

АДАПТИВНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ

Учебное пособие Часть 1



Санкт-Петербург

2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

АДАПТИВНЫЕ АНТЕННЫЕ РЕШЕТКИ

Учебное пособие

Часть 1

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2016

Адаптивные антенные решетки. Учебное пособие в 2-ух частях. Часть 1.: В.А. Григорьев, С.С. Щесняк, В.Л. Гулюшин, Ю.А. Распаев, О.И. Лагутенко, Щесняк А.С./ под общ. ред. В.А. Григорьева. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – с. 179.

Излагаются основные теоретические сведения, описаны принципы построения, методы и алгоритмы адаптации адаптивных антенных решеток (ААР). Приведены выражения для оптимальных весовых коэффициентов ААР, для ряда классов алгоритмов адаптации, основанных на процедурах непосредственного вычисления, градиентных процедурах первого и второго порядков, процедурах с нелинейными правилами принятия решения. Для алгоритмов адаптации анализируются основные характеристики. Приведены сведения о влиянии ААР на характеристики систем радиосвязи.

Учебное пособие может быть полезно студентам, специалистам в области радиосвязи и адаптивных систем обработки сигналов.

Издание предназначено для студентов, обучающихся по направлению 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета ИКТ от 18 октября 2015 года, протокол №7.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© Авторы, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ..... | 5 |
| 1.1. Применение адаптивной обработки сигналов в системах радиосвязи | 5 |
| 1.2. Характеристика адаптивных методов формирования и обработки сигналов | 13 |
| 1.3. Общие сведения об адаптивных антеннах | 18 |
| 1.5. Представление сигналов в адаптивных антеннах | 25 |
| 1.6. Основные параметры и характеристики адаптивных антенных решёток | 39 |
| ГЛАВА 2. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА АДАПТАЦИИ..... | 45 |
| 2.1. Целевая функция и критерий оптимальности | 45 |
| 2.2. Минимум среднеквадратической ошибки | 52 |
| 2.3. Максимум отношения сигнал/(шум + помеха)..... | 59 |
| 2.4. Связь критерия максимума отношения сигнал/(шум + помеха) с задачей синтеза характеристики направленности по максимуму коэффициента направленного действия..... | 63 |
| 2.5. Максимум отношения правдоподобия | 64 |
| 2.6. Минимум мощности выходного сигнала | 66 |
| 2.7. Максимум сигнала при полном подавлении помех | 71 |
| 2.8. Взаимосвязь между весовыми коэффициентами при использовании разных критериев оптимальности | 75 |
| ГЛАВА 3. МЕТОДЫ АДАПТАЦИИ | 81 |
| 3.1. Общие сведения о методах адаптации | 81 |
| 3.2. Итерационные прямые методы адаптации | 86 |
| 3.3. Градиентные методы адаптации | 89 |
| 3.4. Параметрические методы адаптации..... | 94 |
| 3.5. Влияние количества выборок сигнала на качество адаптации..... | 101 |
| 3.6. Неитерационные методы адаптации..... | 107 |
| ГЛАВА 4. АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ | 116 |
| 4.1. Общая характеристика алгоритмов адаптации | 116 |
| 4.2. Алгоритмы минимизации среднеквадратической ошибки | 123 |
| 4.3. Алгоритмы максимизации отношения мощности сигнала к мощности помехи..... | 137 |
| 4.4. Алгоритмы минимизации мощности помех и шумов | 143 |

| | |
|--|-----|
| 4.5. Алгоритмы наискорейшего спуска..... | 148 |
| 4.6. Алгоритмы сопряжённых градиентов и сопряжённых направлений..... | 155 |
| 4.7. Алгоритмы адаптации второго порядка..... | 157 |
| 4.8. Квазиньютоновские алгоритмы | 158 |
| 4.9. Оптимизация сходимости градиентных алгоритмов адаптации первого порядка | 159 |
| 4.10. Алгоритмы случайного поиска | 163 |
| 4.11. Итерационные рекуррентные алгоритмы адаптации..... | 169 |
| 4.12. Неитерационные прямые алгоритмы | 170 |

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

1.1. Применение адаптивной обработки сигналов в системах радиосвязи

Реализация мечты человечества о едином информационном пространстве, в котором каждому индивидууму доступно получение в любое время в любой точке Земли необходимых ему услуг связи в требуемом объеме независимо от условий передвижения, во многом зависит от достижений в области радиосвязи. Во многих ситуациях именно средства радиосвязи дают единственную возможность для обмена информацией. Роль радиосвязи в обществе и технике постоянно растёт. На основе средств радиосвязи строят высокоэффективные системы управления производственными, технологическими и другими процессами и техническими объектами.

Темпы развития радиосвязи поражают воображение. Смена поколений технологий радиосвязи происходит примерно один раз в 3...5 лет. Бесчисленное число приложений позволило ей прочно войти в жизнь каждого человека. Классификация систем радиосвязи включает огромное количество видов, отличающихся назначением и характеристиками, обеспечивающих удовлетворение всех, даже самых специфичных, нужд общества.

Наблюдаемый безудержный рост строительства систем радиосвязи всех типов и масштабов, включая применение спутниковых технологий, говорит о повышенном интересе общества к беспроводным технологиям.

Общей тенденцией развития радиоэлектронных средств и технологий их использования в сетях и системах связи является расширение объёма услуг связи, предоставляемых с помощью радиосвязи, повышение качества услуг и предоставление новых, ранее трудно осуществимых услуг.

Радиостанции, первоначально предназначенные только для реализации голосовой связи или передачи данных, за последние несколько десятилетий превратились в мощный инструмент решения телекоммуникационных задач и стали неотъемлемой частью высокотехнологичных информационных и управляющих систем. Современные радиостанции представляют собой симбиоз высокопроизводительной ЭВМ и средств телекоммуникаций, позволяющих получить по радиоканалам высококачественный доступ к информационным ресурсам в удобном для абонента виде.

Вместе с тем, развитие систем радиосвязи связано с постоянным преодолением различного рода проблем, противоречий и ограничений. Как правило, смена поколений в системах радиосвязи определяется очередным шагом в направлении решения таких проблем.

Расширение абонентской базы систем радиосвязи, увеличение объёмов потребляемых услуг абонентами, расширение спектра услуг, интеграция с радиотехническими системами, системами управления и др., ставят перед теорией и практикой радиосвязи множество новых задач, от эффективного решения которых зависит сама возможность достижения поставленной цели единого информационного пространства.

К наиболее сложным проблемам, которые с развитием средств радиосвязи только обостряются, относятся проблема электромагнитной совместимости систем и средств радиосвязи, связанная с ней проблема рационального распределения частотного ресурса для различных радиослужб, проблема повышения пропускной способности систем радиосвязи в условиях ограничения доступного для использования диапазона частот и др. К более частным проблемам относятся задачи борьбы с многолучевыми замираниями, управления мощностью излучения абонентских станций, задача обеспечения непрерывности связи при смене зон обслуживания и систем связи и др.

Список проблем и задач, которые необходимо решать в радиосвязи, можно продолжить, однако ключевой для решения всех указанных задач является проблема обеспечения требуемого уровня помехоустойчивости приёма сигналов в условиях роста пропускной способности радиоканалов и количества радиосредств.

Задача повышения помехоустойчивости приёмных устройств радиоэлектронных средств (РЭС) является классической и не утрачивает свою актуальность на протяжении десятилетий. Решение задачи повышения помехоустойчивости достигается за счёт совершенствования средств и способов формирования и обработки сигналов.

Устройства обработки сигналов (УОС) входят в состав приёмных устройств РЭС (рис. 1.1, где УФС – устройство формирования сигналов; ПРД – передатчик; ПРМ – приёмник) и обеспечивают выделение полезных сигналов $u_s(t)$, содержащих сообщение $s(t)$, из принимаемой смеси сигналов, шума и помех $x(t)$. Кроме того, на средства обработки возлагаются задачи по компенсации влияния нежелательных свойств каналов связи, например, борьба с многолучевостью распространения и, следовательно, с замираниями

уровня сигнала на входе приёмника, компенсация искажений, вызванных характеристиками канала связи и др. Наилучшим считается такое средство обработки, которое позволяет выделить на приёмной стороне сообщение $s^*(t)$ с наименьшими отличиями от переданного сообщения $s(t)$.

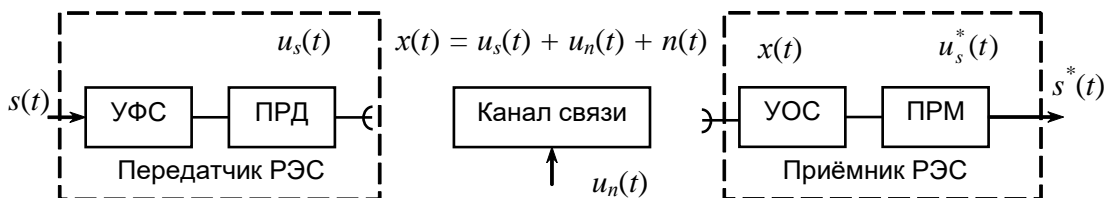


Рис. 1.1

Выделение полезного сигнала $u_s(t)$ из смеси с шумом $n(t)$ и помехами $u_n(t)$ возможно на основе использования различий по физическим параметрам: поляризации, частотным, временным параметрам, по направлению прихода, по форме сигналов. Ясно, что в тех или иных условиях более выгодным может оказаться какой-либо из этих признаков. Однако в условиях роста количества одновременно функционирующих РЭС и непредсказуемости параметров их излучений (особенно для подвижных систем радиосвязи) недостаточно использования какого-либо одного признака. Для эффективного решения задачи обеспечения требуемого уровня помехоустойчивости приёма требуется использование всех имеющихся физических возможностей по выделению сигналов из помех (мешающих сигналов различной природы). Только тогда может быть достигнута максимальная пропускная способность системы радиосвязи при заданной достоверности связи.

Особенности современных систем радиосвязи и, прежде всего, подвижность абонентов, частая смена мест установки базовых станций приводят к высокой динамике изменения сигнально-помеховой обстановки (СПО) и непредсказуемости параметров помех. Это говорит о необходимости подстройки характеристик средств обработки сигналов для каждого конкретного случая СПО. Такая подстройка возможна за счёт адаптивной обработки сигналов.

Адаптивная обработка сигналов является одним из способов решения ряда проблем в радиотехнических системах и системах связи. С адаптивной обработкой сигналов связывают возможность реализации потенциальных характеристик радиоэлектронных систем в условиях динамично изменяющейся и постоянно усложняющейся электромагнитной обстановки. Обострение проблем обеспечения требуемого уровня помехоустойчивости,

электромагнитной совместимости, увеличение потребностей в пропускной способности, повышение требований к качеству функционирования радиотехнических систем и систем связи ставят всё новые задачи, требующие скорейшей разработки эффективных способов адаптивной обработки сигналов.

Интерес к адаптивной обработке сигналов существенно повышается в связи с их возможностями по подавлению мешающих сигналов, в том числе при минимуме априорных сведений об их параметрах [1–5,110,123,127,138]. В системах подвижной и фиксированной связи третьего, четвертого и пятого поколений (3G, 4G и 5G) предусматривается применение адаптивных антенн (в англоязычной литературе «интеллектуальные» антенны), позволяющих бороться с эффектами многолучёвости, расширить зону обслуживания одной базовой станции, снизить излучаемую мощность абонентских и базовых станций, повысить число одновременно работающих в одной зоне обслуживания абонентов, повысить пропускную способность каналов управления и трафика, устранить влияние внутрисистемных и межсистемных помех, действующих в полосе частот полезного сигнала, выровнять мощности сигналов от разноудалённых абонентов на входе приёмного устройства, осуществлять оперативное управление мощностью излучения, решать задачи местоопределения, обеспечения минимума излучения в направлениях затрагиваемых радиоэлектронных средств и др. Все эти возможности реализуются благодаря способности настройки адаптивных передающих фазированных антенных решёток (АФАР) и приёмных адаптивных антенных решёток (ААР) на максимально эффективный приём полезного сигнала и подавление мешающих.

К традиционным средствам обработки сигналов, используемых в настоящее время, можно отнести адаптивный разнесённый приём сигналов, разделение сигналов за счёт технологии ММО, приём с помощью Rake-приёмников [179,184,190,195,199]. В оборудовании фиксированного радиодоступа [203–208] используются направленные свойства антенн, адаптивное (динамическое) управление доступным в зоне обслуживания частотным ресурсом. Адаптивная антенна системы Tsunami [203] позволяет в секторе 60° вырезать до трёх направлений, поражённых помехами шириной 3° , в масштабе реального времени. Кроме того, используется адаптивная подстройка поляризационных свойств приёмных и передающих антенн для получения преимуществ по разделению сигналов, передаваемых на одной

частоте. Для борьбы с многолучевыми помехами используется адаптивный временной корректор совместно с направленными антеннами. Общей тенденцией техники передающих и приемных устройств является увеличение количества антенн и усложнение способов формирования и обработки сигналов.

Аналогичные меры приняты для повышения ёмкости и помехоустойчивости в системах радиодоступа стандарта IEEE 802.11a/b/g/n/ac/ad.

В системах подвижной связи третьего и четвертого поколений (UMTS) используются адаптивные антенные решётки с алгоритмами адаптации, основанными на уравнениях Винера–Хопфа.

В зарубежных публикациях большое внимание уделяется развитию направления «интеллектуальных» антенн и «программируемого» радио [179,192–198]. Системы следующих поколений радиосвязи (4G, 5G) неразрывно связываются с понятием адаптации на всех уровнях, начиная с физического уровня радиоэлектронных средств и заканчивая пользовательским интерфейсом, выбором сети связи, доступной в данный момент и наиболее подходящей для получения требуемых услуг связи.

Для разработки идеологии адаптивных и «интеллектуальных» средств радиосвязи создано множество исследовательских групп в России, Европе, США и других странах.

Результаты исследований содержат конкретные рекомендации и говорят о получении значительного выигрыша в помехоустойчивости и, следовательно, в скорости обмена информацией для систем радиосвязи следующих поколений (3G, 4G, 5G) [179,182–184,198]. Упор в этих исследованиях сделан на традиционные способы адаптивной обработки сигналов. В системах связи второго поколения (например, стандарта AMPS) известны примеры применения адаптивных антенных решёток, осуществляющих захват полезного сигнала и автосопровождение максимума диаграммы направленности антенны базовой станции за источником сигнала. Это позволило существенно увеличить зону обслуживания одной базовой станции (за счёт использования направленных свойств антенны и получаемого таким образом энергетического выигрыша) и существенно сократить количество базовых станций, необходимых для покрытия всей зоны обслуживания системы связи. Известны примеры модернизации базовых станций стандарта NMT-450, дающие выигрыш в мощности излучения для абонентских станций до десяти раз, за счёт использования

автосопровождения главным лучом диаграммы направленности антенны активной абонентской станции.

Огромный интерес к адаптивным системам обработки сигналов проявляется военными ведомствами, так как одной из важнейших задач военных систем является устойчивое функционирование в условиях воздействия преднамеренных помех [22,39,74,119].

Анализ развития систем радиосвязи показывает, что основной тенденцией изменений на физическом уровне является усложнение устройств обработки для реализации новых качественных показателей. Так, в системах подвижной связи произошёл переход от некогерентной аналоговой обработки (поколение 1G) к когерентной цифровой обработке (поколение 2G). На следующем этапе при когерентной обработке сигналов предполагается использование сигналов с расширенным спектром (поколения 3G и 2G+). В поколении 3G уже ясно просматривается нацеленность на использование адаптивных устройств обработки (антенных решёток, корректоров и др.). Следующее поколение систем радиосвязи (поколения 4G и 5G) предполагает широкое использование адаптации при решении задач физического уровня и реализации на этой основе прорыва по скорости обмена информацией и повторному использованию частотного ресурса. Из этого можно сделать вывод, что следующий этап развития средств обработки будет основан на совместном использовании различных способов адаптивной обработки сигналов и адаптивном управлении частотно-временными ресурсами с привязкой к конкретной территории.

Отметим, что важнейшую роль адаптивные системы обработки способны сыграть при решении проблемы электромагнитной совместимости. С их использованием возможна минимизация влияния мешающих непреднамеренных излучений (теоретически до нуля) и подавление любых мешающих сигналов, действующих в полосе частот полезного сигнала. Это открывает новые возможности для повторного немешающего использования одних и тех же диапазонов частот системами связи разных операторов в одной зоне обслуживания. Применение адаптивных систем обработки способно дать реальное сокращение норм частотно-территориального разнеса систем радиосвязи в десятки и сотни раз. Примеры решения подобной задачи для случая разнесения РЭС фиксированных спутниковой и наземной служб, работающих на одних частотах, известны.

Повышение помехоустойчивости систем радиосвязи напрямую связано с пропускной способностью. Например, для широко распространённых в

каналах управления протоколов случайного и детерминированного доступа к общему каналу известны выражения, связывающие среднюю пропускную способность систем радиосвязи, среднее время задержки доставки сообщения и среднюю вероятность ошибки на бит передаваемой информации [20,143]. В частности, для протокола со случайным доступом типа АЛОНА и S-АЛОНА выражение для средней пропускной способности определяется в виде [20,143]

$$S = Ge^{-G} P_{\text{пр}}, \quad P_{\text{пр}} = (1 - P_6)^m, \quad (1.1)$$

где G – входящая нагрузка при бесконечном числе абонентов в сети; S – средняя пропускная способность сети; $P_{\text{пр}}$ – вероятность правильного приёма пакета данных из m информационных символов; P_6 – средняя вероятность ошибки на бит с учётом помехоустойчивого кодирования.

Для систем с протоколами доступа типа М/D/1 для вероятности доведения сообщения за заданное время справедливо выражение [18]

$$F(T_3) = (1 - \rho) \sum_{i=1}^k \frac{\rho^i}{i!} \left(i - \frac{T_3}{T_{\text{прд}}} \right) \exp \left(-\rho \left(i - \frac{T_3}{T_{\text{прд}}} \right) \right) P_{\text{пр}}, \quad T_{\text{ож}} = \frac{T_{\text{прд}} \rho}{1 - \rho}, \quad (1.2)$$

где $T_{\text{прд}} = mnT_c$ – время передачи сообщения, m – количество информационных символов в сообщении; n – количество циклов передачи; $\rho = \lambda T_{\text{прд}}$, λ – интенсивность потока заявок; $k = \lfloor T_3 / T_{\text{прд}} \rfloor$ – наименьшее целое, превышающее значение отношения; $P_{\text{пр}} = 1 - [1 - (1 - P_6)^m]^m$ – вероятность правильного декодирования сообщения из m символов за n циклов передачи; P_6 – средняя вероятность ошибки на бит; $T_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания.

Для сеансного режима вероятность правильного приёма должна учитывать вероятность синхронизации за заданное время, не превышающее допустимого значения:

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{синх р}}(T_{\text{синх}}) P_{\text{пр}}(n | T_{\text{синх}} < T_{\text{доп}}), \quad (1.3)$$

где $P_{\text{синх р}}(T_{\text{синх}})$ – вероятность синхронизации за время $T_{\text{синх}}$; $P_{\text{пр}}(n | T_{\text{синх}} < T_{\text{доп}})$ – вероятность передачи информации объёмом n символов при условии, что длительность установления синхронизации не превышает $T_{\text{доп}}$.

При таком практически прямом влиянии характеристик достоверности передачи информации на все информационные показатели систем связи, важно обеспечить их устойчивость к воздействию всевозможных помех. В частности, при увеличении вероятности ошибки на бит свыше $10^{-3} \dots 10^{-2}$, значение вероятности доставки сообщения при больших объёмах информации

становится неприемлемым, например, для протокола S-ALOHA значение пропускной способности при $n = 512$ становится равным $0,21...0,0021$, а при $n = 2048$ значение пропускной способности становится практически равным нулю. Аналогичная ситуация справедлива и для протокола M/D/1. В сеансном режиме ситуация усугубляется наличием этапа синхронизации [1,25,71,91–93,125,147]. В таком случае резко уменьшается пропускная способность (в приведённом примере потери составляют от 30 % до более чем 90 % от пропускной способности канала в идеальном случае), и увеличивается средняя задержка, вызванная большим количеством повторных передач. Большинство из применяемых протоколов обмена в таких условиях практически неработоспособны и не обеспечивают требований по пропускной способности, своевременности и достоверности информационного обмена. Для нормального функционирования протоколов обмена требуется обеспечивать среднюю вероятность ошибки на бит не более $10^{-4}...10^{-6}$.

Вышеизложенное указывает на важность обеспечения требований к вероятности ошибочного приёма на бит. Решение этой задачи возможно за счёт совершенствования средств и методов обработки сигналов на основе всех физических возможностей для селекции помех и применения помехоустойчивых кодов.

Таким образом, особенности задач, связанные с необходимостью обеспечения требуемых помехоустойчивости, электромагнитной совместимости РЭС в условиях неопределённости в параметрах излучений, требуют использования средств поляризационной, пространственной, временной обработок и устройств корреляционной (когерентной) обработки.

Применение ААР позволяет наряду с решением проблемы повышения помехоустойчивости решить задачи по повышению пропускной способности и устойчивости связи со случайным множественным доступом с кодовым разделением сигналов за счёт использования эффекта захвата одного из полезных сигналов. За счёт применения ААР возможным оказывается увеличение пропускной способности таких методов доступа на 20–30 %, что делает их сравнимыми с протоколами детерминированного доступа.

Использование в составе ААР пространственного и поляризационного фильтров позволяет решать задачи по определению пространственных координат источников излучений (в том числе мешающих), например

несанкционированных РЭС и абонентов системы, с высокой точностью. Высокая точность достигается применением методов сверхразрешения.

Применение ААР на физическом уровне способно привести к росту эффективности в значительной части областей применения радиосвязи, что непосредственно сказывается на качестве выполнения функциональных задач элементов систем связи.

1.2. Характеристика адаптивных методов формирования и обработки сигналов

Основными методами адаптивных формирования и обработки сигналов на радиочастоте являются методы формирования и обработки в пространственной, поляризационной и временной (частотной) областях, которые хорошо сочетаются с корреляционной обработкой сигналов. Общими для методов пространственной, поляризационной и временной обработок являются возможности построения высокоэффективных алгоритмов адаптивной настройки, которые нацелены на применение в конкретной сигнально-помеховой обстановке [1–6].

Применение **адаптивных пространственно-временных формирования и обработки сигналов (ПВОС)** обеспечивает высокую эффективность подавления помех, пространственное положение которых отлично от расположения источника полезного сигнала [1–3,13,26,102,103,110,127,163]. Методы адаптивной ПВОС обладают важными преимуществами, следующими из их свойств [1–3,26,102,110,163]:

- их использование не связано с потерей пропускной способности каналов связи в режиме передачи информации;
- они не приводят к усложнению электромагнитной обстановки;
- совместно с ПВОС могут применяться другие методы обработки, например, ММО и корреляционная обработка, при этом результирующая эффективность повышается;
- обнаружение и подавление помех методами адаптивной ПВОС возможно без априорной информации об их параметрах.

Применение методов ПВОС связано с рядом сложностей:

- ограничение количества подавляемых помех числом степеней свободы адаптивной антенной решётки;
- невозможность или низкая эффективность подавления помех, приходящих с направлений, близких к направлению прихода полезного сигнала;

- усложнение радиоэлектронных средств систем связи;
- появление инерционности, связанной с процессом адаптации.

На рис. 1.2 (кривая ПФ) в качестве примера приведена зависимость отношения сигнал/(помеха + шум) на выходе пространственного фильтра $h_{\text{ВЫХ}}^2$ от общего числа пространственно-различимых помех $L_{\text{п}}$. При расчётах использовались следующие параметры. Число элементов антенной решётки $N_{\text{а}} = 5$, помехи распределены равномерно по углу, мощность помех равна $P_{\text{п}} = 300\sigma_{\text{ш}}^2$, мощность сигнала $P_{\text{с}} = 0,1\sigma_{\text{ш}}^2$, где $\sigma_{\text{ш}}^2$ – мощность шума, $h_{\text{ВХ}}^2 = P_{\text{с}} / \sigma_{\text{ш}}^2$, $h_{\text{ВЫХ}}^2 = P_{\text{с Вых}} / (P_{\text{п Вых}} + \sigma_{\text{ш}}^2)$

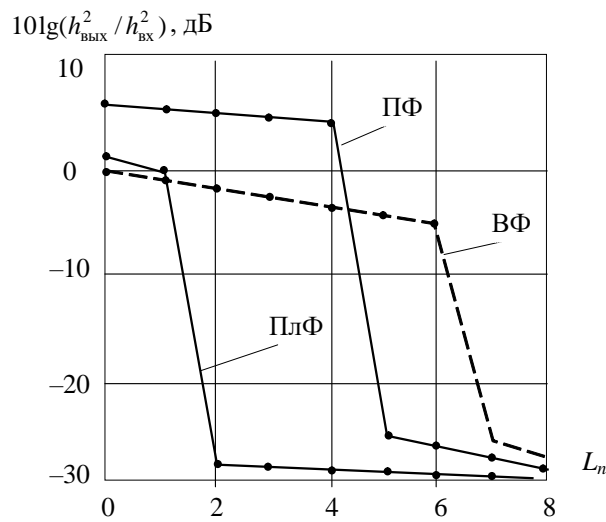


Рис. 1.2

На рис. 1.3 приведена диаграмма направленности (ДН) пространственного фильтра, соответствующая случаю $L_{\text{п}} = 5$. Из анализа ДН следует, что нули диаграммы направленности располагаются в направлении всех четырех помех, за счёт чего происходит полное подавления помех. При увеличении количества помех до пяти, нули ДН располагаются между направлениями прихода, поэтому полного подавления помех не происходит.

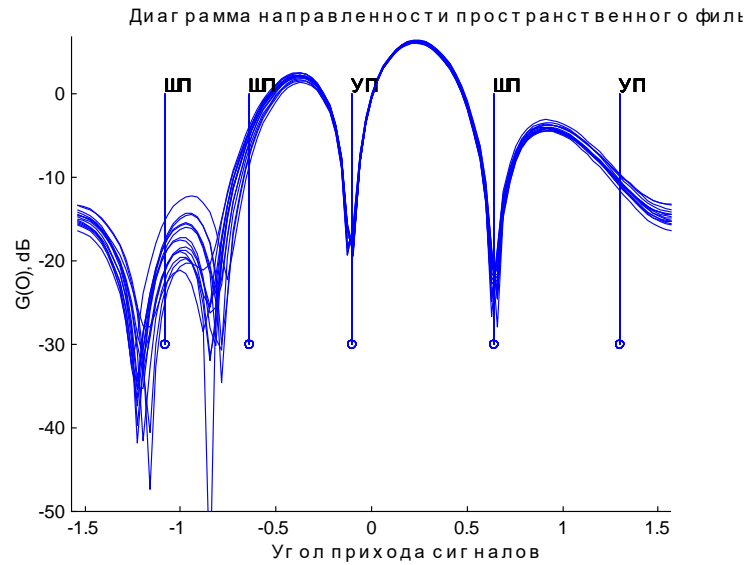


Рис. 1.3

Для временного фильтра наблюдается такая же зависимость $h_{\text{вых}}^2$ от числа узкополосных помех (УП) (кривая ВФ на рис. 1.2). Если же на входе временного фильтра присутствует широкополосная помеха (ШП), то отношение сигнал/(помеха + шум) уменьшается с увеличением мощности помехи при любом количестве элементов временного фильтра (рис. 1.4).

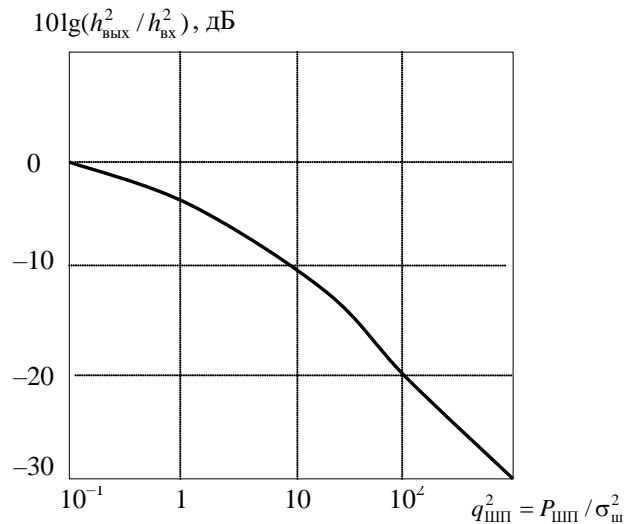


Рис. 1.4

Методы адаптивной поляризационной обработки находят все большее применение (например, в технологии телевидения DVB-NGH), и в ряде случаев дают не меньший выигрыш в помехоустойчивости, чем пространственно-временные методы. Кроме того, при различии полезного сигнала и помех по поляризации появляется возможность выделения

полезных сигналов на фоне помех даже в случаях совпадения направлений их прихода, т. е. при совпадении пространственных спектров сигнала и помехи. Методы поляризационно-временной обработки также допускают сочетание практически со всеми другими методами помехозащиты. Введение их в состав радиоэлектронных средств систем связи позволяет повысить пропускную способность за счёт повторного использования частоты, позволяет исключить эффект «ослепления» антенной решётки при попадании помехи в главный лепесток диаграммы направленности и т. д. [1,83,137,180].

Недостатки этих методов аналогичны недостаткам пространственно-временной обработки и связаны:

- с невозможностью подавления более одной помехи, что является следствием наличия всего одной степени свободы (в условиях дальней зоны);
- с невозможностью подавления помех с поляризацией, совпадающей с поляризацией полезного сигнала;
- с инерционностью, связанной с процессом адаптации.

Для поляризационного фильтра зависимость выходного отношения сигнал/(помеха + шум) (кривая ПлФ на рис. 1.2) аналогична зависимости для пространственного фильтра. Отличие заключается в том, что возможно подавление только одной помехи, отличной по поляризации от сигнала.

Методы обработки сигналов в условиях помех, использующие **временную обработку** для подавления сосредоточенных по спектру и времени помех также обладают рядом особенностей как положительных [1,4,5,91,92,103,105]:

- высокая степень подавления сосредоточенных помех (40–50 дБ);
- простота реализации и совместного использования с другими средствами;

так и отрицательных:

- невозможность подавления широкополосных помех в частотных фильтрах и импульсных помех большой длительности во временных селекторах;
- влияние на корреляционные свойства полезного сигнала, которое проявляется в появлении дополнительных боковых лепестков корреляционной функции и увеличении уровня боковых лепестков.

Для временного фильтра наблюдается такая же зависимость выходного отношения сигнал/(помеха + шум) от числа узкополосных помех (кривая ВФ на рис. 1.2). Если же на входе временного фильтра присутствует широкополосная помеха, то отношение сигнал/(помеха + шум) уменьшается

с увеличением мощности помехи при любом количестве элементов временного фильтра (см. рис. 1.4)

Основным методом обработки сигналов является метод **корреляционной обработки** (согласованной фильтрации) сигналов [5,25,91,157,176]. Для снижения влияния различных помех и повышения эффективности использования частотно-территориального ресурса все чаще применяют сигналы с расширенным спектром (СРС).

Широкое использование сигналов с расширенным спектром обуславливается многими факторами, основными из которых являются:

- независимость защитных свойств методов корреляционной обработки сигналов с расширенным спектром от количества станций помех, режимов их работы и пространственного положения;

- высокая помехоустойчивость радиоэлектронных систем с использованием СРС;

- малые затраты массогабаритных и энергетических ресурсов;

- возможность простого и эффективного решения задачи многостанционного доступа к ретранслятору большого числа абонентов, а также возможность реализовать одновременную передачу с кодовым разделением для увеличения пропускной способности систем передачи информации;

- возможность реализации адресного режима передачи информации управления объектами;

- возможность создания совмещённых радиоэлектронных средств (информационных, измерительных) и т. д.

Особенностью использования СРС является необходимость начальной синхронизации приёмного и передающего устройств по времени задержки и частоте [5,25,71,91,99,101,124,147].

К недостаткам использования СРС можно отнести:

- необходимость проведения этапа поиска и синхронизации, длительность которого зависит от условий сигнально-помеховой обстановки;

- снижение пропускной способности, пропорциональное выигрышу в помехоустойчивости, что не всегда приемлемо.

Все перечисленные методы формирования и обработки сигналов могут использоваться совместно в адаптивных антеннах.

1.3. Общие сведения об адаптивных антеннах

Основной особенностью адаптивных антенн (АА) является возможность управления формой характеристики направленности (ХН) с целью ослабления воздействия помех вплоть до полного их подавления. Управление ХН АА осуществляется путём изменения амплитудно-фазового распределения (АФР) поля в апертуре антенны. При известном распределении в пространстве источников сигналов и помех определение оптимального в некотором смысле АФР может быть выполнено относительно простыми средствами (например, решением известной задачи синтеза ХН). Однако возможно формирование оптимального АФР и в условиях априорной неопределённости сигнально-помеховой обстановки. В этом случае управление АФР производится посредством процессора с использованием минимальной информации о сигналах и их источниках.

Необходимая для работы АА информация может включать сведения о пространственных, поляризационных, временных, частотных параметрах сигналов и помех. Совокупность априорных сведений, необходимых для работы конкретной АА, принято называть опорным сигналом. Повышение отношения сигнала к смеси шума и помехи (сокращённо отношение сигнал/(помеха + шум) или ОСШП) достигается путём формирования минимумов ХН в направлениях на источники помех. При этом возможен автоматический учёт взаимной связи между антенными элементами, неидентичности каналов АА, выхода из строя отдельных элементов и т. п. Таким образом, форма ХН как бы приспосабливается к конкретной сигнально-помеховой обстановке с учётом всех факторов. Отсюда произошло название адаптивных антенн («адаптация» и означает приспособление). Подавление помех в АА возможно лишь при различных углах прихода полезных сигналов и помех, либо при различии их поляризационных параметров. Чем больше это различие, тем выше эффективность АА. В процессе адаптации обработка входящих на АА сигналов производится на частоте сигнала в реальном масштабе времени.

Адаптивной антенной называется совокупность многоэлементной антенны и адаптивного процессора, с помощью которого осуществляется автоматическое изменение АФР в раскрыве антенны.

Процесс адаптации заключается в целенаправленном изменении параметров управляемых элементов антенно-фидерного тракта, влияющих на АФР поля в раскрыве. Управление этими элементами осуществляется на основании априорных данных и информации, получаемой из различных

источников: с выходов элементов антенной решётки, с выхода всей антенны, а также из опорного сигнала. Цель и результат такого управления заключаются в достижении экстремума заданного показателя качества.

Параметры и характеристики адаптивных антенн изменяются для улучшения качества работы в условиях неопределённости параметров сигнально-помеховой обстановки, пространственного положения антенны и др.

Адаптация антенн может быть параметрической, структурной и функциональной. (рис. 1.5).



Рис. 1.5

Параметрическая адаптация предполагает использование неизменного по своему виду алгоритма адаптации при обработке сигналов с неизвестными параметрами, и неизвестных параметрах помех либо антенно-фидерного тракта.

Структурная адаптация подразумевает изменение алгоритма адаптации, т. е. его структуры (метода, критерия, параметров алгоритма) в процессе адаптации в рамках выполняемых функций.

Функциональная адаптация предполагает в зависимости от условий работы антенны и выполняемых функций в процессе функциональной адаптации осуществляется изменение (приспособление) вида (класса) алгоритма обработки сигналов применительно к решению новых задач.

В адаптивных антеннах под воздействием управляющих сигналов процессора изменяется АФР поля в раскрые антенны.

Основным способом управления является изменение комплексных коэффициентов передачи каналов отдельных элементов АР.

Комплексные коэффициенты передачи включают коэффициенты передачи амплитуды и фазовые сдвиги отдельных каналов. Эти коэффициенты называют весовыми коэффициентами (ВК).

На рис. 1.6 приведена обобщённая структурная схема N -элементной адаптивной антенны. Основными элементами АА являются диаграммообразующая схема (ДОС) и адаптивный процессор. Процессор осуществляет подстройку весовых коэффициентов в каналах ДОС и состоит из устройства реализации алгоритма управления (УРАУ) и устройства формирования опорного сигнала (УФОС). Принцип действия АА состоит в следующем. На выходе каждого из N антенных элементов формируется комплексный сигнал \dot{x}_n (n – номер элемента). Этот сигнал поступает в соответствующий канал ДОС, при прохождении которого, умножается на ВК \dot{w}_n . Затем все сигналы поступают в сумматор и на его выходе образуется результирующий сигнал \dot{y}_n .

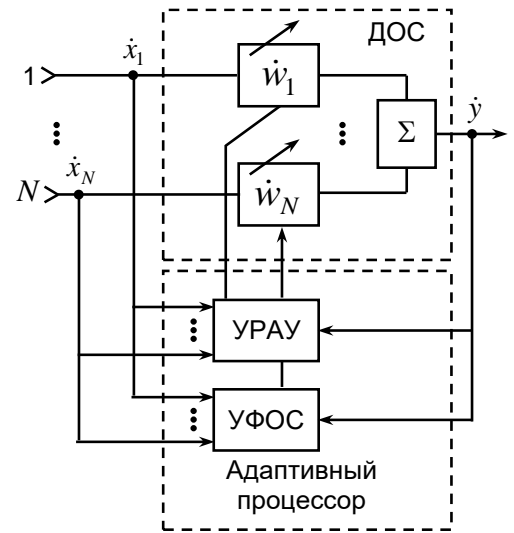


Рис. 1.6

Опорный сигнал, необходимый для функционирования процессора, вырабатывается в УФОС. Для этого используются априорные данные либо непосредственно сигналы \dot{x}_n и \dot{y} . На процессор наряду с опорным сигналом поступают также сигналы \dot{x}_n и (или) \dot{y} . Процессор по заложенному в него алгоритму управления обрабатывает эти данные и формирует управляющие воздействия на весовые коэффициенты. В процессе адаптации ВК подстраиваются до тех пор, пока качество выходного сигнала не будет удовлетворять заданному критерию. Реализация того или иного критерия качества (КК) выходного сигнала обеспечивается алгоритмом управления процессора.

Для достижения заданного КК в условиях априорной неопределённости используются различные методы теории оптимизации. Алгоритм адаптации представляет собой реализацию конкретного КК посредством выбранного метода адаптации. Алгоритмы адаптации и имеющийся набор исходных данных существенно влияют на структурную схему АА. Поэтому в реальной антенне могут быть в наличии не все связи, показанные на рис. 1.6.

Электродвижущая сила (ЭДС) $E_{\text{вых}}$ на выходе приёмной антенны определяется известным соотношением [17]

$$E_{\text{вых}} = Eh_{\text{д}}F(\theta_0, \varphi_0), \quad (1.4)$$

где E – напряжённость поля падающей плоской волны в области расположения антенны; $h_{\text{д}}$ – действующая длина антенны; θ_0, φ_0 – угловые координаты источника сигнала; $F(\theta_0, \varphi_0)$ – значение нормированной ХН антенны по напряжённости поля в режиме передачи в направлении на источник сигнала.

В произвольной точке пространства (рис. 1.7) поле $\dot{E}_+(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ источника определяется выражением

$$\dot{E}_+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = E_+(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый из начала координат 0 в точку наблюдения на определяемой поверхности S ; $E_+(\mathbf{r})$ – распределение амплитуды поля на поверхности S ; $\mathbf{k}\mathbf{r}$ – скалярное произведение; i – мнимая единица.

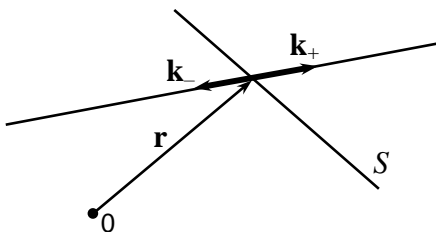


Рис. 1.7

В апертуре рассматриваемой антенны распределение поля E_S можно записать в виде

$$\dot{E}_{S-}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\rho}) = E_S e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}, \quad (1.6)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор, проведённый из начала координат в точку наблюдения на апертуре; E_S – амплитуда падающей плоской волны на апертуре.

Если с разных направлений приходит несколько плоских волн, то в правой части выражения (1.6) необходимо записать соответствующую сумму с учётом начальных фаз. В общем случае, когда источники непрерывно распределены в пространстве, формула (1.6) переходит в интегральное соотношение

$$\dot{E}_{S-}(\boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{E}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d\mathbf{k}, \quad (1.7)$$

где интегрирование ведётся по всем возможным направлениям вектора \mathbf{k} , т. е. по всем возможным проекциям этого вектора на координатные оси, а $\dot{E}(\mathbf{k})$ есть угловая плотность распределения комплексных амплитуд падающих элементарных плоских волн.

Рассмотрим выражение для ХН антенны в режиме передачи

$$\dot{F}_+(\mathbf{k}) = \int_{S_0} A_S(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} dS, \quad (1.8)$$

где S_0 – поверхность апертуры; $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор, проведённый из начала координат в точку на апертуре и определяющий текущее положение в апертуре элементарной площадки dS ; $A_S(\boldsymbol{\rho})$ – АФР поля на апертуре в режиме передачи.

Из формулы (1.8) видно, что ХН антенны в режиме передачи $F_+(\mathbf{k})$ представляет собой обратное преобразование Фурье от АФР поля на апертуре в том же режиме $A_S(\boldsymbol{\rho})$. Значит, АФР $A_S(\boldsymbol{\rho})$ можно записать в виде прямого преобразования Фурье от ХН $F_+(\mathbf{k})$. С точностью до постоянной

$$A_S(\boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d\mathbf{k}. \quad (1.9)$$

Если поле в апертуре формируется сходящейся волной, сопряжённой излучаемой волне той же антенны в режиме передачи. Угловое распределение излучённой волны представляет собой ХН антенны в режиме передачи. Соответственно, угловое распределение сопряжённой падающей волны есть не что иное, как ХН той же антенны в режиме приёма $F_-(\mathbf{k})$ (с точностью до постоянной). В этом случае в апертуре формируется распределение, комплексно сопряжённое АФР в режиме передачи. Так как в режиме передачи $\dot{E}_{S_+} = A_S$, то сопряжённая волна создаст распределение $\dot{E}_{S_-} = A_S^*$. Тогда выражение (1.7) преобразуется к виду

$$A_S^*(\boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d\mathbf{k}, \quad (1.10)$$

или, что то же самое

$$A_S^*(\boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_-(\mathbf{k}) [e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}]^* d\mathbf{k}. \quad (1.11)$$

Функция $A_S^*(\rho)$ комплексно сопряжённая АФР поля на апертуре в режиме передачи, широко применяется для описания характеристик приёмных антенн и имеет специальное название – **апертурная функция**.

Поскольку интегрирование является линейным преобразованием, то последнее соотношение применимо к формулам (1.9) и (1.11). Сравнивая эти формулы, можно увидеть, что выражение (1.11) справедливо лишь при условии

$$F_-(\mathbf{k}) = F_+^*(\mathbf{k}). \quad (1.13)$$

Отсюда также следует, что

$$F_+(\mathbf{k}) = F_-^*(\mathbf{k}). \quad (1.14)$$

Таким образом, характеристики направленности одной и той же антенны в режимах приёма и передачи в одной системе координат комплексно сопряжены. С учётом этого важного вывода выражение (1.4) может быть записано более точно:

$$E_{\text{вых}} = E h_{\text{д}} F^*(\theta_0, \varphi_0). \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) определяет ЭДС на выходе приёмной антенны. Здесь обе функции в правой части равенства определены относительно единого аргумента – волнового вектора падающей волны. Однако формально последнее соотношение может быть записано и относительно волнового вектора излучаемой волны, т. е. для режима передачи:

$$\mathcal{E}_{\text{вых}}^* = E^* h_{\text{д}} F(\theta_0, \varphi_0). \quad (1.16)$$

Комплексное сопряжение результата в (1.16) относительно (1.15) является следствием замены аргумента, т. е. изменения системы координат. Результирующее поле $E(\mathbf{k})$ будет функцией бесконечного числа направлений волнового вектора \mathbf{k} :

$$\mathcal{E}_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{k}) F^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (1.17)$$

Формула (1.17) совпадает по внешнему виду с выражением, определяющим ЭДС на выходе линейного частотного фильтра:

$$\mathcal{E}_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) K(i\omega) d\omega, \quad (1.18)$$

где ω – текущая частота; $F(i\omega)$ – спектральная плотность сигнала на входе фильтра; $K(i\omega)$ – частотная передаточная характеристика фильтра.

В формулах (1.17) и (1.18) спектральной плотности распределения сигнала $F(i\omega)$ соответствует угловая плотность распределения падающего поля $E(\mathbf{k})$, а частотной характеристике $K(i\omega)$ – комплексно сопряжённая ХН $F^*(\mathbf{k})$. Таким образом, приёмную антенну можно трактовать как линейный угловой фильтр с передаточной характеристикой $F^*(\mathbf{k})$. Входным воздействием для этого фильтра является сигнал с угловым спектром $E(\mathbf{k})$.

Представление антенны в виде углового фильтра не является единственно возможным.

Угловой спектр $E(\mathbf{k})$ связан сапертурным распределением $E_S(\boldsymbol{\rho})$ обратным преобразованием Фурье:

$$E(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_S(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} dS. \quad (1.20)$$

Поскольку апертурное распределение $E_S(\boldsymbol{\rho})$ отлично от нуля только в пределах поверхности апертуры S_0 , выражение (1.20) приводится к виду

$$E(\mathbf{k}) = \int_{S_0} E_S(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} dS. \quad (1.21)$$

Антенну можно трактовать не только как угловой фильтр (1.17), но и как пространственный фильтр. Входным сигналом антенны – пространственного фильтра является АФР поля на апертуре в режиме приёма $E_S(\boldsymbol{\rho})$. В роли пространственной передаточной характеристики этого фильтра выступает апертурная функция $A_S^*(\boldsymbol{\rho})$:

$$\mathcal{E}_{\text{вых}}^* = \int_{S_0} E_S^*(\boldsymbol{\rho}) A_S(\boldsymbol{\rho}) dS. \quad (1.22)$$

Таким образом, напряжённость падающего на антенну поля E можно представить в двух разных формах – через угловой спектр или АФР падающего поля на апертуре.

Когда входной сигнал задаётся угловым распределением $E(\mathbf{k})$, роль передаточной характеристики антенны играет её комплексно сопряжённая ХН $F^*(\mathbf{k})$ (1.17) и (1.18). А импульсной характеристикой антенны является апертурная функция $A_S^*(\boldsymbol{\rho})$.

Если же входной сигнал задаётся через АФР падающего поля в апертуре $E_S(\boldsymbol{\rho})$, то передаточной характеристикой антенны служит

апертурная функция $A_S^*(\rho)$. В этом случае в качестве импульсной характеристики выступает комплексно сопряжённая ХН $F^*(\mathbf{k})$.

Следовательно, в зависимости от способа представления входного сигнала (и самой антенны) апертурная функция $A_S^*(\rho)$ и комплексно сопряжённая ХН $F^*(\mathbf{k})$ могут описывать либо передаточную, либо импульсную характеристику антенны.

1.5. Представление сигналов в адаптивных антеннах

Источником информации для приёмных устройств радиоэлектронных систем является электромагнитное поле полезного сигнала

$$u_S = \dot{u}_S(t, \rho), \quad (1.26)$$

где t – время, ρ – пространственная координата, символ « $\dot{\cdot}$ » обозначает комплексную величину.

Извлечение полезной информации из сигнала, как правило, затруднено наличием аддитивных и мультипликативных помех. В результате наблюдению доступно электромагнитное поле, определяемое взаимодействием совокупности сигнала и помех

$$\dot{X}(t, \rho) = \dot{\mu}(t)u_S(t, \rho) + \sum_{i=1}^{L_n} \dot{u}_{\pi_i}(t, \rho) + n(t, \rho), \quad (1.27)$$

где $\dot{\mu}(t)$ – мультипликативная помеха, вызванная условиями распространения сигнала, $\dot{u}_{\pi_i}(t, \rho)$ – электромагнитное поле i -й аддитивной помехи, $n(t, \rho)$ – случайный шум.

