматизации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
27.03.04 «Управление в технических системах»*

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2015

ББК 32.965
УДК 637.52(075.8)
Л 17

Лазарев В.Л. Робастное управление в биотехнологической промышленности: Учеб. пособие. – СПб.: Университет ИТМО; ИХиБТ, 2015. – 196 с.
ISBN 978-5-7577-0501-9

Изложены подходы к организации мониторинга и управления, применение которых проиллюстрировано на конкретных примерах различных объектов биотехнологической промышленности. Рассмотрены вопросы постановки и решения задач синтеза систем управления при наличии случайных воздействий. Уделено внимание вопросам синтеза при наличии априорной неопределенности – робастным системам. Изложены концепции синтеза робастных систем, основанные на использовании моментных характеристик и энтропийных потенциалов параметров.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению 27.03.04 «Управление в технических системах», а также направлениям «Автоматизация технологических процессов и производств», «Системный анализ и управление» и др.

Рецензенты: кафедра управления, автоматизации и системного анализа Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова (зав. кафедрой доктор техн. наук, проф. Л.В. Уткин); канд. техн. наук, проф. Санкт-Петербургского государственного политехнического университета А.В. Самочадин

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

ISBN 978-5-7577-0501-9

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2015
© Лазарев В.Л., 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие подготовлено на основе изданного автором в 2003 году учебного пособия «Робастные системы управления в пищевой промышленности». Указанное издание оказалось востребованным и успешно использовалось в учебном процессе. Заказы на его приобретение поступали из ряда ведущих вузов, проектных и исследовательских организаций. Тем не менее, возникла потребность в переработке и дополнении учебного пособия, что обусловлено приведенными ниже обстоятельствами.

Углубились имеющиеся и появились новые направления в теории и практике управления, совершенствуются технические средства и элементная база самих систем. Возрастают требования к качеству подготовки кадров, объему усваиваемых ими знаний. Кроме того, актуальна проблема адаптации получаемых знаний к специфике задач автоматизации и управления процессами и производствами биотехнологической промышленности, составной частью которой является пищевая промышленность.

С учетом указанных реалий произведена переработка исходного материала. Сокращению подверглись фрагменты разделов, которые достаточно подробно изложены в имеющейся технической литературе. Вместе с тем пособие дополнено обзором и материалами по новым разработкам, которые являются перспективными для организации и совершенствования управления с учетом специфических особенностей биотехнологической промышленности. Для лучшего усвоения излагаемый материал проиллюстрирован примерами решения конкретных задач мониторинга и управления в основном для объектов этой промышленности.

Тематика и содержание разделов в основном соответствуют учебным планам направлений подготовки «Управление в технических системах», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Системный анализ и управление» и др.

При изложении материала учтен опыт преподавания автором ряда базовых дисциплин отечественным и иностранным студентам. В пособии также имеются материалы и сведения, которые могут быть полезны для организации и выполнения самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие систем управления различными объектами и технологическими процессами идет по пути учета случайных воздействий, поступающих по различным каналам, а также увеличения числа контролируемых и регулируемых параметров, совершенствования технических средств автоматизации. Интеграция вероятностных моделей и схем в систему управления предусматривает получение информации об этих воздействиях, что связано с приобретением соответствующих технических средств измерения и обработки информации, а также практической реализации данных схем для организации управления. В результате такое «расширение» систем управления обуславливает появление дополнительных затрат на комплектацию, монтаж и эксплуатацию, что в конечном счете приводит к удорожанию продукции. Таким образом, увеличение затрат на совершенствование систем управления может привести к парадоксу снижения эффективности производства от их функционирования. Особенно остро такая проблема стоит для многих производств биотехнологической, химической, металлургической и других отраслей промышленности. Это объясняется тем, что кроме необходимости контроля так называемых общетехнических параметров (температуры, давления, расходов, уровней и др.) необходимо также контролировать химический состав, структуру и свойства сырья, полуфабрикатов и готовой продукции. Проведение таких измерений в ряде случаев возможно с использованием методов сенсорного анализа (на основании статистической обработки результатов анализов комиссии специалистов-дегустаторов) либо с использованием сложного лабораторного оборудования, дорогостоящих реактивов и аппаратуры. В результате формирование «информационного обеспечения» системы управления требует значительных материальных затрат и времени, что также приводит к неэффективности процесса управления. Поэтому представляется важным определить не только рациональный перечень контролируемых параметров, но и разработать методы и алгоритмы, позволяющие минимизировать затраты на информационное обеспечение, организацию и функционирование систем управления.

Очевидно, что такие системы будут функционировать в условиях априорной неопределенности, обусловленной отсутствием полной

информации по некоторым технологическим параметрам, используемым для управления, а также изменением их характеристик в процессе производства. Системы, основанные на подобных принципах функционирования, относятся к классу робастных систем. Данное название происходит от английского слова *robust*, что означает крепкий, здоровый и характеризует вышеуказанные способности систем. Организация робастного управления может быть основана на использовании различных подходов и методов: теории чувствительности, теории интервальных оценок, теории инвариантности и др. [1–6]. Продолжаются интенсивные исследования и разработки в этом направлении. Каждая из разработок ориентирована на конкретные области применения, имеет свою специфику, достоинства и недостатки.

В данной работе рассматривается подход, основанный на использовании статистических характеристик и методов теории энтропийных потенциалов. Использование такого подхода позволяет не только оценить влияние различных возмущений на выходные параметры объекта и выдать рекомендации по модернизации системы управления или оборудования, но и осуществить синтез системы управления даже при наличии ограниченной информации об этих воздействиях, обеспечивающей «приемлемое» качество управления.

Указанное обстоятельство актуально при проектировании и модернизации систем управления на производствах, где схема ведения технологического процесса не является строго детерминированной, допускаются вариации при выборе каналов внесения управляющих воздействий, где требуется обеспечить лишь свойства выпускаемой продукции. Такая организация производства допустима для многих предприятий биотехнологической, химической и ряда других отраслей промышленности. В случаях, когда схема ведения технологического процесса жестко задана разноуровневыми стандартами или так называемой технологической картой, методики оценки влияния тех или иных возмущений и воздействий на параметры продукции окажутся полезными при проектировании или модернизации существующих производств. Подобные ситуации характерны для предприятий прецизионного машиностроения, приборостроения и др.

Изложенный подход к решению подобных задач показал свою состоятельность, имеет перспективы развития и внедрения.

1. РЕЖИМЫ РАБОТЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные положения Классификация режимов работы

Организация управления объектом предусматривает проведение анализа режимов работы системы управления, определение критериев качества ее работы в типовых режимах в соответствии с назначением объекта, целями и задачами управления. Последующий синтез системы управления направлен на определение структуры системы и функций отдельных ее элементов, обеспечивающих надлежащее качество работы системы, особенно в режимах, приоритетных по целям управления.

Система управления объектом, оборудованием может находиться в одном из режимов работы, классификация которых приведена на рис. 1.1.

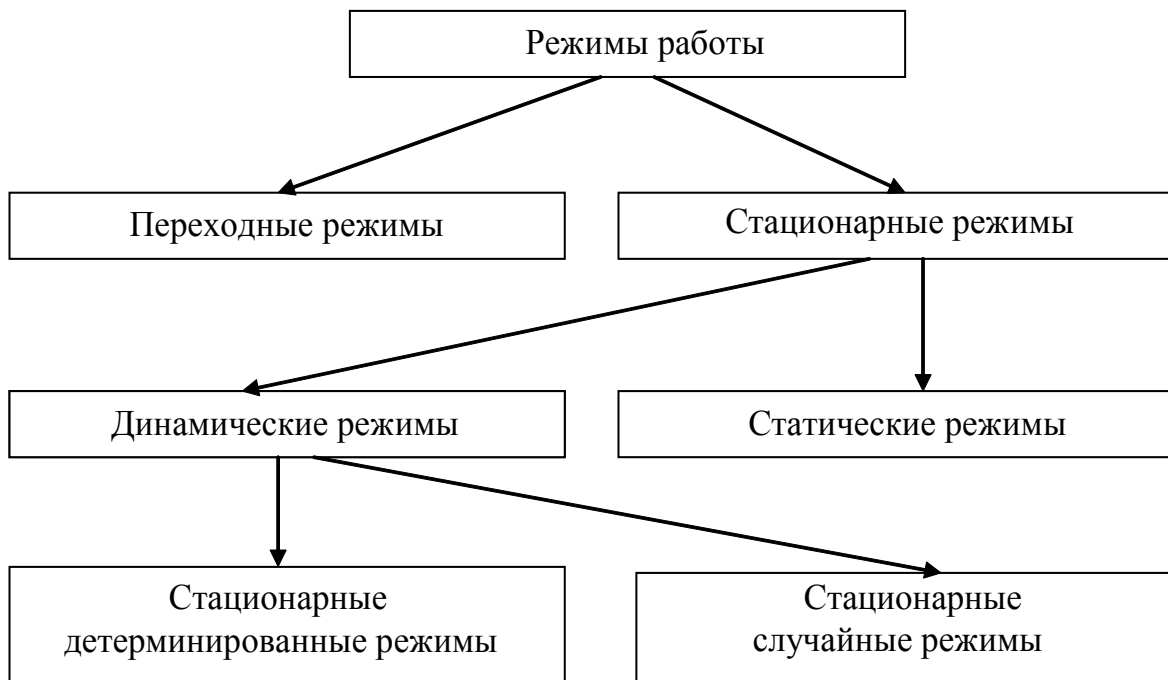


Рис. 1.1. Классификация режимов работы систем управления

Приведенная на рис. 1.1 классификация не является подробной, так как отдельные элементы схемы допускают дальнейшую детализацию. Например, стационарные динамические детерминированные режимы работы систем в свою очередь могут быть подразделены

на режимы, в которых внешние воздействия изменяются с постоянной производной воздействия (скоростью, ускорением и т. д.), и режимы, где внешние воздействия изменяются по детерминированному закону (например, гармоническому). Однако для анализа задач управления и методов их решения приведенная классификация представляется достаточно подробной. Ниже приводится анализ основных режимов работы систем управления применительно к задаче синтеза и с учетом специфических особенностей объектов биотехнологической и химической отраслей промышленности.

1.2. Работа систем управления в переходных режимах

В промышленных условиях работа систем управления объектами в переходных режимах имеет место в основном в следующих случаях:

- при выводе объектов на рабочий режим перед началом работы;
- при смене режимов работы, например, при переходе на переработку новой партии сырья или при переходе на выпуск новой продукции;
- при выключении оборудования после завершения работы;
- при возникновении различных нештатных ситуаций.

В качестве примера, иллюстрирующего данные режимы, можно рассмотреть работу различных пароварочных камер, которые широко используются для термообработки колбас, копчения рыбопродуктов, выпечки хлебобулочных изделий. Перед началом работы такие объекты выводятся на соответствующий режим или, как говорят, «прогреваются до нужной кондиции». С этой целью в локальные регуляторы, которые осуществляют поддержание необходимых температурно-влажностных режимов в различных зонах камер, вводят значения соответствующих уставок и начинают подачу энергоносителей (пара, электроэнергии, горячей воды). В результате последующей работы таких контуров регулирования осуществляют вывод объектов на требуемый режим, после чего начинают подачу сырья и осуществляют его обработку. Аналогично осуществляют переход на другие режимы обработки. Например, при термообработке колбасных изделий переход на выпуск других видов колбас, отличающихся диаметром батона,

видом колбасной оболочки, химическим составом колбасного фарша и другими параметрами, должен предусматривать соответствующее изменение режимных параметров на этапах термообработки (подсушка, обжарка, варка) и последующего охлаждения. Время выхода подобных объектов на рабочие режимы зависит от конструктивных особенностей и, в первую очередь, определяется такими характеристиками, как время запаздывания и постоянные времени по каждому из каналов управления. В промышленных установках это время может достигать десятки и даже сотни минут. Следует также отметить, что при отсутствии систем локального регулирования на объекте его вывод на рабочий режим или перестройка режима работы осуществляется оператором в ручном режиме.

Задача управления объектом в переходном режиме, как правило, состоит в минимизации времени переходного процесса. Это объясняется тем, что во время выхода оборудования на новый режим продукция не выпускается и, следовательно, имеют место непроизводительные простои, снижающие, в конечном счете, его производительность. В настоящее время задача синтеза оптимальной по быстродействию системы управления при наличии ограничений по величинам управляющих воздействий (т. е. для реальных производственных условий) решается с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина. Практическая реализация принципа максимума применительно к оптимальной по быстродействию системе автоматического управления (САУ) более известна в технике как теорема об n -интервалах, доказанная А.А. Фельдбаумом. Смысл этой теоремы заключается в том, что оптимальное по быстродействию управление объектом состоит из n -интервалов. В каждом интервале управляющее воздействие должно принимать свое предельное значение в соответствии с существующими ограничениями. Конец каждого интервала наступает в момент достижения управляемой величиной установленного значения. В начале следующего интервала происходит изменение знака управляющего воздействия. И так далее, пока выходная величина объекта не достигнет установленного режимного значения. На последнем интервале управляющее воздействие устанавливается на величине, соответствующей заданному статическому режимному значению выходной величины. Здесь следует отметить, что число интервалов может быть меньше n в случае ненулевых начальных условий.

Если объект является многозвенным и имеют место ограничения не только на величину входного управляющего воздействия, но также на соответствующие промежуточные переменные, число интервалов управления возрастает. Однако общим во всех случаях является то, что оптимальный по быстродействию вывод объекта на режим реализуется релейным управлением. Отсюда следует вывод о том, что в этом случае цель управления достигается в результате реализации строгого алгоритма. Задачи системы управления сводятся в основном к фиксации достижений управляемыми величинами требуемых значений на каждом интервале управления и организации позиционных переключений исполнительных устройств, а также к выполнению функций защиты и блокировок при возникновении различных нештатных или аварийных ситуаций.

Описанный алгоритм оптимального управления переходным процессом по быстродействию справедлив и в случаях, когда осуществляется возврат объекта к исходному состоянию, отклонение от которого произошло в результате действия различных возмущений. Известно, что для «линейных» объектов (динамика которых описывается линейными дифференциальными уравнениями) закон оптимального по быстродействию управления не зависит от вида возмущений и начальных условий, т. е. инвариантен относительно этих факторов. Данное обстоятельство существенно упрощает синтез системы управления переходными режимами таких объектов. Здесь следует отметить, что подавляющее большинство объектов биотехнологической промышленности достаточно адекватно описывается линейными моделями. Такими объектами, например, являются: камеры для термообработки колбасных изделий, печи для выпечки хлебобулочной продукции, установки для горячего и холодного копчения мяса и рыбопродуктов, аппараты для тепловой обработки жидких продуктов, автоклавы для стерилизации консервов, сушильные установки, ректификационные колонны, камеры для замораживания и дефростации и другие. В ряде случаев вывод отдельных объектов на рабочий режим может быть осуществлен обслуживающим персоналом опытно-интуитивным путем, который на практике, в зависимости от квалификации операторов, в большей или меньшей степени приближается к оптимальному релейному управлению.

Необходимо также иметь в виду, что в довольно редких случаях, когда критерием оптимизации переходного режима является не быстродействие, а какой-либо другой критерий (например, минимизация энергозатрат), использование релейного управления, предусматривающего форсирование режимов, может оказаться не оптимальным.

Для описания переходных режимов работы объектов и систем управления в технике используются специальные функции – переходные характеристики. Данные функции описывают реакцию системы на типовые, стандартные испытательные воздействия – единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ и единичный импульс $\delta(t)$. Математическое описание этих воздействий имеет следующий вид:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется переходной функцией и обозначается $h(t)$. Реакция системы на единичный импульс называется функцией веса и обозначается $w(t)$. Очевидно, что воздействия $1(t)$ и $\delta(t)$ имеют конкретную физическую подоплеку на реальных объектах. Характеристики $h(t)$ и $w(t)$ могут быть получены экспериментальным путем, а также аналитически, путем решения соответствующего дифференциального уравнения для условий, соответствующих конкретному воздействию. Из определения типовых воздействий следует, что между ними существует взаимосвязь

$$\delta(t) = 1(t)^{(1)}.$$

Из приведенного выше равенства видно, что и между переходными характеристиками также существует аналогичная зависимость

$$w(t) = h^{(1)}(t).$$

Из переходных характеристик определяются основные параметры переходного режима: длительность, величина перерегулирования и др.

Основным режимом работы большинства промышленных объектов является стационарный режим, в котором осуществляется производство продукции. Поэтому синтез системы управления должен осуществляться исходя из условий достаточно надежного управления стационарного режима. Проблема минимизации затрат на оснащение объектов управления техническими средствами контроля и управления при синтезе систем автоматизации промышленных объектов является актуальной, особенно в условиях рыночной экономики. Рассмотрению указанной проблемы и будет посвящен изложенный ниже материал. Стационарные режимы, в свою очередь, подразделяются на статические и динамические (см. рис. 1.1).

1.3. Статические режимы систем управления

Под статическим режимом системы понимается такой режим, при котором все параметры, определяющие ее состояние (имеются в виду как возмущающие, так и управляющие воздействия), являются постоянными. Отсюда следует, что в статическом режиме производные по времени по всем параметрам равны нулю, т. е.

$$\frac{df_i}{dt} = 0, \quad i \in I; \quad (1.1)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = 0, \quad j \in J, \quad (1.2)$$

где f_i – i -е возмущающее воздействие; x_j – j -е управляющее воздействие.

Таким образом, уравнение статического режима получается из соответствующего дифференциального уравнения при приравнивании к нулю всех производных. Или, переходя к передаточным функциям $W(p)$, уравнение статического режима получается при приравнивании оператора дифференцирования $p = d/dt$ к нулю. Описания статической зависимости выходной координаты y от возмущающего воздействия f или управляющего воздействия x примут вид

$$y_f = W_f(p) \Big|_{p=0} f; \quad (1.3)$$

$$y_x = W_x(p) \Big|_{p=0} x, \quad (1.4)$$

где $W_f(p)$ – передаточная функция по каналу «возмущение – выходная величина»; $W_x(p)$ – передаточная функция объекта по каналу «управляющее воздействие – выходная величина».

В случае, если на объекте имеется система регулирования выходной координаты, действие возмущения приведет к появлению статического отклонения

$$y_{ст} = \Phi(p) \Big|_{p=0} f = \frac{W_f(p)f}{1 + W_x(p)W_{о.с}(p)} \Big|_{p=0}, \quad (1.5)$$

где $\Phi(p)$ – передаточная функция замкнутой системы регулирования координаты y ; $W_{о.с}(p)$ – передаточная функция цепи обратной связи.

Следует также отметить, что произведение

$$W_x(p)W_{о.с}(p) = W_p(p) \quad (1.6)$$

называется передаточной функцией разомкнутой системы.

Если на объект одновременно действует несколько возмущений, то результирующее статическое отклонение $y_{ст\Sigma}$ согласно принципу суперпозиции, справедливому для линейных систем, будет равно алгебраической сумме отклонений, обусловленных действием каждого возмущения,

$$y_{ст\Sigma} = \sum_{(i)} y_{ст(i)}. \quad (1.7)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что вышеупомянутые промышленные объекты достаточно адекватно описываются как линейные инерционные звенья различных порядков или соединения таких звеньев и, следовательно, относятся к классу линейных систем (т. е. описываются набором линейных дифференциальных уравнений).

Основной задачей управления объектом в статическом режиме является уменьшение или устранение статического отклонения – $u_{ст}$, которое фактически создает погрешность в управлении.

В настоящее время данный вопрос достаточно полно проработан и освещен в технической литературе [6, 7]. Поэтому представляется целесообразным констатировать существующие решения, которые используются при синтезе систем управления.

Известны следующие способы уменьшения или устранения статического отклонения.

1. Увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы, т. е. речь идет об увеличении коэффициента $K_p = W_p(p) \Big|_{p=0}$. Как следует из выражения (1.6), величина K_p является произведением статических коэффициентов передачи объекта K_x и цепи обратной связи $K_{о.с}$

$$K_p = K_x K_{о.с}. \quad (1.8)$$

Действительно, увеличение коэффициента K_p приводит к увеличению знаменателя в выражении (1.5) и, следовательно, к уменьшению величины статического отклонения. На практике при управлении промышленными объектами увеличение K_p осуществляется за счет увеличения коэффициента передачи цепи обратной связи, так как изменение коэффициента передачи объекта возможно, в основном, за счет изменения его конструкции, что является достаточно трудоемкой и дорогостоящей операцией. Изменение же значения $K_{о.с}$ осуществляется с помощью специальной настройки, которая имеется во всех промышленных блоках формирования закона регулирования, используемых в цепи обратной связи контура регулирования (регулятора) u_l -й выходной координаты.

Необходимо отметить, что рассмотренный способ позволяет лишь уменьшить величину статического отклонения в соответствии с выражением (1.6), но не устранить его полностью. При этом следует иметь в виду, что увеличение $K_{о.с}$ часто ограничивается верхним критическим значением $K_{о.с(кр)}$, достижение которого чревато выходом системы регулирования на границу устойчивости. То есть для обеспечения устойчивости системы необходимо при ее настройке соблюдать приведенное ниже условие

$$K_{o.c} < K_{o.c(кр)}. \quad (1.9)$$

2. Введение интегратора в цепь обратной связи – переход к астатической системе управления. Известно, что введение интегрирующего звена вне участка «воздействие – выходная величина» позволяет полностью устранить статическую ошибку. На практике это достигается путем введения в контур регулирования так называемой «И»-составляющей с передаточной функцией

$$W_{и}(p) = \frac{1}{T_{и}p}, \quad (1.10)$$

где $T_{и}$ является настройкой регулятора.

Такая система, как известно, называется астатической. Количество интегрирующих звеньев определяет порядок астатизма.

Забегая вперед, следует также отметить, что в динамическом режиме, когда воздействие f изменяется с постоянной m -й производной, т. е.

$$p^m f = \frac{d^m f}{dt^m} = \text{const}, \quad (1.11)$$

и в самом объекте управления отсутствуют интегрирующие звенья, применение астатической системы управления с порядком астатизма q при условии

$$q > m \quad (1.12)$$

полностью устраняет статическое отклонение, т. е. при выполнении условия (1.12)

$$y_{ст} = 0. \quad (1.13)$$

Если же в объекте управления изначально имеется r интегрирующих звеньев, то для получения результата (1.13) необходимо повысить порядок астатизма системы на величину r . Другими словами, необходимо довести порядок астатизма системы до величины

$$Q = q + r. \quad (1.14)$$

3. Компенсация возмущений. Суть способа состоит в расширении функций системы управления, в результате чего на основании информации о величине действующего возмущения вырабатывается дополнительное управляющее воздействие, которое компенсирует влияние данного возмущения. Таким образом, практическая реализация этого метода предусматривает организацию измерения конкретного возмущения, а также введение в систему управления дополнительного блока, реализующего выработку соответствующей компенсирующей составляющей управляющего воздействия.

В отличие от обоих рассмотренных выше способов такой способ устранения статического отклонения не является универсальным, так как позволяет скомпенсировать действие только какого-либо конкретного возмущения. Действия же других возмущений, которые не включены в контур данной системы управления, приведут к отклонению выходной величины.

По результатам проведенного анализа способов управления статическими режимами можно сделать следующий вывод.

Повышение точности управления обеспечивается за счет выбора того или иного варианта управления, т. е. за счет организационной адаптации систем управления к условиям работы. Причем существующие варианты решения такой задачи теоретически позволяют удовлетворить любые требования по ограничению величины статической ошибки.

1.4. Динамические режимы систем управления

Формирование качества продукции, производимой на многих промышленных объектах, происходит в основном в стационарных динамических режимах. Поэтому эти режимы работы объектов, а следовательно, и систем управления зачастую являются наиболее значимыми не только с точки зрения энергетических и материальных затрат, но также и их продолжительности во всем производственном цикле.

В реальном технологическом процессе всегда имеет место наложение детерминированных и случайных составляющих на его параметры. Так, например, происходят изменение и разброс характе-

ристик сырья во время обработки, изменяется тепловой фон окружающей среды, обусловленный суточными или сезонными изменениями температуры, а также рядом производственных факторов. Происходят изменения напряжения питания в сети, давления пара в магистрали при подключениях и отключениях различных потребителей данных видов энергии и т. д. Некоторые из указанных вариаций могут быть описаны аналитически, другие носят случайный характер. Таким образом, становится очевидным, что понятие «идеальный статический режим» (т. е. выполнение условий (1.1) и (1.2)) для реального промышленного объекта является продуктом математической абстракции. Поэтому основное внимание при синтезе систем управления следует уделять их работе именно в динамических режимах. Исходя из специфических особенностей проявлений динамических режимов конкретного оборудования или технологического процесса, необходимо определять перечень параметров, информация о которых должна быть использована для организации управления, а также для формирования требований к структуре системы управления и функциям отдельных ее элементов. Так как формирование свойств продукции происходит в основном в стационарных режимах, то основным критерием работы системы управления в большинстве случаев является величина ошибки поддержания конкретного режимного параметра.

Исходя из вышесказанного, проанализируем особенности работы объектов и систем управления в динамических режимах в соответствии с приведенной на рис. 1.1 классификацией.

Как следует из названия, стационарный динамический детерминированный режим имеет место, когда приложенное к системе воздействие f описывается аналитической зависимостью, т. е. $f = f(t)$.

В инженерной практике для конкретизации постановки и решения задач анализа и синтеза систем управления рассматривают два основных варианта детерминированных воздействий.

1. Воздействие, изменяющееся по гармоническому закону, т. е. вида

$$f(t) = f_0 \sin \omega t, \quad (1.15)$$

2. Воздействие, изменяющееся с постоянной производной m -го порядка $p^m f = f^{(m)} = \text{const}$, которое можно представить в виде

$$f(t) = \frac{f^{(m)}}{m!} t^m. \quad (1.16)$$

При $m = 1$ имеем

$$f(t) = f^{(1)} t, \quad (1.17)$$

и полагают, что воздействие изменяется с постоянной скоростью $V = f^{(1)}$.

При $m = 2$, когда $f^{(2)} = \text{const}$,

$$f(t) = \frac{f^{(2)}}{2!} t^2 \quad (1.18)$$

воздействие изменяется с постоянным ускорением $a = f^{(2)}$.

Аналогично при $m = 3$ говорят, что воздействие изменяется с постоянной скоростью ускорения, и т. д. При этом все реальные детерминированные воздействия по возможности «округляют» до одного из этих вариантов.

Наличие детерминированных воздействий в динамическом режиме приведет к отклонению выходной величины объекта, т. е. к появлению ошибки. Устранение данной ошибки, как отмечалось в подразд. 1.3, может быть достигнуто за счет применения астатической системы управления с соответствующим порядком астатизма, определенным условиями (1.12) и (1.13).

В качестве альтернативы можно также применить систему управления с компенсацией воздействия. В отличие от статического режима внесение компенсирующего воздействия в данном случае должно осуществляться с учетом динамики проявления этого воздействия.

При варианте представления воздействия в виде гармонической функции (1.15) отклонение выходной величины можно рассматривать как реакцию объекта на установившиеся гармонические колебания (сигналы). В теории управления поведение объекта под воздействием гармонических сигналов описывается с помощью частотных характеристик. Данные характеристики играют важную роль при анализе объектов и синтезе систем управления. Известно, что между передаточной функцией и частотными характеристиками существует взаимно однозначное соответствие: частотные характеристики могут быть получены из передаточной функции и наоборот. Строго говоря,

это утверждение относится к минимально-фазовым звеньям, т. е. к звеньям, у которых корни полиномов числителя и знаменателя передаточной функции имеют отрицательные или нулевые вещественные части. Следует отметить, что практически все реальные природные и промышленные объекты и звенья обладают такими свойствами, т. е. являются минимально-фазовыми. Кроме того, частотные характеристики можно определить экспериментальным путем.

Ввиду важности этих характеристик для изложения дальнейшего материала и преемственности обозначений введем основные термины, понятия и обозначения:

- амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – $A(\omega)$;
- фазовая частотная характеристика (ФЧХ) – $\varphi(\omega)$.

Физический смысл указанных характеристик можно пояснить на примере прохождения гармонического сигнала через исследуемый объект. Пусть на вход объекта подается гармоническое воздействие вида

$$f(t) = f_0 \sin \omega t.$$

Тогда на выходе объекта также должен установиться гармонический сигнал с той же частотой, но сдвинутый в общем случае по фазе на величину φ относительно входного сигнала, т. е.

$$y(t) = y_0 \sin (\omega t + \varphi). \quad (1.19)$$

Здесь принято, что f_0, y_0 – амплитуды входного и выходного сигналов соответственно; ω – частота гармонического сигнала.

Отношение f_0 к y_0 в общем случае зависит от частоты ω и характеризует интенсивность ослабления (усиления) гармонического сигнала данной частоты при его прохождении через анализируемый объект и называется АЧХ, т. е.

$$A(\omega) = \frac{y_0}{f_0}. \quad (1.20)$$

Величина фазового сдвига φ в общем случае также зависит от частоты и называется ФЧХ, т. е.

$$\varphi = \varphi(\omega). \quad (1.21)$$

Характеристики АЧХ и ФЧХ для наглядности удобно представлять в виде графиков, где по оси абсцисс откладывается величина ω , а по оси ординат – соответствующие этой частоте значения A и φ . Экспериментальное определение $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ проще всего осуществить на маломощных объектах «электрической природы». В этом случае в качестве источника входного воздействия используется генератор гармонических сигналов с перестраиваемой частотой; для измерения величин $f(t)$, $y(t)$ и φ – двулучевой осциллограф или в случае более точных измерений – амплитудный вольтметр и фазометр.

Для механических объектов подобные экспериментальные исследования требуют больших вложений и трудозатрат. Здесь в качестве источника входного воздействия, изменяющегося по гармоническому закону, обычно используются различные вибраторы (например, маховики со смещенным относительно оси вращения центром массы, имеющие привод с перестраиваемой угловой скоростью вращения). Для измерения величин $y(t)$, $f(t)$ и φ могут использоваться шлейфовые осциллографы. Такие исследования иногда проводятся с целью изучения динамических свойств различных подвесок, строительных конструкций, сооружений. Еще более сложными, а иногда и физически невозможными данные экспериментальные исследования являются для различных тепловых, гидравлических, энергетических и других объектов. Так, например, трудно даже представить возможность внесения гармонического воздействия по каналу подачи энергоносителя (пара или горячей воды) или сырья в промышленной установке крекинга нефти и нефтепродуктов, да еще с изменяющейся частотой. В таких случаях соответствующие частотные характеристики выводятся из математического описания данных объектов – передаточных функций. Суть процедуры состоит в следующем. В выражении передаточной функции $W(p)$ делается замена оператора дифференцирования p на комплексную переменную $j\omega$. В результате получают функцию комплексной переменной $W(p) \Big|_{p \Rightarrow j\omega} \Rightarrow W(j\omega)$. Модуль данной функции есть АЧХ, т. е. $|W(j\omega)| = A(\omega)$, а аргумент есть ФЧХ – $\varphi(\omega)$. В показательной форме записи исходная функция $W(j\omega)$ может быть представлена в виде $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$.

Такая «потребность» в частотных характеристиках объясняется тем, что целый ряд задач анализа объектов и особенно синтеза систем

управления значительно удобнее решать именно в области этих характеристик.

Для большей наглядности представления информации наряду с АЧХ и ФЧХ используют производные от них характеристики, рассмотренные ниже.

3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика – АФЧХ. Данная характеристика объединяет в себе АЧХ и ФЧХ и строится в полярных координатах. Здесь каждому текущему значению частоты ω_i соответствует радиус-вектор, имеющий угол поворота $\varphi(\omega_i)$, длина которого равна $A(\omega_i)$. При изменении ω конец радиус-вектора описывает некоторую кривую, называемую кривой годографа АФЧХ. Рассматриваемая АФЧХ также может быть изображена и на комплексной плоскости. Здесь каждая точка кривой годографа будет иметь вещественную составляющую $U(\omega)$, равную проекции радиус-вектора на вещественную ось, и мнимую составляющую $V(j\omega)$, равную проекции радиус-вектора на мнимую ось, т. е. будет иметь место зависимость

$$\begin{cases} U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \\ V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{cases} \quad (1.22)$$

С другой стороны, из сделанного представления следует

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \end{cases} \quad (1.23)$$

4. Логарифмическая амплитудная характеристика – ЛАХ – $L(\omega)$. Логарифмическая фазовая характеристика – ЛФХ. Логарифмическая амплитудная характеристика строится в логарифмических координатах: $\lg \omega$ – по оси абсцисс (единица измерения – декада), $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ – по оси ординат (единица измерения – децибел). При построении ЛФХ используются: ось абсцисс – $\lg \omega$, ось ординат – $\varphi(\omega)$. Использование логарифмического масштаба позволяет строить асимптотическую ЛАХ в виде набора сопрягающихся отрезков прямых, имеющих наклоны, кратные 20 дБ/дек, что значительно упро-

щает процедуру построения и использования таких характеристик для решения различных задач.

Качественный вид рассмотренных выше характеристик для инерционного звена 3-го порядка, имеющего, например, передаточную функцию вида $W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$, приведен на рис. 1.2, а–д (для определенности полагаем $T_1 > T_2 > T_3$).

Из приведенных рисунков видно, какую важную роль играют данные характеристики даже для такой частной задачи, как оценка влияния гармонических составляющих воздействия на выход объекта. Очевидно, что наибольшей информативностью в этом случае обладают АЧХ (рис. 1.2, а) и ЛАХ (рис. 1.2, г). Действительно, располагая по оси ω (или $\lg \omega$) значения частот гармонических составляющих воздействия $f(t)$ в соответствии с представлением (1.19), можно определить влияние каждой из составляющих на выходную величину объекта. Для комплексной оценки таких явлений в технике вводится специальное понятие – полоса пропускания, ширина которой характеризует инерционность объекта, его динамические свойства. Очевидно, что чем шире полоса пропускания, тем менее инерционен объект, и наоборот. Кроме этого оказывается, что с использованием частотных характеристик удобно решать задачи, связанные с оценкой качества переходных процессов, устойчивости, а также задачи анализа и синтеза систем управления.

Отклонение выходной величины y системы при наличии гармонического воздействия может быть оценено по амплитуде выходного сигнала

$$y_{\max} = f_0 |\Phi_{fy}(j\omega)|, \quad (1.24)$$

где $|\Phi_{fy}(j\omega)|$ – модуль частотной передаточной функции замкнутой системы.

Для систем автоматического регулирования (САР), задачей которых является отслеживание входного сигнала – управляющего воздействия x_3 , в качестве выходной величины системы рассматривают величину ошибки $\Delta(t) = x_3(t) - y(t)$.

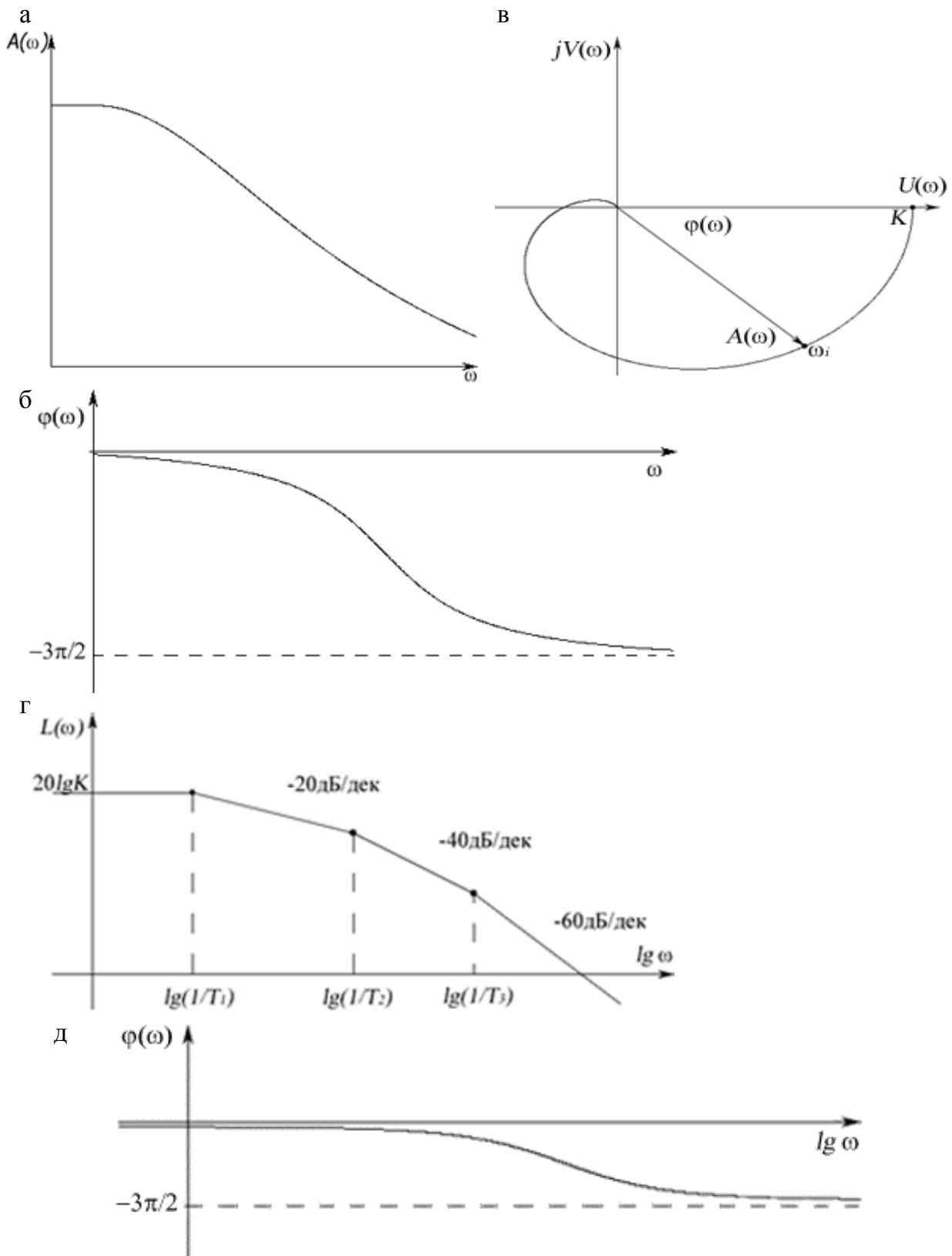


Рис. 1.2. Качественный вид частотных характеристик инерционного звена 3-го порядка:

а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; г – ЛАХ; д – ЛФХ

В данном случае выражение передаточной функции замкнутой системы по ошибке $\Phi_{f\Delta}(p)$ будет иметь вид

$$\Phi_{f\Delta}(p) = \frac{1}{1 + W(p)}, \quad (1.25)$$

где $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы.

Очевидно, что при наличии задающего воздействия, изменяющегося по гармоническому закону, ошибка слежения будет также изменяться по гармоническому закону с той же частотой, что и задающее воздействие. Тогда амплитуда ошибки слежения выходной величины $y(t)$ за управляющим воздействием $x_3(t)$ согласно формулам (1.24) и (1.25) может быть определена из выражения

$$\Delta_{\max} = \frac{x_0}{|1 + W(j\omega)|}. \quad (1.26)$$

Очевидно, что в системах регулирования величина ошибки Δ_{\max} намного меньше величины x_0 , следовательно, знаменатель выражения (1.26) намного больше единицы. Поэтому выражение (1.26) можно упростить, приведя его к виду

$$\Delta_{\max} \approx \frac{x_0}{|W(j\omega)|} = \frac{x_0}{A(\omega)}. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27) используется при решении задачи синтеза САР, обеспечивающих требуемую точность регулирования в установившемся режиме. Величины Δ_{\max} и x_0 задаются исходя из конкретной специфики работы системы в техническом задании на проектирование. Затем с помощью выражения (1.27) определяются требования к ЛАХ разомкнутой системы, обеспечивающие выполнение условия

$$\Delta \leq \Delta_{\max}. \quad (1.28)$$

Очевидно, что для выполнения условия (1.28), ЛАХ синтезируемой системы должна проходить не ниже так называемой контрольной точки A_k с координатами $[\lg \omega_0; L(\omega_0)]$

$$L(\omega_0) = 20 \lg A(\omega_0) = 20 \lg \frac{x_0}{\Delta_{\max}}, \quad (1.29)$$

где ω_0 – частота управляющего воздействия.

На рис. 1.3 приведены примеры ЛАХ, обеспечивающих строгое выполнение условия (1.28) (так как в обоих случаях ЛАХ проходит выше контрольной точки) для различных вариантов САР.

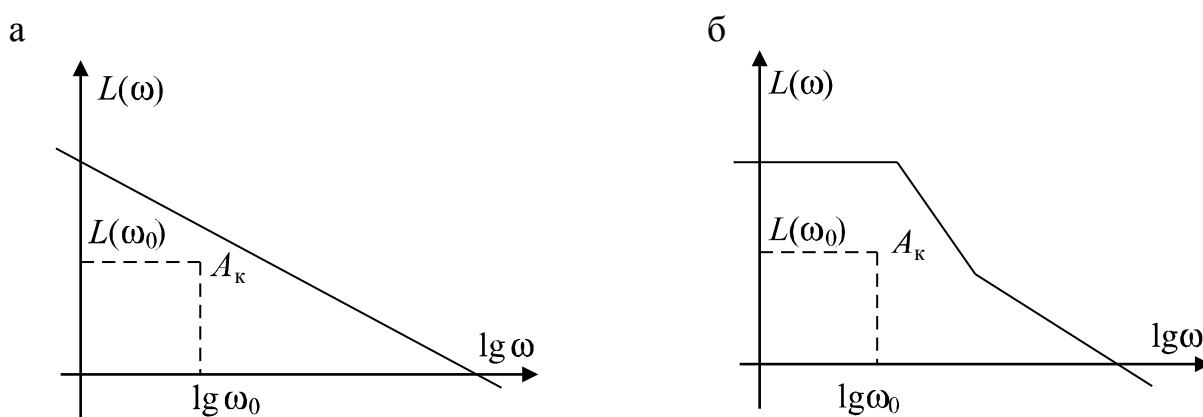


Рис. 1.3. Примеры ЛАХ разомкнутых САР, обеспечивающих выполнение требований по ограничению ошибки в установившемся режиме:
а – статическая система; б – астатическая система

Из выражения (1.27) также следует, что если ЛАХ разомкнутой САР проходит ниже контрольной точки A_k , то величина ошибки слежения будет превышать заданное допустимое значение, т. е. условие (1.28) не будет выполняться.

Применительно к задаче синтеза систем управления при работе в детерминированных динамических режимах необходимо отметить следующее. В настоящее время разработаны и широко используются на практике методы синтеза систем управления с использованием частотных характеристик. Не вдаваясь в отдельные детали, необходимо отметить концептуальную направленность таких методик. В качестве отправной точки используется математическое описание объекта управления и неварьируемой части системы управления, если такая

имеется. Далее, исходя из конкретной ситуации, формируются требования к качеству процесса управления. Чаще всего ими являются: требования к запасу устойчивости системы, ограничения по длительности переходного процесса (быстродействию), требования к точности управления в статическом или динамическом режимах. В последнем случае возможны различные варианты описания воздействия (например, воздействия, изменяющиеся с постоянной скоростью, ускорением и др.). Кроме того, в этот перечень могут быть включены требования к типу переходного процесса (апериодический или колебательный). При допустимости колебательного переходного процесса могут накладываться ограничения на величину перерегулирования или динамический заброс. Возможны и другие требования. На основании всех требований по известным методикам строится ЛАХ желаемой системы. Там же строится ЛАХ неварьируемой части системы. На основании этой информации определяется ЛАХ и соответствующее ей математическое описание варьируемой части системы, которая обычно реализуется в виде того или иного типа регулятора с соответствующими настройками либо в виде конкретной корректирующей цепи. Далее делается проверка правильности полученного решения путем построения переходного процесса в системе одним из известных методов. При необходимости дополнительной корректировки системы методика может быть повторена. Для удобства реализации отдельных компонентов таких методик в настоящее время разработаны специальные номограммы и компьютерные программы.

В качестве неварьируемой части системы обычно рассматриваются объект управления и первичные преобразователи и (или) исполнительные устройства, штатно установленные на нем. Если же они относятся к варьируемой части системы и имеются варианты их выбора, то это обстоятельство расширяет возможности синтеза системы управления.

На основании вышеизложенного материала можно сделать следующий обобщающий вывод. При наличии детерминированных воздействий изменение координат объекта или системы управления, динамика которых описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений, может быть однозначно определено. При необходимости осуществления автоматического управления требуемое качество процесса управления для основных типов воздействий может

быть достигнуто за счет синтеза устройства управления, структура и параметры которого могут быть определены и рассчитаны с помощью инженерных методик.

Наиболее полным и практически реальным вариантом стационарного динамического режима является случайный режим. Стационарный детерминированный режим можно рассматривать как частный вариант случайного режима, когда случайные функции, описывающие воздействия, вырождаются в детерминированные функции. Физической подоплекой данного обстоятельства является то, что реальные воздействия, сигналы в любой системе имеют случайную составляющую. Если влияние этих составляющих невелико, то ими можно пренебречь и ограничиться рассмотрением детерминированного режима. Приведенные в начале этого подраздела примеры иллюстрируют данный тезис. Объективная оценка влияния отдельных случайных составляющих воздействий является необходимой предпосылкой для определения перечня контролируемых воздействий при синтезе системы управления. Дальнейшее повышение эффективности управления как естественный этап эволюции систем управления должно основываться на учете случайных составляющих воздействий, являющихся естественными аномалиями детерминированных режимов.