Полезный сигнал и помехи характеризуются целым рядом параметров, отражающих их свойства. К основным будем относить параметры поляризации электромагнитной волны, направление прихода по отношению к нормали апертуры антенной системы, параметры спектра и некоторые другие, которые будем пояснять по мере изложения. В качестве помех будем использовать флуктуационные помехи с ограниченной спектральной плотностью, узкополосные (гармонические) помехи и широкополосные помехи, включающие шумовые и структурные воздействия. Такой выбор основан на анализе сценариев применения приёмных устройств в сетях связи [5, 74, 103, 119].

Прежде всего, рассмотрим электромагнитное поле сигналов в скалярном приближении (без учёта поляризации). Апертуру антенной

системы совместим с плоскостью xOy , а начало системы координат поместим в центр апертуры (рис. 1.8). Положение точечного источника излучения M определяется радиус-вектором \mathbf{r} . Положение произвольной точки T на апертуре – вектором $\mathbf{\rho}$. Расстояние между точками M и T в приближении дальней зоны ($|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{\rho}|$)

$$|M, T| \approx |\mathbf{r}| - |\mathbf{\rho}| \cos \gamma, \quad (1.28)$$

где $|\mathbf{r}|$ – длина вектора \mathbf{r} ; $|\mathbf{\rho}|$ – длина вектора $\mathbf{\rho}$, γ – угол между векторами \mathbf{r} и $\mathbf{\rho}$. Время распространения фронта электромагнитной волны от точки излучения до точки на раскрытии апертуры

$$t_p = \frac{|\mathbf{r}| - |\mathbf{\rho}| \cos \gamma}{c} = t_0 + \Delta t, \quad (1.29)$$

где c – скорость распространения волны; $t_0 = |\mathbf{r}| / c$ – время распространения сигнала до начала координат (центра антенной системы); $\Delta t = |\mathbf{\rho}| \cos \gamma / c$ – время запаздывания сигнала в произвольной точке на апертуре антенны.

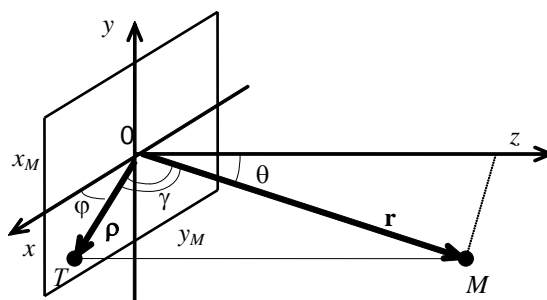


Рис. 1.8

В сферической системе координат

$$\Delta t = (x_p \sin \theta \cos \varphi + y_p \sin \theta \sin \varphi) / c, \quad (1.30)$$

где φ – угол азимута направления прихода, θ – угол места, x_p , y_p – координаты точки P в декартовой системе координат (см. рис. 1.11).

Временная структура сигнала в точке T в самом общем случае может быть представлена в виде

$$\dot{i}(t - t_p) = \sqrt{2P} U(t - t_p) \exp(j2\pi f_0(t - t_p)), \quad (1.31)$$

где t – текущее время; t_p – время распространения сигнала от точки излучения M до точки T , находящейся на раскрытии антенны; $U(t)$ –

нормированная огибающая сигнала, представляющая собой флуктуационный или квазидетерминированный процесс [98,161]; $\sqrt{2P}$ – амплитуда сигнала; P – мощность сигнала; f_0 – несущая частота сигнала.

Из анализа выражения (1.31) следует, что в зависимости от изменения координат приёмного элемента на апертуре антенны и сферических координат источника излучения изменяются как фаза высокочастотного заполнения сигнала, так и временной сдвиг огибающей сигнала (рис. 1.9).

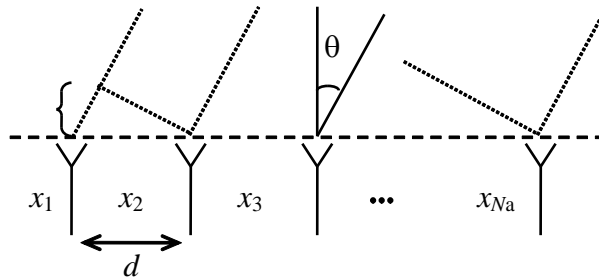


Рис. 1.9

Адаптивная обработка сигналов предусматривает использование многоэлементных антенных систем. При этом обработке подлежат электрические процессы на выходах отдельных элементов:

$$\dot{X}_i(t) = u_{S_i}(t, \rho_i) + \sum_{j=1}^{L_{\Pi}} u_{\Pi}(t, \rho_i) + n_i(t). \quad (1.32)$$

В общем виде пространственно-временной сигнал для линейных антенных систем определяется выражением ($\varphi = 0$)

$$u(t - t_{\rho_i}) = U \left(t - t_0 - \frac{\rho_i}{c} \sin \theta \right) \exp \left(j2\pi f_0 (t - t_0) - \frac{2\pi \rho_i}{\lambda} \sin \theta \right), \quad (1.33)$$

где ρ_i – пространственная координата i -го элемента антенной системы; t_0 – время распространения сигнала от источника до фазового центра антенны, $t_p = t_0 + \frac{\rho_i}{c} \sin \theta$ – время распространения сигнала от источника до точки раскрытия ρ_i антенной системы; θ – угол падения волны на раскрытие антенны относительно нормали; λ – длина волны электромагнитного колебания; $U(t)$ – огибающая сигнала (помехи).

Пространственно-временные сигналы по пространственным свойствам разделяют на пространственно узкополосные и пространственно широкополосные. Для пространственно узкополосных сигналов влиянием

разности времени распространения сигнала по апертуре антенной системы на огибающую сигнала можно пренебречь. При этом выполняется условие

$$\tau_k \gg \frac{D_{\max}}{c} \sin \theta = T_{AP}, \quad (1.34)$$

где $\tau_k = 1 / \Delta F$ – интервал корреляции сигнала; D_{\max} – максимальный размер апертуры антенны, T_{AP} – время распространения сигнала вдоль апертуры.

Условие (1.34) следует из разложения корреляционной функции сигнала (1.33) в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} r_{ik}(\tau) &= \overline{u_i(t - t_{\rho_i}) u_k^*(t + \tau - t_{\rho_k})} = \\ &= P_c \frac{\sin(2\pi\Delta F_c(\tau + (\Delta t_i - \Delta t_k)))}{2\pi\Delta F_c(\tau + (\Delta t_i - \Delta t_k))} \exp[j2\pi f_0(\tau + (\Delta t_i - \Delta t_k))], \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $\Delta t_i = \frac{\rho_i}{c} \sin \theta$ – время запаздывания сигнала в i -й точке антенной системы относительно начала координат; ΔF_c – полоса частот, занимаемая огибающей сигнала; P_c – мощность сигнала. В выражении (1.35) предполагается, что сигнал имеет равномерную спектральную плотность в полосе частот ΔF_c .

Разложим функцию (1.35) в ряд Тейлора в точке $\tau = 0$ и учтём только члены первого и второго порядка. Тогда получаем

$$r_{ik}(0) = P_c r(0) \left[1 - (2\pi\Delta F_c)^2 (\Delta t_i - \Delta t_k)^2 \right] \exp\{j\omega_0(\Delta t_i - \Delta t_k)\}.$$

Влиянием разности времени распространения сигнала по апертуре антенной системы можно пренебречь, если

$$1 - (2\pi\Delta F_c)^2 (\Delta t_i - \Delta t_k)^2 \approx 1,$$

отсюда следует (1.34).

Для пространственно широкополосных сигналов условие (1.34) не выполняется.

В дальнейшем рассмотрение будем проводить в основном для пространственно узкополосных сигналов. Так как для них выполняется условие факторизации (1.34), то справедливо следующее представление (1.33)

$$\mathbf{u} = u(t) \mathbf{b}_S, \quad (1.36)$$

где $u(t) = U(t) \exp(j\omega_0 t)$; $\mathbf{b}_S^T = \|b_1, b_2, \dots, b_{N_a}\|$ – вектор амплитудно-фазового распределения сигнала (АФР), здесь N_a – число антенных элементов.

Для плоских антенных систем элементы \mathbf{b}_S задают в виде

$$\mathbf{b}_i = \exp\left(j\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi + \frac{2\pi y_i}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi\right)\right), \quad (1.37)$$

где x_i, y_i – координаты антенного элемента в декартовой системе координат; θ – угол места; φ – угол азимута, определяющие направление прихода сигнала относительно начала сферической системы координат. Для линейных антенных решёток элементы \mathbf{b}_S задают как

$$\mathbf{b}_i = \exp\left(-j\frac{2\pi x_i}{\lambda} \sin \theta\right). \quad (1.38)$$

Наиболее простым оказывается выражение для линейных эквидистантных антенных решёток:

$$\mathbf{b}_S^T = \left\|1, e^{-ju}, \dots, e^{-j(N_a-1)u}\right\|, \quad (1.39)$$

где $u = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$ – обобщённая угловая координата, определяющая направление прихода сигнала; d – расстояние между элементами антенной решётки.

Рассмотрим коротко основные понятия, связанные с поляризацией волны. В плоской электромагнитной волне векторы электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей в каждый момент времени ориентированы в пространстве определённым образом. Поляризация электромагнитной волны является её пространственно-временной характеристикой и определяется видом траектории, описываемой концом вектора электрического поля в фиксированной точке пространства. По степени поляризации различают полностью поляризованные, частично поляризованные и неполяризованные волны [5,137].

Полностью поляризованному полю с плоским фазовым фронтом соответствует в общем случае эллиптическая траектория конца вектора электрического поля. Форма и ориентация эллипса для полностью поляризованного поля не зависят от времени.

Основными параметрам поляризационного эллипса (рис. 1.10) являются размеры главных осей эллипса $2a$ и $2b$. Отношение малой главной оси к большой, называемое коэффициентом эллиптичности: $r_s = b/a$; угол ориентации эллипса β_s и угол эллиптичности $\alpha_s = \arctg r_s$.

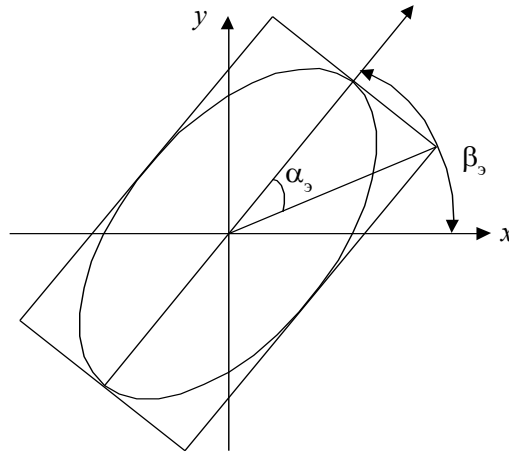


Рис. 1.10

В зависимости от направления вращения вектора различают левую и правую поляризации.

Колебание с эллиптической поляризацией может быть представлено в виде двух ортогональных линейно поляризованных составляющих.

Фазор \dot{p} электромагнитной волны вводят как отношение комплексных амплитуд ортогонально поляризованных составляющих поля

$$\dot{p} = \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} = \frac{A_2}{A_1} \exp(j(\varphi_2 - \varphi_1)) = |\dot{p}| \exp(j\Delta\varphi), \quad (1.40)$$

где A_1, A_2 – амплитуды, φ_1, φ_2 – фазы ортогональных составляющих, $|\dot{p}| = A_2 / A_1$ – модуль фазора, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – аргумент фазора.

Благодаря наглядности представления поляризационных параметров широкое распространение получила сфера Пуанкаре [5,137], которая представляет собой сферу единичного радиуса с долготно-широтной координатной сеткой. Координатам каждой точки сферы ставятся в соответствие поляризационные параметры (рис. 1.11). Широта точки определяется углом эллиптичности $\theta_{ш} = 2\alpha_3$, а долгота – углом ориентации β_3 (см.рис. 1.10): $\theta_{д} = 2\beta_3$. При этом верхнее полушарие является геометрическим местом точек для всех левых поляризаций (с левым вращением вектора), нижнее – для всех правых, а экватор – для всех линейных поляризаций с различными углами ориентации. Полюса соответствуют круговым поляризациям с левым и правым вращением.

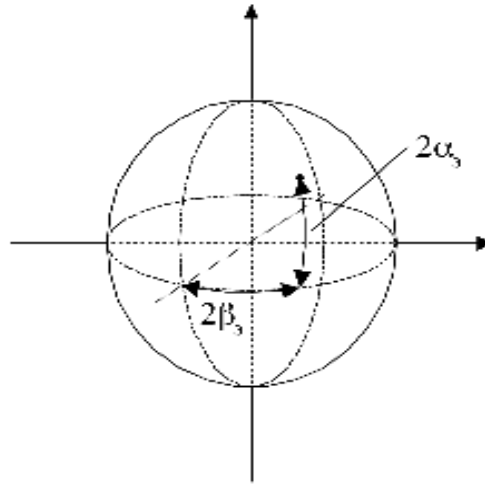


Рис. 1.11

Точками на сфере Пуанкаре могут быть отражены состояния поляризации принимаемых сигнала и помех, а также поляризация антенной системы. По угловому расстоянию между этими точками можно оценить степень поляризационных различий сигнала и помех, степень согласования сигнала с приёмной антенной. Параметры сферы Пуанкаре однозначно связаны с характеристиками фазора $|\dot{p}|$ и $\Delta\varphi$ следующими соотношениями [137]:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha_3 &= \sin(2\arctg |\dot{p}|) \sin \Delta\varphi; & \operatorname{tg} 2\beta_3 &= \operatorname{tg}(2\arctg |\dot{p}|) \cos \Delta\varphi; \\ |\dot{p}| &= \sqrt{\frac{\sin^2 \beta_3 + \operatorname{tg}^2 \alpha_3 \cos^2 \beta_3}{\cos^2 \beta_3 + \operatorname{tg}^2 \alpha_3 \sin^2 \beta_3}}; & \Delta\varphi &= \arctg \frac{2\operatorname{tg} \alpha_3}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_3) \sin 2\beta_3}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Для учёта явлений, связанных с поляризацией, будем рассматривать векторное электромагнитное поле, представляемое совокупностью двух скалярных полей, – ортогональных составляющих поляризованной волны в точке приёма:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t, \rho) \\ \dot{i}_2(t, \rho) \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Составляющие $\dot{i}_1(t, \rho)$ и $\dot{i}_2(t, \rho)$ получают разложением поля в некотором поляризационном базисе. Обычно используется линейный поляризационный базис, где выделяются горизонтальная и вертикальная поляризации. В работе практически во всех случаях будут рассматриваться полностью поляризованные поля. Для полностью поляризованного поля характерно то, что его проекции в поляризационном базисе связаны линейно:

$$\dot{u}_2 = \dot{p}u_1, \quad (1.43)$$

где \dot{p} – фазор сигнала. С учётом (1.43) векторное поле для сигнала u можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \dot{u}(t, \rho) \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \dot{u}(t, \rho) \mathbf{p}_u, \quad (1.44)$$

где $\mathbf{p}_u^T = \|1, \dot{p}\|$.

Для анализа процессов адаптации во временном фильтре КСО нам потребуется дискретная модель сигнала, которую будем задавать вектором

$$\mathbf{Y}^T = \|y(t), y(t - \tau_3), \dots, y(t - L\tau_3)\|, \quad (1.45)$$

где τ_3 – интервал времени задержки элемента многоотводной линии задержки (рис. 1.12).

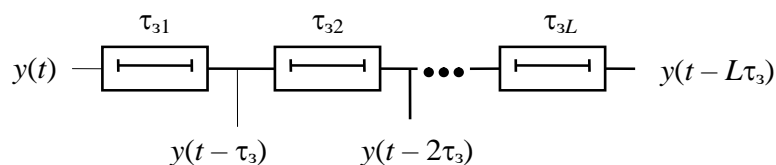


Рис. 1.12

Помехи от точечных источников по отношению к ширине спектра полезного сигнала ΔF_c разделим на узкополосные и широкополосные. Для узкополосных помех выполняется условие $\Delta F_{\text{УП}} \ll \Delta F_c$, а для широкополосных помех $-\Delta F_{\text{ШП}} \approx \Delta F_c$.

В простейшем случае узкополосную помеху будем представлять гармоническим сигналом со случайной начальной фазой

$$u_{\text{УП}}(t) = A e^{j(\omega_{\text{УП}} t + \varphi_0)},$$

где φ_0 – случайная начальная фаза; $f_{\text{УП}} = \omega_{\text{УП}} / 2\pi$ – частота УП; $A = \sqrt{2P_{\text{УП}}}$ – амплитуда УП.

Для всех принимаемых сигналов, кроме полезного и узкополосных помех, принимается модель гауссовского распределения мгновенных значений.

Дискретную модель узкополосной помехи (1.45) в силу того, что огибающая не изменяется за интервал времени $L\tau_3$, можно представить в виде

$$\mathbf{u}_{\text{УП}}(t) = u_{\text{УП}}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega_{\text{УП}}\tau_3} \\ \vdots \\ e^{-j\omega_{\text{УП}}L\tau_3} \end{bmatrix} = u(t)\mathbf{C}, \quad (1.46)$$

где \mathbf{C} – вектор, характеризующий набег фаз УП.

Для широкополосных помех в дискретной модели необходимо учитывать и временной сдвиг огибающей

$$\mathbf{u}_{\text{ШП}}(t) = \begin{bmatrix} u_{\text{ШП}}(t) \\ u_{\text{ШП}}(t - \tau_3)e^{-j\omega_{\text{ШП}}\tau_3} \\ \vdots \\ u_{\text{ШП}}(t - L\tau_3)e^{-j\omega_{\text{ШП}}L\tau_3} \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Все сигналы помех разделим на помехи от внешних точечных источников, внешний и внутренний шумы.

За основную модель внутреннего шума примем белый гауссовский шум с постоянной на всех частотах спектральной плотностью. Мощность шума в полосе приёмника

$$\sigma_{\text{ш}}^2 = 2\Delta F_c \frac{N_0}{2}, \quad (1.48)$$

где $N_0/2$ – спектральная плотность шума.

Спектральная плотность белого шума определяется выражением

$$N_0/2 = k_{\text{Б}}T_a, \quad (1.49)$$

где $k_{\text{Б}}$ – постоянная Больцмана, T_a – шумовая температура антенны. В общем случае T_a складывается из нескольких составляющих, обусловленных собственными шумами приёмника, излучением окружающей среды (внешний шум) и т. д.

Математическое ожидание белого шума равно нулю, а корреляционная функция определяется в виде δ -функции:

$$M(n(t)) = 0, \quad R(\tau) = M(n(t)n^*(t - \tau)) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (1.50)$$

Так как все обрабатываемые сигналы в общем случае являются случайными процессами, при разработке алгоритмов и анализе процессов адаптации будем использовать их статистические (вероятностные)

характеристики. Для эргодических случайных процессов (на интервале обработки – локально эргодические), к классу которых относятся случайные сигналы, поступающие на входы АА, наиболее широко используются статистические характеристики второго порядка: корреляционные и взаимокорреляционные функции и матрицы.

Корреляционные и взаимокорреляционные функции и матрицы, соответствующие различным типам сигналов, можно получить исходя из моделей сигналов (1.33), (1.36), (1.40) – (1.45).

Для пространственной обработки корреляционные матрицы составляющих входного сигнала (1.27) получим на основании выражения корреляционной функции (1.35) и представления сигналов (1.36).

Корреляционная матрица (КМ) помех от точечных источников может быть представлена для сигнала (1.33) в виде

$$\mathbf{R}_{uu} = \overline{UU^+} = \begin{bmatrix} R(0) & R(\Delta t_1 - \Delta t_2) b_1 b_2^* & \cdots & R(\Delta t_1 - \Delta t_{N_a}) b_1 b_{N_a}^* \\ R(\Delta t_2 - \Delta t_2) b_2 b_1^* & R(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R(\Delta t_{N_a} - \Delta t_1) b_{N_a} b_1^* & \cdots & \cdots & R(0) \end{bmatrix}, \quad (1.51)$$

где UU^+ – операция внешнего произведения; «+» – знак эрмитова сопряжения; $R(0) = \overline{u_i u_i^*} = P_c$ – мощность сигнала; « $\bar{}$ » – операция усреднения (математическое ожидание); $b_i = \exp\left(-j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta (N_a - i)\right)$, $i = \overline{1, N_a}$.

Для пространственно узкополосных сигналов выражение (1.51) существенно упрощается:

$$\mathbf{R}_{uu} = \overline{UU^+} = P \mathbf{b} \mathbf{b}^+, \quad (1.52)$$

где $\mathbf{b}^+ = [b_1, b_2, \dots, b_{N_a}]$.

Корреляционная матрица внутренних шумов приёмных элементов исходя из свойства дельта-коррелированности (1.50) записывается как скалярная матрица

$$\mathbf{R}_{m} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}, \quad (1.53)$$

где $\sigma_{\text{ш}}^2$ – мощность (дисперсия) внутреннего шума; \mathbf{I} – единичная матрица.

В соответствии с формулами (1.51), (1.52) и учётом того, что составляющие сигнала (1.27) являются взаимно некоррелированными, корреляционная матрица суммарного входного сигнала запишется в виде

$$\mathbf{R}_{XX} = \overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^+} = P_S \mathbf{b}_S \mathbf{b}_S^+ + \sum_{i=1}^{L_n} P_{\Pi i} \mathbf{b}_{\Pi i} \mathbf{b}_{\Pi i}^+ + \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I},$$

где L_n – количество точечных источников помех.

Аналогично получим выражения для КМ сигналов поляризационной обработки

$$\mathbf{R}_{uu}^{\text{ПЛФ}} = P \mathbf{p} \mathbf{p}^+, \quad (1.54)$$

где $\mathbf{p}^+ = \|1, \dot{p}\|$, \dot{p} – фазор сигнала (1.43).

Так как внутренние шумы в ортогональных плечах поляризационного фильтра независимы, то

$$\mathbf{R}_{nn}^{\text{ПЛФ}} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}. \quad (1.55)$$

Тогда корреляционная матрица входного суммарного сигнала

$$\mathbf{R}_{XX}^{\text{ПЛФ}} = P_c \mathbf{p} \mathbf{p}^+ + \sum_{i=1}^{L_n} P_{\Pi i} \mathbf{p}_{\Pi i} \mathbf{p}_{\Pi i}^+ + \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}. \quad (1.56)$$

На выходах элементарных задержек временного фильтра (1.45) в общем случае корреляционная матрица задержанных откликов может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_{YY} = \begin{bmatrix} R(0) & R(\tau)e^{-j\omega\tau} & \dots & R(\tau)e^{-jL\tau_3} \\ & & \ddots & \\ & & & \\ R(\tau)e^{-jL\tau_3} & \dots & \dots & R(0) \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Для узкополосного (гармонического сигнала) $\mathbf{R}_{Y\Pi}(\tau) = P_c e^{-j\omega\tau}$, поэтому

$$\mathbf{R}_{Y\Pi} = P_{Y\Pi} \mathbf{c} \mathbf{c}^+, \quad (1.58)$$

где $\mathbf{c}^+ = \|1, e^{-j\tau_3}, e^{-j2\tau_3}, \dots, e^{-jL\tau_3}\|$; τ_3 – длительность элементарной задержки МЛЗ; P_c – мощность сигнала.

Для широкополосных сигналов с постоянной спектральной плотностью в полосе частот $2\Delta F$

$$\mathbf{R}_{\text{ШП}}(\tau) = P_c \frac{\sin 2\pi\Delta F\tau}{2\pi\Delta F\tau} e^{-j\omega\tau}, \quad (1.59)$$

где P_c – мощность сигнала.

Корреляционная функция (1.59) с ростом τ быстро убывает и при $\tau \geq (\Delta F)^{-1}$ значения $R(\tau)$ можно считать равными нулю. Тогда

$$\mathbf{R}_{\text{шп } Y Y} = P_{\text{шп}} \mathbf{I}. \quad (1.60)$$

Корреляционная матрица шума $\mathbf{n}(t)$ в полосе ΔF определяется так же, как и КМ широкополосной помехи (1.57), (1.60). Поэтому корреляционную матрицу суммарного сигнала на отводах линии задержки при $\tau_3 \geq (\Delta F)^{-1}$ можно представить в виде

$$\mathbf{R}_{Y Y} = P_c \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{L_{\text{шп}}} P_{\text{шп}_i} \mathbf{I} + \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{L_{\text{уп}}} P_{\text{уп}_j} \mathbf{C}_j \mathbf{C}_j^+. \quad (1.61)$$

Для систем обработки, состоящих из нескольких фильтров важными являются выражения взаимокорреляционных матриц (ВКМ) сигналов.

Матрица взаимной корреляции между сигналами поляризационного и пространственного фильтров является прямоугольной матрицей размерностью $2 \times N_a$:

$$\mathbf{R}_{XY} = P_{XY} \mathbf{p} \mathbf{b}^+, \quad (1.62)$$

где $P_{XY} = \overline{u_{\text{ПлФ}} u_{\text{ПФ}}^*}$ – мощность сигнала; $u_{\text{ПлФ}}$ – сигнал в поляризационном фильтре; $u_{\text{ПФ}}$ – сигнал в пространственном фильтре. Между сигналами $u_{\text{ПлФ}}$ и $u_{\text{ПФ}}$ в АА существует линейная связь и они являются откликами сигнала $u(t)$. Линейная связь определяется оператором преобразования сигнала в ПФ или ПлФ, которые мы будем пояснять в каждом случае конкретно.

На основе выражения (1.62) можно записать ВКМ для сигнала (1.27)

$$\mathbf{R}_{XY} = P_{c_{XY}} \mathbf{p}_c \mathbf{b}_c^+ + \sum_{i=1}^{L_s} P_{\text{шп}_i XY} \mathbf{p}_{\text{шп}_i} \mathbf{b}_{\text{шп}_i}^+ + \sigma_{i_{XY}}^2 \begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}. \quad (1.63)$$

Взаимокорреляционная матрица шума получена в предположении, что первой выполняется поляризационная обработка. Сопряжённая матрица определяет ВКМ

$$\mathbf{R}_{YX} = \mathbf{R}_{XY}^+. \quad (1.64)$$

Взаимокорреляционные матрицы сигнала во временном фильтре и в пространственном (или поляризационном) зависят от типа сигнала. Размерность ВКМ \mathbf{R}_{XZ} $-2 \times (L + 1)$, а \mathbf{R}_{YZ} $-N_a \times (L + 1)$.

Для узкополосной помехи с КФ

$$R(\tau) = P_{\text{УП}} e^{j\omega_{\text{УП}}\tau} \quad (1.65)$$

взаимокорреляционная матрица определяется в виде

$$\mathbf{R}_{XZ_{\text{УП}}} = P_{\text{УП}_{XZ}} \mathbf{pC}^+, \quad (1.66)$$

$$\mathbf{R}_{YZ_{\text{УП}}} = P_{\text{УП}_{YZ}} \mathbf{bC}^+, \quad (1.67)$$

где сигналы УП в компонентах КСО имеют линейную связь.

Для широкополосных помех, шума и полезного сигнала при условии $\tau_3 \geq (\Delta F)^{-1}$ ВКМ запишется в виде

$$\mathbf{R}_{XZ_{\text{шп}}} = P_{XZ_{\text{шп}}} \begin{bmatrix} 1_0, 0_1, \dots, 0_L \\ 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad (1.68)$$

$$\mathbf{R}_{YZ_{\text{шп}}} = P_{YZ_{\text{шп}}} \begin{bmatrix} 1_0, 0_1, \dots, 0_L \\ 1_{N_a}, 0, \dots, 0_L \end{bmatrix}, \quad (1.69)$$

т. е. взаимная корреляция присутствует при времени задержки (запаздывания) сигналов меньшем интервала корреляции ($\tau_3 < \tau_k$).

Для проверки качества функционирования ААР в реальной СПО широко используется имитационное моделирование, которое позволяет с высокой степенью достоверности и адекватности моделировать реальные физические процессы, протекающие в элементах систем обработки [3,36,38,102,138].

В настоящее время наибольшее распространение получили марковские модели сигналов, основанные на представлении стохастическими дифференциальными уравнениями [3,36,38,138]. Известно, что такими сигналами с требуемой точностью может быть аппроксимирован широкий класс случайных процессов [36,38]:

$$x(t) = \dot{u}_x(t) e^{-j2\pi f_n t} e^{-j\varphi(t)},$$

где амплитуда и фаза описываются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \frac{du_x(t)}{dt} = F_u[u_x(t)] + G_u[u_x(t)]V_u(t), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = F_\varphi[\varphi(t)] + G_\varphi[\varphi(t)]V_\varphi(t), \end{cases} \quad (1.70)$$

где $F_u[u_x(t)], G_u[u_x(t)], F_\varphi[\varphi(t)], G_\varphi[\varphi(t)]$ – коэффициенты, определяющие вероятностные характеристики сигнала; $V_u(t)$ и $V_\varphi(t)$ – случайные шумы с математическим ожиданием равным нулю, единичной дисперсией и корреляционной функцией, заданной дельта-функцией:

$$m(V) = 0, \quad \sigma_V^2 = 1, \quad R(\tau) = \delta(\tau).$$

При задании векторных сигналов в уравнениях (1.70) коэффициенты $F[\cdot]$ представляют собой вектор, а коэффициенты $G[\cdot]$ – матрицу соответствующих размерностей.

Каждый из рассматриваемых в сигнально-помеховой обстановке сигнал представляется уравнениями вида (1.70). Суммарный векторный случайный процесс на входе системы обработки записывается в виде

$$X_\Sigma(t) = \dot{u}_s(t) + \sum_{i=1}^{L_n} \dot{u}_{ni}(t) + \dot{n}(t), \quad (1.71)$$

где $\dot{u}_s(t)$ – мгновенный комплекс полезного сигнала, $\dot{u}_{ni}(t), \dot{n}(t)$ – мгновенные комплексы i -й помехи и шума.

Уравнения для гауссовского случайного процесса получают, если амплитуда сигнала $u_x(t)$ распределена по закону Рэлея, а фаза – по равномерному закону. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x(t)}{dt} &= \frac{m_0^2}{4\tau_{\text{кор}}} [u_x^{-1}(t) - 2u_x(t)] + \frac{m_0}{\sqrt{2\tau_{\text{кор}}}} V_u(t); \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= V_\varphi(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

где m_0 – параметр распределения, $\tau_{\text{кор}}$ – интервал корреляции процесса $u_x(t)$.

Для простоты в дальнейшем используем когерентные узкополосные в пространственном смысле сигналы. Тогда сигнал на входах элементов антенной системы может быть представлен в виде произведения временной реализации сигнала на вектор фазовых коэффициентов

$$\dot{U}_x(t) = u_x(t) \mathbf{b}_x e^{-j2\pi f_n t} e^{-j\varphi_0}, \quad (1.73)$$

где $\mathbf{b}^T = \left\| 1, e^{-ju}, \dots, e^{-ju_{Na}} \right\|$, $u_i = \frac{2\pi r_i}{\lambda} \sin \theta$ – обобщённая фаза сигнала, зависящая от расположения элемента антенны r_i и направления прихода относительно нормали θ .

Вектор фаз для временного фильтра записывается в виде

$$\mathbf{C}^T = \left\| 1, e^{-j\tau_1 2\pi f}, e^{-j(\tau_1 + \tau_2) 2\pi f}, \dots, e^{-j \sum_{i=2}^L \tau_i 2\pi f} \right\|,$$

а векторный сигнал во временном фильтре

$$\dot{U}_x(t) = \left\| u_x(t) e^{-j\varphi_0} e^{-j2\pi f t}, u_x(t - \tau_1) e^{-j\varphi_0} e^{-j2\pi f (t - \tau_1)}, \dots, u_x\left(t - \sum_{i=1}^L \tau_i\right) e^{-j\varphi_0} e^{-j2\pi f \left(t - \sum_{i=1}^L \tau_i\right)} \right\|. \quad (1.74)$$

Операции преобразования сигнала (1.27) в элементах ААР выполняются в соответствии с уравнениями, описывающими тот или иной вариант построения и алгоритм обработки.

1.6. Основные параметры и характеристики адаптивных антенных решёток

Адаптивная антенна является многоканальной системой обработки сигналов на выходах антенных элементов. Такая антенна обладает одновременно свойствами как антенных решёток, так и систем обработки сигналов. Соответственно, характеристики ААР отражают особенности и АР, и систем обработки. К основным характеристикам АА относятся следующие.

1. Нормированная ХН по напряжённости поля $F(\mathbf{k})$ и по мощности $F^2(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k})F^*(\mathbf{k}) = |F(\mathbf{k})|^2$ – определяется так же, как в общей теории антенн.
2. Коэффициент подавления помех K_{Π} – число, показывающее, во сколько раз уменьшилось отношение мощностей «помеха/шум» в результате адаптации:

$$K_{\Pi} = \frac{P_{\Pi} / P_{\text{ш}}}{P_{\Pi a} / P_{\text{ша}}}, \quad (1.75)$$

где $P_{\Pi}, P_{\Pi a}$ – мощность помехи на выходе АА до и после процесса адаптации; $P_{\text{ш}}, P_{\text{ша}}$ – мощность шумов на выходе АА до и после процесса адаптации.

3. Коэффициент выигрыша K_c – число, показывающее, во сколько раз увеличилось отношение мощности полезного сигнала к суммарной мощности шума и помех в результате адаптации:

$$K_c = \frac{P_{ca} / (P_{\text{ша}} + P_{\Pi a})}{P_c / (P_{\text{ш}} + P_{\Pi})}, \quad (1.76)$$

где $P_c, P_{ш}, P_{п}$ – мощности на выходе АА полезного сигнала, шума и помехи соответственно до адаптации; $P_{ca}, P_{ша}, P_{па}$ – те же мощности после процесса адаптации.

4. Эффективный коэффициент направленного действия (КНД) АА в заданном направлении:

$$D_a(\mathbf{k}_0) = \frac{4\pi |\mathbf{k}_0|^2}{\int_{\infty} |F(\mathbf{k})|^2 p(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}, \quad (1.77)$$

где \mathbf{k}_0 – волновой вектор, определяющий заданное направление; $p(\mathbf{k})$ – весовой коэффициент, определяющий пространственное распределение плотности потока мощности внешних источников излучения относительно изотропного поля внешних шумов.

5. Коэффициент запаса K_3 :

$$K_3 = D_a(\mathbf{k}_c) - D_{a \min}, \quad (1.78)$$

где $D_a(\mathbf{k}_c)$ – эффективный КНД АА в направлении полезного сигнала; $D_{a \min}$ – минимально допустимый эффективный КНД АА в том же направлении, определяемый из условия возможности приёма полезного сигнала.

6. Область радиосвязи Ω_p – пространственная область, в которой КНД АА превышает заданное минимальное значение $D_{a \min}$.

7. Число степеней свободы M_0 – количество управляемых ВК.

8. Число подавляемых помех (определяется особенностями антенны и алгоритма). Максимально возможное число подавляемых помех $M_0 - 1$ на единицу меньше числа степеней свободы.

9. Полоса рабочих частот – диапазон частот, в котором обеспечивается заданное значение коэффициента подавления помех $K_{п}$ или заданная эффективность K_c .

10. Степень адаптации антенной решётки m_0 – отношение общего числа антенных элементов N к количеству управляемых ВК M_0 , т. е. $m_0 = N / M_0$.

11. Область потерь $\Omega_{п}$ – пространственная область, в которой после адаптации уровень КНД $D_a(\Omega_{п})$ меньше заданного минимального значения $D_{a \min}$.

12. Кривые обучения – зависимости показателей качества АА от времени в процессе адаптации.

13. Время адаптации – промежуток времени, в течение которого достигнуто заданное значение показателя качества.

14. Количество итераций – число дискретных изменений вектора ВК в процессе адаптации, необходимое для достижения заданного значения показателя качества.

15. Количество операций – общее число элементарных математических операций, выполняемых над массивами данных в соответствии с алгоритмом адаптации для достижения заданного показателя качества.

Характеристики направленности ААР имеют ряд особенностей. В частности, если расстояние между элементами решётки превышает $\lambda / 2$, то при адаптации наряду с формированием минимума ХН в направлении прихода помехи будут формироваться минимумы и в других направлениях. Физика образования дополнительных минимумов та же самая, что и физика формирования дифракционных максимумов в обычных эквидистантных АР с большим межэлементным расстоянием.

Если в процессе адаптации в ХН появляются дополнительные нули, то при случайном совпадении одного из них с направлением на источник полезного сигнала отношение сигнал/шум может существенно снизиться. Отсюда следует, что дополнительные нули в ХН АР недопустимы, поэтому межэлементное расстояние обязательно должно быть меньше $\lambda / 2$. В адаптивной решётке, как и в любой другой многоэлементной антенне, результирующая ХН определяется не только множителем решётки, но и характеристиками направленности отдельных антенных элементов. Однако учёт вида ХН отдельных элементов приводит к весьма громоздкой записи результирующих выражений. Это усложняет анализ и затрудняет понимание сути процессов в АА. В то же время сущность процессов в адаптивной антенне не зависит от того, являются ли направленными или ненаправленными характеристики излучения и приёма отдельных элементов. Поэтому в дальнейшем для ясности изложения антенные элементы АР будут полагаться ненаправленными, т. е. изотропными. Такой подход не нарушит общности рассуждений и выводов.

На основании изложенного в дальнейшем принимается, что ХН ААР совпадает с множителем решётки этой антенны. Например, для N -элементной эквидистантной линейной решётки, центральный элемент которой расположен в начале координат:

$$F(u) = \sum_{n=1}^N w_n^* e^{iu(2n-N-1)}, \quad (1.79)$$

где $u = \pi d_0 \sin \theta / \lambda$ – обобщённый угол; d_0 – межэлементное расстояние; w_n – весовой коэффициент n -го канала.

Сигнал на выходе такой решётки при одинаковых ВК, т. е. при синфазном сложении, можно представить в виде векторной суммы выходных сигналов отдельных элементов

$$y = \sum_{n=1}^N x_n e^{iu(2n-N-1)}. \quad (1.80)$$

Характеристика направленности (множитель решётки) антенны для этого случая определяется выражением

$$F(u) = \sum_{n=1}^N e^{iu(2n-N-1)} = \frac{1}{N} \frac{\sin Nu}{u}. \quad (1.81)$$

Обобщённый угол $u = \pi d_0 \sin \theta / \lambda$, входящий в последнее выражение, является функцией длины волны (частоты). Для узкополосного сигнала этой зависимостью можно пренебречь. Однако в случае использования в радиолинии широкополосных сигналов ХН АР существенным образом изменяется. Характер этих изменений имеет важное значение с точки зрения выполнения адаптивной антенной функции подавления помех.

Пусть диапазон длин волн полезного сигнала составляет $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$. В этом случае обобщённый угол u тоже изменяется в определённых пределах:

$$u = \frac{\pi d_0 \sin \theta}{\lambda_0 \pm \Delta\lambda} = \frac{\pi d_0 \sin \theta}{\lambda_0 (1 \pm \Delta\lambda / \lambda_0)} \approx \frac{\pi d_0}{\lambda_0} \sin \theta \left(1 \mp \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right). \quad (1.82)$$

Введя обозначение

$$\Delta\theta = \theta - \left| \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{1 + \Delta\lambda / \lambda_0} \right) \right| \quad (1.83)$$

можно соотношение (1.82) привести к виду:

$$u \approx \frac{\pi d_0}{\lambda_0} \sin(\theta \mp \Delta\theta). \quad (1.84)$$

Таким образом, дискретный источник широкополосного сигнала в определённом смысле эквивалентен непрерывному источнику монохроматического сигнала, распределённому в угловом секторе:

$$\theta_c - \Delta\theta \leq \theta \leq \theta_c + \Delta\theta, \quad (1.85)$$

где θ_c – пространственный угол, определяющий направление на источник полезного сигнала.

Вследствие зависимости обобщённого угла от частоты и ХН антенны тоже оказывается функцией частоты. Поэтому каждой частотной составляющей соответствует своя ХН. Результирующая ХН АА представляет собой суперпозицию характеристик направленности, соответствующих всем частотным составляющим сигнала. По этой причине при приёме широкополосного сигнала следует использовать интегральное соотношение

$$\mathcal{E}_{\text{вых}} = \int_{S_0} \int_{\Delta\omega} E_S(\mathbf{p}, \omega) A_S^*(\mathbf{p}, \omega) d\omega dS, \quad (1.86)$$

где $\Delta\omega$ – диапазон частот сигнала; $E_S(\mathbf{p}, \omega) A_S^*(\mathbf{p}, \omega)$ – распределение падающего поля и апертурная функция в зависимости от частоты.

Соответственно для решётки:

$$\mathcal{E}_{\text{вых}} = \sum_{n=1}^N \int_{S_0} \int_{\Delta\omega} E_{S_n}(\mathbf{p}, \omega) A_{S_n}^*(\mathbf{p}, \omega) d\omega dS. \quad (1.87)$$

У характеристик направленности, соответствующих разным частотам, нули сдвинуты друг относительно друга, поэтому в суммарной ХН будет наблюдаться эффект заплывания нулей. При достаточно широком спектре минимумы ХН могут вообще не наблюдаться.

Характеристики направленности многолучёвых антенн с суммированием сигналов на общем выходе имеют ряд особенностей. Как отмечалось ранее, ХН такой антенны есть суперпозиция ХН отдельных каналов. Если бы в схеме многолучевой антенны отсутствовали управляемые ВК, то результирующая ХН определялась бы соотношением

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^I F_i(\theta), \quad (1.88)$$

где $F_i(\theta)$ – ХН i -го парциального канала; I – число парциальных каналов.

Результирующая ХН в этом случае была бы фиксированной, что исключало бы возможность использования такой антенны в качестве адаптивной. Введение управляемых ВК позволяет изменять вклад каждой парциальной ХН и тем самым изменять ХН ААР в целом. Например, установив ВК некоторого канала равным нулю, можно сформировать провал в результирующей широкой ХН. В общем случае

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^I w_i^* F_i(\theta), \quad (1.89)$$

где w_i – ВК i -го канала.

ГЛАВА 2. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА АДАПТАЦИИ

2.1. Целевая функция и критерий оптимальности

В адаптивных антеннах управление вектором ВК позволяет оптимизировать апертурную функцию с целью обеспечения заданных характеристик приёма. Для конкретной антенны при заданной сигнально-помеховой обстановке существует оптимальный вектор весовых коэффициентов $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ обеспечивающий наилучшее качество приёма полезного сигнала. Изменение вектора ВК от исходного значения до оптимального может происходить по различным траекториям. Вид траектории зависит от многих факторов, в первую очередь от выбранного критерия качества (КК).

Из существующих критериев качества только критерий оптимальности отражает сущность процесса адаптации. В этой связи в теории ААР под критерием качества обычно понимают критерий оптимальности.

Критерий оптимальности тесно связан с показателем качества. Показатель качества – это физическая величина, являющаяся количественной мерой качества приёма полезного сигнала. Показателями качества могут служить, например, отношение сигнал/шум, средний квадрат ошибки, отношение правдоподобия, мощность выходного сигнала и др. Функция $J(\mathbf{W})$, описывающая изменение показателя качества в зависимости от значений ВК, называется целевой. Экстремум целевой функции (ЦФ), понимаемый как цель управления в ААР, называется критерием оптимальности. Другими словами, критерий оптимальности – это формулировка результата адаптации, в которой указывается, достижение какого именно экстремума (максимума или минимума) какой именно целевой функции обеспечивается в процессе работы антенны. Известно довольно большое число критериев оптимальности. Основными из них являются: минимум среднеквадратической ошибки, максимум отношения мощности полезного сигнала к мощности смеси шума и помехи, максимум отношения правдоподобия, минимум мощности выходного сигнала, максимум мощности полезного сигнала при полном подавлении помех.

В практике адаптивного регулирования используют термин «критерий адаптации».

Выбранный критерий оптимальности считается реализованным в том случае, когда при изменении вектора ВК целевая функция достигла экстремальной точки. Соответствующее этой точке оптимальное значение

вектора ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ определяется посредством поиска экстремума целевой функции $J(\mathbf{W})$. Определение оптимального значения вектора ВК путём поиска экстремума целевой функции называется оптимизацией весовых коэффициентов по заданному критерию оптимальности. Весовые коэффициенты, полученные при оптимизации по разным критериям, чаще всего совпадают с точностью до постоянной. Разница здесь обычно заключается лишь в последовательности движения вектора ВК от начального состояния к оптимальному.

Целевая функция $J(\mathbf{W})$ N -элементной ААР имеет N -мерный аргумент (N весовых коэффициентов) и поэтому называется N -мерной. В то же время график этой функции есть поверхность размерности $N + 1$. На рис. 2.1 в виде двумерных кривых показаны фрагменты некоторых одномерных целевых функций, а на рис. 2.2 – фрагменты двумерных целевых функций. На этих графиках по горизонтальным осям откладываются значения ВК, а по вертикальной оси – значения показателя качества J .

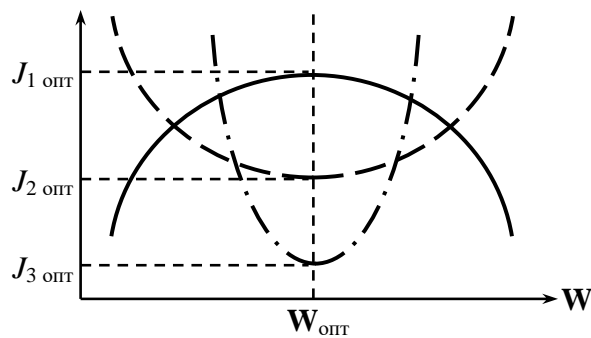


Рис. 2.1

При этом рассматривается случай, когда оптимизируются одни и те же ВК по разным показателям J_1, J_2, J_3 . В большинстве ситуаций, как видно из рис. 2.1, независимо от выбранного критерия оптимальные значения ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ в точках экстремумов целевых функций $J_{1 \text{ опт}}, J_{2 \text{ опт}}, J_{3 \text{ опт}}$ совпадают.

Следует иметь в виду, что целевые функции могут быть как одноэкстремальными (рис. 2.2, *а, б*), так и многоэкстремальными (рис. 2.2, *в*). В зависимости от количества экстремумов используются те или иные методы оптимизации.

Каждому конкретному состоянию вектора ВК соответствует определённое значение целевой функции, т. е. определённая точка на поверхности, изображающей целевую функцию. Движение этой точки от исходного значения вектора ВК \mathbf{W}_0 к оптимальному $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ в зависимости от метода и алгоритма адаптации может осуществляться непрерывно или

дискретно (скачками). В последнем случае процесс перехода вектора ВК из предыдущего состояния в последующее называется итерацией. Число итераций может быть велико.

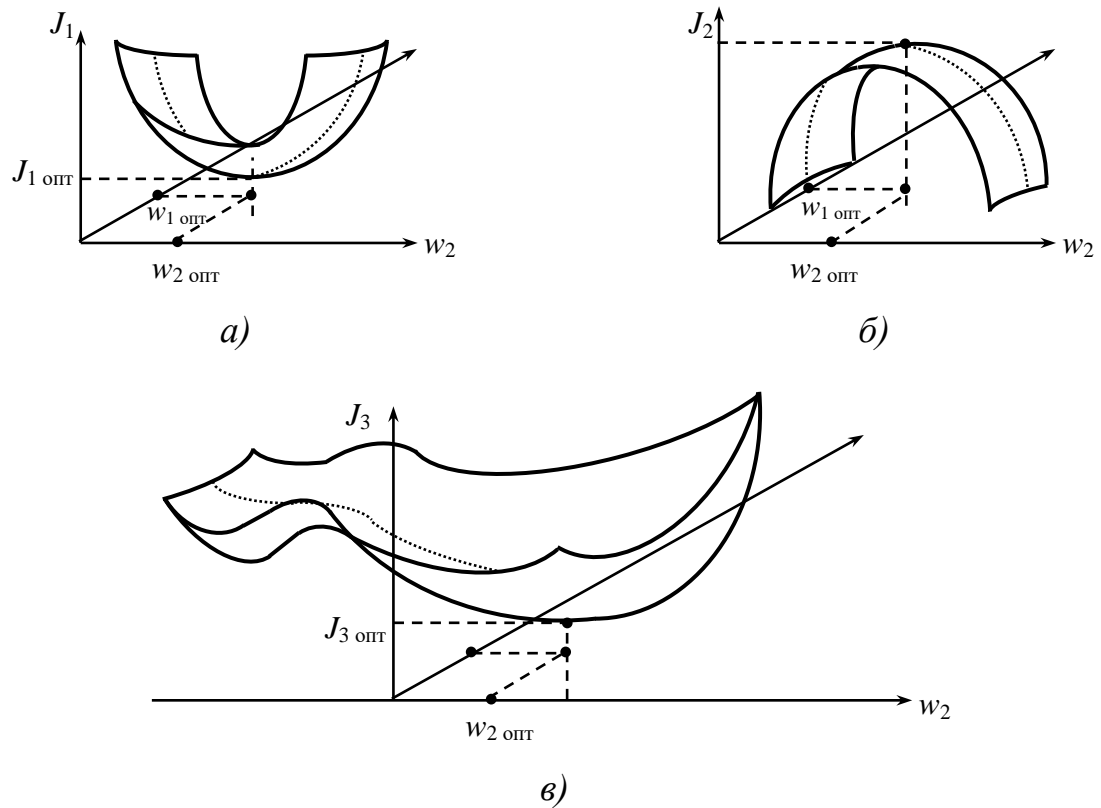


Рис. 2.2

Вид целевой функции при изменении сигнально-помеховой обстановки (точнее говоря, при изменении КМ сигналов) также изменяется. Поэтому в литературе часто целевая функция понимается в обобщённом смысле – как функция не только весовых коэффициентов, но и корреляционной матрицы сигналов.

В условиях априорной неопределённости параметров приходящих на ААР сигналов конкретный вид целевой функции неизвестен. Однако если сигналы являются стационарными и имеют инвариантные в статистическом смысле свойства, то целевая функция обладает следующей важной особенностью: поверхность, образованная целевой функцией, фиксирована и неподвижна в N -мерном пространстве аргумента.

Если целевая функция образует фиксированную поверхность, процесс адаптации заключается в движении изображающей точки вектора ВК по поверхности целевой функции от некоторой начальной точки \mathbf{W}_0 до окрестности экстремальной точки $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ и в удержании ВК около этой точки

(рис. 2.3). В данном примере, рассматривается дискретная адаптация, а аргументом вектора ВК является номер итерации.

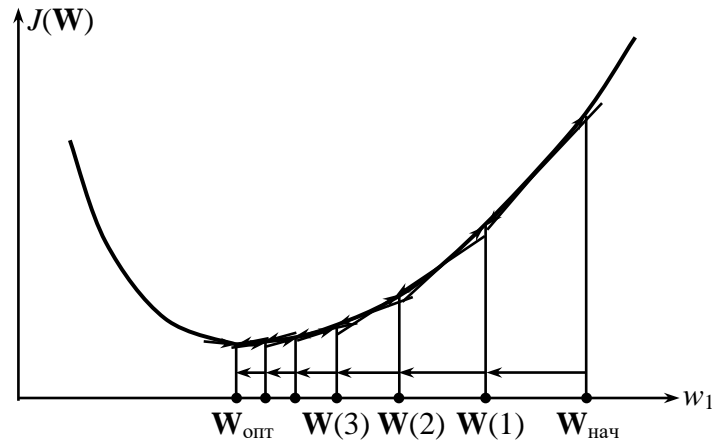


Рис. 2.3

Если сигналы нестационарны и их статистические свойства меняются, то значение целевой функции в каждой точке становится до некоторой степени неопределённым. Иными словами, поверхность целевой функции становится «размытой» либо изменяет свою форму или местоположение относительно системы координат (т. е. в N -мерном пространстве аргумента). В этих случаях процесс адаптации состоит не только в движении к точке экстремума, но и в слежении за этой точкой во времени, поскольку она меняет свои координаты. На рис. 2.4 представлен пример, когда за время $\Delta t = t_2 - t_1$ экстремум целевой функции изменяет своё положение.

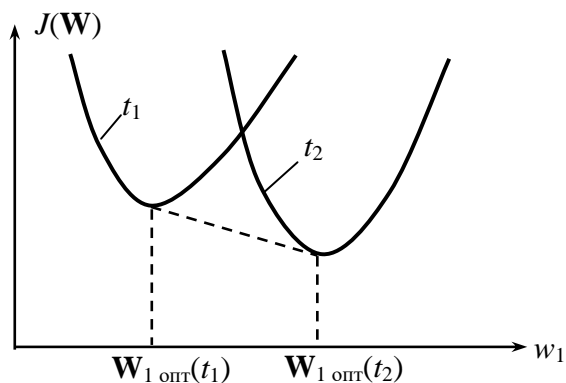


Рис. 2.4

На практике из-за ограниченности времени оценки параметров получение точных значений целевой функции невозможно. Поэтому основная задача теории ААР состоит в разработке аналитических методов и алгоритмов, позволяющих осуществлять поиск оптимальных ВК (т. е. точки

экстремума) только по данным измерений или оценки параметров. Процесс адаптации весьма наглядно представляет функция, называемая кривой обучения. График этой функции строится путём соединения точек, соответствующих отдельным непрерывным или дискретным значениям показателя эффективности AA в различные моменты времени (или на различных итерациях). При непрерывном изменении аргумента кривая обучения полностью лежит на поверхности целевой функции. В процессе адаптации показатель качества стремится по кривой обучения к экстремальному значению целевой функции в точке, определяемой оптимальным вектором $ВК$. На практике очень часто целевая функция является квадратичной.

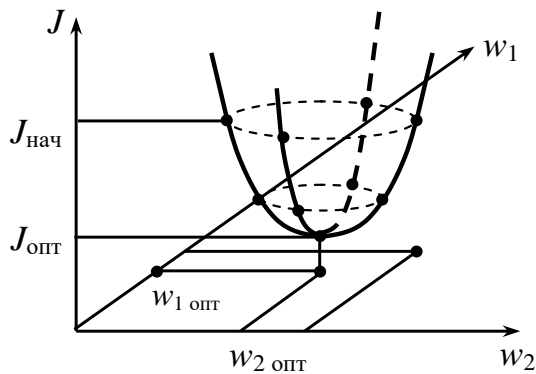


Рис. 2.5

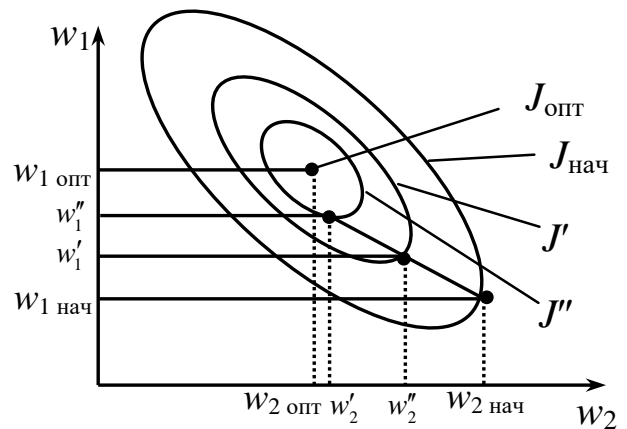


Рис. 2.6

Рассмотрим квадратичную целевую функцию, показанную на рис. 2.5. В общем случае сечения этой функции в плоскости $J = \text{const}$ имеют вид N -мерного эллипса. Для двумерного случая примерный вид сечений целевой функции показан на рис. 2.6.

В процессе адаптации значение целевой функции изменяется от $J_{\text{нач}}$ до $J_{\text{опт}}$ при изменении $ВК$ от \mathbf{W}_0 до $\mathbf{W}_{\text{опт}}$. Варианты кривой обучения для рассматриваемой функции в дискретном и непрерывном случаях представлены на рис. 2.7. На рис. 2.7, *a* по оси абсцисс отложен номер итерации i , на рис. 2.7, *б* – время адаптации t . Изображённые кривые являются идеализированными, поскольку построены в предположении о точном измерении значения целевой функции в каждой точке. На практике в связи с погрешностью конечной оценки параметров целевой функции и неизбежным наличием шумов кривая обучения имеет более сложный вид (рис. 2.8).

Для реализации большинства из используемых критериев эффективности адаптивная антенна должна содержать в себе источник опорного сигнала. Опорный сигнал $d(t)$ служит для выделения полезного сигнала $X_c(t)$ из всей совокупности сигналов $X(t)$, поступающих на антенну. В адаптивной антенне-

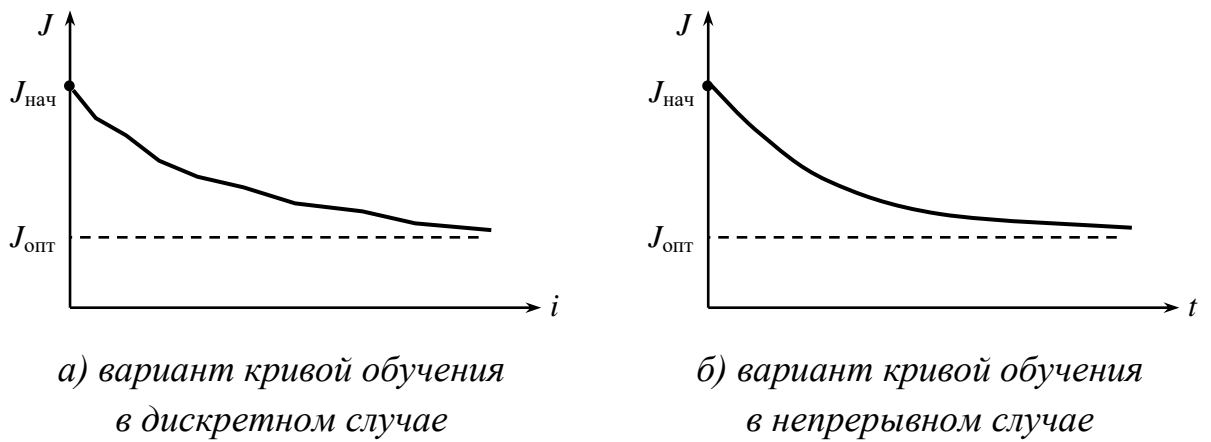


Рис. 2.7

ной технике используются опорные сигналы двух типов. К первому типу относятся некоторые достаточно точные копии полезных сигналов. Основное требование к такому опорному сигналу – высокая коррелированность его с полезным сигналом и отсутствие корреляции с помехой. Наличие корреляции между случайным полезным и полностью известным опорным сигналом позволяет путём соответствующей обработки полного сигнала, поступающего на антенну, выделить его полезную часть и подавить помеховую составляющую.

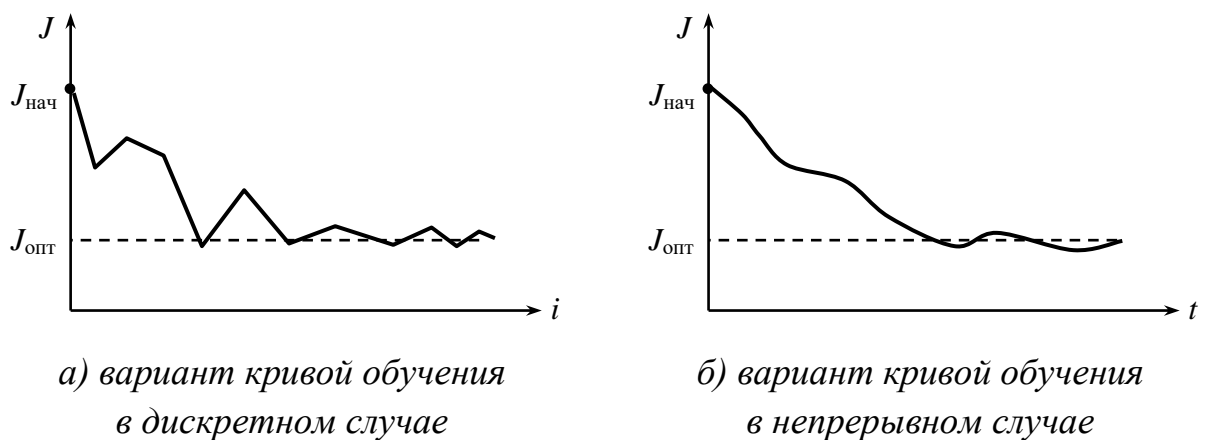


Рис. 2.8

Для формирования опорного сигнала первого типа используется априорная информация о структуре полезного сигнала. Например, если полезный сигнал модулирован псевдослучайной последовательностью, то генератор опорного сигнала должен содержать формирователь такой же последовательности. При отсутствии такого генератора можно получать опорный сигнал непосредственно из полезного в процессе обработки сигнала на выходе адаптивной антенны. Так, если $X_c(t)$ модулирован по амплитуде, то для удовлетворительной работы системы адаптации в качестве опорного сигнала $d(t)$ можно использовать колебания несущей частоты полезного сигнала $X_c(t)$.

Опорный сигнал второго типа представляет собой АФР поля в апертуре адаптивной решётки, при котором максимум ХН ориентирован на источник полезного сигнала. Формирователь такого опорного сигнала представляет собой устройство, на выходах которого образуются управляющие сигналы для ВК. Априорной информацией для формирования опорного сигнала второго типа служат данные об угловых координатах источника полезного сигнала.

Тип опорного сигнала и способ совместной обработки входного и опорного сигналов полностью определяются выбранным критерием оптимальности.

В последующих выражениях для целевых функций, если нет особой необходимости, с целью упрощения математических выражений опорный сигнал записывать не будем.

Критерии оптимальности (адаптации) можно классифицировать по нескольким признакам. Рассмотрим основные из них – наличие ограничений, количество показателей качества, время формирования критерия и условия достижения цели адаптации. На рис. 2.9 представлена классификация критериев оптимальности в соответствии с выбранными признаками классификации.

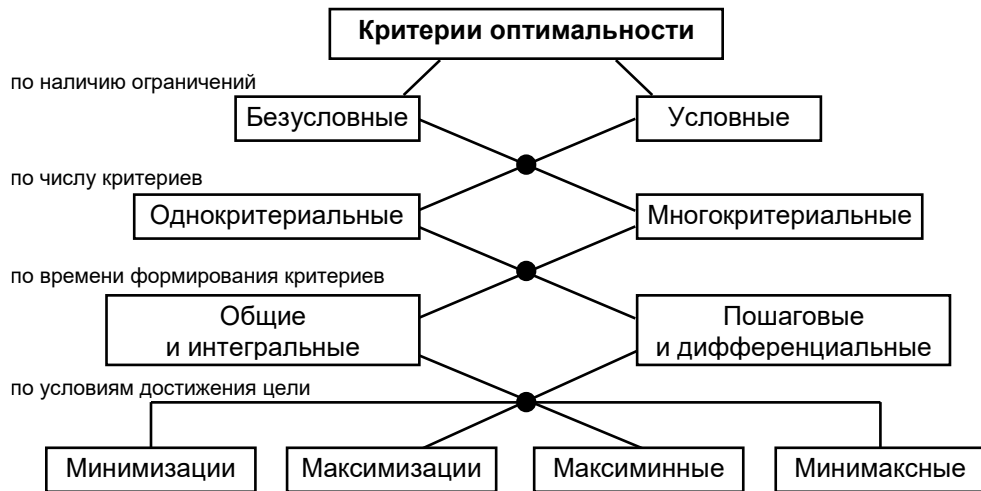


Рис. 2.9

В процессе адаптации изменение ВК приводит к искажению ХН относительно исходной. Особенно существенны эти искажения, если помеха воздействует по основному лепестку исходной ХН. В такой ситуации имеет место отклонение основного лепестка от заданного направления или даже его полное разрушение. Хотя при этом отношение сигнала к совокупности шума и помехи (ОСШП) возрастает, но абсолютный уровень сигнала резко падает.

Значительное уменьшение уровня полезного сигнала в ряде случаев недопустимо. Например, если пространственная обработка дополняется частотной или поляризационной, то ставится задача поддержания сигнала на некотором наперёд заданном уровне. В подобных случаях используются критерии адаптации с ограничениями. Такие критерии называются условными. В случае, когда никаких дополнительных условий (ограничений) на исходную целевую функцию не накладывается, критерии называются безусловными. Наиболее часто встречаются на практике ограничения на весовые коэффициенты и на форму ХН. Математически ограничения вводятся в целевую функцию. Результирующая целевая функция J имеет вид

$$J = J_n + J_o, \quad (2.1)$$

где J_n – исходная целевая функция без ограничений; J_o – налагаемые ограничения.

2.2. Минимум среднеквадратической ошибки

Оптимизация вектора ВК по критерию минимума среднеквадратической ошибки (МСКО) производится путём непосредственного сравнения опорного сигнала первого типа $d(t)$ с сигналом

на выходе ААР $\mathbf{W}^+\mathbf{X}(t)$. Разность между этими сигналами $\varepsilon(t)$ называется сигналом ошибки:

$$\varepsilon(t) = d(t) - \mathbf{W}^+\mathbf{X}(t). \quad (2.2)$$

Квадрат сигнала ошибки равен:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = [d(t) - \mathbf{W}^+\mathbf{X}(t)]^2 = d^2(t) - 2d(t)^* \mathbf{W}^+\mathbf{X}(t) + \\ + \mathbf{W}^+(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^+(t)\mathbf{W}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для нахождения квадрата сигнала ошибки в установившемся режиме необходимо усреднить величину $\varepsilon(t)$ по времени, т. е. найти математическое ожидание:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[d(t) - \mathbf{W}^+\mathbf{X}(t)]^2} = d^2(t) - 2\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{xd} + \mathbf{W}^+\mathbf{R}_{xx}\mathbf{W}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{R}_{xd} = \overline{d(t)^* \mathbf{X}(t)}$ – взаимокорреляционная матрица (в данном случае вектор) входного и опорного сигналов; $\mathbf{R}_{xx} = \overline{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^+(t)}$ – корреляционная матрица входного сигнала.

Задача оптимизации заключается в отыскании минимума функции (2.4) путём соответствующего выбора ВК. Целевая функция, реализующая критерий МСКО, записывается, таким образом, в виде:

$$J_1 = \overline{\varepsilon^2(t)}. \quad (2.5)$$

Структурная схема адаптивной антенной решётки, в которой реализуется критерий МСКО вида (2.5), показана на рис. 2.10. Сущность данного критерия состоит в том, что процесс адаптации должен продолжаться до тех пор, пока сигнал ошибки $\varepsilon(t)$ не станет минимальным. В том случае, когда на входе ААР присутствует полезный сигнал, являющийся точной копией опорного сигнала $d(t)$, в конце процесса адаптации на выходе АР должен присутствовать только полезный сигнал. Все воздействующие на АР помехи при этом будут подавлены. Подавление помех на выходе АР происходит за счёт того, что в сумматоре сигналы помех каждого из каналов складываются с такими амплитудно-фазовыми соотношениями, что суммарный сигнал помехи равен нулю. Это означает, что сигнал помехи полностью отражается от сумматора и не проходит на выход АР.

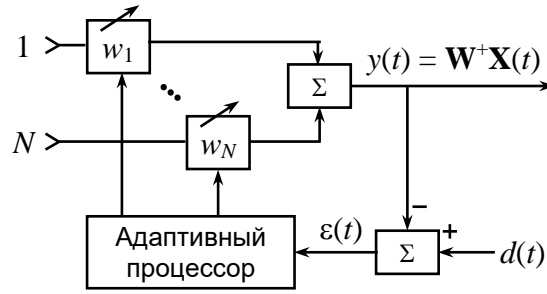


Рис. 2.10

Определим вектор оптимальных ВК, соответствующий минимуму функции (6.4). Если отсчёты входного и опорного сигналов представляют собой стационарные случайные процессы, то $\overline{d^2(t)}$ – постоянная величина, \mathbf{R}_{xd} – постоянный вектор, а корреляционная матрица \mathbf{R}_{XX} положительно определена (см. прил. 1). При этом $\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{xd}$ есть линейная функция от компонент вектора ВК. В силу положительной определённости \mathbf{KMR}_{XX} произведение $\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{XX}\mathbf{W}$ – квадратичная функция от того же аргумента (линейность и квадратичность относятся к зависимости функций от каждого из аргументов w_n).

Из единственности минимума функции $\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{XX}\mathbf{W}$ и монотонности $\overline{d^2(t)}$ и $\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{xd}$ следует, что их сумма $J_1 = \overline{\varepsilon^2(t)}$ также является квадратичной функцией и имеет единственный минимум (см. рис. 2.1). Значит, вектор ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$, соответствующий минимуму целевой функции $J_1 = \overline{\varepsilon^2(t)}$ может быть найден путём вычисления производных функции $\overline{\varepsilon^2(t)}$ по всем аргументам и приравнивания этих производных нулю. В теории функций многих переменных вектор, компоненты которого равны частным производным в точке по всем аргументам, называется **градиентом**. Условие экстремума функции $\overline{\varepsilon^2(t)}$ поэтому можно сформулировать очень кратко: приравнивание нулю градиента целевой функции по весовым коэффициентам. Математически это условие записывается в форме равенства

$$\nabla_{\mathbf{W}} \overline{\varepsilon^2(t)} = 0. \quad (2.6)$$

Поскольку $\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{xd}) = \mathbf{R}_{xd}$, а $\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}^+\mathbf{R}_{XX}\mathbf{W}) = 2\mathbf{R}_{XX}\mathbf{W}$ (см. прил. 1), то

$$\nabla_{\mathbf{W}} \overline{\varepsilon^2(t)} = -2\mathbf{R}_{xd} + 2\mathbf{R}_{XX}\mathbf{W}. \quad (2.7)$$

Приравнивая градиент нулю, можно получить уравнение относительно оптимального вектора ВК:

$$\mathbf{R}_{XX} \mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{xd}, \quad (2.8)$$

откуда

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{R}_{xd}. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) представляет собой матричную форму известного в теории оптимальной фильтраций так называемого уравнения Винера – Хопфа, и поэтому $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ часто называют оптимальным винеровским решением.

Полезный сигнал на входе антенны $\mathbf{X}(t)$ можно представить в виде (см. параграф 1.5)

$$\mathbf{X}_c(t) = u_c(t) \mathbf{b}_c, \quad (2.10)$$

где \mathbf{b}_c – вектор, определяющий направление прихода сигнала; $u_c(t)$ – функция, описывающая временную структуру сигнала.

Если опорный сигнал $d(t)$ полностью коррелирован с полезным сигналом $u_c(t)$, т. е. просто $d(t) = u_c(t)$, то

$$\mathbf{R}_{xd} = \overline{u_c(t)^* \mathbf{X}_c(t)} + \overline{u_c(t)^* \mathbf{X}_{\text{п}}(t)} + \overline{u_c(t)^* \mathbf{X}_{\text{ш}}(t)}. \quad (2.11)$$

При отсутствии корреляции полезного сигнала с помехой $\overline{u_c(t)^* \mathbf{X}_{\text{п}}(t)}$ и шумом $\overline{u_c(t)^* \mathbf{X}_{\text{ш}}(t)}$ и с учётом (2.10)

$$\mathbf{R}_{xd} = \overline{u_c(t)^* u_c(t)} \mathbf{b}_c = P_c \mathbf{b}_c, \quad (2.12)$$

где P_c – мощность полезного сигнала.

Если опорный и полезный сигнал коррелированы, но не совпадают, то

$$\mathbf{R}_{xd} = \overline{d_c(t)^* \mathbf{X}_c(t)} = P_c \rho_k \mathbf{b}_c, \quad (2.13)$$

где ρ_k – коэффициент взаимной корреляции опорного и полезного сигналов.

Таким образом, при полностью коррелированных опорном и полезном сигналах выражение (2.9) с учётом (2.12) приводится к виду:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = P_c \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.14)$$

Соответственно, при не полностью коррелированных сигналах

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = P_c \rho_k \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.15)$$

Правые части выражений (2.14) и (2.15) отличаются только постоянными множителями, поэтому оптимальные векторы ВК,

определённые из этих формул, совпадают с точностью до постоянной. Соответственно, совпадает и форма нормированных ХН. Отсюда следует важнейший вывод о том, что снижение степени корреляции между опорным и полезным сигналами не влияет на качество обработки сигналов в АА. На практике к опорному сигналу предъявляется требование о наличии коррелированности его с полезным сигналом и минимальной коррелированности с помехой.

Определим, чему равно минимальное значение среднеквадратической ошибки (СКО). Для этого подставим оптимальное значение вектора ВК из (2.9) в формулу (2.4):

$$\begin{aligned} J_{1 \min} &= \overline{\varepsilon^2(t)}_{\min} = \overline{d^2(t)} - 2\mathbf{R}_{xd}^+ \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{R}_{xd}^+ + \mathbf{R}_{xd}^+ \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{R}_{XX} \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{R}_{xd}^+ = \\ &= \overline{d^2(t)} - \mathbf{R}_{xd}^+ \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{R}_{xd}^+. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В частном случае, когда на АР воздействуют только изотропные по пространству внешние шумы и источник узкополосного сигнала, корреляционная матрица \mathbf{R}_{XX} представляется в виде суммы

$$\mathbf{R}_{XX} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+,$$

где $\sigma_{\text{ш}}^2$ – мощность внешнего шума в канале АР, P_c – мощность полезного сигнала (в данном случае совпадающего с опорным сигналом), \mathbf{a}_c – вектор направления прихода полезного сигнала.

Подставим данное значение матрицы \mathbf{R}_{XX} в выражение для $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ (2.14) и затем вычислим $J_{1 \min}$ по формуле (2.16). С учётом соотношения (2.12) и преобразования суммы матриц для мощного сигнала, т. е. когда $|d^2(t)| \gg \sigma_{\text{ш}}^2$, получим что $J_{1 \min} \approx N \sigma_{\text{ш}}^2$. Следовательно, минимальное значение целевой функции J_1 сравнимо со значением мощности шумов на выходе АР.

Найдём корреляцию между сигналом ошибки и компонентами вектора входного сигнала при $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{опт}}$. Для этого умножим на $\mathbf{X}^+(t)$ обе части равенства (2.2):

$$\varepsilon(t) \mathbf{X}^+(t) = d(t) \mathbf{X}^+(t) - \mathbf{W}^+ \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^+(t). \quad (2.17)$$

Математическое ожидание полученной функции

$$\overline{\varepsilon(t) \mathbf{X}^+(t)} = \mathbf{R}_{xd}^+ - \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{XX}. \quad (2.18)$$

Если $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{опт}}$, то с учётом выражения (2.34)

$$\overline{\varepsilon(t)\mathbf{X}^+(t)} \Big|_{\mathbf{W}=\mathbf{W}_{\text{опт}}} = \mathbf{R}_{xd}^+ - \mathbf{R}_{xd}^+ = 0. \quad (2.19)$$

Таким образом, при $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{опт}}$ сигнал ошибки $\varepsilon(t)$ не коррелирован с полным входным сигналом $\mathbf{X}(t)$, или, что то же самое, ортогонален ему. Этот результат совпадает с известным положением теории фильтрации об ортогональности сигнала ошибки и полного входного сигнала при оптимальных характеристиках фильтра.

При использовании критерия МСКО с целевой функцией (2.4) следует иметь в виду одно его существенное отрицательное свойство. Дело в том, что в случае кратковременного пропадания полезного сигнала матрица взаимной корреляции \mathbf{R}_{xd} становится нулевой. При этом система управления ААР в соответствии с (2.9) установит нулевые значения компонент вектора ВК. В результате приём становится невозможным даже при повторном появлении полезного сигнала.

Существуют различные методы борьбы с обнулением матрицы ВК. Одним из наиболее эффективных является введение различных ограничений. Поэтому при использовании критерия МСКО ограничения накладываются не только с целью решения задач обработки сигнала (см. параграф 2.1), но и для предотвращения обнуления ВК.

Типичным ограничением является требование фиксации уровня ХН в заданном направлении. Обычно при этом имеется в виду ожидаемое направление прихода полезного сигнала.

Пусть на ААР падает плоская волна. Как известно, предельно возможный уровень ХН антенны в направлении источника сигнала достигается при правильной фазировке каналов. С этой целью в весовые коэффициенты w_n вводятся фазовые множители, компенсирующие сдвиги фаз между колебаниями в каналах. В результате сигналы на выходах всех каналов (на входе сумматора) становятся синфазными. Сумма этих сигналов образует выходной сигнал антенны. Поскольку амплитуда колебаний на выходе каждого канала пропорциональна модулю соответствующего весового коэффициента, то уровень выходного сигнала антенны оказывается пропорциональным арифметической сумме модулей всех ВК.

Если состояние вектора ВК не обеспечивает точную фазировку всех каналов в направлении источника сигнала, то колебания на входе сумматора становятся несинфазными. При этом сигнал на выходе антенны пропорционален не арифметической, а геометрической сумме модулей

весовых коэффициентов. Ясно, что в этих условиях амплитуда выходного сигнала АА меньше, чем при точной фазировке.

Введём вектор \mathbf{b}_c , компоненты которого по модулю равны единице, а фазовые аргументы совпадают с фазами полезных сигналов на выходах элементов ААР. Иначе говоря, посредством вектора \mathbf{b}_c зададим ожидаемое направление прихода полезного сигнала.

Рассмотрим скалярное произведение $\mathbf{W}^+\mathbf{b}_c$. Это произведение в соответствии с правилом умножения векторов равно сумме компонент вида $w_n^*b_n$, где b_n – n -я составляющая вектора \mathbf{b}_c . Модуль компоненты $w_n^*b_n$ равен модулю весового коэффициента w_n , а её аргумент (фазовый множитель) определяется соотношением между аргументами весового коэффициента w_n и составляющей b_n . Если ААР сфазирована в направлении, задаваемом вектором \mathbf{b}_c , то во всех каналах аргументы ВК либо комплексно сопряжены составляющим b_n , либо отличаются от комплексно сопряжённых на одинаковый фазовый множитель. При этом все компоненты $w_n^*b_n$ есть вещественные числа или имеют одинаковые фазовые множители, а скалярное произведение $\mathbf{W}^+\mathbf{b}_c$ равно арифметической сумме модулей весовых коэффициентов. В общем же случае произведение $\mathbf{W}^+\mathbf{b}_c$ определится как векторная сумма модулей ВК.

Сумма пропорциональна амплитуде сигнала на выходе ААР. С другой стороны, выходному сигналу ААР пропорционален также уровень ХН антенны в направлении источника. В приведенных выше рассуждениях ожидаемый угол прихода полезного сигнала задавался вектором \mathbf{b}_c . Значит, скалярное произведение $\mathbf{W}^+\mathbf{b}_c$ в некотором масштабе определяет уровень ХН антенны в направлении, заданном вектором \mathbf{b}_c . Данное соотношение можно в краткой форме записать математически:

$$\mathbf{W}^+\mathbf{b}_c = \alpha, \quad (2.20)$$

где \mathbf{C} – вектор, задающий ожидаемый угол прихода сигнала; α – константа, пропорциональная фиксированному уровню ХН в этом направлении.

Если весовые коэффициенты обеспечивают точную фазировку ААР в ожидаемом направлении прихода сигнала, то константа достигает своего максимального значения α_{\max} :

$$\mathbf{W}^+\mathbf{b}_c = \alpha_{\max}. \quad (2.21)$$

Соответственно, уровень ХН в рассматриваемом направлении становится максимально возможным.

Изменение модуля вектора \mathbf{b}_c (т. е. пропорциональное изменение модулей всех его компонент) накладывает дополнительные ограничения на модули весовых коэффициентов. Например, увеличение модуля вектора \mathbf{b}_c при фиксированной константе α означает уменьшение максимально допустимых значений ВК и наоборот. С другой стороны, при одновременном пропорциональном изменении модуля вектора \mathbf{b}_c и константы α ограничения на ВК остаются прежними. Последнее свойство позволяет записать выражение (2.20) в нормированном виде:

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c = 1. \quad (2.22)$$

Во многих практических случаях для удобства вместо соотношения (2.22) используется эквивалентная ему формула

$$1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c = 0. \quad (2.23)$$

Таким образом, реализация критерия МСКО с ограничением на уровень ХН заключается в минимизации среднеквадратической ошибки (2.4) при выполнении условия (2.22) или (2.23):

$$\mathbf{W}_{\text{опт опт}} = \mathbf{R}_{XX}^{-1} (\mathbf{R}_{XX} \mathbf{b}_c + \lambda \mathbf{b}_c) = \mathbf{b}_c - \frac{\mathbf{b}_c^+ \mathbf{b}_c}{\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{b}_c} \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.24)$$

В этом случае $\mathbf{W}_{\text{опт опт}}$ находится на поверхности многомерной плоскости.

2.3. Максимум отношения сигнал/(шум + помеха)

В адаптивной антенной технике для оптимизации вектора ВК широко применяется критерий максимума отношения мощности полезного сигнала к мощности совокупности шума и помехи (МСШП) на выходе ААР. При этом для краткости обычно говорят просто об отношении сигнал/помеха. Адаптивные антенны, использующие критерий МСШП, разработаны для систем связи и радиолокации [5, 8,22].

В подобных ААР используется опорный сигнал второго типа в виде АФР, обеспечивающего ориентацию максимума ХН на источник сигнала.

Пусть на антенну поступает совокупный сигнал

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_c(t) + \mathbf{X}_п(t) + \mathbf{X}_ш(t). \quad (2.25)$$

При этом с точностью до постоянной мощность полезного сигнала на выходе антенны равна:

$$P_c = \overline{[\mathbf{W}^+ \mathbf{X}_c(t)]^2}, \quad (2.26)$$

а мощность совокупности помехи и шума:

$$P_{\text{пш}} = \overline{\{\mathbf{W}^+ [\mathbf{X}_n(t) + \mathbf{X}_m(t)]\}^2}. \quad (2.27)$$

Обозначим отношение мощности полезного сигнала к мощности совокупности помехи и шума $P_c / P_{\text{пш}} = \rho$. Таким образом, отношение сигнал/(шум + помеха) (ОСШП) на выходе антенны, т. е. целевая функция $J_4(\mathbf{W})$ имеет вид:

$$J_4(\mathbf{W}) = \rho = \frac{\overline{[\mathbf{W}^+ \mathbf{X}_c(t)]^2}}{\overline{\{\mathbf{W}^+ [\mathbf{X}_n(t) + \mathbf{X}_m(t)]\}^2}} = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_c \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W}}, \quad (2.28)$$

где $\mathbf{R}_c = \overline{\mathbf{X}_c(t) \mathbf{X}_c^+(t)}$ – КМ сигнала; $\mathbf{R}_{\text{пш}} = \overline{[\mathbf{X}_n(t) + \mathbf{X}_m(t)] [\mathbf{X}_n(t) + \mathbf{X}_m(t)]^+}$ – КМ совокупности помехи и шума.

В выражении (2.28) как числитель, так и знаменатель представляют собой однородные многочлены второй степени относительно компонент вектора ВК. Такие многочлены называются квадратичными формами. В аналитической геометрии доказывается, что отношение двух квадратичных форм от N переменных есть функция с N экстремумами [23]. Таким образом, определение вектора ВК из соображений достижения экстремума целевой функции (2.28) может привести к тому, что результирующее экстремальное отношение сигнал/помеха $P_c / P_{\text{пш}}$ не будет максимально возможным (рис. 2.11). Поэтому задача оптимизации ВК по критерию МСШП состоит в нахождении глобального (т. е. наибольшего) максимума $(P_c / P_{\text{пш}})_{\text{max max}}$ целевой функции $P_c / P_{\text{пш}}$.

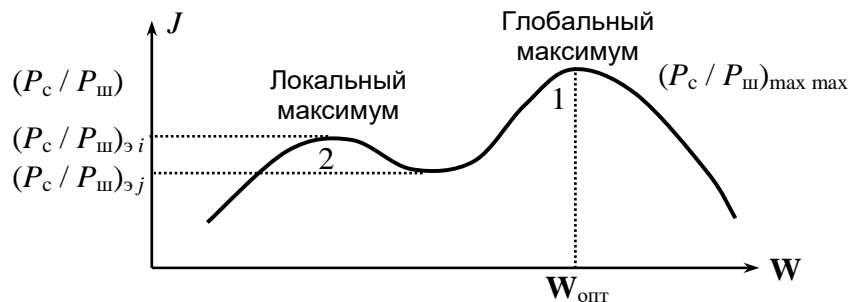


Рис. 2.11

Введя обозначение $\mathbf{q} = \mathbf{R}_{\text{пш}}^{1/2} \mathbf{W}$ можно преобразовать соотношение (2.28) к следующему виду:

$$\frac{P_c}{P_{\text{пш}}} = \frac{\mathbf{q}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{q}}{\mathbf{q}^+ \mathbf{q}}. \quad (2.29)$$

Полученная функция имеет вид

$$\rho(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^+ \mathbf{A} \mathbf{Z} / \mathbf{Z}^+ \mathbf{Z}$$

и, значит, представляет собой отношение Рэлея (см. прил. 1), в котором вектор $\mathbf{Z} = \mathbf{q}$, матрица $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2}$, $\text{ар}(\mathbf{q}) = P_c / P_{\text{пш}}$. Напомним, что для отношения Рэлея в точках экстремумов функции $P_c / P_{\text{пш}}$ вектор \mathbf{q} является собственным вектором, а само отношение $P_c / P_{\text{пш}}$ – собственным значением матрицы \mathbf{A} . Значит, на основании общего соотношения $\mathbf{A} \mathbf{q} = \lambda \mathbf{q}$ (см. прил. 1) в точках экстремумов справедливо соотношение

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_{\text{пш}}^{1/2} \mathbf{W} = (P_c / P_{\text{пш}})_э \mathbf{R}_{\text{пш}}^{1/2} \mathbf{W} \quad (2.30)$$

или, после сокращения,

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c \mathbf{W} = (P_c / P_{\text{пш}})_э \mathbf{R}_{\text{пш}}^{1/2} \mathbf{W}, \quad (2.31)$$

где $(P_c / P_{\text{пш}})_э$ – экстремальное значение отношения сигнал/помеха. После умножения обеих частей последнего равенства на $\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2}$, получим выражение

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{R}_c \mathbf{W} = (P_c / P_{\text{пш}})_э \mathbf{W}. \quad (2.32)$$

Как следует из формулы $\mathbf{A} \mathbf{Z} = \lambda \mathbf{Z}$, в последнем соотношении \mathbf{W} есть собственный вектор, а $(P_c / P_{\text{пш}})_э$ – собственное значение матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c$. Следовательно, отыскание экстремумов целевой функции $P_c / P_{\text{пш}}$ можно свести к нахождению собственных векторов \mathbf{W} не матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2}$, а более просто вычисляемой матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c$. Соответствующее этому собственному вектору отношение $(P_c / P_{\text{пш}})_э$ (см. рис. 2.11) есть собственное значение матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2} \mathbf{R}_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1/2}$.

Численному значению глобального максимума целевой функции $(P_c / P_{\text{пш}})_{\text{max max}}$ соответствует некоторый собственный вектор $\mathbf{W}_{\text{опт}}$, являющийся оптимальным вектором ВК для ААР.

Если полезный сигнал, падающий на антенну, имеет вид плоской волны, то матрица полезного сигнала \mathbf{R}_c может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_c = P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+, \quad (2.33)$$

где P_c – мощность полезного сигнала на выходе антенного элемента.

Матрица (2.33) имеет ранг, равный единице. Тогда есть матрица ранга единицы:

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{R}_c = P_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ = P_c \mathbf{Z} \mathbf{b}_c^+, \quad (2.34)$$

где $\mathbf{Z} = \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c$.

Известно (см. прил. 1), что матрица ранга единицы имеет одно отличное от нуля собственное значение λ_1 и один соответствующий ему собственный вектор \mathbf{q}_1 . При этом

$$\lambda_1 = (P_c / P_{\text{пш}})_{\max \max} = P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{Z} = P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c; \quad (2.35)$$

$$\mathbf{q}_1 = P_c \mathbf{Z} = P_c \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.36)$$

Таким образом, хотя в общем случае отношение Рэлея имеет N экстремальных точек, для матрицы полезного сигнала вида (2.33) целевая функция МСШП имеет только один максимум. Положение этого максимума определяется собственным вектором \mathbf{q}_1 , т. е. вектором ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$.

Как известно (см. прил. 1), собственный вектор определяется с точностью до постоянного коэффициента. Поэтому в общем случае вектор оптимальных ВК следует записывать не в виде (2.36), а более обобщенно:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (2.37)$$

где β – постоянное число.

Коэффициент β может быть выражен через оптимальное значение вектора ВК. Подставим в формулу (2.32) значение максимального ОСШП из (2.28) при $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{опт}}$:

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{R}_c \mathbf{W}_{\text{опт}} = \frac{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_c \mathbf{W}_{\text{опт}}}{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}} \mathbf{W}_{\text{опт}}. \quad (2.38)$$

Так как КМ полезного сигнала \mathbf{R}_c представляется в виде произведения двух векторов (2.33), то:

$$\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+ \mathbf{W}_{\text{опт}} = \frac{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+ \mathbf{W}_{\text{опт}}}{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}} \mathbf{W}_{\text{опт}}, \quad (2.39)$$

откуда

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \left(\frac{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{X}_c}{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{X}_c. \quad (2.40)$$

То есть

$$\beta = \frac{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{b}_c}{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}} . \quad (2.41)$$

С точки зрения вида ХН антенны достижение максимума ОСШП означает максимизацию КНД в направлении на источник сигнала с учётом формирования минимумов ХН на источники помех.

2.4. Связь критерия максимума отношения сигнал/(шум + помеха) с задачей синтеза характеристики направленности по максимуму коэффициента направленного действия

Коэффициент направленного действия – один из основных параметров антенны. Численное значение КНД определяется по формуле

$$D = \frac{[F(\theta_0, \varphi_0)]^2}{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [F(\theta, \varphi)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi} , \quad (2.42)$$

где θ_0, φ_0 – углы, определяющие направление прихода полезного сигнала.

На основании принципа взаимности КНД антенны в режиме приема и передачи совпадают.

Если на антенну воздействует внешний изотропный шум и дискретные по пространству источники помех, то КНД в режиме приема может быть определен по формуле [14]

$$D = \frac{[F(\theta_0, \varphi_0)]^2}{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [F(\theta, \varphi)]^2 p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} , \quad (2.43)$$

где $p(\theta, \varphi) = 1 + \sum_{m=1}^{M_{\text{ш}}} \frac{P_m}{\sigma_{\text{ш}}^2} \delta(\theta - \theta_m, \varphi - \varphi_m)$ – пространственное распределение плотности мощности внешних источников излучения относительно изотропного поля внешних шумов; $\sigma_{\text{ш}}^2$ – дисперсия внешних шумов; $M_{\text{ш}}$ – количество помех; P_m – мощность m -й помехи; θ_m, φ_m – углы, определяющие направление прихода помехи от m -го источника; $\delta(\theta - \theta_m, \varphi - \varphi_m)$ – дельта-функция.

Для установления связи между КНД АР и отношением сигнал/помеха приведем последнее равенство к отношению квадратичных форм. При этом числитель выражения (2.43) может быть представлен в виде

$$[F(\theta_0, \varphi_0)]^2 = \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c(\theta_0, \varphi_0) \mathbf{b}_c^+(\theta_0, \varphi_0) \mathbf{W}, \quad (2.44)$$

где $F(\theta_0, \varphi_0) = \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c(\theta_0, \varphi_0)$ – значение нормированной ХН в направлении на источник сигнала; $\mathbf{b}_c(\theta_0, \varphi_0)$ – вектор, определяющий направление прихода полезного сигнала.

Знаменатель выражения (2.43) также есть квадратичная форма относительно вектора \mathbf{W} :

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [F(\theta, \varphi)]^2 p(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}, \quad (2.45)$$

где $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ – матрица размерности $N \times N$.

Матрица $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ определяет мощность шумов и помех на выходах элементов решетки. В параграфе 1.5 показано, что такая матрица является эрмитовой и положительно определённой.

Подставляя выражения (2.44) и (2.45) в формулу (2.43), получаем окончательное соотношение

$$D = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W} \sigma_{\text{ш}}^2}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} P_c} = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}. \quad (2.46)$$

Полученное выражение для КНД приемной ААР с точностью до постоянной величины совпадает с ЦФ при оптимизации по критерию МСШП (2.28).

2.5. Максимум отношения правдоподобия

На практике характерной является ситуация, когда единственная априорная информация о полезном сигнале состоит в известности направления его возможного прихода. Ранее был изложен пригодный в этой ситуации принцип оптимизации вектора ВК по критерию МСШП. Другим возможным критерием оптимизации при известности ожидаемого направления прихода сигнала является критерий максимума отношения правдоподобия (МОП). Очевидно, что в АА, реализующих критерий МОП, используется опорный сигнал второго типа, для максимизации отношения правдоподобия производится оценка полезного сигнала на выходе антенны при оптимальной обработке. Для определения этой оценки необходимо знать распределение шума. В целях простоты изложения будем считать, что составляющие шума имеют многомерное нормальное распределение.

Вектор сигналов на выходах элементов ААР представим в виде:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_c(t) + \mathbf{X}_ш(t), \quad (2.47)$$

где $\mathbf{X}_c(t) = u_s(t)\mathbf{b}_c$.

Для нахождения оценки полезного сигнала $\mathbf{X}_c(t)$ введём [22] функцию правдоподобия $J_5[\mathbf{X}(t)]$:

$$J_5[\mathbf{X}(t)] = -\ln p[\mathbf{X}(t)|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}_c(t)+\mathbf{X}_ш(t)}], \quad (2.48)$$

где $p(\alpha|\beta)$ – условная плотность вероятности события α при условии, что произошло событие β .

Нахождение оптимальной оценки сигнала $\tilde{\mathbf{X}}_c(t)$ сводится к определению экстремума функции правдоподобия, т. е. к решению уравнения

$$\partial J_5[\mathbf{X}(t)] / \partial \mathbf{X}_c(t) = 0. \quad (2.49)$$

Пусть шум $\mathbf{X}_ш(t)$ является векторным стационарным нормальным белым шумом с нулевым средним $\overline{\mathbf{X}_ш(t)} = 0$ и корреляционной матрицей $\text{cov}[\mathbf{X}_ш(t)] = \mathbf{R}_ш \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция. В этом случае сигнал $\mathbf{X}(t)$ является стационарным случайным гауссовским вектором со средним значением $S(t)\mathbf{b}$, где $S(t)$ – детерминированная, но неизвестная функция, описывающая временную структуру полезного сигнала. Для таких сигналов функция правдоподобия имеет вид [22]:

$$J_5[\mathbf{X}(t)] = \alpha [\mathbf{X}(t) - u_s(t)\mathbf{b}_c]^+ \mathbf{R}_ш^{-1} [\mathbf{X}(t) - u_s(t)\mathbf{b}_c], \quad (2.50)$$

где α – скаляр.

Если провести анализ последнего выражения аналогично тому, как это сделано в параграфе 2.2, то можно увидеть, что функция (2.82) является квадратичной.

Найдём частную производную от $J_5[\mathbf{X}(t)]$ по $\mathbf{X}_c(t) = u_s(t)\mathbf{b}_c$ и приравняем её нулю:

$$\frac{\partial J_5[\mathbf{X}(t)]}{\partial [\mathbf{X}_c(t)]} = \alpha 2\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_ш^{-1} [\mathbf{X}(t) - S(t)\mathbf{b}_c] = 0. \quad (2.51)$$

Из формулы (2.51) следует, что оценка $\tilde{S}(t)$, максимизирующая $J_5[\mathbf{X}(t)]$, определяется выражением

$$\tilde{S}(t)\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_ш^{-1} \mathbf{b}_c = \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_ш^{-1} \mathbf{X}(t). \quad (2.52)$$

Учитывая, что $\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c$ – скаляр, последнее соотношение можно привести к виду

$$\tilde{S}(t) = [\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} / (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c)] \mathbf{X}(t)$$

или, что тоже самое

$$\tilde{S}(t) = [\mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c / (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c)]^+ \mathbf{X}(t). \quad (2.53)$$

Поскольку оценка $S(t)$ представляет собой выходной сигнал ААР, то выражение (2.53) связывает входной и выходной сигналы антенны при оптимальной обработке. Соответственно, выражение в квадратных скобках имеет смысл оптимального по критерию МОП вектора ВК (2.37) (2.10):

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c / (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c). \quad (2.54)$$

С учётом последнего соотношения оценка полезного сигнала (2.36) может быть записана в виде

$$\tilde{S}(t) = \mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{X}(t). \quad (2.55)$$

Входящая в формулу (2.54) матрица $\mathbf{R}_{\text{ш}}$ есть корреляционная матрица нормального шума. Это означает, что данная формула оптимизирует весовой вектор в зависимости только от шумовой обстановки, т. е. пространственного распределения шумов. Если помеха также имеет нормальное распределение амплитуды, то можно в (2.54) заменить матрицу $\mathbf{R}_{\text{ш}}$ на $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ и тем самым оптимизировать вектор ВК с учётом воздействия помех:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c / (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c). \quad (2.56)$$

Если помеха распределена по другому закону, то вместо (2.56) нужно пользоваться более сложными соотношениями.