Синтез системы управления при наличии случайных воздействий является наиболее сложной задачей относительно рассмотренных выше вариантов. Зачастую, особенно при наличии ограниченной информации о воздействиях, точное аналитическое решение такой задачи не представляется возможным. Поэтому возникает задача синтеза робастных систем, обеспечивающих «хорошее» качество управления (в разумных пределах) даже в условиях относительного «информационного вакуума». Рассмотрению методов синтеза таких систем для наиболее характерных случаев и ситуаций с исходными данными посвящен излагаемый далее материал. В любом случае, для решения подобных задач необходимо математическое описание случайных воздействий. Математический аппарат для таких исследований разработан в теории вероятностей. В следующем разделе приводятся основные положения данной теории, необходимые для решения задач анализа и синтеза систем управления, с конкретными иллюстрациями и пояснениями.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

2.1. Основные положения

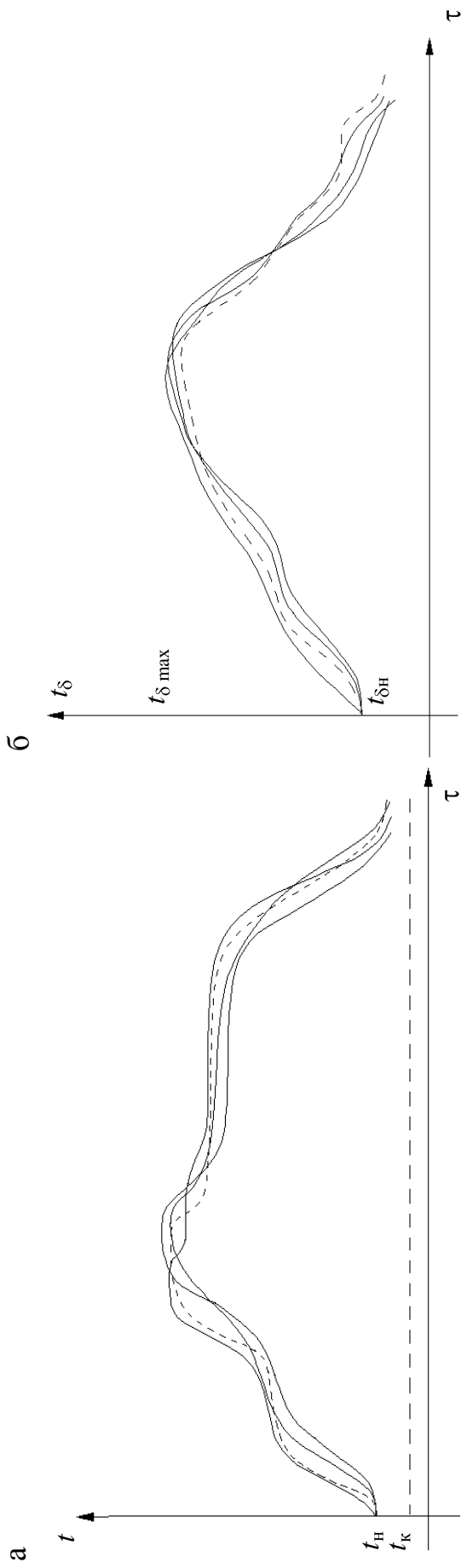
Как отмечалось в разд. 1, практически любой реальный режим работы объекта или протекания технологического процесса происходит при наличии случайных воздействий. Подоплека этого обстоятельства отражена в известном тезисе о том, что случайность – закономерна. В ряде случаев, когда доля случайных составляющих воздействий относительно невелика, для упрощения решаемых задач анализа работы объекта управления, синтеза технологий и управления этим обстоятельством пренебрегают. Наличие случайных воздействий на входе приводит к появлению случайной составляющей в выходных координатах. А это, в свою очередь, приводит к вариации фазовых траекторий технологических режимов, что, в конечном счете, отразится на изменении свойств выпускаемой продукции. На рис. 2.1 данное обстоятельство проиллюстрировано на примере работы термоагрегата для термообработки вареных колбас. На рис. 2.1, а приведена характеристика семейства кривых изменений температуры энергоносителя (паровоздушной смеси) в агрегате при обработке колбас одного типа во времени. Разброс кривых изменения температуры во времени обработки обусловлен проявлением таких случайных воздействий, как изменение давления пара, подаваемого в паровой калорифер, а также изменением температуры воздуха как снаружи термоагрегата, так и подаваемого в калорифер, и др. Горизонтальные участки кривых соответствуют основным стадиям технологической обработки: подсушке, обжарке, варке и охлаждению. Штриховой линией обозначен «идеальный» температурный режим, который должен иметь место при отсутствии случайных воздействий. На рис. 2.1, б приведен характерный вид семейства кривых изменения температуры в центре колбасного батона в процессе термообработки t_b – одного из важнейших показателей качества продукции, характеризующего уровень стерилизации продукта. Ввиду особой важности этого показателя в действующих стандартах введено специальное ограничение по величине максимального значения температуры в центре батона в процессе термообработки $t_{b \max}$, т. е. $t_{b \max} \geq t_{b.кр}$. Значение $t_{b.кр}$ задается специальной технологической инструкцией, обычно принимают $t_{b.кр} = 72$ °С. Разброс кривых

на рис. 2.1, в обусловлен наличием рассмотренных выше случайных воздействий, искажающих температурный режим, а также проявлением других случайных воздействий, например, изменением теплофизических характеристик колбасного фарша вследствие некоторой неустойчивости его химического состава, особенно по таким параметрам, как содержание жира, белка, влаги и др.

Как результат влияния различных возмущающих воздействий на выходную координату процесса тепловой обработки $t_{\delta \max}$ на рис. 2.1, в приведен характерный вид кривой плотности распределения этого показателя $p(t_{\delta \max})$ для кондиционной продукции. Положительная асимметрия ($S_k > 0$) приведенного закона распределения объясняется специфическими особенностями организации управления процессом термообработки. С одной стороны, требуется обеспечить выполнение необходимого условия производства кондиционной продукции: $t_{\delta \max} \geq t_{\delta \text{кр}}$. С другой стороны, значительное превышение величины $t_{\delta \text{кр}}$ приводит или к перерасходу энергии, или к снижению производительности агрегата (за счет увеличения длительности термообработки), что в конечном итоге ведет к увеличению себестоимости продукции. Для недопущения этого в современных термоагрегатах имеются специальные системы блокировки подачи энергоносителя и оповещения обслуживающего персонала о необходимости прерывания процесса термообработки в случае, когда значение разности $t_{\delta \max} - t_{\delta \text{кр}}$ превысит некоторое установленное значение $\Delta_{\text{кр}}$. Этим и объясняется невысокая вероятность появления больших величин Δ в производственных условиях.

И, наконец, для полноты описания рассматриваемого явления на рис. 2.1, г приведен характерный вид интегрального закона распределения этого же показателя $F(t_{\delta \max})$.

Приведенный пример наглядно иллюстрирует необходимость наличия математического описания случайных воздействий и методов анализа влияния данных воздействий на состояние объектов. Ниже будут рассмотрены методы анализа воздействий и выбран перечень параметров для их характеристики.



29 В

Г

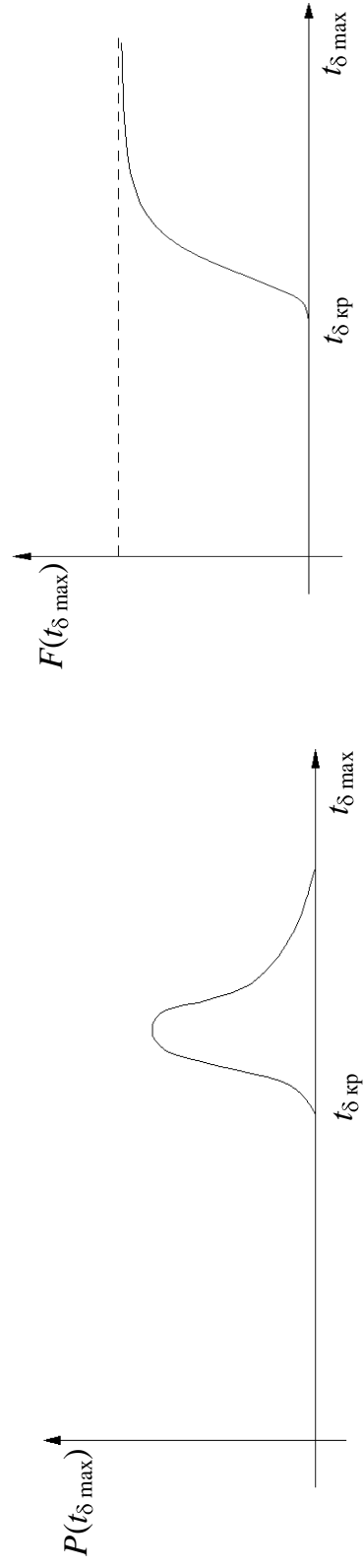


Рис. 2.1. Характеристики работы термоагрегата при наличии случайных воздействий:

а – графики изменения температуры энергоносителя; б – графики изменения температуры в центре колбасного батона во время термообработки; в – характерный вид плотности распределения $P(t_\delta \max)$; г – характерный вид интегрального закона распределения $F(t_\delta \max)$

2.2. Случайные величины и случайные функции

Случайное воздействие в зависимости от характера его проявления с математической точки зрения может быть представлено либо случайной величиной, либо случайной функцией. Понятие случайной функции является более общим, чем случайная величина, так как в нем учитывается фактор времени. Образно говоря, случайная величина характеризует как бы «статистику» случайного явления, а случайная функция – динамику. Или, другими словами, случайная функция есть случайная величина, проявляющаяся во времени. Изучением случайных величин и функций занимается специальная математическая дисциплина – теория вероятностей. Ниже излагаются некоторые ее положения, необходимые для понимания последующего материала.

2.3. Случайная величина и ее характеристики

Случайная величина – это величина, значение которой является непредсказуемым в диапазоне изменения факторов рассматриваемого явления. Наиболее полной характеристикой случайной величины x является ее закон распределения – интегральный $F(x)$ и дифференциальный $p(x)$.

Интегральным законом распределения случайной величины x называется функция $F(x)$, описывающая вероятность P появления случайной величины X , меньшей некоторого текущего значения переменной x , т. е.

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Из определения $F(x)$ следует, что она является неубывающей функцией x для $-\infty < x < \infty$. Причем $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$. Пример вида функции $F(x)$ приведен на рис. 2.1, г.

Дифференциальным законом распределения или плотностью вероятности $p(x)$ называется функция

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

при этом подразумевается, что функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема.

Из определения функции $p(x)$ следует, что:

1) $p(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$;

3) $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$.

Для дискретной случайной величины плотность вероятности вырождается в распределение вероятностей $P(X_i)$, которое задается конечным рядом. В данном случае очевидно, что интегральный закон распределения случайной величины $F(x)$ может быть выражен через распределение вероятностей $P(X_i)$ следующим образом:

$$F(x) = \sum_{(i)} P(X_i); X_i < x.$$

Если случайное воздействие характеризуется несколькими координатами, т. е. может быть представлено как случайный вектор, то оно рассматривается как многомерная случайная величина. Понятия интегрального и дифференциального законов распределения по аналогии вводятся и для многомерных случайных величин. В данном случае соответствующие функции будут многомерными и в отличие от одномерных случайных величин будут представляться не кривыми, а некоторыми гиперповерхностями в соответствующей системе координат.

Для удобства решения практических задач реальные законы распределения случайных величин «округляют» с той или иной степенью точности до известных типовых законов, свойства и параметры которых изучены и определены.

На практике, исходя из удобства использования, наибольшее распространение для характеристики случайных величин получил дифференциальный закон распределения. Один из примеров вида дифференциального закона распределения приведен на рис. 2.1, в.

Нахождение закона распределения требует значительных трудозатрат и большого объема вычислительной работы. Иногда оказывается удобнее воспользоваться набором числовых параметров, характеризующих различные свойства случайной величины. Данный набор важнейших параметров состоит из ограниченного ряда начальных и центральных моментов.

Начальные моменты k -го порядка случайной величины X определяются из следующих выражений:

– для дискретной случайной величины

$$\alpha_k(X) = \sum_{(i)} x_i^k P_i, \quad (2.1)$$

где P_i – вероятность появления случайной величины x_i ;

– для непрерывной случайной величины

$$\alpha_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx. \quad (2.2)$$

Для решения практических задач наиболее важным является первый начальный момент $\alpha_1(X) = m_x = M(X)$, получивший специальное название – математическое ожидание случайной величины. Математическое ожидание является своеобразным «центром тяжести», вокруг которого происходит «рассеяние» случайной величины.

Центральные моменты k -го порядка случайной величины x определяются из следующих выражений:

– для дискретной случайной величины

$$\mu_k(X) = \sum_{(i)} (x_i - m_x)^k P_i; \quad (2.3)$$

– для непрерывной случайной величины

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k p(x) dx. \quad (2.4)$$

Для практических целей наиболее важными являются второй, третий и четвертый центральные моменты.

Второй центральный момент $\mu_2(X) = D_x$ получил специальное название – дисперсия. Дисперсия характеризует степень «рассеяния» случайной величины относительно математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс случайной величины, и наоборот. Для детерминированной величины c дисперсия равна нулю, т. е. $D_c = 0$. Для большей наглядности степени разброса случайной величины используют специальный параметр σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}, \quad (2.5)$$

называемый величиной среднего квадратического отклонения (СКО) случайной величины. Величина σ_x имеет размерность случайной величины и характеризует ее «средний радиус» рассеяния.

Третий центральный момент μ_3 характеризует асимметрию или скошенность плотности распределения. Для количественной характеристики асимметрии используют безразмерную величину, называемую коэффициентом асимметрии S_k ,

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что для симметричной (относительно m_x) кривой плотности распределения случайной величины $S_k = 0$. Пример положительной асимметрии ($S_k > 0$) плотности распределения приведен на рис. 2.1, в.

Четвертый центральный момент μ_4 характеризует степень «островершинности» распределения. Для количественной характеристики данного свойства используют специальную безразмерную величину, называемую эксцессом E_x ,

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (2.7)$$

В качестве «отправной точки» для оценки «островершинности» распределения используется нормальный закон распределения, для которого $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Отсюда значение E_x для нормального закона распределения согласно выражению (2.7) равно нулю. Таким обра-

зом, более «островершинные» кривые по сравнению с нормальным распределением имеют положительный эксцесс и наоборот.

Рассмотренный набор числовых параметров (m_x , σ_x , S_k , E_x) довольно полно, но не исчерпывающе, характеризует свойства случайной величины. При необходимости могут быть использованы и другие параметры, например мода, медиана. Однако они получили меньшее распространение.

2.4. Случайная функция и ее характеристики

Случайные процессы, протекающие в различных объектах, описываются с помощью математического аппарата случайных функций. Для получения адекватного математического описания случайного процесса его следует предварительно классифицировать. Для этого необходимо определить основные характеристики. Как следует из определения случайной функции, ее закон распределения в общем случае зависит от времени. Поэтому и ее характеристики также должны являться функциями времени. По аналогии со случайными величинами для характеристики случайных функций используется ограниченный набор неслучайных функций времени, которые достаточно объективно их определяют. Для решения практических задач наибольшее распространение получили следующие функции.

1. Математическое ожидание случайной функции $x(t) - m_x(t)$. Если t придать фиксированное значение t_i , то получим «сечение» случайной функции по времени. Совокупность математических ожиданий $m_x(t_i)$ случайных величин $x(t_i)$ для всех значений t определяет математическое ожидание случайной функции $m_x(t)$.

2. Дисперсия случайной функции $x(t) - D_x(t)$. По аналогии с предыдущим определением, $D_x(t)$ называется функция времени, которая при каждом конкретном значении $t = t_i$ равна дисперсии случайной величины, получающейся в результате соответствующего «сечения» рассматриваемой случайной функции $x(t)$. Среднеквадратическое отклонение случайной функции $\sigma_x(t)$ определяется по аналогии со случайными величинами как $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

3. Корреляционная функция. Корреляционная функция характеризует интенсивность изменения случайной функции во времени

или, образно говоря, степень ее турбулентности. Для строгого описания такого свойства рассматриваются пары временных «сечений», соответствующих моментам времени t_1 и t_2 . Степень связанности случайных значений функций $x(t_1)$ и $x(t_2)$ характеризуется корреляционной функцией $K_{xx}(t_1, t_2)$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = M\{[x(t_1)][x(t_2)]\}. \quad (2.8)$$

Для наглядности и удобства представления часто используют центрированную случайную функцию $\overset{0}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, соответственно выражение (2.8) примет вид

$$K_{xx}(t_1, t_2) = M[\overset{0}{x}(t_1) \overset{0}{x}(t_2)]. \quad (2.9)$$

Как следует из выражения (2.9), при $t_1 = t_2$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = D_x(t). \quad (2.10)$$

Другими словами, дисперсия случайной функции есть частный случай ее корреляционной функции.

Для удобства на практике часто используют нормированную корреляционную функцию, которая определяется из выражения

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \frac{K_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}}. \quad (2.11)$$

Очевидно, что при $t_1 = t_2$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \frac{K_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t)D_x(t)}} = \frac{D_x(t)}{D_x(t)} = 1.$$

4. Спектральная плотность $S_x(\omega)$. Спектральная плотность описывает распределение дисперсий случайной функции $x(t)$ по частотному спектру. Ее также можно трактовать как распределение средних значений квадратов амплитуд отдельных гармонических составляющих исходной функции $x(t)$. Так как квадрат амплитуды гармонического сигнала пропорционален его мощности, спектральная плот-

ность фактически характеризует распределение мощностей отдельных гармонических составляющих в частотном диапазоне.

Приведенный выше набор неслучайных функций используется для характеристики случайных процессов. Для решения поставленных в данной работе задач необходимо определить типы случайных процессов, которые доминируют в практике управления рассматриваемыми технологическими объектами. В основе классификации все случайные процессы делятся на стационарные и нестационарные.

Стационарным случайным процессом называется процесс, у которого все вероятностные характеристики не зависят от времени. Исходя из вышесказанного, стационарный процесс можно исследовать на любом временном интервале, при этом его характеристики остаются неизменными.

Нестационарным случайным процессом называется процесс, который имеет тенденцию изменения во времени: его вероятностные характеристики являются функциями времени. Примером нестационарного процесса является процесс, изображенный на рис. 2.1, а.

Нестационарными стадиями процесса являются стадии выхода на режимы подсушки, обжарки, варки и охлаждения. После окончания каждой из этих стадий объект переходит в соответствующий установившийся режим, в каждом из которых процесс изменения температуры во времени с некоторым приближением может считаться стационарным. То же самое можно сказать и о случайном процессе, изображенном на рис. 2.1, б. Здесь относительно небольшим стационарным участком является участок варки колбасных батонов на заключительной стадии термообработки перед началом охлаждения. В подавляющем большинстве случаев, и это подтверждается приведенными примерами, целенаправленная обработка сырья, формирование тех или иных свойств продукции осуществляются на конкретных этапах технологической обработки в установившихся технологических операциях, где проявление различных случайных воздействий обуславливает наличие стационарного (или псевдостационарного) случайного процесса в режимных параметрах. Поэтому синтез системы управления и выбор соответствующих технических средств должны осуществляться исходя именно из этой предпосылки. Что касается выбора стратегии управления в переходных режимах, то, как отмечалось выше (разд. 1), она в большинстве случаев направлена

на форсирование (повышение быстродействия) этих режимов и решается с использованием принципов релейного управления. Наложение нестационарных случайных воздействий на технологические параметры в переходных режимах, возможно приводящие в отдельные моменты времени к недопустимым пиковым значениям, могут быть устранены с помощью соответствующих блокировок.

Таким образом, становится очевидным, что для решения задач синтеза систем контроля и управления производственными технологическими процессами целесообразно ограничиться рассмотрением стационарных случайных воздействий на всех стадиях производства.

Предположение о стационарности случайных воздействий на основных стадиях производства позволяет конкретизировать свойства вышерассмотренных характеристик в следующем виде:

$$1. m_x(t) = m_x = \text{const}; \quad (2.12)$$

$$2. D_x(t) = D_x = \text{const}; \quad (2.13)$$

$$3. K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = K_x(\tau). \quad (2.14)$$

Условия (2.12) и (2.13) вытекают из определения стационарности. Условие (2.14) также является следствием стационарности, так как очевидно, что значение $K_{xx}(t_1, t_2)$ не зависит от времени t , а зависит только от временного интервала $\tau = t_1 - t_2$.

$$4. K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (2.15)$$

Данное условие следует из определения функции $K_{xx}(t_1, t_2)$, согласно которому $K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_2, t_1)$. Отсюда для стационарного случайного воздействия при $t_2 - t_1 = \tau$ получаем условие (2.16).

$$5. K_x(0) = M[x^2]. \quad (2.16)$$

Для центрированного случайного воздействия условие (2.16) трансформируется к виду

$$K_x(0) = M\{[x(t)]^2\} = D_x. \quad (2.17)$$

$$6. K_x(\infty) = m_x^2. \quad (2.18)$$

Условие (2.18) следует из того, что при $\tau = \infty$ сечения случайной функции $x(t)$ являются независимыми, и корреляционная функция отличается от нуля только за счет наличия неслучайной составляющей m_x . Очевидно, что для центрированной случайной функции $x(t)$ будет иметь место условие (2.19).

$$7. K_x(\infty) = 0. \quad (2.19)$$

8. Согласно теореме Винера–Хинчина, для стационарной случайной функции $x(t)$ существует взаимосвязь между корреляционной функцией $K_x(\tau)$ и ее спектральной плотностью $S(\omega)$ в следующем виде:

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} e^{j\omega\tau} S(\omega) d(\omega); \quad (2.20)$$

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} K_x(\tau) d\tau, \quad (2.21)$$

или в тригонометрической форме

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (2.22)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.23)$$

Качественная зависимость между приведенными характеристиками такова: чем шире график корреляционной функции, тем уже график функции спектральной плотности, и наоборот.

Для удобства экспериментального определения характеристик случайных воздействий используют гипотезу об их эргодичности. Математическая формулировка свойства эргодичности случайных функций состоит в том, что среднее по множеству наблюдений равно среднему по времени (для достаточно протяженного интервала наблюдений). Из приведенной формулировки видно, что указанное свойство характерно для стационарного процесса. Так как характеристики стационарного воздействия не изменяются во времени,

то множество наблюдений воздействия может быть заменено длительным наблюдением за одной из его реализаций. Например, математическое ожидание такого воздействия m_x при длительном наблюдении за ним в течение интервала времени T ($T \rightarrow \infty$) может быть определено следующим образом:

$$m_x = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (2.24)$$

Аналогично могут быть вычислены величина дисперсии

$$D_x = M[x(t) - m_x]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \approx \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - m_x\}^2 dt \quad (2.25)$$

и корреляционная функция

$$K_x(\tau) \approx \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt. \quad (2.26)$$

Для стационарных эргодических дискретных случайных функций вычисление рассмотренных характеристик производится аналогично, только в выражениях (2.24) – (2.26) процедура интегрирования будет заменена суммированием по всем реализациям. Так, например, для n -мерной случайной выборки $x(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) выражение (2.24) трансформируется к виду

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i) \quad (2.27)$$

и так далее.

Приведенные характеристики широко используются в инженерной практике для описания случайных воздействий. С их помощью оценивается влияние разнообразных воздействий на состояние объектов и систем. Рассмотрению данного вопроса посвящен следующий раздел.

3. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЪЕКТЫ И СИСТЕМЫ

3.1. Основные положения

Для анализа работы объекта при наличии случайных воздействий необходим математический аппарат, описывающий взаимосвязь между данными воздействиями и их проявлениями (откликами) на выходе. Исходя из рассмотренных выше особенностей характера воздействий и математического описания класса объектов и систем управления, математическая формулировка этой задачи может трактоваться как анализ прохождения стационарного случайного сигнала через линейную стационарную динамическую систему. Классический вариант решения такой задачи при наличии математического описания динамики объекта или системы позволяет установить зависимости между математическими ожиданиями, корреляционными функциями или функциями спектральных плотностей случайных воздействий и их откликов. В более сложных и реальных случаях, когда требуется увязать влияние случайных воздействий с величинами допусков на отклонение свойств продукции на выходе или при отсутствии полной информации по таким воздействиям, возникают неопределенности. Данные обстоятельства и являются предпосылкой для организации робастного управления. Ниже излагаются схемы и алгоритмы решения различных вариантов задач, обусловленных соответствующими производственными ситуациями.

3.2. Преобразование стационарного случайного воздействия динамической линейной системой

В данном подразделе в качестве первоосновы рассматривается классический вариант вышеупомянутой задачи. В ее рамках любой объект рассматривается как стационарная динамическая система, коэффициенты дифференциального уравнения которой или соответствующей передаточной функции $W(p)$ являются постоянными. Технологический процесс, протекающий в таком объекте, преобразует входной параметр $x(t)$ (например, какую-либо характеристику сырья

или энергоносителя) в выходной – $y(t)$ (например, в какую-либо характеристику готовой продукции). Значения параметров $x(t)$ и $y(t)$ являются элементами режима работы объекта, так как протекание технологического процесса может определяться и другими параметрами. Входное стационарное случайное воздействие $x(t)$ можно представить в виде суммы двух составляющих

$$x(t) = m_x + \overset{0}{x}(t), \quad (3.1)$$

где m_x – среднее значение (математическое ожидание) стационарного случайного воздействия; $\overset{0}{x}(t)$ – центрированная случайная составляющая воздействия, для которой $M[\overset{0}{x}(t)] = 0$.

Очевидно, что наличие воздействия $x(t)$ приведет к появлению на выходе объекта по координате y стационарной случайной составляющей $y(t)$. Согласно принципу суперпозиции можно считать, что действие каждой составляющей входного воздействия $x(t)$ приведет к появлению соответствующих откликов на выходе и поэтому случайная функция $y(t)$ также может быть представлена в виде

$$y(t) = m_y + \overset{0}{y}(t), \quad (3.2)$$

где m_y – среднее значение случайного отклика в координате y ; $\overset{0}{y}(t)$ – центрированная случайная составляющая отклика.

Так как величины m_x и m_y являются постоянными, значение m_y может быть однозначно определено через передаточную функцию по величине m_x согласно уравнению статики

$$m_y = m_x W(p) \Big|_{p=0}. \quad (3.3)$$

Если на объекте имеется система регулирования по параметру y , то величина m_y с учетом наличия контура регулирования также определяется из уравнения статики согласно выражению (1.5).

Зависимость основных характеристик входных воздействий и соответствующих откликов на выходе через функцию веса $w(\tau)$ имеет следующий вид:

$$K_y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\tau_1) w(\tau_2) K_x(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.4)$$

Дисперсию выходной координаты можно получить из выражения корреляционной функции при $t = 0$

$$D_y = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau_1) w(\tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.5)$$

Спектральная плотность

$$S_y(\omega) = A^2(\omega) S_x(\omega), \quad (3.6)$$

где $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) объекта или системы.

Выражение (3.6) имеет очевидную физическую подоплеку, так как спектральная плотность сигнала характеризует распределение квадратов амплитуд отдельных составляющих гармоник.

Дисперсия выходного параметра, помимо выражения (3.5), также может быть выражена через ее спектральную плотность. Действительно, для центрированной случайной величины согласно выражениям (2.17) и (2.20) имеем

$$D_y = K_y(\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

Входящая в выражения (3.4) и (3.5) функция веса $w(\tau)$ однозначно определяется через соответствующую передаточную функцию с помощью обратного преобразования Лапласа L^{-1}

$$w(\tau) = L^{-1}[W(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.8)$$

На практике, как отмечалось в разд. 1, функция веса достаточно просто может быть получена экспериментально при подаче на вход объекта импульсного воздействия. Функция веса наряду с передаточной функцией также может использоваться для описания зависимости между входным и выходным параметрами с помощью интеграла Дюамеля или интеграла свертки в виде

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Входящая в выражение (3.6) функция $A(\omega)$ также определяется из соответствующей передаточной функции $W(p)$

$$A(\omega) = |W(j\omega)|. \quad (3.10)$$

Кроме того, как показано в разд. 1, эта функция может быть определена экспериментально.

Для случая, когда на объект одновременно поступает несколько случайных воздействий, например, по двум различным каналам x_1 и x_2 , динамические свойства которых заданы соответствующими функциями веса $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$, реакция на выходе y может быть определена на основании принципа суперпозиции в виде

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = \\ &= \int_0^{\infty} w_1(\tau_1) x_1(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} w_2(\tau_1) x_2(t - \tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для наиболее важного на практике случая, когда функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ взаимно независимы, корреляционную функцию выходной величины $y(t)$ можно описать выражением

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_1(\tau_1) w_1(\tau_2) K_{x_1}(\tau - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_2(\tau_1) w_2(\tau_2) K_{x_2}(\tau - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Выражение для спектральной плотности выходной величины будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= A_1^2(\omega) S_{x_1}(\omega) + A_2^2(\omega) S_{x_2}(\omega); \\ A_1(\omega) &= |W_1(p)|_{p \Rightarrow j\omega}, \quad A_2(\omega) = |W_2(p)|_{p \Rightarrow j\omega}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $W_1(p)$ и $W_2(p)$ – передаточные функции объекта по каналам $x_1 \rightarrow y$ и $x_2 \rightarrow y$ соответственно.

В случае, если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ взаимозависимы, то в выражениях (3.12) и (3.13) появятся дополнительные слагаемые, определяемые выражениями взаимных корреляционных функций $K_{x_1x_2}$ и $K_{x_2x_1}$ и взаимных спектральных плотностей $S_{x_1x_2}$ и $S_{x_2x_1}$.

Приведенные в данном подразделе сведения позволяют оценить реакцию объекта на то или иное случайное воздействие с помощью набора объективных неслучайных характеристик. Все приведенные выше формулы будут справедливы и для проведения такого же анализа систем управления, только в этом случае необходимо уже рассматривать динамические свойства (в виде передаточной функции, функции веса и др.) не объекта, а всей системы, состоящей из объекта и контура управления. При этом формулировка задачи для проведения подобных исследований может быть представлена в следующем виде. На вход объекта (или системы) поступает стационарное случайное воздействие $x(t)$, характеризующееся математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $K_x(t)$. Динамические свойства объекта по каналу поступления воздействия – выходная величина y – заданы (либо в виде передаточной функции $W(p)$, либо в виде функции веса $w(t)$ или переходной характеристики $h(t)$). Требуется оценить отклик объекта $y(t)$ на это воздействие, который является случайной функцией, в виде математического ожидания m_y и корреляционной функции $K_y(\tau)$. В ряде практических задач интерес представляет дисперсия D_y , а не корреляционная функция.

3.3. Пример исследования влияния случайных воздействий на управление процессом термообработки

Термообработка в биотехнологической промышленности применяется как один из основных этапов обработки сырья и полуфабрикатов в различных производствах.

Энергоноситель, например горячий воздух или пародымовоздушная смесь, подается в термоагрегат от специального аппарата – теплогенератора. Существует множество типов теплогенераторов, основанных на использовании различных видов энергии (электрической, энергии пара, энергии, получаемой при сгорании органического топ-

лива, и др.) Фрагмент схемы, иллюстрирующей организацию управления температурой в термоагрегате, приведен на рис. 3.1.

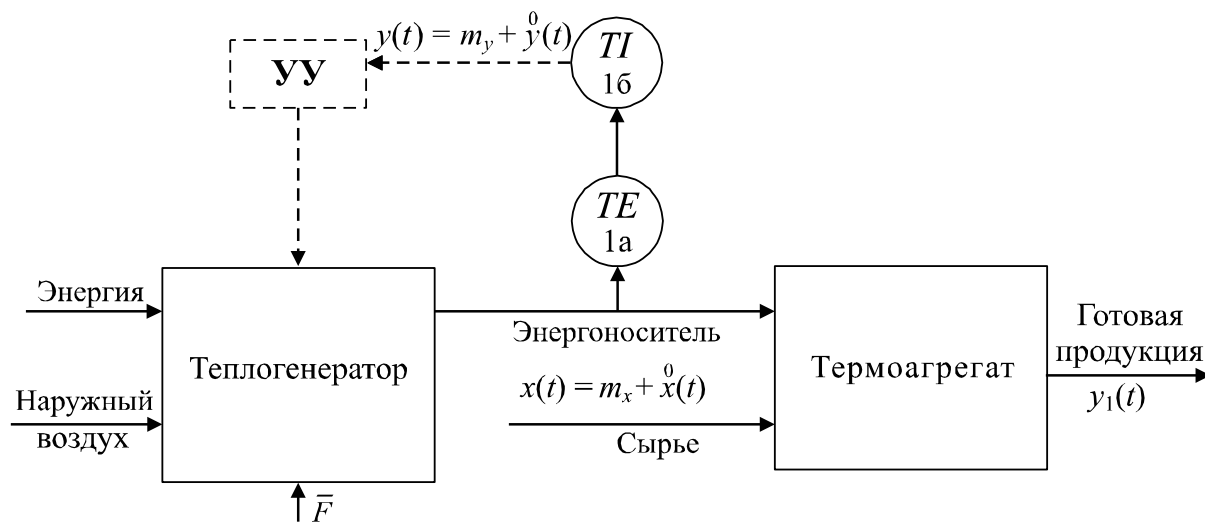


Рис. 3.1. Схема контура управления температурой в термоагрегате

В данном примере энергоноситель получают в результате нагрева наружного воздуха (или регенерированной паровоздушной смеси). Также могут использоваться и другие схемы подготовки энергоносителя, например, основанные на смешении потоков горячего и холодного воздуха, и др. Температура энергоносителя, подаваемого в термоагрегат, контролируется с помощью измерительной цепи, состоящей из первичного преобразователя TE (поз. 1а) и вторичного показывающего прибора TI (поз. 1б). Информация от измерительного прибора в виде параметра $y(t)$ поступает в устройство управления $УУ$, которое и вносит соответствующее управляющее воздействие в теплогенератор. Зачастую в промышленных условиях в качестве устройства управления выступает оператор, осуществляющий ручное управление теплогенератором (поэтому данный участок контура управления обозначен пунктиром). В силу множества причин (например, возмущений, которые на схеме обозначены вектором \bar{F}) температура энергоносителя на выходе из теплогенератора является стационарной случайной функцией времени $x(t)$, которая характеризуется математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $K_x(\tau)$. Достаточно адекватным представлением функции $K_x(\tau)$ для подобных ситуаций является

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad (3.14)$$

где α – положительный коэффициент, характеризующий интенсивность изменений функции $x(t)$; D_x – дисперсия воздействия $x(t)$.

В качестве первичного преобразователя TE (см. рис. 3.1, поз. 1а) обычно используют термоэлектрические термометры или термометры сопротивления, для которых вторичными приборами могут являться милливольтметры и потенциометры или логометры и измерительные мосты, соответственно. В качестве вторичных приборов также могут использоваться и цифровые приборы. В любом случае динамические свойства измерительной цепи практически однозначно определяются динамическими свойствами первичных преобразователей, постоянные времени которых превышают постоянные времени соответствующих вторичных приборов. Так, например, для серийно выпускаемых термоэлектрических термометров с защитным чехлом постоянные времени T находятся в пределах до нескольких минут, время запаздывания (τ_3) – до нескольких десятков секунд. Постоянные времени вторичных приборов не превышают нескольких секунд, что и позволяет ими пренебречь и рассматривать эти приборы как статические безынерционные звенья. Исходя из вышесказанного, передаточную функцию всей измерительной цепи можно представить в виде

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} e^{-\tau_3 p}; \quad (3.15)$$

$$k = k_1 k_2, \quad (3.16)$$

где k – коэффициент передачи всей цепи; k_1 – коэффициент передачи первичного преобразователя; k_2 – коэффициент передачи вторичного прибора.

Теперь на основании имеющейся информации о параметрах воздействия и динамических характеристиках измерительной цепи можно оценить влияние стационарного динамического возмущения на различные параметры (y и y_1) процесса термообработки. Решение задачи целесообразно разбить на ряд этапов.

1. Случайный сигнал $y(t)$ в соответствии с выражением (3.2) представим в виде двух составляющих: $y(t) = m_y + y(t)$. Неслучай-

ную величину m_y в соответствии с уравнением (3.3) определяем по уравнению статики измерительной системы

$$m_y = m_x \frac{k}{Tp+1} e^{-\tau_3 p} \Big|_{p=0} = m_x k. \quad (3.17)$$

2. Определим спектральную плотность случайного воздействия $x(t)$ в соответствии с выражением (2.21)

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} K_x(\tau) d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right] = \frac{D_x}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right] = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3. Определим квадрат модуля частотной характеристики измерительной системы (это необходимо для нахождения $S_y(\omega)$ в соответствии с выражением (3.6))

$$A^2(\omega) = |W(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (3.19)$$

4. Определим спектральную плотность сигнала на выходе измерительной системы $S_y(\omega)$ в соответствии с выражением (3.6)

$$S_y(\omega) = A^2(\omega) S_x(\omega) = \left(\frac{k^2}{T^2\omega^2 + 1} \right) \left(\frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \right). \quad (3.20)$$

5. Определим дисперсию сигнала на выходе измерительной системы D_y в соответствии с формулой (3.7)

$$D_y = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{2D_x \alpha k^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(T^2 \omega^2 + 1)} =$$

$$= \frac{2D_x \alpha k^2}{\pi T^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)}.$$

Для вычисления последнего интеграла разложим подынтегральное выражение на простые дроби вида

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)} = \frac{A}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{B}{\frac{1}{T^2} + \omega^2}$$

и определим A и B

$$A = \frac{1}{\frac{1}{T^2} - \alpha^2}, \quad B = \frac{1}{\alpha^2 - \frac{1}{T^2}}.$$

Исходный интеграл представляется двумя типовыми интегралами, которые легко вычислить. Здесь следует отметить, что если интеграл от спектральной плотности не удастся вычислить аналитически, то его можно вычислить графически или с использованием методов численного интегрирования. В результате окончательно имеем

$$D_y = \frac{D_x k^2}{T\alpha + 1}. \quad (3.21)$$

6. Проанализируем полученные результаты.

Так как рассмотренный пример является довольно характерным и типичным для реальных производственных условий, сделанные ниже выводы – достаточно общие.

Как следует из выражения (3.21), дисперсия сигнала, используемого для управления теплогенератором, однозначно зависит от вели-

чины T (остальные величины, входящие в выражение (3.21), в рамках рассматриваемой задачи являются постоянными). Очевидно, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D_y \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Другими словами, при наличии инерционного первичного преобразователя устройство управления УУ не будет получать информацию о пульсациях температуры на входе в термоагрегат. Оно будет реагировать только на постоянную составляющую m_y , тем или иным способом компенсируя ее действие. На практике это означает следующее. Например, при операторном управлении теплогенератором, работающем на сжигании органического топлива (газа, солярки, мазута и др.), оператор, получив информацию о смещении температуры на величину m_y , скомпенсирует ее путем изменения расхода подаваемого топлива. Пульсации же температуры, устранение которых зачастую требует проведения незначительных регламентных работ, замечены и устранены не будут. То есть не будут устранены возможные составляющие вектора \bar{F} , например такие, как случайные засорения диффузионных решеток на воздуховодах подачи холодного и горячего воздуха, изменение вязкости подаваемого в форсунки теплогенератора жидкого топлива, нарушение режимов работы форсунок и другие. Наличие пульсаций температуры энергоносителя в термоагрегате может стать одной из причин появления брака готовой продукции на его выходе. Так, например, на стадии интенсивной термообработки рыбы горячего копчения, производства вареных колбас и другой продукции значительные пульсации температуры могут привести к появлению так называемого «лопанца» – разрыва кожного покрова рыб или колбасных оболочек. В случае появления такого вида брака в рыбной продукции она направляется на корм скоту либо перерабатывается в рыбный паштет и не может использоваться для потребления или производства консервированной деликатесной продукции. Почти аналогичная ситуация с таким видом брака имеет место при производстве колбас, выпечки хлебобулочной продукции и др. Очевидно, что даже при уценке продукции, например хлеба, или ее последующей утилизации предприятие несет экономические потери. Устранение причин пульсации температуры в этих ситуациях (т. е. составляющих вектора \bar{F}) может начаться только после обнаружения их действия на выходе термоагрегата, т. е. с большим опозданием (порядка часа и более).

Определим условия, при которых изменения постоянной времени T будут мало влиять на величину дисперсии пульсации температуры D_y . Как следует из выражения (3.21), это будет иметь место при условии $T\alpha < 1$ или

$$T \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Очевидно, что вышеприведенное условие целесообразно использовать для выбора соответствующих технических средств, при синтезе информационного обеспечения для системы управления.

Следует также иметь в виду, что учет пульсирующей составляющей не всегда является необходимым условием эффективного управления технологическим процессом. В ряде случаев наличие сглаживающего инерционного фильтра с большой постоянной времени позволяет избавиться от избыточной информации и защитить технические средства системы управления от излишних динамических нагрузок.

Таким образом, представляется возможным оценить влияние случайных воздействий и принять решение о целесообразности их учета.

Например, оценим влияние центрированной составляющей рассмотренного воздействия $x(t)$ (пульсаций температуры) на температуру в толще крупного колбасного батона $y_1(t)$. Динамические свойства такого объекта по каналу $x(t) \rightarrow y_1(t)$ достаточно адекватно описываются как апериодическое звено первого порядка с постоянной времени T_1 порядка десятка и более минут и при реальных диапазонах значений $k_1 = (0,7 \div 0,8)$; $D_x = (10 \div 30) \text{ } ^\circ\text{C}^2$ и $\alpha \approx (1 \div 3) \text{ мин}^{-1}$. Для приведенных данных можно сделать вывод о несущественном влиянии этой составляющей воздействия. Действительно, согласно выражению (3.21) имеем

$$D_{y_1 \max} = \frac{D_{x \max} k_1^2}{T_{1 \min} \alpha_{\min} + 1} = \frac{30 \cdot 0,64}{10 \cdot 1 + 1} = 1,75 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Отсюда величина максимального среднего радиуса рассеяния (разброса) температуры $y_1(t)$ относительно среднего значения m_{y_1} равна величине среднеквадратического отклонения

$$\sigma_{y_1\max} = \sqrt{D_{y_1\max}} \approx 1,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Очевидно также, что реальная величина σ_{y_1} будет еще меньше.

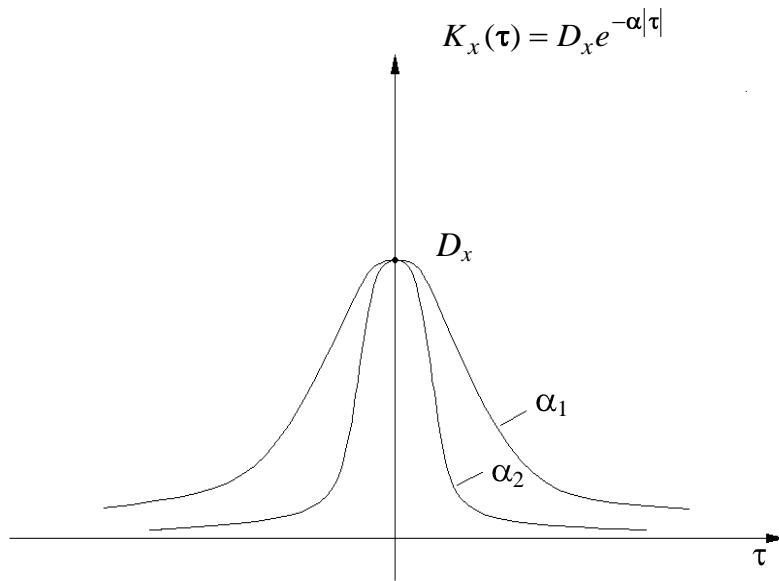
Величина y_1 после термообработки не должна быть ниже $72 \text{ } ^\circ\text{C}$. Обычно на производстве при ведении технологического процесса ее завышают на $2\text{--}3 \text{ } ^\circ\text{C}$, создавая своего рода запас – «защитный барьер» – от подобных случайных откликов. Очевидно, что в данном примере возможности данного «барьера» позволяют нивелировать влияние случайных пульсаций температуры $x(t)$.

Следует иметь в виду, что при необходимости проведения более тщательного анализа исследованию также может быть подвергнута и корреляционная функция $K_y(\tau)$, которая находится из выражения (2.20) на основании определенного в п. 4 выражения (3.20) для функции спектральной плотности $S_y(\omega)$.

Для дополнительной иллюстрации изложенного в данном подразделе материала на рис. 3.2 приведен качественный вид графиков функций $K_x(\tau)$ (рис. 3.2, а) и $S_x(\omega)$ (рис. 3.2, б), характеризующих входное воздействие $x(t)$.

Величина α характеризует степень «турбулентности» случайного воздействия $x(t)$. Чем больше величина α , тем более интенсивно происходят пульсации температуры и соответственно расширяется спектральный состав воздействия: доля низкочастотных составляющих уменьшается и увеличивается доля высокочастотных составляющих. При уменьшении α имеет место обратная тенденция.