2.6. Минимум мощности выходного сигнала

В адаптивных антеннах, как уже отмечалось, весьма широко используются опорные сигналы второго типа. Формирование такого опорного сигнала возможно только в том случае, когда известно направление прихода полезного сигнала. При этом все остальные дискретные источники излучения считаются помеховыми. В такой ситуации можно поставить задачу минимизации всех сигналов, приходящих с направлений, отличных от направления прихода полезного сигнала. Поскольку при этом необходимо минимизировать мощность помехового сигнала на выходе

антенны $\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}$, то и соответствующий критерий называется критерием минимума мощности выходного сигнала (ММВС).

Пусть амплитуда падающего на антенну полезного сигнала равна $|x_c|$, а направление его прихода определяется вектором \mathbf{V}_c . Поскольку на конечном раскрытие апертуры мощность полезного сигнала ограничена, то ограничена будет и его амплитуда $\mathbf{W}^+ |x_c| \mathbf{b}_c$ на выходе антенны. Величина $|x_c|$ есть некоторая константа, поэтому произведение $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ тоже ограничено.

Обозначим

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c = a, \quad (2.57)$$

где a – комплексная постоянная, в которую входит и величина $|x_c|$.

Произведение $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ представляет собой уровень ХН в направлении источника приходящего сигнала. Значит, эта величина пропорциональна (или с точностью до постоянной равна) уровню полезного сигнала на выходе антенны.

Таким образом, при использовании критерия ММВС ставится задача минимизации мощности помехи $\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}$ при сохранении уровня полезного сигнала $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$. Заметим при этом, что функция $\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}$ – квадратичная с единственным минимумом (рис. 2.5).

Здесь эффективно использование метода Лагранжа. Выполнив необходимые действия, можно получить целевую функцию

$$J_6(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} + 2\lambda(\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c - a), \quad (2.58)$$

где выражение в скобках есть левая часть ограничения $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c - a = 0$.

Для вычисления минимума целевой функции (2.58) необходимо найти и приравнять нулю её градиент:

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_6(\mathbf{W}) = 2\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} + 2\lambda \mathbf{b}_c = 0. \quad (2.59)$$

Из выражения (2.59) следует, что

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = -\lambda \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.60)$$

Подставляя выражение (2.60) в формулу (2.57), можно получить соотношение

$$(-\lambda \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c)^+ \mathbf{b}_c = a. \quad (2.61)$$

Отсюда

$$\lambda = -a^* (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{b}_c)^{-1}. \quad (2.62)$$

Таким образом, оптимальный вектор ВК равен

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = b\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c \quad \mathbf{W}_{\text{опт}} = b\mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{V}_c, \quad (2.63)$$

где $b = a^* / (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{b}_c)$ – комплексная постоянная.

При использовании критерия ММВС наряду с линейным ограничением (2.57) могут применяться ограничения других типов, прежде всего квадратичные. Такая ситуация, в частности, возникает, когда накладываются условия не на амплитуду, а на мощность выходного сигнала. Поскольку мощность полезного сигнала на выходе антенны пропорциональна $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W}$, то соответствующее ограничение имеет вид

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W} = a. \quad (2.64)$$

На практике обычно вместо условия (2.64) используется соотношение

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W} = 1, \quad (2.65)$$

что лишь накладывает дополнительное ограничение на модули весовых коэффициентов (см. параграф 2.2).

Строя обычным порядком целевую функцию, получаем

$$J_7(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W} + \lambda(1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W}), \quad (2.66)$$

где $1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W}$ – левая часть ограничения (2.65), записанного в виде $1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W} = 0$.

Как обычно, для расчёта оптимальных ВК вычислим градиент данной функции и приравняем его нулю:

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_7(\mathbf{W}) = 2\mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W} - 2\lambda \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W} = 0. \quad (2.67)$$

Упростим эту запись:

$$(\mathbf{R}_{\text{пш}} - \lambda \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+) \mathbf{W} = 0. \quad (2.68)$$

Умножим обе части последнего равенства на $(\mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+)^{-1}$:

$$((\mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+)^{-1} \mathbf{R}_{\text{пш}} - \lambda \mathbf{I}_N) \mathbf{W} = 0, \quad (2.69)$$

где \mathbf{I}_N – единичная матрица.

Последнее равенство определяет (см. прил. 1) собственные векторы \mathbf{W} и соответствующие им собственные значения λ матрицы

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+)^{-1} \mathbf{R}_{\text{пш}}. \quad (2.70)$$

С другой стороны, ранее (см. параграф 2.3) было показано, что условием максимума целевой функции (2.28)

$$J(\mathbf{W}) = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}$$

является равенство вектора ВК собственному вектору корреляционной матрицы

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} (\mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+). \quad (2.71)$$

Сравнение выражений (2.70) и (2.71) показывает, что $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1$. Значит, собственные векторы матрицы (2.70) определяют минимумы целевой функции, обратной по отношению к (2.28), т. е. функции

$$J(\mathbf{W}) = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{W}}. \quad (2.72)$$

Очевидно, минимизация выражения (2.72) эквивалентна максимизации функции (2.28). Воспользуемся поэтому результатами, полученными в параграфе 2.3.

Решение для оптимальных ВК, максимизирующих функцию (2.28), известно [см. формулу (2.37)]:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c,$$

где $\beta = \mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{b}_c / (\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}})$.

Однако уравнению (2.69) удовлетворяет любой вектор, полученный умножением $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ на произвольную константу. Поэтому справедлива запись

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \gamma \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (2.73)$$

где γ – некоторая постоянная, в общем случае не равная β .

Для определения коэффициента γ воспользуемся ограничением (2.65) при оптимальных ВК (2.73):

$$(\mathbf{b}_c^+ \gamma \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c)^2 = 1, \quad (2.74)$$

откуда

$$\gamma = 1 / (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c). \quad (2.75)$$

Окончательное выражение для вектора ВК, оптимального по критерию ММВС при ограничении (2.65), имеет вид:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = (\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c)^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.76)$$

Множитель Лагранжа λ является при этом максимальным собственным значением матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$ и, поскольку $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$, минимальным собственным значением матрицы $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+) \mathbf{R}_{\text{шш}}$. Таким образом (2.35):

$$\lambda = \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.77)$$

При разработке адаптивных антенн может оказаться удобным накладывать квадратичные ограничения непосредственно на значения ВК. Физическая основа такого подхода состоит в ограниченности модулей коэффициентов передачи реальных управляемых элементов в каналах ААР. В общем случае ограничение на ВК записывается в виде:

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{H} \mathbf{W} = 1, \quad (2.78)$$

где \mathbf{H} – некоторая квадратная матрица.

Формула (2.78) с математической точки зрения представляет собой уравнение поверхности второго порядка в многомерном пространстве. В этой связи в литературе по адаптивной антенной технике условие (2.78) часто называют ограничением на квадратичной гиперповерхности.

Различным образом задавая матрицу \mathbf{H} , можно изменить ограничения на ВК с целью формирования ХН требуемого вида. Если $\mathbf{H} = \mathbf{I}_N$, то рассматриваемое ограничение представляется в виде

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{H} \mathbf{W} = 1. \quad (2.79)$$

Эта запись означает, что сумма квадратов модулей всех ВК равна единице.

Целевая функция (функционал Лагранжа) составляется обычным порядком:

$$J_8(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} + \lambda(1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{H} \mathbf{W}). \quad (2.80)$$

Градиент этой функции по ВК определяется формулой

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_8(\mathbf{W}) = 2\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} - 2\lambda \mathbf{H} \mathbf{W}. \quad (2.81)$$

После приравнивания градиента нулю получим

$$(\mathbf{R}_{\text{шш}} - \lambda \mathbf{H}) \mathbf{W} = 0 \quad (2.82)$$

или

$$(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}} - \lambda \mathbf{I}_N) \mathbf{W} = 0. \quad (2.83)$$

Последнее выражение совпадает по форме с (2.69). Значит, его решение относительно λ и \mathbf{W} обеспечивает минимум целевой функции, совпадающей (с учётом разницы в обозначениях) с (2.72), т. е. функции

$$J(\mathbf{W}) = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{H} \mathbf{W}}. \quad (2.84)$$

Из физических соображений ясно, что минимизация функции (2.84) как раз и обеспечивает подавление помех в ААР.

Решением уравнения (2.83) является собственный вектор матрицы $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}}$ соответствующий минимальному собственному значению λ_{\min} . Корреляционная матрица $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ эрмитова и положительно определена. Для того, чтобы существовал собственный вектор матрицы $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}}$ и соответствующее ему положительное собственное значение, матрица \mathbf{H} также должна быть эрмитовой и положительно определённой. При выполнении этого условия

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \alpha \mathbf{q}_{\min}, \quad (2.85)$$

где α – постоянное число; \mathbf{q}_{\min} – собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению λ_{\min} матрицы $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}}$.

Для определения α подставим равенство (2.85) в формулу (2.78). Получим, что

$$\alpha^2 \mathbf{q}_{\min}^+ \mathbf{H} \mathbf{q}_{\min} = 1, \quad (2.86)$$

откуда

$$\alpha = 1 / \sqrt{\mathbf{q}_{\min}^+ \mathbf{H} \mathbf{q}_{\min}}. \quad (2.87)$$

Окончательное выражение для оптимального вектора ВК имеет вид

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{q}_{\min} / \sqrt{\mathbf{q}_{\min}^+ \mathbf{H} \mathbf{q}_{\min}}. \quad (2.88)$$

2.7. Максимум сигнала при полном подавлении помех

Весьма привлекательным с точки зрения простоты реализации является критерий максимального выделения сигнала при полном подавлении помех (МСПП). Использование данного критерия обеспечивает максимальную амплитуду полезного сигнала на выходе АА путём максимизации уровня $\mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ в направлении источника сигнала. При этом условие полного подавления помех выступает в качестве ограничения. В соответствии с

данным ограничением уровень ХН в направлении каждого из источников помех равен нулю:

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_{pm} = 0, \quad (2.89)$$

где $m = 1, \dots, M_{\text{п}}$ – номер помехового сигнала; $M_{\text{п}}$ – общее число помех; \mathbf{b}_{pm} – вектор, определяющий направление прихода m -й помехи.

Таким образом, всего накладывается $M_{\text{п}}$ ограничений вида (2.89). Набор этих ограничений означает, что весовой вектор \mathbf{W} , максимизирующий амплитуду сигнала $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$, должен быть ортогонален векторам \mathbf{b}_{pm} всех мешающих сигналов.

Все $M_{\text{п}}$ условий (2.89) можно записать в виде единой матрицы

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{A} = 0, \quad (2.90)$$

где $\mathbf{A} = [\mathbf{b}_{p1} \dots \mathbf{b}_{pm}]$ – прямоугольная матрица вектор-столбцов размерностью $N \times M$.

Поскольку полезный сигнал $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ линейно зависит от модулей ВК, то необходимо наложить ограничения на весовые коэффициенты. В противном случае задача не будет иметь физического смысла. Действительно, при неограниченном увеличении компонент вектора ВК величина $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ может быть сделана сколь угодно большой.

Наиболее удобно здесь использовать ограничение (2.79):

$$1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{W} = 0. \quad (2.91)$$

Отметим ещё один существенный момент. Предположим, что каким-либо способом найден максимум функции $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ при ограничениях (2.90) и (2.123). Изменив аргументы всех ВК на π , мы тем самым изменим знак величины $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$. Математически такое действие обращает максимум функции в минимум. Таким образом, задача отыскания максимума функции $\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c$ при ограничениях (2.90) и (2.91) эквивалентна нахождению минимума той же функции при тех же ограничениях. Для решения последней задачи используем метод множителей Лагранжа.

В соответствии с изложенным целевая функция (функционал Лагранжа) имеет вид

$$J_9(\mathbf{W}) = 2\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c + 2\mathbf{W}^+ \mathbf{A} \boldsymbol{\Lambda} + \lambda(1 - \mathbf{W}^+ \mathbf{W}), \quad (2.92)$$

где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix}$ – вектор-столбец множителей Лагранжа; λ – множитель Лагранжа.

В правой части выражения (2.92) содержится три слагаемых. Первые два слагаемых есть линейные функции, а третье – квадратичная функция от аргумента \mathbf{W} с единственным минимумом. Значит, и всё выражение (2.92) есть квадратичная функция с единственным минимумом.

Приравняем нулю градиент целевой функции по \mathbf{W} :

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_9(\mathbf{W}) = 2\mathbf{b}_c + 2\mathbf{A}\Lambda - 2\lambda\mathbf{W} = 0. \quad (2.93)$$

Отсюда легко получить выражение для оптимального значения Весового вектора $\mathbf{W}_{\text{опт}}$:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = (\mathbf{b}_c + \mathbf{A}\Lambda) / \lambda. \quad (2.94)$$

Неизвестный вектор множителей Лагранжа Λ определяется путём подстановки соотношения (2.94) в (2.90):

$$((\mathbf{b}_c + \mathbf{A}\Lambda) / \lambda)^+ \mathbf{A} = 0. \quad (2.95)$$

Поскольку λ – константа, то справедливо равенство

$$(\mathbf{b}_c + \mathbf{A}\Lambda)^+ \mathbf{A} = 0, \quad (2.96)$$

откуда

$$\mathbf{b}_c \mathbf{A} + \Lambda^+ \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = 0. \quad (2.97)$$

Из последнего выражения следует, что

$$\Lambda^+ = -\mathbf{b}_c^+ \mathbf{A} (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1}, \quad (2.98)$$

поэтому окончательно получаем

$$\Lambda = -[\mathbf{b}_c^+ \mathbf{A} (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1}]^+ = -(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_c. \quad (2.99)$$

Подставляя (2.99) в (2.94), получим

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \frac{\mathbf{I}_N - \mathbf{A} (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+}{\lambda} \mathbf{b}_c. \quad (2.100)$$

Последний неизвестный множитель Лагранжа λ найдём путём подстановки формулы (2.100) в условие (2.91):

$$1 - \left\{ \frac{\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+}{\lambda} \mathbf{b}_c \right\}^+ \left\{ \frac{\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+}{\lambda} \mathbf{b}_c \right\}^+ = 0. \quad (2.101)$$

Несложное преобразование приводит к результату

$$\frac{\mathbf{b}_c^+ [\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+]}{\lambda^*} \cdot \frac{[\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+] \mathbf{b}_c}{\lambda} = 1, \quad (2.102)$$

откуда после умножения

$$\frac{\mathbf{b}_c^+ [\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+]^2 \mathbf{b}_c}{\lambda^2} = 1. \quad (2.103)$$

В итоге получаем

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{b}_c^+ [\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+]^2 \mathbf{b}_c}. \quad (2.104)$$

Окончательное выражение для оптимального вектора ВК имеет вид

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \frac{[\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+] \mathbf{b}_c}{\sqrt{\mathbf{b}_c^+ [\mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+]^2 \mathbf{b}_c}}. \quad (2.105)$$

Как видно из формулы (2.105), вектор $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ имеет две составляющие. Первая составляющая пропорциональна вектору приходящего сигнала \mathbf{b}_c и обеспечивает фазировку ААР в направлении источника полезного сигнала. Вторая составляющая пропорциональна вектору $\mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_c$ и является «добавкой», обеспечивающей формирование нулей ХН в направлениях на источники помех.

При отсутствии помех $\mathbf{A}(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_c$ есть нулевой вектор и с точностью до постоянной

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{b}_c. \quad (2.106)$$

Это означает, что формируется ХН с предельно достижимым уровнем в направлении источника полезного сигнала.

При наличии помех вектор ВК определяется по полной формуле (2.105). При этом ХН изменяется, причём в общем случае максимум ХН оказывается ориентированным не на источник полезного сигнала. Тем не менее уровень ХН и КНД в направлении на этот источник являются максимально возможными в условиях действия ограничения (2.90). Попытка дополнительного изменения вектора ВК с целью ориентации максимума ХН на источник полезного сигнала неминуемо приведёт к снижению уровня ХН и КНД в этом направлении.

Критерий МСПП существенно отличается от ранее рассмотренных критериев. Указанное отличие состоит в том, что в выражение для вектора $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ не входит корреляционная матрица $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ (2.105) и (2.106). Эта особенность и обуславливает простоту реализации критерия МСПП в АА.

Причина особенности прозрачна. При реализации критерия МСПП адаптивная антенна формирует нули ХН на источники помех независимо от мощности каждой из помех. Это означает, что вектор $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ не зависит (и не должен зависеть) от конкретного вида КМ помех $\mathbf{R}_{\text{пш}}$. С другой стороны, неучёт вида матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ приводит к определённому снижению ОСШП на выходе ААР (см. параграф 2.8). В этой связи область применения критерия МСПП ограничивается.

Критерий МСПП применяется обычно в случаях, когда нет устойчивого приёма помеховых сигналов. Такая ситуация возникает, например, при «мерцающих» помехах или при работе на передачу. Задача определения оптимального вектора ВК по данному критерию практически совпадает с задачей синтеза ХН с фиксированными направлениями максимума и нулей. Соответственно, обе эти задачи решаются одинаковыми методами.

2.8. Взаимосвязь между весовыми коэффициентами при использовании разных критериев оптимальности

Рассмотренные критерии оптимальности соответствуют экстремумам различных целевых функций. При этом все критерии различаются условиями, которым должны удовлетворять значения показателей качества. В то же время анализ соотношений для оптимальных ВК по разным критериям адаптации показывает большое сходство.

Прежде всего обращает на себя внимание почти полная идентичность соотношений для $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ по критериям МСКО без ограничений, МСПП, МОП и ММВС при ограничениях (2.57) и (2.65). Все эти формулы могут быть представлены в виде

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (2.107)$$

где β – постоянный коэффициент, а корреляционная матрица \mathbf{R} есть $\mathbf{R}_{\text{ХХ}}$ при использовании критерия МСКО (2.14) и $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ в остальных случаях.

Матрицу $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ обычно бывает определить весьма трудно или даже невозможно. По этой причине на практике при обработке вместо матрицы $\mathbf{R}_{\text{пш}}$ используется полная корреляционная матрица входного сигнала $\mathbf{R}_{\text{ХХ}}$.

Корреляционную матрицу \mathbf{R}_{XX} можно отождествить с матрицей $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ в двух случаях. Во-первых, такая ситуация имеет место при периодическом появлении полезного сигнала. Это свойственно, например, радиолокации, когда измерение КМ производится в паузе между излучением зондирующего и приемом отражённого импульсов. Во-вторых, $\mathbf{R}_{XX} \approx \mathbf{R}_{\text{шш}}$, если полезный сигнал по уровню существенно ниже шумов и помех. Это может иметь место в системах связи с шумоподобными сигналами.

В двух названных случаях критерии МСШП, МОП и ММВС с ограничениями (2.57) и (2.65) реализуются без погрешностей и при замене матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ на \mathbf{R}_{XX} . Проанализируем, как влияет на оптимальное решение наличие полезного сигнала, если соответствующей \mathbf{KMR}_c пренебречь нельзя. Пусть полезный сигнал не коррелирован с помехами и шумами. В этом случае $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{\text{шш}} + \mathbf{R}_c$. Подставим это соотношение в (2.107):

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta(\mathbf{R}_{\text{шш}} + \mathbf{R}_c)^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.108)$$

Поскольку $\mathbf{R}_c = P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$, то

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta(\mathbf{R}_{\text{шш}} + P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+)^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.109)$$

Последнее выражение приводится к виду

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \left(\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1}}{1 + P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c} \right) \mathbf{b}_c. \quad (2.110)$$

Произведение $P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c$ есть постоянное число. Обозначив его через b , после несложных преобразований получим

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \left(1 - \frac{b}{1+b} \right) \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c = \frac{b}{1+b} \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.111)$$

Таким образом, учёт сигнала в выражении (2.107) приводит лишь к изменению постоянного множителя при определении оптимальных ВК. Но вид ХН АА определяется только нормированным АФР поля в раскрыве. Это означает, что при изменении постоянного коэффициента в выражении (2.107) происходит только пропорциональное изменение амплитуды сигнала, а форма ХН не изменится. Значит, использование матрицы \mathbf{R}_{XX} вместо $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ не влияет на качество адаптации. Отсюда также следует совпадение формы ХН для всех случаев, когда оптимальный весовой вектор может быть выражен в виде (2.107). Это справедливо для всех безусловных критериев (МСКО без

ограничений, МСШП, МОП), а также для некоторых условных критериев [в частности, ММВС с ограничениями (2.57) или (2.65)].

Поскольку во всех перечисленных случаях результирующая форма ХН одинакова, то одинаковым будет и достигаемое в результате адаптации ОСШП. Это отношение определится по формуле (2.28). В выражении (2.28) уже нельзя заменить $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ на $\mathbf{R}_{\text{ХХ}}$, поскольку такое действие приведёт к изменению физического смысла данного отношения. Подставим в (2.28) выражение $\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c$. Учтя, что $\mathbf{R}_c = P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$, получим окончательную формулу

$$\frac{P_c}{P_{\text{шш}}} = \frac{\beta^2 P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c}{\beta^2 \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c} = P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c. \quad (2.112)$$

Оптимальные ВК для всех рассмотренных критериев эффективности с учётом корреляции внешних шумов в каналах АР определяются одним и тем же соотношением:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{b}_c. \quad (2.113)$$

В случае, когда внешние шумы некоррелированы и имеют во всех каналах одинаковую интенсивность, КМ шумов представляется соотношением $\mathbf{R}_{\text{ш}} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$. При этом уравнение (2.113) приводится к виду (2.107).

Выражение (2.113) можно получить и непосредственно из формулы (2.107). Действительно, уравнение для оптимальных ВК (2.107) легко преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{b}_c. \quad (2.114)$$

Отсюда следует, что для различных помеховых ситуаций произведение $\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}$ является постоянным вектором. Значит, формулу (2.114) можно заменить эквивалентным соотношением

$$\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{b}_c. \quad (2.115)$$

Из последнего равенства следует выражение (2.113).

Таким образом, оптимальные ВК, определённые по любому из перечисленных выше критериев, тесно взаимосвязаны между собой и могут быть определены одними и теми же выражениями.

Некоторые особенности в рассматриваемом смысле имеют условные критерии МСКО с ограничениями (2.22). Оптимальный вектор ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ в этих случаях может быть выражен в виде:

$$\mathbf{W}_{\text{опт огр}} = \mathbf{W}_{\text{опт}} + \mathbf{W}_{\text{д}},$$

где $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ – оптимальный весовой вектор, определяемый по формуле (2.107), $\mathbf{W}_{\text{д}}$ – некоторый дополнительный вектор ВК, обеспечивающий выполнение ограничений.

Отсюда видна чёткая связь критериев МСКО с ограничениями и прочих критериев, рассмотренных в начале параграфа.

На первый взгляд особняком в этом смысле стоит критерий ММВС с ограничениями (2.78). Действительно, формула расчёта оптимальных ВК (2.88) внешне не имеет ничего общего с расчётными соотношениями для вектора ВК по другим критериям. Однако это расхождение связано лишь с особенностями метода нахождения экстремума целевой функции (2.84).

Сравним целевые функции методов ММВС с ограничениями (2.78) и (2.65), т. е. функции (2.84) и (2.72). Нетрудно видеть, что выражение (2.84) при $\mathbf{H} = \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$ совпадает с формулой (2.72). Значит, в этом случае совпадут и решения. Иначе говоря, если $\mathbf{H} = \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$, то выражение (2.88) преобразуется к виду (2.107).

Можно рассмотреть данный вопрос с более общих позиций. Как указано в параграфе 2.3, оптимальный вектор ВК (2.37) есть собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_c$. Значит, то же самое относится и к вектору (2.73), который совпадает по виду с (2.37).

Заметим, что матрица $\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_c$ эрмитова, поскольку эрмитовыми являются матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1}$ и \mathbf{R}_c . Но для любой эрмитовой матрицы \mathbf{A} , как это следует из её определения (см. прил. 1), максимальное собственное значение равно минимальному собственному значению обратной матрицы \mathbf{A}^{-1} . Поэтому вектор ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ (2.73) соответствует минимальному собственному значению матрицы $\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}}$. Таким образом, выражение (2.73) можно записать в виде

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \gamma \mathbf{q}_{\text{min}}, \quad (2.116)$$

где \mathbf{q}_{min} – собственный вектор матрицы $\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}}$, соответствующий её минимальному собственному значению.

Таким же образом можно трактовать и все остальные соотношения вида (2.107).

Сравнивая формулы (2.116) и (2.88), легко увидеть их аналогичность. Разница состоит в том, что \mathbf{q}_{\min} в (2.88) есть собственный вектор иной матрицы, а именно матрицы $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}_{\text{шш}}$. Однако при $\mathbf{H} = \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$ выражения (2.116) и (2.88) с точностью до постоянной совпадают, поскольку $\mathbf{R}_c = P_c \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+$.

Таким образом, критерий ММВС с ограничением (2.78) также тесно связан с прочими критериями.

Связь критерия МСПП с остальными критериями не очевидна из-за того, что соответствующее выражение для оптимальных ВК (2.105) в отличие от (2.107) не содержит в себе корреляционную матрицу $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ (или $\mathbf{R}_{\text{ХХ}}$). Однако при отсутствии помех в изотропном поле шумов и выражения (2.105) и (2.107) приводятся к общему виду

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \gamma \mathbf{b}_c, \quad (2.117)$$

где γ – постоянный множитель.

То есть антенна формирует ХН с предельно достижимым максимумом в направлении источника сигнала в обоих случаях.

В более сложной помеховой ситуации векторы $\mathbf{W}_{\text{опт}}$, рассчитанные по формулам (2.105) и (2.107), не будут совпадать. Несовпадение ВК приведёт к различиям и в форме ХН. Однако эти различия относительно невелики. Дело в том, что процессы адаптации по формулам (2.105) и (2.107) приводят к подавлению помех путём уменьшения уровня ХН в направлениях на их источники. При безусловной оптимизации (2.107) формируются минимумы, глубина которых возрастает при увеличении интенсивности помех. При условной оптимизации (2.105) в направлениях на источники помех образуются нули ХН независимо от уровней помеховых сигналов.

При высоких уровнях помех безусловно-оптимизированный вектор ВК (2.107) обеспечивает формирование глубоких минимумов на источники помех. В этом случае данный вектор приближается к условно-оптимизированному вектору (2.105). В пределе формула (2.107) переходит в (2.105).

Выражение (2.107) можно записать в виде

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}} + x_{\text{ш1}}^2 \mathbf{b}_{\text{ш1}} \mathbf{b}_{\text{ш1}}^+ + x_{\text{ш2}}^2 \mathbf{b}_{\text{ш2}} \mathbf{b}_{\text{ш2}}^+ + \dots)^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (2.118)$$

где $x_{\text{ши}}$ – амплитуда i -й помехи; $\mathbf{b}_{\text{ши}}$ – вектор, характеризующий направление прихода i -й помехи.

В соответствии с (П.69)

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \left(\mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} x_{\text{п1}}^2 \mathbf{b}_{\text{п1}} \mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1}}{1 + x_{\text{п1}}^2 \mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_{\text{п1}}} - \frac{\mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} x_{\text{п2}}^2 \mathbf{b}_{\text{п2}} \mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1}}{1 + x_{\text{п2}}^2 \mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_{\text{п2}}} - \dots \right) \mathbf{b}_c. \quad (2.119)$$

Здесь $\mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1}$ можно вынести за скобки. Кроме того, при больших амплитудах помех $x_{\text{пi}}$ допустимо пренебречь единицами в знаменателях. Получим

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \left(\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{b}_{\text{п1}} \mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1}}{\mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_{\text{п1}}} - \frac{\mathbf{b}_{\text{п2}} \mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1}}{\mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_{\text{п2}}} - \dots \right) \mathbf{b}_c. \quad (2.120)$$

Если шумы в каналах некоррелированы и имеют одинаковую интенсивность, то $\mathbf{R}_{\text{ш}} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N$. Выполним эту подстановку внутри скобок:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} \approx \beta \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \left(\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{b}_{\text{п1}} \mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \sigma_{\text{ш}}^{-2}}{\mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \sigma_{\text{ш}}^{-2} \mathbf{b}_{\text{п1}}} - \frac{\mathbf{b}_{\text{п2}} \mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \sigma_{\text{ш}}^{-2}}{\mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \sigma_{\text{ш}}^{-2} \mathbf{b}_{\text{п2}}} - \dots \right) \mathbf{b}_c, \quad (2.121)$$

откуда

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} \approx \beta \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} (\mathbf{I}_N - \mathbf{b}_{\text{п1}} (\mathbf{b}_{\text{п1}}^+ \mathbf{b}_{\text{п1}})^{-1} \mathbf{b}_{\text{п1}}^+ - \mathbf{b}_{\text{п2}} (\mathbf{b}_{\text{п2}}^+ \mathbf{b}_{\text{п2}})^{-1} \mathbf{b}_{\text{п2}}^+ + \dots) \mathbf{b}_c. \quad (2.122)$$

Обозначив через \mathbf{A} матрицу вектор-столбцов помех, получим

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} \approx \beta \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} (\mathbf{I}_N - \mathbf{A} (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{b}_c. \quad (2.123)$$

Нетрудно видеть, что выражение (2.123) с точностью до постоянной совпадает с формулой (2.105).

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ АДАПТАЦИИ

3.1. Общие сведения о методах адаптации

Суть любого критерия адаптации заключается в достижении экстремума соответствующей целевой функции. Способ достижения этого экстремума называется методом адаптации. Выбор метода адаптации не менее, важен, чем выбор критерия, поскольку эффективность конкретного алгоритма адаптации непосредственно определяется заложенным методом (рис. 3.1).

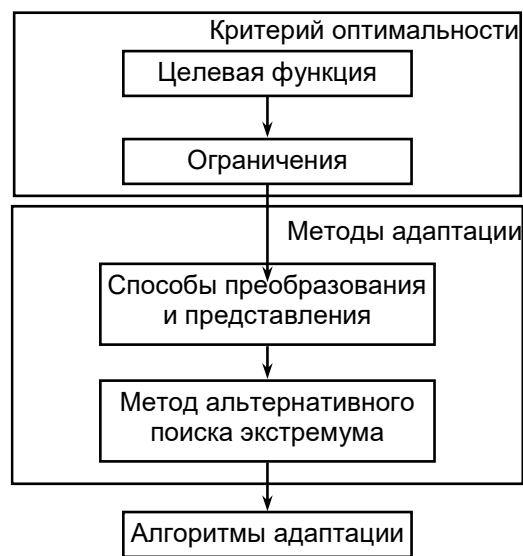


Рис. 3.1.

На практике поиск оптимальных ВК, соответствующих экстремумам целевых функций АА, осуществляется различными методами. Если целевая функция априорно точно известна, то такие методы называются методами оптимизации. Параметры сигнально-помеховой обстановки, входящие в целевую функцию, в большинстве случаев заранее неизвестны. В связи с этим априори неизвестен и конкретный вид самой целевой функции В этих условиях методы поиска экстремума целевой функции (т. е. оптимизации вектора ВК) называются методами адаптации.

Методы адаптации чрезвычайно разнообразны.

Классификация методов адаптивного поиска экстремумов стационарных целевых функций показана на рис. 3.2. В дальнейшем будем говорить просто о методах адаптации. Где это необходимо, данный термин будем уточнять.

По способу реализации процесса адаптации, методы подразделяются на дискретные, непрерывные и комбинированные.



Рис. 3.2

При использовании дискретных методов адаптации решение сходится к точке экстремума в процессе дискретного изменения ВК. Также посредством дискретных соотношений определяются все неизвестные параметры целевых функций, используемые при реализации таких методов.

В зависимости от количества итераций (шагов) установления ВК из исходного в конечное состояние методы адаптации делятся на итерационные и неитерационные.

Итерационные методы основаны на уточнении ВК от итерации к итерации (рис. 3.3). При этом каждое очередное значение весового вектора определяется по конечному числу i его предыдущих значений:

$$\mathbf{W}(j+1) = L_4[\mathbf{W}(j) \dots \mathbf{W}(j-i)], \quad (3.1)$$

где j – номер итерации; L_4 – некоторая функция, связывающая предыдущие значения ВК с последующими.

Более наглядно выражение (3.1) можно переписать в виде

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{A}\mathbf{W}(j) - \mathbf{H}\mathbf{b}_0, \quad (3.2)$$

где \mathbf{A}, \mathbf{H} – матрицы коэффициентов; \mathbf{b}_0 – вектор, указывающий направление изменения ВК.

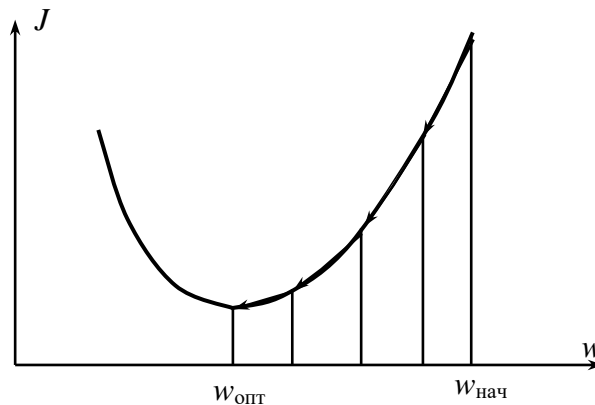


Рис. 3.3

Целевая функция обычно описывается уравнением второго или более высокого порядка. Информация о кривизне целевой функции в каждой точке процесса адаптации существенно влияет на сходимость решения, В зависимости от степени полинома, описывающего (аппроксимирующего) целевую функцию, различают методы адаптации первого, второго и высших порядков.

К методам первого порядка относятся обычные градиентные методы типа

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \alpha \nabla_{\mathbf{w}} J, \quad (3.3)$$

где α – некоторый постоянный коэффициент.

Методы второго порядка включают в себя известный в математике метод Ньютона и его модификации типа

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \alpha \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^2} \right)^{-1} \nabla_{\mathbf{w}} J, \quad (3.4)$$

где $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^2}$ – вторая производная целевой функции.

Большое влияние на сходимость решения оказывают параметры метода адаптации (здесь необходимо подчеркнуть разницу между параметрами метода адаптации и упоминавшимися ранее параметрами целевой функции). Параметры могут быть постоянными либо меняться от итерации к итерации. Рассмотрим, например, градиентный дискретный метод адаптации

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \alpha(j) \nabla_{\mathbf{w}} (J), \quad (3.5)$$

где параметр $\alpha(j)$ определяет условия и скорость сходимости решения. В зависимости от того, является ли коэффициент $\alpha(j)$ постоянным или переменным в процессе адаптации, данный метод будет называться методом с постоянными или переменными параметрами.

Рассмотрев итерационные методы, обратимся теперь к неитерационным. Неитерационные дискретные методы адаптации основаны на непосредственном расчёте по формулам для оптимальных ВК, например,

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{xd}. \quad (3.6)$$

При этом оптимальный вектор ВК определяется за одну итерацию, т. е. за один шаг процесса адаптации (рис. 3.4).

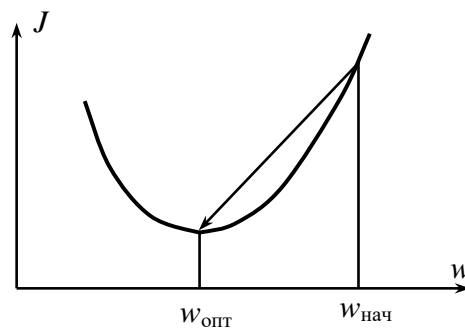


Рис. 3.4

В случае, когда углы прихода помех и сигналов известны, для расчёта ВК ААР этой информации часто оказывается достаточно. Общая формула определения ВК при этом записывается в виде:

$$\mathbf{W} = L_6(\mathbf{Q}_0) \mathbf{b}_0, \quad (3.7)$$

где $L_6(\mathbf{Q}_0)$ — некоторая функция от параметров помех \mathbf{Q}_0 , при этом функция $L_6(\mathbf{Q}_0)$ играет роль некоторого проектора в N -мерном пространстве помех.

Прямые неитерационные методы используются для расчёта ВК путём решения матричных уравнений, например,

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{\text{пш}}^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (3.8)$$

где \mathbf{b}_c — вектор, определяющий направление прихода полезного сигнала.

Выражение (3.8) может решаться и косвенными методами, например, приводиться к системе линейных уравнений

$$\mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{b}_c. \quad (3.9)$$

Для решения системы уравнений, применяются самые разнообразные методы, широко известные в математике. При этом используется информация о матрице $\mathbf{R}_{\text{шш}}$, векторах $\mathbf{W}_{\text{онт}}$, \mathbf{b}_c .

Если в методах адаптации используется информация о всех параметрах целевой функции, то такие методы называются полными, а в противном случае – частными. К частным относятся, например, проекционные методы. В проекционных методах для расчёта ВК используется информация только о направлениях прихода сигналов и помех. При этом не учитывается мощность источников излучения.

Наряду с дискретными в настоящее время широко применяются непрерывные методы адаптации.

Непрерывные методы адаптации основаны на изменении во времени вектора ВК и параметров целевой функции. Непрерывные методы в отличие от дискретных принципиально не могут быть неитерационными. Более того, по существу непрерывные методы представляют собой предельные случаи итерационных дискретных методов при бесконечном уменьшении интервала дискретизации и увеличении количества итераций. В частности, расчётные формулы для непрерывных методов могут быть получены путём предельного перехода из соответствующих соотношений для дискретных методов. По этой причине классификация непрерывных методов совпадает с классификацией дискретных итерационных методов.

Рассмотрим основные математические соотношения, характеризующие непрерывные методы адаптации.

В непрерывном случае прямой метод описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\mathbf{H}\Psi(J). \quad (3.10)$$

При этом функциональная зависимость $\Psi(J)$ от целевой функции J также является непрерывной.

Градиентный непрерывный метод в простейшем случае может быть представлен формулой

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\mathbf{H}\nabla_{\mathbf{w}}(J). \quad (3.11)$$

Аналогичным путём получается выражение для параметрического непрерывного метода:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\mathbf{H}\Psi(\mathbf{Q}_0). \quad (3.12)$$

В непрерывных методах адаптации полнота учёта информации о предшествующих состояниях вектора ВК и динамике его изменения так же важна с точки зрения сходимости решения, как и в дискретных. Полнота учёта предшествующих состояний определяется порядком дифференциального уравнения относительно вектора ВК, решение которого и представляет собой вектор $\mathbf{W}_{\text{опт}}$. В зависимости от порядка дифференциального уравнения различают методы первого, второго и более высоких порядков. Приведём в качестве примера соотношения для непрерывных методов первого и второго порядка соответственно:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\alpha \nabla_{\mathbf{w}} J ; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\alpha \nabla_{\mathbf{w}} J , \quad (3.14)$$

где β – некоторое постоянное число.

Понятие «порядок» относится к степени дифференциального уравнения относительно ВК, т. е. к левой части уравнения (3.14).

3.2. Итерационные прямые методы адаптации

К числу эффективных итерационных методов поиска экстремума целевой функции относятся так называемые прямые методы. В их основе лежит оценка непосредственно целевой функции в определённых точках и использование этой информации для поиска точки экстремума. Прямые методы можно разделить на две группы – одношаговые и многошаговые. В многошаговых методах используется информация о целевой функции в конечном числе точек и по этой информации определяется вектор оптимальных ВК. Примером данного метода является хорошо известный в математике симплекс-метод. Одношаговые прямые методы основаны на использовании информации о целевой функции для оценки её первой и второй производных в процессе адаптации. Полученные оценки используются в итерационных процедурах вычисления вектора ВК. Точность оценки производных целевой функции во многом определяет качество адаптации.

В ААР широко применяются итерационные прямые методы, а из их числа – метод численного дифференцирования. Рассмотрим особенности этого метода.

Пусть имеется целевая функция $J(w_1, \dots, w_N)$, аналитическое выражение, которой может быть и неизвестно. Придадим переменному ВК w_1 приращения $\pm\delta$, где δ – малая величина, позволяющая зарегистрировать соответствующие изменения целевой функции J . Далее измерим значения $J(w_1 + \delta, w_2, \dots, w_N)$ и $J(w_1 - \delta, w_2, \dots, w_N)$. Составляющая градиента целевой функции J по ВК w_1 приближённо определяется как

$$\frac{\partial J}{\partial w_1} = \frac{J(w_1 + \delta, w_2, \dots, w_N) - J(w_1 - \delta, w_2, \dots, w_N)}{2\delta}. \quad (3.15)$$

Затем осуществляются аналогичные изменения и вычисления по переменным w_2, \dots, w_N . Для произвольного n -го ВК w_n имеем

$$\frac{\partial J}{\partial w_n} = \frac{J(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n + \delta, w_{n+1}, \dots, w_N) - J(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n - \delta, w_{n+1}, \dots, w_N)}{2\delta}. \quad (3.16)$$

Процедура вычисления первой производной иллюстрируется рис. 3.5. Среднее значение ПФ, полученное при использовании приращений $\pm\delta$, будет отличаться от истинного значения на некоторую величину γ (см.рис. 3.5). Следовательно, для типичных не линейных ЦФ при использовании данного метода характерно смещение оценки градиента.

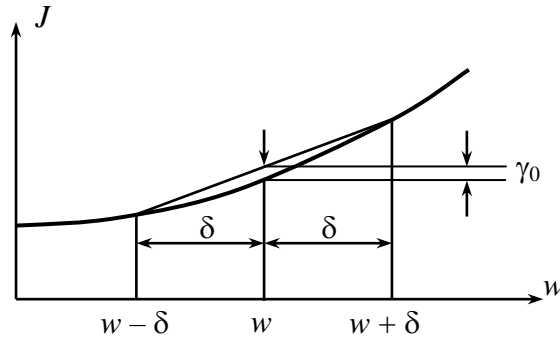


Рис. 3.5

Вторая производная целевой функции содержит N^2 слагаемых вида $\frac{\partial^2 J}{\partial w_n \partial w_k^*}$, оценка каждого из которых может быть рассчитана по следующей приближённой формуле:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial w_n \partial w_k^*} = \frac{\partial J / \partial w_n |_{w_k + \delta} - \partial J / \partial w_n |_{w_k - \delta}}{2\delta}. \quad (3.17)$$

С учётом оценки градиента [см.формулу (3.16)]получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial w_n \partial w_k^*} \approx \frac{1}{4\delta^2} [& J(w_1, \dots, w_n + \delta, \dots, w_k + \delta, \dots, w_N) - \\ & - J(w_1, \dots, w_n - \delta, \dots, w_k + \delta, \dots, w_N) - J(w_1, \dots, w_n + \delta, \dots, w_k - \delta, \dots, w_N) + \\ & + J(w_1, \dots, w_n - \delta, \dots, w_k - \delta, \dots, w_N)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Таким же образом определяются все N^2 -компонент второй производной ЦФ.

Рассмотрим в качестве примера целевые функции среднеквадратичного отклонения $J_1 = d^2 - 2\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{xd} + \mathbf{W}^+ \mathbf{R} \mathbf{W}$ и мощности выходного сигнала $J_6 = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W} + 2\lambda(\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c - a)$ [см.соответственно, формулы (2.4) и (2.58)]. Вычисление вторых производных этих функций даёт результат

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial \mathbf{W}^2} = \mathbf{R}; \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 J_6}{\partial \mathbf{W}^2} = \mathbf{R}_{\text{пш}}. \quad (3.20)$$

Таким образом, вторая производная двух рассмотренных целевых функций представляет собой корреляционную матрицу сигналов на выходах элементов АР. Оценка этой матрицы, выполненная по формуле (3.18), позволяет определить непосредственно оптимальный вектор ВК.

Особую группу среди прямых методов составляют так называемые методы случайного поиска. Эти методы основаны на случайных возмущениях вектора ВК и дальнейшем анализе возмущённой целевой функции. Методы случайного поиска оказываются эффективными в трёх случаях:

- если математические соотношения, связывающие ЦФ с её параметрами, оказываются неизвестными или сложными;
- когда ЦФ является многоэкстремальной;
- если нет конструктивной возможности использовать необходимые для других методов адаптации сигналы ААР, например, сигналы с выходов элементов АР.

При реализации методов случайного поиска информация, получаемая на каждом шаге процесса обучения, может либо использоваться на последующем шаге, либо не использоваться. В зависимости от этого различают направленные и ненаправленные методы.

Рассмотрим в качестве примера так называемый метод линейного случайного поиска. При реализации этого метода в начале каждой итерации к весовому вектору прибавляется некоторое случайное приращение $\Delta \mathbf{W}(j)$ и определяется соответствующее изменение ЦФ $J(\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j))$. Затем изменяется вектор ВК в соответствии с соотношением

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \mu [J(\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j)) - J(\mathbf{W}(j))] \Delta \mathbf{W}(j), \quad (3.21)$$

где μ – постоянный коэффициент. Направление изменения вектора ВК определяется знаком разности значений ЦФ, а шаг – константой μ .

Составляющие случайного вектора $\Delta \mathbf{W}(j)$ характеризуются нормальным законом распределения и дисперсией σ_N^2 . Константы μ и σ_N^2 выбираются так, чтобы обеспечивались устойчивость и сходимость решения.

Значения ЦФ, используемые в (3.21), измеряются за конечное время и поэтому отличаются от истинных. Иначе говоря, данные значения представляют собой оценки. Из-за этого возникает ошибка и в оценке измерения ЦФ, определяемая выражением

$$\gamma(j) = \Delta J(j) - \Delta \tilde{J}(j), \quad (3.22)$$

где $\Delta J(j) = -J(\mathbf{W}(j)) + J(\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j))$ – истинное изменение ЦФ на j -й итерации; $\Delta \tilde{J}(j) = -\tilde{J}(\mathbf{W}(j)) + \tilde{J}(\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j))$ – оценка изменения ЦФ на j -й итерации.

Дисперсия этой ошибки оценивается величиной

$$\text{cov} \gamma(j) = \text{cov}[\Delta \tilde{J}(j)] = \text{cov}[-\tilde{J}(\mathbf{W}(j))] + \text{cov}[\tilde{J}(\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j))]. \quad (3.23)$$

Дисперсия оценки зависит от конкретного вида ЦФ и способа оценки показателя качества. Следовательно, анализ характеристик методов случайного поиска необходимо производить с учётом выбранной целевой функции.

3.3. Градиентные методы адаптации

Градиентные методы адаптации основаны на определении значений градиента целевой функции исходя из представления его в аналитической записи. Отсюда следует, что характеристики градиентного метода определяются видом ЦФ.

Процесс адаптации с использованием градиентных методов осуществляется путём изменения ВК в направлении, определяемом градиентом целевой функции. Градиент ЦФ указывает направление наиболее

крутого возрастания функции. Следовательно, для критериев, максимизирующих ЦФ, изменение ВК происходит в направлении градиента ЦФ в соответствующей точке. Если же критерий минимизирует ЦФ, то вектор ВК изменяется в противоположном направлении, или, как говорят, в направлении антиградиента целевой функции.

Знание корреляционной матрицы сигналов во многих практических случаях является достаточным для определения оптимального вектора ВК (см. главу 2). Что же касается градиента целевой функции, то он необходим при реализации градиентных и, в ряде случаев, прямых методов адаптации. Следует также отметить, что часто в целевую функцию входит мощность сигнала на выходе АА (2.58). В таких случаях градиент целевой функции можно свести к вычислению градиента мощности выходного сигнала.

Рассмотрим некоторые методы оценки перечисленных параметров целевых функций.

В простейшем случае процесс адаптации при использовании градиентного метода описывается выражением

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \alpha(j)\nabla_{\mathbf{w}}J, \quad (3.24)$$

где $\alpha(j)$ – число, определяющее направление и шаг адаптации на j -й итерации.

Процесс адаптации в соответствии с выражением (3.24) иллюстрируется рис. 3.6. Здесь показаны три итерации ВК для случая, когда экстремум ЦФ является минимумом.