а



б

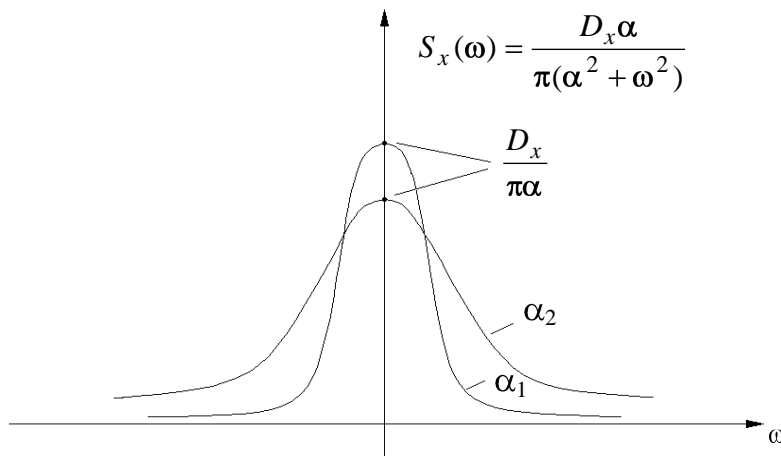


Рис. 3.2. Характеристики случайного воздействия $x(t)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$:
а – корреляционная функция; б – функции спектральной плотности

3.4. Преобразование стационарного случайного воздействия нелинейной системой

Необходимость рассмотрения такого вопроса обусловлена наличием большого класса нелинейных систем на производствах биотехнологической и смежных отраслей промышленности. В подавляющем большинстве случаев нелинейность систем обусловлена использованием в контурах регулирования технологических параметров различных позиционных звеньев (регуляторов) в силу их простого

ты, надежности и невысокой стоимости. В первую очередь сюда относятся двух- и трехпозиционные датчики-реле температуры, давления, уровня, расхода, наличия потока и другие различных типов и модификаций, которые широко используются для автоматического регулирования. Помимо этого для подобных же целей промышленностью в большом количестве и ассортименте выпускаются разнообразные позиционные регуляторы и позиционные регулирующие приборные устройства (так называемые встроенные приборные регуляторы), а также исполнительные устройства. Общим для всех этих звеньев является то, что они описываются однозначной нечетной статической характеристикой (например, двух- и трехпозиционные реле как идеальные, так и имеющие зоны нечувствительности, звенья с насыщением и с зоной нечувствительности и др.). Поэтому дальнейшее рассмотрение поставленного вопроса будет ориентировано именно на такой класс нелинейных систем.

Особенность нелинейных систем состоит в том, что к ним неприменим принцип суперпозиции, что усложняет решение поставленной задачи. Для анализа работы нелинейных систем при наличии стационарного случайного воздействия используется метод статистической линеаризации.

Суть метода состоит в замене реального нелинейного звена эквивалентным по некоторым статистическим параметрам линейным звеном. В результате вся система может быть также представлена эквивалентной линейной системой, для анализа которой может быть применен математический аппарат исследования линейных систем, изложенный в подразд. 3.2.

В соответствии с вышесказанным структурную схему нелинейной системы автоматического регулирования представим в следующем виде (рис. 3.3). Она состоит из линейной части, в которую входит звено с передаточной функцией $W_0(p)$, и безынерционного нелинейного звена (НЗ). Свойства НЗ заданы статической характеристикой $y = F(x)$. При этом необходимо понимать, что если, например, в системе используется какой-либо датчик-реле, то передаточная функция его измерительной части, являющейся инерционным линейным звеном (например, термобаллон манометрического термометра, термометра сопротивления и др.), представляется отдельным звеном с передаточной функцией $W_1(p)$. Данное звено входит в состав

линейной части, а сам релейный элемент, с помощью которого осуществляется тот или иной вариант позиционного регулирования, является указанным нелинейным безынерционным звеном (НЗ). Наличие случайного воздействия, например помехи $f(t)$, действующей в различных точках контура управления, вызывает появление случайного воздействия $x(t)$, которое может быть представлено в соответствии с формулой (3.1) в виде суммы двух составляющих: $x(t) = m_x + x(t)$.

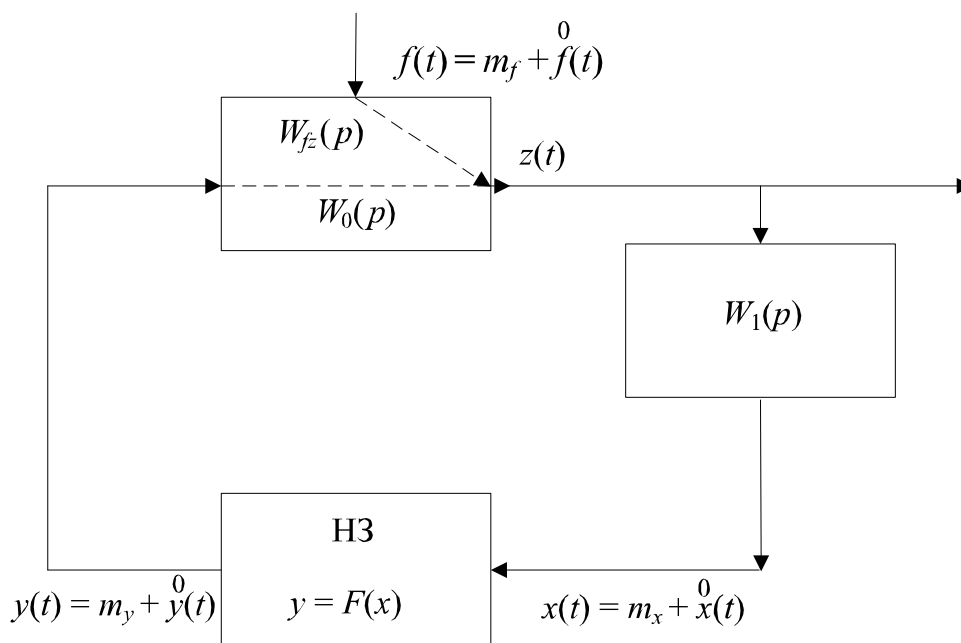


Рис. 3.3. Структурная схема нелинейной системы автоматического регулирования при наличии случайных воздействий

Соответствующий указанному выше воздействию случайный сигнал на выходе нелинейного звена $y(t)$ также представляется в виде суммы математического ожидания m_y и центрированной случайной величины $y(t)$, т. е. $y(t) = m_y + y(t)$.

Вполне понятно, что при прохождении случайного сигнала через нелинейное звено происходит искажение его закона распределения. Поэтому каждая из моментных характеристик сигнала $y(t)$, в частности m_y и D_y , зависит в комплексе от таких же характеристик входного воздействия $x(t)$. Данное обстоятельство и объясняет неприменимость принципа суперпозиции в нелинейных системах в отличие от линейных систем.

Идея статистической линеаризации состоит в том, чтобы заменить реальное нелинейное звено безынерционным линейным звеном, обеспечивающим на выходе такие же значения математического ожидания m_y и дисперсии сигнала D_y , как и у реального звена при том же входном воздействии $x(t)$. Так как обе характеристики m_y и D_y не являются исчерпывающим описанием случайного сигнала, то очевидно, что такая замена является приближенной, а это обуславливает приближенность самого метода. Исходя из вышесказанного сигнал на выходе данного безынерционного линейного звена $y'(t)$ будет отличаться от реального сигнала $y(t)$, но при этом будут выполняться условия

$$m_{y'} = m_y; \quad (3.23)$$

$$D_{y'} = D_y. \quad (3.24)$$

Очевидно, что выполнение приведенных выше условий возможно только в случае, если эквивалентное безынерционное звено представить в виде структуры, состоящей из двух параллельно работающих статических звеньев, имеющих разные коэффициенты передачи, одно из которых пропускает только среднее значение m_x с коэффициентом передачи k_{c0} , другое – только центрированную составляющую $\overset{0}{x}(t)$ с коэффициентом передачи k_{c1} . Структурная схема такого эквивалентного звена приведена на рис. 3.4.

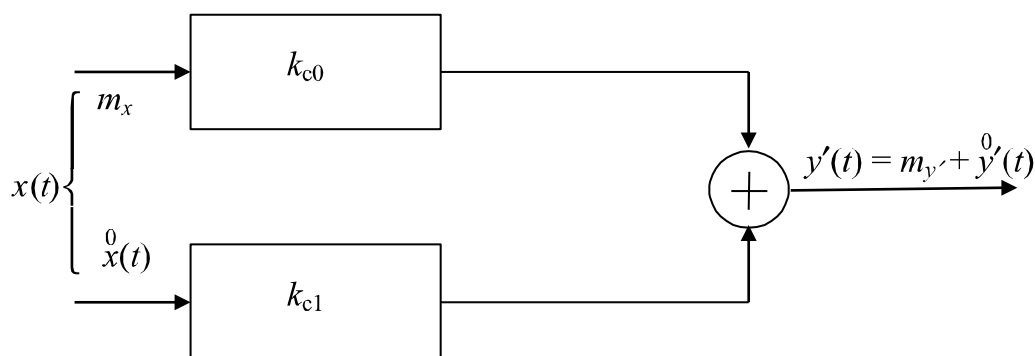


Рис. 3.4. Структурная схема эквивалентного линейного звена

Определим выражения для коэффициентов передачи k_{c0} и k_{c1} , исходя из сделанного представления. Из условия (3.23) следует

$$k_{c0} = \frac{m_y}{m_x}. \quad (3.25)$$

Выразим m_y через параметры звена и входного воздействия $x(t)$

$$m_y = M[y(t)] = M[F\{x(t)\}] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)p(x) dx. \quad (3.26)$$

Подставляя выражение (3.26) в формулу (3.25), окончательно получаем

$$k_{c0} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)p(x) dx. \quad (3.27)$$

Выражение для k_{c1} находим из условия, что рассматриваемое звено осуществляет преобразование центрированных составляющих входного и выходного сигналов, т. е.

$$y(t) = k_{c1} x(t). \quad (3.28)$$

Теперь, переходя к дисперсиям случайных функций, получаем

$$D_{y'} = k_{c1}^2 D_x, \quad (3.29)$$

или

$$k_{c1} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \quad (3.30)$$

Выразим σ_y через параметры звена и входного воздействия $x(t)$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{D_y} = \sqrt{M[(y - m_y)^2]} = \sqrt{M[y^2 - 2m_y y + m_y^2]} = \\ &= \sqrt{M[y^2] - 2m_y M[y] + m_y^2} = \sqrt{M[y^2] - 2m_y^2 + m_y^2} = \\ &= \sqrt{M[y^2] - m_y^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)p(x) dx - m_y^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставляем полученный результат (3.31) в выражение (3.30) и окончательно имеем

$$k_{c1} = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)p(x) dx - m_y^2}. \quad (3.32)$$

Коэффициенты k_{c0} и k_{c1} называются коэффициентами статистической линеаризации. Как видно из выражений (3.27) и (3.32), значения коэффициентов определяются характеристиками нелинейного звена $y = F(x)$ и законом распределения входного воздействия $p(x)$. Используя указанные выражения, можно рассчитать значения коэффициентов статистической линеаризации.

Статистическую линеаризацию нелинейного звена можно осуществить также исходя и из другого условия, отличного от (3.23) и (3.24). Это условие заключается в минимизации среднеквадратического отклонения функций $y'(t)$ и $y(t)$. Другими словами, исходное нелинейное звено заменяется линейным, обеспечивающим минимум выражения,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [y'(t) - y(t)]^2 p(y) dy \rightarrow \min. \quad (3.33)$$

Известно, что условие (3.33) может быть выполнено, если структура эквивалентного линейного звена будет такой же, как и в первом случае (см. рис. 3.4). Причем значение первого коэффициента статистической линеаризации k_{c0} остается прежним в соответствии с выражением (3.27). Второй коэффициент статистической линеаризации k_{c1}' определяется из выражения

$$k_{c1}' = \frac{k_{yx}(0)}{D_x} = \frac{M[y(t)x(t)]}{D_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)xp(x) dx}{D_x}. \quad (3.34)$$

Как видно из выражения (3.34), значение k_{c1}' так же, как и в предыдущем случае, определяется характеристикой нелинейного звена $F(x)$ и законом распределения входного воздействия.

Иногда для повышения точности расчетов в качестве указанного коэффициента берется среднее арифметическое значение коэффициентов, полученных из выражений (3.32) и (3.34). Очевидно, что вычисление коэффициентов статистической линеаризации по исходным формулам (3.27), (3.32) и (3.34) в каждом конкретном случае решаемой задачи является довольно трудоемкой процедурой. К этому следует добавить трудозатраты, связанные с определением законов распределения случайных воздействий. Данные обстоятельства затрудняют практическую реализацию метода статистической линеаризации в исходном «классическом» виде. Поэтому для упрощения процедуры решения задач, связанных с анализом и синтезом нелинейных систем, значения коэффициентов k_{c0} , k_{c1} и k_{c1}' определены в соответствии с вышеприведенными зависимостями для ряда типовых нелинейностей, которые встречаются на практике, и для нормального закона распределения воздействий. Эти результаты представлены в специальных справочных материалах, где априори принимается допущение, что дифференциальный закон распределения величины x или плотность вероятности данной величины описывается выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Такое допущение основано на том, что нормальный закон распределения случайных воздействий имеет наибольшее распространение в природе и технике, что объясняется центральной предельной теоремой. В этом смысле нормальный закон является «предельным» законом, к которому стремятся другие законы распределения при равнозначности отдельных факторов, определяющих каждую из реализаций воздействия. В случае, если реальный закон распределения воздействий отличается от нормального, то это обстоятельство может стать причиной дополнительной погрешности. Однако при этом, как показывает опыт, величины коэффициентов k_{c0} , k_{c1} и k_{c1}' варьируются незначительно. Значения коэффициентов статистической линеаризации для типовых нелинейностей, используемых для организации позиционного управления на практике, приведены в табл. 3.1. В случае, когда статическая характеристика нелинейного звена $y = F(x)$ неоднозначна, т. е. для определения выходной величины y помимо значения

входной величины x необходимо также задаться значением ее производной $x^{(1)}$, например, характеристика двухпозиционного реле с зоной нечувствительности, формулы (3.27), (3.32) и (3.34) требуют уточнения с учетом значения величины $x^{(1)}$. В таких случаях определение коэффициентов статистической линеаризации осуществляется по известным уточненным формулам. Для решения же практических задач обычно пользуются уже готовыми выражениями для данных коэффициентов, полученными из формул, как, например, в п. 4 табл. 3.1.

После определения коэффициентов статистической линеаризации k_{c0} и k_{c1} методика исследования влияния случайного воздействия на нелинейную систему будет состоять в следующем.

Исходная нелинейная система описывается двумя передаточными функциями

$$\Phi_0(p) = \frac{W_{fz}(p)}{1 + k_{c0}W(p)}; \quad (3.35)$$

$$\Phi_1(p) = \frac{W_{fz}(p)}{1 + k_{c1}W(p)}, \quad (3.36)$$

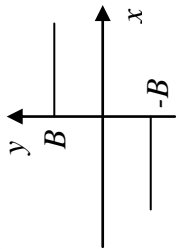
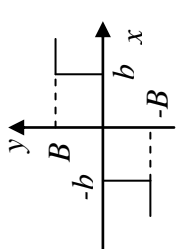
где $\Phi_0(p)$ – передаточная функция замкнутой системы для неслучайной (детерминированной) составляющей воздействия; $\Phi_1(p)$ – передаточная функция замкнутой системы для центрированной случайной составляющей воздействия; $W_{fz}(p)$ – передаточная функция участка системы «воздействие f – выходная величина z »; $W(p)$ – передаточная функция линейной части системы $W(p) = W_0(p)W_1(p)$.

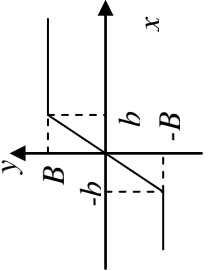
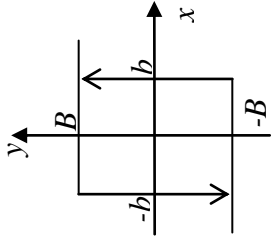
Необходимо отметить, что проведенная таким образом линеаризация позволяет формально «спрятать» нелинейные свойства звена в выражения коэффициентов k_{c0} и k_{c1} , которые нелинейно зависят от параметров воздействия m_x и σ_x , т. е. $k_{c0} = k_{c0}(m_x, \sigma_x)$ и $k_{c1} = k_{c1}(m_x, \sigma_x)$. Это следует из выражений (3.27), (3.32) и (3.34) и наглядно проиллюстрировано в табл. 3.1. (В табл. 3.1 использована функция $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

которая называется интегралом вероятностей; $t = \frac{x}{\sigma_x}$.)

Таблица 3.1

Коэффициенты статистической линеаризации типовых нелинейных позиционных звеньев

№ пп.	Наименование звена и его статическая характеристика	Уравнение звена $y = F(x)$	Выражения для вычисления коэффициентов статистической линеаризации		
			k_{c0}	k_{c1}	k_{c1}'
1	Двухпозиционное реле 	$y = B \operatorname{sign} x$	$\frac{2B}{m_x} \Phi \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right)$	$\frac{B}{\sigma_x} \left[1 - 4 \Phi^2 \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{B}{\sigma_x} \sqrt{\pi} \left[2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]$
2	Трехпозиционное реле 	$y = \begin{cases} B; & x > b \\ 0; & x \leq b \\ -B; & x < -b \end{cases}$	$\frac{B}{m_x} \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{1-m_x}{\sigma_1} \right) \right]$ $m_1 = \frac{m_x}{b}; \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$	$\frac{B}{\sigma_x} \left\{ 1 - \frac{k_{c0}^2 m_x^2}{B^2} - \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{B}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m}{\sigma_1} \right)^2} \right]$

№ пп.	Наименование звена и его статическая характеристика	Уравнение звена $y = F(x)$	Выражения для вычисления коэффициентов статистической линеаризации
3	Звено с насыщением 	$y = \begin{cases} Kx; & x \leq b \\ B; & x > b \\ -B; & x < -b \end{cases}$ $K = \frac{B}{b}$	$k_{c0} \left\{ (1+m_1) \Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - (1-m_1) \times \right. \\ \left. \times \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}$ $m_1 = \frac{m_x}{b}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$
4	Двухпозиционное реле с зоной нечувствительности 	$y = \begin{cases} B; & x > b \\ -B; & x < -b \\ B; & x > -b \\ -B; & x < -b \end{cases}$	$k_{c0} \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right]$ $m_1 = \frac{m_x}{b}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$
			$k_{c1} \left\{ \frac{B}{\sigma_x} \left[1 - \frac{k_{c0}^2}{B^2} + (m_1 + \sigma_1^2 - 1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right] - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} (1-m_1) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + (1+m_1) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}$
			$k_{c1}' \left[\frac{B}{b} \Phi \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right]$
			$\frac{B}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right]$

Теперь с учетом выражения (3.35) реакция системы на неслучайную составляющую воздействия $m_f = \text{const}$ определяется из уравнения статического режима

$$m_z = m_f \Phi_0(p) \Big|_{p=0} = m_f \frac{W_{fz}(0)}{1 + k_{c0}(m_x, \sigma_x) W(0)}. \quad (3.37)$$

Влияние же центрированной случайной составляющей воздействия $f(t)$ на выходной параметр z может быть оценено величиной дисперсии $D_z = \sigma_z^2$ в соответствии с выражениями (3.6), (3.7), (3.36)

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi_1(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |A_1(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{W_{fz}(j\omega)}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x) W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Если в качестве выходной величины системы рассматривать сигнал $x(t)$, который поступает на вход нелинейного звена, то выражения (3.35) и (3.36) для передаточных функций замкнутой системы по параметрам m_f и $f(t)$ примут вид

$$\Phi_0'(p) = \frac{W_{fz} W_1(p)}{1 + k_{c0} W(p)}; \quad (3.39)$$

$$\Phi_1'(p) = \frac{W_{fz}(p) W_1(p)}{1 + k_{c1} W(p)}. \quad (3.40)$$

Тогда с учетом этого выражение (3.37) примет вид

$$m_x = m_f \Phi_0'(p) \Big|_{p=0} = m_f \frac{W_{fz}(0) W_1(0)}{1 + k_{c0}(m_x, \sigma_x) W(0)}, \quad (3.41)$$

а выражение (3.38) соответственно трансформируется к виду

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \Phi_1'(j\omega) \right|^2 S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{W_{fz}(j\omega) W_1(j\omega)}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x) W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) d\omega.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Уравнения (3.41) и (3.42) в общем случае содержат две искомые переменные (m_x , σ_x) и являются нелинейными. Поэтому они должны решаться совместно. Система уравнений такого типа решается либо графически, либо методом последовательных приближений. Блок-схема алгоритма нахождения решения таких уравнений методом последовательных приближений с краткими комментариями приведена на рис. 3.5.

Методика графического решения уравнений (3.41) и (3.42) в данной ситуации очевидна.

Полученные в результате решения значения коэффициентов статистической линеаризации k_{c0} и k_{c1} могут быть использованы для проведения дальнейших исследований нелинейной системы, например, для определения таких же статистических характеристик m и σ других параметров на выходе отдельных звеньев, входящих в контур системы управления, как, например, для варианта, описываемого выражениями (3.37) и (3.38).

Для иллюстрации изложенного материала рассмотрим пример.

Имеется релейная система автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 3.6. На вход системы поступает стационарное случайное воздействие $f(t)$, которое имеет следующие характеристики: математическое ожидание $m_f = 0$, корреляционную функцию $K_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}$, где $\alpha = 0,1$; $\sigma_f = 1$. Система характеризуется следующими параметрами: $k = 2$, $B = 5$. Требуется определить дисперсию сигнала на входе нелинейного элемента – σ_x^2 .



Рис. 3.5. Блок-схема алгоритма решения уравнений методом последовательных приближений

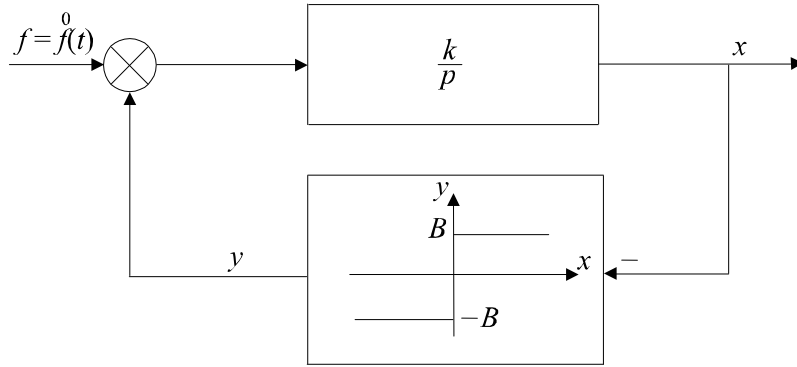


Рис. 3.6. Схема релейной системы автоматического регулирования

Решение

Выражение для спектральной плотности, соответствующее данной корреляционной функции, согласно выражениям (2.21) и (3.38) будет иметь вид

$$S_f(\omega) = \frac{\sigma_f^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (3.43)$$

Определим передаточную функцию системы для центрированной случайной составляющей $f(t)$

$$\Phi_{fx}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 + k_{cl} \frac{k}{p}} = \frac{k}{p + k_{cl} k}, \quad (3.44)$$

где k_{cl} – коэффициент статистической линеаризации.

Определим коэффициент k_{cl} , осуществив статистическую линеаризацию релейной характеристики. Для данного частного случая значение k_{cl} можно определить из выражения для k_{cl}' (см. табл. 3.1, п. 1)

$$k_{cl} = \frac{B}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (3.45)$$

Найдем выражение для спектральной плотности параметра x в соответствии с выражением (3.6)

$$S_x(\omega) = A^2(\omega)S_f(\omega) = |\Phi_{fx}(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \\ = \left| \frac{k}{j\omega + k_{c1}k} \right|^2 \frac{\sigma_f^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{\sigma_f^2 \alpha k^2}{[\omega^2 + (k_{c1}k)^2](\alpha^2 + \omega^2)\pi}. \quad (3.46)$$

Определим дисперсию x в соответствии с выражением (3.7)

$$D_x = \sigma_x^2 = 2 \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_f^2 \alpha k^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{[\omega^2 + (k_{c1}k)^2](\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (3.47)$$

Интеграл в правой части выражения (3.47) вычисляется аналогично примеру, рассмотренному в п. 5 подразд. 3.3, методом разложения на простые дроби. В результате решения после вычисления интеграла и подстановки исходных данных с использованием выражения (3.45) для коэффициента k_{c1} окончательно имеем

$$\sigma_x^2 \approx 1.$$

В заключение данного подраздела необходимо отметить, что реализация метода статистической линеаризации основана на предположении, что система устойчива и в ней отсутствуют автоколебания. В противном случае наложение автоколебательного процесса на случайный сигнал может исказить параметры сигналов в разных точках системы и, в частности, их дисперсии. (В вышерассмотренном примере для упрощения задачи влияние автоколебательного процесса не учитывалось.) Для исследования режимов автоколебаний в нелинейных системах разработан и применяется метод гармонической линеаризации.

Сведения, изложенные в разд. 3, позволяют оценить влияние случайных воздействий на объект или систему. При этом априори подразумевается наличие математического описания объекта в той или иной форме и характеристик случайного воздействия. На практике отсутствие таких сведений зачастую является «камнем преткновения» для проведения исследований. Поэтому два следующих раздела посвящены методам получения математического описания объектов и систем и методам получения информации о входных воздействиях с учетом специфических особенностей процессов и производств биотехнологической промышленности.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Основные положения

При рассмотрении методов анализа работы систем в различных режимах подразумевалось наличие математического описания как систем, так и отдельных их элементов (звеньев) в виде передаточных функций или соответствующих им переходных и частотных характеристик. Очевидно, что наличие математического описания отдельных звеньев необходимо и для решения задачи синтеза систем при различных вариантах требований, предъявляемых к системе. Данный раздел посвящен рассмотрению методов получения математического описания элементов и систем управления.

Получение математического описания системы, как правило, начинается с определения математического описания отдельных звеньев, входящих в эту систему. Далее, исходя из структуры системы и используя правила преобразования структурных схем, составляется математическое описание всей системы. Общее правило таково: чем более подробно сделана детализация структурной схемы, тем более простыми оказываются составляющие звенья и тем более удобно и просто разрабатывать их математическое описание. При детализации структурной схемы необходимо ограничиваться такими звеньями, которые обладают свойствами направленности действия. Это означает, что звено передает воздействие только в одном направлении (от входа к выходу), и состояние такого звена не оказывает влияния на состояние звена, подключенного к его входу. При таком подходе представляется возможным осуществить анализ системы без учета конкретики физической природы сигналов и особенностей реализации звеньев на аппаратном уровне. Получение математического описания звеньев можно осуществить одним из двух способов: аналитическим или экспериментальным.

4.2. Аналитический метод получения математического описания

Аналитический метод основан на математическом анализе явлений, которые лежат в основе работы конкретного звена или объекта.

В зависимости от физической природы звена на основании законов, описывающих такие физические явления, аналитическим путем устанавливается зависимость между соответствующими входными \bar{X} и выходными \bar{Y} параметрами и их производными

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0. \quad (4.1)$$

При этом в качестве входных параметров могут рассматриваться и возмущающие воздействия. Зависимость (4.1) в общем случае может быть представлена системой нелинейных дифференциальных уравнений. Для одномерных объектов зависимость (4.1) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению вида

$$F(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots) = 0. \quad (4.2)$$

Если рассматриваются теплотехнические объекты, то их математическое описание получают на основании законов сохранения тепла, энергии, используя математическое описание явлений теплопереноса, теплопередачи, теплопроводности и др. Аналогично для объектов «электрической» природы математическое описание создается с использованием законов Ома, Кирхгофа; математическое описание «механических» объектов – на основании соответствующих законов механики: законов Ньютона, закона сохранения механической энергии, закона сохранения импульса и т. д.

Полученное таким образом исходное нелинейное уравнение вида (4.2) подвергается процедуре линеаризации. Линеаризация исходной функции осуществляется разложением в ряд Тейлора в окрестности точки номинального рабочего режима (x_0, y_0) с последующим оставлением только линейных членов ряда. В результате исходное нелинейное дифференциальное уравнение вида (4.2) приводится к линейному уравнению в приращениях x и y , которое в операторной форме имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x, \quad (4.3)$$

или

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} x = W(p)x, \quad (4.4)$$

где $a_i; i \in I$ и $b_j; j \in J$ – коэффициенты дифференциального уравнения (4.3); x – приращение входной переменной, $x = X - X_0$; y – приращение выходной переменной, $y = Y - Y_0$; p – оператор дифференцирования, $p = \frac{d}{dt}$; $W(p)$ – передаточная функция, $W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$.

Известно, что представление функции ограниченным числом членов ряда Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) тем точнее, чем меньше величины рассматриваемых приращений. Для систем автоматического регулирования, которые призваны поддерживать технологические параметры на заданных уровнях, такое представление является приемлемым в подавляющем большинстве случаев.

Осуществив прямое преобразование Лапласа над уравнением (4.3), получим

$$\begin{aligned} (a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_n) Y(S) = \\ = (b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \dots + b_m) X(S) + K_n(S), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где S – комплексная переменная вида $S = c + j\omega$; $Y(S)$ – изображение, по Лапласу (L), функции $y(t)$, здесь

$$Y(S) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-St} dt, \quad (4.6)$$

$X(S)$ – изображение, по Лапласу, функции $x(t)$, $X(S) = L[x(t)]$ по аналогии с (4.6); $K_n(S)$ – многочлен, определяемый начальными условиями. Если начальные условия нулевые, т. е. имеет место $y(0) = 0$; $y^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, то $K_n(S) = 0$.

Таким образом, при нулевых начальных условиях имеем

$$Y(S) = W(S)X(S), \quad (4.7)$$

где $W(S) = W(p) \Big|_{p \Rightarrow S}$.

Нахождение оригинала $y(t)$ может быть осуществлено с помощью обратного преобразования Лапласа L^{-1} над соответствующим изображением $Y(S)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(S)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} Y(S) e^{St} dS. \quad (4.8)$$

Прямое и обратное преобразование Лапласа используется для нахождения решения дифференциального уравнения, например, вида (4.3). Причем для нахождения изображений и оригиналов пользуются в основном не формулами (4.6) и (4.8), а готовыми таблицами преобразования Лапласа.

Для многомерного объекта и при нулевых начальных условиях его математическое описание может быть представлено в матричной форме в следующем виде:

$$\bar{Y}(S) = \bar{X}(S)\bar{W}(S), \quad (4.9)$$

где $\bar{Y}(S)$ – матрица–столбец изображений выходных переменных $Y_1(S) \dots Y_k(S)$; $\bar{X}(S)$ – матрица–столбец изображений входных переменных $X_1(S) \dots X_k(S)$; $\bar{W}(S)$ – матрица–столбец передаточных функций, $k \in K$.

При разработке математического описания необходимо также учитывать возможную «нестационарность» объекта. Обычно данное явление проявляется в том, что некоторые параметры объекта, которые определяют величины коэффициентов передаточной функции, варьируют во времени. Это приводит к тому, что в выражении (4.4) некоторые из коэффициентов a_i и b_j также будут изменяться во времени, т. е. $a_i = a_i(t)$ и $b_j = b_j(t)$. Так, например, при тепловой обработке молока в теплообменных аппаратах (пластинчатых, трубчатых) происходит образование белковых отложений на внутренней поверхности теплообменных конструкций, что, в свою очередь, приводит к изменению условий теплопередачи от энергоносителя (пара, горячей воды) к продукту. Вследствие этого, например, изменяются постоянные времени объекта по каналу «температура энергоносителя – температура молока на выходе». При длительной эксплуатации данного объекта значительный прирост белковых отложений может нарушить тепловой режим работы, что приведет к его перегреву и выходу из строя. Поэтому существующие регламенты на эксплуатацию такого оборудования предусматривают его периодическую разборку и мойку. В процессах термообработки колбас, выпечки хлебобулочных изделий в результате интенсивного тепло- и массообмена с окружающей средой – энергоносителем – происходят изменения теплофизических свойств обрабатываемых изделий – колбасных и тестовых заготовок, что, в свою очередь, является причиной изменения соответствующих параметров передаточных функций этих

видов продуктов во время обработки. Также причинами нестационарности могут являться износ технологического оборудования и многие другие факторы. В большинстве случаев коэффициенты передаточной функции целесообразно рассматривать как случайные величины, исчерпывающим описанием которых является закон распределения $p(a_i)$ или $p(b_j)$. Для решения практических задач, как правило, оказывается достаточным знание двух основных характеристик указанных коэффициентов: математического ожидания m_{a_i}, m_{b_j} и дисперсий $\sigma_{a_i}^2, \sigma_{b_j}^2$. Причем в качестве значений величин коэффициентов используются их математические ожидания. Влияние случайных вариаций отдельных коэффициентов на характеристики объекта или системы может быть оценено величинами среднеквадратических отклонений σ этих характеристик по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sum_{(i)} \left(\frac{\partial L}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2 + \sum_{(j)} \left(\frac{\partial L}{\partial b_j} \right)^2 \sigma_{b_j}^2}, \quad (4.10)$$

где L – характеристика или обобщенный критерий какого-либо свойства объекта или системы. В общем случае

$$L = L(a_i, b_j); \quad i \in I; \quad j \in J. \quad (4.11)$$

Частные производные $\frac{\partial L}{\partial a_i}$ и $\frac{\partial L}{\partial b_j}$ называются коэффициентами

влияния и характеризуют чувствительность рассматриваемой характеристики L к изменению отдельных коэффициентов a_i и b_j . Формула (4.10) справедлива для наиболее часто встречающегося на практике случая, когда коэффициенты a_i и b_j не коррелированы между собой.

Отклонение критерия от номинального значения, обусловленное отклонениями коэффициентов a_i и b_j , может быть определено из выражения (4.11) путем разложения его в ряд Тейлора с последующим оставлением первых линейных членов разложения

$$\Delta L \approx \sum_{(i)} \frac{\partial L}{\partial a_i} \Delta a_i + \sum_{(j)} \frac{\partial L}{\partial b_j} \Delta b_j. \quad (4.12)$$

Следует отметить, что точность представления величины ΔL будет тем выше, чем меньше величины отклонений соответствующих

коэффициентов Δa_i и Δb_j . Если известны только максимально возможные отклонения величин коэффициентов передаточной функции $\Delta a_{i\max}$ и $\Delta b_{j\max}$, то мажорантная оценка может быть получена из выражения

$$\Delta L_{\max} = \sqrt{\sum_{(i)} \left(\frac{\partial L}{\partial a_i} \right)^2 \Delta a_{i\max}^2 + \sum_{(j)} \left(\frac{\partial L}{\partial b_j} \right)^2 \Delta b_{j\max}^2}. \quad (4.13)$$

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим пример.

Имеется звено – амортизатор, состоящий из пружины и демпфера, схема которого приведена на рис. 4.1.

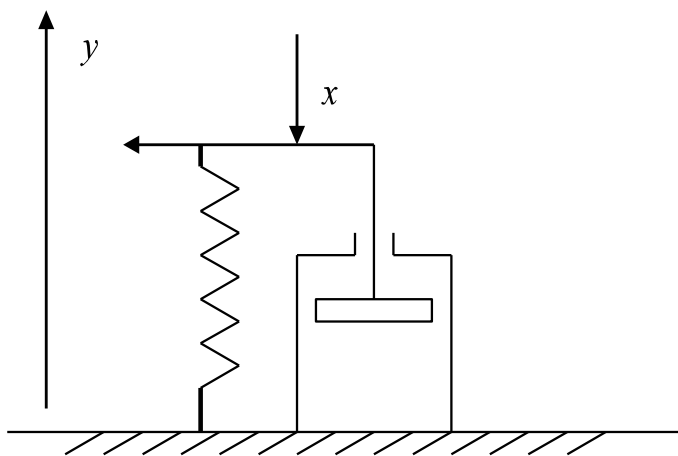


Рис. 4.1. Схема амортизатора

Входная величина звена x – усилие, прилагаемое к амортизатору, выходная величина y – перемещение платформы амортизатора. Даны: m – масса подвижной части; c_1 – коэффициент жесткости пружины; c_2 – коэффициент демпфирования. Требуется получить математическое описание зависимости между переменными y и x .

Так как перемещение происходит только в направлении оси y , соответствующее математическое описание может быть получено на основании уравнения равновесия сил, действующих вдоль этой оси. При этом полагаем, что вес подвижной части изначально скомпенсирован деформацией пружины.

В результате имеем дифференциальное уравнение

$$x = c_1 y + c_2 y^{(1)} + m y^{(2)},$$

или в операторной форме

$$x = y(c_1 + c_2 p + m p^2).$$

Здесь первое слагаемое в правой части уравнения описывает усилие, создаваемое пружиной, второе – демпфером, третье описывает силу инерции.

После преобразований получаем

$$y = xW(p), \quad W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где $k = \frac{1}{c_1}$, $T_1 = \frac{c_2}{c_1}$, $T_2^2 = \frac{m}{c_1}$.

Имея математическое описание, можно осуществить анализ свойств звена и выдать рекомендации по его последующему синтезу с целью получения требуемых свойств. Так, например, вид переходного процесса выходной переменной $y(t)$ (апериодический или колебательный) определяется решением исходного дифференциального уравнения для единичного ступенчатого воздействия на входе $x = 1(t)$ и зависит от знака дискриминанта характеристического полинома $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = T_2^2 \lambda^2 + T_1 \lambda + 1.$$

Дискриминант D этого полинома равен

$$D = T_1^2 - 4T_2^2 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 4\frac{m}{c_1}.$$

Если $D < 0$, то соответствующее характеристическое уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет пару сопряженных мнимых корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, что обуславливает наличие колебательной переходной характеристики $h(t)$

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right],$$

где $\alpha = -\frac{T_1}{2T_2^2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$.

Если $D > 0$, то характеристическое уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет пару отрицательных вещественных корней $\lambda_1 = \alpha_1$; $\lambda_2 = \alpha_2$, что обуславливает наличие апериодической переходной характеристики

$$h(t) = k \left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right],$$

где $\alpha_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$.

Отсюда видно, что варьируя параметрами элементов звена c_1 , c_2 и m , можно добиваться требуемого вида переходного процесса. Например, если требуется обеспечить апериодический переходной процесс, то необходимо подобрать пружину и демпфер с параметрами, обеспечивающими выполнение условия $D > 0$, т. е.

$$\left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 - 4 \frac{m}{c_1} > 0, \text{ или } c_2 > 2\sqrt{mc_1}.$$

Также, варьируя отдельными параметрами элементов звена, можно осуществлять целенаправленный его синтез и по другим характеристикам, например по длительности переходного процесса.

Если масса подвижной части невелика и ею можно пренебречь ($m \approx 0$), то передаточная функция такого звена примет более простой вид

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}.$$

Имея математическое описание в виде передаточной функции звена, несложно получить и другие его характеристики: переходные в виде переходной функции $h(t)$ и функции веса $w(t)$; частотные, например, АЧХ – $A(\omega)$, ФЧХ – $\varphi(\omega)$, АФЧХ и др.

Используя приведенный пример, можно также проиллюстрировать влияние нестационарности, например коэффициента T_1 , на такую характеристику звена, как длительность переходного процесса. При рассмотрении последнего варианта передаточной функции, когда $m = 0$, для заданного 5 %-го допуска на отклонение выходной величины от установившегося значения длительность переходного процесса будет равна

$$L = 3T_1.$$

Если в процессе эксплуатации такого амортизатора происходят изменения коэффициентов c_1 и c_2 (например, вследствие изменений свойств материала пружины и рабочей жидкости демпфера под действием температуры или их износа), то эти обстоятельства будут являться причиной нестационарности рассматриваемого коэффициента T_1 . В этом случае оценка отклонения длительности переходного процесса от номинального значения может быть осуществлена в соответствии с выражением (4.12)

$$\Delta L \approx \frac{\partial(3T_1)}{\partial T_1} \Delta T_1 = 3\Delta T_1.$$

Величина среднеквадратического отклонения этого же параметра при известной дисперсии $\sigma_{T_1}^2$ в соответствии с выражением (4.10) будет равна

$$\sigma_L = 3\sigma_{T_1},$$

а мажорантная оценка ΔL_{\max} , согласно выражению (4.13), составит

$$\Delta L_{\max} = 3\Delta T_{1\max}.$$

Аналогично реализуются процедуры разработки математического описания ряда других объектов, встречающихся на практике, и его использования для решения задач анализа и синтеза.

4.3. Экспериментальные методы получения математического описания

Рассмотренный в предыдущем подразделе аналитический метод получения математического описания зачастую оказывается неэффективным. В первую очередь это связано с тем, что многие процессы в объектах характеризуются одновременным протеканием различных взаимосвязанных явлений, которые, в свою очередь, определяются распределением параметров во времени и в пространстве агрегата. Такими, например, являются процессы тепло- и массообмена, характеризующиеся изменением коэффициентов тепло- и массопереноса, диффузии и других как во время обработки, так и в объ-

еме термоагрегата. Достаточно точное аналитическое описание столь сложных и многогранных явлений без серьезных допущений и упрощений, искажающих суть технологического процесса, зачастую не представляется возможным.

Другой причиной неэффективности аналитического подхода к разработке математического описания часто является отсутствие необходимых исходных данных о параметрах объекта или отдельных его элементов или необходимость внесения больших материальных и трудовых затрат для их определения. В силу данных обстоятельств экспериментальные методы идентификации получили широкое распространение, особенно в производственных условиях.

Экспериментальные методы идентификации основаны на рассмотрении объекта как «черного ящика», изучение которого осуществляется на основании информации о значениях входных и выходных параметров в различных состояниях, полученной экспериментальным путем. Для получения такой информации необходимо выбрать метод исследования и составить план проведения эксперимента. Выбор метода осуществляется исходя из особенностей эксплуатации и функционирования объекта. При этом учитываются возможности внесения тех или иных вариантов испытательных воздействий и другие. Так, например, наличие лабораторной установки расширяет возможности экспериментальных исследований, позволяя использовать методы активного эксперимента. В производственных условиях, особенно при высокой производительности технологического оборудования, возможности проведения экспериментальных исследований сужаются и часто сводятся к «пассивной» регистрации интересующих параметров в различных технологических режимах и производственных ситуациях. В основном это связано с риском получения большого количества брака и порчи оборудования при «ухуде» от штатных, апробированных режимов в процессе проведения эксперимента.

Подготовка эксперимента предусматривает выбор вида и методики внесения испытательного воздействия, методов и технических средств измерения и регистрации параметров с учетом их динамических и метрологических характеристик, синхронизации измерений и многое другое. Варианты планов и схем проведения таких экспериментов рассмотрены в работах [8–10].

Наибольшее распространение на практике получили методы идентификации объектов, основанные на использовании частотных и переходных характеристик. Определение и основные сведения об этих характеристиках приведены в разд. 1. Там же наглядно обоснована нецелесообразность, а для подавляющего большинства случаев и невозможность получения частотных характеристик для инерционных объектов, особенно «неэлектрической природы». Поэтому для идентификации объектов в биотехнологической промышленности в основном используются переходные характеристики. Математический аппарат, обосновывающий возможность идентификации по переходным характеристикам, основывается на использовании преобразования Лапласа (выражения (4.6), (4.7) и (4.8)). Действительно, если подать на вход объекта единичный импульс $\delta(t)$, то реакция на выходе будет описываться функцией веса $w(t)$. Изображение, по Лапласу, единичного импульса равно $L[\delta(t)] = 1$. Тогда согласно выражению (4.7) имеем

$$L[w(t)] = W(S), \quad (4.14)$$

т. е. передаточная функция объекта есть изображение, по Лапласу, функции веса. Процедура получения передаточной функции будет следующей. На объект вносится единичное импульсное воздействие и регистрируется соответствующая ему функция веса. Совершая над ней прямое преобразование Лапласа согласно выражению (4.6), получаем изображение передаточной функции $W(S)$, которое при нулевых начальных условиях по форме записи совпадает с выражением передаточной функции $W(p)$. Если подаваемый импульс не является единичным, а равен $k\delta(t)$, то для случая рассматриваемых линейных систем реакция на выходе объекта будет соответственно $kw(t)$ и, используя свойство линейности оператора Лапласа, согласно выражению (4.14) будем иметь

$$L[kw(t)] = kW(S).$$

Передаточную функцию также можно получить из переходной функции. Если на вход объекта подать единичное ступенчатое воздействие $1(t)$, то реакция на выходе будет описываться переходной функцией $h(t)$. Изображение, по Лапласу, единичного ступенчатого

воздействия $L[1(t)] = \frac{1}{S}$. Тогда, согласно выражению (4.7), имеем

$$L[h(t)] = \frac{W(S)}{S}, \text{ или } W(S) = SL[h(t)]. \quad (4.15)$$

Следовательно, передаточная функция есть изображение, по Лапласу, переходной функции, умноженной на S . Если высота ступенчатого воздействия равна $k1(t)$, то изображение передаточной функции также увеличится в k раз.

Удобство и простоту получения передаточной функции с помощью переходных характеристик можно также проиллюстрировать на примере, рассмотренном в предыдущем подразделе. Если, например, неизвестны какие-либо параметры элементов амортизатора c_1 , c_2 или m , то их определение экспериментальным путем для получения передаточной функции потребует значительных трудозатрат: разборки амортизатора, экспериментального определения величин c_1 и c_2 на стендах, взвешивания подвижных частей, сборки амортизатора. Определение этих величин расчетным путем также трудоемко и не всегда возможно без разборки изделия для определения геометрических параметров пружины, демпфера, платформы, а также физических свойств материала пружины, демпфирующей жидкости и др. Получение переходных характеристик экспериментальным путем потребует минимальных трудозатрат. Для получения переходной функции осуществляется нагружение платформы некоторым грузом, вес которого равен k , и одновременно фиксируется изменение ее положения по оси y во времени, т. е. регистрируется перемещение платформы под действием груза во времени. Полученная запись функции $y(t) = kh(t)$ является переходной функцией в масштабе, равном k . Для получения функции веса k платформе прикладывается импульс силы (удар) и также регистрируется изменение ее положения во времени. Искомые параметры передаточной функции (k , T_1 , T_2) определяют из полученных графиков функции $h(t)$ или $w(t)$. Очевидно, что такие эксперименты можно провести в производственных условиях достаточно быстро и для их проведения не требуется сложных технических средств и дорогостоящей аппаратуры.