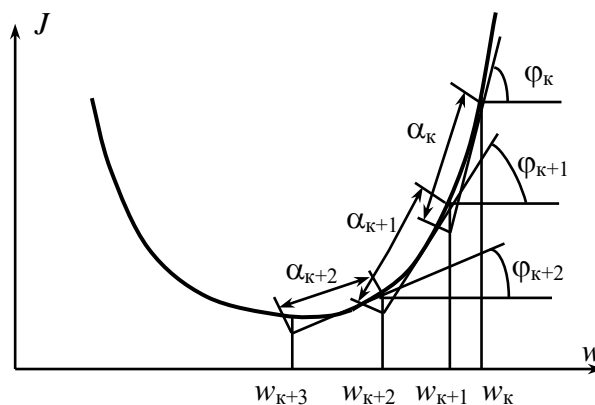


Рис. 3.6

Для приближения к минимуму ЦФ число $\alpha(j)$ должно быть положительным. Модуль этого числа (т. е. шаг адаптации) выбирается из следующих соображений. Прежде всего величина $\alpha(j)$ не должна превышать

некоторого максимального значения $\alpha(j)_{\max}$, при котором процесс адаптации начинает расходиться. Суть расхождения процесса адаптации состоит в том, что при большом шаге адаптации вектор ВК на каждой итерации переходит с одной ветви ЦФ на другую, и при этом новое значение ЦФ превышает предыдущее. С другой стороны, даже если $\alpha(j) < \alpha(j)_{\max}$, сходимость процесса может оказаться плохой по причине перескока текущего состояния вектора ВК с одной ветви ЦФ на другую при медленном уменьшении значения ЦФ. В то же время чрезмерно малый шаг адаптации приведёт к необходимости выполнения очень большого числа итераций из-за медленного приближения к экстремуму ЦФ (хотя и по одной её ветви). На практике для улучшения сходимости процесса адаптации $\alpha(j)$ уменьшается по мере приближения к экстремуму.

Конкретные значения $\alpha(j)$ зависят от вида целевой функции. Для некоторых конкретных ЦФ выбор $\alpha(j)$ будет проанализирован в следующей главе при рассмотрении градиентных алгоритмов адаптации.

Входящий в выражение (3.50) градиент целевой функции $\nabla_w J$ в каждой точке соответствует тангенсу угла наклона φ_j , касательной к ЦФ в этой точке (см. рис. 3.6). Легко видеть, что по мере приближения к экстремуму величина градиента уменьшается. Значения градиента ЦФ могут быть вычислены двумя основными методами – прямым и косвенным. В процессе вычисления градиента ЦФ прямым методом используются непосредственно значения параметров, которые входят в аналитическую форму записи градиента ЦФ. При косвенном методе расчёта эти параметры не используются.

Обобщить и проанализировать прямые методы расчёта градиента сложно по причине многообразия целевых функций. В то же время косвенные методы обладают определённой универсальностью, связанной с наличием некоторых общих параметров градиентов различных целевых функций. Рассмотрим более подробно косвенные методы оценки градиента целевой функции на примере наиболее распространённого метода ортогональных возмущений.

Рассматриваемый метод основан на возмущении вектора ВК некоторой функцией с дальнейшим выделением из целевой функции или её части искомого градиента. В непрерывном случае выделение градиента осуществляется путём синхронного детектирования, а в дискретном – посредством соответствующих дискретных преобразований.

Проанализируем процесс определения градиента методом синхронного детектирования [38]. В соответствии с общим принципом метода ортогональных возмущений формирование градиента начинается с изменения вектора весовых коэффициентов. При этом каждый ВК получает приращение $\gamma\delta_n(t)$, где γ – постоянный коэффициент, n – номер ВК (т. е. канала), $\delta_n(t)$ – некоторая ограниченная случайная или детерминированная функция времени. Такое приращение называется возмущением, возмущающей функцией или возмущающей последовательностью. Последний термин, строго говоря, относится к случаю дискретных возмущений, но на практике он широко применяется и для обозначения непрерывных возмущающих воздействий. Полная совокупность всех N возмущающих функций в литературе называется по-разному – вектор возмущений, векторная возмущающая функция, N -мерная возмущающая последовательность и т. п. В результате воздействия возмущений значение целевой функции изменяется:

$$J[\mathbf{W}, \boldsymbol{\delta}(t)] = J[w_1 + \gamma\delta_1(t), \dots, w_n + \gamma\delta_N(t)], \quad (3.25)$$

где $\boldsymbol{\delta}^T(t) = \|\delta_1(t) \dots \delta_N(t)\|$ – N -мерная векторная функция возмущений.

Разложим функцию (3.25) в ряд Тейлора в окрестности точки, определяемой вектором $\mathbf{W}^T = \|w_1 \dots w_N\|$. Положим приращения $\gamma\delta_n(t)$ малыми, тогда можно ограничиться квадратичными членами разложения. В этом случае

$$J[w, \boldsymbol{\delta}(t)] \approx J(\mathbf{W}) + \gamma \sum_{n=1}^N \delta_n^*(t) \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial w_n} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \delta_k^*(t) \frac{\partial^2 J(\mathbf{W})}{\partial w_n \partial w_k^*} \delta_n(t). \quad (3.26)$$

Умножим правую часть (3.26) на каждую из возмущающих функций. В результате получим N -мерный вектор \mathbf{Z} с компонентами z_n :

$$z_n = \gamma\delta_n(t) \left[J(\mathbf{W}) + \gamma \sum_{n=1}^N \delta_n^*(t) \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial w_n} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \delta_k^*(t) \frac{\partial^2 J(\mathbf{W})}{\partial w_n \partial w_k^*} \delta_n(t) \right]. \quad (3.27)$$

Теперь можно записать вектор \mathbf{Z} через вектор $\boldsymbol{\delta}(t)$ и матрицу $\frac{\partial^2 J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^2}$ в виде

$$\mathbf{Z} = \gamma\delta_n(t) \left[J(\mathbf{W}) + \gamma\boldsymbol{\delta}^+(t) \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} + \frac{1}{2} \gamma^2 \boldsymbol{\delta}^+(t) \frac{\partial^2 J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^2} \boldsymbol{\delta}(t) \right], \quad (3.28)$$

где $\boldsymbol{\delta}^T(t) = \|\delta_1(t) \dots \delta_N(t)\|$.

Вектор \mathbf{Z} является функцией времени, т. е. представляет собой некоторый временной сигнал. Определим среднее по времени значение вектора \mathbf{Z} . С этой целью сигнал $\mathbf{Z}(t)$ подадим на устройство, выполняющее операцию усреднения

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Z}(t) dt, \quad (3.29)$$

где T – время усреднения.

Если $J(\mathbf{W})$ не зависит от времени, то после усреднения получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}} = \frac{1}{T} \left\{ J(\mathbf{W}) \gamma \int_0^T \delta(t) dt + \gamma \int_0^T \delta(t) \delta^+(t) \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma^3 \int_0^T \delta(t) \delta^+(t) \frac{\partial^2 J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^2} \delta(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Возможность использования соотношения (3.30) для определения градиента ЦФ зависит от подбора возмущающих функций. Эти функции могут быть самыми разнообразными, как непрерывными, так и дискретными. Однако для обеспечения вычисления градиента полная совокупность возмущений $\delta(t)$ должна удовлетворять условиям

$$\frac{1}{T} \gamma \int_0^T \delta(t) dt = 0; \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{2} \gamma^3 \int_0^T \delta(t) \delta^+(t) \frac{\partial^2 J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^2} \delta(t) dt = 0; \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^T \delta(t) \delta^+(t) \delta(t) dt = \begin{cases} \gamma^2 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases} \quad (3.33)$$

где n и k – номера возмущающих функций.

В выражениях (3.31), (3.32) нуль в правой части означает, что нулю равны все N компонент вектора, получаемого при вычислении левых частей формул. При вычислении левой части соотношения (3.33) получается квадратная матрица с коэффициентами, определяемыми правой частью той же формулы.

На практике часто применяются возмущающие функции вида:

$$\gamma \delta_n(t) = \gamma (\sin \omega_n t). \quad (3.34)$$

Для N -мерной возмущающей последовательности, составленной из функций вида (3.34), условия (3.31) – (3.33) выполняются при определённом выборе частот ω_n .

При выполнении условий (3.31) – (3.33) (в частности, как в рассмотренном примере) подстановка N -мерных функций возмущений в (3.30) приводит к формуле

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \gamma^2 \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = \gamma^2 \nabla_{\mathbf{W}} J(\mathbf{W}). \quad (3.35)$$

Последнее выражение есть градиент целевой функции. Следовательно, воздействуя на ВК N -мерными возмущающими последовательностями, которые удовлетворяют условиям (3.31) – (3.33), можно точно определить градиент ЦФ. Для этого необходимо лишь, чтобы целевая функция была дважды дифференцируема.

К классу дважды дифференцируемых относятся целевые функции среднеквадратичного отклонения $J_1 = d^2 - 2\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{xd} + \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}$ (2.4),

выходной мощности сигнала $J_6 = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W} + 2\lambda(\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c - a)$ (2.58) и

некоторые другие, первые производные, т. е. градиенты, двух названных ЦФ определяются, соответственно, выражениями

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_1 = 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} - 2\mathbf{R}_{xd}; \quad (3.36)$$

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_6 = 2\mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W} - 2\lambda \mathbf{b}. \quad (3.37)$$

Из последних формул видно, что градиенты рассматриваемых ЦФ являются линейными функциями относительно вектора весовых коэффициентов \mathbf{W} .

В заключение следует отметить, что градиентные методы используются не только для непосредственного поиска экстремума целевой функции. На практике вычисление градиента как вспомогательная операция может находить применение в прямых и параметрических методах адаптации.

3.4. Параметрические методы адаптации

Параметрические методы основаны на изменении значений вектора ВК путём использования информации о различных параметрах целевой функции. Перспективность данных методов связана с тем, что они позволяют одновременно производить поиск оптимальных значений ВК и оценивать различные интересующие параметры сигналов и помех. Например, в

качестве оцениваемых параметров часто выступают мощности и углы прихода сигналов и помех. Эта информация может непосредственно использоваться не только для адаптивного подавления помех, но и для анализа сигнально-помеховой обстановки, в том числе для оценки направления прихода и мощности сигналов и помех.

Анализ применяемых на практике целевых функций показывает, что в да в качестве априори неизвестных параметров наиболее часто используются вектор сигналов на выходах элементов антенной решётки \mathbf{X} и КМ этих сигналов \mathbf{R} . Оценка названных параметров может производиться двумя основными методами – прямым и косвенным. Прямой метод оценки параметров \mathbf{X} и \mathbf{R} состоит в непосредственном измерении значений сигналов на выходах элементов АР с дальнейшим формированием вектора \mathbf{X} и матрицы \mathbf{R} . Однако реализация этого метода на практике приводит к необходимости применения ответвителей в каждом канале АР и высокоточных быстродействующих аналого-цифровых преобразователей. Всё это значительно ухудшает массогабаритные характеристики АУ, а на сверхвысоких частотах может стать препятствием в реализации прямого метода адаптации. Суть косвенного метода состоит в том, что оценка параметров (например, \mathbf{X} и \mathbf{R}) осуществляется путём оценки значений ВК в процессе адаптации по сигналам на выходе адаптивной антенны. Таким образом, оценка производится через более доступные параметры адаптивной антенны (например, выходной сигнал) и метода адаптации (например, градиент ЦФ). В этой связи косвенные методы адаптации получили преимущественное распространение.

Применяемые на практике целевые функции разнообразны. В связи с этим проанализировать характеристики параметрических методов в общем плане достаточно сложно. Некоторые конкретные примеры реализации таких методов рассмотрены в следующей главе при анализе алгоритмов адаптации. Здесь же ограничимся анализом достаточно характерных случаев применения косвенных методов оценки КМ сигналов.

Типичной задачей, решаемой косвенными методами, является оценка мгновенных значений сигналов на выходах элементов АР. Полученная при этом информация используется для определения направления прихода полезного сигнала или для непосредственного вычисления корреляционной матрицы $\mathbf{R} = \overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^+}$.

Вектор сигнала \mathbf{X} может быть оценён, например, посредством выражения через градиент мощности сигналов на выходе антенны. Для пояснения этого метода представим сигнал \mathbf{X} в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}y^* / y^* = \mathbf{X}\mathbf{X}^+\mathbf{W} / y^*, \quad (3.38)$$

где в числителе выполнена подстановка $y = \mathbf{W}^+\mathbf{X}$.

Числитель последнего выражения $\mathbf{X}\mathbf{X}^+\mathbf{W}$ равен половине градиента мощности сигналов на выходе антенны, т. е.

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^+\mathbf{W} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{W}} P. \quad (3.39)$$

С учётом последнего соотношения

$$\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{W}} P / 2y^*. \quad (3.40)$$

Таким образом, мгновенные значения сигналов на выходах элементов АР \mathbf{X} можно оценивать посредством измерения градиента мощности сигналов на выходе АА и выходного сигнала y . При этом градиент определяется одним из способов, описанных в параграфе 3.3.

Наряду с вектором \mathbf{X} важнейшим параметром сигнала является корреляционная матрица \mathbf{R} . Для её определения также может быть использован метод оценки градиента целевой функции с помощью возмущающих последовательностей (см. параграф 3.3). Покажем, как посредством вычисления градиента можно определить корреляционную матрицу сигналов на выходах элементов АР.

Рассмотрим случай дискретных возмущений. Пусть на ВК в j -й интервал времени воздействует некоторая N -мерная возмущающая последовательность $\gamma\delta(j)$, где $j = 1, \dots, N$. Назовём условно эту последовательность «положительной». Мгновенная мощность входного сигнала при воздействии возмущений определяется выражением

$$P_+(j) = (\mathbf{W} + \gamma\delta^+(j))\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^+(j)(\mathbf{W} + \gamma\delta(j)), \quad (3.41)$$

где нижний индекс «+» означает, что результат относится к случаю воздействия «положительной» последовательности.

Определим мгновенную оценку градиента мощности сигнала в каждой возмущающей точке, т. е. при каждом j . Это можно сделать посредством вспомогательной возмущающей последовательности $\gamma\delta(l)_d$, причём полная

длительность вспомогательной последовательности должна соответствовать длительности одного импульса последовательности $\gamma\delta(j)$.

Мгновенная оценка градиента мощности сигнала при этом определяется как

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_+(j) = 2\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^+(j)(\mathbf{W} + \gamma\delta(j)), \quad (3.42)$$

где нижний индекс «+» имеет тот же смысл, что и в формуле (3.41).

Придадим теперь весовым коэффициентам противоположные возмущения посредством возмущающей последовательности, обратной по знаку исходной и называемой условно «отрицательной». Тогда соотношение для мгновенной оценки градиента при каждом j принимает вид

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_-(j) = 2\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^+(j)(\mathbf{W} - \gamma\delta(j)), \quad (3.43)$$

где нижний индекс «-» означает, что градиент определён при воздействии «отрицательной» последовательности.

Вычтем выражение (3.43) из (3.42):

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_+(j) - \tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_-(j) = 4\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^+(j)\gamma\delta(j). \quad (3.44)$$

Если теперь умножить обе части последнего равенства справа на вектор $\gamma\delta^+(j)$, то после усреднения по всем M_B членам возмущающей последовательности получим

$$\frac{1}{4\gamma^2 M_B} \sum_{j=1}^{M_B} \{[\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_+(j) - \tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_-(j)]\gamma\delta^+(j)\} = \frac{\tilde{\mathbf{R}}(j)}{\gamma^2 M_B} \sum_{j=1}^{M_B} \delta(j)\delta^+(j). \quad (3.45)$$

Откуда

$$\frac{1}{4\gamma^2 M_B} \sum_{j=1}^{M_B} \{[\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_+(j) - \tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_-(j)]\gamma\delta^+(j)\} = \tilde{\mathbf{R}}(j). \quad (3.46)$$

Определим математическое ожидание последнего равенства:

$$m \left\{ \frac{1}{4\gamma^2 M_B} \sum_{j=1}^{M_B} \{[\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_+(j) - \tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} P_-(j)]\gamma\delta^+(j)\} \right\} = \mathbf{R}. \quad (3.47)$$

Следовательно, многократное вычисление оценки КМ сигналов по формуле (3.46) с последующим усреднением позволяет получить несмещённую оценку этой корреляционной матрицы, совпадающую в пределе с истинным значением матрицы.

Изложенный метод оценки корреляционной матрицы сигналов не является единственным. Хорошо известен также другой метод, пригодный в случае использования квадратичных целевых функций. Этот подход основан на решении конечной системы уравнений, получаемой из составляющих градиента ЦФ, и может быть реализован следующим образом.

Рассмотрим итерационный градиентный метод поиска экстремума да. Используем при этом общую формулу (3.24) применительно к целевым функциям мощности выходного сигнала и отношению сигнал/(шум + помеха):

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu \tilde{\nabla}_{\mathbf{W}} J = \mathbf{W}(j) - 2\mu(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{W}(j) - \mathbf{b}_c), \quad (3.48)$$

где μ – константа, определяющая шаг адаптации.

Для простоты рассуждений будем анализировать двухэлементную решетку $N=2$, а также полагать, что оценка градиента в формуле (3.48) производится по мгновенным выборкам, т. е.

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{W}} J = 2(\mathbf{X}(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(j) - \mathbf{b}_c), \quad (3.49)$$

где j – номер отсчёта; $\mathbf{X}(j)$ – вектор входного сигнала на j -м отсчёте, т. е. в пределах j -го интервала.

Очевидно, что длительность интервала отсчёта должна быть много меньшей, чем время корреляции сигналов.

Запишем выражение (3.48) для ВК на первой и второй итерациях в скалярном виде при неизменных входных сигналах:

$$\left. \begin{aligned} w_1(1) &= w_1(0) - 2\mu(x_1(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(0) - v_{1c}); \\ w_2(1) &= w_2(0) - 2\mu(x_2(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(0) - v_{2c}); \\ w_1(2) &= w_1(1) - 2\mu(x_1(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(1) - v_{1c}); \\ w_2(2) &= w_2(1) - 2\mu(x_2(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(1) - v_{2c}). \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Перепишем эту систему уравнений в другой форме:

$$\begin{aligned}
\frac{-w_1(1) + w_1(0)}{2\mu} + v_{1c} &= x_1(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(0); \\
\frac{-w_2(1) + w_2(0)}{2\mu} + v_{2c} &= x_2(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(0); \\
\frac{-w_1(2) + w_1(1)}{2\mu} + v_{1c} &= x_1(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(0); \\
\frac{-w_2(2) + w_2(1)}{2\mu} + v_{2c} &= x_2(j)\mathbf{X}^+(j)\mathbf{W}(0).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Левые части последних равенств можно представить как компоненты некоторого вектора \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \| a_1 a_2 a_3 a_4 \|. \tag{3.52}$$

При этом произведения входных сигналов в правых частях тех же равенств есть элементы некоторой корреляционной матрицы $\mathbf{R}(j)$:

$$\mathbf{R}(j) = \begin{Bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{Bmatrix}. \tag{3.53}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
r_1 &= x_1(j)x_1^*(j); \\
r_2 &= x_1(j)x_2^*(j); \\
r_3 &= x_2(j)x_1^*(j); \\
r_4 &= x_2(j)x_2^*(j).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

С учётом введённых обозначений система уравнений (3.51) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned}
r_1 w_1(0) + r_2 w_2(0) &= a_1; \\
r_3 w_1(0) + r_4 w_2(0) &= a_2; \\
r_1 w_1(1) + r_4 w_2(1) &= a_3; \\
r_3 w_1(1) + r_4 w_2(1) &= a_4.
\end{aligned} \right\}. \tag{3.55}$$

В данной системе из четырёх уравнений содержится четыре неизвестных (элементы корреляционной матрицы сигналов r_1, r_2, r_3, r_4). Приведём эту систему к более наглядной и удобной для решения форме.

Составим матрицу \mathbf{B} вида

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} w_1(0) & w_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1(0) & w_2(0) \\ w_1(1) & w_2(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1(1) & w_2(1) \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

и вектор \mathbf{R}_0 вида

$$\mathbf{R}_0^T(j) = \| r_1 r_2 r_3 r_4 \|. \quad (3.57)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что система (3.55) эквивалентна матричному уравнению

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_0(j) = \mathbf{A}. \quad (3.58)$$

Решая обычными методами уравнение (3.58), можно получить оценку \mathbf{R}_0 мгновенных значений элементов корреляционной матрицы \mathbf{R} на j -м интервале. Аналогично выполняется оценка мгновенных значений элементов КМ для ААР произвольной размерности N , необходимо лишь увеличить до N число итераций в формуле (3.48). При этом все N итераций должны быть выполнены за время, много меньшее времени корреляции сигналов.

Вычисление оценок мгновенных значений вектора \mathbf{R}_0 повторяется многократно, т. е. при различных j . Период повторения оценок должен превышать время корреляции сигналов. При выполнении этих условий оценка элементов корреляционной матрицы вычисляется по известной формуле

$$\tilde{\mathbf{R}}_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{R}_0(j), \quad (3.59)$$

где M – число повторений.

Возможен иной подход к решению исходного уравнения (3.48). В этом случае вместо мгновенной оценки градиента ЦФ (3.49) используется усреднённое его значение

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = 2(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{W} - \mathbf{b}_c). \quad (3.60)$$

Как обычно, время оценки градиента в (3.60) намного превышает время корреляции сигналов. Это время должно соответствовать времени одной итерации по j в формуле (3.48). В результате КМ \mathbf{R} растёт неизменной от итерации к итерации и можно воспользоваться приведённой выше методикой составления матричного уравнения. При этом матричное уравнение в отличие от (3.58) запишется в виде:

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{A}. \quad (3.61)$$

Можно выделить два основных метода решения уравнений (3.58) и (3.61). Первый из них заключается в непосредственном решении системы мгновенных уравнений, на которые распадается матричное соотношение (3.48) или (3.61). В рассматриваемом примере их число равно четырём, а в общем случае – N^2 . При этом ввиду попарной комплексной сопряжённости коэффициентов [например, в (3.54) $r_3 = r_2^*$] можно ограничиться вычислением лишь одного коэффициента из каждой пары. Данное свойство позволяет существенно (до двух раз) сократить количество уравнений. Значительное дополнительное упрощение достигается при соответствующем использовании факта разрежённости матрицы \mathbf{B} (то есть наличия большого числа нулевых элементов). Тем не менее при возрастании количества каналов N объём вычислений резко увеличивается. Это является существенным недостатком рассмотренного метода оценки КМ. Кроме того, разреженность матрицы \mathbf{B} препятствует эффективному применению универсальных методов решения систем уравнений.

Второй метод решения уравнений (3.58) и (3.61) заключается в преобразовании их к виду

$$\tilde{\mathbf{R}}_0(j) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}. \quad (3.62)$$

Матричные уравнения (3.61) и (3.62) решаются путём обращения матрицы \mathbf{B} , размерность которой составляет $N^2 \times N^2$. В связи с большой размерностью матрицы \mathbf{B} в данном случае сохраняются все недостатки, связанные с резким ростом объёма вычислений при увеличении N .

3.5. Влияние количества выборок сигнала на качество адаптации

Обработка сигналов в адаптивных антеннах по любому из рассмотренных методов включает в себя операцию усреднения корреляционной матрицы сигналов. Усреднение производится либо за некоторый ограниченный промежуток времени T (при непрерывной обработке), либо за конечное число независимых выборок M (при дискретной обработке). Если бы количество выборок (время усреднения) было бесконечным, то для стационарных сигналов максимальное ОСШП ρ_M в соответствии с выражениями (2.61) и (2.67) составило бы

$$\rho_M = \frac{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+ \mathbf{W}_{\text{опт}}}{\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}} = \mathbf{X}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{X}_c. \quad (3.63)$$

Здесь $\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c$ (β – произвольная константа), а корреляционная матрица $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ вычисляется по точным формулам:

– при дискретной обработке

$$\mathbf{R} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M \mathbf{X}(i) \mathbf{X}^+(i);$$

– при непрерывной обработке

$$\mathbf{R} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^+(t) dt.$$

Однако на практике количество выборок и время усреднения ограничены. При этом вместо точного значения КМР используется её оценка $\tilde{\mathbf{R}}$, которая в дискретном и непрерывном случаях соответственно определяется соотношениями

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M \mathbf{X}(i) \mathbf{X}^+(i); \quad (3.64)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^+(t) dt. \quad (3.65)$$

В результате используемая оценка оптимального вектора ВК $\tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}$ отличается от точного значения, а именно:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}} = \beta \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{b}_c \quad \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}} = \beta \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{V}_c. \quad (3.66)$$

При этом реально достигаемое ОСШП ρ_P

$$\rho_P = \frac{\tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+ \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}}{\tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}} = \frac{|\mathbf{X}_c^+ \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}|^2}{\tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}} \quad (3.67)$$

оказывается меньшим, чем потенциальное значение ρ_M .

Отношение сигнал/(шум + помеха) является важнейшим показателем метода адаптации. Следовательно, весьма большой интерес представляет зависимость данного показателя от количества выборок (времени усреднения). В связи с широким распространением дискретных методов обработки основное внимание уделим представлению сигнала в виде

независимых выборок. Остановимся поэтому более подробно на влиянии количества выборок сигнала на оценку корреляционной матрицы сигналов $\tilde{\mathbf{R}}$ и в этой связи на отклонение реально достижимого ОСШП ρ_p от максимального значения ρ_M .

Следует подчеркнуть, что количество выборок является принципиально ограниченным. Дело здесь не только в том, что с ростом числа выборок до неприемлемых значений может увеличиваться время адаптации. Основное значение имеет тот факт, что с течением времени изменяются местоположения источников сигналов и их энергетические и спектральные характеристики. Отражением существенных изменений сигнально-помеховой обстановки является нестационарность сигналов на выходах ААР. В то же время формулы для расчёта корреляционных матриц справедливы только для стационарных сигналов. Значит, максимальное количество выборок M должно определяться из условия

$$M \leq T_{\max} / T_k, \quad (3.68)$$

где T_{\max} – максимальный интервал времени, в течение которого сигнал может считаться стационарным; T_k – интервал дискретизации, равный времени корреляции сигнала.

Таким образом, число выборок M в общем случае изменяется в зависимости от динамики сигнально-помеховой обстановки и от заданного допустимого времени адаптации. Оценка этого числа является обязательным условием анализа выбранного метода адаптации.

Для анализа отношения сигнал/(шум + помеха) воспользуемся выражением для оценки сигнала на выходе ААР:

$$\tilde{y} = \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \mathbf{X}. \quad (3.69)$$

В приходящем совокупном сигнале присутствуют как полезный сигнал, так и помехи. Полагая помехи шумоподобными, т. е. случайными процессами с нулевым средним значением, получим

$$\tilde{y} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\text{опт}}} = \mathbf{X}_c \mid \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \mathbf{b}_c. \quad (3.70)$$

Последняя формула означает, что математическое ожидание оценки полного принимаемого сигнала представляет собой оценку полезного сигнала. Однако в зависимости от уровня помех мгновенная оценка принимаемого сигнала может существенно отличаться от её математического ожидания. Для количественного определения возможной разницы между мгновенным и

средним значением выходного сигнала найдём средний квадрат отклонения от среднего значения, т. е. дисперсию оценки выходного сигнала решётки:

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\text{опт}}} &= \overline{|\tilde{y}|^2} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\text{опт}}} - |\bar{\tilde{y}}|^2 \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\text{опт}}} = \\ &= \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^+} \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}} - \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \overline{\mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+} \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}} = \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ (\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^+} - \overline{\mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+}) \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}} = \\ &= \beta^2 \mathbf{b}_c^+ \tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}} \tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (3.71)\end{aligned}$$

где под $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ понимается КМ помех и шумов.

Таким образом, дисперсия оценки выходного сигнала АА представляет собой оценку мощности помех и шумов.

Полученное выражение позволяет выразить дисперсию выходного сигнала ААР после завершения процесса адаптации через оценку корреляционной матрицы \mathbf{R} . В конечном счёте это даёт возможность произвести оценку дисперсии выходного сигнала в зависимости от количества выборок или времени усреднения сигналов.

Рассмотрим, как можно учесть влияние оценки корреляционной матрицы \mathbf{R} на подавление помех и на искажение полезного сигнала. Для этого найдём нормированное ОСШП $\rho_H(\tilde{\mathbf{R}})$, т. е. отношение реально достижимого ОСШП ρ_P (3.67) к его максимальной (при истинном значении КМ \mathbf{R}) величине ρ_M (3.63):

$$\rho_H(\tilde{\mathbf{R}}) = \rho_P / \rho_M = \frac{(\mathbf{X}_c^+ \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+)^2}{\tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \tilde{\mathbf{W}}_{\text{опт}}} / (\mathbf{X}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{X}_c). \quad (3.72)$$

С учётом (2.10) и (3.66) последнее соотношение приводится к виду:

$$\rho_H(\tilde{\mathbf{R}}) = \frac{\mathbf{b}_c^+ \tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c}{\mathbf{b}_c^+ \tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}} \tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+ \tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c}. \quad (3.73)$$

Очевидно, что $\rho_H(\tilde{\mathbf{R}})$ является случайной величиной, лежащей в интервале

$$0 \leq \rho_H(\tilde{\mathbf{R}}) \leq 1. \quad (3.74)$$

Для получения оценки влияния количества выборок M на нормированное ОСИП найдём распределение плотности вероятности оценки матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$. С этой целью представим матрицу $\tilde{\mathbf{R}}$ в виде:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{X}(j) \mathbf{X}^+(j) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{R}(j), \quad (3.75)$$

где $\mathbf{R}(j)$ – мгновенная оценка КМ \mathbf{R} по j -й выборке.

Известно [22], что если $\mathbf{X}(j)$ есть N -мерные независимые нормально распределённые векторы с нулевым средним значением и невырожденной корреляционной матрицей \mathbf{R} , то многомерная плотность вероятности $p(\mathbf{Z}) = p(M\tilde{\mathbf{R}})$ случайной матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$ вида (3.75) при $M = \text{const}$ подчиняется распределению Уишарта:

$$p(\mathbf{Z}) = \frac{(\det \mathbf{R}^{-1})^{N/2} (\det \mathbf{Z})^{(N-M-1)/2}}{2^{NM/2} \pi^{N(M-1)/4} \prod_{j=1}^N \Gamma\left(\frac{N+1-j}{2}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})\right], \quad (3.76)$$

где $\mathbf{Z} = M\tilde{\mathbf{R}}$; $\text{tr}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})$ – след матрицы $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}$ (см. прил. 1); $\det(\mathbf{A})$ – определитель матрицы \mathbf{A} ; $\Gamma(l)$ – гамма-функция аргумента l .

В математике принято говорить, что данное распределение имеет M степеней свободы и матрицу точности \mathbf{R}^{-1} . Для справки отметим, что если l – целое положительное число, то

$$\Gamma(l) = (l-1)!; \quad (3.77)$$

$$\Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 3(2l-3)(2l-1)\sqrt{\pi} 2^l. \quad (3.78)$$

Распределение Уишарта является многомерным аналогом χ^2 -распределения [18]. Примерный вид плотности χ^2 -распределения для одномерного случая представлен на рис. 3.7. Для наглядности в качестве аргумента выбрана матрица $\tilde{\mathbf{R}}$, а не произведение $M\tilde{\mathbf{R}}$. При малом числе выборок (кривая, обозначенная M_1) распределение имеет нечётко выраженный максимум и пологие склоны. Это означает большой разброс возможных значений оценки $\tilde{\mathbf{R}}$ относительно истинного значения матрицы \mathbf{R} . Если число выборок M велико (кривая M_2), то распределение имеет чётко выраженный максимум и крутые склоны. Соответственно, достоверность оценки матрицы \mathbf{R} резко повышается. Если бы в качестве аргумента использовалось произведение $M\tilde{\mathbf{R}}$, то кривая распределения одновременно с обострением смещалась бы вправо.

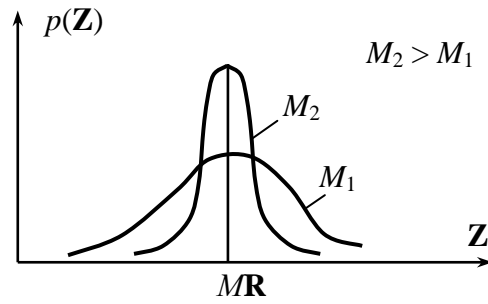


Рис. 3.7.

От распределения $p(\mathbf{Z})$ можно перейти к распределению плотности вероятности нормированного ОСШП $p(\rho_n)$. Аргументом функции $p(\rho_n)$ является нормированное ОСШП ρ_n . Значит, область определения аргумента плотности вероятности $p(\rho_n)$ определяется соотношением (3.74). Показано [22], что рассматриваемая плотность вероятности нормированного ОСШП $p(\rho_n)$ подчиняется закону так называемого бета-распределения. Примерный вид графика такого распределения показан на рис. 3.8. Математическое выражение бета-распределения нормированного ОСШП может быть получено из формулы (3.76). После соответствующих преобразований из (3.76) вытекает соотношение

$$p(\rho_n) = M![(N-2)!(M+1-N)!](1-\rho_n)^{N-2}\rho_n^{M-1-N}, \quad (3.79)$$

где $0 \leq \rho_n \leq 1$ и $M \geq N$.

С практической точки зрения наиболее важными параметрами распределения (3.79) являются математическое ожидание нормированного ОСШП ρ_n и его дисперсия, для функции (3.79) математическое ожидание и дисперсия определяются, соответственно, формулами [22]:

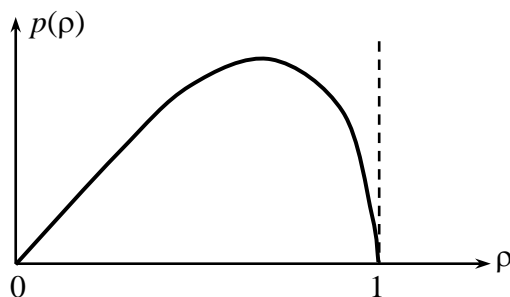


Рис. 3.8

$$\bar{\rho}_n = (M+2-N)/(M+1); \quad (3.80)$$

$$\sigma_{\rho_n}^2 = (M+2-N)(N-1)/[(M+2)(M+1)^2]. \quad (3.81)$$

Выражение (3.80) показывает, каково же наиболее вероятное значение нормированного ОСШП при заданном числе независимых выборок M . Тем самым отражаются потери в ОСШП относительно предельного случая, когда $\rho_n \rightarrow 1$ при $M \rightarrow \infty$. Определим потери ОСШП $\Delta\rho_n$ как

$$\Delta\rho_n = -10 \lg \bar{\rho}_n = -10 \lg(M + 2 - N)/(M + 1). \quad (3.82)$$

Легко видеть, что $\Delta\rho_n \leq 3$ дБ (т. е. ОСШП уменьшается не более, чем в два раза), если выполняется неравенство

$$(M + 2 - N)/(M + 1) \geq 1/2. \quad (3.83)$$

Отсюда следует, что

$$M \geq 2N - 3. \quad (3.84)$$

При достаточно больших N можно полагать, что

$$M \geq 2N. \quad (3.85)$$

Таким образом, для того, чтобы в процессе адаптации ОСШП составляло не менее половины от максимально возможного, следует количество независимых выборок при оценке КМ выбирать в соответствии с условием (3.85).

Из соотношения (3.80) можно получить ещё одну полезную формулу. В соответствии с правилами действий над равенствами приведём (3.80) к виду

$$1 - \bar{\rho}_n = 1 - \frac{M + 2 - N}{M + 1}. \quad (3.86)$$

Из последнего выражения следует приближённая формула для точности оценки математического ожидания нормированного ОСШП:

$$1 - \bar{\rho}_n \approx \frac{N}{M}. \quad (3.87)$$

Данная формула позволяет определить точность оценки математического ожидания нормированного ОСШП в зависимости от числа независимых выборок входного сигнала M . При её выводе, как и ранее, предполагается, что число выборок M больше числа каналов адаптации N .

3.6. Неитерационные методы адаптации

Неитерационные методы адаптации используются в тех случаях, когда иные методы оказываются либо принципиально неприемлемыми, либо приводят к существенному ухудшению параметров радиолиний.

Неитерационные методы, в частности, используются для расчёта оптимальных ВК, например, по формуле (2.69):

$$\mathbf{R}\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{b}_c. \quad (3.88)$$

К настоящему времени разработано большое число методов решения этой системы уравнений [14,20]. Все эти методы сводятся к двум основным типам – нерекуррентным и рекуррентным. Нерекуррентные методы основаны на преобразованиях элементов, строк или столбцов матрицы \mathbf{R} с целью решения системы, т. е. определения вектора $\mathbf{W}_{\text{опт}}$. При этом вектор ВК $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ рассчитывается за конечное число элементарных арифметических операций. Быстродействие нерекуррентных методов определяется числом последовательно выполняемых операций, а также характеристиками применяемых ЭВМ – их быстродействием и возможностью размещения данных в запоминающем устройстве в процессе решения.

К нерекуррентным методам решения систем линейных уравнений относятся широко известные методы Гаусса, Гаусса – Жордана, разложения Холецкого и их модификации [40]. Сущность метода Гаусса состоит в поочередном исключении неизвестных, т. е. в приведении матрицы \mathbf{R} к треугольному виду. Метод Гаусса – Жордана является модификацией метода Гаусса. В процессе преобразований по данному методу матрица \mathbf{R} диагонализируется и расчёт вектора $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ существенно упрощается. Тем не менее число арифметических операций в соответствии с методом Гаусса – Жордана оказывается большим, чем в простом методе Гаусса. Метод Холецкого (называемый также методом квадратного корня) основан на преобразовании матрицы \mathbf{R} и представлении её в виде произведения двух треугольных матриц

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}^- \mathbf{L}^+, \quad (3.89)$$

где \mathbf{L}^- и \mathbf{L}^+ – нижняя и верхняя треугольные матрицы.

При таком представлении матрицы \mathbf{R} система уравнений (3.88) заменяется двумя системами уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}^- \mathbf{Y} &= \beta \mathbf{b}_c; \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{L}^+ \mathbf{W}_{\text{опт}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

Так как матрицы \mathbf{L}^- и \mathbf{L}^+ треугольные и к тому же представляются в мультипликативной форме и явно не вычисляются, то решение значительно упрощается.

Общее число вычислительных операций методов Гаусса и Холецкого примерно одинаково, но численная устойчивость разложения Холецкого выше.

Представляют практический интерес методы сопряженных градиентов, ортогонализации, вращений и другие [40].

Большинство современных методов решения систем линейных уравнений основано на использовании так называемого **QR**-разложения [23,40,46]. Чтобы не путать буквы **Q** и **R** в **QR**-разложении с матрицами **Q** и **R**, которые ранее использовались, обозначим матрицы в **QR**-разложении штрихами. В соответствии с методом разложения представим корреляционную матрицу сигналов **R** в виде:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}', \quad (3.91)$$

где **Q'** – некоторая ортогональная матрица; **R'** – верхняя треугольная матрица.

Заметим, что матрица **Q'** обладает свойствами

$$\mathbf{Q}'(\mathbf{Q}')^{-1} = \mathbf{I}_N; \quad (3.92)$$

$$(\mathbf{Q}')_-(\mathbf{Q}')^+ = \mathbf{I}_N. \quad (3.93)$$

Для решения системы уравнений (3.88) с помощью **QR**-разложения подставим выражение (3.91) в (3.88). Получим

$$\mathbf{Q}'\mathbf{R}'\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta\mathbf{b}_c \quad (3.94)$$

или, с учётом свойств матрицы **Q'** (3.92) и (3.93):

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = (\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{Q}')^+\beta\mathbf{b}_c. \quad (3.95)$$

Особенность формулы (3.95) состоит в том, что матрица (**R'**) вычисляется в процессе **QR**-разложения и операция обращения в явном виде здесь не выполняется. Это упрощает расчёт вектора **W**.

Существует большое число конкретных методов получения ортогональной матрицы **Q'** или верхней треугольной матрицы **R'**. Для произвольной матрицы **A** всегда существует представление ее в виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}'. \quad (3.96)$$

Остановимся на методах получения матрицы **Q'**. К основным из них относятся методы вращений, отражений, ортогонализации Грамма – Шмидта.

Суть метода вращений состоит в последовательном использовании ортогональных матриц \mathbf{T}_{ij} вида

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & c_{ij} & 0 & \dots & s_{ij}^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & -s_{ij} & & & c_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & & & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & & & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

где числа c_{ij} и s_{ij} обладают свойствами

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = 1; \quad (3.98)$$

$$-s_{ij}a_{ii} + c_{ij}a_{ji} = 0. \quad (3.99)$$

Здесь a_{ij} – (i, j) -й элемент матрицы \mathbf{A} .

В окончательной форме матрица \mathbf{Q}' представляется как

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{13}\dots\mathbf{T}_{1n}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{2n}\dots\mathbf{T}_{n-1,n}. \quad (3.100)$$

Матрица \mathbf{R}' определяется по формуле

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\mathbf{A}. \quad (3.101)$$

Применение выражения (3.101) к уравнению (3.88) позволяет записать последнее в форме

$$\mathbf{R}'\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{Q}'\beta\mathbf{b}_c. \quad (3.102)$$

Решение последнего уравнения, где \mathbf{R}' – верхняя треугольная матрица, затруднений не вызывает. Этот метод называют методом плоских вращений или преобразованием Гивенса. Данный метод обладает хорошей численной устойчивостью.

В методе Гивенса на каждом шаге обнуляется только один поддиагональный элемент. Существует другой метод – метод Хаусхолдера, на каждом шаге которого происходит обнуление сразу всех поддиагональных

элементов в одном столбце. Такая операция выполняется с помощью матрицы преобразований вида

$$\mathbf{Q}'_m = \mathbf{I}_m - \frac{2\mathbf{U}_m \mathbf{U}_m^+}{|\mathbf{U}_m|^2}, \quad (3.103)$$

Здесь m – номер шага; \mathbf{U}_m – некоторый вектор на m -м шаге. Элементы вектора \mathbf{U}_m определяются соотношениями

$$u_{mi} = \begin{cases} 0 & \text{при } i < m; \\ \text{sig}(a_{mm}^m) \left[\sum_{i=m}^N |a_{im}^m|^2 \right]^{1/2} + a_{mm}^m & \text{при } i = m; \\ a_{im}^m & \text{при } i > m, \end{cases} \quad (3.104)$$

где a_{im}^m – (i, m) -я компонента матрицы $\mathbf{Q}'_m \mathbf{A}_m = \mathbf{A}_{m+1}$ на m -м шаге, а символ sig означает, что знак выбирается из условия получения наибольшей нормы

$$|\rho_m|^2 = 2 \left\{ \sum_{i=m}^N |a_{im}^m|^2 + \text{sig}(a_{mm}^m) |a_{mm}^m| \left[\sum_{i=m}^N |a_{im}^m|^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.105)$$

Матрица \mathbf{Q}' есть произведение преобразований Хаусхолдера

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}'_{N-1} \dots \mathbf{Q}'_1. \quad (3.106)$$

Метод преобразований Хаусхолдера позволяет почти в полтора раза сократить объём вычислений ортогональной матрицы \mathbf{Q}' по сравнению с методом Гивенса.

Получение ортогональной матрицы \mathbf{Q}' возможно также методом Грама – Шмидта. Для этого представим произвольную квадратную матрицу \mathbf{A} как совокупность вектор-столбцов:

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_N\|. \quad (3.107)$$

Классический метод ортогонализации состоит в нахождении ортогональной системы векторов $\mathbf{q}'_1 \dots \mathbf{q}'_N$ по формулам

$$\mathbf{q}'_1 = \mathbf{a}_1; \quad (3.108)$$

$$\mathbf{q}'_j = \mathbf{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} \mathbf{q}'_i, \quad j = 2, \dots, N, \quad (3.109)$$

$$\text{где } b_{ij} = \frac{\mathbf{q}_i^+ \mathbf{a}_j}{\mathbf{q}_i^+ \mathbf{q}_i}.$$

Однако данный вариант метода не всегда обладает высокой численной устойчивостью. Часто на практике используют модификацию метода Грама – Шмидта. Суть модификации состоит в том, что значение скалярного произведения $\mathbf{q}_i^+ \mathbf{a}_j$ не изменится, если \mathbf{a}_j заменить вектором вида

$$\mathbf{a}_j - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{a}_k \mathbf{q}_k. \quad (3.110)$$

Это связано с тем, что векторы \mathbf{q}_k и \mathbf{q}_i ортогональны, т. е.

$$\mathbf{q}_i^+ \mathbf{q}_k = 0 \text{ для } k \neq i. \quad (3.111)$$

Исходя из этого элементы b_{ij} определяются по формуле

$$b_{ij} = \frac{\mathbf{q}_i^+ \mathbf{a}_j^{(i)}}{\mathbf{q}_i^+ \mathbf{q}_i}, \quad (3.112)$$

где

$$\mathbf{a}_j^{(i)} = \mathbf{a}_j - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} \mathbf{q}_k. \quad (3.113)$$

Большая численная устойчивость модифицированного метода Грама – Шмидта обусловлена тем фактом, что векторы $\mathbf{a}_j^{(i)}$ связаны неравенством

$$|\mathbf{a}_j^{(i)}| \leq |\mathbf{a}_j|. \quad (3.114)$$

Количество вычислений и необходимая память не увеличиваются модификацией, так как вместо непосредственного использования формулы (3.103) векторы $\mathbf{a}_j^{(i)}$ можно вычислять рекурсивно. Кроме того, вектора $\mathbf{a}_j^{(i+1)}$ можно записывать на место, которое занимает вектора $\mathbf{a}_j^{(i)}$. Модифицированный метод Грама – Шмидта значительно лучше сходится, чем классический метод, когда матрица \mathbf{A} плохо обусловлена, т. е. близка к вырождению.

Рассмотренные методы Грама – Шмидта можно в окончательной форме записать как

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{A} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \dots \mathbf{U}_N = \mathbf{A} \mathbf{U}, \quad (3.115)$$

где \mathbf{U}_n и \mathbf{U} – верхние треугольные матрицы.

Например, для модифицированного метода из (3.108), (3.110), (3.112) и (3.113) следует что

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & u_{nn} & \cdots & u_{nN} \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.116)$$

где $u_{nn} = 1/\sqrt{\mathbf{a}_n^{+(n)}\mathbf{a}_n^{(n)}}$; $u_{nj} = 0$ при $j < n$; $u_{nj} = -\mathbf{a}_n^{+(n)}\mathbf{a}_n^{(n)} / |\mathbf{a}_n^{(n)}|^2$ при $j > n$;

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n \mathbf{U}_n; \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{a}_j^{(n+1)} = \begin{cases} \mathbf{a}_j^{(n)} & \text{при } j < n; \\ \mathbf{a}_n^{(n)} / |\mathbf{a}_n^{(n)}| & \text{при } j = n; \\ \mathbf{a}_j^{(n)} - [\mathbf{a}_n^{(n)}(\mathbf{a}_n^{+(n)}\mathbf{a}_n^{(n)})^{-1}\mathbf{a}_n^{\tau(n)}]\mathbf{a}_j^{(n)} & \text{при } j > n. \end{cases}$$

Метод Грама – Шмидта так же, как и другие методы **QR**-разложения, может использоваться и для выполнения операции обращения матриц. Для этого уравнение (3.115) переписывается в виде

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \dots \mathbf{U}_N \mathbf{Q}'^T, \quad (3.117)$$

где столбцами матрицы \mathbf{Q}' являются векторы \mathbf{q}_j .

На практике корреляционная матрица сигналов антенной решётки \mathbf{R} так же, как и обратная матрица \mathbf{R}^{-1} , обладает часто рядом специфических особенностей. Так ранг матрицы \mathbf{R} обычно равен числу воздействующих помех $M_{\text{п}}$, которое может быть значительно меньше размерности N антенной решётки. В этом случае целесообразно обратную матрицу представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}^+ + \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}^+, \quad (3.118)$$

где матрица \mathbf{A} диагональная и принадлежит $M_{\text{п}}$ -мерному подпространству с соответствующими собственными векторами, образующими матрицу \mathbf{C} размерностью $N \times N$. Диагональные элементы матрицы \mathbf{A} – $M_{\text{п}}$ наибольших собственных значений КМ \mathbf{R} , которые примерно равны мощности

приходящих помех. Матрица \mathbf{B} соответствует шумовым составляющим $\sigma_{\text{ш}}^2$. Для улучшения сходимости компоненты собственных векторов матрицы \mathbf{D} выбирают ортогональными векторам матрицы \mathbf{C} при помощи матрицы проецирования \mathbf{P}_k

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{D}\mathbf{D}^+ = \mathbf{I}_N - \mathbf{C}\mathbf{C}^+. \quad (3.119)$$

Такое представление матрицы \mathbf{R}^{-1} удобно при мерцающем действии помех. С приходом новой помехи размерность подпространства M_n изменяется на единицу. Это позволяет легко формировать матрицу \mathbf{A} и векторы матрицы \mathbf{C} .