Для многих более сложных, с точки зрения протекания физических явлений, объектов промышленности переходные характери-

стики зачастую являются основным инструментом получения математического описания. В этом случае для подачи ступенчатого воздействия, например в теплообменные аппараты, осуществляют скачкообразное изменение расхода энергоносителя или хладоносителя, подаваемых в тот или иной аппарат (пароварочные камеры, печи, дефростационные и холодильные камеры и др.). Соответствующие переходные функции получают путем регистрации изменения температуры во времени в интересующей точке.

Использование выражений (4.14) и (4.15) для определения передаточной функции оказывается удобным, если соответствующие переходные характеристики заданы аналитически. Если же эти характеристики получены экспериментально и представлены в виде таблиц или графиков, то идентификация объекта может быть осуществлена приближенным графоаналитическим методом. Суть метода состоит в следующем. Если в выражении (4.14) перейти к преобразованию Фурье, заменив $S \rightarrow j\omega$, то получим описание взаимосвязи между функцией веса и частотной функцией $W(j\omega)$

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.16)$$

Зависимость (4.16) в комплексной плоскости представляется двумя составляющими

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= U(\omega) = \int_0^{\infty} w(t) \cos \omega t dt; \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= V(\omega) = - \int_0^{\infty} w(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Вычисление $U(\omega)$ и $V(\omega)$ по выражению (4.17) можно осуществить численными методами, представив функцию $w(t)$ в виде суммы трапеций $w_i(t)$

$$w(t) = \sum_{(i)} w_i(t). \quad (4.18)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}U(\omega) &= \sum_{(i)} U_i(\omega); \\V(\omega) &= \sum_{(i)} V_i(\omega).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Далее определяем $A(\omega)$, $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ в соответствии с выражениями

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};\tag{4.20}$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega);\tag{4.21}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.\tag{4.22}$$

Затем строятся зависимости $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ в логарифмическом масштабе по оси частот – ЛАХ и ЛФЧХ. Логарифмическая амплитудная характеристика аппроксимируется отрезками прямых, имеющих наклон, кратный ± 20 дБ/дек. Из этой асимптотической ЛАХ получают выражение для передаточной функции $W(p)$ в виде набора последовательно включенных типовых динамических звеньев. Постоянные времени T_i определяются по значениям сопрягающих частот ω_i

$$T_i = \frac{1}{\omega_i}; \quad i \in I.\tag{4.23}$$

По виду ЛФЧХ можно определить наличие неминимально-фазовых звеньев в структуре объекта и уточнить тип сомножителей в выражении $W(p)$.

В случае, если вид снятых экспериментальным путем переходных характеристик позволяет идентифицировать исследуемый объект каким-либо типовым динамическим звеном, то параметры соответствующей передаточной функции (коэффициент передачи, время запаздывания, постоянные времени) определяются по графикам этих характеристик.

В настоящее время имеются пакеты прикладного программного обеспечения, позволяющие «автоматизировать» и упростить процедуры идентификации объектов по переходным характеристикам.

5. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

5.1. Основные положения. Методы и технические средства определения характеристик случайных воздействий

В предыдущих разделах отмечалось, что достаточно объективно случайное воздействие может быть охарактеризовано корреляционной функцией или функцией спектральной плотности. Получение этих функций на основе экспериментальных исследований в производственных условиях представляет практический интерес, особенно с учетом специфики технологий и процессов биотехнологической промышленности.

Оценка корреляционной функции может быть осуществлена из выражения (2.26). В настоящее время для экспериментального определения корреляционных функций (в частности, дисперсий) воздействий промышленностью выпускается множество различных приборов-корреляторов. Корреляторы подразделяются на два основных класса: 1) аналоговые; 2) цифровые.

Аналоговые корреляторы реализуют вычисление по формуле (2.26) с помощью блоков временной задержки, умножения и интегрирования, осуществляющих соответствующие преобразования на основе аналоговых вычислительных схем. Такие схемы в последнее время чаще всего выпускаются в виде отдельных блоков – корреляционных модулей. Использование принципов унификации, типизации и агрегатирования при создании данных модулей позволяет осуществлять их интеграцию в системы контроля и управления. Упрощенная блок-схема корреляционного модуля приведена на рис. 5.1.

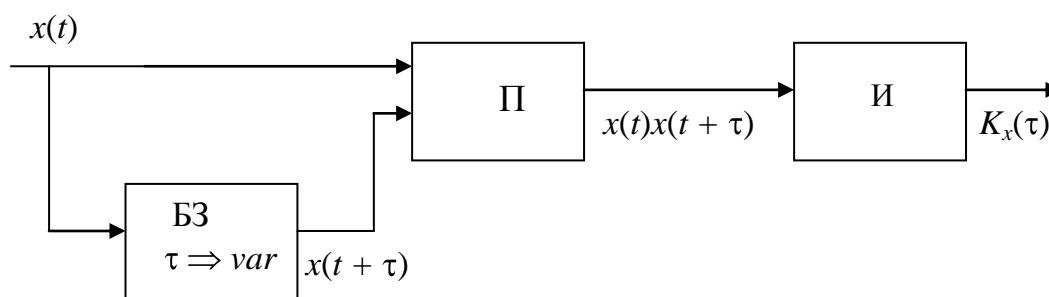


Рис. 5.1. Блок-схема корреляционного модуля

На схеме использованы следующие обозначения: БЗ – блок временной задержки сигнала на величину τ , которая может варьироваться; П – блок умножения сигналов; И – интегратор. При такой схеме обработки информации и при выбранном времени цикла исследования T удастся получить только одну точку функции $K_x(\tau)$ для заданной величины τ . Затем, повторяя заново такой цикл исследования для другой величины τ , получают следующую точку и т. д. Для возможности варьирования величины τ в состав БЗ входит устройство записи реализаций функции $x(t)$, что позволяет многократно осуществлять циклы исследований функции $K_x(\tau)$ для различных значений аргумента τ . Так, например, если запись функции $x(t)$ осуществляется на магнитную ленту, то величина τ может быть варьирована изменением расстояния между считывающими головками для получения значений функции $x(t)$ и $x(t + \tau)$, а также изменением скорости движения самой ленты.

В цифровых корреляторах осуществляется аналого-цифровое преобразование исходного сигнала $x(t)$. Дальнейшее преобразование цифровой информации в соответствии с выражением (2.26) осуществляется программным путем с помощью встроенного микропроцессорного блока. Современный уровень развития микропроцессорной техники и элементной базы позволяет изготавливать корреляторы с высокими показателями надежности, малыми габаритами и широкими возможностями адаптации к различным требованиям при проведении таких исследований как путем замены отдельных агрегатных модулей, так и перепрограммирования базового микропроцессорного блока. При этом обеспечиваются различные сервисные функции по хранению, обработке и выдаче информации потребителю. Сюда, в первую очередь, следует отнести возможности аппроксимации результатов исследований типовыми моделями корреляционных функций, наглядное отображение информации на различных устройствах и носителях и др. В настоящее время разработано значительное число методов и алгоритмов экспериментального определения корреляционных функций, которые отражены в специальной литературе.

Как отмечалось выше, существует взаимосвязь между функцией спектральной плотности и автокорреляционной функцией, которая для стационарного случайного воздействия описывается с помощью выражений (2.20)–(2.23). Образно говоря, обе эти функции являются

различными гранями одного явления случайного процесса – степени его «турбулентности». Поэтому при наличии корреляционной функции получение функции спектральной плотности может быть осуществлено аналитическим путем. В современных цифровых корреляторах зачастую имеются сервисные программные средства, позволяющие выполнять такие преобразования в процессе исследований. Следует отметить, что оценка функции спектральной плотности может быть также получена экспериментальным путем на основании реализации случайного воздействия при отсутствии оценки корреляционной функции. Такая процедура может быть осуществлена с помощью набора узкополосных фильтров, каждый из которых позволяет выделить спектральную составляющую воздействия в пределах своей узкой полосы пропускания $\omega \div \omega + \Delta\omega$. Исходя из того, что спектральная плотность воздействия является функцией частоты для средних значений квадратов амплитуд гармоник, можно записать

$$S_x \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) = \frac{1}{T\Delta\omega} \int_0^T x^2(t, \omega, \Delta\omega) dt, \quad (5.1)$$

где $x(t, \omega, \Delta\omega)$ – сигнал на выходе узкополосного фильтра с полосой пропускания $\omega \div \omega + \Delta\omega$; $\Delta\omega$ – ширина полосы пропускания фильтра; T – интервал времени, в течение которого осуществляется исследование случайного воздействия.

Для инженерных расчетов достаточно высокая точность оценок рассматриваемых функций будет иметь место при выполнении условия $T\Delta\omega \geq 100$.

5.2. Особенности экспериментальных исследований случайных воздействий в биотехнологической промышленности

Экспериментальное определение характеристик случайных воздействий, как это было показано выше, требует проведения большого количества измерений для получения достаточно объективных оценок. Данная проблема не является первостепенной в случаях, когда для

проведения исследований имеется быстродействующая малоинерционная аппаратура на всех участках информационно-измерительного комплекса: первичные преобразователи, линии связи, согласующие блоки, фильтры для подавления помех, аналого-цифровые преобразователи, устройства переработки информации и др. Как правило, эта ситуация имеет место: 1) в случаях воздействий электрической природы; 2) в случаях, когда возможно преобразование такого воздействия в электрический сигнал без существенных задержек, искажений и затрат. В качестве примеров первой группы можно привести случайные воздействия, которые дестабилизируют работу различной аппаратуры и оборудования, обусловленные нестабильностью питающего напряжения в электрической цепи, наводки от электромагнитного «смога» и др. В качестве примеров второй группы случайных воздействий можно привести пульсации давлений энергоносителей (пара, горячего воздуха, воды) в технологических трубопроводах, которые первоначально измеряются с помощью различных деформационных чувствительных элементов (трубчатых пружин, мембран, сильфонов), а затем преобразуются в электрические сигналы. Для преобразования сигналов таких датчиков в электрические сигналы существует множество преобразователей в различных модификациях (например, индуктивные, пьезоэлектрические, емкостные, дифференциально-трансформаторные и др.). Аналогично можно привести примеры случайных воздействий в виде суточных или сезонных изменений температуры окружающей среды (воздуха, воды) снаружи корпусов различных теплообменных аппаратов, для получения и преобразования информации о которых также существует множество типов и конструкций чувствительных элементов и соответствующих преобразователей. Перечень подобных примеров может быть пополнен и другими случайными воздействиями, поступающими по каналам изменения уровня, расхода, концентрации и прочих, при управлении различными технологическими процессами. Наличие соответствующих преобразователей позволяет получить необходимый для проведения корреляционного и спектрального анализа сигнал $x(t)$, который в соответствии с рис. 5.1 поступает на вход анализатора (корреляционного модуля). Серьезные аппаратурные разработки для исследования таких случайных величин, как изменение углов крена и угловых скоростей при движении летательных аппаратов в воздушной среде или качке судов при волнении, позволяют опе-

ративно получать объективную информацию об этих явлениях для выработки рекомендаций по управлению указанными объектами. Для данных целей, например, разработаны и широко используются двух- и трехстепенные гироскопы различных типов (лазерные, скоростные, гировертикали и др.).

Специфической особенностью процессов и производств биотехнологической промышленности является то обстоятельство, что значительное число случайных воздействий может поступать как по каналам внесения управляющих воздействий, так и по каналам поступления сырья и различных компонентов. Природа таких воздействий довольно часто обусловлена случайными изменениями состава и свойств обрабатываемого сырья, полуфабрикатов и применяемых реагентов и добавок [11, 12]. Для оперативного измерения многих параметров, характеризующих пищевую ценность сырья и готовой продукции, зачастую не существует аппаратной базы или она недостаточно развита в отличие от вышерассмотренных примеров информационного обеспечения систем управления в машиностроении и других отраслях промышленности. В ряде случаев для определения содержания тех или иных составляющих в сырье или готовой продукции применяются сложные и дорогостоящие лабораторные методы анализа, которые проводятся в течение длительного времени (порядка нескольких часов и более), что является серьезным препятствием для реализации методов корреляционного и спектрального анализа. При этом в силу сложности химического состава и структуры таких объектов зачастую вообще оказывается невозможным непосредственно осуществить объективный аппаратный контроль их свойств. В указанных случаях соответствующие оценки свойств сырья и продуктов производят органолептическими методами, которые являются не оперативными и дорогостоящими. При этом следует учитывать, что достаточно объективные оценки могут быть получены только на основании статистической обработки результатов анализов специалистов-дегустаторов. Кроме того, специалист, проводящий такие анализы, должен обладать особыми профессиональными навыками и подготовкой.

Обзор методов и приборов для контроля технологических параметров в пищевой промышленности приведен в работах [13, 14].

Не вдаваясь в детали, необходимо отметить основные тенденции и особенности синтеза информационного обеспечения систем

управления в биотехнологической промышленности. Основной особенностью является то, что для управления технологическими процессами помимо контроля так называемых общетехнических параметров (температуры, давления, расхода, уровня и др.) необходимо также контролировать свойства обрабатываемого сырья, полуфабрикатов и готового продукта, что зачастую невозможно осуществить с помощью общетехнических средств измерений. Причем имеющиеся методы инструментального контроля некоторых показателей требуют использования дорогостоящего оборудования. В первую очередь к ним относятся показатели, характеризующие физико-химические, санитарно-гигиенические и микробиологические свойства, а также показатели состава сырья и продуктов. Схема, иллюстрирующая классификацию основных параметров технологических процессов современных пищевых производств, используемых при управлении, приведена на рис. 5.2.

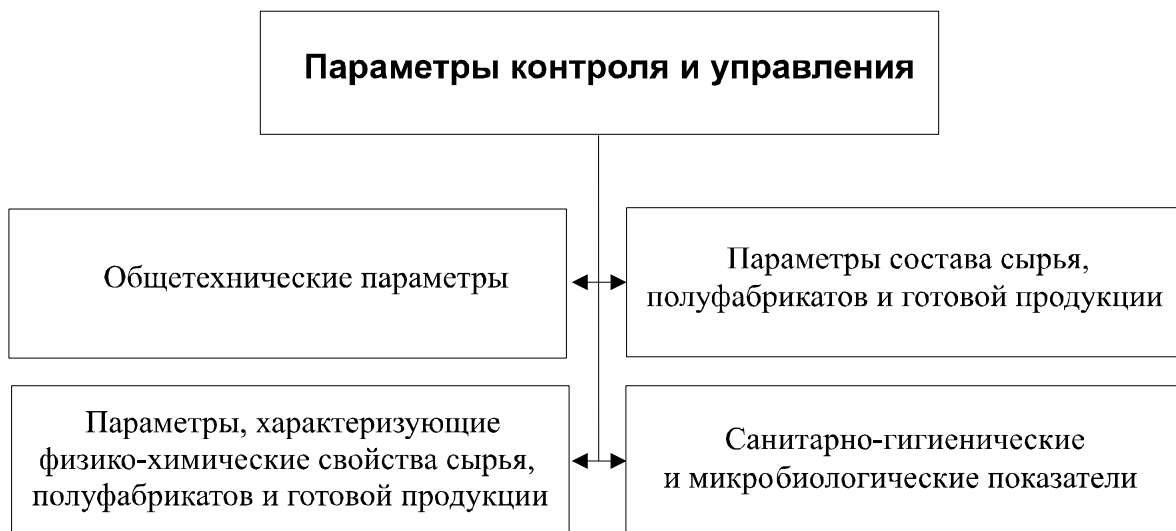


Рис. 5.2. Классификация основных параметров технологических процессов пищевых производств

Вполне понятно, что каждый из приведенных на рис. 5.2 блоков параметров предусматривает дальнейшую многоступенчатую детализацию. Однако для уяснения проблем, указанных в заголовке данного подраздела, достаточно ограничиться рассмотрением отдельных характерных параметров, методов их контроля, которые могут быть использованы при проведении экспериментальных исследований в производственных условиях.

Более подробную детализацию особенностей технологических процессов пищевых производств с учетом специфики информационно-го и метрологического обеспечения можно найти в справочнике [15].

Так, одним из распространенных показателей, характеризующих комплекс физических свойств многих пищевых продуктов, является консистенция. В соответствии с действующими стандартами данный показатель используется для оценки качества отдельных видов рыбной продукции, мяса, мясного фарша, колбас, тестовых заготовок и хлебобулочных изделий, сметаны, масла и маргаринов, сыра, творога, различных пищевых паст и кремов. Часто в тех же стандартах контроль консистенции предполагается осуществлять органолептически, на основании методов сенсорного анализа. Такая оценка качества объектов, основанная на опытно-интуитивном восприятии ситуации, зависит от квалификации соответствующих специалистов и зачастую оказывается недостаточно оперативной, дорогостоящей, что, в конечном счете, приводит к неэффективности процесса управления. Поэтому наметилась тенденция к разработке и внедрению в производство приборов и технических средств, предназначенных для инструментальной, объективной оценки свойств таких объектов. Применительно к показателю консистенции можно утверждать, что он зависит от внутренней структуры объекта, определяющей целый ряд его физических свойств, которые, в свою очередь, могут быть измерены инструментальными методами. Данное обстоятельство создает предпосылки для разработки аппаратных методов оценки качества объектов. Известно, что свойства внутренней структуры объекта достаточно объективно описываются набором структурно-механических характеристик, которые подразделяются на три основные группы: 1) сдвиговые; 2) компрессионные; 3) поверхностные. Изучение свойств реальных объектов по указанным характеристикам является одной из задач инженерной реологии.

Сдвиговые свойства объекта проявляются при воздействии на него касательных напряжений. Для описания данных свойств используются следующие основные характеристики [16]:

- предельное напряжение сдвига;
- пластическая вязкость;
- эффективная вязкость;
- период релаксации.

Компрессионные свойства проявляются при сжатии объекта в замкнутом объеме. Для описания таких свойств используются следующие основные характеристики:

- плотность;
- модуль упругости;
- коэффициент Пуассона;
- коэффициент бокового давления.

Поверхностные свойства проявляются на границе раздела объекта с твердым материалом при воздействии нормальных или касательных напряжений. Соответственно они и описываются как адгезия и внешнее трение.

Выбор какой-либо характеристики для описания свойств объекта является прерогативой исследователя. Зачастую такой выбор осуществляется на основании экспериментальных исследований с привлечением методов дисперсного и факторного анализов, возможно также использование методов парной, ранговой корреляции и др.

Измерение реологических характеристик в основном осуществляется косвенно: соответствующая характеристика определяется на основании результатов прямых измерений при помощи данного прибора с последующим пересчетом по известной зависимости. В связи с этим все «реологические» приборы подразделяются по виду непосредственно измеряемых величин на 4 основные группы:

- 1) силовая (сила, момент, напряжение);
- 2) кинематическая (время, скорость);
- 3) геометрическая (длина, площадь, объем);
- 4) энергетическая (мощность).

Для измерения вышеупомянутых реологических характеристик выпускаются специальные измерительные приборы различных типов: пластометры, пенетрометры, консистометры, вязкозиметры, адгезиометры, трибометры и др. Анализ литературных источников, опыт эксплуатации подобных приборов на производстве подтверждают приведенное в начале подраздела утверждение о проблемах, связанных с недостаточной оперативностью и высокими затратами при проведении подобных измерений и исследований. Так, например, продолжительность цикла измерения реологических характеристик различных приборов может варьироваться в пределах от нескольких минут до десятков минут. Здесь также необходимо отметить, что

цикл измерения может состоять из нескольких операций: подготовки и загрузки образца или пробы, приведения прибора в рабочее положение, проведения собственно измерения, выгрузки образца и др.

Сформулированный тезис можно проиллюстрировать на примерах проведения измерений параметров состава сырья, полуфабрикатов и готовой продукции в пищевой промышленности. Так, например, для управления технологическими процессами в молочной промышленности необходимо осуществлять контроль состава поступающего на обработку молока, а также молочных продуктов. При этом наиболее распространенным параметром контроля состава является массовое содержание жира, белка, сухих веществ, лактозы и др. Для измерения данного параметра могут использоваться различные методы: ультразвуковой, колориметрический, турбодиметрический, рефрактометрический и др. Приборы, осуществляющие эти измерения, имеют достаточно сложную конструкцию, сложны в обращении и являются дорогостоящими. Так, например, получившие распространение в молочной промышленности различные приборы, основанные на использовании оптических методов измерений, включают в себя:

- оптический блок, состоящий из набора светофильтров, источников и приемников монохроматического излучения для различных длин волн, системы линз и зеркал;
- блок подготовки и подачи проб;
- блок питания;
- микропроцессорный блок управления работой и обработки измерительной информации.

Несмотря на использование в конструкциях приборов современной элементной базы (компактных приводных двигателей, малогабаритных насосов и др.), они в силу своей сложности имеют значительные габариты и массу от нескольких десятков килограммов и более. Для работы на данных приборах требуется специально подготовленный персонал. К таким разработкам, например, относятся измерительные комплексы типов «Милко-Тестер» или «Милко-Скан» фирмы Foss-Electric (Дания), «Мультиспек» фирмы Berwind Instrument (Англия), «Милко-Чекер» фирмы Anritsu-Electric (Япония) и др.

Аналогичная ситуация с организацией и проведением контроля состава и свойств сырья и продуктов, а также ряда санитарно-гигиенических и микробиологических параметров имеет место

и в других отраслях пищевой промышленности. Так, например, комплексная оценка свойств твердых продуктов может быть осуществлена на основании анализа отражающих свойств поверхности образца. В качестве характеристики спектральной отражающей способности поверхности продукта может быть использована величина оптической плотности D_λ

$$D_\lambda = \lg \frac{I_{\lambda 0}}{I_\lambda}, \quad (5.2)$$

где $I_{\lambda 0}$ – интенсивность падающего монохроматического потока с длиной волны λ ; I_λ – интенсивность отраженного потока.

В этом случае такое «измерение» сведется к снятию кривой оптической плотности для исследуемой поверхности в заданном диапазоне длин волн λ . Для большей объективности результатов обычно используется полный диапазон видимой части светового спектра $\lambda = (400 \div 750)$ нм. Кривая оптической плотности может быть получена с помощью спектрофотометра. Следует отметить, что такие методы исследования начинают внедряться в биотехнологическую промышленность для определения свойств продуктов. Особое значение они приобретают в тех случаях, когда исследуемая поверхность обладает избирательным поглощением, т. е. на кривой оптической плотности имеются характерные локальные минимумы и максимумы. Наличие диапазонов избирательного поглощения также позволяет произвести качественную оценку результатов протекания биохимических процессов в продукте, что в ряде случаев предоставляет возможность сделать важные выводы о его свежести, содержании в нем токсичных микроорганизмов. Такое избирательное поглощение света в органических веществах связано с особенностями химического строения молекул, содержания в них определенных химических групп, например хромофоров. Для характеристики качества продуктов также можно использовать значения оптических плотностей для конкретных длин волн, соответствующих наличию избирательного поглощения. В этом случае проведение измерений можно осуществить на более простых приборах – монохроматорах с набором светофильтров, обеспечивающих получение необходимых потоков монохроматического излучения. На рис. 5.3 приведены характерные кривые оптической плотности, полученные для боковой поверхности рыбы горячего копчения, копченой и вареной колбас.

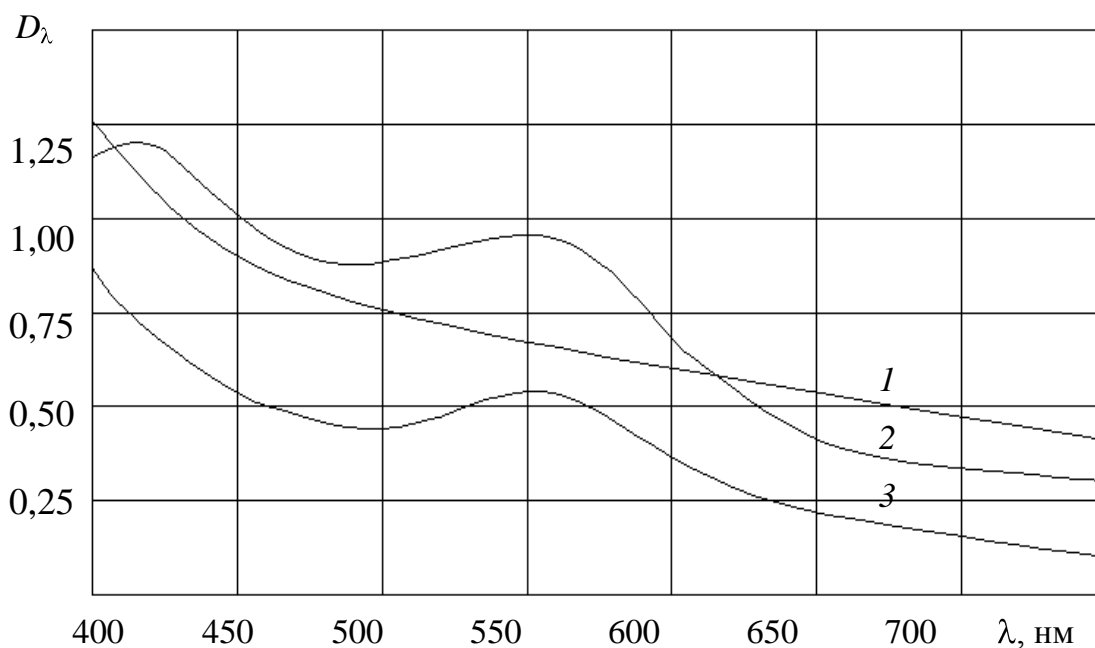


Рис. 5.3. Характерный вид спектральных кривых оптической плотности:
 1 – салака горячего копчения; 2 – колбаса копченая; 3 – колбаса вареная

Как видно из приведенного рисунка, на представленных кривых отсутствуют участки с ярко выраженным избирательным поглощением. Похожая картина имеет место и для ряда других продуктов. В этих случаях для оценки удобно использовать значение величин оптической плотности в начале D_1 и в конце D_2 диапазона рассматриваемого спектра. Чаще всего в качестве такой оценки используется показатель $\frac{D_1}{D_2}$, выраженный через отношение указанных плотностей.

Такой подход формализует процесс исследования, но может привести к получению неоднозначных результатов, обусловленных неоднозначностью выбора характерных длин волн λ_1 и λ_2 . Во избежание этого обычно заранее выбирают рабочие значения λ_1 и λ_2 . При отсутствии участков с ярко выраженным избирательным поглощением наиболее целесообразными считаются значения λ_1 и λ_2 , лежащие вблизи границ видимой части спектра: $\lambda_1 = 430$ нм, $\lambda_2 = 720$ нм.

Рассматриваемый метод оценки свойств продуктов получает все большее распространение. В настоящее время он весьма успешно

зарекомендовал себя при оценке цвета поверхностей многих копченых продуктов (рыбы, колбасных изделий и др.). Также успешно данный метод используется для оценки «свежести» мясного сырья, степени бактериальной обсемененности и др. Однако широкому внедрению такого метода непосредственно в производственную практику препятствует то обстоятельство, что для его реализации требуется сложное измерительное оборудование, выполненное на основе спектрофотометра. Применение встроенных ЭВМ позволяет повысить оперативность обработки измерительной информации, расчета различных характеристик, автоматизировать процесс измерения. Однако и в этом случае длительность одного цикла измерения, включая подготовку и загрузку образца, снятие кривой оптической плотности в заданном диапазоне длин волн, обработку результатов, выгрузку образца, составляет от нескольких минут до десятков и более минут. Подобных примеров можно привести множество.

Следует также отметить, что использование дорогостоящих приборов контроля состава и свойств пищевого сырья и продуктов, санитарно-гигиенических показателей для мелких и средних предприятий зачастую оказывается экономически нецелесообразным. Поэтому в таких случаях для проведения соответствующих измерений используют классические лабораторные методы анализа. Для проведения анализов применяют более доступное оборудование: комплекты химической посуды, различные химические реактивы, центрифуги, аналитические весы, микроскопы, сушильные шкафы, термостаты и др. При этом следует учитывать, что реализация таких методов анализа требует гораздо больших затрат времени, чем при использовании упомянутых выше автоматизированных анализаторов, и может достигать нескольких часов.

В связи с изложенным выше основной вывод по данному подразделу можно сформулировать следующим образом.

Проведение экспериментальных исследований случайных воздействий для технологических процессов биотехнологической промышленности в большинстве случаев связано со значительными материальными затратами и требует существенных затрат труда и времени. Поэтому являются весьма актуальными разработка и внедрение методов мониторинга и управления процессами и производствами на основании ограниченной измерительной информации, т. е. в услови-

ях априорной неопределенности. Это обстоятельство обуславливает актуальность и экономическую целесообразность внедрения методов робастного управления в биотехнологической промышленности.

5.3. Типовые математические модели характеристик случайных воздействий

Как известно, основными характеристиками случайного воздействия являются корреляционная функция и функция спектральной плотности. Поэтому ниже будут рассмотрены математические модели, получившие наибольшее распространение на практике. Предварительно необходимо отметить, что аппроксимация указанных функций по отдельным точкам, полученным экспериментальным путем, может быть осуществлена с любой точностью. Так, например, интерполяция зависимости для $(n + 1)$ точки с помощью многочлена Лагранжа n -й степени позволит получить функцию, график которой проходит через все эти точки. В настоящее время существует множество методов аппроксимации зависимостей, заданных различными способами: табличным, аналитическим, графическим. Эти методы достаточно подробно описаны в специальной литературе. Зачастую получаемые в результате такой аппроксимации выражения искомым функций оказываются громоздкими и сложными для проведения дальнейших исследований и расчетов. Возникает необходимость их разумного упрощения или «округления». При этом необходимо сохранить основные имеющиеся тенденции в поведении указанных функций. Задача выбора математических моделей для характеристик случайных воздействий является одной из ответственных и не подлежащей формализации в практике экспериментального анализа случайных воздействий. Во многом эффективность решения такой задачи зависит от опыта, интуиции и квалификации исследователя. Наиболее типовые и употребительные варианты математических моделей корреляционных функций и соответствующих им спектральных плотностей приведены в табл. 5.1. Указанный набор вариантов моделей является достаточно полным для описания случайных воздействий, встречающихся в практике анализа и синтеза систем управления, и позволяет отразить основные тенденции в поведении

этих функций (интенсивность «затухания» функций, их характер: аperiodический или колебательный и др.).

Таблица 5.1

Математические модели характеристик случайных воздействий

№ пп.	Математическая модель корреляционной функции $K_x(\tau)$	Математическая модель спектральной плотности $S_x(\omega)$
1	$D_x e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha D_x}{\alpha^2 + \omega^2}$
2	$D_x e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	$\frac{4\alpha^3 D_x}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
3	$D_x e^{-\alpha \tau } \cos \beta \tau $	$D_x \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} \right]$
4	$D_x e^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$D_x \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{2\beta - \omega}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} \right]$

Приведенный в табл. 5.1 набор моделей не является исчерпывающим. В отдельных случаях возникает необходимость в более сложных моделях и методах описания случайных воздействий. Необходимые сведения можно найти в работах [1, 2, 5].

5.4. Методы моделирования и расчета характеристик случайных воздействий

Получение математических моделей характеристик случайных воздействий на основании теоретических исследований особенно актуально в случаях ограниченной измерительной информации об этих воздействиях, что, например, характерно для многих производств биотехнологической промышленности. Такие методы оказываются эффективными, когда случайная помеха, воздействующая на рассматриваемый технологический процесс, сформировалась в результате прохождения известного ранее случайного воздействия через какое-либо звено, которое, например, может являться элементом вспомогательного оборудования для данного процесса. Соответствующий математический аппарат и различные примеры его применения рассмотрены в разд. 3.

В качестве другого примера эффективности разработки математических моделей случайных воздействий аналитическими методами можно привести ситуацию, когда ширина полосы пропускания анализируемого объекта, системы оказывается значительно более узкой, чем ширина спектра воздействия, и в этих пределах амплитуды гармоник постоянны. В таком случае достаточно адекватной моделью является модель «белого шума», которая описывается следующими характеристиками:

$$K_f(\tau) = a\delta(t), \quad (5.3)$$

где $a = \text{const}$; $\delta(t)$ – дельта-функция.

Функция спектральной плотности имеет вид

$$S_f(\omega) = a. \quad (5.4)$$

Характерным для биотехнологической промышленности является воздействие, которое скачкообразно изменяет свое значение в случайные моменты времени. Такая ситуация достаточно адекватно описывает случай, когда на обработку поступают различные виды сырья, обладающие разными характеристиками. Так, например, при изготовлении фарша для заданного сорта колбас довольно часто вследствие производственной необходимости используют разнородные партии мясного сырья (свинины, говядины и др.) и различных добавок (соя, крахмал и др.), поступивших от различных поставщиков и производителей. Естественно, что содержание отдельных компонентов (влаги, жира, белка, углеводов и др.) в общем потоке обрабатываемого сырья будет изменяться скачкообразно при поступлении каждой новой партии. Характерность такого типа воздействий для пищевой промышленности отмечена в работе [15]. Качественный вид изменения рассмотренного типа воздействия во времени приведен на рис. 5.4.

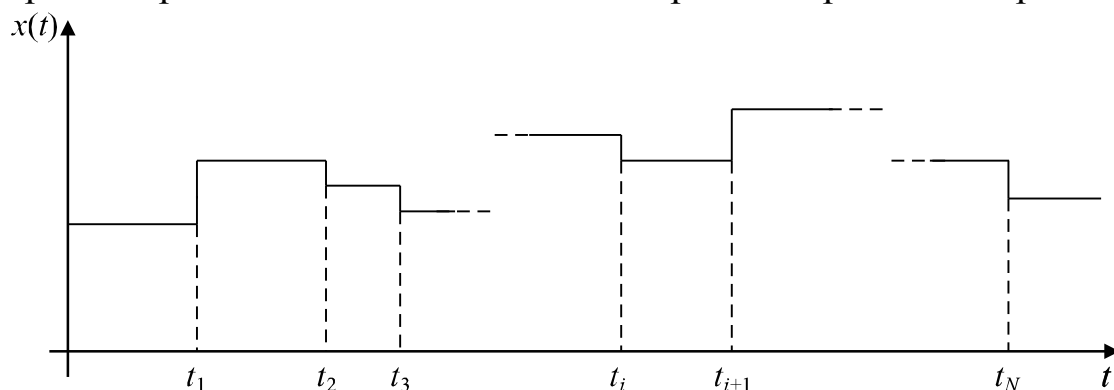


Рис. 5.4. Качественный вид случайного воздействия, характеризующегося скачкообразным изменением параметра в случайные моменты времени

Как показано в работе [5], спектральная плотность такого воздействия достаточно точно может быть описана выражением

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (5.5)$$

где D_x – дисперсия воздействия; T – средний интервал времени между

скачками, $T = \Delta t_{\text{ср}}$ (здесь $\Delta t_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta t_i}{N}$, где $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$; $i = 1, 2, \dots, N$; N – общее количество скачков).

Очевидно, что выражение (5.5) может быть также использовано для описания спектральной плотности задающего воздействия, поступающего, например, по каналу изменения уставки при переходе на различные режимы работы объекта, технологического оборудования.

Представляет практический интерес определение корреляционной функции через разложение ее в ряд по дисперсиям производных воздействия. Пусть $K_x(\tau)$ – искомая корреляционная функция воздействия, допускающая многократное дифференцирование. Тогда ее можно представить рядом Маклорена в виде

$$K_x(\tau) = K_x(0) + K_x^{(1)}(0)\tau + \frac{1}{2!} K_x^{(2)}(0)\tau^2 + \dots \quad (5.6)$$

Так как корреляционная функция является четной, то ее нечетные производные в выражении (5.6) равны нулю, что позволяет записать

$$K_x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} K_x^{(2i)} \tau^{2i}. \quad (5.7)$$

Исходя из свойств корреляционной функции производной [2], выражение (5.7) можно привести к виду

$$K_x(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i D_i}{(2i)!} \tau^{2i}, \quad (5.8)$$

где D_i – дисперсия i -й производной воздействия.

Выражение (5.8) позволяет получить аппроксимацию корреляционных функций конечным числом членов данного ряда. Однако при этом необходимо учитывать выполнение условий сходимости, которые рассмотрены в специальной литературе. Не вдаваясь в отдельные детали, следует отметить, что условия сходимости ряда (5.8) выполняются с запасом для большинства случайных воздействий, описываемых типовыми математическими моделями.

Производные воздействия могут быть получены путем последовательного дифференцирования сигнала воздействия. Для этого существуют дифференцирующие устройства и специальная аппаратура, которые позволяют отфильтровать шумы и помехи. Дисперсия i -й производной воздействия D_i определяется на основании полученной i -й производной исходного сигнала в соответствии с выражением (2.17).

В заключение необходимо отметить, что если в силу различных причин (производственных, технических, экономических и др.) получение рассмотренных выше характеристик случайных воздействий оказывается затруднительным, то решение задач анализа и синтеза систем управления может быть осуществлено на еще более «грубом» уровне. В таких ситуациях возможно использование более «грубых» обобщенных характеристик воздействий – дисперсий или максимальных значений производных. Основные методы синтеза таких систем управления будут рассмотрены в разд. 6.

6. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

6.1. Основные положения

Задача синтеза подразумевает создание некоторой системы, обладающей заданным набором свойств и признаков на базе имеющихся модулей, объектов, элементов. Набор требований к свойствам создаваемых систем управления различными объектами, технологическими процессами не является строго детерминированным и зависит от ряда производственных, технических, экономических и других факторов. Аналогично набор элементов, являющихся исходными данными для решения такой задачи, также зависит от конкретной ситуации и может изменяться в значительных пределах. Чаще всего такими «неварьируемыми» частями создаваемой системы являются сам объект управления или технологический процесс, несколько реже – исполнительные устройства и первичные преобразователи, установленные на объекте, и другие элементы. Достижение поставленных требований к свойствам системы в производственной практике обычно осуществляется за счет выбора структуры устройства управления, функций отдельных ее элементов, значительно реже – модернизации, изменения свойств объекта, технологического оборудования. Как правило, достижение поставленной цели может быть осуществлено различными вариантами решения такой задачи. Поэтому задача синтеза систем управления является вариационной задачей с отысканием некоторого оптимального варианта [1, 7]. Рассмотрим основные требования к свойствам систем и критерии оптимизации, используемые при решении задач синтеза на практике, с учетом специфики биотехнологической промышленности.

6.2. Постановка задачи синтеза систем управления

Одним из наиболее общих требований, предъявляемых к системе управления при решении задачи синтеза и, в частности, синтеза систем регулирования, является обеспечение устойчивости и запаса устойчивости. Запас устойчивости определяется по двум парамет-

рам: 1) запасу устойчивости по фазе $\Delta\varphi$; 2) запасу устойчивости по амплитуде ΔL .

Если требования к указанным выше параметрам специально не оговариваются, то на практике, по умолчанию, обычно используются следующие условия:

$$\begin{cases} \Delta L > 12 \text{ дБ}; \\ \Delta\varphi \geq 30^\circ. \end{cases} \quad (6.1)$$

Кроме того, часто выдвигаются требования к динамическим свойствам системы. Эти требования в основном формулируются в виде ограничений, налагаемых на такие показатели качества переходного процесса, как время переходного процесса – $t_{\text{п}}$ и величина перерегулирования, или динамический заброс, – σ ,

$$\begin{cases} t_{\text{п}} \leq t_{\text{доп}}; \\ \sigma \leq \sigma_{\text{доп}}, \end{cases} \quad (6.2)$$

где $t_{\text{доп}}$, $\sigma_{\text{доп}}$ – предельно допустимые значения показателей, которые задаются в каждом конкретном случае исходя из производственной ситуации и специфики работы системы.

Другими важными требованиями, предъявляемыми к синтезируемой системе, являются требования по обеспечению точности работы в различных режимах. Точностные требования к системе в статическом режиме обычно задаются в виде ограничений на величину статической ошибки ε

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{доп}}. \quad (6.3)$$

Точностные требования к системе в стационарном случайном режиме могут задаваться в виде требований к видам и свойствам различных статистических характеристик реакции системы на случайные воздействия. При этом подразумевается наличие априорной информации об этих воздействиях. В качестве «точностных» характеристик здесь могут использоваться значения максимальных Δ или среднеквадратических σ , ошибок и их производных, а также различные комплексные показатели. Так, например, требования по ограни-

чению максимальной и среднеквадратической ошибок будут иметь следующий вид:

$$|\Delta| \leq \Delta_{\max}; \quad (6.4)$$

$$\sigma_y^2 \leq \sigma_{\text{умax}}^2. \quad (6.5)$$

Кроме рассмотренных выше требований при синтезе систем управления могут выдвигаться и другие, которые в отдельных случаях являются первостепенными, например нижеприведенные требования.

1. *Требования к показателям надежности системы.* В качестве таких показателей обычно используются: среднее время безотказной работы (наработка на отказ), интенсивность отказов и др.

2. *Требования к массе и габаритам системы.* Следует отметить, что данная группа требований не является первостепенной для большинства производств биотехнологической промышленности. Однако она очень важна для систем, устанавливаемых на летательных аппаратах, подводных судах и др.

3. *Требования к виду потребляемой энергии и мощности.* В какой-то мере эта группа требований по своей актуальности и в частности для биотехнологической промышленности аналогична предыдущей. Однако могут иметь место существенные исключения. Так, например, производства, связанные с хранением и переработкой зерна, муки и другого органического сырья, являются потенциально взрыво- и пожароопасными из-за наличия на них органической пыли, возникающей в большом количестве при транспортировании и перегрузке указанной продукции. Поэтому на элеваторах, мукомольных и комбикормовых заводах на таких потенциально опасных участках производств предпочтение отдается пневматическим системам управления. Из этих же соображений на ряде предприятий химической промышленности, например на пороховых и пиротехнических производствах, вообще запрещено использование электроавтоматики.

4. *Эксплуатационные требования.* К данной группе относятся следующие требования: к условиям эксплуатации систем, например, по параметрам влажности, давления окружающей среды, уровням вибрации и др.; к условиям проведения обслуживания, ремонта; к квалификации обслуживающего персонала и др.

Приведенный перечень требований, очевидно, не является исчерпывающим и может быть дополнен. Следует также при решении

задачи синтеза системы учитывать, что отдельные требования могут противоречить друг другу, а это обуславливает необходимость поиска компромисса.

Кроме требований или ограничений, предъявляемых к различным параметрам системы в виде, например, условий типа (6.1)–(6.5), для синтеза систем зачастую необходимо также задаться критерием оптимальности или целевой функцией. В общем случае критерий оптимальности L задается интегральным функционалом вида

$$L = \int_0^{t_p} \varphi(\bar{X}, \bar{Y}) dt, \quad (6.6)$$

где t_p – время функционирования или работы системы; \bar{X} – вектор входных параметров системы; \bar{Y} – вектор выходных параметров системы.

Выбор функции $\varphi(\bar{X}, \bar{Y})$ осуществляется разработчиком в зависимости от конкретных условий и требований производства и обуславливает тип системы управления.

В частности, когда $\varphi(\bar{X}, \bar{Y}) = 1$, исходный функционал (6.6) принимает вид

$$L = \int_0^{t_p} dt = t_p. \quad (6.7)$$

Осуществляя минимизацию данного функционала, т. е. налагая условие

$$L = t_p \rightarrow \min, \quad (6.8)$$

получаем оптимальную по быстродействию систему, т. е. обеспечивающую минимальное время управления.

Если функция $\varphi(\bar{X}, \bar{Y})$ содержит только выходную координату объекта, то критерий оптимальности может быть трансформирован в соответствующий интегральный критерий качества переходного процесса, используя который можно оптимизировать динамические свойства системы. Так, например, минимизируя интегральный критерий качества переходного процесса в виде

$$L = \int_0^{t_p} \left[\Delta_y^2(t) + c \left(\frac{d\Delta y(t)}{dt} \right)^2 \right] dt \rightarrow \min, \quad (6.9)$$

удается получить вариант системы с ограниченной длительностью и колебательностью или степенью «турбулентности» переходного процесса. В выражении (6.9) $\Delta y(t) = y(\infty) - y(t)$ – текущее отклонение выходной величины объекта от установившегося значения $y(\infty)$, c – весовой коэффициент, характеризующий значимость, относительный «вес» динамической составляющей переходного процесса в общей оценке его качества. Варьируя величиной c в процессе решения задачи синтеза, можно получить систему с различными динамическими характеристиками.

Кроме того, варьируя выражением $\varphi(\bar{X}, \bar{Y})$ и размерностью переменных x и y , можно выбрать критерий оптимизации, позволяющий синтезировать варианты систем управления, оптимизирующих качество продукции, энергопотребление и др. Наиболее общим вариантом критерия оптимальности, позволяющим учитывать многообразие различных требований к свойствам синтезируемой системы, является аддитивный интегральный функционал от квадратичных форм по рассматриваемым параметрам и характеристикам систем, например, вида

$$L = \int_0^{t_p} \left[\sum_{(i)} c_i \{x_{i0} - x_i(t)\}^2 + \sum_{(j)} c_j \{y_{j0} - y_j(t)\}^2 \right] dt, \quad i \in I, j \in J, \quad (6.10)$$

где c_i, c_j – весовые коэффициенты, характеризующие значимость, относительный «вес» i -й характеристики или j -го параметра синтезируемой системы.

Достоинством такого варианта критерия оптимальности является то, что с его использованием возможно отыскание компромисса при наличии противоречивых требований к синтезируемой системе. Варьируя величинами c_i и c_j можно описать приоритет каждого требования, а с помощью набора реперных значений параметров x_{i0} и y_{j0} ($i \in I, j \in J$) задать некий «идеал», к которому необходимо приблизиться в процессе синтеза. Очевидно, что при такой постановке вопроса процедура оптимизации сведется к отысканию

минимального значения функционала L . Существуют и другие варианты критерия оптимальности.