Рассмотрим ряд важных частных случаев матрицы \mathbf{R} .

При воздействии на АР M_n узкополосных помех КМ сигналов представляется в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{ш}} + \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{R}_{\text{пш}m}. \quad (3.120)$$

Если шумы в каналах некоррелированы, то

$$\mathbf{R} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{X}_{\text{пш}m} \mathbf{X}_{\text{пш}m}^+. \quad (3.121)$$

Последовательное применение операции обращения матриц ранга единицы вида (1.100) к матрице (3.121) позволяет записать обратную матрицу

\mathbf{R}^{-1} как

$$\mathbf{R}_{M_n}^{-1} = \mathbf{R}_{M_n-1}^{-1} - \mathbf{R}_{M_n-1}^{-1} \mathbf{X}_{\text{пш}M_n-1} \mathbf{X}_{\text{пш}M_n-1}^+ \mathbf{R}_{M_n}^{-1} / (1 + \mathbf{X}_{\text{пш}M_n-1}^+ \mathbf{R}_{M_n}^{-1} \mathbf{X}_{\text{пш}M_n-1}), \quad (3.122)$$

где $\mathbf{R}_{M_n}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}$; $\mathbf{R}_{M_n-1}^{-1} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I} + \sum_{m=1}^{M_n-1} \mathbf{X}_{\text{пш}m} \mathbf{X}_{\text{пш}m}^+$.

Следовательно, для узкополосных помех выражение (3.122) позволяет легко рассчитывать элементы обратной матрицы \mathbf{R}^{-1} в случае прихода новой узкополосной помехи. При этом используются значения КМ до воздействия очередной M_n -й помехи.

Приведённые в данном параграфе примеры неитерационных методов не охватывают всё их многообразие. Возможны и другие варианты, но суть их всех состоит в прямом вычислении оптимальных ВК без использования каких-либо корректирующих обратных связей в схеме антенны. Это предъявляет высокие требования к точности априорной информации, а также

к точности используемой математической модели антенны. В частности, если вектор сигнала \mathbf{X} вычисляется по заданным направлениям прихода сигналов и помех, то практически обязательным является учёт взаимной связи между элементами АР. Кроме того, даже при точных расчётах глубина формируемых провалов в ХН очень сильно зависит от точности выставления вычисленных весовых коэффициентов.

ГЛАВА 4. АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ

4.1. Общая характеристика алгоритмов адаптации

Количество способов реализации избранного метода адаптации для определённого критерия оптимальности, т. е. алгоритмов адаптации огромно.

Вид алгоритма в большой степени влияет на скорость подстройки ВК и на сложность технической реализации ААР в целом. Конкретный алгоритм реализуется в адаптивном процессоре, в связи с чем адаптивный процессор является основой любой ААР. Именно процессор автоматически подстраивает ВК для обеспечения требуемой характеристики направленности АР. От характеристик процессора и, в частности, от алгоритма адаптации, зависят характеристики и возможности ААР.

Название адаптивного алгоритма определяется используемым критерием и методом адаптации. Например, один из алгоритмов называется так: двухшаговый градиентный алгоритм первого порядка, максимизирующий отношение сигнал/(шум + помеха). Когда говорят о целом классе алгоритмов, то для упрощения в их названиях оставляют ссылку только либо на метод адаптации, либо на критерий оптимальности.

Наиболее универсальными при решении задач в условиях априорной неопределённости сигнально-помеховой обстановки являются итерационные алгоритмы. Именно постепенное уточнение ВК позволяет эффективно преодолевать неопределённость ряда параметров для синтеза оптимальной ХН. Наиболее простыми и широко используемыми из всех видов итерационных алгоритмов являются градиентные алгоритмы. В том случае, когда целевая функция критерия оптимальности одноэкстремальная, с помощью градиентных методов можно определить оптимальные ВК. Сущность градиентных алгоритмов состоит в том, чтобы изменять текущее значение ВК в направлении, определяемом градиентом целевой функции.

Наряду с градиентными на практике достаточно широко используются алгоритмы случайного поиска. Такие алгоритмы реализуют метод случайного поиска и обеспечивают нахождение глобального экстремума как для одноэкстремальных, так и для многоэкстремальных целевых функций. Алгоритмы случайного поиска просты в реализации, требуют малого объёма вычислений и нечувствительны к разрывам целевых функций, а также к нелинейностям и нестабильностям фидерного тракта.

Заслуживают внимания также рекуррентные алгоритмы адаптации, в основу которых положена рекуррентная оценка ВК. Для получения оценки

вектора ВК используется, например, рекуррентная оценка обратной корреляционной матрицы. Алгоритмы случайного поиска и рекуррентные алгоритмы также рассматриваются в настоящей главе.

Алгоритмы адаптации обладают целым рядом специфических особенностей, которые вытекают из совместного применения критериев оптимальности и методов адаптации, а также решаемых в процессе адаптации задач. Поэтому адаптивные алгоритмы подразделяются как по признакам классификации критериев и методов адаптации, так и по своим, только им присущим, признакам. На рис. 4.1 представлена обобщённая классификация алгоритмов адаптации.

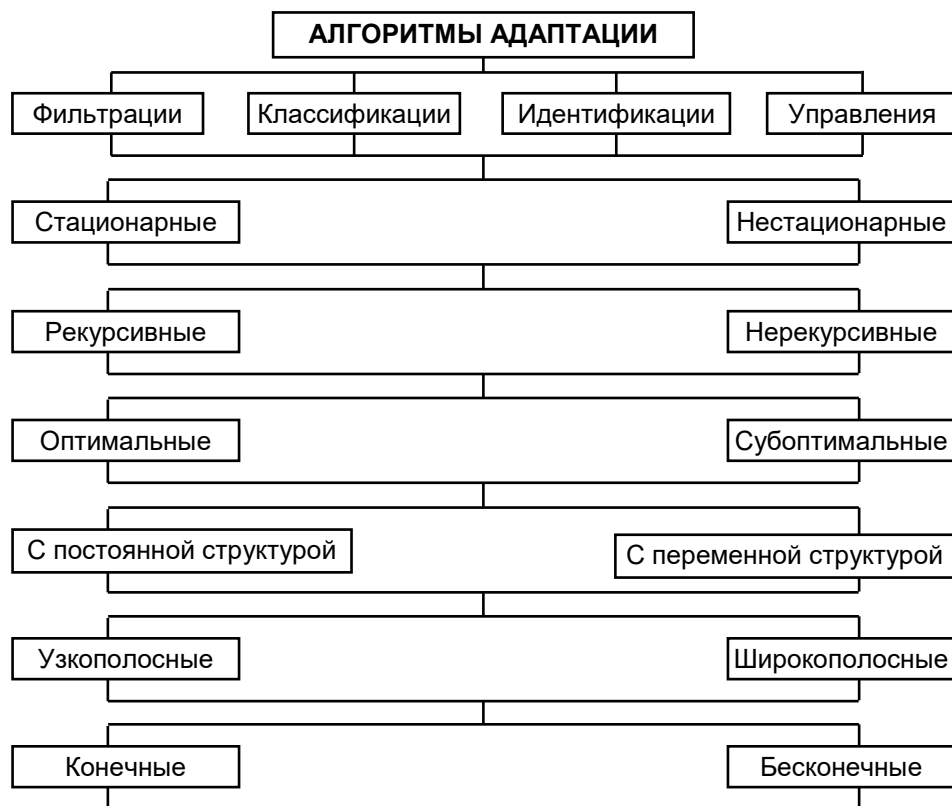


Рис. 4.1

В зависимости от типа решаемых задач алгоритмы адаптации делятся на алгоритмы фильтрации, идентификации, классификации и управления.

Алгоритмы фильтрации позволяют выделять полезные сигналы на фоне шумов и помех. При этом основным показателем качества таких алгоритмов является ОСШП и коэффициент подавления помех. Обобщённая и эквивалентная схемы фильтрации сигналов и помех в ААР показаны на рис. 4.2. Передаточная пространственная характеристика такой ААР имеет минимум в направлении помехи (см. рис. 4.3). Суть фильтрации состоит в выборе ВК w_1, \dots, w_N .

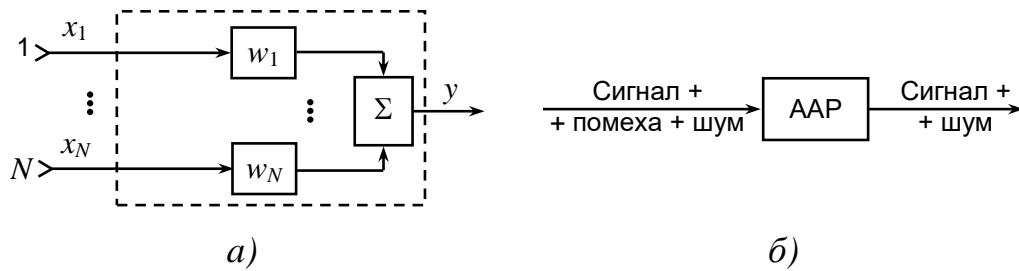


Рис. 4.2

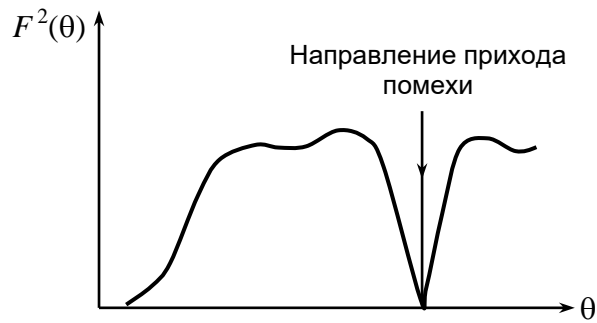


Рис. 4.3

Алгоритмы фильтрации включают несколько разновидностей: алгоритмы предсказания, оценивания и собственно фильтрации. Вид и название алгоритма определяется тем, информация с каких итераций используется для формирования вектора ВК. Если для оценки вектора ВК используется информация на текущих итерациях, т. е. в текущие моменты времени, то при этом происходит оценка ВК на будущую итерацию. Это алгоритмы предсказания. В случае, когда оценка ВК происходит на текущий момент времени с учётом информации на предыдущих итерациях, то это алгоритмы фильтрации.

Алгоритмы оценивания являются более сложными. Это алгоритмы, которые оценивают элементы состояния ААР. К таким элементам относятся вектор ВК и вектор входных сигналов \mathbf{X} . Если алгоритм предназначен для оценки сигналов \mathbf{X} , то говорят об алгоритмах наблюдения. Часто эти алгоритмы называют алгоритмами оценки состояния. Основная задача наблюдения в ААР состоит в оценке вектора сигналов \mathbf{X} на выходах элементов АР. В дальнейшем значения вектора \mathbf{X} используют для решения других задач. Эквивалентная схема наблюдения в ААР показана на рис. 4.4.



Рис. 4.4

Понятия фильтрации, оценивания, наблюдения тесно связаны с идентификацией. Алгоритмы идентификации в ААР предназначены для оценки параметров воздействующих на АР сигналов и помех. К таким параметрам относятся направления на источники сигналов и помех θ_c и θ_n , мощности этих источников P_c и P_n , а также временные и частотные характеристики сигналов и помех. В частности, идентификация подразумевает оценку переходных матриц динамики изменения ВК $\Phi(j, j-1)$, а также переходных матриц управления $\mathbf{B}(j, j-1)$.

Эквивалентная схема функционирования ААР в режиме идентификации показана на рис. 4.5.

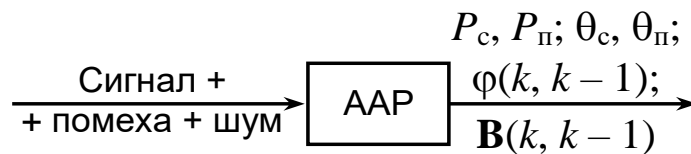


Рис. 4.5

В качестве одной из характеристик процесса идентификации в адаптивной антенной технике широко используется понятие обобщённой диаграммы пространственного спектра

$$G(\theta) = 1 / \mathbf{W}^+(\theta) \mathbf{W}(\theta), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{W}(\theta)$ – произвольный вектор ВК в виде функции от пространственного угла θ .

Например, для стационарной сигнально-помеховой обстановки вектор $\mathbf{W}(\theta)$ определяется по формуле [см. формулу (2.37)]

$$\mathbf{W}_{\text{опт}}(\theta) = \beta \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}_0(\theta), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{W}_0(\theta)$ – вектор начальных ВК в виде функции от θ .

Обобщённый пространственный спектр $G(\theta)$ характеризует распределение источников в пространстве. На рис. 4.6 представлена типичная обобщённая диаграмма $G(\theta)$ при воздействии двух источников излучения под углами θ_{n1} и θ_{n2} . Алгоритмы классификации в ААР используются для оценки количества воздействующих на АР сигналов и помех, и определения вида сигнально-помеховой обстановки (её классификации). При этом происходит разделение сигналов и помех. Эквивалентная схема функционирования ААР в режиме классификации показана на рис. 4.7.

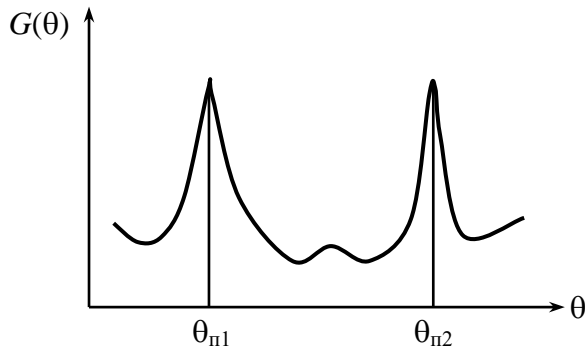


Рис. 4.6

Задача адаптивного управления может быть поставлена самостоятельно или представлять собой комбинацию из вышеперечисленных задач. Здесь возможны различные варианты. Наиболее простой является задача управления вектором $\mathbf{u}_y(t)$, воздействующим на коэффициент передачи в каждом из

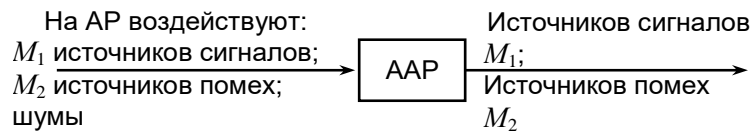


Рис. 4.7

каналов АР с целью подавления помех. При этом обобщённую схему управления в ААР можно представить в виде, изображённом на рис. 4.8.



Рис. 4.8

Следующим признаком классификации алгоритмов адаптации является их способность отслеживать динамические изменения параметров сигналов и помех. По этому признаку алгоритмы подразделяются на стационарные и нестационарные. Здесь деление такое же, как и в целевых функциях. К изменяемым во времени параметрам относятся мощность источников $P(t)$, направления прихода сигналов $\theta(t)$ и другие параметры, например, несущая частота $f_0(t)$.

Работа адаптивной антенны как устройства обработки сигналов основана на взвешивании входящих на АР сигналов. В простейшем случае в ААР реализуется взвешивание только входных сигналов (см.рис. 4.2, а). При этом адаптивная антенна представляет собой, как показано в главе 1, трансверсальный фильтр, работающий в пространственной области. Такая

структура фильтра называется нерекурсивной. Аналогичное название имеют и алгоритмы. В этом случае выходной сигнал ААР определяется только входными сигналами

$$y = \mathbf{W}^+ \mathbf{X}.$$

Однако возможен более общий вид обработки в адаптивной антенне, показанный на рис. 4.9. Выходной сигнал такой ААР представляется как функция от входных и выходных сигналов:

$$y = \sum_{i=1}^N w_i^* x_i + \sum_{k=1}^M b_k^* y_k, \quad (4.3)$$

где b_k – весовой коэффициент в цепи обратной связи выходного сигнала; M – число отводов линии задержки.

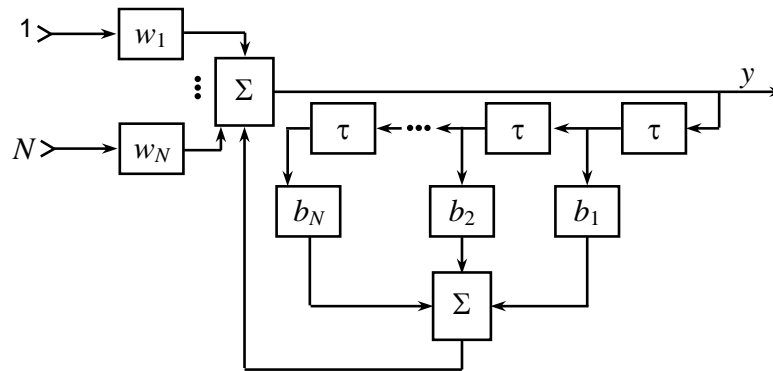


Рис. 4.9

На рис. 4.9 время элементарной задержки обозначено τ . В данном случае ААР может рассматриваться как рекурсивный фильтр, а алгоритмы, определяющие коэффициенты w_i и b_k , называются рекурсивными. Если положить $b_k = 0$, то рекурсивный алгоритм переходит в нерекурсивный. Принципиальное отличие рекурсивных и нерекурсивных алгоритмов состоит в том, что нерекурсивные алгоритмы позволяют реализовать конечную пространственную импульсную характеристику антенны, а рекурсивные – бесконечную. Следовательно, рекурсивные алгоритмы более перспективны и обладают более широкими возможностями по качеству обработки сигналов.

Одной из наиболее важных характеристик алгоритма является его точность. Для того, чтобы сравнивать алгоритмы с разной скоростью сходимости, точность алгоритмов адаптации определяют для установившегося состояния ВК, т. е. когда время адаптации стремится к

бесконечности. Даже если время адаптации бесконечно, точность оценки ВК для различных алгоритмов неодинакова.

Большинство алгоритмов позволяют получить в установившемся режиме в пределе оптимальные ВК. Однако есть алгоритмы, которые даже в предельном случае дают смещённое значение оптимальных ВК. В связи с этим алгоритмы адаптации подразделяются на оптимальные и неоптимальные (субоптимальные). Субоптимальные алгоритмы получают, например, из оптимальных при использовании различного рода пилот-сигналов, регуляризационных и робастных методов адаптации. Эти методы предназначены для улучшения сходимости методов оптимизации в различных помеховых ситуациях и они, как говорят, инвариантны к параметрам воздействующих на АР сигналов и помех.

Алгоритмы адаптации работают в условиях неопределённости. При этом в процессе адаптации происходит накопление и оценка неизвестных параметров. Структура алгоритма может быть как детерминирована, так и переменна. Переменная структура позволяет оптимизировать в процессе адаптации ряд характеристик алгоритма, например, время адаптации. Детерминированные алгоритмы имеют постоянные параметры, выбранные априори применительно к некоторой сигнально-помеховой обстановке. Это обстоятельство не даёт возможности оптимизировать характеристики алгоритма для различных сигнально-помеховых ситуаций. В зависимости от того, изменяются ли структура и параметры алгоритма в процессе адаптации к априори неизвестной сигнально-помеховой обстановке или нет, алгоритмы подразделяются на алгоритмы с постоянной и переменной структурой.

В зависимости от ширины полосы частот обрабатываемых сигналов алгоритмы делятся на узкополосные и широкополосные.

Отличие между ними состоит в том, что широкополосные алгоритмы позволяют работать в относительной полосе частот 10 % и более. Для этого в них используется информация о сигналах, снимаемая с выходов линии задержки с отводами в каждом канале адаптации (рис. 4.10). Возможна реализация широкополосных алгоритмов чисто алгоритмическими методами. Например, для формирования широкого минимума ХН используется адаптация на несколько близко расположенных направлений в окрестности прихода широкополосной помехи (см. параграф 5.9).

В процессе адаптации некоторые дискретные алгоритмы позволяют достигать оптимальных значений ВК с заданной точностью за определённое конечное число итераций. Такие алгоритмы называют конечными. Для

квадратичных целевых функций конечными являются, например, двухшаговые градиентные алгоритмы первого порядка, алгоритмы сопряжённых градиентов и направлений, квазиньютоновские алгоритмы, минимизирующие СКО и минимизирующие мощность помех на выходе ААР [40].

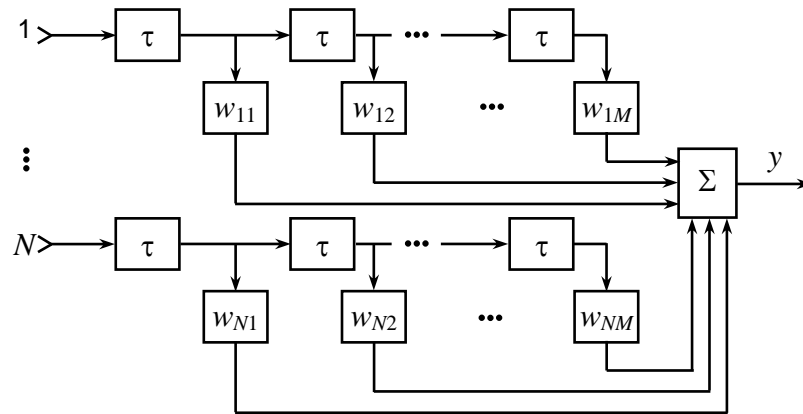


Рис. 4.10

Особо необходимо выделить одношаговые градиентные алгоритмы второго порядка, минимизирующие СКО или мощность помех на выходе ААР. В таких алгоритмах используется информация о вторых производных целевых функций. Если целевые функции описываются квадратичными многомерными зависимостями относительно вектора ВК, то данные алгоритмы в дискретном виде позволяют получать оптимальные ВК за одну итерацию.

Все конечные алгоритмы для квадратичных целевых функций сходятся к экстремальной точке максимум за N итераций. Реальное число итераций зависит от числа обрабатываемых сигналов и помех, а также от их взаимного пространственного расположения относительно адаптивной многоканальной антенны.

Бесконечные алгоритмы адаптации основаны на использовании итерационных методов и позволяют достигать заданной точности оценки ВК в общем случае только при очень большом числе итераций $j(j \gg N)$. Это и определяет название алгоритмов.

4.2. Алгоритмы минимизации среднеквадратической ошибки

Рассмотрим алгоритм минимизации СКО, основанный на градиентном методе адаптации. Для безусловного критерия МСКО градиент целевой функции определяется формулой (2.7) и имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{W}} J = 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} - 2\mathbf{R}_{xd}. \quad (4.4)$$

При неизвестных (хотя и неизменных) статистических характеристиках сигналов невозможно точно вычислить значение градиента в каждой точке целевой функции, и поэтому необходимо сначала оценить указанные статистические характеристики. Затем следует оценить и сам градиент. Для реализации алгоритма МСКО необходимо иметь сигнал ошибки и, следовательно, опорный сигнал $d(t)$, характеризующий принимаемый полезный сигнал.

Для получения оценки градиента СКО найдём градиент оценки ошибки при использовании одного временного отсчёта:

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{W}} J = 2\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^+(t)\mathbf{W} - 2\mathbf{X}(t)d^*(t). \quad (4.5)$$

Это выражение можно переписать в следующей форме:

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{W}} J = -2\mathbf{X}(t)\varepsilon^*(t), \quad (4.6)$$

где

$$\varepsilon(t) = d(t) - \mathbf{W}^+\mathbf{X}(t) \quad (4.7)$$

есть сигнал ошибки.

Сравнивая математическое ожидание оценки градиента с истинным значением градиента СКО, нетрудно доказать, что эта оценка является несмещённой. Для этого определим математическое ожидание оценки градиента (4.5). Получим

$$m[\tilde{\nabla}_{\mathbf{W}} J] = -2m\{\varepsilon^*(t)\mathbf{X}(t)\} = -2(\mathbf{R}_{xd} - \mathbf{R}_{xx}\mathbf{W}). \quad (4.8)$$

Последнее выражение подтверждает несмещённость оценки градиента. Применение градиентного метода (см. главу 3)

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{W}} J, \quad (4.9)$$

где τ_0 – постоянный коэффициент, к безусловному критерию МСКО позволяет записать алгоритм для непрерывного аргумента в виде

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\mathbf{X}(t)[d(t) - \mathbf{W}^+\mathbf{X}(t)]^*, \quad (4.10)$$

а для дискретного аргумента – в виде

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - 2\mu\mathbf{X}(j)[d(j) - \mathbf{W}^+(j)\mathbf{X}(j)]^*, \quad (4.11)$$

где μ – коэффициент, влияющий на сходимость алгоритма.

Структурные схемы устройства, реализующего алгоритмы подстройки ВК (4.10) и (4.11), соответственно в аналоговой и цифровой форме, представлены на рис. 4.11 и 4.12.

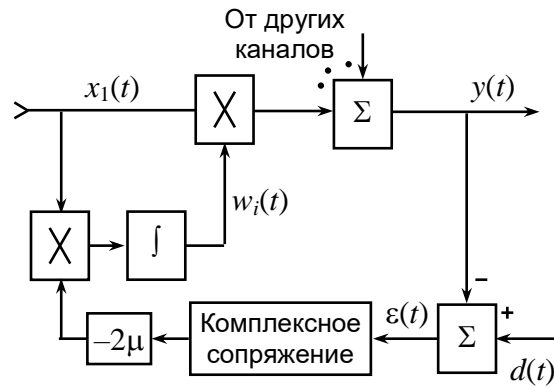


Рис. 4.11

В параграфе 2.2 показано, что СКО определяется выражением

$$m\{\varepsilon^2(t)\} = m\{d^2(t)\} - 2\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{xd} + \mathbf{W}^+ \mathbf{R} \mathbf{W}. \quad (4.12)$$

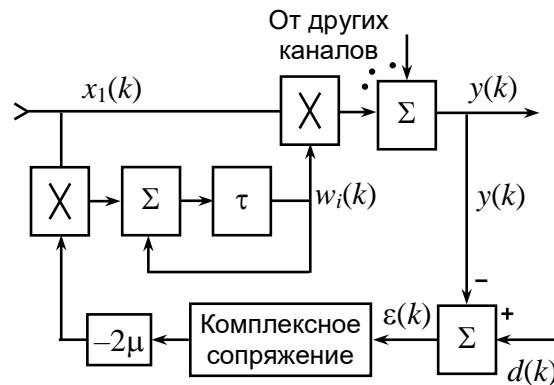


Рис. 4.12

Анализ последнего выражения показывает, что поверхность, изображающая зависимость $m\{\varepsilon^2(t)\}$ от ВК, имеет чашеобразную форму (рис. 4.13).

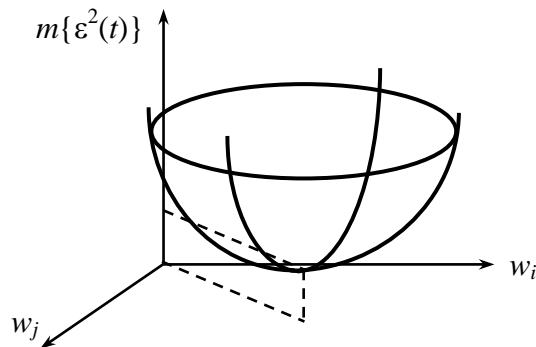


Рис. 4.13

Случай, когда \mathbf{R} или \mathbf{R}_{xd} изменяется во времени, можно рассматривать как движение чаши.

В процессе обработки сигналов предполагается, что усреднение во времени производится на конечном интервале, большем по сравнению со временем флуктуации $x_k(t)$ и $d(t)$. Это приводит к тому, что постоянные изменения характеристик сигнала сказываются на изменяющихся во времени средних значениях. Существенно, что функция (4.12) имеет квадратичный характер. Это означает наличие чётко выраженного минимума, притом только одного.

Если вектор ВК \mathbf{W} положить равным $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ [см. формулу (2.9)], то СКО находится с помощью равенства

$$m\{\varepsilon^2(t)\}_{\min} = m\{d^2(t)\} - \mathbf{R}_{xd}^+ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{xd}. \quad (4.13)$$

Этот результат можно использовать для того, чтобы записать соотношение (4.12) в виде

$$m\{\varepsilon^2(t)\} = m\{\varepsilon^2(t)\}_{\min} + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{опт}})^+ \mathbf{R} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{опт}}), \quad (4.14)$$

где квадратичная зависимость $m\{\varepsilon^2(t)\}$ от ВК становится более очевидной.

Поскольку градиент характеризует наклон функции $m\{\varepsilon^2(t)\}$ относительно каждого из ВК, то в соответствии с формулой (4.9) весовой коэффициент будет изменяться со скоростью, пропорциональной чувствительности поверхности $m\{\varepsilon^2(t)\}$ к изменению этого ВК. Градиент поверхностной функции – это вектор, указывающий направление максимально крутого подъёма, поэтому вектор $-\nabla_{\mathbf{w}} J$ указывает направление максимально крутого спуска.

Важнейшими характеристиками любого итерационного процесса являются условия его устойчивости и сходимости. При нарушении этих

условий [например, если в выражении (4.11) коэффициент 2μ слишком велик] на некоторых итерациях будет начинаться перекомпенсация, т. е. процесс адаптации пойдёт не к точке оптимума целевой функции, а от неё.

Определим условия устойчивости и сходимости алгоритма (4.10). С этой целью перепишем выражение для алгоритма МСКО в виде

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} - \mathbf{R}_{xd}. \quad (4.15)$$

Решением данного уравнения является матричная экспонента

$$\mathbf{W}(t) = [\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}(\infty)] \exp(-\mathbf{R}_{xx} t / \tau_0) + \mathbf{W}(\infty), \quad (4.16)$$

где \mathbf{W}_0 – начальные ВК; $\mathbf{W}(\infty) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{xd}$ – оптимальные ВК.

Для анализа этого решения удобно перейти к ортонормированной системе координат, т. е. представить матрицу \mathbf{R} в виде [9,18]

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^+, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{R} \mathbf{Q}$ – диагональная матрица из собственных значений матрицы \mathbf{R} ; \mathbf{Q} – ортогональная матрица собственных векторов матрицы \mathbf{R} .

Умножая обе части уравнения (4.15) слева на матрицу \mathbf{Q}^+ и учитывая, что

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^+ = \mathbf{I}_N,$$

можно из (4.15) получить

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{Q}^2 \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^+ \mathbf{W} - \mathbf{Q}^+ \mathbf{R}_{xd}. \quad (4.19)$$

С учётом тождества $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{R} \mathbf{Q}$ последнее равенство переписывается в виде:

$$\tau_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{W}}}{\partial t} = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{R}}_{xd}, \quad (4.20)$$

где $\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{W}$; $\hat{\mathbf{R}}_{xd} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{R}_{xd}$.

Сходимость процесса адаптации не зависит от выбора системы координат, поэтому вместо (4.16) можно использовать выражение

$$\hat{\mathbf{W}}(t) = [\hat{\mathbf{W}}_0 - \hat{\mathbf{W}}(\infty)] \exp(-\mathbf{\Lambda} t / \tau_0) + \hat{\mathbf{W}}(\infty), \quad (4.21)$$

где $\hat{\mathbf{W}}_0 = \mathbf{Q}^+ \mathbf{W}_0$, $\hat{\mathbf{W}}(\infty) = \mathbf{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{xd}$.

В новой системе координат уравнения для компонент вектора $\hat{\mathbf{W}}(t)$ стали в отличие от (4.16) независимыми, поскольку каждому ВК соответствует свое собственное значение матрицы Λ .

Условие устойчивости алгоритма минимизации СКО заключается в положительном значении константы в показателе экспоненты. Следовательно, для обеспечения процесса сходимости алгоритма необходимо выполнение условия

$$\lambda_i / \tau_0 > 0, \quad (4.22)$$

где λ_i – i -собственное значение матрицы \mathbf{R} или i -й диагональный элемент матрицы Λ .

В главе 1 показано, что собственное значение λ_i корреляционной матрицы \mathbf{R} всегда больше или равно мощности шума $\sigma_{\text{ш}}^2$, т. е. всегда положительно. Величина τ_0 характеризует постоянную времени интегрирования и, следовательно, также положительна. Поэтому условие (4.22) выполняется всегда. Это означает, что градиентный непрерывный алгоритм МСКО вида (4.10) абсолютно устойчив.

Рассмотрим устойчивость дискретного варианта градиентного алгоритма МСКО (4.11). Для этого запишем выражение для градиента СКО (4.4) с учётом соотношений (1.45) и (2.9) в форме

$$\nabla_{\mathbf{W}} J = 2\mathbf{R}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{W} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{sd}}) = 2\mathbf{R}(\mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{опт}}). \quad (4.23)$$

Тогда вектор ВК на $(j + 1)$ -й итерации представляется как

$$\mathbf{W}(j + 1) = \mathbf{W}(j) - \mu \nabla_{\mathbf{W}} J = \mathbf{W}(j) - 2\mu \mathbf{R}[\mathbf{W}(j) - \mathbf{W}_{\text{опт}}]. \quad (4.24)$$

Объединяя члены в правой части уравнения (4.24), получим:

$$\mathbf{W}(j + 1) = (\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R})\mathbf{W}(j) + 2\mu \mathbf{R}\mathbf{W}_{\text{опт}}. \quad (4.25)$$

Это уравнение является линейным однородным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Его можно решить методом индукции на основе нескольких первых итераций. Запишем первые три итерации для ВК в виде:

$$\mathbf{W}(1) = (\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R})\mathbf{W}(0) + 2\mu \mathbf{R}\mathbf{W}_{\text{опт}}; \quad (4.26, \text{a})$$

$$\mathbf{W}(2) = (\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R})^2 \mathbf{W}(0) + (\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R} + \mathbf{I}_N) 2\mu \mathbf{R}\mathbf{W}_{\text{опт}}; \quad (4.26, \text{б})$$

$$\mathbf{W}(3) = (\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R})^3 \mathbf{W}(0) + [(\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R})^2 + (\mathbf{I}_N - 2\mu \mathbf{R}) + \mathbf{I}_N] 2\mu \mathbf{R}\mathbf{W}_{\text{опт}}, \quad (4.26, \text{в})$$

где $\mathbf{W}(0)$ – вектор начальных ВК.

С учётом этих результатов можно сделать обобщение для ВК на j -й итерации:

$$\mathbf{W}(j) = (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{R})^j \mathbf{W}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{R})^i 2\mu\mathbf{R}\mathbf{W}_{\text{опт}}. \quad (4.27)$$

Для упрощения анализа последнего уравнения перейдём к представлению матрицы \mathbf{R} в ортонормированной системе координат. После подстановки тождеств (4.17) и (4.18) в формулу (4.27) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(j) &= (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+ - 2\mu\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^+)^j \mathbf{W}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^+ - 2\mu\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^+) 2\mu\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^+ \mathbf{W}_{\text{опт}} = \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{\Lambda})^j \mathbf{Q}^+ \mathbf{W}(0) + \mathbf{Q} \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{\Lambda})^i \mathbf{Q}^+ 2\mu\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^+ \mathbf{W}_{\text{опт}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Перейдём затем к ортонормированной системе координат для ВК путём умножения обеих частей равенства (4.28) слева на матрицу преобразования \mathbf{Q}^+ . Тогда с учётом тождестве (4.18) запишем выражение для ВК в ортонормированной системе координат в виде:

$$\hat{\mathbf{W}}(j) = (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{\Lambda})^j \hat{\mathbf{W}}(0) + \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{\Lambda})^i 2\mu\mathbf{\Lambda}\hat{\mathbf{W}}_{\text{опт}}, \quad (4.29)$$

где $\hat{\mathbf{W}}(0) = \mathbf{Q}^+ \mathbf{W}(0)$; $\hat{\mathbf{W}}_{\text{опт}} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{W}_{\text{опт}}$.

Матрица $\mathbf{\Lambda}$ является диагональной. Поэтому система уравнений (4.29) распадается на независимые уравнения. Для n -го ВК в ортонормированной системе координат

$$\hat{w}_n(j) = (1 - 2\mu\lambda_n)^j \hat{w}_n(0) + 2\mu \sum_{i=0}^{j-1} (1 - 2\mu\lambda_n)^i \hat{w}_{n \text{ опт}}, \quad (4.30)$$

где λ_n – n -е собственное значение матрицы \mathbf{R} . Сумма членов во втором слагаемом выражения (4.30) представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $(1 - 2\mu\lambda_n)$. Известно, что сумма геометрической прогрессии определяется по формуле

$$\sum_{i=0}^{j-1} (1 - 2\mu\lambda_n)^i = \frac{1 - (1 - 2\mu\lambda_n)^j}{1 - (1 - 2\mu\lambda_n)}. \quad (4.31)$$

С учётом последнего тождества уравнение (4.30) переписывается в виде:

$$\begin{aligned}\hat{w}_n(j) &= (1 - 2\mu\lambda_n)^j \hat{w}_n(0) + 2\mu\lambda_n \hat{w}_{n \text{ опт}} \frac{1 - (1 - 2\mu\lambda_n)^j}{2\mu\lambda_n} = \\ &= \hat{w}_{n \text{ опт}} + (1 - 2\mu\lambda_n)^j (\hat{w}_n(0) - \hat{w}_{n \text{ опт}}).\end{aligned}\quad (4.32)$$

Этот результат даёт в явном виде значение $\hat{w}_n(j)$ для любой итерации в процессе адаптации и, следовательно, является решением градиентного дискретного алгоритма МСКО в ортогональной системе координат.

Вид переходного процесса не зависит от выбранной системы координат. Поэтому рассмотрим далее устойчивость алгоритма, анализируя решение для ВК (4.32). Анализ этого выражения показывает, что ВК $\hat{w}_n(j)$ сходится к оптимальному значению $\hat{w}_{n \text{ опт}}$ только в том случае, если модуль величины $(1 - 2\mu\lambda_n)$ меньше единицы, т. е.

$$|1 - 2\mu\lambda_n| < 1. \quad (4.33)$$

Действительно, показатель степени j является целым и вещественным и для того, чтобы второе слагаемое выражения (4.32) стремилось к нулю, необходимо, чтобы выполнялось неравенство (4.33). Для устойчивости алгоритма адаптации последнее неравенство должно выполняться для всех λ_n . Если величина μ выбрана такой, что данное неравенство выполняется для наибольшего значения λ_n , то оно автоматически выполняется для меньших значений λ_n . Поэтому из неравенства (4.33) можно получить условия для выбора коэффициента μ , при котором алгоритм адаптации всегда сходится. Именно,

$$1/\lambda_{\max} > \mu > 0, \quad (4.34)$$

где λ_{\max} – максимальное собственное значение матрицы \mathbf{R} .

Рассмотренное условие для μ можно связать с полной мощностью входного сигнала P . Поскольку λ_{\max} удовлетворяет неравенству (см. прил. 1)

$$\lambda_{\max} \leq \text{tr}[\mathbf{R}], \quad (4.35)$$

где $\text{tr}[\mathbf{R}] = \sum_{i=1}^N \overline{x_i^2}$, то условие сходимости будет выполнено, если

$$1/\text{tr}[\mathbf{R}] > \mu > 0. \quad (4.36)$$

Анализ переходных процессов при реализации алгоритма МСКО удобно производить в ортонормированной системе координат. При этом (4.21) переходные процессы представляют собой сумму составляющих

$$\hat{w}_n(j) = [\hat{w}_{0n} - \hat{w}_n(\infty)]e^{-\lambda_n t / \tau_0} + \hat{w}_n(\infty) \quad (4.37)$$

с постоянными времени, определяемыми как

$$\tau_n = \tau_0 / \lambda_n. \quad (4.38)$$

Поскольку τ_n обратно пропорционально λ_n , а λ_n характеризует мощность сигнала, соответствующую n -й ортонормированной координате сигнала, то сильному сигналу будет соответствовать более быстрый переходный процесс, а слабому сигналу – более медленный. Это обстоятельство показывает, что скорость сходимости алгоритма минимизации СКО зависит от распределения собственных значений корреляционной матрицы \mathbf{R} .

Влияние распределения собственных значений на скорость сходимости алгоритма, минимизирующего СКО, иллюстрируется графиком на рис. 4.14. Здесь для двумерного случая представлена поверхность уровня функции при двух существенно различных собственных значениях матрицы \mathbf{R} . Кривая «а» представляет собой траекторию движения ВК от начального к оптимальному значению в непрерывном случае, а кривая «б» – в дискретном случае. Эллиптические кривые уровня на рис. 4.14 сильно вытянуты, что означает большое различие собственных значений корреляционной матрицы [22]. Это приводит к необходимости выполнения большого числа итераций.

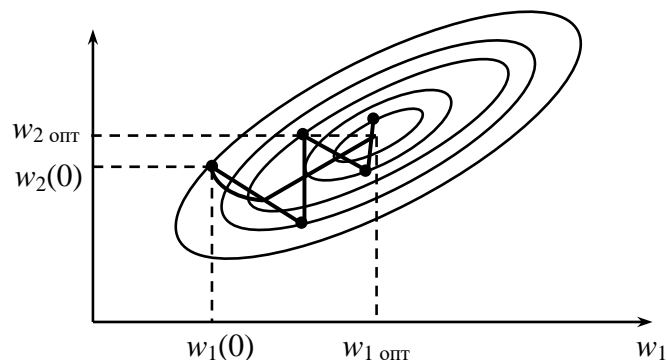


Рис. 4.14

Поскольку в процессе адаптации на каждой итерации используется только одна выборка сигнала $\mathbf{X}(t)$, то кривые обучения из-за шума имеют вид искажённых экспонент. Чем меньше величина шага адаптации, который

пропорционален μ , тем меньше уровень шума, искажающего кривую обучения.

На точность определения вектора оптимальных ВК влияют различные факторы. В частности, собственный шум в элементах решетки и контура обратной связи, а также конечная величина коэффициента μ , т. е. шага адаптации, приводят к тому, что в конце процесса адаптации установившееся значение вектора ВК отличается от оптимального. Величину ошибки между полученным и оптимальным вектором ВК обозначим

$$\mathbf{V}_w = \mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{опт}}. \quad (4.39)$$

В процессе адаптации на каждой итерации вычисляется не точное значение градиента $\nabla_w J$, а его оценка $\tilde{\nabla}_w J$, что приводит к отклонению траектории изменения ВК от идеального случая и к появлению шумовой составляющей вектора ВК.

Для получения количественных оценок шумовой составляющей вектора ВК воспользуемся уравнением (4.24). Вычтем $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ слева и справа в уравнении (4.24). Учитывая введённое обозначение ошибки (4.39) на $(j + 1)$ -й итерации получим

$$\mathbf{V}_w(j+1) = \mathbf{V}_w(j) - 2\mu\mathbf{R}\mathbf{V}_w(j) = (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{R})\mathbf{V}_w(j). \quad (4.40)$$

Оценка градиента всегда содержит погрешность (шумовую составляющую) $J_{\text{ш}}$, т. е.

$$\tilde{\nabla}_w J = \nabla_w J + J_{\text{ш}}. \quad (4.41)$$

При практическом применении алгоритма вместо градиента $\nabla_w J$ подставляется его оценка $\tilde{\nabla}_w J$, поэтому вектор ВК, вычисляемый на $(j + 1)$ -й итерации, определяется как

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu\tilde{\nabla}_w J = \mathbf{W}(j) + 2\mu\mathbf{R}[\mathbf{W}_{\text{опт}} - \mathbf{W}(j)] - \mu J_{\text{ш}}(j). \quad (4.42)$$

Выражение (4.40) при этом записывается в виде

$$\mathbf{V}_w(j+1) = \mathbf{V}_w(j) - \mu[2\mathbf{R}\mathbf{V}_w(j) + J_{\text{ш}}(j)] = (\mathbf{I}_N - 2\mu\mathbf{R})\mathbf{V}_w(j) - \mu J_{\text{ш}}(j). \quad (4.43)$$

Так как

$$\text{cov}[\hat{\mathbf{V}}_w(j)] = \frac{\mu}{4}(\mathbf{\Lambda} - \mu\mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \text{cov}[\hat{J}_{\text{ш}}(j)] \quad (4.44)$$

и

$$\text{cov}[\hat{J}_{\text{ш}}(j)] = 4\varepsilon_{\text{мин}}^2 \mathbf{\Lambda}, \quad (4.45)$$

то

$$\text{cov}[\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)] \approx \mu \varepsilon_{\min}^2 (\mathbf{I}_N - \mu \mathbf{\Lambda})^{-1}. \quad (4.46)$$

Элементы матрицы $\mu \mathbf{\Lambda}$ на практике обычно много меньше единицы, т. е.

$$|\mathbf{I}_N| \gg |\mu \mathbf{\Lambda}|. \quad (4.47)$$

При таких условиях ковариация вектора ошибок $\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j)$ определяется соотношением

$$\text{cov}[\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j)] = \mathbf{Q} \text{cov}[\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)] \mathbf{Q}^+ \approx \mathbf{Q} \mathbf{Q}^+ \mu \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{I}_N \approx \mu \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{I}_N. \quad (4.48)$$

Таким образом, увеличение коэффициента μ , а, значит, шага адаптации в алгоритме минимизации СКО, с одной стороны приводит к ускорению сходимости процесса адаптации, а с другой, в соответствии с (4.47), – к увеличению ошибки установления вектора ВК. Поэтому в ААР не происходит полного подавления помех и, значит, отношение сигнал/(помеха + шум) оказывается не максимально возможным.

При отсутствии шумовой компоненты вектора ВК и шума во входном сигнале градиентный алгоритм минимизации СКО приводит к установившемуся вектору ВК, соответствующему минимальному значению целевой функции среднего квадрата ошибки между опорным и выходным сигналом ААР. В этом случае ковариационная матрица вектора ошибки ВК $\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j)$ – нулевая и, следовательно, минимальное значение СКО составляет ε_{\min}^2 . Однако наличие вектора шума $\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j)$ в адаптивном процессе приводит к тому, что установившиеся значения вектора ВК отличаются случайным образом от оптимальных. Это соответствует увеличению СКО. Действительно, в соответствии с (4.12)

$$m\{\varepsilon^2(j)\} = m\{d^2(j)\} - 2\mathbf{R}_{xd}^+ \mathbf{W}(j) + \mathbf{W}^+(j) \mathbf{R} \mathbf{W}(j). \quad (4.49)$$

С учётом того, что в соответствии с выражением (4.13)

$$\varepsilon_{\min}^2 = \overline{d^2(j)} - \mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{xd}; \quad \mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{xd}; \quad \mathbf{V}_{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_{\text{опт}},$$

получим

$$\varepsilon^2(j) = \varepsilon_{\min}^2 + \mathbf{V}_{\mathbf{W}}^+(j) \mathbf{R} \mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j). \quad (4.50)$$

Для оценки ковариации шума весовых коэффициентов на практике пользуются соотношением

$$\text{cov}[\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)] = \frac{\mu \varepsilon_{\min}^2}{4I\delta_0^2} \mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad (4.51)$$

где I – количество выборок для оценки СКО $\tilde{\varepsilon}^2(j)$.

Рассогласование M_p для алгоритма минимизации СКО с оценкой градиента методом численного дифференцирования определяется формулой

$$M_p = \frac{N\mu\varepsilon_{\min}^2}{4I\delta_0^2}, \quad (4.52)$$

Рассмотрим градиентный алгоритм минимизации СКО

$$J_1 = m\{[d(j) - \mathbf{W}^+(j)\mathbf{X}(j)]^2\} \quad (4.53)$$

с ограничениями, например линейного вида

$$\mathbf{W}^+\mathbf{C} = 1, \quad (4.54)$$

где \mathbf{C} – вектор ограничений.

Для нахождения оптимальных ВК находится минимум функционала Лагранжа

$$J_2 = m\{[d(j) - \mathbf{W}^+(j)\mathbf{X}(j)]^2\} - 2\lambda(\mathbf{W}^+\mathbf{C} - 1). \quad (4.55)$$

Градиент данной целевой функции записывается в форме

$$\nabla_{\mathbf{W}} J = 2(\mathbf{R}\mathbf{W} - \mathbf{R}_{xd}) - 2\lambda\mathbf{C}. \quad (4.56)$$

Используем данное значение градиента в формуле для итерационного дискретного градиентного метода первого порядка

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \frac{1}{2}\mu\nabla_{\mathbf{W}} J, \quad (4.57)$$

где μ – постоянный коэффициент.