Для оптимизации процесса управления при наличии случайных воздействий могут использоваться так называемые вероятностные критерии оптимальности. В этом случае осуществляется синтез системы управления, обеспечивающей, например, минимум вероятности наступления каких-либо нежелательных событий или ситуаций. В качестве таких событий могут рассматриваться различные промахи при управлении летательными аппаратами или недопустимые отклонения от цели, потери сигналов и др. Применительно к биотехнологической промышленности вероятностные критерии оптимальности используются для управления материальными транспортными потоками, работой складов, экспедиций. В этих случаях, например, управление потоками продукции, поступающей на склад или отгружаемой со склада, осуществляется таким образом, чтобы минимизировать вероятность попадания заявки на загрузку или выгрузку партии продукции в очередь или минимизировать вероятность среднего времени ожидания в очереди такой заявки на обслуживание, тем самым уменьшить потери от простоя транспортных средств. Однако для организации управления технологическими процессами и объектами биотехнологической промышленности такие критерии широкого распространения не получили.

В реальных условиях многообразие требований, предъявляемых к системе управления с учетом их специфики и разнообразия, зачастую не позволяет осуществить строгую математическую формулировку критерия оптимальности для синтезируемой системы. Вследствие этого не представляется возможным аналитическое решение задачи синтеза классическими математическими методами. Поэтому на практике для решения таких задач используют итеративную процедуру, где на каждом цикле итерации осуществляется частичный синтез системы, направленный на выполнение отдельных исходных требований, начиная при этом с важнейших, первостепенных. Если существует набор таких первостепенных требований, то, реализуя итеративную процедуру синтеза, начиная с каждого требования отдельно, можно получить несколько вариантов системы. Затем в результате сравнительного анализа выбирают наиболее приемлемый вариант.

Применительно к рассматриваемому классу систем, работающих при наличии стационарных случайных воздействий, первостепенным является обеспечение требуемой точности, например, в виде условий (6.4) и (6.5). Следует отметить, что условие (6.5) более удобно для описания «точностных» характеристик при наличии неполной априорной информации о свойствах системы, так как позволяет оценить доверительный интервал отклонения (ошибки) по заданной доверительной вероятности или для заданной величины отклонения оценить вероятность появления такого события. Более точная оценка величин доверительного интервала или доверительной вероятности может быть получена при наличии информации о виде закона распределения выходной величины. Однако даже при отсутствии такой информации, исходя из предположения, что закон распределения выходной величины является нормальным, получим мажорантные, завышенные в энтропийном смысле значения оценок этих величин. Таким образом, на практике основным требованием при синтезе систем, работающих при наличии случайных воздействий, является ограничение дисперсии выходной величины.

6.3. Синтез систем управления при наличии случайных воздействий

В общем случае считаем, что система управления находится под действием случайного воздействия (помехи, возмущения) f и задающего воздействия x_3 (рис. 6.1).

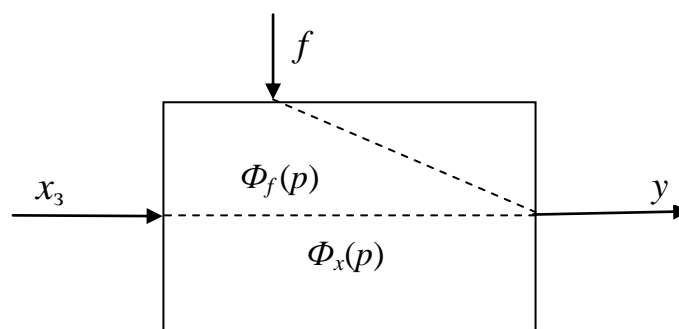


Рис. 6.1. Схема системы управления при наличии случайных воздействий

На рис. 6.1 $\Phi_f(p)$ – передаточная функция замкнутой системы для случайного воздействия; $\Phi_x(p)$ – передаточная функция замкнутой системы для задающего воздействия. Также считаем, что характеристики воздействий – корреляционные функции или спектральные плотности – известны. Как правило, данные характеристики определяются одним из методов, рассмотренных в разд. 5, на предварительных этапах. Тогда, используя выражение (3.13), можно получить выражение для спектральной плотности центрированной выходной величины y для случая взаимно независимых воздействий в виде

$$S_y(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + |\Phi_x(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (6.11)$$

Для достаточно редкого на практике случая, когда воздействия x и f коррелированы, выражение для спектральной плотности $S_y(\omega)$ будет иметь вид

$$S_y(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + |\Phi_x(j\omega)|^2 S_x(\omega) + \Phi_f(j\omega)\Phi_x(-j\omega)S_{xf}(\omega) + \Phi_x(j\omega)\Phi_f(-j\omega)S_{fx}(\omega), \quad (6.12)$$

где $S_{xf}(\omega)$, $S_{fx}(\omega)$ – взаимные спектральные плотности задающего воздействия и помехи.

Используя выражение для спектральной плотности выходной величины, определяем дисперсию выходной величины системы согласно формуле (3.7) для каждого конкретного варианта

$$D_y = \sigma_y^2 = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (6.13)$$

Задача синтеза системы в данном случае сводится к коррекции свойств системы, при которой выполняется условие

$$D_y \leq D_{y \text{ доп}}, \quad (6.14)$$

где $D_{y \text{ доп}}$ – предельно допустимое значение дисперсии.

Коррекция свойств системы, в конечном счете, может быть достигнута как путем изменения структуры системы управления или введения в контур системы дополнительных или корректирующих звеньев,

так и путем изменения параметров, настроек отдельных звеньев исходной системы. Очевидно, что в результате любого вида коррекции будет осуществлено целенаправленное изменение частотной характеристики или связанной с ней передаточной функции системы. Теперь можно сформулировать варианты задачи синтеза системы управления.

Частным, но довольно часто встречающимся вариантом является задача синтеза системы управления с жестко заданной структурой, однако имеется возможность варьирования параметрами отдельных элементов, звеньев. На производстве в качестве таких звеньев обычно используются регуляторы, с помощью которых решаются задачи регулирования конкретных технологических параметров. С учетом этого обстоятельства данная частная задача синтеза сводится к определению настроек регулятора, обеспечивающих выполнение условия (6.14) при наличии стационарных случайных воздействий. Количество таких настроек зависит от типа закона регулирования. Так, например, при использовании пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) закона регулирования соответствующая передаточная функция регулятора будет иметь вид

$$W(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right), \quad (6.15)$$

где k_p – коэффициент передачи; T_i – постоянная интегрирования; T_d – время предварения.

Указанные три параметра являются настройками регулятора. В общем случае варьируемые параметры могут быть и в других звеньях системы. Так, например, при установке датчика температуры на объекте в защитной гильзе в зависимости от вида наполнителя (минеральное масло, различные металлические опилки и др.) будет изменяться соответствующая постоянная времени. Или, например, существуют возможности проведения модернизации, переналадки объекта или другого технологического оборудования, позволяющие изменять их параметры. Для аналитического решения такой частной задачи синтеза системы на основании информации о характеристиках случайных воздействий и структуры системы с использованием выражений (6.11)–(6.13) устанавливается зависимость дисперсии выходной величины от варьируемых настроечных параметров системы A_i , например, в виде

$$D_y = F(A_i), \quad i \in I. \quad (6.16)$$

Тогда значения варьируемых параметров A_i , обеспечивающих минимизацию дисперсии выходной величины, находятся из условия равенства нулю частных производных (условия нахождения экстремума функции F)

$$\frac{\partial F(A_i)}{\partial A_i} = 0, \quad i \in I. \quad (6.17)$$

Решая систему уравнений (6.17), определяют искомые значения параметров A_i . Если зависимость (6.16) не удастся получить в явном виде, или, например, она в силу громоздкости и сложности системы аппроксимируется набором различных зависимостей для отдельных диапазонов измерения переменных, то для нахождения минимума дисперсии D_y используются различные итеративные методы поиска экстремума функций. Среди множества таких методов можно выделить следующие, получившие широкое распространение в инженерной практике: метод градиента, метод наискорейшего спуска, метод Гаусса–Зейделя, метод случайного поиска и др. Для эффективного использования данных методов на практике разработаны пакеты прикладных программ для ЭВМ, которые получили распространение и являются доступными широкому кругу пользователей. И, наконец, в лабораторных или производственных условиях при наличии пилотной установки или при возможности проведения экспериментов на работающей системе, отыскание оптимальных значений варьируемых параметров системы управления в реально-возможных ограниченных диапазонах варьирования может быть осуществлено методами пассивного и особенно активного экспериментов. При проведении пассивного эксперимента оптимальные значения настроечных варьируемых параметров A_i синтезируемой системы определяются в результате длительного наблюдения за поведением работающей системы при различных вариантах настройки этих параметров. Затем на основании полученной информации создается математическая модель зависимости вида (6.16) для получения экстремального решения или в простейшем случае – из имеющихся вариантов выбирается лучший, обеспечивающий минимальное значение величины D_y . Очевидно, что точность получаемого решения, степень его приближения к искомой точке экстремума будут зависеть от количества апробированных

вариантов настроек и, в конечном счете, от длительности эксперимента. Наоборот, при проведении активного эксперимента поиск оптимального решения – значений настроечных параметров – осуществляется в результате пошагового, целенаправленного изменения этих параметров с последующим анализом результатов изменения величины D_y , после чего разрабатывается последующая стратегия изменения параметров и так далее, пока не будет найдено решение. Для проведения активного эксперимента предварительно разрабатывается его план, в котором с учетом специфики задачи описываются порядок выполнения шагов, степень дробления параметров и др. Использование методов активного эксперимента позволяет быстрее и эффективнее решать поставленную задачу. Однако в условиях массового производства при использовании высокопроизводительного оборудования такая активная переналадка параметров системы управления, особенно на начальной стадии эксперимента, чревата появлением больших партий брака, ограничивающих применение этого метода на производстве. Подробно методики планирования эксперимента рассмотрены в специальной литературе, например в работе [8].

Другой вариант формулировки задачи синтеза системы обусловлен ситуацией, когда возможности конструирования позволяют варьировать не только параметрами настройки отдельных блоков, но и изменять структуру системы, в частности, за счет введения в контур системы специальных корректирующих звеньев. В этом варианте решение задачи осуществляется через отыскание оптимальной передаточной функции системы, обеспечивающей минимизацию величины дисперсии D_y , с последующим определением ее структуры и вариантов реализации отдельных блоков и звеньев коррекции. Общий план решения такой задачи с использованием частотных характеристик состоит из следующих основных этапов:

- 1) определяются структура и состав неизменяемой или неварьируемой части системы исходя из конкретных условий (технических, производственных и др.);

- 2) определяется частотная характеристика неварьируемой части системы;

- 3) по известным характеристикам воздействий с помощью выражений (6.11)–(6.13) определяется значение дисперсии выходной величины системы D_y ;

4) определяются частотная характеристика варьируемой части системы, обеспечивающая выполнение условия (6.14), и соответствующая ей передаточная функция;

5) выбираются структура и набор технических средств для практической реализации, определенной в п. 4 передаточной функции.

Следует отметить, что одна и та же передаточная функция может быть получена на аппаратном уровне различными вариантами реализации варьируемой части системы. Так, например, желаемая коррекция свойств системы может быть достигнута как путем последовательного включения в контур системы специальных корректирующих звеньев, так и за счет введения локальных корректирующих обратных связей для отдельных элементов системы или за счет использования параллельных корректирующих звеньев. Причем в зависимости от конкретной ситуации каждый из таких вариантов может иметь свои преимущества. Наличие эквивалентности различных вариантов структур коррекции можно проиллюстрировать на примере сравнения параллельной коррекции и коррекции с помощью отрицательной обратной связи, схемы которых приведены на рис. 6.2. На рисунке приняты следующие обозначения: $W_0(p)$ – передаточная функция корректируемого объекта; $W_{к.п}(p)$ – передаточная функция параллельного корректирующего звена; $W_{к.о.с}(p)$ – передаточная функция корректирующего звена в цепи обратной связи.

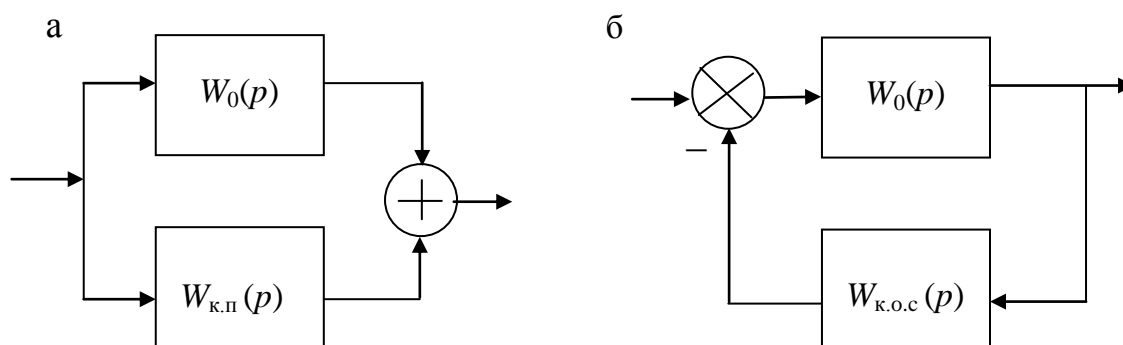


Рис. 6.2. Схемы различных вариантов коррекции:
 а – параллельное включение корректирующего звена; б – коррекция с помощью отрицательной обратной связи

Для установления условий эквивалентности обоих вариантов коррекции приравняем соответствующие передаточные функции скорректированных систем

$$W_0(p) + W_{к.п}(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p) W_{к.о.с}(p)}. \quad (6.18)$$

Последовательно решая уравнение (6.18) относительно $W_{к.п}(p)$ и $W_{к.о.с}(p)$, получаем условия эквивалентности обоих вариантов коррекции относительно друг друга

$$W_{к.п}(p) = -\frac{W_0^2(p) W_{к.о.с}(p)}{1 + W_0(p) W_{к.о.с}(p)}; \quad (6.19)$$

$$W_{к.о.с}(p) = -\frac{W_{к.п}(p)}{W_0^2(p) + W_0(p) W_{к.п}(p)}. \quad (6.20)$$

Выражения (6.19) и (6.20) описывают взаимосвязь между передаточными функциями корректирующих звеньев для каждого варианта коррекции с обеспечением эквивалентности динамических свойств системы. Аналогично можно вывести условия эквивалентности и для других вариантов коррекции.

Анализируя этапы решения задачи синтеза системы с варьируемой структурой, приходим к выводу, что определение частотной характеристики и соответствующей ей передаточной функции варьируемой части может быть осуществлено различными вариантами. При этом отправным моментом такого решения является понятие оптимальной передаточной функции системы, обеспечивающей минимум дисперсии выходной величины D_y . Проиллюстрируем вышеизложенное. Используя правила структурных преобразований, возмущение f (см. рис. 6.1) перенесем на вход системы, т. е. в точку приложения задающего воздействия x_3 . Тогда с учетом некоррелированности воздействий x и f можем считать

$$D_y = D_{y(x)} + D_{y(f)}, \quad (6.21)$$

где $D_{y(x)}$, $D_{y(f)}$ – составляющие дисперсии выходной величины, обусловленные наличием соответствующих воздействий.

Очевидно, что величины $D_{y(x)}$ и $D_{y(f)}$ зависят от вида частотной характеристики системы, а более точно – от ширины полосы пропускания ω_n . Величина D_x уменьшается с увеличением ω_n , так как при этом уменьшается искажение сигнала x_3 при его прохождении через систему, т. е. уменьшается динамическая ошибка. Величина D_f , наоборот, возрастает с увеличением ω_n , так как при этом ослабляется подавление данного возмущения или улучшаются условия его прохождения через систему. Качественный вид зависимостей $D_{y(x)}$ и $D_{y(f)}$ от ширины полосы пропускания ω_n приведен на рис. 6.3. Там же приведен качественный вид зависимости D_y от ω_n в соответствии с выражением (6.21).

Как видно из графиков на рис. 6.3, существует некоторое оптимальное значение ширины полосы пропускания системы $\omega_{n\text{opt}}$, обеспечивающее минимум дисперсии выходной величины D_y . Из приведенных рассуждений и иллюстраций также следует вывод о том, что если случайные воздействия, действующие на систему, являются односторонними (помехи или задающие воздействия), то путем целенаправленной коррекции частотной характеристики или передаточной функции системы можно обеспечить сколь угодно малое значение величины D_y .

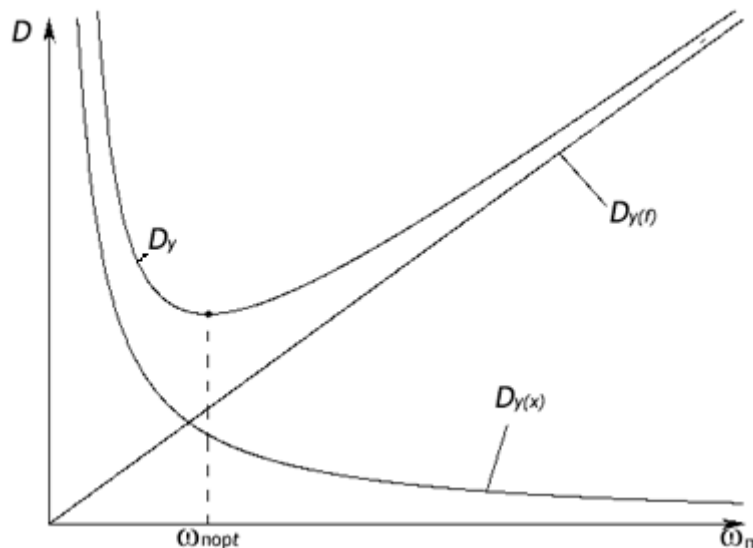


Рис. 6.3. Качественный вид зависимостей дисперсий $D_{y(x)}$, $D_{y(f)}$ и D_y от ширины полосы пропускания системы

Приведенные рассуждения, иллюстрации и выводы вытекают из выражений (6.11)–(6.13) и могут быть доказаны математически строго даже при наличии взаимной корреляции между воздействиями f и x_3 . Из приведенных рассуждений также следует, что задача отыскания оптимальной передаточной функции системы $\Phi(p)_{opt}$ является вариационной задачей. Решение такой задачи в классическом варианте было предложено Н. Винером, который доказал, что искомое решение должно удовлетворять так называемому уравнению Винера–Хопфа. В результате этого решения было определено выражение для оптимальной комплексной передаточной функции системы, обеспечивающей минимум дисперсии, в виде

$$\Phi_{opt}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_0^{\infty} \frac{S_{x(x_3+f)}(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.22)$$

где $\psi(j\omega)$ определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \psi(j\omega)\psi(-j\omega) &= |\psi(j\omega)|^2 = S_{(x_3+f)}(\omega) = \\ &= S_{x_3}(\omega) + S_f(\omega) + S_{x_3f}(\omega) + S_{fx_3}(\omega); \\ S_{x(x_3+f)}(\omega) &= S_{xx_3}(\omega) + S_{xf}(\omega). \end{aligned}$$

Полученное решение (6.22) может быть пролонгировано и для многомерной задачи, когда в качестве возмущений и задающих воздействий рассматриваются векторы \bar{f} и \bar{x}_3 соответствующей размерности.

Упрощение выражения (6.22) возможно для различных частных случаев. Например, в случае следящей системы, когда $y = x_3$ (слежение за входным воздействием), имеем

$$S_{x(x_3+f)}(\omega) = S_x(\omega) + S_{xf}(\omega). \quad (6.23)$$

В случае отсутствия корреляции между x и f , т. е. $S_{xf}(\omega) = 0$, выражение (6.23) еще более упрощается до вида

$$S_{x(x+f)}(\omega) = S_x(\omega). \quad (6.24)$$

В заключение данного подраздела необходимо отметить, что полученные теоретические решения по оптимизации передаточной

функции системы не всегда реализуются на практике. Во-первых, их реализация зачастую ограничивается экономическими или техническими факторами, обусловленными сложностью изготовления отдельных корректирующих звеньев. Во-вторых, при решении задачи синтеза системы разработчикам приходится учитывать и другие требования к ее свойствам, которые частично изложены в подразд. 6.2. Необходимость удовлетворения всем этим требованиям, зачастую противоречивым, может значительно деформировать «идеальный» фильтр. Поэтому на практике используется понятие квазиоптимальной системы как результата творческого компромисса разработчика между всем множеством требований, предъявляемых к системам управления в реальных условиях.

6.4. Синтез робастных систем управления при наличии ограниченной информации о случайных воздействиях

Рассмотренные в предыдущем подразделе методы синтеза оптимальных систем основаны на предположении о наличии характеристик случайных воздействий – спектральных плотностей или корреляционных функций. Однако в реальной ситуации получение такой информации для конструктора-разработчика может оказаться весьма проблематично. Особенно, как это было показано в подразд. 5.2, данная ситуация характерна для многих производств биотехнологической промышленности. Поэтому зачастую синтез систем приходится осуществлять при наличии ограниченной информации о воздействиях, что приводит к получению более «грубых» результатов. При этом информация о воздействиях может быть получена в виде более простых и доступных характеристик – дисперсий воздействия и некоторых его производных. Конечной задачей синтеза, как и в предыдущих случаях, является обеспечение требуемой точности работы системы обычно в виде условия (6.14).

Очевидно, что в идеальном случае, когда имеется вся необходимая информация о случайных воздействиях, задача синтеза системы в области частотных характеристик сводится к определению оптимальной полосы пропускания системы $\omega_{п\ opt}$ (см. рис. 6.3), обеспечивающей минимум величины D_y . При наличии же ограниченной

информации происходит естественное «огрубление» решения, вследствие чего точка $\omega_{п\ opt}$ как бы «размывается» в некоторый допустимый диапазон $\omega_{п\ min} \div \omega_{п\ max}$. Причем нижняя граница $\omega_{п\ min}$ данного диапазона определяется требованиями по ограничению величины дисперсии изменения выходной величины $D_{y(x)}$ в соответствии с изменением задания x_3 , а верхняя граница диапазона $\omega_{п\ max}$ определяется требованиями по ограничению дисперсии погрешности изменения выходной величины $D_{y(f)}$ под действием возмущения f . В случае, когда нескорректированная система имеет относительно «узкую» полосу пропускания, величина $D_{y(x)}$ будет превалировать в общей дисперсии выходной величины D_y , что наглядно проиллюстрировано на рис. 6.3. Поэтому при синтезе таких систем основное внимание следует уделять ограничению величины $D_{y(x)}$. Данная ситуация особенно характерна для систем управления различными инерционными объектами как, например, в биотехнологической, химической и других отраслях промышленности. Многие из промышленных объектов (различные печи, пароварочные камеры, камеры для замораживания и дефростации, пастеризационно-охладительные установки, автоклавы, ректификационные колонны и другие) характеризуются весьма значительными величинами постоянных времени, достигающих десятков минут. Данные свойства и обуславливают существенное ограничение полосы пропускания системы.

В настоящее время на практике наибольшее распространение получили методы синтеза по частотным характеристикам разомкнутой системы – ЛАХ. Поэтому из практических соображений формулирование требований к свойствам создаваемой или желаемой системы управления удобнее осуществлять в виде набора ограничений к этой характеристике и, в частности, в виде задания запретных областей. В свете такой терминологии требование на ограничение величины $D_{y(x)}$ сведется к заданию запретной области в диапазоне низких частот, в которую не должна попадать ЛАХ желаемой системы. Соответственно, требование на ограничение $D_{y(f)}$ сведется к заданию другой запретной области, расположенной в диапазоне более высоких частот. Помимо упомянутых запретных областей при синтезе системы могут задаваться и другие запретные области, соответствующие различным режимам работы и требованиям к свойствам системы. Окончательно запретная область для ЛАХ в таких случаях может

быть получена либо в результате отыскания компромисса между отдельными требованиями к свойствам системы, либо в результате наложения отдельных областей, если это позволяет удовлетворить все исходные требования задачи.

Рассмотрим методики построения запретных областей для ЛАХ исходя из требований ограничения величины $D_{y(x)}$ для различных вариантов наличия ограниченной информации о динамике изменений задающего воздействия x_3 .

В замкнутой системе автоматического регулирования (САР), задачей которой является отслеживание величины $x_3(t)$, ошибка слежения $\Delta(t)$ является динамической ошибкой системы. При этом такая ошибка определяется из выражения

$$\Delta(t) = \frac{1}{1+W(p)} x_3(t), \quad (6.25)$$

где $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы.

Выражение

$$\frac{1}{1+W(p)} = W_{\Delta}(p) \quad (6.26)$$

также называют передаточной функцией «по ошибке».

С учетом указанных обозначений выражение для дисперсии динамической ошибки примет вид

$$D_{\Delta} = \int_0^{\infty} |W_{\Delta}(j\omega)|^2 S_{x_3}(\omega) d\omega. \quad (6.27)$$

Для получения мажорантной оценки величины D_{Δ} осуществим аппроксимацию выражения $|W_{\Delta}(j\omega)|^2$ полиномом N -й степени вида

$$C_{N(\omega)} = C_0 + C_1\omega^2 + \dots + C_N\omega^{2N}, \quad (6.28)$$

удовлетворяющего условию

$$C_{N(\omega)} \geq |W_{\Delta}(j\omega)|^2, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (6.29)$$

Выполнение условия (6.29) возможно обеспечить путем подбора коэффициентов полинома $C_N(\omega)$, так как из определения функции $W_\Delta(p)$ следует, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_\Delta(j\omega)|^2 = 1. \quad (6.30)$$

Очевидно, что коэффициенты C_i ($i = 1, 2, \dots, N$) должны быть вещественными числами. Кроме того, исходя из свойств модуля передаточной функции ($|W(j\omega)| \geq 0$), в отношении коэффициента C_0 должно выполняться условие $C_0 \geq 0$. Здесь следует отметить, что вопросы аппроксимации функций вещественной переменной различными полиномами достаточно хорошо проработаны в математике и имеются различные методы определения коэффициентов C_i ($i \in I$). Используя аппроксимирующий полином (6.28) для выражения (6.27) и с учетом (6.29) можно записать

$$\begin{aligned} D_\Delta &= \int_0^\infty |W_\Delta(j\omega)|^2 S_{x_3}(\omega) d\omega \leq \int_0^\infty (C_0 + C_1\omega^2 + \dots + C_N\omega^{2N}) S_{x_3}(\omega) d\omega = \\ &= C_0 D_0 + C_1 D_1 + \dots + C_N D_N, \end{aligned} \quad (6.31)$$

где D_0, D_1, \dots, D_N – дисперсии задающего воздействия и его производных.

Теперь при наличии информации о дисперсиях воздействия и его производных и предельной величине дисперсии динамической ошибки $D_{\Delta\max}$ можно определить тип передаточных функций путем задания запретных областей для ЛАХ, обеспечивающих выполнение условия (6.31). Рассмотрим методику решения такой задачи. Умножим числитель и знаменатель левой части выражения (6.26) на $W(p)$ и в результате получим

$$W_\Delta(p) = \frac{W(p)}{[1+W(p)]W(p)} = \frac{\Phi(p)}{W(p)}, \quad (6.32)$$

где $\Phi(p)$ – передаточная функция замкнутой системы по выходной величине, $\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}$.

Из условий (6.27), (6.29) и (6.31) можно сформулировать требования к передаточной функции замкнутой системы по ошибке, обеспечивающие выполнение условий по ограничению величины D_Δ , которые в общем виде в комплексном выражении можно записать как

$$|W_\Delta(j\omega)| \leq |W_\Delta(j\omega, \bar{C}, \bar{D})|, \quad (6.33)$$

где \bar{C} – вектор коэффициентов полинома (6.28); \bar{D} – вектор известных величин дисперсий задающего воздействия и его производных.

С учетом выражений (6.32) и (6.33) требования к передаточной функции разомкнутой системы, обеспечивающей требуемое ограничение дисперсии динамической ошибки в комплексном выражении, можно записать в виде неравенства

$$|W(j\omega)| \geq \frac{|\Phi(j\omega)|}{|W_\Delta(j\omega, \bar{C}, \bar{D})|}. \quad (6.34)$$

При синтезе систем по частотным характеристикам весь частотный диапазон разбивают на три области: 1) низкочастотную; 2) среднечастотную; 3) высокочастотную. Известно, что величины ошибок системы определяются поведением ЛАХ разомкнутой системы в области низких и частично средних частот, т. е. в диапазоне частот, лежащих левее частоты среза (напомним, что $L(\omega_{cp}) = 0$). «Поведение» ЛАХ в области высоких частот (правее частоты среза) на точность работы системы существенного влияния не оказывает. В данном случае это утверждение можно проиллюстрировать с помощью выражения (6.34). Действительно, при $\omega \rightarrow \infty |W(j\omega)| \rightarrow 0$, что справедливо для любой инерционной системы и, следовательно, $|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| \approx |W(j\omega)|$. Поэтому с учетом выражения (6.33) неравенство (6.34) выполняется всегда в области высоких частот и, естественно, практически не зависит от вида ЛАХ разомкнутой системы в данной области.

В области низких частот ($\omega \leq \omega_{cp}$) $|\Phi(j\omega)| \approx 1$, тогда неравенство (6.34) аппроксимируется к виду

$$|W(j\omega)| \geq \frac{1}{|W_\Delta(j\omega, \bar{C}, \bar{D})|}. \quad (6.35)$$

Основная неопределенность аппроксимации неравенства (6.34) может иметь место в области средних частот, т. е. в окрестности $\omega_{\text{ср}}$. Это обусловлено тем, что в данной области возможен так называемый «всплеск» АЧХ замкнутой системы, вызванный наличием резонансных свойств. Поэтому наибольшая погрешность асимптотической аппроксимации ЛАХ имеет место именно в области средних частот. Если резонансная частота системы ω_p известна, то исходное требование (6.34) к передаточной функции разомкнутой системы в области средних частот, очевидно, трансформируется к виду

$$|W(j\omega_p)| \geq \frac{M}{|W_{\Delta}(j\omega_p, \bar{C}, \bar{D})|}, \quad (6.36)$$

где M – показатель колебательности системы, $M = \frac{A(\omega_p)}{A(0)}$ (здесь

$A(\omega_p) = |\Phi(j\omega_p)|$, $A(0) = |\Phi(j0)|$ – значения соответствующих амплитуд).

Величина M может задаваться в качестве одной из составляющих исходных данных при синтезе системы. Однако даже при наличии «колебательности» в процессе синтеза это явление в большинстве случаев стараются предельно нивелировать (если не удастся исключить его полностью), стремясь к получению апериодического переходного процесса, так как увеличение колебательности приближает систему к границе устойчивости. Кроме того, существует множество объектов управления, особенно в биотехнологической промышленности, где из технологических требований, условий получения качественной продукции «колебательность» является недопустимой. Поэтому для проведения инженерных расчетов неравенство (6.35) достаточно объективно описывает требования к передаточной функции разомкнутой системы, обеспечивающей ограничение дисперсии динамической ошибки. Условие (6.35) можно проиллюстрировать в виде запретной области для ЛАХ разомкнутой системы. Граница указанной области, очевидно, задается линией

$$L = 20 \lg \frac{1}{|W_{\Delta}(j\omega, \bar{C}, \bar{D})|} = -20 \lg |W(j\omega, \bar{C}, \bar{D})|. \quad (6.37)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Известна только дисперсия задающего воздействия D_0 . Тогда для заданной величины $D_{\Delta \max}$ согласно выражению (6.31) можно записать $D_{\Delta \max} = C_0 D_0$ и, следовательно, $C_0 = \frac{D_{\Delta \max}}{D_0}$ является единственным коэффициентом полинома (6.28). Согласно (6.29), имеем

$$|W_{\Delta}(j\omega)|^2 \leq C_0, \quad \text{или} \quad |W_{\Delta}(j\omega)| \leq \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_0}}. \quad (6.38)$$

Теперь, согласно выражению (6.37), определим границу запретной области для ЛАХ

$$L = -20 \lg \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_0}} = 10 \lg \frac{D_0}{D_{\Delta \max}}. \quad (6.39)$$

Следовательно, в данном случае ЛАХ разомкнутой системы должна располагаться выше линии $10 \lg \frac{D_0}{D_{\Delta \max}}$ во всем диапазоне частот, соответствующих спектральному составу задающего воздействия. Запретная область на рис. 6.4, а находится ниже указанной прямой и заштрихована.

2. Известна только дисперсия первой производной задающего воздействия D_1 . В данном случае можно записать $D_{\Delta \max} = C_1 D_1$ и, следовательно, $C_1 = \frac{D_{\Delta \max}}{D_1}$ является единственным коэффициентом полинома (6.28).

Согласно выражению (6.29), имеем

$$|W_{\Delta}(j\omega)|^2 \leq C_1 \omega^2, \quad \text{или} \quad |W_{\Delta}(j\omega)| \leq \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_1}} \omega. \quad (6.40)$$

Теперь, согласно формуле (6.37), определяем границу запретной области ЛАХ

$$L = -20 \lg \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_1}} \omega = 10 \lg \frac{D_1}{D_{\Delta \max}} - 20 \lg \omega. \quad (6.41)$$

Как видно из выражения (6.41), граница запретной области для ЛАХ представляет собой прямую, в логарифмическом масштабе имеющую наклон -20 дБ/дек и пересекающую ось L при $\omega = 1$ ($\lg \omega = 0$) в точке $10 \lg \frac{D_1}{D_{\Delta \max}}$. При $\omega = \sqrt{\frac{D_1}{D_{\Delta \max}}}$ прямая пересекает ось $\lg \omega$. Запретная область на рис. 6.4, б находится ниже указанной прямой и заштрихована.

3. Известна только дисперсия второй производной задающего воздействия $-D_2$. Рассуждая аналогично изложенному в предыдущем примере, можем записать $D_{\Delta \max} = C_2 D_2$ и, следовательно, $C_2 = \frac{D_{\Delta \max}}{D_2}$.

Далее имеем

$$|W_{\Delta}(j\omega)|^2 \leq C_2 \omega^4, \text{ или } |W_{\Delta}(j\omega)| \leq \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_2}} \omega^2. \quad (6.42)$$

Уравнение границы запретной области будет иметь вид

$$L = -20 \lg \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_2}} \omega^2 = 10 \lg \frac{D_2}{D_{\Delta \max}} - 40 \lg \omega. \quad (6.43)$$

Очевидно, что граница запретной области представляет собой прямую, имеющую наклон -40 дБ/дек и пересекающую ось L в точке $10 \lg \frac{D_2}{D_{\Delta \max}}$. При $\omega = \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_{\Delta \max}}}$ прямая пересекает ось $\lg \omega$ ($L = 0$).

Соответствующая запретная область на рис. 6.4, в находится ниже указанной прямой и также заштрихована.

Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что наличие только одной дисперсии n -й производной задающего воздействия D_n позволяет определить границу запретной области для ЛАХ как прямую, имеющую наклон $-n20$ дБ/дек и пересекающую ось $\lg \omega$

в точке $\omega = 2n \sqrt{\frac{D_n}{D_{\Delta \max}}}$. Очевидно также, что такие запретные области

задают порядок астатизма синтезируемой системы r условием $r \geq n$.

4. Известны дисперсия воздействия D_0 и его первая производная D_1 . В таком случае можем записать

$$\begin{aligned} D_{\Delta \max} &= C_0 D_0 + C_1 D_1; \\ |W_{\Delta}(j\omega)|^2 &\leq C_0 + C_1 \omega^2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Проанализируем правую часть неравенства (6.44). Очевидно, что при малых значениях ω $\left(\omega \leq \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}\right)$ второе слагаемое будет меньше первого и им можно пренебречь. В данном случае условие (6.44) сведется к условию (6.38), т. е. к ситуации, рассмотренной в примере 1. Для этого диапазона частот $\left(0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}\right)$ уравнение границы запретной зоны для ЛАХ будет определяться выражением (6.39). Для остального диапазона частот $\left(\infty \geq \omega \geq \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}\right)$ второе слагаемое будет больше первого, что позволяет пренебречь первым слагаемым, и условие (6.44) сведется к условию (6.40) (см. пример 2), которое определит границу запретной области для ЛАХ в виде выражения (6.41). Очевидно, что искомая граница запретной области будет аппроксимирована двумя асимптотами, сопрягающимися в точке $\omega_c = \sqrt{\frac{C_0}{C_1}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_0}}$. Максимальная погрешность аппроксимации

имеет место в точке сопряжения и будет убывать по мере удаления от нее в обе стороны. Запретная область для ЛАХ на рис. 6.4, г находится ниже ломаной асимптоты и заштрихована.

Рассуждая аналогично, можно определить запретные области и для других возможных сочетаний известных величин дисперсий. Очевидно, что с увеличением числа известных величин дисперсий увеличивается и число членов аппроксимирующего полинома (6.28),

что, в свою очередь, приведет к появлению дополнительных точек сопряжения и сопрягающих частот. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [2].

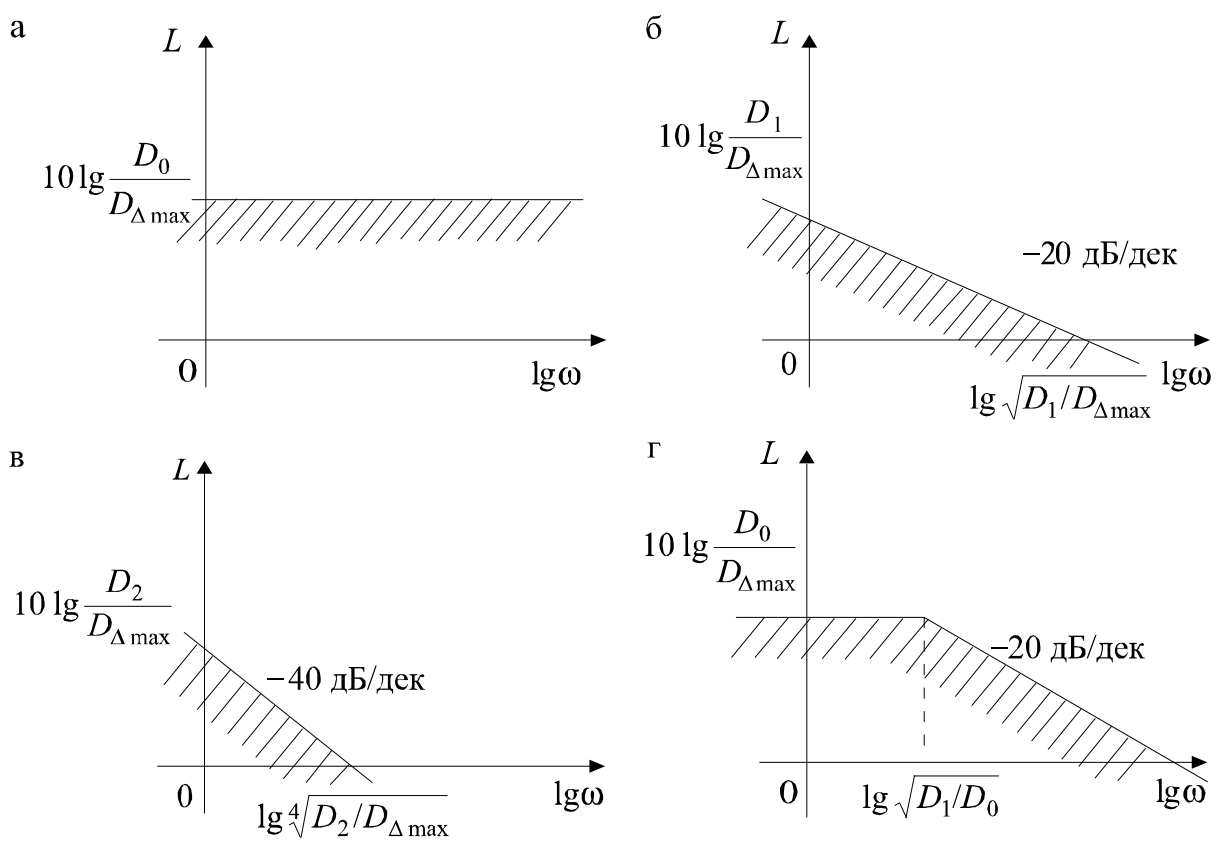


Рис. 6.4. Запретные области для ЛАХ разомкнутой системы:
 а – при известной величине D_0 ; б – при известной величине D_1 ;
 в – при известной величине D_2 ; г – при известной величине D_0 и D_1

Если на систему действует возмущающее воздействие, то согласно выражению (6.21) общая дисперсия выходной величины возрастает на величину дисперсии, обусловленной действием этого возмущения $D_{y(f)}$. Ограничение величины $D_{y(f)}$ можно также задать соответствующей запретной областью для ЛАХ в диапазоне высоких частот.

Однако аналитическое решение такой задачи сопряжено с большим объемом вычислительных работ. Поэтому на практике для учета действия различного рода возмущений (помех) обычно пользуются понятием эквивалентной полосы пропускания системы $\omega_э$, которая определяется из выражения

$$\omega_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega}{\Phi^2(0)}. \quad (6.45)$$

Из выражения (6.45) видно, что понятие величины ω_3 определяется из прямоугольника, стороны которого равны ω_3 и $\Phi^2(0)$, а его площадь равна площади, ограниченной кривой $|\Phi(j\omega)|^2$. Как отмечалось выше, в ряде практических случаев (особенно при наличии инерционных объектов управления) спектральный состав возмущений превышает полосу пропускания системы. Поэтому можно допустить, что в пределах полосы пропускания системы величина $S_f(\omega)$ изменяется незначительно и с достаточной точностью считать ее постоянной и равной значению, которое достигается при $\omega = 0$, т. е. $S(0)$. Другими словами, возмущения представляются в виде так называемого «белого шума». В данном случае оказывается достаточно просто определить величину дисперсии $D_{y(f)}$

$$\begin{aligned} D_{y(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \approx \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S(0) d\omega = \\ &= S(0) \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = S(0) \omega_3. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Для определенности считаем, что $\Phi(0) = 1$. Для удобства определения величины $D_{y(f)}$ по выражению (6.46) на практике пользуются готовыми зависимостями для ω_3 от параметров передаточных функций. Такие зависимости выведены для различных типов звеньев и вариантов систем и приведены в справочной литературе. Однако при необходимости данные зависимости могут быть получены из выражения (6.45).

Рассмотрим примеры.

1. Требуется определить эквивалентную полосу пропускания апериодического звена первого порядка с известными параметрами k

и T . Передаточная функция такого звена имеет вид: $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$
и $W(0) = k$.

Согласно выражению (6.45), имеем

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{W^2(0)} = \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 d\omega}{|T(j\omega) + 1|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|1 + j\omega T|^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\pi}{T}.\end{aligned}$$

2. Определить эквивалентную полосу пропускания замкнутой системы, состоящей из апериодического звена первого порядка, охваченного отрицательной единичной обратной связью при известных параметрах звена k и T .

Передаточная функция такой системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k}{Tp + k + 1} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{T}{k+1}p + 1} = \frac{k_0}{T_0 p + 1},$$

где $k_0 = \frac{k}{k+1}$, $T_0 = \frac{T}{k+1}$ – коэффициент передачи и постоянная времени замкнутой системы, соответственно.

Очевидно, что такая система в динамическом отношении также является апериодическим звеном первого порядка только с измененными параметрами k_0 и T_0 . Поэтому для определения ω_3 можно воспользоваться результатами предыдущего примера, минуя промежуточные расчеты. Окончательно имеем

$$\omega_3 = \frac{\pi}{T_0} = \frac{(k+1)\pi}{T}.$$

Из рассмотренных примеров в частности следует вывод о том, что «охват» статического инерционного звена отрицательной обратной связью через статическое звено (в данном примере с единичным коэффициентом передачи) приводит к увеличению его полосы пропускания и повышению быстродействия.

Задаваясь предельными значениями величины $D_{y(f)}$ и зная характеристику возмущения в виде $S(0)$, нетрудно рассчитать значение величины ω_3 для замкнутой системы из выражения

$$\omega_3 = \frac{D_{y(f)}}{S(0)}. \quad (6.47)$$

Теперь, используя известные зависимости величины ω_3 от параметров системы и зная передаточную функцию разомкнутой системы, представляется возможным получить оценку верхней границы разрешенной области для ЛАХ разомкнутой системы.

Если же в силу специфических особенностей конкретного возмущения его спектральную плотность $S_f(\omega)$ нельзя считать постоянной в пределах полосы пропускания системы, то синтез системы можно осуществить методом последовательных приближений. В этом случае на каждом промежуточном шаге определяют вариант системы в виде соответствующей ЛАХ, которая строится с использованием запретных областей, обеспечивающих ограничение динамической ошибки, затем определяется величина $D_{y(f)}$ и проверяется выполнение исходного требования по обеспечению точности ее работы в виде условия (6.14). После соответствующих уточнений, обычно в виде оценки верхней границы разрешенной области для ЛАХ разомкнутой системы, приступают к следующему шагу итерации и т. д.

При наличии разрешенной области для ЛАХ разомкнутой системы дальнейший синтез сводится к построению ЛАХ желаемой системы $L_{ж}$, обеспечивающей оптимизацию выбранного критерия. Если, например, в качестве критерия оптимизации выбран функционал вида (6.10), то очевидно, что задача оптимизации заключается в нахождении его минимума. Далее на этом же графике строится ЛАХ располагаемой системы L_p . Чаще всего в качестве располагаемой системы рассматривается «неварируемая» часть системы, не содержащая корректирующих звеньев (объект управления, первичные преобразователи,

исполнительные устройства и др.). После чего определяется ЛАХ последовательно корректирующего звена $L_{п.к}$ в виде

$$L_{п.к} = L_{ж} - L_p. \quad (6.48)$$

Выражение (6.48) вытекает из того, что при последовательной коррекции корректирующее звено с передаточной функцией $W_{п.к}(p)$ включается последовательно в контур располагаемой системы с передаточной функцией $W_p(p)$, в результате чего система приобретает требуемый набор желаемых свойств, соответствующих передаточной функции $W_{ж}(p)$, т. е.

$$W_{ж}(p) = W_p(p)W_{п.к}(p). \quad (6.49)$$

Затем по полученной $L_{п.к}$ определяется искомая передаточная функция последовательного корректирующего устройства $W_{п.к}(p)$. Выражение для $W_{п.к}(p)$ может быть также получено из выражения (6.49), если определена передаточная функция желаемой системы по виду графика $L_{ж}$

$$W_{п.к}(p) = \frac{W_{ж}(p)}{W_p(p)}. \quad (6.50)$$

Далее решается вопрос о технической реализации конкретного варианта корректирующего звена. Для этого, исходя из специфики работы системы, определяется наиболее предпочтительный вариант коррекции (последовательная, параллельная, обратная связь). После чего осуществляется определение соответствующей передаточной функции выбранного типа корректирующего звена из условия эквивалентности последовательному корректирующему звену с ранее определенной передаточной функцией $W_{п.к}(p)$. Пример, иллюстрирующий возможность такого пересчета, приведен в подразд. 6.3.

7. ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНТРОПИЙНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

7.1. Основные положения

Наличие случайных воздействий, действующих на объект или систему управления, приводит к дестабилизации технологического процесса и, как следствие, к появлению случайной составляющей в его выходных параметрах $y_i(t)$, $i \in I$, т. е. к нестабильности характеристик выпускаемой продукции. Ранее для оценки нестабильности параметра $y(t)$ использовалась величина дисперсии D_y . Качество управления в динамических режимах также оценивалось по величине D_y : чем меньше величина D_y , тем совершеннее система управления, и наоборот. Случайную функцию времени $y(t)$ можно описать количественной характеристикой ее состояния неопределенности. Такой характеристикой может являться величина энтропии $H(t)$. Энтропия непрерывного сигнала определяется из выражения

$$H(y) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \log_a p(y) dy, \quad (7.1)$$

где $p(y)$ – плотность распределения вероятности значений величины y .

Если объект или технологический процесс характеризуется дискретным выходом, то функция $y(t)$ также будет дискретной, и ее энтропия определяется из выражения

$$H(y) = - \sum_{(i)} P_i \log_a P_i. \quad (7.2)$$

Основание логарифмов a в выражениях (7.1) и (7.2) может быть любым. Значение величины a выбирается исходя из конкретики решаемой задачи и определяет численное значение единицы энтропии. Для проведения аналитических исследований удобнее использовать натуральные логарифмы ($a = e$). В этом случае энтропия сигнала $y(t)$ получается в так называемых натуральных единицах, которые имеют обозначение – нит. Для анализа объектов, сигналы которых представлены в двоичных кодах, удобнее использовать двоичные

логарифмы ($a = 2$), и соответственно энтропия будет выражаться в двоичных единицах, обозначаемых – бит. Для анализа объектов, сигналы которых представляются в десятичном или двоично-десятичном кодах, удобнее использовать десятичные логарифмы ($a = 10$), и энтропия будет выражаться в десятичных единицах, обозначаемых – дит. Соотношение между этими единицами вытекает из определения соответствующих логарифмов и имеет следующий вид: 1 нит = 1,45 бит = 0,43 дит; 1 бит = 0,69 нит = 0,3 дит; 1 дит = 2,3 нит = 3,3 бит.

Из определения энтропии (выражения (7.1) и (7.2)) следует вывод о том, что энтропия постоянной величины равна нулю.

Понятие вероятностной энтропии было введено К. Шенноном. Оно играет важную роль в теории информации, в которой количество информации I , полученной в результате поступления какого-либо сигнала, сообщения или измерения, определяется как разность энтропий до получения сигнала – $H(y)$ (априорная энтропия) и после получения сигнала о состоянии объекта y_0 – $H(y/y_0)$ (так называемая условная или апостериорная энтропия), т. е.

$$I = H(y) - H(y / y_0). \quad (7.3)$$

Другими словами, количество информации оценивается по величине уменьшения неопределенности состояния объекта после прихода сообщения, например, в виде сигнала y_0 . Как следует из определения (7.3), количество информации измеряется в тех же единицах, что и энтропия. Очевидно также, что

$$I \geq 0. \quad (7.4)$$

Знак равенства в выражении (7.4) имеет место только тогда, когда сигнал или сообщение y_0 не несет в себе новой информации о состоянии объекта, т. е. $H(y/y_0) = H(y)$.

Различные варианты информационных технологий получают все большее распространение в теории и практике управления. Информация по использованию таких технологий в биотехнологической промышленности приведена, например, в работе [17].

7.2. Исследование эффективности работы системы управления с использованием энтропийных оценок параметров

Энтропийный подход к оценке состояния объектов по соответствующим параметрам позволяет оценить эффективность работы системы управления. Рассмотрим методику проведения таких исследований на конкретном примере. Пусть имеется разомкнутая система управления, схема которой приведена на рис. 7.1. Устройство управления (УУ) выдает дискретные управляющие воздействия X_i по соответствующему каналу управления x на объект управления O , состояние которого оценивается по выходной координате y .

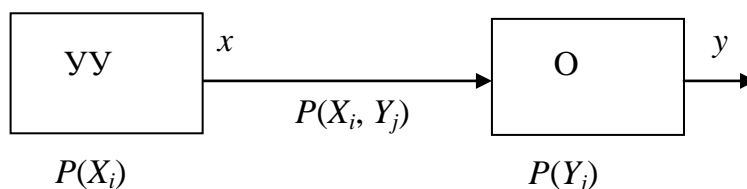


Рис. 7.1. Структурная схема системы управления

Устройство управления выдает управляющие воздействия, например, на основании изменения каких-либо свойств окружающей среды (температуры, давления и др.) либо по временной программе. В любом случае в рамках рассматриваемой структуры каждое управляющее воздействие X_i является случайной величиной, вероятность появления которой известна и равна $P(X_i)$. Аналогично отклик объекта Y_j на такие воздействия является случайной величиной, вероятность ее появления известна и равна $P(Y_j)$. Несовпадение индексов величин воздействий и откликов (i и j) объясняется тем, что система работает при наличии случайных помех (возмущений), а это может, например, привести к «ложному» срабатыванию исполнительного устройства на объекте вследствие «всплеска» напряжения в линии связи, которое может быть обусловлено различными причинами (наводки от электромагнитных помех и др.). Кроме того, может иметь место «непрохождение» управляющего воздействия x на объект в силу различных возмущений (кратковременное замыкание или разрыв линии связи, пробой, разовое несрабатывание исполнительного устройства и др.).

Считаем также, что известна вероятность совместного проявления величин X_i и Y_j — $P(X_i, Y_j)$. Требуется оценить степень неопределенности реакции объекта управления по координате y при известном управляющем воздействии x , т. е. оценить эффективность управления.

Первоначально необходимо оценить неопределенности состояний устройства управления и объекта, энтропии которых определяются согласно выражению (7.2)

$$H(x) = -\sum_{(i)} P(X_i) \ln P(X_i); \quad (7.5)$$

$$H(y) = -\sum_{(i)} P(Y_i) \ln P(Y_i). \quad (7.6)$$

Далее необходимо оценить неопределенность состояния всей системы, энтропия которой определяется из выражения

$$H(x, y) = -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i, Y_j). \quad (7.7)$$

В частном случае, когда состояние объекта не зависит от воздействий устройства управления (потеряна управляемость объекта, например, вследствие разрушения канала управления: обрыв линии связи, выход из строя исполнительного устройства и др.), величины X_i и Y_j оказываются взаимно независимыми и вероятность совместного проявления этих величин равна произведению вероятностей их появления, т. е.

$$P(X_i, Y_j) = P(X_i)P(Y_j). \quad (7.8)$$

Тогда для данного частного случая выражение (7.7) с учетом (7.8) примет следующий вид:

$$H(x, y) = -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i)P(Y_j) \ln [P(X_i)P(Y_j)] =$$

$$\begin{aligned}
= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i) P(Y_j) [\ln P(X_i) + \ln P(Y_j)] &= -\sum_{(i)} P(X_i) \ln P(X_i) \sum_{(j)} P(Y_j) - \\
&- \sum_{(j)} P(Y_j) \ln P(Y_j) \sum_{(i)} P(X_i) = H(x) + H(y). \quad (7.9)
\end{aligned}$$

Выражение (7.9) позволяет сделать вывод о том, что в данном случае энтропия всей системы равна сумме энтропий объекта и устройства управления. Очевидно также, что если величины X_i и Y_j хоть как-то взаимосвязаны (т. е. имеет место частичная управляемость объекта), выражение (7.8) будет неверно и, следовательно, вместо равенства (7.9) будет иметь место следующее неравенство:

$$H(x, y) < H(x) + H(y). \quad (7.10)$$

Из изложенного выше можно сделать вывод, что разность между правой и левой частями неравенства (7.10) является информационной оценкой, мерой эффективности управления объектом. Она будет равна

$$I = H(x) + H(y) - H(x, y). \quad (7.11)$$

Другими словами, эффективность управления объектом может быть оценена количеством информации, появляющейся в результате уменьшения энтропии системы с полностью потерянными управлением до энтропии, соответствующей установленному уровню управляемости.

Для получения оценки энтропии системы при наличии связи между величинами X_i и Y_j необходимо выразить вероятность $P(X_i, Y_j)$ через условные вероятности в виде

$$P(X_i, Y_j) = P(X_i) P(Y_j/X_i) \quad (7.12)$$

$$P(X_i, Y_j) = P(Y_j) P(X_i/Y_j), \quad (7.13)$$

где $P(Y_j/X_i)$ и $P(X_i/Y_j)$ – условные вероятности появления величин Y_j и X_i при условии появления величин X_i и Y_j , соответственно.

Теперь условная энтропия объекта управления по координате y

при наличии управляющего воздействия может быть определена из выражения

$$H(Y/X_i) = -\sum_{(j)} P(Y_j/X_i) \ln P(Y_j/X_i). \quad (7.14)$$

Обобщенная оценка степени неопределенности состояния объекта при наличии возможных вариантов управляющих воздействий $X_i, i \in I$ может быть представлена как математическое ожидание соответствующих вариантов величин $H(y/X_i)$, определяемых из выражения (7.14), т. е. обобщенно условной энтропией

$$H(y/x) = \sum_{(i)} P(X_i) H(y/X_i) = -\sum_{(i)} P(X_i) \sum_{(j)} P(Y_j/X_i) \ln P(Y_j/X_i). \quad (7.15)$$

Из выражения (7.12) следует, что

$$P(Y_j/X_i) = \frac{P(X_i, Y_j)}{P(X_i)}, \quad (7.16)$$

и, подставляя выражение (7.16) в формулу (7.15), получаем

$$\begin{aligned} H(y/x) &= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i, Y_j) + \sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i) = \\ &= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i, Y_j) + \sum_{(i)} P(X_i) \ln P(X_i) = \\ &= H(x, y) - H(x). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Преобразовав выражение (7.17) относительно $H(x, y)$, окончательно имеем

$$H(x, y) = H(x) + H(y/x). \quad (7.18)$$

Полученный результат (7.18) можно трактовать следующим образом. Неопределенность в работе системы управления (в смысле энтропийной оценки) определяется суммой энтропий устройства управления и условной энтропии объекта управления при наличии управляющего воздействия. Физический смысл условной энтро-

пии $H(y/x)$ объясняется неопределенностью реакции объекта на конкретное воздействие устройства управления вследствие разного рода помех, возмущений и нарушений в работе канала управления (линия связи, исполнительные устройства и др.), а также в работе самого объекта. В терминах информационной теории такое явление называется неоднозначностью приемника. В идеальной ситуации, когда отсутствуют возмущения и помехи в канале управления и в объекте (т. е. реакция объекта на управляющее воздействие однозначна), $H(y/x) = 0$. В этом случае энтропия всей системы согласно выражению (7.18) определяется только энтропией устройства управления.

Используя аналогичный подход и исходные данные, можно также оценить неопределенность в работе устройства управления на основании информации о состоянии объекта. Рассмотренная методика исследования с использованием энтропийных оценок применяется на практике для оценки эффективности управления, а также для сравнительной характеристики каналов связи, управления и др.

Величина энтропии зависит только от закона распределения параметра и характеризует состояние его неопределенности с точки зрения проявления дестабилизационных свойств этого закона. Такая величина является приемлемой и объективной для предсказуемости появления тех или иных значений параметров без учета характеристик их разброса, а также базовых значений, на фоне которых рассматриваются соответствующие изменения. Очевидно, что увеличение энтропии характеризует возрастание уровня состояния неопределенности параметра, и наоборот.

Предложенный К. Шенноном подход получил распространение для решения широкого круга задач кодирования и декодирования сигналов, оценки эффективности работы источников, приемников, каналов передачи информации и т. п. То есть таких задач, где решение базируется на оценках предсказуемости наступления тех или иных событий, например, появления конкретных сигналов. В данной перечень также попадает ряд задач мониторинга технических, социальных и других систем, для которых указанный подход является приемлемым.

Использование понятия энтропии в «классическом» виде для исследования состояния неопределенности различных объектов на практике ограничено причинами, рассмотренными ниже.

Первая причина состоит в том, что для вычисления энтропии

необходимо знание закона распределения параметра $p(x)$ или в случае, когда параметр принимает дискретные значения X_i -величин вероятностей $P(X_i)$, $i \in I$. Если вид закона априори неизвестен, то получение необходимой информации в практических ситуациях зачастую возможно только на основе экспериментальных данных и связано с необходимостью обработки больших объемов наблюдений. Для получения каждой такой выборки требуется проведение значительных объемов измерений. Проведение измерений ряда параметров, например, характеризующих состав и свойства различных веществ, материалов, продуктов и другого, может оказаться дорогостоящим. (Это может быть обусловлено, например, необходимостью использования сложной и уникальной аппаратуры, дорогих реактивов, вспомогательных материалов, оборудования и привлечения квалифицированного персонала.) Поэтому перспектива выбора энтропии для проведения исследований в таких ситуациях ограничивается экономическими соображениями. Априорная аппроксимация функции $p(x)$ каким-либо одним законом распределения с заданными параметрами может существенно исказить получаемые оценки и привести к ошибочным выводам или принятию решений. При переходе к задаче большей размерности ситуация еще более усугубляется. Указанное обстоятельство и явилось одним из основных препятствий по внедрению такого подхода на практике.

Вторая причина заключается в том, что в величине энтропии не учтены составляющие, характеризующие разброс параметров и их базовые значения, на фоне которых рассматривается состояние неопределенности. Так, например, если рассматривать энтропию состояния двухпозиционного триггера, сигнал которого может принимать только два значения (0 и U) с равными вероятностями $P(0) = P(U) = 0,5$, то согласно (7.2) получим $H = 1$ (бит). Такая характеристика состояния неопределенности инвариантна к диапазону изменения параметра, величине его действующего значения и другому, что снижает ее информативность.

Многообразие и распространенность задач проведения исследований различных объектов и процессов и организации управления ими в условиях неопределенности порождает необходимость поиска соответствующих подходов. Значимость этой проблемы признана во всех развитых странах мира, причем ее актуальность непрерывно возрастает с повышением требований к интеллектуализации и каче-

ству проводимых исследований, прогнозов, организации адаптивного управления. Востребованными и продуктивными являются, в частности, приведенные ниже методы и подходы.

1. Классические методы спектрального и корреляционного анализа, основанные на рассмотрении функций спектральной плотности $S_x(\omega)$ и автокорреляционной функции $R_x(\tau)$ для анализируемой случайной функции.

2. Методы интервальных оценок, основанные на использовании понятий доверительных вероятностей и доверительных интервалов.

3. Методы статистического моделирования и стохастической аппроксимации.

4. Методы, основанные на использовании теории эллиптического оценивания, позволяющие получать гарантированные оценки в целом.

5. Методы теории нечетких или размытых множеств, основанные на использовании так называемых функций принадлежности для описания случайных явлений (*fuzzy logic*).

6. Методы робастного оценивания, основанные на применении различных подходов: на использовании статистических характеристик, на основе теорий чувствительности, на основе теории инвариантности и др.

7. Методы, основанные на использовании экспертных систем с привлечением соответствующих баз знаний (*knowledge based systems*).

8. Методы и технологии искусственных нейронных сетей (*artificial neural networks*).

9. Методы и технологии эволюционного моделирования, основанные на синтезе процессов естественной эволюции системы по ожидаемым сценариям с помощью ЭВМ.

10. Методы когнитивных информационных технологий, в основе которых используются различные процедуры отображения объемных и многомерных информационных массивов в образные когнитивные представления. Эти образы обычно создаются с использованием компьютерной графики, удобны для восприятия и принятия решений в трудно формализуемых ситуациях.

11. Байесовские интеллектуальные технологии (БИТ) и сети.

В широком понимании БИТ – это совокупность методов анализа объектов различной природы на основе статистических процедур исследования априорных и апостериорных данных. Байесовские сети являются одной из моделей «баз знаний» на основе вероятностных характеристик.

12. Методы теории энтропийных потенциалов (ТЭП), основанные на оценивании состояний неопределенности систем по величинам энтропийных потенциалов. Данные оценки являются унифицированными, объективными и удобно определяемыми. Кроме того, ТЭП и ее методы не являются «изолированными», они могут использоваться в качестве «инструментов» при реализации большинства вышеупомянутых подходов и технологий исследований. Теория имеет перспективы развития и применения.

Каждый из методов и подходов имеет свои достоинства, недостатки, предпочтительные области применения.

Ниже излагаются суть, основные положения ТЭП, иллюстрируются ее возможности и перспективы применения в теории и на практике для решения широкого круга задач мониторинга и управления.

8. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

8.1. Основные понятия и определения

Теория энтропийных потенциалов (ТЭП) является дальнейшим развитием энтропийного подхода к описанию состояний систем различной природы [18–21].

Базовая идея ТЭП состоит в «уходе» от величины энтропии к другой величине, с ней связанной. Эта величина наряду со свойствами закона распределения параметра должна прямо или косвенно выражаться через набор характеристик, описывающих и другие свойства его состояния неопределенности. Причем такие характеристики должны поддаваться определению при наличии ограниченных объемов исходных данных. Очевидно, что среди них должны быть величины, характеризующие разброс параметра относительно его центра или средневзвешенного значения, а также реальный диапазон изменения. Таким образом, была поставлена задача интеграции и «расширения» возможностей использования свойств энтропии в составе группы этих характеристик для описания состояния неопределенности параметра.

Решение поставленной задачи предлагается осуществить на основе базовых понятий энтропийного потенциала (ЭП), комплексного ЭП и набора многомерных комплексных ЭП. С использованием созданной базы был разработан ряд вспомогательных понятий, позволяющих упростить процедуры решения ряда задач.

Понятие ЭП параметра является одним из основополагающих. Оно вводится с помощью следующего определения.

Определение 1. Энтропийным потенциалом Δ_e параметра x называется половина диапазона изменения ограниченного распределения, имеющего такую же энтропию $H(x)$, что и закон распределения данного параметра.

Как следует из определения, в качестве базы для нахождения величины ЭП должно быть выбрано распределение, имеющее ограниченный диапазон изменения, равный $[-\Delta_e, \Delta_e]$, т. е.

$$x \in [-\Delta_e, \Delta_e]. \quad (8.1)$$

В данном случае соответствующая плотность распределения вероятностей будет зависеть от величины Δ_e , т. е.

$$p(x) = p(x, \Delta_e). \quad (8.2)$$

В качестве $p(x)$ целесообразно использовать функцию, симметричную относительно центра диапазона $[-\Delta_e, \Delta_e]$. Величина энтропии базового распределения согласно выражению (7.1) также будет зависеть от величины Δ_e в соответствии с формулой (8.2). Приравнявая энтропию параметра $H(x)$ с произвольным законом распределения энтропии базового распределения с ограниченным диапазоном изменения параметра $H(x, \Delta_e)$, получим

$$H(x) = H(x, \Delta_e). \quad (8.3)$$

Решая уравнение (8.3) относительно Δ_e , получим выражение для нахождения величины ЭП в виде

$$\Delta_e = F\{H(x)\}. \quad (8.4)$$

Очевидно, что величина Δ_e будет зависеть от вида выбранного базового закона распределения с ограниченным диапазоном изменения параметра. Например, могут быть использованы некоторые из типовых законов. Рассмотрим частные варианты реализации изложенного подхода.

1. Найдем выражение для величины ЭП Δ_{e1} на базе закона равномерной плотности $(p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_e} & \text{при } |x| \leq \Delta_e; \\ 0 & \text{при } |x| > \Delta_e. \end{cases})$. Приравнявая энтро-

пию параметра с произвольным законом распределения $H(x)$ энтропии параметра, распределенного по закону равномерной плотности в диапазоне $x \in [-\Delta_{e1}, \Delta_{e1}]$, получим

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Delta_{e1}} \ln \frac{1}{2\Delta_{e1}} dx = - \int_{-\Delta_{e1}}^{\Delta_{e1}} \frac{1}{2\Delta_{e1}} \ln \frac{1}{2\Delta_{e1}} dx = \ln 2\Delta_{e1}. \quad (8.5)$$

Откуда получаем выражение для величины Δ_{e1} в виде (8.4)

$$\Delta_{e1} = \frac{1}{2} e^{H(x)}. \quad (8.6)$$

2. По аналогии найдем выражение для величины ЭП Δ_{e2} на базе треугольного закона распределения или распределения Симпсона

$$\text{на } (p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > \Delta_e; \\ \frac{\Delta_e - |x|}{\Delta_e^2} & \text{при } |x| \leq \Delta_e. \end{cases}):$$

$$\begin{aligned} H(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{e2} - |x|}{\Delta_{e2}^2} \ln \frac{\Delta_{e2} - |x|}{\Delta_{e2}^2} dx = -2 \int_0^{\Delta_{e2}} \frac{\Delta_{e2} - x}{\Delta_{e2}^2} \ln \frac{\Delta_{e2} - x}{\Delta_{e2}^2} dx = \\ &= \ln \Delta_{e2} + \frac{1}{2} = \ln \Delta_{e2} \sqrt{e}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Откуда также получаем искомое выражение для величины Δ_{e2}

$$\Delta_{e2} = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{H(x)}. \quad (8.8)$$

3. Рассуждая аналогично, записав выражение для $H(x)$ в соответствии с формулой (7.1) и выполнив промежуточные выкладки и преобразования, найдем выражение для величины ЭП Δ_{e3} на базе арксинусоидального закона распределения. В результате

$$H(x) = \ln \frac{\pi \Delta_{e3}}{2}. \quad (8.9)$$

Откуда и получаем выражение для величины Δ_{e3}

$$\Delta_{e3} = \frac{2}{\pi} e^{H(x)}. \quad (8.10)$$

И так далее, по аналогии, можно получить выражения для величин ЭП на базах других законов распределения с ограниченными

диапазонами изменения параметров для параметра с произвольным законом распределения в виде выражения (8.4).

Таким образом, используя введенное понятие ЭП, представляется возможным осуществить «унификацию» состояний неопределенности параметров на базе конкретного закона распределения.

При необходимости переход от одной базовой величины ЭП(Δ_{ei}) к другой (Δ_{ej}) может быть осуществлен с помощью коэффициентов перехода $K_{i,j}$

$$K_{i,j} = \frac{\Delta_{ej}}{\Delta_{ei}}, \quad (i \in I; j \in J). \quad (8.11)$$

Так, например, $\Delta_{e2} = \Delta_{e1} K_{1,2}$, где $K_{1,2} = \frac{\Delta_{e2}}{\Delta_{e1}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$. Величина коэффициента перехода в «обратном» направлении от Δ_{ej} к Δ_{ei} $K_{j,i} = \frac{1}{K_{i,j}}$, т. е. $K_{2,1} = \frac{\sqrt{e}}{2} \approx 0,824$. Значения величин коэффициентов

перехода для используемых n величин ЭП могут быть вычислены заранее и табулированы. В этом случае таблица будет представлять собой квадратную матрицу переходов $K = \|K_{i,j}\|$ ($i \in I; j \in J$) размерностью n с элементами главной диагонали, равными единице. В табл. 8.1 приведены выражения и значения коэффициентов перехода для трех величин ЭП, определенных выше: Δ_{e1} , Δ_{e2} , Δ_{e3} .

Таблица 8.1

Коэффициенты перехода для трех базовых значений величин ЭП

Исходный ЭП Δ_{ei}	Конечный ЭП Δ_{ej}		
	Δ_{e1}	Δ_{e2}	Δ_{e3}
Δ_{e1}	$K_{1,1} = 1$	$K_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$	$K_{1,3} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27$
Δ_{e2}	$K_{2,1} = \frac{\sqrt{e}}{2} \approx 0,824$	$K_{2,2} = 1$	$K_{2,3} = \frac{2\sqrt{e}}{\pi} \approx 1,05$
Δ_{e3}	$K_{3,1} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$	$K_{3,2} = \frac{\pi}{2\sqrt{e}} \approx 0,953$	$K_{3,3} = 1$

Для проведения исследований и сравнения получаемых результатов необходима конкретизация в выборе базового закона распределения и соответствующей величины ЭП. Выбор базового закона распределения должен осуществляться исходя из специфики рассматриваемой задачи, физических особенностей явлений, определяющих формирование параметров, и др. В дальнейшем, если не сделано специальной оговорки, будем полагать, что величина ЭП определяется на базе закона равномерной плотности в соответствии с выражением (8.6), и обозначать ее $\Delta_e = \Delta_{e1}$.

Возрастание величины ЭП свидетельствует о повышении уровня состояния неопределенности параметра и наоборот. Доказательство данного утверждения оформим в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Возрастание величины ЭП соответствует, в энтропийном смысле, повышению уровня состояния неопределенности и наоборот.

Доказательство. Выражение (8.6), описывающее взаимосвязь величин ЭП Δ_e и энтропии $H(x)$, представляет собой показательную функцию, которая является возрастающей, т. е.

$$\forall H(x)\{H_1(x) > H_2(x)\} \rightarrow \Delta_e\{H_1(x)\} > \Delta_e\{H_2(x)\}, \quad (8.12)$$

что и доказывает высказанное утверждение для величины Δ_e .

Распространение свойства (8.12) на другие величины ЭП Δ_{ej} ($j \in J$) осуществим следующим образом. Из определения величины ЭП (определение 1) следует, что $\Delta_{ej} > 0$. Поскольку величина $K_{1j} = \Delta_{ej}/\Delta_e$, следовательно, $K_{1j} > 0$. Тогда все величины ЭП Δ_{ej} ($j \in J$) будут являться положительными масштабными изображениями величины Δ_e . Их взаимосвязь с величиной энтропии как аргумента также будет описываться возрастающей показательной функцией. Отсюда получаем

$$\forall H(x)\{H_1(x) > H_2(x)\} \rightarrow \Delta_{ej}\{H_1(x)\} > \Delta_{ej}\{H_2(x)\}, \quad (j \in J). \quad (8.13)$$

Что и требовалось доказать.

Величина ЭП, согласно определению, имеет размерность рассматриваемого параметра. Поэтому для каждого конкретного закона распределения ее можно выразить как масштабное изображение вели-

чины среднего квадратического отклонения (СКО) – σ , имеющей такую же размерность. Соответствующий коэффициент называется энтропийным коэффициентом и обозначается $K_e = K_{e1}$. Отсюда следует

$$\Delta_e = K_e \sigma. \quad (8.14)$$

Выражение (8.14) позволяет выразить состояние неопределенности параметра через характеристику его рассеяния σ и коэффициент K_e , характеризующий дестабилизационные свойства его закона распределения. Состоятельность такого представления подтверждается тем, что для многих типовых законов распределения, имеющих аналитическое описание плотностей вероятностей, указанная зависимость (8.14) получается в явном виде при определении величины Δ_e через базовое выражение (8.6). Из указанных зависимостей однозначно определяются величины энтропийных коэффициентов как сомножителей для величин СКО. В случаях, когда получение аналитического выражения величины ЭП не представляется возможным (например, когда определения осуществляются на основе ограниченной выборки по результатам эксперимента), значения величин K_e могут быть вычислены на основании зависимостей (8.6), (8.14) с использованием (7.1) и (7.2) из выражения

$$K_e = \frac{\Delta_e}{\sigma} = \frac{e^{H(x)}}{2\sigma}. \quad (8.15)$$

Следует отметить, что помимо выражения (8.14) величину ЭП можно выразить и через какие-либо другие характеристики распределения. Например, ее можно представить как масштабное изображение половины величины размаха распределения a в виде $\Delta_e = K_e(a)$, где $K_e(a)$ – энтропийный коэффициент, «привязанный» к размаху выборки. Причем для ряда типовых «классических» законов распределения между величинами a и σ существует аналитическая зависимость. В таких случаях величины $K_e(a)$ и K_e также будут взаимосвязаны. Однако для большинства реальных законов распределений данной зависимости не существует или она проявляется в «размытом» или «нечетком» виде. В дальнейшем с целью устранения неоднозначностей при проведении исследований и трактовки получаемых

результатов будем пользоваться определением энтропийного коэффициента, «привязанного» к величине СКО, т. е. из выражений (8.14) и (8.15). Целесообразность такого выбора обосновывается тем, что величина σ , в общем случае, при исследовании конкретной выборки является более объективной и «представительной» характеристикой рассеяния параметра, чем величина размаха.

Из выражения (8.15) видно, что величина K_e определяется энтропией параметра, а следовательно, и его законом распределения. Известно, что при одинаковой величине дисперсии или СКО максимальной энтропией обладает нормальный закон распределения. Следовательно, нормальному закону соответствует максимально возможное значение величины $K_e = K_{e(\max)}$. Определим это значение. Энтропия случайной величины x , распределенной по нормальному закону с плотностью вероятности $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, согласно формуле (7.1) будет равна

$$\begin{aligned} H(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left(\ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = \\ &= \ln \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} = \\ &= \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \ln \sqrt{e} = \ln \sigma\sqrt{2\pi e} . \end{aligned}$$

В проведенных преобразованиях использованы свойства плотности вероятности $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ и определение дисперсии $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$.

Далее в соответствии с формулой (8.6) получаем $\Delta_e = \frac{1}{2} e^{H(x)} = \sigma \frac{\sqrt{2\pi e}}{2}$. Откуда, согласно выражению (8.15), найдем $K_{e(\max)} = \frac{\sqrt{2\pi e}}{2} \approx 2,07$.

Таким образом, диапазон изменения величины энтропийного коэффициента находится в пределах $2,07 \geq K_e > 0$. (Для реальных, практических ситуаций этот диапазон является более узким: $2,07 \geq K_e \geq 1$.) Величина энтропийного коэффициента описывает мультипликативную «составляющую неопределенности», определяемую видом закона распределения: чем больше значение K_e , тем менее предсказуемо проявление различных значений параметра, и наоборот. Отсюда видно, что использование нормального закона для аппроксимации реальных законов распределения параметров является грубой мажорантной оценкой и может существенно исказить картину состояний неопределенности. Следует отметить, что отображение «дестабилизационных» свойств какого-либо закона распределения в величину энтропийного коэффициента является сюръекцией, так как различные законы распределения могут иметь одинаковое значение величины K_e . Другими словами можно сказать, что различные законы распределения, в энтропийном смысле, могут давать одинаковый дестабилизирующий эффект.

В случае, когда специфика рассматриваемой задачи обуславливает целесообразность перехода к другой базовой величине ЭП Δ_{ej} ($j \in J$), определение соответствующей величины энтропийного коэффициента K_{ej} может быть осуществлено с использованием коэффициента перехода $K_{1,j}$. Действительно, согласно формулам (8.11) и (8.14) для $i = 1$ можно записать

$$\Delta_{ej} = K_{1,j} \Delta_e = K_{1,j} K_e \sigma = K_{ej} \sigma. \quad (8.16)$$

Откуда следует

$$K_{ej} = K_{1,j} K_e. \quad (8.17)$$

По аналогии можно вывести выражения для определения значений энтропийных коэффициентов при переходах к другим базам.

Состояния неопределенности различных объектов, основанные на использовании понятия величины энтропийного потенциала, можно проиллюстрировать графически (рис. 8.1). Действительно, состояние неопределенности объекта характеризуется величиной Δ_e , которой согласно выражению (8.14) соответствует точка в декартовой системе координат на плоскости: σ и K_e . Очевидно, что такую систему координат

можно рассматривать как частный случай пространства состояний или фазового пространства – плоскость энтропийных потенциалов. Конкретному состоянию неопределенности объекта будет соответствовать изображающая точка, например, $1 (\sigma_1; K_{e1})$, определяющая прямоугольник со сторонами σ_1 и K_{e1} , лежащими на соответствующих осях. Площадь данного прямоугольника будет равна $\Delta_{e1} = K_{e1}\sigma_1$. Из уравнения (8.14) следует, что каждому значению $\Delta_e = C_1 = \text{const}$ будет соответствовать множество точек на плоскости $\sigma; K_e$, которые образуют линию постоянного энтропийного потенциала – «изотропу» состояния объекта. То есть энтропийный потенциал объекта для каждой точки такой изотропы будет постоянным и равным C_1 . Например, переход объекта из состояния, характеризующегося точкой 1 , в состояние, характеризующееся точкой 2 , не изменяет его энтропийный потенциал. При этом уменьшение степени разброса анализируемого параметра при переходе в точку 2 ($\sigma_2 < \sigma_1$) компенсируется изменением характера рассеяния данного параметра в сторону увеличения энтропийного коэффициента ($K_{e2} > K_{e1}$).

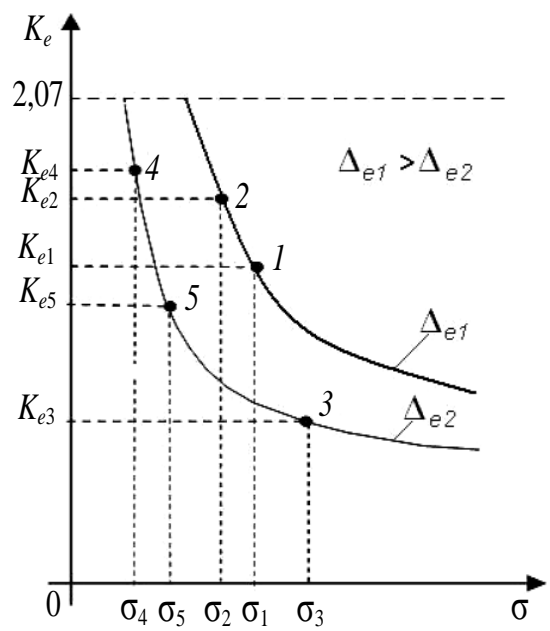


Рис. 8.1. Плоскость энтропийных потенциалов

При уменьшении уровня состояния неопределенности объекта, например, вследствие естественной эволюции или реализации управления происходит уменьшение величины его энтропийного потенциала,

например, до величины C_2 . Этому соответствует переход изображающей точки с изотропы, заданной условием $\Delta_e = C_1$, на изотропу, которая задана условием $\Delta_e = C_2$ ($C_2 < C_1$). В результате такого перехода энтропийный потенциал уменьшится на величину $\delta\Delta_e = C_1 - C_2$. При этом, в частности, уменьшение уровня состояния неопределенности может быть достигнуто за счет незначительного возрастания величины σ и более значительного уменьшения величины K_e , как, например, при переходе из состояния, описываемого точкой 2, в состояние, описываемое точкой 3. В этом случае имеют место условия: $\sigma_3 > \sigma_2$; $K_{e3} \ll K_{e2}$. Возможна и обратная ситуация, как, например, при переходе в состояние, описываемое изображающей точкой 4. В этом случае $\sigma_4 \ll \sigma_2$; $K_{e4} > K_{e2}$. Также реальной является ситуация, когда уменьшение энтропийного потенциала объекта на величину $\delta\Delta_e$ достигается одновременным уменьшением величин σ и K_e , как, например, при переходе в состояние, характеризуемое точкой 5, когда $\sigma_5 < \sigma_2$; $K_{e5} < K_{e2}$. Величина $\delta\Delta_e$, в общем случае, может быть выражена через величины приращений $\delta\sigma$ и δK_e , характеризующих изменение состояния неопределенности объекта по соответствующим координатам, в виде

$$\delta\Delta_e = \Delta_{e1} - \Delta_{e2} = (K_e + \delta K_e)(\sigma + \delta\sigma) - K_e\sigma = K_e\delta\sigma + \sigma\delta K_e + \delta K_e\delta\sigma. \quad (8.18)$$

Если величины приращений достаточно малы, т. е. $\delta\sigma \rightarrow 0$, $\delta K_e \rightarrow 0$, то последним слагаемым в выражении (8.18) можно пренебречь и изменение энтропийного потенциала будет характеризоваться его дифференциалом

$$d\Delta_e = K_e d\sigma + \sigma dK_e. \quad (8.19)$$

Используя выражение (8.19), можно описать неизменность состояния неопределенности объекта в пространстве энтропийных потенциалов. Такая модель может быть найдена из условия $d\Delta_e = 0$, которое, очевидно, соответствует перемещению изображающей точки по изотропе $\Delta_e = C$. В результате получим

$$K_e d\sigma + \sigma dK_e = 0, \text{ или } \frac{dK_e}{K_e} = -\frac{d\sigma}{\sigma}, \text{ или } d \ln K_e = -d \ln \sigma. \quad (8.20)$$

Из сделанного выше определения изотроп следует, что они не имеют точек пересечения. Доказательство этого утверждения оформим в виде следующей леммы.

Лемма 1. Изотропы, соответствующие условию $\Delta_e = \text{const}$, не имеют точек пересечения.

Доказательство. Доказательство сделанного утверждения проведем методом от противного. Предположим, что изотропы $\Delta_{e1} = \text{const}$ и $\Delta_{e2} = \text{const}$ ($\Delta_{e1} \neq \Delta_{e2}$) пересекаются в какой-либо точке. Следовательно, в данном случае имеет место равенство $\Delta_{e1} = \Delta_{e2}$. Получаем противоречие. Что и требовалось доказать.

Изменение состояний неопределенности объекта будет характеризоваться перемещением изображающей точки на плоскости ЭП, которая будет описывать некоторую линию – траекторию в области параметров энтропийных потенциалов или, более кратко, энтропийную траекторию. Совокупность энтропийных траекторий для различных вариантов изменения состояний образует портрет энтропийных потенциалов или, более кратко, энтропийный портрет системы.

В отличие от классических фазовых портретов динамических систем (когда в качестве координат фазового пространства берутся выходная координата объекта и ее производные до $(n - 1)$ порядка) энтропийные портреты имеют следующие особенности:

а) направление энтропийных траекторий может быть любым в отличие от траекторий на фазовой плоскости (в верхней полуплоскости «слева–направо», в нижней – «справа–налево»);

б) энтропийные портреты обладают большей информативностью, позволяя повысить степень «сжатия» информации об изменении состояний объекта или системы.

Наглядная иллюстрация указанных особенностей приведена на рис. 8.2. На рис. 8.2, а изображен фазовый портрет линейной системы второго порядка, находящейся на колебательной границе устойчивости. Изменение выходного параметра в этом случае описывается зависимостью $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Траектории 1, 2 и 3 соответствуют различным начальным отклонениям, задающим амплитуды A незатухающих колебаний. Очевидно, что каждая фазовая траектория характеризуется своей величиной СКО – σ , причем имеет место соотношение $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

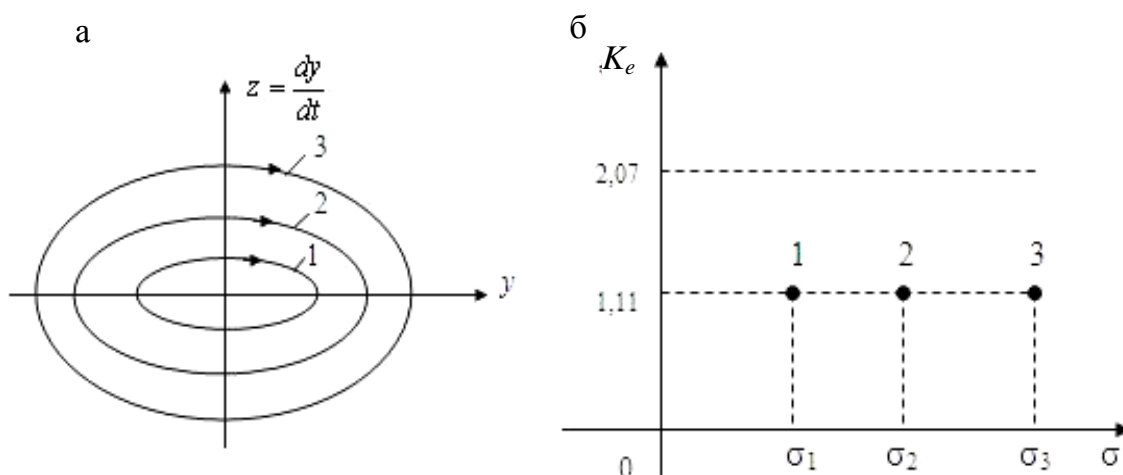


Рис. 8.2. Портреты систем:
а – фазовый портрет; б – энтропийный портрет

Плотность распределения отклонений выходной величины y относительно среднего значения в данном случае описывается так называемым арксинусоидальным законом (см. табл. 2.1) с $K_e = 1,11$. Таким образом, каждой фазовой траектории на рис. 8.2, а будет соответствовать точка на энтропийной плоскости (рис. 8.2, б) с координатами $(\sigma_i; 1,11)$; ($i = 1, 2, 3$). Аналогичным образом можно проиллюстрировать другие варианты динамики, например, наличие устойчивого или неустойчивого предельных циклов и др. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работах [18, 21].

Проиллюстрируем практическую применимость изложенного подхода конкретными примерами [19].

Рассмотрим вращение точки N на плоскости. В первом случае будем считать, что R (расстояние от оси вращения до точки N) и ω (угловая скорость) – постоянны. Комплексная модель данного динамического процесса во времени t будет иметь вид $z = Re^{j\omega t}$, а векторная – $y = R\sin(\omega t)$. Соответствующая данному процессу фазовая траектория на фазовой плоскости в системе координат $x, y = dx/dt$ будет представлять собой эллипс (кривая 1 на рис. 8.3, а). Это же движение с позиции стороннего наблюдателя, не имеющего аналитического описания такого процесса, можно представить совокупностью проекций точки N на какую-либо ось (например, X), являющихся случайными величинами с соответствующим уровнем непредсказуемости или неопределенности. Распределение данных величин

будет характеризоваться арксинусоидальным законом распределения с $K_e = 1,11$ и $\sigma = R / \sqrt{2}$. Данной ситуации, как было показано выше, соответствует изображающая точка 1 на плоскости энтропийных потенциалов (в системе координат σ, K_e) на рис. 8.3, б. В геометрической интерпретации значение величины соответствующего энтропийного потенциала Δ_e будет равно площади прямоугольника со сторонами σ и K_e .

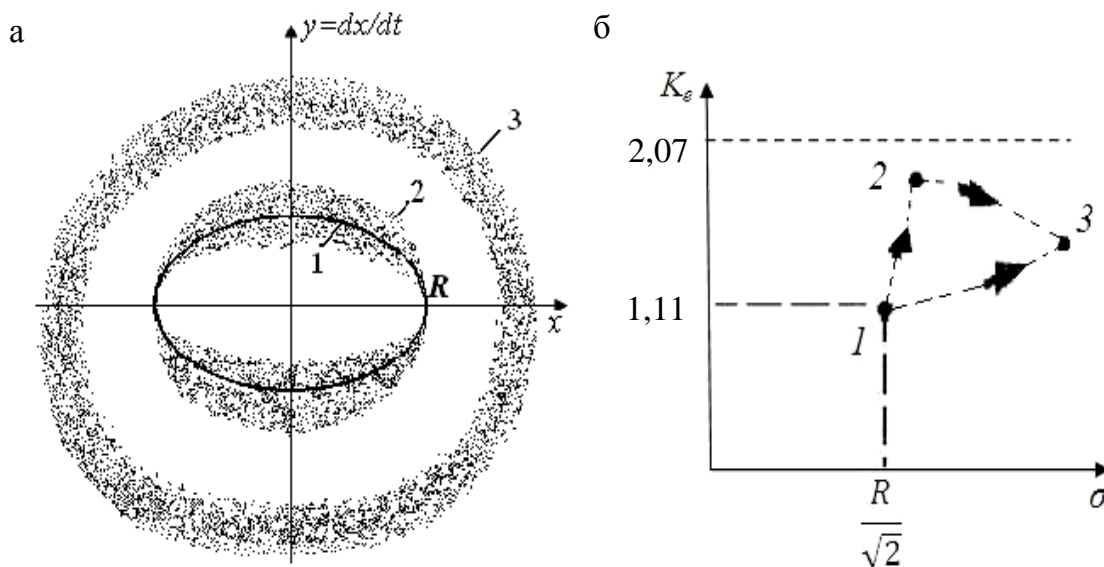


Рис. 8.3. Портреты системы:

а – фазовый портрет; б – энтропийный портрет;

1 – детерминированный режим вращения; 2 – режим вращения с одной нечеткой переменной (ω); 3 – режим вращения с двумя нечеткими переменными (ω и R)

Теперь рассмотрим случай, когда угловая скорость ω является случайной величиной. Такая ситуация встречается довольно часто в различных практических задачах и связана, например, с изменениями нагрузочных моментов на валах двигателей. Подобные задачи возникают при исследовании режимов работы шнековых питателей при неравномерной подаче материалов с различными физическими свойствами, кавитации на лопастях гребных винтов с регулируемым шагом в условиях интенсивного волнения и др. В качестве точки N может, например, рассматриваться точка на поверхности лопасти, где разрушение поверхности происходит наиболее интенсивно. В данном

случае использование вышеупомянутых аналитических моделей для описания такого движения оказывается затруднительным, так как в них появляется нечеткая или «размытая» переменная ω . Соответствующий фазовый портрет также оказывается «размытым» и представляется в виде полосы переменной ширины с неявно выраженной границей (полоса 2 на рис. 8.3, а). Причем процедура его построения существующими методами (например, методом изоклин) потребует больших трудозатрат, чем в первоначальном варианте. Применение методов интервальной логики также оказывается не всегда эффективным. Достаточно просто и наглядно эта ситуация будет характеризоваться изменением энтропийного потенциала. Очевидно, что произойдет изменение закона распределения параметра (наиболее вероятно, что возрастет уровень его непредсказуемости, а следовательно, и значение энтропийного коэффициента) и, возможно, изменение значения величины σ . Динамика точки N в таком установившемся случайном режиме будет характеризоваться точкой 2 на плоскости ЭП (рис. 8.3, б) с соответствующей величиной энтропийного потенциала. Пунктирной линией показана возможная энтропийная траектория перехода в данное состояние из детерминированного режима.