Коэффициент $1/2$ перед величиной μ введён для удобства и упрощения дальнейших выкладок. После подстановки выражения (4.56) в (4.57) получим

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu[\mathbf{R}\mathbf{W}(j) - \mathbf{R}_{xd} - \lambda(j)\mathbf{C}]. \quad (4.58)$$

Для определения неизвестной величины коэффициента $\lambda(j)$ воспользуемся ограничениями (4.54). Если подставить соотношение для вектора ВК (4.58) в (4.54), то

$$\mathbf{W}^+(j)\mathbf{C} - \mu^+[\mathbf{W}^+(j)\mathbf{R} - \mathbf{R}_{xd}^+ - \mathbf{C}^+\lambda^+(j)]\mathbf{C} = 1. \quad (4.59)$$

Из последнего равенства можно определить $\lambda(j)$:

$$\mathbf{W}^+(j)\mathbf{C} - \mu^+\mathbf{W}^+(j)\mathbf{RC} + \mu^+\mathbf{R}_{xd}^+\mathbf{C} - 1 = -\mu^+\mathbf{C}^+\lambda^+(j)\mathbf{C}. \quad (4.60)$$

Так как $\lambda(j)$ – скаляр, то

$$\lambda^+(j) = -[\mu^+\mathbf{C}^+\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{W}^+(j)\mathbf{C} - \mu^+\mathbf{W}^+(j)\mathbf{RC} + \mu^+\mathbf{R}_{xd}^+\mathbf{C} - 1]. \quad (4.61)$$

Подставим далее последнее выражение в формулу для итерационного алгоритма (4.58). Это позволяет записать вектор ВК в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu[\mathbf{RW}(j) - \mathbf{R}_{xd} - (\mathbf{CW}(j) - \\ - \mu\mathbf{CRW}(j) + \mu\mathbf{C}^+\mathbf{R}_{xd}(\mu\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C})]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Сгруппируем далее слагаемые в правой части (4.62) относительно вектора $\mathbf{W}(j)$. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mathbf{C}^+\mathbf{W}(j)(\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} - \\ - \mu[\mathbf{I}_N - (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^+](\mathbf{RW}(j) - \mathbf{R}_{xd}) = \\ = (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{HW}(j) - \mu\mathbf{H}[\mathbf{RW}(j) - \mathbf{R}_{xd}], \end{aligned} \quad (4.63)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{I}_N - (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^+$.

Выражение в квадратных скобках (4.63) есть половина градиента исходной целевой функции без ограничений [см. формулы (4.8) и (4.53)]. С учётом этого запишем выражение (4.63) в другой форме:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{H} \left[\mathbf{W}(j) - \frac{1}{2} \mu \nabla_{\mathbf{W}} J_1 \right] + (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}. \quad (4.64)$$

Введём далее следующие обозначения:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}_k; \quad (4.65)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^+; \quad (4.66)$$

$$\mathbf{F}_0 = (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}. \quad (4.67)$$

С учётом принятых обозначений равенство (4.64) перепишем в виде

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{H} \left[\mathbf{W}(j) - \frac{1}{2} \mu \nabla_{\mathbf{W}} J_1 \right] + \mathbf{F}_0. \quad (4.68)$$

Матрица \mathbf{H} называется матрицей проецирования или проектирования. В качестве начального значения вектора ВК принимается вектор $\mathbf{W}(0)$, удовлетворяющий условию ограничений (4.54)

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{F}_0. \quad (4.69)$$

В отсутствие сигналов и помех вектор ВК не изменяется ($\nabla_{\mathbf{w}} J = 0$) и определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(1) &= \mathbf{H}\mathbf{W}(0) + \mathbf{F} = [\mathbf{I}_N - (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^+](\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} = \\ &= (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} - (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} = (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Определим условия сходимости алгоритма (4.68). Для этого сравним выражение (4.64) и аналогичное выражение для ВК критерия МСКО без ограничений (4.11). Из сравнения этих выражений следует, что если принять ($\mathbf{H} = \mathbf{I}_N$), то алгоритм (4.64) всегда сходится при условии

$$2/\lambda_{\max} > \mu > 0. \quad (4.71)$$

Матрица \mathbf{H} в правой части уравнения (4.64) умножается на векторы, включающие вектор ВК. Таким образом, она влияет на условие сходимости алгоритма. Однако норма матрицы \mathbf{H} [см. формулы (4.65), (4.66)] меньше либо равна норме единичной матрицы \mathbf{I}_N :

$$|\mathbf{H}| \leq |\mathbf{I}_N|. \quad (4.72)$$

Умножение матрицы \mathbf{H} в равенстве (4.64) не увеличивает собственное значение результирующей матрицы $\mathbf{H}\mathbf{R}$. Поэтому (4.71) является достаточным условием сходимости алгоритма МСКО (4.64) с линейными ограничениями (4.54).

В алгоритме (4.64) на каждом шаге ВК удовлетворяют условию ограничения (4.54). Следовательно, алгоритм (4.64) позволяет корректировать ошибки вычислений, вызванные округлением или квантованием и предотвращает их возможное накопление и рост.

Алгоритм МСКО с линейными ограничениями содержит операцию умножения на проекционную матрицу \mathbf{H} . Данная операция приводит к исключению составляющих вектора, перпендикулярных плоскости, тем самым проецируя вектор ВК на подпространство ограничений.

Свойства сходимости алгоритма МСКО с ограничениями близки к рассмотренным ранее свойствам алгоритма МСКО без ограничений. Поэтому

все особенности алгоритма МСКО с ограничениями (4.64) соответствуют алгоритму МСКО без ограничений (4.11).

4.3. Алгоритмы максимизации отношения мощности сигнала к мощности помехи

В случае, когда направление прихода полезного сигнала известно, отношение сигнал/(шум + помеха) записывается в виде (2.60)

$$J_4(\mathbf{W}) = \frac{P_c (\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c)^2}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}. \quad (4.73)$$

Максимальное значение ОСШП на выходе ААР

$$(P_c / P_{\text{шш}})_{\text{max}} = P_c \mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c \quad (4.74)$$

достигается при векторе ВК

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c, \quad (4.75)$$

где $\beta = [(\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{b}_c) / (\mathbf{W}_{\text{опт}}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}_{\text{опт}})]^{-1}$.

Последнее уравнение определяет весовые коэффициенты оптимального фильтра пространственной обработки стационарных сигналов. Для реализации этого фильтра необходимо знание опорного сигнала \mathbf{b}_c и корреляционной матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$. Такое определение весовых коэффициентов $\mathbf{W}_{\text{опт}}$ не всегда возможно. Целевой функции (4.73) соответствует только один глобальный максимум. Для его поиска воспользуемся градиентным методом.

Итерационная градиентная процедура вычисления ВК, реализующая критерий МСШП, записывается в дискретном случае в форме

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \mu(j) \nabla_{\mathbf{W}} J_4[\mathbf{W}(j)], \quad (4.76)$$

где $\mu(j)$ – коэффициент, определяющий шаг процесса адаптации на j -й итерации.

В соответствии с определением градиента сложной комплексной функции (см. прил. 1) получим

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_4 = -\frac{(\mathbf{W}^+ \mathbf{X}_c)^2 2\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}{(\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W})^2} + \frac{2\mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^+ \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}} = \frac{2\mathbf{X}_c^+ \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}} \left(\mathbf{X}_c - \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{X}_c \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}} \right). \quad (4.77)$$

Поскольку $\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{пш}} \mathbf{W} = \mathbf{P}_{\text{пш}}$ и $\mathbf{W}^+ \mathbf{X}_c = y_c$, то выражение для градиента целевой функции ОСШП можно преобразовать к виду

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_4 = \frac{2y_c^*}{\mathbf{P}_{\text{пш}}} \left(\mathbf{X}_c - \frac{y_c}{\mathbf{P}_{\text{пш}}} \mathbf{P}_{\text{пш}} \mathbf{W} \right). \quad (4.78)$$

Так как градиент функции J_4 в итерационной процедуре (4.76) оценивается на каждой итерации, то необходимо определять на каждой итерации и скалярное комплексное число – отношение полезного сигнала на выходе ААР y_c к мощности помех $\mathbf{P}_{\text{пш}}$. Обозначим величину, обратную этому отношению, через β_0 :

$$\frac{P_{\text{пш}}}{y_c} = \beta_0. \quad (4.79)$$

Коэффициент β_0 связан с коэффициентом β равенством

$$\beta_0 = \beta / |\mathbf{X}_c|, \quad (4.80)$$

где $|\mathbf{X}_c|$ – модуль вектора \mathbf{X}_c .

Тогда соотношение для градиента целевой функции принимает вид:

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_4 = \frac{2}{\beta_0^*} \left(\mathbf{X}_c - \frac{1}{\beta_0} \mathbf{R} \mathbf{W} \right). \quad (4.81)$$

С учётом последнего равенства алгоритм адаптации (4.76) записывается как

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \frac{\mu(j)}{\beta_0^*} 2 \left(\mathbf{X}_c - \frac{1}{\beta_0} \mathbf{R} \mathbf{W}(j) \right) \quad (4.82)$$

или в другой форме

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + 2\mu(j) \left(\frac{\mathbf{X}_c}{\beta_0^*} - \frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{R} \mathbf{W}(j) \right). \quad (4.83)$$

На практике часто вместо корреляционной матрицы \mathbf{R} используют её мгновенную оценку

$$\mathbf{R}(j) = \mathbf{X} \mathbf{X}^+. \quad (4.84)$$

С учётом этого выражение для дискретного алгоритма принимает вид:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + 2\mu(j) \left(\frac{\mathbf{X}_c}{\beta_0^*} - \frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{X} \mathbf{X}^+ \mathbf{W}(j) \right) =$$

$$= \mathbf{W}(j) + 2\mu(j) \left(\frac{\mathbf{X}_c}{\beta_0^*} - \frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{X}y^* \right). \quad (4.85)$$

Определим коэффициент $\mu(j)$, при котором процесс адаптации является устойчивым и алгоритм всегда сходится к оптимальному значению ВК. Для этого проанализируем математическое ожидание выражения (4.85) или, что то же самое, выражения (4.83). Представим вектор $\mathbf{W}(j)$ через начальное значение $\mathbf{W}(0)$. Заметим, что вектор $\mathbf{W}(0)$ определяется вектором оптимальных ВК в случае отсутствия воздействия помех. Используя выражение (4.75), при условии, что $\mathbf{R}_n = 0$ и $\mathbf{R}_{\text{ш}} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N$, а также соотношение для β [см. формулу (4.75)], получим

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_{\text{опт}} = \beta \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c = \left(\frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c}{\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W}} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{b}_c = \frac{\mathbf{W}^+ \mathbf{W} \sigma_{\text{ш}}^2}{\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c} \sigma_{\text{ш}}^{-2} = \frac{\mathbf{W}^+(0) \mathbf{W}(0)}{\mathbf{W}^+(0) \mathbf{b}_c}. \quad (4.86)$$

Последнее равенство справедливо только при условии, что

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{b}_c. \quad (4.87)$$

Перепишем уравнение (4.83) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(j+1) &= \mathbf{W}(j) + 2\mu(j) \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \left(\frac{\mathbf{X}_c}{\beta_0^*} - \frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W}(j) \right) = \\ &= \mathbf{W}(j) - 2\mu(j) \mathbf{R}_{\text{ш}} \left(\frac{\mathbf{W}(j)}{\beta_0^2} - \frac{\beta \mathbf{R}_{\text{ш}}^{-1} \mathbf{X}_c}{\beta_0^* \beta_0 |\mathbf{X}_c|} \right) = \\ &= \mathbf{W}(j) - 2\mu(j) \mathbf{R}_{\text{ш}} \frac{1}{\beta_0^2} (\mathbf{W}(j) - \mathbf{W}_{\text{опт}}). \end{aligned} \quad (4.88)$$

На практике коэффициент $\mu(j)$ часто выбирается постоянным. С учётом этого уравнение (4.88) записывается как

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \mathbf{R}_{\text{ш}} [\mathbf{W}(j) - \mathbf{W}_{\text{опт}}]. \quad (4.89)$$

Такая форма записи алгоритма (4.83) позволяет воспользоваться методикой анализа устойчивости градиентного алгоритма минимизации СКО.

Выражения для ВК алгоритма минимизации СКО (4.24) и максимизации ОСШП (4.89) отличаются только наличием в правой части

уравнения (4.89) постоянного коэффициента β_0^2 . Так как выражение для ВК на j -й итерации алгоритма максимизации ОСШП аналогично выражению (4.27), то можно записать

$$\mathbf{W}(j+1) = \left(\mathbf{I}_N - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \mathbf{R}_{\text{мш}} \right)^j \mathbf{W}(0) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\mathbf{I}_N - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \mathbf{R}_{\text{мш}} \right)^i 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \mathbf{R}_{\text{мш}} \mathbf{W}_{\text{опт}}. \quad (4.90)$$

Данная система уравнений ВК является зависимой, что не позволяет в явном виде получить условие устойчивости алгоритма. С целью получения системы независимых уравнений представим последнее равенство в ортонормированной системе координат в виде, аналогичном (4.32). Для n -го ВК получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \hat{w}_n(j) &= \left(1 - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \lambda_n \right)^j \hat{w}_n(0) + 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \lambda_n \hat{w}_{n \text{ опт}} \frac{1 - \left(1 - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \lambda_n \right)^j}{2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \lambda_n} = \\ &= \hat{w}_{n \text{ опт}} + \left(1 - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \lambda_n \right)^j (\hat{w}_n(0) - \hat{w}_{n \text{ опт}}). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Данное уравнение является решением (4.83). Анализ этого уравнения показывает, что с увеличением числа итераций ВК стремятся к оптимальным значениям при условии, что

$$\left| 1 - 2 \frac{\mu}{\beta_0^2} \lambda_n \right| < 1. \quad (4.92)$$

Откуда следует условие устойчивости алгоритма (4.83) в виде:

$$\frac{\beta_0^2}{\lambda_{n \text{ max}}} > \mu > 0. \quad (4.93)$$

Дискретный алгоритм (4.85), используя предельный переход по величине дискретизации ВК, можно записать в следующем виде:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{W}(j+1) - \mathbf{W}(j)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[- \frac{2\mu(j)}{\Delta t} \left(\frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{X}\mathbf{X}^+ \mathbf{W}(j) - \frac{1}{\beta_0^*} \mathbf{X}_c \right) \right], \quad (4.94)$$

где Δt – промежуток времени между последовательными итерациями. Откуда следует представление алгоритма в непрерывной форме

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{X}\mathbf{X}^+ \mathbf{W} + \frac{1}{\beta_0^*} \mathbf{X}_c, \quad (4.95)$$

где τ_0 – постоянная интегрирования.

Проведём анализ устойчивости непрерывного варианта градиентного алгоритма максимизации ОСШП.

В процессе адаптации n -й ВК регулируется в соответствии с выражением

$$\tau_0 \frac{\partial w_n}{\partial t} = -\frac{1}{\beta_0^2} x_n \mathbf{X}^+ \mathbf{W} + \frac{1}{\beta_0^*} x_{cn}, \quad (4.96)$$

где w_n – ВК в n -м канале АР; x_n – сигнал на выходе n -го элемента АР; x_{cn} – полезный сигнал на выходе n -го элемента АР.

В дискретной форме уравнение (4.96) имеет вид (4.82):

$$w_n(j+1) = w_n(j) - \frac{2\mu}{\beta_0^*} \left(\frac{1}{\beta_0} x_n(j) \mathbf{X}^+(j) \mathbf{W}(j) - x_{cn} \right). \quad (4.97)$$



Рис. 4.15

Структурные схемы реализации алгоритмов (4.96) и (4.97) показаны, соответственно, на рис. 4.15 и 4.16.

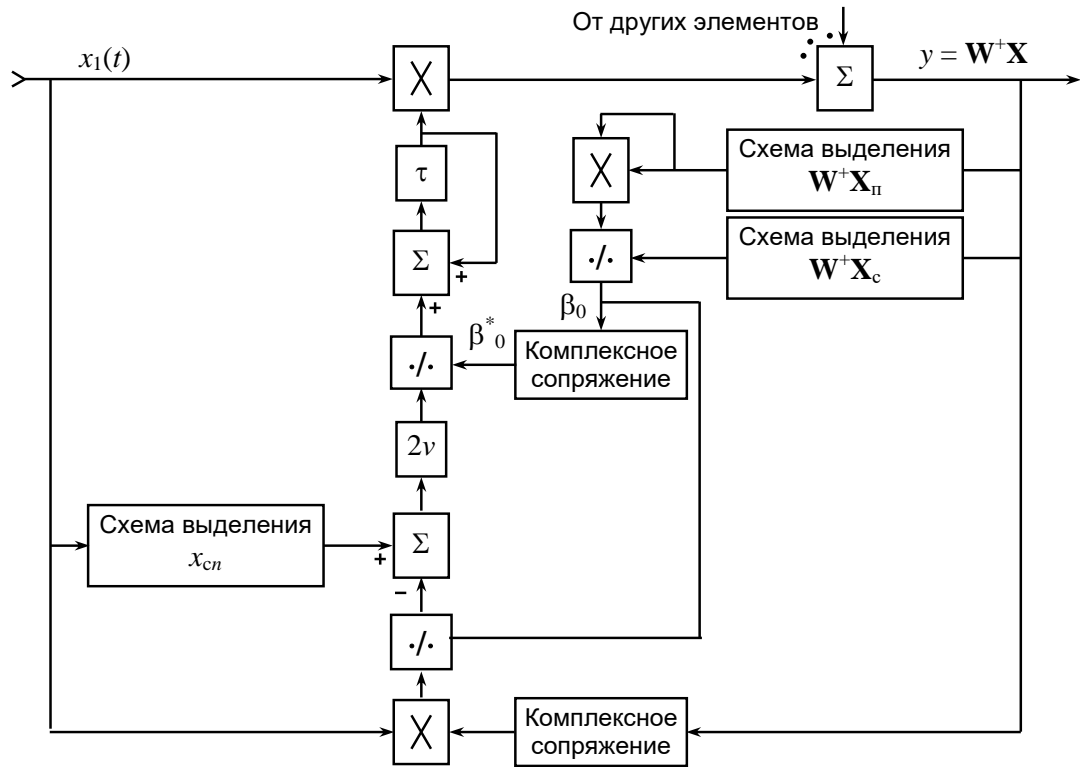


Рис. 4.16

Коэффициент τ_0 в общем случае должен зависеть от времени. Он влияет на устойчивость процесса адаптации. Однако на практике с целью упрощения алгоритма коэффициент τ_0 выбирается часто постоянным и не зависящим от времени, т. е. $\tau_0(t) = \text{const}$.

Преобразуем выражение (4.76) с учётом (4.77) и (4.79) с помощью матрицы преобразований \mathbf{Q} к виду:

$$\tau_0 \mathbf{Q}^+ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = - \left(\frac{1}{\beta_0^2} \mathbf{Q}^+ \mathbf{R}_{\text{инт}} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^+ \mathbf{W} - \frac{1}{\beta_0^*} \mathbf{Q}^+ \mathbf{X}_c \right) \quad (4.98)$$

или

$$\tau_0 \mathbf{Q}^+ \frac{\partial \hat{\mathbf{W}}}{\partial t} = - \left(\frac{1}{\beta_0^2} \Lambda \hat{\mathbf{W}} - \frac{1}{\beta_0^*} \hat{\mathbf{X}}_c \right), \quad (4.99)$$

где $\hat{\mathbf{X}}_c = \mathbf{Q}^+ \mathbf{X}_c$.

Решение уравнения (4.99) представляется в форме

$$\hat{\mathbf{W}}(t) = [\hat{\mathbf{W}}(0) - \hat{\mathbf{W}}(\infty)] e^{-\Lambda t / \tau \beta_0^2} + \hat{\mathbf{W}}(\infty), \quad (4.100)$$

где $\hat{\mathbf{W}}(0)$ – начальные ВК в ортонормированной системе координат; $\hat{\mathbf{W}}(\infty) = \beta_0 \mathbf{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{X}}_c$ – установившиеся ВК в ортонормированной системе координат.

Установившиеся значения ВК соответствуют оптимальным ВК. Действительно, используя формулы (2.37), (4.17) и (4.18), можно показать, что

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{W}} = \beta_0 \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{Q}^+ \mathbf{Q}\mathbf{X}_c = \beta_0 \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{X}_c = \beta \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{V}_c. \quad (4.101)$$

Условие устойчивости алгоритма максимизации ОСШП определяется отрицательным значением константы при экспоненте. Поэтому для обеспечения сходимости алгоритма (4.100) необходимо, чтобы выполнялось эквивалентное условие при $n = \overline{1, N}$:

$$\frac{\lambda_n}{\tau_0 \beta_0^2} > 0, \quad (4.102)$$

где λ_n – n -е собственное значение матрицы \mathbf{R} .

Так как величины λ_n , τ_0 и β_0^2 положительны по своей физической природе, то условие (4.102) выполняется всегда. Это означает, что алгоритм (4.102) абсолютно устойчив.

Пользуясь методикой, изложенной для алгоритма МСКО, можно показать, что условием сходимости дискретного алгоритма максимизации ОСШП является неравенство

$$\frac{\beta_0^2}{P'_{\text{шш}}} > \nu > 0, \quad (4.103)$$

где $P'_{\text{шш}} = \text{tr}[\mathbf{R}_{\text{шш}}]$ – мощность сигналов в каналах АР.

Сравнение выражений (4.100) и (4.21) для переходного процесса алгоритма максимизации ОСШП показывает, что по форме записи они одинаковы. Следовательно, все особенности переходных процессов двух этих алгоритмов одинаковы.

4.4. Алгоритмы минимизации мощности помех и шумов

Критериев минимизации мощности выходного сигнала (ММВБ) существует несколько. Для синтеза градиентного алгоритма адаптации рассмотрим один из них, например,

$$\min J_{12}(\mathbf{W}) = \min(\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} - 2\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{b}_c), \quad (4.104)$$

где \mathbf{b}_c – вектор, определяющий направление прихода полезного, сигнала, при условии, что шумы в каналах АР не коррелированы между собой, т. е.

$$\mathbf{R}_{\text{ш}} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N, \quad \mathbf{R}_{\text{шш}} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I} + P_{\text{п}} \mathbf{b}_{\text{п}} \mathbf{b}_{\text{п}}^+ = \sigma_{\text{ш}}^2 (\mathbf{I} + \mathbf{q}_{\text{п}}^2 \mathbf{b}_{\text{п}} \mathbf{b}_{\text{п}}^+), \quad (4.105)$$

где $\mathbf{q}_{\text{п}}^2 = P_{\text{п}} / \sigma_{\text{ш}}^2$.

В качестве метода адаптации выберем одношаговый градиентный метод. Тогда с учётом выражений для данного метода (3.3) и градиента целевой функции J_{12} (4.131) получим итерационную процедуру вычисления ВК в виде:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu(j) \nabla_{\mathbf{W}} J_{12} = \mathbf{W}(j) - \mu(j) 2[\mathbf{R}\mathbf{W}(j) - \mathbf{b}_c], \quad (4.106)$$

где $\mu(j)$ – коэффициент, определяющий длину шага адаптации.

Вектор начальных ВК $\mathbf{W}(0)$ определяется до начала адаптации и устанавливается равным вектору направления прихода полезного сигнала \mathbf{b}_c . Действительно, если помеха на входе ААР отсутствует, то

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_{\text{опт}} = P_c \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c = h_{c/\text{ш}}^2 \mathbf{b}_c. \quad (4.107)$$

Определим коэффициент $\mu(j)$, при котором процесс адаптации всегда устойчив. Для этого преобразуем соотношение (4.106) аналогично градиентным алгоритмам минимизации СКО и максимизации ОСШП (4.24) и (4.89) к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(j+1) &= \mathbf{W}(j) - 2\mu(j) \mathbf{R}_{\text{шш}} [\mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}(j) - \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c = \\ &= \mathbf{W}(j) - 2\mu(j) \mathbf{R}_{\text{шш}} [\mathbf{W}(j) - \mathbf{W}_{\text{опт}}], \end{aligned} \quad (4.108)$$

где $\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}_c$ – оптимальное значение ВК для критерия ММВС.

Это выражение по форме полностью совпадает с выражением (4.24) для ВК критерия МСКО. Поэтому переходные процессы у рассматриваемого алгоритма минимизации мощности помех на выходе ААР и минимизации СКО одинаковы. Если провести все выкладки, подобно тому, как это сделано для алгоритма минимизации СКО, то получим следующее условие выбора коэффициента μ , при котором алгоритм всегда устойчив:

$$1/\lambda_{\text{max}} > \mu > 0 \quad (4.109)$$

или

$$1/P_{\text{шш}} > \mu > 0, \quad (4.110)$$

где λ_{\max} – максимальное собственное значение корреляционной матрицы помех и шумов.

Все особенности и характеристики данного алгоритма полностью совпадают с аналогичными характеристиками алгоритма минимизации СКО с единственным отличием – вместо корреляционной матрицы сигналов \mathbf{R} в алгоритме минимизации мощности помех используется корреляционная матрица помех и шумов $\mathbf{R}_{\text{шш}}$.

Алгоритм минимизации мощности помех на выходе АА на практике используется чаще, чем алгоритм максимизации ОСШП, ввиду более простой реализации. Поэтому для алгоритма минимума мощности помех приведём ряд полезных соотношений.

В процессе обработки сигналов время, отводимое на отдельную итерацию, всегда конечно. Это может привести к большой погрешности оценки корреляционной матрицы помех и шумов. На практике используют оценку корреляционной матрицы помех и шумов по мгновенным выборкам сигналов. Для такого случая алгоритм минимизации мощности помех записывается в виде:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - 2\mu(j)[\mathbf{X}_{\text{шш}}(j)\mathbf{X}_{\text{шш}}^+(j)\mathbf{W}(j) - \mathbf{b}_c]. \quad (4.111)$$

Проанализируем характеристики непрерывного варианта алгоритма минимизации мощности помех, который представляется как

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}} \mathbf{W} + \mathbf{b}_c, \quad (4.112)$$

где τ_0 – постоянная интегрирования; $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}}$ – оценка корреляционной матрицы помех и шумов.

Особенности и основные характеристики дискретных и непрерывных вариантов алгоритмов адаптации всегда совпадают. Однако между ними есть и некоторые специфические различия. Так, свойства непрерывных алгоритмов во многом зависят от полосы частот сигналов и постоянной интегрирования. Для того, чтобы изменяющиеся во времени ВК статистически не зависели от входных сигналов и шумов, постоянная интегрирования выбирается много больше времени корреляции сигналов и шумов. Только в этом случае можно получить, что среднее значение ВК в процессе адаптации стремится к оптимальным значениям. При этом ВК описываются уравнением

$$m\left(\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\right) = -m\{\tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}} \mathbf{W}\} + m\{\mathbf{b}_c\} = -\tilde{\mathbf{R}}_{\text{шш}} \mathbf{W} + \mathbf{b}_c. \quad (4.113)$$

Ввиду сложности теоретических расчётов характеристик непрерывных алгоритмов приведём только некоторые конечные результаты.

Неточная оценка матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ приводит к появлению в процессе адаптации шума градиента целевой функции и, соответственно, к флуктуации весовых коэффициентов. В установившемся режиме ВК близки к средним значениям.

Случайная составляющая ВК в свою очередь приводит к появлению дополнительного шума на выходе системы. Полная мощность шума на выходе АР определяется мощностью шумов для случая, когда ВК равны средним значениям, т. е.

$$P_{\text{шш}} = m\{\mathbf{W}^+\} \mathbf{R}_{\text{шш}} m\{\mathbf{W}\}, \quad (4.114)$$

где $m\{\mathbf{W}\}$ – среднее значение вектора ВК с учётом случайной составляющей ВК. При этом конечное выражение полной мощности шумов может быть представлено формулой [22]

$$\mathbf{R}_{\text{шш}} = \overline{\mathbf{W}^+ \mathbf{X}_{\text{шш}} \mathbf{X}_{\text{шш}}^+ \mathbf{W}} = \overline{\mathbf{W}^+} \mathbf{R}_{\text{шш}} \overline{\mathbf{W}} \left[1 + \frac{\sigma_{\text{ш}}^2 \tau_k}{4\tau_0} \text{tr} \mathbf{R}_{\text{шш}} \right], \quad (4.115)$$

где τ_k – временной интервал между последовательными независимыми выборочными значениями вектора сигналов \mathbf{X} (время корреляции сигналов); $\sigma_{\text{ш}}^2$ – дисперсия шума в каналах ААР.

Анализ последнего соотношения показывает, что полная мощность шума за счёт наличия шумов ВК в процессе адаптации увеличивается в $(1 + K_0)$ раз, где

$$K_0 \geq \frac{\sigma_{\text{ш}}^2 \tau_k}{4\tau_0} \text{tr} \mathbf{R}_{\text{шш}}. \quad (4.116)$$

Таким образом, величина K_0 характеризует влияние шума весового вектора в установившемся режиме адаптации.

Из решения уравнения (4.111) следует, что минимальная постоянная времени переходных процессов, определяемая наименьшим собственным значением λ_{\min} матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ равна величине

$$\tau_s = \tau_0 / \lambda_{\min}. \quad (4.117)$$

С учётом выражений (4.116) и (4.117) можно получить, что

$$\frac{\tau_{\text{э}}}{\tau_k} \geq \frac{\sigma_{\text{ш}}^{-2}}{4\lambda_{\min}} \frac{\text{tr}\mathbf{R}_{\text{шш}}}{K_0}. \quad (4.118)$$

Из последнего соотношения следует, что если наименьшее собственное значение λ_{\min} мало по сравнению с $\text{tr}\mathbf{R}_{\text{шш}}$, то для достижения установившегося режима при малом шуме в процессе адаптации потребуется большое время или большое число независимых выборочных значений входного сигнала. В этом случае невозможно подбором постоянных параметров алгоритма адаптации обеспечить одновременно малый уровень шума и высокую скорость сходимости. Поэтому целесообразно в процессе адаптации изменять коэффициент τ_0 , от значения которого и зависят переходные и установившиеся процессы градиентного алгоритма минимизации выходной мощности.

Рассмотрим градиентный алгоритм ММВС с линейными ограничениями вида (4.54):

$$\mathbf{W}^+\mathbf{C} = 1.$$

Градиент выходной мощности $P(P = \mathbf{W}^+\mathbf{R}\mathbf{W})$ с линейными ограничениями в общем случае описывается формулой

$$\nabla_{\mathbf{w}}J = 2\mathbf{R}\mathbf{W} + 2\lambda\mathbf{C}.$$

Итерационный градиентный алгоритм первого порядка может быть представлен выражением

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \mu[\mathbf{R}\mathbf{W} + \lambda(j)\mathbf{C}]. \quad (4.119)$$

Выполняя в дальнейшем операции, аналогичные операциям для градиентного алгоритма МСКО с линейными ограничениями (4.53), после подстановки выражения (4.119) в равенство (4.54) окончательно получим

$$\lambda(j) = -\mu^{-1}(\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}[\mathbf{C}^+\mathbf{W}(j) + \mu\mathbf{C}^+\mathbf{R}\mathbf{W}(j)] \quad (4.120)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(j+1) &= \mathbf{H}[\mathbf{W}(j) + \mu\mathbf{R}\mathbf{W}(j)] + (\mathbf{C}^+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} = \\ &= \mathbf{H}\left[\mathbf{W}(j) - \frac{1}{2}\mu\nabla_{\mathbf{w}}J_{\text{B0}}\right] + \mathbf{F}_0, \end{aligned} \quad (4.121)$$

где матрица \mathbf{H} и вектор \mathbf{F}_0 определяются по формулам (4.65) – (4.67); $\nabla_{\mathbf{w}}J_{\text{B0}} = 2\mathbf{R}\mathbf{W}$ – градиент целевой функции без ограничений (градиент выходной мощности ААР).

Общие выражения для итерационных градиентных алгоритмов МСКО (4.53) и (4.121) с линейными ограничениями, как следует из этих формул, совпадают. Кроме того, их целевые функции без ограничений являются квадратичными. Следовательно, все характеристики алгоритма ММВС (4.121) аналогичны характеристикам алгоритма МСКО (4.53).

Для достижения компромисса между скоростью сходимости и точностью установления ВК в градиентных алгоритмах необходимо изменять шаг адаптации от итерации к итерации. На каждой итерации шаг адаптации оптимизируют в градиентных методах наискорейшего спуска.

Рассмотрим некоторые разновидности алгоритмов адаптации, которые используют методы наискорейшего спуска.

4.5. Алгоритмы наискорейшего спуска

В одношаговых градиентных алгоритмах коэффициенты, определяющие длину шага адаптации, принимались постоянными. Это упрощает реализацию алгоритмов, однако приводит к большому времени адаптации или значительному уровню выходного шума.

В алгоритмах наискорейшего спуска коэффициент, определяющий длину шага, подбирается таким образом, чтобы на каждой итерации достичь оптимума в данном направлении градиента целевой функции.

Математически одношаговый градиентный метод наискорейшего спуска, положенный в основу соответствующего алгоритма, описывается в виде

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu(j)\nabla_{\mathbf{W}}J, \quad (4.122)$$

где

$$\mu(j) = \underset{\mu(j)}{\operatorname{arg\,ext}} J(\mathbf{W}(j) - \mu(j)\nabla_{\mathbf{W}}J) \quad (4.123)$$

– коэффициент, определяющий длину шага на j -й итерации; $J(\mathbf{W}(j))$ и $\nabla_{\mathbf{W}}J$ – целевая функция и её градиент по ВК. Обозначение arg означает нахождение экстремума целевой функции (в данном случае по аргументу $\mu(j)$), ext – экстремум этой функции, для критерия МСШП ext является максимумом, а для критериев МСКО и ММВС – минимумом.

Рассмотрим одношаговый градиентный алгоритм, минимизирующий мощность выходного сигнала применительно к целевой функции $J_{12}(\mathbf{W})$ [см. формулу (4.104)]

$$J_{12}(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W} - 2\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{b}_c.$$

Градиент этой функции по ВК описывается формулой

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_{12} = 2(\mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W} - \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{b}_c). \quad (4.124)$$

С целью упрощения преобразований предположим, что шумы в каналах, описываемые $\mathbf{KMR}_{\text{ш}}$, некоррелированы между собой, т. е.

$$\mathbf{R}_{\text{ш}} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N. \quad (4.125)$$

Вычислим коэффициент $\mu(j)$ на j -й итерации для функции $J_{12}(\mathbf{W})$, удовлетворяющий равенству (4.123). Для этого определим производную целевой функции в точке

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(j) - \mu(j) \nabla_{\mathbf{W}} J \quad (4.126)$$

по коэффициенту $\mu(j)$. Используя формулы (4.104) и (4.126), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu(j)} (\mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W}) - \frac{\partial}{\partial \mu(j)} 2(\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c) &= 2 \frac{\partial \mathbf{W}^+}{\partial \mu(j)} \mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W} - \frac{\partial \mathbf{W}^+}{\partial \mu(j)} \mathbf{b}_c = \\ &= -2(\nabla_{\text{ш}}^+ \mathbf{J} \mathbf{R}_{\text{ш}} (\mathbf{W}(j) - \mu(j) \nabla_{\mathbf{W}} J) - \nabla_{\text{ш}}^+ \mathbf{J} \mathbf{b}_c) = \\ &= -\{\nabla_{\text{ш}}^+ \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{W}} J - 2\mu(j) \nabla_{\text{ш}}^+ \mathbf{J} \mathbf{R}_{\text{ш}} \nabla_{\mathbf{W}} J\}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Приравняв производную функции по $\mu(j)$ нулю, получим оптимальное значение $\mu(j)$ для следующего вида:

$$\mu(j) = \frac{\nabla_{\mathbf{W}}^+ \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{W}} J}{2 \nabla_{\text{ш}}^+ \mathbf{J} \mathbf{R}_{\text{ш}} \nabla_{\mathbf{W}} J}. \quad (4.128)$$

Выразим последнее соотношение через мощности помех и шумов на выходе ААР. Для этого рассмотрим выражение для мощности помех и шумов на выходе ААР:

$$P_{\text{ш}} = \mathbf{W}^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{W}. \quad (4.129)$$

Градиент мощности помех и шумов на выходе решётки равен

$$\nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{ш}} = 2\mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{W}. \quad (4.130)$$

Градиент мощности $\nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{ш}}$ можно вычислять многими методами, которые не вызывают затруднений в практической реализации.

Из сравнения формул (4.130) и (4.124) следует, что

$$\nabla_{\mathbf{W}} J_{12}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{шш}} - 2\mathbf{b}_c. \quad (4.131)$$

Подставляя последнее соотношение в выражение (4.128), получим

$$\mu(j) = \frac{(\nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{шш}} - 2\mathbf{b}_c)^+ (\nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{шш}} - 2\mathbf{b}_c)}{2(\nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{шш}} - 2\mathbf{b}_c)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\Pi}) (\nabla_{\mathbf{W}} P_{\text{шш}} - 2\mathbf{b}_c)}. \quad (4.132)$$

Пример графической интерпретации выбора оптимального коэффициента $\mu(j)$ на каждой итерации показан на рис. 4.17.

Рассмотрим значение коэффициента $\mu(j)$ в случае воздействия на ААР одной узкополосной помехи. При этом для корреляционной матрицы ААР имеет место равенство

$$\mathbf{R}_{\Pi} = \mathbf{R}_{\Pi}^+ \mathbf{X}_{\Pi} \mathbf{X}_{\Pi}^+, \quad (4.133)$$

где \mathbf{X}_{Π} – вектор сигналов узкополосной помехи на выходах элементов решётки.

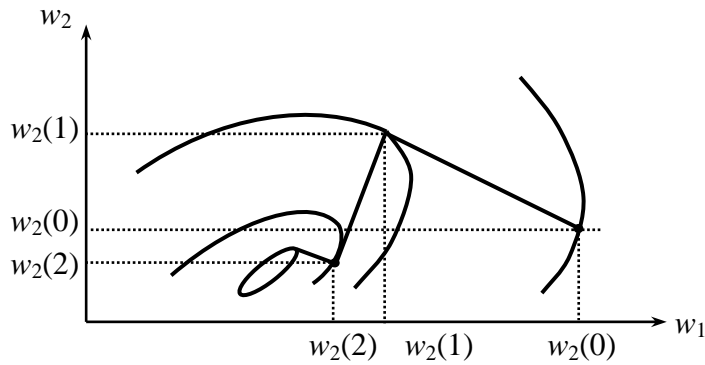


Рис. 4.17

Градиент целевой функции $J_{12}(\mathbf{W})$ в начальной точке ВК выражается формулой

$$\nabla_{\mathbf{W}(0)} J_{12} = 2\mathbf{R}_{\text{ш}} \mathbf{b}_c, \quad (4.134)$$

поэтому коэффициент $\mu(0)$ можно выразить в виде:

$$\mu(0) = [2(\sigma^2 + \text{tr}(\mathbf{R}_{\Pi}))]^{-1}. \quad (4.135)$$

Подставим последнее соотношение в равенство (4.122). Тогда с учётом формул (4.134) и (4.135) получим

$$\mathbf{W}(1) = \left(\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{X}_{\Pi} \mathbf{X}_{\Pi}^+}{\sigma^2 + \text{tr}(\mathbf{R}_{\Pi})} \right) \mathbf{W}(0), \quad (4.136)$$

где $\mathbf{W}(0) = \mathbf{b}_c$.

Воспользовавшись леммой об обращении двух матриц

$$(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}^+)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}^+\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{b}^+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}, \quad (4.137)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица размерности $N \times N$; \mathbf{b} – вектор размерности N , применительно к сумме $(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{X}_{\text{п}} \mathbf{X}_{\text{п}}^+)$, можно показать, что

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{W}_{\text{опт}}. \quad (4.138)$$

Следовательно, при воздействии на антенну одной узкополосной помехи и в отсутствие корреляции внешних шумов в каналах адаптации данный одношаговый алгоритм позволяет вычислять оптимальные ВК за одну итерацию. В общем же случае помеховой обстановки коэффициент $\mu(j)$ определяется выражением (4.132).

Рассмотрим одношаговый алгоритм наискорейшего спуска первого порядка для целевой функции критерия

$$J_{14} = |(\mathbf{R}_{\text{ш}} + \mathbf{R}_{\text{п}})\mathbf{W} - \mathbf{R}_{\text{ш}}\mathbf{b}_c|^2. \quad (4.139)$$

Для синтеза алгоритма адаптации определим производную функции J_{14} по коэффициенту $\mu(j)$:

$$\frac{\partial J_{14}}{\partial \mu(j)} = \frac{\partial \mathbf{W}^+}{\partial \mu(j)} \nabla_{\mathbf{W}} J_{14}(\mathbf{W}). \quad (4.140)$$

Из выражения (4.122) для функции J_{14} следует

$$\frac{\partial \mathbf{W}(j+1)}{\partial \mu(j)} = (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})^+ [(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})\mathbf{W}(j) - \mathbf{b}_c]. \quad (4.141)$$

Подставляя равенство (4.141) в выражение (4.140), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{14}}{\partial \mu(j)} &= [\nabla_{\mathbf{W}}^+ J_{14}(\mathbf{W}) + \\ &+ \mu(j) \nabla_{\mathbf{W}}^+ J_{14}(\mathbf{W}) 2(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})] \nabla_{\mathbf{W}} J_{14}. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Приравнявая нулю последнее равенство, можно выразить коэффициент $\mu(j)$ в виде:

$$\mu(j) = \frac{\nabla_{\mathbf{W}}^+ J_{14} \nabla_{\mathbf{W}} J_{14}(\mathbf{W})}{2 \nabla_{\mathbf{W}}^+ J_{14}(\mathbf{W}) (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \nabla_{\mathbf{W}} J_{14}(\mathbf{W})}. \quad (4.143)$$

Как и для предыдущего алгоритма, рассмотрим в качестве примера случай воздействия на ААР одной узкополосной помехи.

На первой итерации коэффициент $\mu(0)$ равен

$$\mu(0) = \frac{2\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_n (\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n) (\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n)^+ \mathbf{R}_n \mathbf{b}_c}{2\mathbf{b}_c^+ \mathbf{R}_n (\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n)^+ (\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n)^+ (\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n)^+ (\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n)^+ \mathbf{R}_n \mathbf{b}_c}. \quad (4.144)$$

Учитывая, что сомножители $\mathbf{X}_n^+ \mathbf{b}_c$ и $\mathbf{b}_c^+ \mathbf{X}_n$ являются комплексными числами, а также равенство

$$(\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_n)^+ \mathbf{R}_n \mathbf{b} = (\sigma_w^2 + \text{tr} \mathbf{R}_n) \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^+ \mathbf{b}_c, \quad (4.145)$$

можно получить, что

$$\mu(0) = [2(\sigma_w^2 + \text{tr} \mathbf{R}_n)]^{-1}. \quad (4.146)$$

Подставляя значение коэффициента $\mu(0)$ и градиента функции $J_{14}(\mathbf{W})$ в формулу (4.122), можно показать, что $\mathbf{W}(1) = \mathbf{W}_{\text{опт}}$. Следовательно при воздействии на антенну одной узкополосной помехи алгоритм (4.122) сходится за одну итерацию. В общем случае коэффициент $\mu(j)$ для критерия (4.139) определяется выражением (4.143).

Одношаговый метод является бесконечным процессом нахождения оптимальных ВК. В градиентном одношаговом методе первого порядка не используется информация, полученная на предыдущих итерациях. Одним из простейших методов, который учитывает такую информацию, является двухшаговый градиентный метод [40,41]:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \beta(j) \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{W}(j)) + \gamma(j) [\mathbf{W}(j) - \mathbf{W}(j-1)], \quad (4.147)$$

где $\beta(j)$ и $\gamma(j)$ – коэффициенты, влияющие на скорость сходимости.

Дополнительный член в правой части уравнения (4.147) учитывает инерцию движения переходного процесса. Во многих случаях введение этого слагаемого приводит к ускорению сходимости. Это наглядно показано на рис. 4.18, на котором сплошной линией показана траектория движения ВК для двухшагового градиентного метода и пунктирной линией – для одношагового метода. Вместо зигзагообразного движения ВК при использовании одношагового градиентного метода, в случае двухшагового метода получается более плавная кривая. Данный метод часто в связи с этим называют методом «тяжёлого шарика».

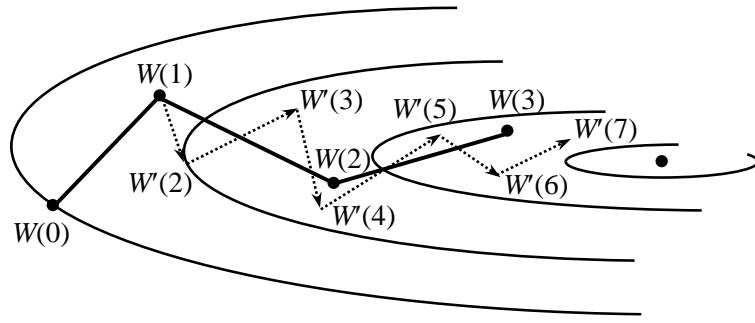


Рис. 4.18

Рассмотрим двухшаговые градиентные алгоритмы минимизации мощности выходного сигнала. Целевая функция, описывающая мощность выходного сигнала, является квадратичной. Для любых квадратичных функций алгоритм (4.147) всегда устойчив, если коэффициенты выбираются из условий

$$1/P > \beta > 0 \quad (4.148)$$

и

$$1 > \gamma > 0. \quad (4.149)$$

Для оптимизации этого алгоритма по скорости сходимости необходимо коэффициенты $\beta(j)$ и $\gamma(j)$ находить из условия минимизации целевой функции на каждой итерации:

$$\{\beta(j), \gamma(j)\} = \arg \min_{\beta(j), \gamma(j)} \{J[\mathbf{W}(j) - \beta(j)\nabla_{\mathbf{w}}J(\mathbf{W}(j)) + \gamma(j)[\mathbf{W}(j) - \mathbf{W}(j-1)]]\}. \quad (4.150)$$

Вычислим оптимальные значения $\beta(j)$ и $\gamma(j)$. Для этого определим частные производные из соотношения (4.147):

$$\frac{\partial \mathbf{W}(j+1)}{\partial \beta(j)} = -\nabla_{\mathbf{w}} J; \quad (4.151)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}(j+1)}{\partial \gamma(j)} = \mathbf{W}(j) - \mathbf{W}(j-1) = \mathbf{g}(j). \quad (4.152)$$

Производная целевой функции по $\beta(j)$ определяется выражением

$$\frac{\partial J[\mathbf{W}(j+1)]}{\partial \beta(j)} = \frac{\partial \mathbf{W}^+(j+1)}{\partial \beta(j)} \nabla_{\mathbf{w}} J[\mathbf{W}(j+1)]. \quad (4.153)$$

Производная этой же целевой функции по $\gamma(j)$ имеет вид:

$$\frac{\partial J[\mathbf{W}(j+1)]}{\partial \gamma(j)} = \frac{\partial \mathbf{W}^+(j+1)}{\partial \gamma(j)} \nabla_{\mathbf{W}} J[\mathbf{W}(j+1)]. \quad (4.154)$$

Подставив в соотношения (4.153) и (4.152) значения производных и градиентов целевой функции (4.104) и приравняв затем эти выражения нулю, можно получить оптимальные коэффициенты $\beta(j)$ и $\gamma(j)$ в следующей форме:

$$\beta(j) = \frac{\nabla_{\mathbf{W}}^+ J(j) \nabla_{\mathbf{W}} J(j) \mathbf{g}(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{g}(j)}{2\nu(j)} - \frac{\mathbf{g}(j)^+ \nabla_{\mathbf{W}} J(j) \nabla_{\mathbf{W}} J(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{g}(j)}{2\nu(j)}; \quad (4.155)$$

$$\gamma(j) = \frac{\nabla_{\mathbf{W}}^+ J(j) \nabla_{\mathbf{W}} J(j) \mathbf{g}(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \nabla_{\mathbf{W}} J(j)}{2\nu(j)} - \frac{\mathbf{g}(j)^+ \nabla_{\mathbf{W}} J(j) \nabla_{\mathbf{W}} J(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \nabla_{\mathbf{W}} J(j)}{2\nu(j)}, \quad (4.156)$$

где

$$\nu(j) = \mathbf{g}(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{g}(j) + \nabla_{\mathbf{W}}^+ J(j) (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \nabla_{\mathbf{W}} J(j) - [\mathbf{g}(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \nabla_{\mathbf{W}} J(j)]^2; \quad \nabla_{\mathbf{W}} J(j) = \nabla_{\mathbf{W}} J[\mathbf{W}(j)].$$

Полученные значения для коэффициентов $\beta(j)$ и $\gamma(j)$ двухшагового алгоритма наискорейшего спуска позволяют за минимальное для данного метода число итераций вычислять оптимальные ВК. Заметим, что здесь рассматривается случай обработки стационарных сигналов. При этом данный метод оптимизации для квадратичных целевых функций принципиально является конечным. Максимальное число итераций составляет N , где N – размерность вектора ВК.