Теперь рассмотрим общий случай, когда величины ω и R являются случайными величинами, что также характерно для многих практических задач. Наличие двух нечетких переменных еще больше усложняет использование аналитических моделей, а на соответствующем фазовом портрете появится дополнительная составляющая «размытости», что делает его еще менее информативным (полоса 3 на рис. 8.3, а). Наглядность энтропийного портрета остается прежней. Нахождение системы в новом динамическом режиме будет характеризоваться новыми значениями Δ_e , K_e и σ , чему соответствует точка 3 на рис. 8.3, б. Пунктирными линиями показаны возможные траектории перехода в это состояние из предыдущих режимов.

Следует отметить, что предлагаемый подход к исследованию различных явлений не противоречит «классике». Если априори пренебречь изменением закона распределения параметра на различных этапах существования системы и считать, что распределение параметра подчиняется какому-либо одному закону (например, нормальному с $K_e = K_{e(\max)} = 2,07$), то соответствующее значение Δ_e , согласно формуле (8.14), будет являться масштабным изображением величины σ .

Соответственно все множество изотроп вырождается в одну горизонтальную прямую $K_e = \text{const}$. Графическая иллюстрация изменения состояния неопределенности (рис. 8.1) будет характеризоваться перемещением изображающей точки по этой прямой. То есть в результате такого упрощения величина ЭП параметра объекта вырождается в масштабированную величину дисперсии. В данном случае технологии моделирования и исследования эволюций систем на основе методов теории энтропийных потенциалов сведутся к классическим моделям и технологиям, основанным на использовании методов дисперсионного анализа.

Преимущество предложенного подхода, основанного на использовании понятий ЭП, состоит в том, что возрастают полнота и объективность исследований за счет комплексного учета дестабилизационных свойств законов распределения параметра (в виде соответствующих значений энтропийных коэффициентов) и характеристик его разброса (величин СКО).

Практическая значимость такого подхода заключается в том, что для получения оценок σ и K_e нужен значительно меньший объем измерительной информации, чем для определения энтропии $H(x)$ или спектральной и автокорреляционной функций. Это связано с тем, что для получения представительной оценки величины σ требуется гораздо меньший объем выборки, чем для получения соответствующей оценки энтропии, а величина K_e в ряде случаев может быть определена теоретическим путем, исходя из физического смысла явлений, на основании аналогий и др. [18, 21]. Также получение достоверных оценок дисперсий рассматриваемых параметров является более простой задачей, чем, например, получение соответствующих автокорреляционных функций, для которых требуется на порядок больше экспериментальных данных.

Таким образом, введенное понятие ЭП оказывается полезным для исследования систем различной природы.

Однако в ряде случаев этого может оказаться недостаточно, так как возникнет необходимость учета и некоторого базового значения X_n , на фоне или относительно которого рассматривается состояние неопределенности, в связи с чем возникает необходимость введения нового обобщающего, расширенного понятия. Таким понятием, например, является комплексный энтропийный потенциал (КЭП).

Определение 2. Комплексным энтропийным потенциалом (КЭП) параметра называется величина, определяемая из выражения

$$L_{\Delta i} = \frac{\Delta_{ei}}{X_n} = \sigma \frac{K_e}{X_n}, \quad (8.21)$$

где X_n – величина базового значения, относительно которого рассматривается состояние неопределенности.

В качестве базовой величины может быть выбрана величина математического ожидания параметра – m_x или величина его номинального значения. Однако если изменения параметра происходят в окрестности нуля, то в качестве величины X_n могут быть также использованы величины диапазона изменения этого параметра, предельно допустимого значения и др. В частности, в качестве величины X_n может быть выбрана какая-либо базовая величина энтропийного потенциала Δ_{eb} . Если выбранная величина является отрицательной (например, исследуются состояния неопределенности тепловых режимов объекта в области отрицательных температур), то в качестве X_n берется модуль этой величины. Поэтому при использовании определения (8.21) всегда получаем выполнение условия $X_n > 0$. А с учетом того, что $K_e > 0$ и $\sigma > 0$, имеем $L_{\Delta} > 0$.

Согласно сделанному выше определению, величины L_{Δ} являются безразмерными. Они могут использоваться в качестве критериев подобия при описании состояний неопределенности различных параметров. Очевидно также, что увеличение L_{Δ} свидетельствует о нарастании уровня состояния неопределенности, и наоборот.

Используя понятие КЭП, представляется возможным описать состояние неопределенности параметра единым комплексом, состоящим из трех наглядных информативных характеристик (σ , K_e , X_n). Если использовать данные характеристики в качестве координат фазового пространства, то состояние неопределенности параметра будет представляться положением изображающей точки в соответствующей трехмерной декартовой системе координат. Отображение множества состояний неопределенности, характеризуемых величинами σ , K_e , X_n , во множество точек этого пространства, также является сюръекцией, так как различные состояния могут иметь одинаковую величину комплексного энтропийного потенциала.

Условия $L_{\Delta} = C_j = \text{const}$, $j \in J$, соответствующие различным уровням состояний неопределенности объекта или системы, разбивают исходное множество точек трехмерного пространства на классы подмножеств точек $M_{(\sigma, K, X)}^{(j)}$, лежащих на одной поверхности постоянного комплексного энтропийного потенциала – изотропной поверхности. Указанные поверхности не пересекаются. Доказательство данного утверждения оформим в виде нижеследующей теоремы.

Теорема 2. Изотропные поверхности не имеют точек пересечения.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что какие-либо две изотропные поверхности $L_{\Delta(1)} = \text{const}$ и $L_{\Delta(2)} = \text{const}$ ($L_{\Delta(1)} \neq L_{\Delta(2)}$) пересекаются в какой-либо точке K . Тогда в этой ситуации имеет место равенство $L_{\Delta(1)} = L_{\Delta(2)}$. Получили противоречие. Что и требовалось доказать.

Очевидно, что перемещение изображающей точки по изотропной поверхности, соответствующее изменению состояния системы, например, по причине эволюции под действием каких-либо факторов или реализации какого-либо управления, свидетельствует о неизменности степени ее состояния неопределенности в комплексе. Уменьшению степени состояния неопределенности объекта или системы будет соответствовать переход изображающей точки на другую изотропную поверхность с меньшим значением величины L_{Δ} и наоборот. Все множество величин комплексных энтропийных потенциалов $M_{(\sigma, K, X)}$ может быть представлено как объединение всех классов подмножеств точек изотропных поверхностей

$$M_{(\sigma, K, X)} = \bigcup_{(j \in J)} M_{(\sigma, K, X)}^{(j)}. \quad (8.22)$$

Условие $X_n = \text{const}$ в геометрической интерпретации соответствует сечению семейства изотропных поверхностей плоскостью. В результате образуется семейство кривых (изотроп) в плоской системе координат σ и K_e , определяемых условием $\Delta_{ej} = C_j = \text{const}$. Поэтому очевидно, что утверждение леммы 1 является частным случаем теоремы 2.

Изменение состояния неопределенности системы можно оценить по величине дифференциала комплексного энтропийного потенциала dL_{Δ} :

$$\begin{aligned}
dL_{\Delta} &= \frac{K_e d\sigma}{X_n} + \frac{\sigma dK_e}{X_n} - \frac{K_e \sigma dX_n}{X_n^2} = \frac{\left(K_e d\sigma + \sigma dK_e - \frac{K_e \sigma dX_n}{X_n} \right)}{X_n} = \\
&= \frac{K_e d\sigma + \sigma dK_e - K_e \sigma d(\ln X_n)}{X_n} = \frac{(d\Delta_e - \Delta_e d(\ln X_n))}{X_n}. \quad (8.23)
\end{aligned}$$

Используя выражение (8.23), представляется возможным сформулировать положение о неизменности состояния неопределенности системы, например, в результате ее эволюции или реализации какого-либо этапа управления из условия $dL_{\Delta} = 0$. Очевидно, что данное условие, в геометрической интерпретации, описывает перемещение изображающей точки по изотропной поверхности. В результате получим

$$K_e d\sigma + \sigma dK_e - K_e \sigma d(\ln X_n) = 0. \quad (8.24)$$

В выражении (8.24) величина дифференциала dK_e характеризует изменение «дестабилизационных» свойств закона распределения параметра (в энтропийном смысле); $d\sigma$ – изменение величины СКО параметра; $d(\ln X_n)$ – изменение величины базового значения параметра в логарифмическом масштабе.

Используя выражение энтропийного потенциала через характеристики рассеяния, то же положение (8.24) можно привести к виду

$$d\Delta_e - \Delta_e d(\ln X_n) = 0; \quad \frac{d\Delta_e}{\Delta_e} = d(\ln X_n) = \frac{dX_n}{X_n}. \quad (8.25)$$

Из выражения (8.25) следует, что для нахождения изображающей точки на изотропной поверхности, т. е. для обеспечения постоянного уровня неопределенности системы, необходимо, чтобы относительное изменение величины энтропийного потенциала было равно относительному изменению величины базового значения.

В ряде задач, когда существуют допускающие дифференцирование аналитические зависимости для входящих в выражение (8.21) величин σ , K_e и X_n от варьируемых параметров системы y_j ($j = 1, 2, \dots, n$), величина dL_{Δ} может быть определена из выражения

$$dL_{\Delta} = \frac{\sigma dK_e}{X_n} + \frac{K_e d\sigma}{X_n} - \frac{K_e \sigma dX_n}{X_n^2} = \frac{\sigma}{X_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial K_e}{\partial y_j} dy_j + \frac{K_e}{X_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial y_j} dy_j - \frac{\sigma K_e}{X_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_n}{\partial y_j} dy_j. \quad (8.26)$$

Практическое значение для применения предложенного подхода к изучению систем имеет наличие метрологического обеспечения самого процесса исследования. Другими словами, необходимо наличие зависимости для однозначной «точностной» оценки получаемых характеристик исследуемого процесса или явления. Искомую зависимость можно получить следующим образом. Последовательно прологарифмируем, а затем продифференцируем обе части выражения (8.21). В результате получим

$$\frac{dL_{\Delta}}{L_{\Delta}} = \frac{dK_e}{K_e} + \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{dX_n}{X_n}. \quad (8.27)$$

Все члены выражения (8.27) можно трактовать как величины приведенных погрешностей γ_L , γ_K , γ_{σ} , γ_X . С учетом данных обозначений искомая зависимость примет вид

$$\gamma_L = \gamma_K + \gamma_{\sigma} - \gamma_X. \quad (2.28)$$

Используя понятия энтропийных потенциалов, представляется возможным количественно охарактеризовать изменение состояния системы по рассматриваемому параметру по ее «информационному следу». Вывод и доказательство этого положения оформим в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $L_{\Delta(1)}$, $\Delta_{e(1)}$ и $L_{\Delta(2)}$, $\Delta_{e(2)}$ – величины энтропийных потенциалов параметра, характеризующих два состояния неопределенности системы. Тогда количество информации I , порожденное переходом системы от одного состояния неопределенности к другому, инвариантно относительно соответствующих базовых значений параметра X_{n1} и X_{n2} и равно $I = \ln(\Delta_{e(1)}/\Delta_{e(2)})$.

Доказательство. Определим приращение величины КЭП параметра системы на данном этапе и выразим величины $\Delta_{e(1)}$ и $\Delta_{e(2)}$

через соответствующие им величины энтропий H_1 и H_2 из выражения (8.6). В результате получим

$$\begin{aligned} L_{\Delta(1)} - L_{\Delta(2)} &= \frac{\Delta_{e(1)}}{X_{n1}} - \frac{\Delta_{e(2)}}{X_{n2}} = \frac{\Delta_{e(1)} X_{n2} - \Delta_{e(2)} X_{n1}}{X_{n1} X_{n2}} = \frac{\Delta_{e(2)} X_{n1}}{X_{n1} X_{n2}} \left(\frac{\Delta_{e(1)} X_{n2}}{\Delta_{e(2)} X_{n1}} - 1 \right) = \\ &= L_{\Delta(2)} \left(\frac{X_{n2}}{X_{n1}} e^{H_1 - H_2} - 1 \right) = L_{\Delta(2)} \left(\frac{X_{n2}}{X_{n1}} e^I - 1 \right). \end{aligned} \quad (8.29)$$

В выражении (8.29) величина $I = H_1 - H_2$ является мерой количества информации, порожденной изменением состояния неопределенности системы, ее «информационным следом» на данном этапе.

Из выражения (8.29) следует $L_{\Delta(1)} - L_{\Delta(2)} = L_{\Delta(2)} \left(\frac{X_{n2}}{X_{n1}} e^I - 1 \right)$,

или $\frac{L_{\Delta(1)}}{L_{\Delta(2)}} = \frac{X_{n2}}{X_{n1}} e^I$, или $\frac{\Delta_{e(1)} X_{n2}}{X_{n1} \Delta_{e(2)}} = \frac{X_{n2}}{X_{n1}} e^I$. Откуда

$$I = \ln \frac{\Delta_{e(1)}}{\Delta_{e(2)}}. \quad (8.30)$$

Что и требовалось доказать.

Полученному результату (8.30) можно придать дальнейшее развитие. Для этого выразим величины энтропийных потенциалов через соответствующие характеристики рассеяния в соответствии с выражением (8.14). В результате получим

$$I = \ln \frac{\Delta_{e(1)}}{\Delta_{e(2)}} = \ln \frac{K_{e(1)} \sigma_1}{K_{e(2)} \sigma_2} = \ln k_{ke} + \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \ln k_{ke} + \ln \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}, \quad (8.31)$$

где $k_{ke} = \frac{K_{e(1)}}{K_{e(2)}}$ – коэффициент преобразования закона распределения параметра. Значения k_{ke} в ряде случаев могут быть определены теоретически, исходя из физического смысла с использованием аналогий и других, а для некоторых типовых ситуаций – заранее вычислены и табулированы.

Величина k_{ke} характеризует трансформацию закона распределения параметра в статике. В динамике такой процесс будет описываться диф-

ференциальным уравнением или соответствующей передаточной функцией $W_{K_e}(p)$. Поэтому величина k_{ke} , например, может быть определена из передаточной функции путем перехода к статическому режиму: $k_{ke} = W_{K_e}(p)|_{p=0} = W_{K_e}(0)$. Величины D_1 и D_2 , входящие в выражение (8.31), являются дисперсиями $D = \sigma^2$. Величина дисперсии характеризует усредненную мощность всего спектра гармоник динамической составляющей рассматриваемого параметра $D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$, где $S(\omega)$ –

функция спектральной плотности центрированной составляющей, которая описывает распределение среднего значения мощности случайного процесса по гармоникам. С учетом этого обстоятельства полученный результат (8.31) можно рассматривать как базовую модель информационно-энергетического состояния системы.

Как доказано в теореме 3, величины базовых значений X_{nl} ($l \in L$) непосредственно не влияют на величину количества информации I . Тем не менее, как это следует из определения величины КЭП, данные величины могут быть косвенно выражены через величины Δ_e и L_{Δ} . Поэтому будет естественным предположить наличие закономерного влияния соотношений указанных величин на величину I . Ответ на этот вопрос дает теорема 4 [20].

Теорема 4. Пусть $L_{\Delta(1)}$ и $L_{\Delta(2)}$ – величины КЭП, характеризующие отдельные состояния неопределенности системы по какому-либо параметру. Тогда, если $L_{\Delta(1)} > L_{\Delta(2)}$, то количество информации I , порожденное изменением состояния неопределенности системы, будет превышать величину, равную $\ln(X_{n1}/X_{n2})$, и наоборот. Если $L_{\Delta(1)} = L_{\Delta(2)}$, то $I = \ln(X_{n1}/X_{n2})$.

Доказательство. Из условия $L_{\Delta(1)} > L_{\Delta(2)}$ следует, что

$$L_{\Delta(1)} - L_{\Delta(2)} = \frac{\Delta_{e(1)}}{X_{n1}} - \frac{\Delta_{e(2)}}{X_{n2}} = \frac{X_{n2}\Delta_{e(1)} - X_{n1}\Delta_{e(2)}}{X_{n1}X_{n2}} > 0. \quad (8.32)$$

А так как $X_{n1} > 0$ и $X_{n2} > 0$ (согласно определению 2), из выражения (8.32) получаем

$$X_{n2}\Delta_{e(1)} - X_{n1}\Delta_{e(2)} > 0, \text{ или } \frac{\Delta_{e(1)}}{\Delta_{e(2)}} > \frac{X_{n1}}{X_{n2}}. \quad (8.33)$$

Выразим входящие в формулу (8.33) величины ЭП через величины соответствующих энтропий на основании выражения (8.6). В результате имеем

$$\frac{e^{H_1(x)}}{e^{H_2(x)}} > \frac{X_{n1}}{X_{n2}} \text{ или } e^{H_1-H_2} > \frac{X_{n1}}{X_{n2}}, \text{ или } e^I > \frac{X_{n1}}{X_{n2}}, \quad (8.34)$$

где $I = H_1 - H_2$ – количество информации, порожденное изменением состояния неопределенности системы. Логарифмируя обе части неравенства (8.34), получим

$$I > \ln \frac{X_{n1}}{X_{n2}}. \quad (8.35)$$

Рассуждая аналогично для условия $L_{\Delta(1)} < L_{\Delta(2)}$, имеем

$$I < \ln \frac{X_{n1}}{X_{n2}}. \quad (8.36)$$

И из условия $L_{\Delta(1)} = L_{\Delta(2)}$, следуя изложенной схеме рассуждений, получим

$$I = \ln \frac{X_{n1}}{X_{n2}}. \quad (8.37)$$

Что и требовалось доказать.

В качестве комментариев к приведенным теоремам 3 и 4 необходимо отметить следующее.

1. Полученный частный результат (8.37) не противоречит утверждению теоремы 3. Действительно, как следует из определения 2, $X_n = \frac{\Delta_e}{L_\Delta}$. Поэтому, подставляя данное выражение для X_n в формулу (8.37) с учетом условия $L_{\Delta(1)} = L_{\Delta(2)}$, получим

$$I = \ln \frac{X_{n1}}{X_{n2}} = \ln \frac{\Delta_{e(1)}}{\Delta_{e(2)}},$$

что и является утверждением теоремы 3.

2. Выводы теорем 2 и 3 справедливы для любых базовых законов распределения, которые могут быть положены в основу определений величин ЭП и КЭП. Переход к новой базе закона распределения приведет к тому, что в выражениях (8.30)–(8.33) величины ЭП будут умножены на одну и ту же величину соответствующего коэффициента перехода. После сокращений получим те же исходные выражения. Поэтому в окончательных результатах указанных теорем коэффициенты переходов отсутствуют.

3. Согласно полученным результатам (8.30), (8.35)–(8.37), величина информации, порождаемая изменением состояний неопределенности, может принимать отрицательные значения. На первый взгляд это противоречит известным положениям теории информации. На самом деле противоречия здесь нет. Дело в том, что классическое определение информации основано на использовании понятий априорной и апостериорной энтропий. Априорная энтропия характеризует исходное состояние неопределенности объекта. Апостериорная энтропия характеризует состояние неопределенности после наступления какого-либо события, уточняющего это состояние. Такими событиями могут являться, например, проведение этапа измерений, прием сигнала, содержащего дополнительную информацию об объекте, и др. Поэтому значение величины апостериорной энтропии никогда не превышает величины априорной энтропии. Классическое определение количества информации I , порожденной наступлением таких событий, основано на оценке уменьшения состояния неопределенности, которая определяется разностью априорной и апостериорной энтропий. Естественно, что определенное таким образом количество информации будет являться неотрицательной величиной ($I \geq 0$). В общем случае рассматривается изменение состояния неопределенности объекта под действием самых различных факторов, определяемых пространственными и временными координатами. При этом уровни состояний неопределенности могут как убывать, так и возрастать. Поэтому величина разности энтропий двух сравниваемых состояний может принимать как положительное, так и отрицательное значение. В частном случае, когда проявление таких факторов обуславливает появление апостериорной энтропии или имеет место уменьшение энтропии последующего состояния, количество информации будет неотрицательно. В дальнейшем, при необходимости,

с целью устранения неоднозначности трактовки это обобщенное на основе ТЭП понятие величины информации целесообразно обозначать как I_L .

4. На основании результатов теоремы 4 (8.35)–(8.37) можно утверждать, что при использовании величины КЭП для оценки состояния неопределенности условие $L_{\Delta(1)} = L_{\Delta(2)}$ и соответствующее ему выражение $I_L = \ln(X_{n1}/X_{n2})$ определяют «линию бифуркации» информационного поля системы. Сказанное проиллюстрировано на рис. 8.4. Здесь в декартовой системе координат X_{n1}/X_{n2} и I_L линия $I_L = \ln(X_{n1}/X_{n2})$ разделяет все пространство возможных значений величины I_L системы на две области. В одной области, соответствующей условию $L_{\Delta(1)} > L_{\Delta(2)}$, область возможных значений величины I_L будет располагаться над графиком функции $I_L = \ln \frac{X_{n1}}{X_{n2}}$, в другой области – наоборот. Нахождение

изображающей точки на указанной разделительной линии соответствует ситуации, когда значение величины I_L будет однозначно определяться из выражения (8.37) на основании соотношения базовых значений параметров. Таким образом, относительно данной линии осуществляется фрагментация информационного поля системы.

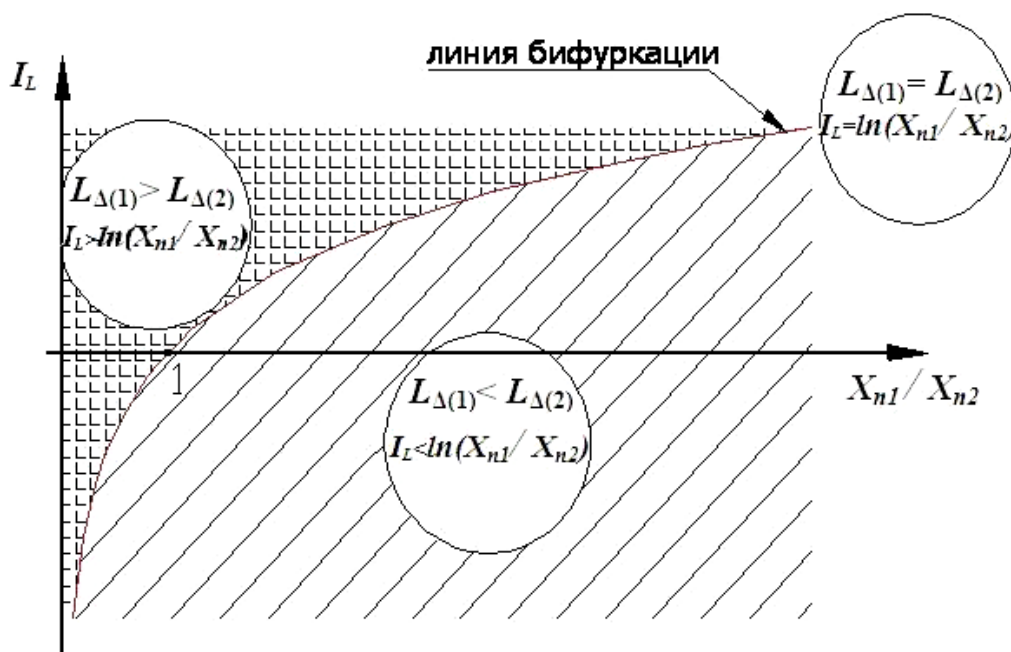


Рис. 8.4. Фрагментация структуры информационного поля системы в зависимости от соотношений величин КЭПов и базовых значений параметров

5. Теорема 4 является своеобразным дополнением и развитием теоремы 3. Практическая значимость теоремы 4 состоит в том, что на основании ее результатов представляется возможным оперативно оценить диапазон изменения «информационного следа» параметра системы на основании минимального объема данных, поддающихся простому определению, т. е. значений величин X_{n1} и X_{n2} .

В качестве примера применения изложенного подхода на рис. 8.5 приведен обобщенный фрагмент энтропийного портрета (в виде отдельной траектории) состояния неопределенности температурного режима камеры для дефростации (размораживания) мясного сырья [22]. Необходимо отметить следующее. Замороженное мясное сырье в виде полутуш свинины и говядины часто поступает на мясоперерабатывающие заводы из промышленных холодильников. Для последующей переработки сырье предварительно необходимо подвергнуть размораживанию, в противном случае будут иметь место повышенный износ рабочих поверхностей обрабатывающего оборудования (режущих кромок ножей, поверхностей волчков и др.) и повышенные затраты энергии при его работе.



Рис. 8.5. Фрагмент энтропийного портрета состояния неопределенности температурного режима дефростационной камеры

Размораживание сырья осуществляется в специальных дефростационных камерах, в которых поддерживается определенный температурно-влажностный режим. Длительность процесса составляет

сутки и более. Интенсивные изменения теплового режима приводят к значительным деформациям клеточных тканей и мембран, что, в конечном итоге, может привести к их разрыву. В результате происходит вытекание «сока», и дефростированное сырье частично теряет вкусовые качества, питательную ценность и массу. Поэтому проблема контроля и управления состоянием неопределенности температурного поля в объеме камеры является актуальной.

Следует отметить, что подобные проблемы имеют место, например, в металлургической, стекольной промышленности при «расхолаживании» изделий или отливок заготовок для различных деталей. Так, при остывании массы сваренного оптического стекла чрезмерно интенсивные изменения теплового режима процесса приводят к появлению внутренних микротрещин и, в конечном итоге, снижению его оптических свойств и др.

Приведенный на рис. 8.5 портрет строился на основании измерений значений температур в объеме дефростационной камеры. Измерения проводились в течение суток через каждые три часа. Первый этап измерений совпадал с началом работы первой смены (8^{00}). (На предприятии существовал двухсменный режим работы.) Таким образом, было проведено восемь циклов (этапов) контроля состояний неопределенности температурного поля, которым соответствуют точки 1–8 на рисунке. Каждой i -й точке соответствуют свои значения величин σ_i и K_{ei} ($i = 1, 2, \dots, 8$) на плоскости ЭП. А каждое соответствующее значение величины ЭП равно площади прямоугольника, образованного этими координатами. Последовательность этапов, помимо возрастающей нумерации, также проиллюстрирована пунктирной кривой. Реальный диапазон изменения величин энтропийного коэффициента ($1 \leq K_e \leq 2,07$) обозначен соответствующими горизонтальными пунктирными линиями. На основании экспертных оценок для отдельных производственных ситуаций выбиралось критическое значение величины ЭП ($\Delta_e = K_e \sigma = C_{кр}$), превышение которого негативно сказывалось на качестве и свойствах дефростированного сырья. Данному условию соответствует множество точек, образующих «критическую» изотропу. Таким образом, все возможные варианты состояния неопределенности температурного поля, соответствующие условию $\Delta_e \leq C_{кр}$, оказались отображенными в области допустимых состояний неопределенности, которая обозначена на рис. 8.5 наклон-

ными штриховыми линиями. Из анализа представленного фрагмента энтропийного портрета можно сделать однозначный вывод о том, что с начала работы предприятия имело место нарастание состояния неопределенности температурного поля камеры. «Апогей» этого процесса наступал в «разгар» производственной деятельности. При этом на двух этапах наблюдений имел место выход из области допустимых состояний неопределенности (точки 4 и 5). Данная ситуация объясняется тем, что по мере нарастания темпов производственной деятельности возрастало количество и интенсивность загрузок и выгрузок замороженного и дефростированного сырья. В результате частого открывания загрузочных дверей происходили процессы теплообмена с окружающей наружной средой, что и являлось одним из возмущений теплового режима. Кроме того, количество тепла, «вносимого» каждой отдельной массой партии загружаемого или выгружаемого сырья, являлось возмущением теплового режима. По мере «сворачивания» производственной деятельности к концу второй смены также снижалась интенсивность перезагрузки камеры, и состояние неопределенности температурного поля стало уменьшаться. В вечернее и ночное время, когда производство не работало, состояние неопределенности стабилизировалось на одном уровне (точки 7 и 8), весьма близком к исходному уровню (точка 1). На основании анализа траекторий энтропийных потенциалов были выработаны рекомендации по уменьшению влияния возмущений на состояние неопределенности температурного поля камеры. В качестве одного из решений было предложено установить дополнительный «шлюзовой» отсек перед входом в камеру. Реализация данного решения позволила снизить уровень состояния неопределенности поля и, как следствие этого, изображающие точки в пространстве ЭПов «стянулись» ближе к исходной точке 1, войдя в зону допустимых состояний неопределенности.

В качестве дополнительной иллюстрации возможностей методов ТЭП по наглядному отображению эволюции состояния неопределенности на рис. 8.6 приведен информационный портрет вышерассмотренных состояний температурного поля камеры.

Портрет построен по вышеизложенной методике, основанной на использовании выражений (8.30) и (8.31).

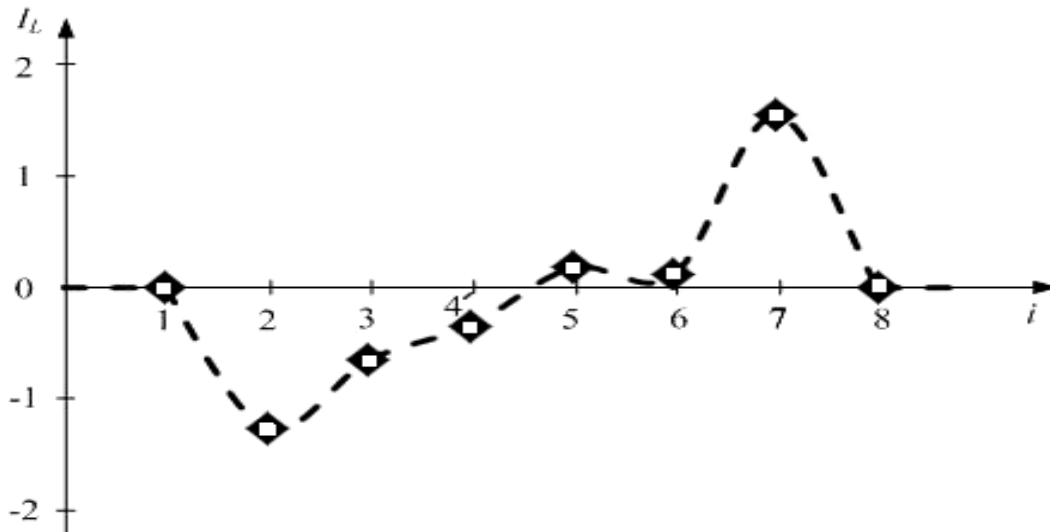


Рис. 8.6. Информационный портрет состояний неопределенности температурного поля дефростационной камеры

В качестве исходной переменной для функции I_L использовались номера этапов наблюдений i ($i = 1, 2, \dots, 8$), что соответствует переходу к рассмотрению явления на временной решетке с периодом дискретизации, равным трем часам. При этом предполагалось, что первый этап соответствует началу производственного процесса, которому предшествовало такое же установившееся состояние неопределенности температурного поля при $i = 0$ (по аналогии с этапами 7 и 8), т. е. $\Delta_{e1} = \Delta_{e0}$. Отсюда следует, что $I_{L(0-1)} = 0$. Информационный портрет в иллюстративном плане «дополняет» возможности энтропийного портрета и не противоречит ему. Как было отмечено выше, он позволяет наглядно показать тенденцию или тренд в изменении состояния неопределенности. Как показано на рис. 8.6, наибольшие изменения такого состояния происходили при переходе к этапам 2 и 7. В первом случае имело место нарастание состояния неопределенности ($I_{L(1-2)} < 0$), а во втором – наоборот ($I_{L(6-7)} > 0$).

Приведенные примеры (рис. 8.5, 8.6) являются наглядной иллюстрацией возможностей информационных и энтропийных портретов для описания и исследования состояния неопределенности различных параметров. И в данном смысле их можно рассматривать как элементы когнитивных изображений этих состояний.

В общем случае, когда состояние системы описывается m -мерным вектором, составляющими которого являются различные параметры x_i ($i = 1, 2, \dots, m$), для характеристики состояний неопределенности можно использовать величину многомерной энтропии

$$H(x_1, x_2, \dots, x_m) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_m) \ln p(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (8.38)$$

При этом, по аналогии с определением 1, можно также ввести понятие многомерного ЭП на основе какого-либо m -мерного закона распределения (например, закона равномерной плотности вероятностей). В данном случае придется оперировать не диапазоном изменения параметра, а соответствующим m -мерным объемом, который должен быть положен в основу базы сравнения при унификации состояний неопределенности. Для реализации аналогов последующих процедур исследований необходимо определить матрицу ковариационных моментов $[\lambda_{ij}]$: $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = M(x_i - M(x_i))(x_j - M(x_j))$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Очевидно, что при $i = j$ ковариационный момент вырождается в дисперсию соответствующего параметра σ_i^2 . Вычислив определитель данной матрицы $\det[\lambda_{ij}]$, найдем обобщенную дисперсию m -мерного распределения. Величина квадратного корня из обобщенной дисперсии пропорциональна «объему» так называемого эллипсоида рассеяния, который характеризует распределение вероятностей по отдельным координатам. При $m = 1$ величина объема такого эллипсоида вырождается в величину СКО параметра. Далее, по аналогии, можно определить величины многомерного ЭП и многомерного энтропийного коэффициента и др.

Однако реализация такого подхода к описанию состояния неопределенности многомерных распределений параметров не представляется целесообразной в силу необходимости введения новых понятий, громоздкости и неоднозначности алгоритмов вычислений, а также дополнительных сложностей, связанных с определением многомерных законов распределения вероятностей $p(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Особое значение данные проблемы будут иметь в практически важных случаях определения указанных параметров на основании экспериментальных данных. В этом смысле для решения стоящей проблемы представляется рациональным свернуть с «проторенного» пути и выработать иной подход, более приемлемый с точки зрения удоб-

ства практической реализации. В результате проведенного анализа состояния вопроса и поиска решений по описанию состояний неопределенности m -мерного вектора предлагается подход, базирующийся на введении понятия многомерного комплексного энтропийного потенциала (МКЭП). Оно основано на использовании ранее введенных понятий, является наглядным, компактным и удобным для практического применения.

Определение 3. Многомерным комплексным энтропийным потенциалом (МКЭП) m -мерного вектора называется величина La_z , определяемая из выражения

$$La_{z,i} = \left(\sum_{i=1}^m c_i |L_{\Delta_i}|^z \right)^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{i=1}^m \left(c_i \left| \frac{\Delta_{ei}}{X_{ni}} \right| \right)^z \right)^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{i=1}^m \left(c_i \frac{K_{ei} \sigma_i}{|X_{ni}|} \right)^z \right)^{\frac{1}{z}} \quad (8.39)$$

В определении (8.39) использованы следующие обозначения: L_{Δ_i} – КЭП i -го параметра; Δ_{ei} – ЭП i -го параметра; c_i – весовые коэффициенты, характеризующие значимость, приоритет каждого i -го параметра при описании состояния системы, $c_i \geq 0$. Для удобства и однозначности выбора их целесообразно нормировать условием $\sum_{(i)} c_i = 1$

($i = 1, 2, \dots, m$); z – номер варианта критерия, $z = 1$ или $z = 2$ (при $z = 1$ получаем вариант критерия $La_1 = \sum_{i=1}^m (c_i |L_{\Delta_i}|)$; при $z = 2$ – вари-

ант $La_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i |L_{\Delta_i}|)^2}$.

В геометрической интерпретации величина La_2 является модулем или длиной m -мерного вектора, в состав которого входят величины комплексных энтропийных потенциалов отдельных параметров системы в масштабе их весовых коэффициентов. Величина La_1 – сумма длин модулей указанных составляющих. Поэтому имеет место условие $La_1 \geq La_2$, причем равенство справедливо в случае, когда $m = 1$. Выбор варианта критерия является прерогативой пользователя. В основу выбора могут быть положены следующие соображения. Критерий La_2 дает оценку состояния неопределенности менее зависимую от значения

величины размерности системы m , чем критерий La_1 . Поэтому при достаточно больших значениях величины m ($m \geq 5$) предпочтительней является критерий La_2 . Возрастание величин La_z в обоих вариантах свидетельствует о повышении уровня неопределенности системы и наоборот. Во всех случаях величина La_z так же, как и величина L_Δ , является безразмерной, что позволяет использовать ее в качестве критерия энтропийного подобия при исследовании состояний неопределенности различных систем. Очевидно также, что при $m = 1$ величина La_z вырождается в модуль величины L_Δ . Достоинством введенного критерия МКЭП является то, что он основан на использовании введенных ранее понятий ЭП, поддается простому определению и допускает наглядную интерпретацию. Поэтому при определении величин La_{zj} на основании результатов эксперимента требуется минимальный объем данных. (Объем измерений, необходимый для определения величины МКЭП, будет равен сумме объемов отдельных измерений, необходимых для определения энтропийных потенциалов каждого из отдельных параметров.)

Критерий La_z является дальнейшим развитием базовых понятий теории энтропийных потенциалов и не противоречит ранее введенным и используемым понятиям. Так при переходе к одномерной системе, когда $m=1$, величина La_z вырождается в модуль величины L_Δ . Если базовое значение параметра X_n в конкретной ситуации постоянно, то величина L_Δ будет являться безразмерным масштабным изображением величины энтропийного потенциала параметра Δ_e . Если пренебречь еще и трансформацией закона распределения в процессах эволюции или управления системой, что соответствует условию $K_e = \text{const}$ (т. е. считать, что закон распределения параметра всегда является неизменным, например, нормальным), то величина $L_{\Delta j}$ будет масштабным изображением величины СКО. В этом частном случае исследование состояний системы может быть осуществлено с использованием известных методов дисперсионного анализа.

В другом частном случае, когда $K_e = \text{const}$, а в качестве базового значения выбрана величина математического ожидания параметра, т. е. $X_n = m_x$, величина $L_{\Delta j}$ будет являться масштабным изображением коэффициента вариации приведенного параметра. Данный коэффициент также используется для характеристики вариативных свойств параметра.

Таким образом, введенные понятия величин ЭП являются взаимосвязанными унифицированными «конструкциями», основанными на принципах «свертывания» или «вложения»: понятия более высокого уровня выражаются через величины энтропийных потенциалов предыдущих уровней. Такие выражения осуществляются при упрощении моделей ЭП путем исключения дополнительных характеристик неопределенности (варианта многопараметрической модели, базового значения, энтропийного коэффициента и др.). Схема преобразования моделей состояний неопределенности, основанных на использовании комплекса понятий ЭП различных уровней, изображена на рис. 8.7.

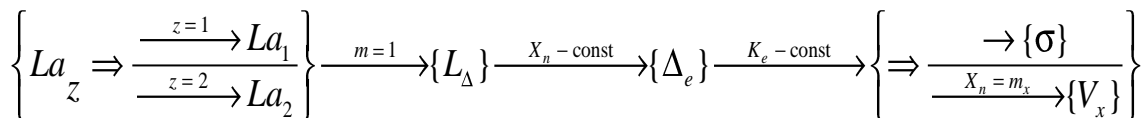


Рис. 8.7. Схема преобразования моделей состояний неопределенности на основе комплекса понятий энтропийных потенциалов

Схема, изображенная на рис. 8.7, иллюстрирует процедуру перехода «сверху вниз», т. е. от более полных вариантов моделей к более простым. Очевидно, что также возможен переход и в обратном направлении за счет введения или учета вышеуказанных характеристик неопределенностей в модели нижних уровней.

Получаемые модели являются непротиворечивыми, компактными и удобными для практического применения. С их помощью удастся описать состояния неопределенности различных объектов и систем единым комплексом, состоящим из трех наглядных информативных характеристик (K_e , X_n , σ), учитывающих соответственно «дестабилизирующие» свойства законов распределения параметров, базовые значения, а также их характеристики рассеяния (СКО). Такие характеристики поддаются достаточно простому определению. В случаях, когда они определяются на основании результатов наблюдений, требуется минимальный объем данных, например, на порядок меньше, чем для определения энтропии.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий использование понятий КЭП и МКЭП для организации мониторинга и управления работой объекта по нескольким параметрам [22].

В качестве объекта будем рассматривать климатическую камеру в комплекте с устройством управления, предназначенную для испытаний различной аппаратуры, механизмов, материалов, покрытий и др. Состояние такой системы для пользователя при проведении испытаний характеризуется двумя параметрами ($m = 2$): температурой y_1 ($^{\circ}\text{C}$) и относительной влажностью воздуха y_2 (%) в заданных точках контроля. Для данного числа параметров ($m < 5$) выбираем вариант критерия La_1 . Оба параметра одинаково значимы для проведения испытаний, поэтому весовые коэффициенты априори приняты равными: $c_1 = c_2 = 1/2$.

Поддержание температурно-влажностного режима в камере осуществляется с помощью соответствующих контуров регулирования, качество работы которых характеризуется значениями величин текущих отклонений параметров от базовых значений с соответствующими вероятностями (т. е. соответствующими законами распределения). Другими словами, качество работы контуров регулирования оказывает влияние на состояние неопределенности температурно-влажностного режима камеры. Базовые значения параметров в каждом климатическом режиме являются уставками регуляторов.

На основании обработки результатов экспериментальных данных по регулированию параметров в одном из рабочих режимов были получены следующие характеристики. По температуре: $X_{n1} = 40$ $^{\circ}\text{C}$; $K_{e1} = 2,01$; $\sigma_1 = 0,8$ $^{\circ}\text{C}$. По относительной влажности: $X_{n2} = 85$ %; $K_{e2} = 1,8$; $\sigma_2 = 1,7$ %. Для данного режима величины комплексных энтропийных потенциалов будут соответственно равны: $L_{\Delta 1} = (2,01 \cdot 0,8) / 40 \approx 0,04$; $L_{\Delta 2} = (1,8 \cdot 1,7) / 85 \approx 0,036$. Состояние неопределенности данного температурно-влажностного режима в рассматриваемой системе определяем с помощью величины многомерного комплексного энтропийного потенциала $La_1 = (1/2)L_{\Delta 1} + (1/2)L_{\Delta 2} = 0,038$. С целью повышения качества поддержания температурно-влажностного режима была проведена коррекция обоих контуров регулирования путем изменения настроек регуляторов. Здесь необходимо отметить следующие обстоятельства. Например, для системы регулирования, основанной на использовании промышленного ПИД-регулятора, настроечными параметрами являются: k – коэффициент передачи регулятора; T_1 – время предварения; T_2 – постоянная интегрирования. Используя такие настройки, можно решать различные задачи по управлению процессом регулирования: изменять запас устойчивости системы, а также вид

и показатели качества процесса регулирования (например, получать апериодический или колебательный переходный процесс, изменять величины перерегулирования, ошибок и др.). В частности, если управление процессом регулирования осуществлять по величине комплексного энтропийного потенциала L_{Δ} , то, изменяя величины k , T_1 и T_2 , будем изменять передаточную функцию регулятора и, следовательно, всего контура регулирования. В результате будут изменяться динамические свойства системы, ее частотная характеристика и степень влияния различных возмущений на регулируемый параметр. Это приведет к изменению спектрального состава динамической составляющей регулируемого параметра и закона распределения величин его отклонений от уставного или базового значения. В конечном счете в различных пропорциях или соотношениях изменятся величины σ и K_e , а следовательно, и величины энтропийного потенциала и комплексного энтропийного потенциала. В результате изменятся динамические свойства системы и условия прохождения возмущающих воздействий на ее выход. В скорректированном варианте системы регулирования характеристики параметров получились следующими. По температуре: $X_{n1} = 40$ °С; $K_{e1} = 1,95$; $\sigma_1 = 0,5$ °С. По относительной влажности: $X_{n2} = 85$ %; $K_{e2} = 1,92$; $\sigma_2 = 1,2$ %. Величины комплексных энтропийных потенциалов будут соответственно равны: $L_{\Delta 1} = (1,95 \cdot 0,5) / 40 \approx 0,024$; $L_{\Delta 2} = (1,92 \cdot 1,2) / 85 \approx 0,027$. Состояние неопределенности температурно-влажностного режима в данной ситуации характеризуется новым значением величины $La_1 \approx 0,026$. Из приведенных данных видно, что в результате реализации таких действий состояние неопределенности системы по рассматриваемым параметрам y_1 и y_2 уменьшилось, или, другими словами, возросло качество поддержания температурно-влажностного режима. Рассмотренный цикл изменения настроечных параметров регулятора можно трактовать как этап итеративной процедуры синтеза системы управления по методу минимизации энтропийного потенциала. При этом существует множество алгоритмов и планов поиска решений [1].

В приведенном примере состояние системы по выбранным параметрам рассматривается в заданных точках с учетом их изменения во времени в процессе регулирования. Аналогичным образом можно контролировать состояние системы в пространстве, т. е. в объеме камеры. В таком случае необходимо рассматривать распределение значений параметров y_1 и y_2 в разных точках объема камеры, обуслов-

ленные неоднородностью температурного и влажностного полей. Таким же образом можно контролировать изменение состояния системы, вызванное изменением базовых значений параметров, соответствующим переходу камеры на другой климатический режим, и др.

8.2. Обобщение понятий энтропийных потенциалов

Вышеизложенные понятия энтропийных потенциалов (Δ_e , L_Δ и La_z) могут быть выражены через единое обобщенное определение, позволяющее при необходимости осуществлять дальнейшее пополнение и развитие указанных понятий.

В общем виде совокупность введенных выше понятий энтропийных потенциалов E для описания состояний неопределенности можно определить кортежем множеств и отношений вида

$$E = \langle X, N_E, L_{E,Z}, P_E \rangle, \quad (8.40)$$

В формуле (8.40) приняты нижеследующие обозначения: $X = \{\Omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ – множество элементов или параметров, используемых для описания состояния объекта. Количество элементов m определяет размерность вектора состояния. Это конечное множество может состоять из набора отдельных кластеров $\omega_j(\vec{\xi})$ ($j = 1, 2, \dots, k$), имеющих соответствующие области изменений D_j . То есть все множество состояний какого-либо i -го параметра $\Omega_i = \bigcup \omega_j(\vec{\xi})$, где $\vec{\xi}$ – вектор факторов, определяющий вариацию величин i -го параметра (например, фактор временных или каких-либо пространственных координат); N_E – набор отображений для подмножеств параметров из Ω_i . Например, в моделях энтропийных потенциалов используются отображения для получения характеристик рассеяния σ_i , базовых значений параметров X_{ni} , величин энтропийных коэффициентов K_{ei} , а также, при необходимости, соответствующих весовых коэффициентов c_i ; $L_{E,Z}$ – набор форм отношений для отображения элементов из N_E в P_E по схеме $N_E \rightarrow P_E$. Z – Номер варианта форм. Например, для отображения элементов из X в La_z в данной работе используются всего два варианта отображений ($Z = 1$ и $Z = 2$), соответствующих линейным и квадратичным формам. Однако при необходимости варианты форм могут быть

изменены или дополнены; P_E – набор оценок, критериев, характеризующих состояние неопределенности элементов из X : Δ_e, L_Δ, La_z .

Приведенное определение (8.40) допускает дальнейшее дополнение перечня вводимых понятий для описания состояний неопределенности в различных задачах, а также при использовании различных групп параметров. Так, например, для отображения элементов из X в La_z могут использоваться, помимо указанных, иные формы или зависимости (например, формы более высоких порядков $Z > 2$). Также возможен переход к другим законам распределения, используемым в качестве базы для сравнения состояний неопределенности и др.

Для решения различных практических задач необходимо определять и исследовать величины энтропийных потенциалов, а также их отдельных параметров, характеризующих различные «границы» состояний неопределенности, например величины σ , K_e и X_n . Причем наибольшую сложность вызывает определение величин K_e , свойства которых также изучены в меньшей степени. Рассмотрению комплекса данных вопросов для различных ситуаций и вариантов исходных данных посвящен следующий подраздел.

8.3. Методы определения энтропийных потенциалов

Исходя из изложенного подхода к организации исследования систем на основе энтропийных потенциалов параметров, возникает необходимость вычисления величин Δ_e в конкретных ситуациях. Последующие вопросы вычисления и исследования свойств величин L_Δ и La_z часто являются менее проблематичными и были рассмотрены выше. Поэтому далее рассматриваются основные методы вычисления величин Δ_e и их составляющих параметров.

8.3.1. Определение энтропийных потенциалов на основе результатов наблюдений (метод прямого оценивания)

Рассмотрим ситуацию, когда имеется возможность наблюдения параметра, например, в результате его измерения тем или иным способом. В таком случае может быть сформировано множество

результатов наблюдений $X = \{x_i, i \in I\}$. На базе данного множества с использованием выражений (7.1) или (7.2) вычисляют энтропию параметра H . Далее с использованием выражений (8.14) или (8.15) вычисляют величину Δ_e . Затем при необходимости может быть осуществлен переход к требуемой базе закона распределения.

На основе тех же результатов наблюдений производят вычисление величины σ и выбор значения величины X_n в соответствии с ее определением. При последующем вычислении значения K_e используют выражение (8.15). Затем вычисляют соответствующее значение величины L_Δ . Схема преобразования данных в этой процедуре может быть описана следующим образом:

$$\{x_i, i \in I\} \rightarrow \{H, \sigma, X_n\} \rightarrow \{\Delta_e, K_e, L_\Delta\}, x \in X. \quad (8.41)$$

Алгоритм такой процедуры состоит из набора последовательно выполняемых «прямых» вычислений и действий и является однонаправленным. Однако при этом необходимо учитывать следующие специфические особенности.

При расчете величины энтропии H в соответствии с выражением (7.1) моделирование плотностей вероятностей распределения параметра осуществляется путем разбиения всего диапазона его изменения $[X_{\min}; X_{\max}]$ на конечное число интервалов r , которое имеет нарастающую зависимость от объема выборки n . Данная зависимость не является строгой, однако при выборе числа r целесообразно воспользоваться рекомендациями ВНИИМ, которые приведены, например, в книге [23].

Для удобства вычислений целесообразно выбирать интервалы с одинаковой шириной: $d = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{r}$. Однако если результаты наблюдений распределены неравномерно, то ширина интервалов должна уменьшаться при повышении «плотности» наблюдений, и наоборот. Следует отметить, что в настоящее время для проведения таких расчетов в различных вариантах (с равными или неравными интервалами разбиений) имеется прикладное программное обеспечение, например в составе пакета MathCAD, позволяющее упростить организацию вычислений.

Кроме того, при расчетах значений величины Δ_e в соответствии с выражениями (8.14) или (8.15) необходимо вводить поправки на смещение от недостаточно большого числа наблюдений, попадающих в каждый интервал гистограммы, и от их группирования (в виде «корректирующих» сомножителей) в соответствии с рекомендациями, приведенными в работе [24]. Величины этих сомножителей зависят от характера распределения результатов наблюдений и стремятся к единице при возрастании объемов используемой выборки. Так, например, выражение для поправочного сомножителя на смещение от недостаточно большого числа наблюдений, попадающих в каждый столбец гистограммы, A_1 , имеет следующий вид:

$$A_1 = 1 + \frac{r}{2n}. \quad (8.42)$$

При достаточно большом количестве наблюдений ($n > 40$) результирующая относительная погрешность от влияния указанных поправок не превышает 5–8 %.

Если состояние системы характеризуется набором, состоящим из m -параметров, то вышеуказанная процедура реализуется в отношении каждого из них. В таком случае для вычисления величины критерия La_z дополнительно задаются значения соответствующих весовых коэффициентов c_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

В случаях, когда объем выборки мал и не позволяет получить достаточно представительные оценки величин энтропийных потенциалов и их определяющих параметров или требуется оперативно получить оценки данных величин при ограниченных вычислительных ресурсах, можно использовать метод «грубого» или робастного оценивания, суть которого изложена в следующем подразделе.

8.3.2. Определение энтропийных потенциалов в условиях априорной неопределенности (метод робастного оценивания)

Вероятной является ситуация, когда объем выборки наблюдений весьма ограничен и не позволяет получить состоятельную оценку величины энтропии $H(x)$, как это предусмотрено схемой (8.41).

Такая ситуация, например, характерна для различных объектов и систем в пищевой, химической, металлургической и других отраслях

промышленности. Она в значительной мере обусловлена сложностью и дороговизной проведения измерений параметров, характеризующих состав и свойства потоков сырья, готовой продукции, а также различных ингредиентов и добавок. Для проведения ряда таких измерений необходимо использовать сложную аппаратуру, дорогостоящие реактивы, привлекать высококвалифицированный персонал. При этом реализация отдельных измерений требует значительных затрат времени. Более подробно данный вопрос рассмотрен в работах [15, 17]. В результате с целью «оптимизации» производственных затрат ограничивают объем измерений, что, отчасти, и порождает возникновение указанной ситуации. Возможны и другие причины ее возникновения.

В указанной ситуации, имея весьма ограниченную выборку наблюдений $X = \{x_i, i \in I\}$, предлагается осуществить определение отдельных составляющих параметров энтропийных потенциалов. Причем в качестве исходной базы необходимо выбрать такие параметры, для получения состоятельных оценок которых требуется выборка гораздо меньшего объема, чем для получения соответствующей оценки энтропии. Затем на основании полученных результатов и с использованием специальных моделей следует осуществить определение недостающих составляющих параметров и значений величин энтропийных потенциалов. В качестве исходной базы были выбраны параметры σ , X_{\min} , X_{\max} и X_n , которые поддаются простому вычислению для выборки практически любого объема ($n \geq 2$). Далее на основе использования этой базы параметров предлагаются метод и соответствующий модельный комплекс F_1 для вычисления оценки величины K_e . После чего последующие вычисления значений оценок величин Δ_e и L_Δ производятся в соответствии с выражениями (8.14) и (8.21). Схема преобразования данных в этой процедуре может быть описана следующим образом:

$$\{x_i, i \in I\} \rightarrow \{\sigma, X_{\min}, X_{\max}, X_n\} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \{\Delta_e, L_\Delta\}, x \in X. \quad (8.43)$$

$$\downarrow \rightarrow [F_1] \rightarrow \{K_e\} \rightarrow \uparrow$$

Из вышеизложенного следует, что одним из трудно определяемых параметров энтропийных потенциалов является величина энтропийного коэффициента K_e . Для решения ряда практических задач мониторинга и управления системами возникает необходимость его оперативного определения в условиях априорной неопределенности. Существующие методики определения K_e часто оказываются недостаточно

эффективными на практике. Так, например, изложенная в работе [24] методика определения результирующего значения энтропийного коэффициента композиции некоррелированных параметров по значениям K_e отдельных параметров и относительным весам каждой из дисперсий в суммарной дисперсии решена только для некоторых наиболее известных типовых законов распределения. При этом подразумевается априорное знание видов данных законов. В реальных ситуациях, когда законы распределения параметров могут изменяться и может варьировать их число в этой композиции, применение таких методов является практически невозможным. Данные обстоятельства порождают необходимость разработки более удобного и надежного метода нахождения оценок энтропийных коэффициентов в реальных условиях неопределенности. Ниже излагается такой метод и приводится созданный для его практической реализации модельный комплекс.

Суть метода состоит в следующем. Выбирается обобщенная характеристика закона распределения λ , которая однозначно определяется на основании ограниченного объема экспериментальных данных. Для ряда законов с известными значениями энтропийных коэффициентов рассчитываются значения величин λ . В системе координат λ, K_e наносятся реперные точки искомой зависимости указанных коэффициентов от соответствующих величин выбранной характеристики λ . На основе этих точек тем или иным способом воспроизводится своеобразная «тарировочная кривая». В дальнейшем на основании результатов наблюдений параметра с использованием этой кривой рассчитываются величины λ и затем определяются величины K_e для любых законов распределения.

На основании проведенного анализа в качестве характеристики λ предлагается использовать величину относительного среднего квадратического отклонения (ОСКО), которая определяется из выражения

$$\lambda = \frac{\sigma}{d}, \quad (8.44)$$

где σ – величина среднеквадратического отклонения (СКО) параметра; d – половина диапазона изменения параметра (размах выборки распределения),

$$d = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}, \quad (8.45)$$

здесь X_{\max} и X_{\min} – наибольшее и наименьшее значения параметра.

Очевидно, что при таком определении диапазон изменения λ находится в пределах от нуля до единицы.

Достоинством использования величины λ для определения величины K_e является то, что она всегда вычисляется на основании ограниченного объема экспериментальных данных ($n \geq 2$) для любого закона распределения и достаточно объективно характеризует «усредненный уклон» закона распределения, «степень предсказуемости» проявления различных значений параметра. В этом смысле она является более объективной характеристикой, чем, например, величина контрэксцесса, которая более полно характеризует степень «плосковершинности» или «островершинности» распределения.

Другим достоинством использования величины λ является то, что для ряда типовых законов она может быть вычислена аналитически.

При выборе крайних реперных точек, задающих диапазон варьирования K_e , целесообразно руководствоваться следующими соображениями. С уменьшением уровня предсказуемости или неопределенности проявления значений параметров значения K_e увеличиваются и наоборот. Одним из законов, имеющих наименьший «уровень состояния неопределенности», является дискретное двузначное распределение (которое, например, описывает величину зазора в кинематической цепи или величину напряжения от гистерезиса триггера) и характеризуется величиной $K_e = 1$. Наибольшей «неопределенностью» или непредсказуемостью в проявлении тех или иных значений параметра, как показано выше, обладает нормальный закон, для которого $K_e = 2,07$. Для подавляющего большинства реальных законов распределения значения K_e находятся внутри указанных границ. Поэтому реперные точки, соответствующие этим двум законам, целесообразно использовать в качестве крайних при построении тарифовочной кривой.

Определим координаты реперных точек для ряда типовых законов распределения.

1. Дискретное двузначное распределение:

$$X_{\max} = a; X_{\min} = -a; \sigma = a; K_{e1} = 1.$$

Откуда следует: $d = a; \lambda_1 = 1$.

2. Арксинусоидальный закон распределения:

$$X_{\max} = a; X_{\min} = -a; \sigma = \frac{a}{\sqrt{2}}; K_{e2} = 1,11.$$

Откуда следует: $d = a; \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$.

3. Закон равномерной плотности:

$$X_{\max} = a; X_{\min} = -a; \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}; K_{e3} = 1,73.$$

Откуда следует: $d = a; \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58.$

4. Распределение Симпсона (треугольный закон распределения):

$$X_{\max} = a; X_{\min} = -a; \sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}; K_{e4} = 2,02.$$

Откуда следует: $d = a; \lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41.$

5. Нормальный закон распределения:

$$X_{\max} = \infty; X_{\min} = -\infty; K_{e5} = 2,07.$$

Откуда следует: $d = \infty; \lambda_5 = 0.$

Теперь, используя координаты пяти «реперных» точек ($\lambda_i; K_{ei}$; $i = 1, 2, \dots, 5$) в декартовой системе координат (λ, K_e), можно построить «тарировочную кривую». Такая кривая приведена на рис. 8.8 и может использоваться для оперативного определения значений энтропийных коэффициентов на основании ограниченных объемов экспериментальных данных.

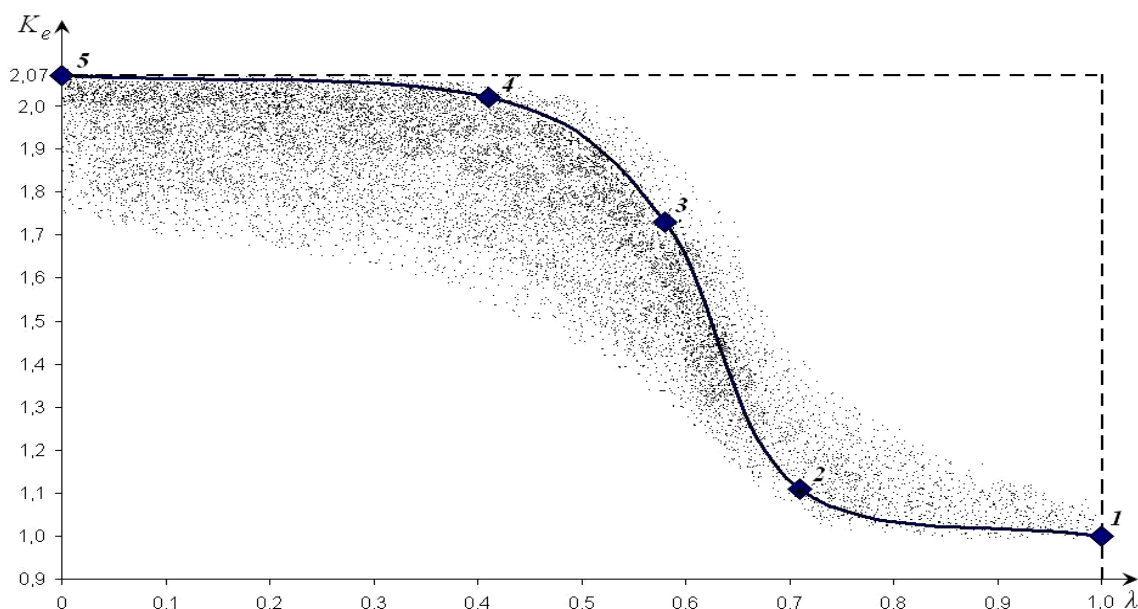


Рис. 8.8. Тарировочная кривая для определения энтропийных коэффициентов по значениям величин ОСКО (1–5 – реперные точки)

Следует отметить, что полученные с использованием изложенной методики оценки коэффициентов K_e в ряде случаев могут оказаться «грубыми». В этом смысле можно говорить, что такая «тарировочная кривая» на отдельных участках описывает рассматриваемую зависимость с некоторой долей неопределенности. Это обусловлено свойством сюръекции множества величин K_e для различных законов распределения по параметру λ . Другими словами, возможна ситуация, когда различные законы распределения, имеющие одинаковое значение величины λ , могут иметь различные значения величин K_e , вследствие чего появляется «размытость» исходной тарировочной кривой. На рис. 8.8 зона «размытости», или неопределенности обозначена затемнением. Количественная сторона этого вопроса в настоящее время до конца не исследована. Тем не менее, обобщая имеющиеся результаты исследований, можно сделать следующие выводы.

1. Существование, формы и размеры зоны «размытости» обусловлены наличием множества «не типовых» законов распределения: несимметричных, многомодальных и др.

2. Имеет место нелинейная зависимость уменьшения вероятности отклонений значений K_e от исходной тарировочной кривой с увеличением модуля этого отклонения. Данное свойство на рис. 8.8 проиллюстрировано изменением интенсивности затемнений указанной зоны.

3. Приведенные на рис. 8.8 формы и размеры зоны неопределенности тарировочной кривой приблизительно соответствуют существующим реалиям.

Необходимо также отметить, что вышеуказанное свойство сюръекции величины K_e по параметру величины λ не менее выразительно проявляется и по другим параметрам, которые могут быть использованы для количественной характеристики законов распределения. Так, например, использованная в работе [24] для характеристики закона распределения параметра величины контрэксцесса (вместо величины λ) дает более «грубую» и, главное, неоднозначную тарировочную кривую для получения значений K_e . Причем, как показывают результаты сравнений для отдельных значений аргументов, модель, основанная на использовании в качестве аргумента величины ОСКО (или λ), дает меньший разброс значений K_e относительно ука-

занного прототипа. Приведенные свойства отчасти и были учтены при синтезе модельного комплекса.

Анализ зависимости $K_e = f(\lambda)$, построенной по вышеуказанным реперным точкам, показывает, что она является нелинейной. Для удобства решения ряда практических задач оказывается приемлемым осуществить ее кусочно-линейную аппроксимацию в виде

$$K_e = \begin{cases} 2,05 & \text{при } \lambda < 0,45; \\ 3,5 - 3,25\lambda & \text{при } 0,45 \leq \lambda \leq 0,75; \\ 1,05 & \text{при } \lambda > 0,75. \end{cases} \quad (8.46)$$

При необходимости зависимость $K_e = f(\lambda)$ может быть уточнена с использованием предложенной методики как за счет увеличения числа реперных точек, так и более точной аппроксимации с использованием различных интерполяционных полиномов более высокого порядка как для всего диапазона изменения λ , так и на отдельных его участках. (Имеющийся опыт практического применения изложенного подхода позволяет сделать вывод, что для ряда задач приемлемой оказывается аппроксимация зависимости $K_e = f(\lambda)$ прямой, проходящей через точки 1 и 5, рис. 8.8). Возможны и другие варианты аппроксимации искомой зависимости, например, на основе метода наименьших квадратов и др.

8.3.3. Определение энтропийных потенциалов на основе характеристик входных воздействий

Возможны ситуации, когда не представляется возможным получить наблюдения выходных параметров объекта. Отчасти они могут быть обусловлены вышеуказанными причинами, связанными со сложностью и дороговизной проведения отдельных измерений. В ряде случаев это может быть связано с особенностью самих объектов, когда реализация отдельных измерений либо в принципе невозможна или может исказить или даже нарушить состояние объекта и протекающих в нем процессов (например, различные объекты с микро- и наноструктурами, а также объекты для реализации нанотехнологий). Следует отметить, что по мере нарастания темпов научно-технического про-

гресса количество указанных объектов увеличивается. В таких случаях оценивание состояний неопределенности объектов может быть осуществлено косвенными методами на основании информации о воздействиях, влияющих на формирование анализируемых параметров.

Методика оценивания, как и в предыдущем случае, основана на использовании выражений (8.14) и (8.21). Только параметры энтропийных потенциалов Δ_e и L_Δ (σ , K_e и X_n) на выходе объекта (О) оцениваются по значениям величин параметров ЭП входного воздействия f и характеристикам объекта. Характеристики $\varphi_1(\sigma_f)$, $\varphi_2(K_{ef})$ и $\varphi_3(X_{nf})$ в той или иной форме описывают взаимосвязь между соответствующими параметрами энтропийных потенциалов на входе и выходе объекта.

Схема преобразования данных в этой процедуре может быть описана схемой, представленной на рис. 8.9. Вычисление параметров энтропийных потенциалов входного воздействия f (σ_f , K_{ef} и X_{nf}) может быть осуществлено методом прямого оценивания.

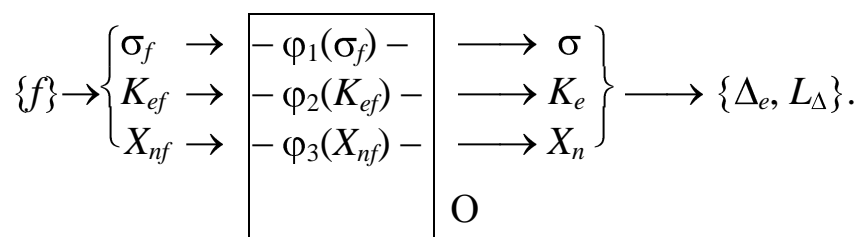


Рис. 8.9. Схема преобразования данных в случае определения энтропийных потенциалов на основе характеристик влияющих воздействий

При наличии ограниченного объема измерительной информации могут применяться методы робастного оценивания.

Далее будут рассмотрены основные методы определения вышеупомянутых характеристик объекта φ_i ($i = 1, 2, 3$).

Методы определения дисперсии параметра на выходе объекта по характеристикам входных воздействий были рассмотрены выше. Вычисление величины σ на выходе может быть осуществлено по характеристикам случайных воздействий на входе и характеристикам объекта или системы из выражений (3.4)–(3.13) для линейных систем, из выражений (3.30)–(3.34) – для нелинейных систем.

Возможны варианты, для которых процедуры определения величины дисперсии значительно упрощаются. Рассмотрим два варианта.

Первый вариант соответствует ситуации, когда ширина полосы пропускания объекта или системы больше ширины частотного спектра воздействия на входе $S_f(\omega)$ и в пределах полосы пропускания $A(\omega) \approx A = \text{const}$ (рис. 8.10, а). В данном случае частотный спектр отклика $S_x(\omega)$ однозначно определяется спектром входного воздействия

$$S_x(\omega) \approx A^2(\omega)S_f(\omega) = A^2S_f(\omega). \quad (8.47)$$

Тогда

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{A^2}{\pi} \int_0^\infty S_f(\omega) d\omega = A^2\sigma_f^2. \quad (8.48)$$

Второй вариант соответствует ситуации, когда ширина полосы пропускания системы уже полосы частотного спектра воздействия на входе (рис. 8.10, б), и в пределах полосы пропускания системы можно считать $S_f(\omega) \approx S = \text{const}$. В данном случае частотный спектр отклика однозначно определяется частотной характеристикой системы. Следовательно,

$$S_x(\omega) \approx A^2(\omega)S_f(\omega) = SA^2(\omega). \quad (8.49)$$

Откуда следует

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{S}{\pi} \int_0^\infty A^2(\omega) d\omega. \quad (8.50)$$

Надо также отметить, что определение дисперсий рассмотренных величин может быть осуществлено с использованием автокорреляционных функций $R(\tau)$, которые однозначно выражаются через функции спектральных плотностей $S_x(\omega)$.

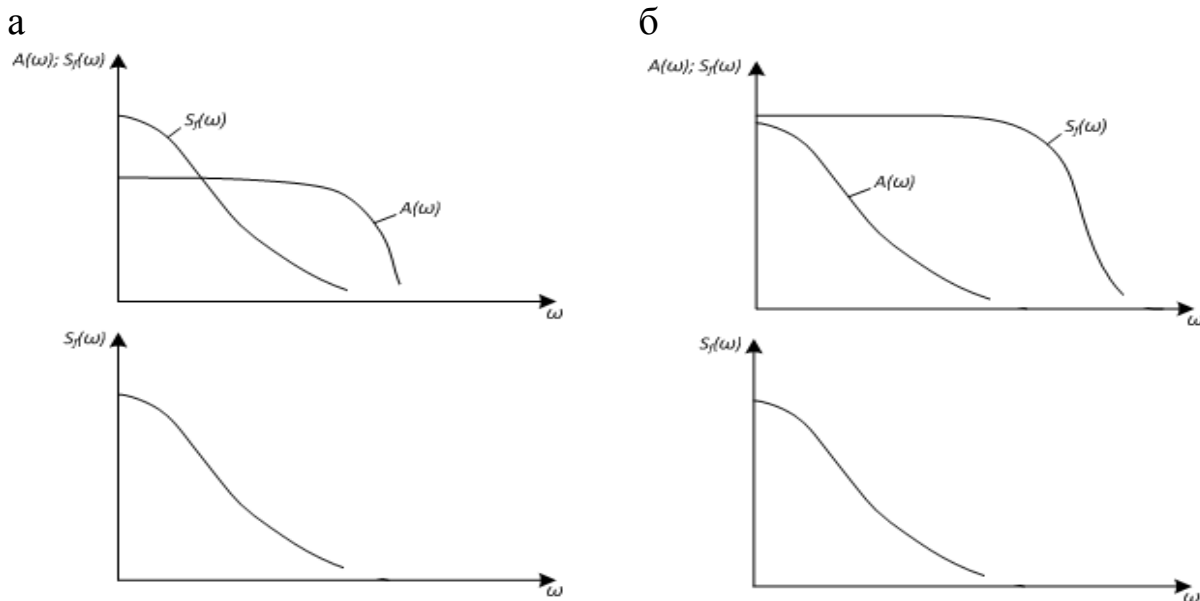


Рис. 8.10. Варианты соотношений частотных характеристик системы и спектральных характеристик входных воздействий:

- а – ширина полосы пропускания больше ширины частотного спектра воздействия;
- б – ширина полосы пропускания уже полосы частотного спектра воздействия

Дисперсия результирующего отклика $\sigma_{x\Sigma}^2$, обусловленная наличием нескольких независимых откликов X_i , определяется через дисперсии этих откликов σ_i^2 из выражения

$$\sigma_{x\Sigma}^2 = \sum_{(i)} \sigma_i^2; \quad i \in I. \quad (8.51)$$

В относительно редких случаях, когда между отдельными откликами существует корреляция, в выражении (8.51) появляются дополнительные слагаемые, содержащие соответствующие парные корреляционные моменты.

Определение значений энтропийных коэффициентов на выходе по характеристикам воздействий и свойствам объекта может быть осуществлено следующими способами.

Значение величины K_{ei} ($i \in I$) для каждого отдельного отклика x_i может быть определено исходя из вида закона распределения входного воздействия и частотной характеристики объекта или системы по каждому из соответствующих каналов поступления воздействий.

Для линейного объекта или системы, когда АЧХ приблизительно постоянна в пределах ширины частотного спектра воздей-

ствия на входе (см. рис. 8.10, а), закон распределения отклика будет соответствовать закону распределения входного воздействия. В таком случае можно считать

$$K_{ex} \approx K_{ef}. \quad (8.52)$$

В другой ситуации, когда ширина полосы пропускания системы уже полосы частотного спектра воздействия на входе (см. рис. 8.10, б), закон распределения отклика будет определяться видом закона распределения входного воздействия и видом АЧХ. То есть будет иметь место зависимость вида

$$K_e = \varphi_2(K_{ef}; A(\omega)). \quad (8.53)$$

Методики определения закона распределения отклика для рассматриваемого случая приведены в специальной литературе, например в книге [25].

При исследовании трансформации энтропийных свойств законов распределения параметров в статических режимах (что представляет наибольший интерес для многих практических задач) функция φ_2 вырождается в коэффициент преобразования закона распределения k_{ke} .

В общем случае значение коэффициента k_{ke} будет нелинейно зависеть от характеристик исходного воздействия и параметров системы. Так, например, при прохождении какого-либо воздействия f через систему согласно выражениям (8.15) и (8.31) можно записать

$$k_{ke} = \frac{K_{ex}}{K_{ef}} = \frac{\Delta_{ex}}{\sigma_x} \frac{\sigma_f}{\Delta_{ef}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_x} e^{[H_x - H_f]}, \quad (8.54)$$

где K_{ex} , K_{ef} – энтропийные коэффициенты; H_x , H_f – энтропии воздействия и выходного параметра, соответственно.

Используя выражения (8.15), (8.31) и (8.54), значения k_{ke} можно определить экспериментальным путем. В ряде частных случаев коэффициент k_{ke} может быть определен аналитическим путем или эвристически с использованием некоторых допущений. Так, если предположить, что параметры x и f распределены по одному и тому же закону,

например, равномерной плотности с $K_e = 1,73$, то очевидно, что согласно выражению (8.31), $k_{ke} = 1$. Аналогичная ситуация будет иметь место и в случае, рассмотренном выше (см. рис. 8.10, а), когда входное воздействие практически без искажения проходит на выход объекта. В данной ситуации закон распределения отклика будет таким же, как и у входного воздействия, и $k_{ke} = 1$. В ряде случаев значения коэффициентов моделей энтропийных потенциалов (K_e и k_{ke}) могут быть определены эмпирическим путем исходя из определенных аналогий. Так, например, известно, что распределение вероятностей значений напряжения сети, нестабильность которого обусловлена воздействием случайных подключений и отключений различных потребителей электрической энергии, достаточно адекватно описывается треугольным законом распределения, или законом Симпсона с $K_e = 2,02$. Изменение в определенных пределах коммутируемых мощностей, а также подключений и отключений потребителей при достаточно большом их количестве в основном сказывается на изменении величины СКО. В этом случае приближенно можно считать $K_{ex} \approx \text{const} = 2,02$.

Другой частный пример, когда воздействие переменного электромагнитного поля с определенной частотой на неэкранированные объекты (различные приборы, линии связи и др.) приводит к появлению в них «наводок» паразитных сигналов, которые также изменяются по гармоническому закону с частотой входного воздействия. В данном случае воздействие и отклик подчиняются так называемому арксинусоидальному закону распределения с $K_e = 1,11$, и, следовательно, $K_{ef} = K_{ex} = 1,11$; $k_{ke} = 1$.

Для упрощения процедуры решения задач в типовых ситуациях значения коэффициентов K_e и k_{ke} могут быть заранее вычислены и табулированы.

Энтропийный коэффициент результирующего отклика $K_{e\Sigma}$, сформированного наличием нескольких воздействий, может быть определен по методике, предложенной в работе [24], суть которой состоит в следующем.

Для определения $K_{e\Sigma}$ в случае композиции некоррелированных случайных откликов разработаны специальные графики (номограммы) для сочетаний основных типовых законов распределения. Для определения $K_{e\Sigma}$ сначала вычисляется вспомогательная величина $P = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}$,

характеризующая относительный вес дисперсии σ_2^2 в суммарной дисперсии $(\sigma_2^2 + \sigma_1^2)$ и являющаяся входной переменной для обращения к соответствующему графику, описывающему композицию этих двух законов распределения. Затем из графика (по оси ординат) определяется величина $K_{e\Sigma}$. Соответствующие графики, методики и примеры решения задач по определению $K_{e\Sigma}$ приведены в работе [24].

В случае, если отклики X_i ($i \in I$) жестко коррелированы, то очевидно, что законы их распределения будут в значительной мере похожими. Отсюда следует, что $K_{ei} \approx K_e$ ($i \in I$). И для определения энтропийных коэффициентов в таком случае могут быть использованы вышеизложенные методы.

Определение базовых значений на выходе по характеристикам воздействий и свойствам объекта также может быть определено на основании характеристик влияющих воздействий и характеристик объекта.

Так, например, для наиболее характерной ситуации, когда в качестве величины X_n выбирается математическое ожидание параметра m_x , ее определение может быть осуществлено через передаточную функцию объекта $W_o(p)$ и величину математического ожидания входного воздействия m_f в виде

$$m_x = m_f W_o(p). \quad (8.55)$$

В частной, но весьма распространенной ситуации, когда входное воздействие $f(t)$ представляет собой стационарный (или псевдостационарный) процесс ($m_f \sim \text{const}$), выражение (8.55) упростится путем перехода к статическому режиму

$$m_x = m_f W(p) \Big|_{p=0} = m_f W(0) = m_f K_o, \quad (8.56)$$

где K_o – коэффициент передачи объекта.

Для безынерционного нелинейного объекта, статическая характеристика которого является нечетной и описывается зависимостью вида $x = \varphi(f)$, взаимосвязь между величинами рассматриваемых математических ожиданий будет описываться с помощью коэффициента статистической линеаризации для средних значений k_{c0} . В отличие

от коэффициента k_{c1} , рассмотренного выше, этот коэффициент описывает прохождение неслучайной составляющей m_f через объект по балансу среднего значения параметра на выходе. То есть его определение осуществляется через следующие соотношения:

$$k_{c0} = \frac{m_x}{m_f} = \frac{M[\varphi(f)]}{m_f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(f)p(f)df}{m_f}. \quad (8.57)$$

Используя соотношения (8.57), можно заранее рассчитать выражения величин k_{c0} для типовых объектов и различных вариантов законов распределения влияющих воздействий. Такие данные для ряда типовых вариантов имеются в специальной справочной литературе.

Для линейных объектов базовое значение результирующего отклика $X_{n\Sigma}$, обусловленного наличием нескольких независимых откликов X_i ($i \in I$), определяется на основании принципа суперпозиции.

Для нелинейных систем статическая характеристика может быть построена по статическим характеристикам составляющих звеньев, исходя из структуры системы, графическим путем.

В других частных случаях, когда, например, в качестве величины X_n выбираются диапазон изменения, предельно-допустимое значение и другие, ее значения, чаще всего, задаются директивно.

8.4. Использование методов ТЭП для решения прикладных задач мониторинга и управления

Организация мониторинга эволюции систем на основе методов ТЭП основывается на анализе информационных портретов и энтропийных портретов в пространстве параметров ЭП. Данные портреты позволяют наглядно представлять и исследовать эволюцию этих состояний. Конкретные и наглядные примеры приведены выше (разд. 8.1). Анализируя перемещение изображающих точек, соответствующих различным этапам эволюции систем, представляется возможным осуществлять «превентивный» мониторинг, выявляя намечающиеся тенденции изменения этих состояний.

Управление качеством продукции, очевидно, должно быть направлено на уменьшение величин ЭП определяющих параметров. Такая задача может быть решена разными способами. Первый из них основан на минимизации величины σ . Второй способ состоит в организации таких мероприятий и воздействий на объект, при которых произойдет трансформация закона распределения вариаций выходного параметра, обеспечивающая уменьшение величины энтропийного коэффициента K_e . Как следует из вышеизложенных данных о возможных диапазонах варьирования величины K_e , такой способ организации управления позволяет целенаправленно уменьшить величину Δ_e на десятки процентов. То есть фактически появляется дополнительный канал внесения управляющих воздействий для стабилизации выходных параметров, определяющих свойства выпускаемой продукции.

Применительно к дефростационной камере, рассмотренной в разд. 8.1, сказанное можно проиллюстрировать следующим образом. Неизменность состояния неопределенности температурного режима в камере характеризуется перемещением изображающей точки по кривой $\Delta_e = K_e \sigma = \text{const}$, которая называется линией равного энтропийного потенциала, или изотропой. Требования к качеству поддержания температурного режима могут быть сформулированы в виде условия $\Delta_e \leq \Delta_{e(\text{max})}$, где $\Delta_{e(\text{max})}$ – критическое или предельно допустимое значение величины ЭП поддержания температуры. Указанному условию соответствует область пространства параметров ЭП, находящаяся под изотропой $\Delta_{e(\text{max})} = C_{\text{кр}} = \text{const}$. (Данная линия показана на рис. 8.5.) Из такого представления становится очевидным, что управление качеством процесса регулирования температуры может быть осуществлено как путем целенаправленного изменения величины СКО разброса температуры относительно заданного уставного значения, так и путем изменения закона распределения значений разброса. Применительно к данному примеру требуемая «деформация» траектории состояния неопределенности, например, с целью «увода» ее под «критическую» изотропу, может быть осуществлена за счет ослабления или частичной компенсации указанных возмущений на уровне модернизации объекта управления. Это, например, как отмечалось ранее, может быть достигнуто путем установки дополнительного шлюзового отсека перед загрузочной дверью. Другой путь решения указанной задачи может быть основан на уменьшении диапа-

зона регулирования штатного двухпозиционного регулятора, что приведет к уменьшению величины СКО. В случае использования функциональных законов регулирования количество настроечных параметров может увеличиться. Так, например, при использовании промышленного ПИД-регулятора настроечных параметров будет три: k – коэффициент передачи, T_1 – постоянная интегрирования и T_2 – время предварения. При изменении настроечных параметров будет изменяться передаточная функция регулятора, а следовательно, вид и качество процесса регулирования температуры. Следствием этого будет изменение значений координат изображающих точек, что приведет к «деформации» всей траектории.

Более подробно методы решения подобных задач рассмотрены в статьях [18, 21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы классической и современной теории управления: Учеб./ Под ред. Н.Д. Егупкина. В 5 т. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
2. **Бесекерский В.А., Небылов А.В.** Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука, 1983.
3. Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении: Учеб. пособие / А.А. Бобцов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин, О.В. Слита, А.В. Ушаков. – СПб.: НИУ ИТМО, 2013.
4. **Лазарев В.Л.** Робастные системы управления в пищевой промышленности: Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2003.
5. **Бесекерский В.А., Попов Е.П.** Теория систем автоматического управления. Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2003.
6. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев, Н.Н. Кузьмин, В.Б. Яковлев; Под ред. В.Б. Яковлева. 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009.
7. **Юревич Е.И.** Теория автоматического управления. – Л.: Энергия, 1975.
8. **Налимов В.В., Чернова Н.А.** Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.
9. Измерения в промышленности: Справ. В 3 т. / Под ред. П. Профоса; Пер. с нем. под ред. Д.И. Агейкина. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1990.
10. **Меледина Т.В., Данина М.М.** Математические методы планирования экспериментов в биотехнологии: Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2005.
11. **Евстигнеева Т.Н., Брусенцев А.А., Забодалова Л.А.** Основные принципы переработки сырья растительного, животного, микробиологического происхождения и рыбы: Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2010.
12. **Василинец И.М., Колодязная В.С., Ишевский А.Л.** Состав и свойства пищевых продуктов: Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2001.
13. **Брусиловский Л.П., Вайнберг А.Я.** Приборы технологического контроля в молочной промышленности: Справ. – М.: Агропромиздат, 1990.

14. **Забодалова Л.А.** Технохимический и микробиологический контроль на предприятиях молочной промышленности. – СПб.: Троицкий мост, 2009.
15. **Бегунов А.А.** Метрологическое обеспечение производства пищевой продукции: Справ. – СПб.: МП «Издатель», 1992.
16. **Косой В.Д., Виноградов Я.И., Малышев А.Д.** Инженерная реология биотехнологических сред. – М.: ГИОРД, 2005.
17. Информационные технологии пищевых производств в условиях неопределенности (Системный анализ управления и прогнозирования с элементами компьютерного моделирования) / А.Е. Краснов, О.В. Красуля, О.В. Большаков, Т.В. Шленская. – М.: ВНИИМ, 2001.
18. **Лазарев В.Л.** Энтропийный подход к организации мониторинга и управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 6. С. 61–68.
19. **Лазарев В.Л.** Исследование систем на основе энтропийных и информационных характеристик // Журнал технической физики. 2010. № 2. С. 1–7.
20. **Lazarev V.L.** The Theory of Entropy Potentials, Basic Concepts, Results and Applications// Pattern Recognition and Image Analysis. 2011. Vol. 21. № 4. Pp. 637–648.
21. **Лазарев В.Л.** Теория энтропийных потенциалов: Монография. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2012.
22. Управление в условиях неопределенности: Монография / С.В. Прокопчина, М.Ю. Шестопапов, Л.В. Уткин, М.С. Куприянов, В.Л. Лазарев, Д.Х. Имаев, В.Л. Горохов, Ю.А. Жук, А.В. Спесивцев; Под ред. С.В. Прокопчиной. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014.
23. **Бурдун Г.Д., Марков Б.Н.** Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1975.
24. Электрические измерения неэлектрических величин / А.М. Туричин, П.В. Новицкий, Е.С. Левшина и др.; Под ред. П.В. Новицкого. – Л.: Энергия, 1975.
25. **Левин Б.Р., Шварц В.** Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. РЕЖИМЫ РАБОТЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ.....	6
1.1. Основные положения. Классификация режимов работы	6
1.2. Работа систем управления в переходных режимах	7
1.3. Статические режимы систем управления.....	11
1.4. Динамические режимы систем управления	15
2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....	27
2.1. Основные положения.....	27
2.2. Случайные величины и случайные функции.....	30
2.3. Случайная величина и ее характеристики.....	30
2.4. Случайная функция и ее характеристики.....	34
3. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЪЕКТЫ И СИСТЕМЫ.....	40
3.1. Основные положения.....	40
3.2. Преобразование стационарного случайного воздействия динамической линейной системой	40
3.3. Пример исследования влияния случайных воздействий на управление процессом термообработки	44
3.4. Преобразование стационарного случайного воздействия нелинейной системой.....	52
4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	67
4.1. Основные положения.....	67
4.2. Аналитический метод получения математического описания ...	67
4.3. Экспериментальные методы получения математического описания	75
5. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....	81
5.1. Основные положения. Методы и технические средства определения характеристик случайных воздействий	81
5.2. Особенности экспериментальных исследований случайных воздействий в биотехнологической промышленности	83

5.3. Типовые математические модели характеристик случайных воздействий	93
5.4. Методы моделирования и расчета характеристик случайных воздействий	94
6. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....	98
6.1. Основные положения.....	98
6.2. Постановка задачи синтеза систем управления.....	98
6.3. Синтез систем управления при наличии случайных воздействий.....	104
6.4. Синтез робастных систем управления при наличии ограниченной информации о случайных воздействиях	113
7. ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНТРОПИЙНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ.....	127
7.1. Основные положения.....	127
7.2. Исследование эффективности работы системы управления с использованием энтропийных оценок параметров	129
8. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ	137
8.1. Основные понятия и определения.....	137
8.2. Обобщение понятий энтропийных потенциалов	171
8.3. Методы определения энтропийных потенциалов	172
8.3.1. Определение энтропийных потенциалов на основе результатов наблюдений (метод прямого оценивания)...	172
8.3.2. Определение энтропийных потенциалов в условиях априорной неопределенности (метод робастного оценивания).....	174
8.3.3. Определение энтропийных потенциалов на основе характеристик входных воздействий.....	180
8.4. Использование методов ТЭП для решения прикладных задач мониторинга и управления	187
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	190

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ



Институт холода и биотехнологий является преемником Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ), который в ходе реорганизации (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 2209 от 17 августа 2011г.) в январе 2012 года был присоединен к Санкт-Петербургскому национальному исследовательскому университету информационных технологий, механики и оптики.

Созданный 31 мая 1931года институт стал крупнейшим образовательным и научным центром, одним из ведущих вузов страны в области холодильной, криогенной техники, технологий и в экономике пищевых производств.

За годы существования вуза сформировались известные во всем мире научные и педагогические школы. В настоящее время фундаментальные и прикладные исследования проводятся по 20 основным научным направлениям: научные основы холодильных машин и термотрансформаторов; повышение эффективности холодильных установок; газодинамика и компрессоростроение; совершенствование процессов, машин и аппаратов криогенной техники; теплофизика; теплофизическое приборостроение;

машины, аппараты и системы кондиционирования; хладостойкие стали; проблемы прочности при низких температурах; твердотельные преобразователи энергии; холодильная обработка и хранение пищевых продуктов; тепломассоперенос в пищевой промышленности; технология молока и молочных продуктов; физико-химические, биохимические и микробиологические основы переработки пищевого сырья; пищевая технология продуктов из растительного сырья; физико-химическая механика и тепло-и массообмен; методы управления технологическими процессами; техника пищевых производств и торговли; промышленная экология; от экологической теории к практике инновационного управления предприятием.

На предприятиях холодильной, пищевых отраслей реализовано около тысячи крупных проектов, разработанных учеными и преподавателями института.

Ежегодно проводятся международные научные конференции, семинары, конференции научно-технического творчества молодежи.

Издаются научно-теоретический журнал «Вестник Международной академии холода» и Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Холодильная техника и кондиционирование», Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств», Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Экономика и экологический менеджмент».

В вузе ведется подготовка кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре.

Действуют два диссертационных совета, которые принимают к защите докторские и кандидатские диссертации.

Вуз является активным участником мирового рынка образовательных и научных услуг.

www.ifmo.ru

ihbt.ifmo.ru

Лазарев Виктор Лазаревич

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Учебное пособие

Ответственный редактор

Т.Г. Смирнова

Редактор

Т.В. Белянкина

Компьютерная верстка

Д.Е. Мышковский

Дизайн обложки

Н.А. Потехина

Подписано в печать 31.08.2015. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 11,4. Печ. л. 12,25. Уч.-изд. л. 12,0
Тираж 500 экз. Заказ № С 10

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9