В адаптивных алгоритмах используется оценка матрицы помех $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{п}}$. Это приводит к тому, что за N итераций ВК достигают своего оптимального значения с заданной точностью, которая зависит от точности оценки матрицы $\mathbf{R}_{\text{п}}$. В дальнейшем соотношение между точностью оценки $\mathbf{R}_{\text{п}}$ и точностью достижения оптимума целевой функции будет определено.

Двухшаговые градиентные алгоритмы обладают лучшей сходимостью по сравнению с одношаговыми алгоритмами. Особенно это проявляется в случае, когда сигнално-помеховая обстановка сложная или отношение максимального собственного значения λ_{max} КМ помех к минимальному λ_{min}

достаточно велико. При этом двухшаговый алгоритм даёт выигрыш примерно в $\sqrt{\lambda_{\max} / \lambda_{\min}}$ раз.

С вычислительной точки зрения двухшаговый алгоритм немногим сложнее одношагового.

Непрерывная форма двухшагового градиентного метода имеет вид:

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = -\nabla_{\mathbf{W}} J - 2\alpha_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}, \quad (4.157)$$

где τ_0 и α_0 – постоянные числа, влияющие на устойчивость и скорость сходимости метода.

4.6. Алгоритмы сопряжённых градиентов и сопряжённых направлений

В двухшаговом градиентном алгоритме минимизации мощности выходного сигнала для учёта предыстории процесса адаптации учитывались значения ВК на предыдущей итерации. Существуют также другие методы учёта предыстории адаптивного процесса с целью ускорения его сходимости. К таким методам относится метод сопряжённых градиентов. Данный метод предполагает учёт на каждой итерации текущего и предыдущего значений градиента целевой функции. При этом выбор коэффициентов, определяющих длину шага, оптимизируется по скорости сходимости.

В общем виде метод сопряжённых градиентов представляется формулой

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + v(j)\mathbf{g}(j-1), \quad (4.158)$$

где

$$\mathbf{g}(j) = -\nabla_{\mathbf{W}} J(j) + \xi(j)\mathbf{g}(j-1);$$

$$\xi(j) = |\nabla_{\mathbf{W}} J(j)|^2 / |\nabla_{\mathbf{W}} J(j-1)|^2; \quad \xi(0) = 0;$$

$$v(j) = \underset{v(j)}{\operatorname{arg\,ext}} J[\mathbf{W}(j) + v(j)\mathbf{g}(j-1)].$$

Рассмотрим в качестве примера использования этого метода алгоритм сопряжённых градиентов минимизации мощности выходного сигнала.

Для квадратичной функции $J_{12}(\mathbf{W})$ в алгоритме сопряжённых градиентов (4.158) направления $\mathbf{g}(j)$ удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{g}(l)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{g}(j) = 0 \quad \text{при } l \neq j, \quad (4.159)$$

т. е. векторы $\mathbf{g}(j)$ сопряжены с матрицей $(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})$. Отсюда происходит и название алгоритма.

Для оптимизации коэффициента $\nu(j)$ можно использовать метод наискорейшего спуска, в соответствии с которым для целевой функции J_{12} (4.104):

$$\nu(j) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{g}(j)^+ \nabla_{\mathbf{w}} J_{12}(j)}{\mathbf{g}(j)^+ (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{g}(j)}. \quad (4.160)$$

Главным недостатком алгоритмов сопряжённых градиентов, а также алгоритмов наискорейшего спуска является необходимость использования корреляционной матрицы помех и шумов. Все алгоритмы сопряжённых градиентов для целевой функции (4.104) являются конечными и сходятся к экстремальной точке максимума за N итераций.

Перейдём далее к алгоритму сопряжённых направлений [41]. По форме записи он аналогичен алгоритму сопряжённых градиентов (4.158). Отличие состоит в условиях ортогонализации векторов на каждой итерации. Это приводит к другим значениям ВК на каждой итерации. Однако все остальные особенности и характеристики алгоритма сопряжённых направлений такие же, как и алгоритма сопряжённых градиентов.

Применительно к ВК алгоритм сопряжённых направлений записывается в виде

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \alpha(j) \mathbf{h}(j), \quad (4.161)$$

где $\alpha(j) = \arg \min_{\alpha(j)} J[\mathbf{W}(j) + \alpha(j) \mathbf{h}(j)]$.

В этом алгоритме выполняется условие ортогональности векторов

$$\mathbf{h}^+(j+1) \mathbf{Z}(j) = 0, \quad (4.162)$$

где векторы определяются формулами:

$$\mathbf{h}(j) = -\mathbf{B}(j) \nabla_{\mathbf{w}} J(j); \quad (4.163)$$

$$\mathbf{Z}(j) = \nabla_{\mathbf{w}} J[\mathbf{W}(j+1) - \nabla_{\mathbf{w}} J(j)]; \quad (4.164)$$

$\mathbf{B}(j)$ – некоторая матрица.

Подвергая такому процессу ортогонализации любую совокупность линейно независимых векторов, получим различные наборы сопряжённых направлений.

Для функции (4.104) алгоритм сопряжённых направлений принимает вид, аналогичный описанному в работе [41]

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \alpha(j)\mathbf{h}(j), \quad (4.165)$$

где

$$\alpha(j) = -\mathbf{h}^+(j)\nabla_{\mathbf{w}}J_{12}(j)[\mathbf{h}^+(j)(\sigma_{\text{ш}}^2\mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})\mathbf{h}(j)]^{-1};$$

$$\mathbf{h}(j) = -\mathbf{B}(j)\nabla_{\mathbf{w}}J_{12}(j);$$

$$\mathbf{Z}(j) = \nabla_{\mathbf{w}}J_{12}[\mathbf{W}(j+1) - \nabla_{\mathbf{w}}J_{12}(j)];$$

$$\mathbf{B}(j+1) = \mathbf{B}(j) - \frac{\mathbf{B}(j)\mathbf{Z}(j)\mathbf{Z}^+(j)\mathbf{B}(j)}{\mathbf{Z}^+(j)\mathbf{B}(j)\mathbf{Z}(j)};$$

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{I}_N.$$

Несомненным достоинством данного алгоритма является сходимость для квадратичных функций за конечное число шагов, а также то, что для определения оптимальных ВК не используется информация, снимаемая с выходов элементов ААР.

4.7. Алгоритмы адаптации второго порядка

Алгоритмы второго порядка используют значения вторых производных целевых функций: Поэтому целевые функции при построении алгоритмов второго порядка должны быть дважды дифференцируемы.

Алгоритмы второго порядка называют часто алгоритмами Ньютона. Они используют следующую процедуру расчёта ВК:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu[\nabla_{\mathbf{w}}^2 J]^{-1}\nabla_{\mathbf{w}}J, \quad (4.166)$$

где $\nabla_{\mathbf{w}}^2 J$ – матрица вторых производных целевой функции.

Известно, что для квадратичных функций алгоритмы Ньютона сходятся за одну итерацию [41].

Рассмотрим алгоритм (4.166) при использовании функции (4.104). Матрица вторых производных данной функции описывается выражением

$$\nabla_{\mathbf{w}}^2 J = 2(\sigma_{\text{ш}}^2\mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}). \quad (4.167)$$

Следовательно, с учётом того, что градиент этой функции имеет вид (4.124), получим следующий алгоритм Ньютона для обработки стационарных сигналов:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \mu(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})^{-1} [(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{W}(j) - P_c \mathbf{b}_c]. \quad (4.168)$$

Если учесть, что $\mathbf{W}(0) = \mathbf{b}_c$, и принять $\mu = 1$, то из выражения (4.168) можно получить

$$\mathbf{W}(1) = (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}})^{-1} P_c \mathbf{b}_c. \quad (4.169)$$

Это выражение совпадает с вектором оптимальных ВК (4.136).

Недостатком алгоритма Ньютона является необходимость получения корреляционной матрицы помех и шумов и дальнейшее её обращение. Поэтому рассмотрим далее быстродействующие алгоритмы, для реализации которых нет необходимости применения корреляционной матрицы помех и шумов. Это обстоятельство позволяет значительно упростить практическую реализацию алгоритмов обработки стационарных сигналов.

4.8. Квазиньютоновские алгоритмы

В основу построения квазиньютоновских методов положена идея восстановления (квадратичной аппроксимации) функции по значениям её градиентов в ряде точек. Алгоритмы этого метода объединяют в себе достоинства одношаговых методов первого и второго порядков.

Общая структура квазиньютоновских алгоритмов записывается следующим образом [41]

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) - \beta(j) \mathbf{B}(j) \nabla_{\mathbf{w}} J, \quad (4.170)$$

где $\beta(j)$ – коэффициент, определяющий сходимость алгоритма на j -й итерации; $\mathbf{B}(j)$ – матрица, пересчитываемая рекуррентным способом на основе информации, полученной на j -й итерации.

Матрица $\mathbf{B}(j)$ вычисляется таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \{ \mathbf{B}(j) - [\nabla_{\mathbf{w}}^2 J(j)]^{-1} \} \rightarrow 0. \quad (4.171)$$

С учётом соотношений для $\mathbf{Z}(j)$ и $\mathbf{h}(j)$ [см. формулу (4.165)] для целевой функции (4.104) можно записать:

$$\mathbf{Z}(j) = 2(\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) [\mathbf{W}(j+1) - \mathbf{W}(j)] = 2\beta(j) (\sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{R}_{\text{п}}) \mathbf{h}(j). \quad (4.172)$$

Так как матрица вторых производных целевой функции (4.104) имеет вид (4.167), то потребуем, чтобы для нового приближения $\mathbf{B}(j+1)$ к $x \nabla_{\mathbf{w}}^2 J(j)]^{-1}$ выполнялось условие

$$\mathbf{B}(j+1) \mathbf{Z}(j) = \beta(j) \mathbf{h}(j). \quad (4.173)$$

Это условие следует из уравнения (4.172). В зависимости от разновидности формул пересчёта матриц $\mathbf{B}(j+1)$ различают несколько алгоритмов: Давидона – Флетчера – Пауэлса, Бройдена и Бройдена – Флетчера – Шенно. Например, алгоритм Давидона – Флетчера – Пауэлса будет иметь вид [41]

$$\mathbf{B}(j+1) = \mathbf{B}(j) - \frac{\mathbf{B}(j)\mathbf{Z}(j)\mathbf{Z}^+(j)\mathbf{B}(j)}{\mathbf{Z}^+(j)\mathbf{B}(j)\mathbf{Z}(j)} + \beta(j) \frac{\mathbf{h}(j)\mathbf{h}^+(j)}{\mathbf{h}^+(j)\mathbf{h}(j)}. \quad (4.174)$$

Градиент функции (4.104) определяется равенством (4.124). Из этого следует, что для реализации квазиньютоновских алгоритмов при обработке сигналов в ААР необходимо вычислять только градиент мощности помех и шумов на выходе ААР. При этом в процессе адаптации должна храниться информация о матрице $\mathbf{B}(j)$ и значениях градиента на двух итерациях процесса адаптации.

Все квазиньютоновские алгоритмы сходятся к оптимальной точке так же, как и алгоритмы сопряженных градиентов для квадратичных целевых функций, максимум за N итераций.

4.9. Оптимизация сходимости градиентных алгоритмов адаптации первого порядка

Одним из существенных недостатков градиентных алгоритмов является невысокое быстродействие в случае вырожденной корреляционной матрицы помех, т. е. когда разброс собственных значений λ_n чрезвычайно велик. Эффективным способом повышения скорости сходимости является оптимизация коэффициента, определяющего длину шага на каждой итерации. Ранее были определены условия выбора этого коэффициента исходя из устойчивости процесса адаптации. Остановимся на вопросе оптимального выбора данного коэффициента применительно к типичному случаю квадратичной целевой функции.

Пусть имеется целевая функция вида

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{W}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} - P_c \mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c.$$

Градиент такой функции определяется известным выражением

$$\nabla_{\mathbf{W}} J = \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W} - P_c \mathbf{b}_c.$$

Оптимальные ВК в данном случае определяются по формуле

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = h_{c/\text{ш}}^2 \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} \mathbf{b}_c.$$

Запишем первую итерацию градиентного алгоритма первого порядка в самом общем случае:

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{W}(0) - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\text{min}}P_c\mathbf{b}_c, \quad (4.175)$$

где \mathbf{B} – произвольная матрица размера $N \times N$.

Для оптимизации сходимости поставим условие выбора такой матрицы \mathbf{B} , чтобы на первой итерации процесс адаптации сошёлся к оптимальному значению. Получим

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{W}(0) - \mathbf{B}(\mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{W}(0) - P_c\mathbf{b}_c) = h_{c/\text{ш}}^2\mathbf{R}_{\text{min}}^{-1}\mathbf{b}_c, \quad (4.176)$$

где $\mathbf{W}(0) = \mathbf{b}_c$.

Последовательно преобразуем последнее равенство:

$$\mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{b}_c - \mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{B}(\mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{b}_c - P_c\mathbf{b}_c) = P_c\mathbf{b}_c;$$

$$\mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{b}_c - P_c\mathbf{b}_c = \mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{B}(\mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{b}_c - P_c\mathbf{b}_c);$$

$$\nabla_{\mathbf{W}}J = \mathbf{R}\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{W}}J. \quad (4.177)$$

На практике встречаются три варианта выбора матрицы сходимости \mathbf{B} . В первом случае \mathbf{B} – это полная матрица $N \times N$, во втором – диагональная матрица, а в третьем – скалярное число. Естественно, что наиболее полно можно учесть все особенности градиента целевой функции и оптимизировать сходимость в случае, когда \mathbf{B} имеет вид матрицы.

Остановимся на этих трёх случаях более подробно. Если \mathbf{B} – это полная матрица размера $N \times N$, то, как видно из равенства (4.177),

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_{\text{min}}^{-1}. \quad (4.178)$$

Подставим это значение \mathbf{B} в формулу (4.175) и получим

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{b}_c - \mathbf{R}_{\text{min}}^{-1}(\mathbf{R}_{\text{min}}\mathbf{b}_c - P_c\mathbf{b}_c) = h_{c/\text{ш}}^2\mathbf{R}_{\text{min}}^{-1}\mathbf{b}_c. \quad (4.179)$$

Следовательно, если матрица \mathbf{B} удовлетворяет равенству (4.178), то итерационный процесс (4.175) сходится к оптимальным значениям на первой итерации.

Пусть теперь матрица \mathbf{B} – диагональная. В этом случае необходимо решать на каждой итерации систему уравнений (4.177). Проанализируем сначала уравнение (4.175), когда матрица \mathbf{B} – полная квадратная. При этом матрица \mathbf{B} воздействует на каждый из элементов градиента в отдельности с целью оптимизировать сходимость. Заметим, что диагональная матрица \mathbf{B} , например

$$\mathbf{B}_d = \begin{vmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_N \end{vmatrix},$$

также воздействует как некоторый спектр на каждый из элементов градиента в отдельности. Следовательно, можно предположить, что в итерационном алгоритме (4.175) полная матрица $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{\text{мш}}^{-1}$ и диагональная матрица \mathbf{B}_d каким-то образом связаны друг с другом и обеспечивают сходимость алгоритма (4.175) на первой итерации.

Рассмотрим алгоритм (4.175) с матрицей $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{\text{мш}}^{-1}$:

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{b}_c - \mathbf{R}_{\text{мш}}^{-1} (\mathbf{R}_{\text{мш}} \mathbf{b}_c - P_c \mathbf{b}_c). \quad (4.180)$$

Преобразуем последнее выражение к виду

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{b}_c \nabla_{\mathbf{w}} J_d \{ \nabla_{\mathbf{w}} J_d \}^{-1} \mathbf{R}_{\text{мш}}^{-1} \nabla_{\mathbf{w}} J, \quad (4.181)$$

где $\nabla_{\mathbf{w}} J_d$ – диагональная матрица

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_d = \begin{vmatrix} \nabla_{\mathbf{w}} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \nabla_{\mathbf{w}} J_N \end{vmatrix},$$

для которой справедливо тождество

$$\nabla_{\mathbf{w}} J_d (\nabla_{\mathbf{w}} J_d)^{-1} = \mathbf{I}_N.$$

Элементы матрицы $\nabla_{\mathbf{w}} J_d$ являются элементами вектора $\nabla_{\mathbf{w}} J_d$. Сравним далее вектор ВК, определяемый выражением (4.181), с вектором ВК (4.175), т. е. когда матрица \mathbf{B} диагональна ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_d$). Для этого перепишем выражение (4.175) в виде:

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{b}_c - \mathbf{B}_d \nabla_{\mathbf{w}} J_d = \mathbf{b}_c - \nabla_{\mathbf{w}} J_d \mathbf{b}^T, \quad (4.182)$$

где $\mathbf{b}^T = |b_1, \dots, b_N|$ – вектор, составляющими которого являются диагональные элементы матрицы \mathbf{B}_d .

Из сопоставления выражений (4.181) и (4.182) следует:

$$\mathbf{b} = \{ \nabla_{\mathbf{w}} J_d \}^{-1} \mathbf{R}_{\text{мш}}^{-1} \nabla_{\mathbf{w}} J. \quad (4.183)$$

Следовательно, все элементы матрицы \mathbf{B}_d (элементы вектора \mathbf{b}) однозначно определяются по формуле (4.183) и зависят от корреляционной матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ и градиента $\nabla_{\mathbf{w}} J_d$.

Таким образом, повышение сходимости адаптивного алгоритма (4.175) за счёт оптимизации матрицы \mathbf{B} или диагональной матрицы \mathbf{B}_d приводит к одному и тому же результату, а именно, нахождению экстремума за одну итерацию.

Если \mathbf{B} является скаляром, например $\mathbf{B} = \mu$, то из уравнения (4.177) можно получить

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = \mu \mathbf{R}_{\text{шш}} \nabla_{\mathbf{w}} J,$$

откуда

$$\mu = \frac{\nabla_{\mathbf{w}}^+ J \nabla_{\mathbf{w}} J}{\nabla_{\mathbf{w}}^+ J \mathbf{R}_{\text{шш}} \nabla_{\mathbf{w}} J}. \quad (4.184)$$

Уравнение (4.177) можно использовать в целях оптимизации скорости сходимости итеративной процедуры (4.175) для некоторых частных случаев матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$, например когда $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ – диагональная матрица. Такая форма записи матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ имеет место в случае прихода ортогональных по пространству помех. При этом получим, что \mathbf{B} должна быть диагональной матрицей с элементами:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{R}_{\text{шш} ii}^{-1}. \quad (4.185)$$

На практике подобная форма представления матрицы $\mathbf{R}_{\text{шш}}$, приближённо имеет место в многолучёвых антеннах, когда помехи воздействуют на антенну по разным лучам.

До сих пор в данном параграфе рассматривалась оптимизация сходимости дискретных представлений алгоритмов адаптации. Перейдём теперь к анализу оптимизированных по сходимости градиентных алгоритмов в непрерывной форме.

Пусть дискретный градиентный алгоритм минимизации выходной мощности с оптимизацией сходимости описывается выражением (4.180):

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{W}(0) - \mathbf{R}_{\text{шш}}^{-1} [\mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{W}(0) - \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{V}_c]. \quad (4.186)$$

Если использовать критерий МСКО, то аналогичный алгоритм записывается в форме

$$\mathbf{W}(1) = \mathbf{W}(0) - \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{R} \mathbf{W}(0) - \mathbf{R}_{xd}]. \quad (4.187)$$

Остановимся более подробно на последнем соотношении. Путём предельного перехода от дискретного алгоритма к непрерывному выражение (4.187) преобразовывается к виду:

$$\tau_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{W} - \mathbf{R}_{xd}), \quad (4.188)$$

где τ_0 – постоянная интегрирования.

Переходный процесс алгоритма (4.188) при воздействии сигналов и помех в виде единичного скачка определяется выражением

$$\mathbf{W}(t) = [\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}(\infty)]e^{-t/\tau_0} + \mathbf{W}(\infty), \quad (4.189)$$

где $\mathbf{W}(0) = \mathbf{b}_c$; $\mathbf{W}(\infty) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{xd}$.

Анализ последнего алгоритма показывает, что скорость сходимости определяется только параметром τ_0 и не зависит от характеристик сигналов и помех.

Таким образом, оптимизация сходимости дискретных градиентных алгоритмов первого порядка приводит в идеальном случае к получению оптимальных ВК за одну итерацию. В непрерывном варианте данного алгоритма оптимизация по скорости сходимости означает то, что скорость процесса адаптации оказывается постоянной. Она определяется только параметрами алгоритма (постоянной интегрирования) и не зависит от параметров и характеристик воздействующих на антенну сигналов и помех.

4.10. Алгоритмы случайного поиска

Алгоритмы, реализующие метод случайного поиска, обеспечивают нахождение глобального экстремума как для одноэкстремальных, так и многоэкстремальных целевых функций. Такие алгоритмы просты в реализации, требуют малого объёма вычислений и нечувствительны к разрывам целевых функций, нелинейностям и нестабильностям фидерного тракта.

Методы случайного поиска очень разнообразны. Обычно их подразделяют на направленные и ненаправленные в зависимости от того, используется или нет информация о предыдущих шагах адаптации [22, 42].

Рассмотрим наиболее простой вариант случайного поиска – линейный случайный поиск применительно к целевой функции минимизации СКО (2.36). Согласно этому методу в начале каждой итерации к ВК прибавляется некоторое случайное приращение $\Delta \mathbf{W}(j)$ и определяется соответствующее

изменение целевой функции СКО. Затем пропорционально произведению изменения оценки СКО и случайного приращения $\Delta \mathbf{W}(j)$ изменяется вектор ВК:

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \mu \{ \tilde{J}_1(j) \} - \{ \tilde{J}_1(j) [\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j)] \} \Delta \mathbf{W}(j), \quad (4.190)$$

где знак « \sim » означает оценку СКО на j -й итерации.

Составляющие случайного вектора $\Delta \mathbf{W}(j)$ обычно характеризуются нормальным законом распределения с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_{\text{ш}}^2$. Константы μ и $\sigma_{\text{ш}}^2$, выбираются из условий устойчивости и сходимости алгоритма.

Обозначим ошибку в оценке изменения функции МСКО на j -й итерации в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(j) = & \{ J_1[\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j)] - J_1[\mathbf{W}(j)] - \\ & - \{ \tilde{J}_1(j) [\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j)] \} - \tilde{J}_1(j) [\Delta \mathbf{W}(j)] \}, \end{aligned} \quad (4.191)$$

где J_1 – истинное значение СКО; \tilde{J}_1 – оценка СКО на данной итерации.

Будем считать, что оценка СКО получается в результате усреднения независимых отсчётов. В этом случае дисперсия ошибки определяется выражением [22]

$$\text{cov}\{\varepsilon^2(j)\} = \frac{2}{I} \{ J_1^2[\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j)] + J_1^2[\mathbf{W}(j)] \}, \quad (4.192)$$

где I – число независимых выборок, используемых для нахождения оценки $\tilde{J}(\mathbf{W})$.

В установившемся режиме, когда процесс подстройки ВК происходит в окрестностях точки минимума целевой функции, значение дисперсии близко к

$$\text{cov}\{\varepsilon^2(j)\} = \frac{4}{I} J_{1 \min}^2, \quad (4.193)$$

где $J_{1 \min}$ – минимальное значение СКО.

Случайные изменения весового вектора при обработке в соответствии с алгоритмом линейного случайного поиска приводят к изменению СКО.

Для j -й итерации среднее превышение СКО, возникающее в результате изменения весового вектора, определяется как

$$m \left\{ J_1(\mathbf{W}(j)) - \frac{J_1[\mathbf{W}(j)] + J_1[\mathbf{W}(j) + \Delta \mathbf{W}(j)]}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} m \{ J_1[\mathbf{W}(j)] - J_1[\mathbf{W}(j) + \Delta\mathbf{W}(j)] \}. \quad (4.194)$$

Вектор $\Delta\mathbf{W}(j)$ имеет нулевое среднее значение и не коррелирован с $\mathbf{W}(j)$. В окрестности точки экстремума для СКО справедлива формула

$$J_1(\mathbf{W}_{\text{опт}} + \Delta\mathbf{W}) = J_{1\text{min}} + \Delta\mathbf{W}^+ \mathbf{R} \Delta\mathbf{W}. \quad (4.195)$$

Тогда в ортонормированной системе координат среднее превышение СКО представляется в виде:

$$\frac{1}{2} m \{ \Delta\mathbf{W}^+(j) \mathbf{R} \Delta\mathbf{W}(j) \} = \frac{1}{2} m \{ \Delta\hat{\mathbf{W}}^+(j) \Lambda \Delta\hat{\mathbf{W}}(j) \}. \quad (4.196)$$

Учитывая, что

$$\text{cov}\{\Delta\mathbf{W}(j)\} = \text{cov}\{\Delta\hat{\mathbf{W}}(j)\} = \sigma_{\text{ш}}^2 \mathbf{I}_N,$$

получим

$$\frac{1}{2} m \{ \Delta\mathbf{W}^+(j) \mathbf{R} \Delta\mathbf{W}(j) \} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{ш}}^2 \text{tr} \mathbf{R}. \quad (4.197)$$

Определим возмущение P_p целевой функции как отношение среднего значения СКО (являющегося следствием случайных приращений ВК) к минимальной СКО. Тогда

$$P_p = \frac{\sigma_{\text{ш}}^2 \text{tr} \mathbf{R}}{J_{1\text{min}}}. \quad (4.198)$$

Рассмотрим далее устойчивость алгоритма линейного случайного поиска, реализующего критерий МСКО.

Перепишем уравнение (4.190) с учётом соотношения (4.191). Получим

$$\mathbf{W}(j+1) = \mathbf{W}(j) + \mu \{ \varepsilon^2(j) - \Delta J_1(j) \} \Delta\mathbf{W}(j), \quad (4.199)$$

где $\Delta J_1(j) = J_1[\mathbf{W}(j) + \Delta\mathbf{W}(j)] - J_1[\mathbf{W}(j)]$.

Вектор ошибок ВК, как и ранее, обозначим

$$\mathbf{V}_{\mathbf{w}}(j) = \mathbf{W}(j) - \mathbf{W}_{\text{опт}}.$$

Тогда уравнение (4.199) можно представить в виде

$$\mathbf{V}_{\mathbf{w}}(j+1) = \mathbf{V}_{\mathbf{w}}(j) + \mu \{ \varepsilon^2(j) - \Delta J_1(j) \} \Delta\mathbf{W}(j). \quad (4.200)$$

Поскольку на практике оказывается, что возмущения ВК $\Delta\mathbf{W}(j)$ много меньше значений ВК $\Delta\mathbf{W}(j)$, то функцию СКО можно аппроксимировать линейным членом в области И(Л)- Тогда получим:

$$\Delta J_1(j) = \Delta\mathbf{W}^+(j)\nabla_{\mathbf{W}}J(j). \quad (4.201)$$

Так как истинное значение градиента [см.формулу (4.4)]

$$\nabla_{\mathbf{W}}J(j) = -2\mathbf{R}_{xd} + 2\mathbf{R}(\mathbf{W}_{\text{опт}} + \mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j)) = 2\mathbf{R}\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j), \quad (4.202)$$

то выражение (4.200) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(j+1) &= \mathbf{V}(j) + \mu\Delta\mathbf{W}(j)(-2\Delta\mathbf{W}^+(j)\mathbf{R}\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j) + \varepsilon^2(j)) = \\ &= [\mathbf{I}_N - 2\mu\Delta\mathbf{W}(j)\Delta\mathbf{W}^+(j)\mathbf{R}]\mathbf{V}_{\mathbf{W}}(j) + \mu\varepsilon^2(j)\Delta\mathbf{W}(j). \end{aligned} \quad (4.203)$$

Форма записи (4.203) подчёркивает тот факт, что вектор ошибок ВК рассматривается как решение векторного линейного разностного уравнения первого порядка со случайно изменяющимся коэффициентом $[\mathbf{I}_N - 2\mu\Delta\mathbf{W}(j)\Delta\mathbf{W}^+(j)\mathbf{R}]$ и случайной возбуждающей функцией $\mu\varepsilon^2(j)\Delta\mathbf{W}(j)$.

Для анализа переходного процесса уравнение (4.203) удобно представить в ортонормированной системе координат, умножив обе части равенства слева на матрицу преобразований \mathbf{Q}^+ . В результате получим:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j+1) = [\mathbf{I}_N - 2\mu\Delta\hat{\mathbf{W}}(j)\Delta\hat{\mathbf{W}}^+(j)\Lambda]\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j) + \mu\varepsilon^2(j)\Delta\hat{\mathbf{W}}(j). \quad (4.204)$$

Решение уравнения (4.204) затрудняется тем, что матричный коэффициент при $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)$ имеет недиагональный вид. В этой связи условия устойчивости для алгоритма линейного случайного поиска определим на основе анализа среднего значения ВК. Для этого вычислим математическое ожидание обеих частей уравнения (4.204). Учтём, что $\Delta\hat{\mathbf{W}}(j)$ является случайным вектором, некоррелированным с $\varepsilon^2(j)$ и $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j+1)\} &= [\mathbf{I}_N - 2\mu m\{\Delta\hat{\mathbf{W}}(j)\Delta\hat{\mathbf{W}}^+(j)\}\Lambda]m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)\} = \\ &= (\mathbf{I}_N - 2\mu\sigma_{\mathbf{W}}^2\Lambda)m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)\}. \end{aligned} \quad (4.205)$$

Выражение (4.205) можно переписать через начальные векторы $\Delta\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(0)$:

$$m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(j)\} = (\mathbf{I}_N - 2\mu\sigma_{\mathbf{W}}^2\Lambda)^j \Delta\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{W}}(0). \quad (4.206)$$

Уравнение (4.206) характеризует процесс адаптации. Следовательно, математическое ожидание $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}$ должно стремиться к нулю. Из равенства (4.206) вытекает условие устойчивости:

$$1 > 2\mu\sigma_{\mathbf{w}}^2\lambda_{\max} > 0, \quad (4.207)$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} > 2\mu\sigma_{\mathbf{w}}^2 > 0. \quad (4.208)$$

Если произведение $\mu\sigma_{\mathbf{w}}^2$ выбрано так, чтобы выполнялись условия (4.208), то

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \{\Delta \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}(j)\} = 0. \quad (4.209)$$

Поскольку характер переходного процесса алгоритма линейного случайного поиска аналогичен характеру процесса при использовании градиентных методов первого порядка, то по аналогии можно утверждать, что постоянная времени n -й составляющей среднего значения ВК в ортонормированной системе координат будет равна

$$\tau_n = \frac{1}{\mu\sigma_{\mathbf{w}}^2\lambda_n}. \quad (4.210)$$

При выполнении условий устойчивости (4.207) обеспечивается сходимость только математического ожидания ВК. При этом флуктуации вектора ВК могут быть значительными. Известно, что ковариационная матрица $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}$ может быть описана равенством [22]:

$$\text{cov}\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}(j)\} = \frac{\mu}{I} J_{1\min}^2 \mathbf{\Lambda}^{-1}. \quad (4.211)$$

Рассогласование при использовании алгоритма линейного случайного поиска, реализующего критерий МСКО, может быть найдено на основе рассмотрения среднего превышения СКО [обусловленного шумом ВК в соответствии с формулой (4.195):

$$m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}^+(j)\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_{\mathbf{w}}(j)\} = \sum_{n=1}^N \lambda_n m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}^+(j)\mathbf{V}_{\mathbf{w}}(j)\}. \quad (4.212)$$

Используя выражения для ковариации $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}(j)$ (4.211), получим:

$$m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}^+(j)\Lambda\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}(j)\} = \sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{\mu J_{1\min}}{I\lambda_n} = \frac{N\mu J_{1\min}^2}{I}. \quad (4.213)$$

Тогда рассогласование M_p принимает значение

$$M_p = \frac{m\{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}^+(j)\Lambda\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{w}}(j)\}}{J_{1\min}} = \frac{N\mu}{I} J_{1\min}. \quad (4.214)$$

Поскольку полное рассогласование характеризуется случайной M_p и детерминированной P_p составляющими, то окончательно получим:

$$M_{\text{пр}} = M_p + P_p = \frac{N\mu}{I} J_{1\min} + \frac{\sigma_{\mathbf{w}}^2 \text{tr}\mathbf{R}}{J_{1\min}}. \quad (4.215)$$

Это выражение показывает пути уменьшения рассогласования в процессе адаптации и определяет влияние параметров алгоритма μ , $\sigma_{\mathbf{w}}^2$ на качество адаптации.

Ранее в главе 3 было показано, что в случае, когда последовательности $\delta(t)$, возмущающие весовые коэффициенты, удовлетворяют условиям ортогональности второго порядка, тогда с помощью метода синхронного детектирования можно определить градиент квадратичной целевой функции. Известно, что гауссова последовательность $\delta(t)$ с нулевым средним значением удовлетворяет условиям ортогональности второго порядка. В качестве возмущений $\delta(t)$ можно также использовать другие случайные последовательности. При этом операцию усреднения необходимо заменить операцией определения математического ожидания.

Рассмотрим алгоритм адаптации случайного поиска с синхронным детектированием. В качестве целевой функции возьмём квадратичную функцию, используемую в критерии минимума выходной мощности при условии независимости шумов в каналах адаптации:

$$J = \mathbf{W}^+ \mathbf{R} \mathbf{W} - P_c 2\mathbf{W}^+ \mathbf{b}_c.$$

Векторное уравнение системы адаптации по методу синхронного детектирования можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\mu J(\mathbf{W} + \delta(t))\delta(t). \quad (4.216)$$

Для данной функции J и свойств возмущений $\delta(t)$ уравнение (4.216) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -2\mu(\mathbf{R}\mathbf{W} - P_c \mathbf{b}_c). \quad (4.217)$$

4.11. Итерационные рекуррентные алгоритмы адаптации

В основу рекуррентных алгоритмов адаптации положена рекуррентная оценка весовых коэффициентов. Для получения оценки вектора ВК на каждой итерации воспользуемся рекуррентной оценкой обратной корреляционной матрицы \mathbf{R} .

Рекуррентная оценка матрицы \mathbf{R} может использоваться для реализации различных критериев адаптации. Рассмотрим пошаговый критерий максимизации ОСШП. В соответствии с ним вектор оптимальных ВК на j -й итерации определяется выражением

$$\mathbf{W}(j+1) = P_c \mathbf{R}^{-1}(j) \mathbf{b}_c, \quad (4.218)$$

где $\mathbf{R}^{-1}(j)$ – оценка обратной матрицы \mathbf{R} на j -й итерации.

Рекуррентный алгоритм адаптации получается, если подставить рекуррентную оценку матрицы $\mathbf{R}^{-1}(j)$ в (4.218):

$$\mathbf{W}(j+1) = \frac{1}{\beta} \left\{ \mathbf{W}(j) - \frac{\mathbf{R}^{-1}(j) \mathbf{X}(j+1) \mathbf{X}^+(j+1)}{\beta + \mathbf{X}^+(j+1) \mathbf{R}^{-1}(j) \mathbf{X}(j+1)} \mathbf{W}(j) \right\}. \quad (4.219)$$

Аналогично можно получить рекуррентный алгоритм при оценке матрицы \mathbf{R} по другой рекуррентной формуле:

$$\mathbf{W}(j+1) = \frac{1}{1-\beta} \left\{ \mathbf{W}(j) - \beta \frac{\mathbf{R}^{-1}(j) \mathbf{X}(j+1) \mathbf{X}^+(j+1)}{1-\beta + \beta \mathbf{X}^+(j+1) \mathbf{R}^{-1}(j) \mathbf{X}(j+1)} \mathbf{W}(j) \right\}. \quad (4.220)$$

Анализ выражений (4.219) и (4.220) показывает, что в них отсутствует информация о направлении прихода сигнала. Такая информация имеется в начальном векторе \mathbf{V}_c . Следовательно, начальный вектор в алгоритмах (4.219) и (4.220) должен содержать информацию о направлении прихода полезного сигнала, что и имеет место при реализации критерия максимума ОСШП.

Коэффициент β определяет степень важности вновь поступающих сигналов $\mathbf{X}(j)$ относительно предыдущих значений. Выбор коэффициента β позволяет применять алгоритмы (4.219) и (4.220) в случае динамических изменений сигнально-помеховой обстановки.

4.12. Неитерационные прямые алгоритмы

Неитерационные прямые алгоритмы являются средством практической реализации одноимённых методов. Алгоритмы такого типа достаточно просты в реализации и требуют малого времени вычислений. Однако целевая функция в большинстве случаев должна быть непрерывной и дифференцируемой. Кроме того, нестабильности фидерного тракта и наличие взаимного влияния элементов решётки могут привести к существенной погрешности вычисленного вектора оптимальных ВК.

Выше (см. главу 3) было показано, что в ряде случаев альтернативы неитерационным методам нет. Поэтому, несмотря на перечисленные недостатки, методы (и алгоритмы) такого типа достаточно широко применяются на практике. Для сведения к минимуму влияния недостатков неитерационных алгоритмов на результат решения используются различные методы стабилизации параметров фидерного тракта, а также вводят в алгоритмы соотношения, учитывающие взаимное влияние элементов в ААР.

Среди неитерационных прямых алгоритмов можно выделить проекционные алгоритмы.

Основная идея проекционных алгоритмов состоит в следующем. Если угловые координаты всех M_{Π} мешающих источников не совпадают, то в силу линейной независимости совокупность векторов волновых фронтов $\mathbf{V}_m (m = 1, \dots, M_{\Pi})$ образует базис M_{Π} -мерного подпространства. При выполнении условия $N > M_{\Pi}$ полное N -мерное пространство сигналов может быть разделено (разложено) на два взаимно ортогональных подпространства: M_{Π} -мерное подпространство мешающих сигналов и $(N - M_{\Pi})$ -мерное пространство, свободное от помех. Таким образом, два названных подпространства являются взаимно ортогональными проекциями исходного N -мерного пространства, откуда и произошло название данной группы алгоритмов. Разложение исходного пространства реализуется проекционными операторами \mathbf{P}_k и \mathbf{H} (см. главу 3). Проекционные операторы представляют собой матрицы проектирования размерностью $N \times N$:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A}\mathbf{A}^0; \quad (4.221)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}_k. \quad (4.222)$$

В выражении (4.221) \mathbf{A} – матрица размерностью $N \times M_{\Pi}$, составленная из M_{Π} вектор-столбцов помеховых сигналов на выходах элементов АР, создаваемых M_{Π} внешними источниками:

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_{M_{\Pi}}\|. \quad (4.223)$$

Для определения матрицы \mathbf{A} необходимо производить измерение направления прихода помех на основании достаточно точной модели преобразования фронта волны в $\Lambda\mathbf{A}$, т. е. рассчитывать столбцы АФР помех.

Символом \mathbf{A}^0 обозначена так называемая псевдообратная матрица от матрицы \mathbf{A} , равная по определению

$$\mathbf{A}^0 = (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}. \quad (4.224)$$

Вычислив по формуле (4.222) проекционный оператор \mathbf{H} , можно непосредственно определить вектор ВК, оптимальный по критерию максимума сигнала при полном подавлении помех. Этот вектор находится как проекция сигнального вектора на подпространство, свободное от помех:

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{b}_c. \quad (4.225)$$

Проекция вектора \mathbf{W} , ортогональная \mathbf{W}_0 , определяется выражением

$$\mathbf{W}_l = \mathbf{P}_k \mathbf{b}_c. \quad (4.226)$$

Общее решение задачи может быть представлено в виде суммы проекций решения в ортогональных подпространствах:

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_l. \quad (4.227)$$

Таким образом, решение, оптимальное по критерию максимального выделения сигнала при родном подавлении помех, является проекцией вектора ВК, оптимального по критериям МСШП и МСКО, на подпространство без помех. Этот вывод совпадает с изложенным в главе 2 (параграфы 2.2 и 2.3).

Реализация метода проектирования существенно экономит вычислительные затраты, поскольку обращаемая матрица $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ имеет малую размерность $M_{\Pi} \times M_{\Pi}$.

На практике вместо соотношений (4.225) и (4.226) удобно использовать эквивалентные им формулы

$$\mathbf{W}_0 = (\mathbf{P}_k \Lambda \mathbf{P}_k)^{-1} \mathbf{b}_c; \quad (4.228)$$

$$\mathbf{W}_l = (\mathbf{H} \Lambda \Lambda)^{-1} \mathbf{b}_c \quad \mathbf{W}_l = (\mathbf{H} \Lambda \Lambda)^{-1} \mathbf{V}_c. \quad (4.229)$$

В формулах (4.228) и (4.229) матрица Λ получена из исходной корреляционной матрицы помех $\mathbf{R}_{\text{шш}}$ путём ортогонализирующего преобразования \mathbf{Q} :

$$\Lambda = \mathbf{Q}^+ \mathbf{R}_{\text{шш}} \mathbf{Q}. \quad (4.230)$$

Такое преобразование позволяет исключить влияние взаимодействия элементов АР на результат решения. Преобразование \mathbf{Q} осуществляет замену реальной решётки взаимодействующих элементов эквивалентной решёткой невзаимодействующих элементов. Однако определение матрицы \mathbf{Q} представляет собой весьма сложную самостоятельную задачу.

Вследствие инвариантности проекционных операторов \mathbf{P}_k и \mathbf{H} по отношению к линейным невырожденным преобразованиям в соответствующих подпространствах, полученных выше, эти операторы могут применяться для решёток как с непосредственной обработкой сигналов, так и с различными предварительными преобразованиями

Следует отметить, что все условия и ограничения, сформулированные в параграфе 4.6 применительно к итерационным методам, в проекционных алгоритмах полностью реализуются. Так, условия полного подавления помех реализуются оператором \mathbf{H} , проецирующим пространство сигналов в подпространство, свободное от помех. Ограничения на модули и фазы весовых коэффициентов выполняются за счёт фиксации модулей и фаз, компонент сигнального вектора в (4.225) и (4.226). Наконец, условие максимального выделения сигнала при сформулированных ограничениях реализуется оператором (4.222).

Вторую группу итерационных алгоритмов составляют так называемые алгоритмы прямого счёта. В алгоритмах прямого счёта математическими методами определяется экстремум выражений (2.16), (2.48), (2.58) при сформулированных ограничениях типа равенств. Если целевую функцию можно задать таким образом, чтобы оптимальным значениям ВК соответствовал её единственный глобальный минимум, то задача весьма эффективно может быть решена методом множителей Лагранжа.

Рассмотрим более подробно один из возможных алгоритмов. Зададим в качестве целевой функции уровень ХН в направлении \mathbf{K}_c на источник сигнала

$$F(\mathbf{K}_c) = \sqrt{\text{Re } F^2(\mathbf{K}_c) + \text{Im } F^2(\mathbf{K}_c)}. \quad (4.231)$$

Ограничение на фазы ВК накладывается таким образом, чтобы максимально упростить математическую сторону задачи. Удобно потребовать:

$$\operatorname{Im}(F(\mathbf{K}_c)) = 0. \quad (4.232)$$

Физически это означает введение таких одинаковых фазовых сдвигов в фазовые множители всех ВК, чтобы выполнялось условие (4.232). С учётом (4.232) максимизируемая функция приводится к виду

$$\operatorname{Re}(F(\mathbf{K}_c)) = \max. \quad (4.233)$$

Для того чтобы работать только с вещественными числами, условия (4.232) можно разбить на две группы ограничений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_1) \right] &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_{M_{\Pi}}) \right] &= 0; \end{aligned} \right\}; \quad (4.234)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_1) \right] &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_{M_{\Pi}}) \right] &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (4.235)$$

Таким образом, задача состоит в максимизации выражения (4.233) при ограничениях (4.234) и (4.235). С равным успехом можно искать минимум того же выражения (4.233) при тех же ограничениях, т. е. полагать

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_c) \right] = \min. \quad (4.236)$$

Дело здесь в том, что при введении фазового сдвига 180° во все фазовые множители модуль функции (4.233) остаётся прежним, а знак изменяется, и тем самым, в частности, максимум функции обращается в минимум. Как уже упоминалось ранее, эффективным методом отыскания минимума дифференцируемой функции при ограничениях типа равенств является метод множителей Лагранжа. Суть метода состоит в следующем. Из минимизируемой функции и ограничений составляется функционал

$$\Phi = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_c) \right] + \lambda_{\Lambda 1} \left(\sum_{n=1}^N |w_n|^2 - a \right) + \sum_{m=1}^{M_{\Pi}} \lambda_{\Lambda 2m} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_m) \right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M_{\Pi}} \lambda_{\Lambda 2m+1} \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N w_n^* F_n(\mathbf{K}_m) \right], \quad (4.237)$$

где буквой λ_{Λ} с индексами от 1 до $2M_{\Pi} + 1$ обозначены неизвестные пока множители Лагранжа, а буквой a – уровень ограничений ВК.

Условие искомого минимума функции (4.236) состоит в равенстве нулю всех частных производных по всем переменным от функционала (4.237). Такими переменными являются модули $|w_n|$ и аргументы $\arg(w)$ комплексных ВК $w_n = |w_n| e^{i \arg(w_n)}$. Следовательно, необходимо обеспечить выполнение $2N$ условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (w_n)} = 0, \quad n = 1, \dots, N; \quad (4.238)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \arg(w_n)} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.239)$$

Таким образом, имеется система линейных уравнений, включающая по N уравнений вида (4.238) и (4.239), так называемые уравнения связи, и по M_{Π} уравнений вида (4.234) и (4.235). Значит, всего система содержит $(2N + 2M_{\Pi} + 1)$ уравнений. Решая эту систему, необходимо определить $(2M_{\Pi} + 1)$ множителей Лагранжа, N модулей и N аргументов весовых коэффициентов, т. е. всего $(2N + 2M_{\Pi} + 1)$ неизвестных. Решение системы линейных уравнений принципиальных трудностей не вызывает, однако при больших N порядок системы оказывается высоким, что резко увеличивает вычислительные затраты на решение и приводит к возрастанию погрешностей.

Решение действительной системы линейных уравнений математически эквивалентно обращению действительной матрицы той же размерности или комплексной матрицы половинной размерности. По этой причине решение рассматриваемой системы уравнений эквивалентно вычислению оптимальных ВК проекционным методом по формуле (4.225), что означает равноценность алгоритмов прямого счёта и проекционных алгоритмов. Что же касается возможности уменьшения порядка обращаемой матрицы до величины M_{Π} , которая имеет место при использовании проекционных алгоритмов, то аналогичная возможность снижения порядка системы уравнений до $2M_{\Pi}$ есть и в алгоритмах прямого счёта. Действительно, вычислив производные по формулам (4.238) и (4.239) и линейно их комбинируя с учётом уравнений связи, можно исходную систему уравнений

привести к системе из $2M_n$ уравнений с вещественными коэффициентами относительно $2M_n$ множителей Лагранжа от λ_Λ до $\lambda_{\Lambda_{2M_n+1}}$, вычислив которые легко найти остальные неизвестные по прямым расчётным формулам.

Одним из эффективных методов решения систем линейных уравнений является предварительное разложение корреляционной матрицы \mathbf{R} на два множителя в виде треугольных матриц – нижней и верхней:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}^- \mathbf{L}^+ . \quad (4.240)$$

В литературе такое представление часто называют **LU**-разложением матрицы \mathbf{R} , где $\mathbf{L} = \mathbf{L}^-$ – нижняя, а $\mathbf{U} = \mathbf{L}^+$ – верхняя треугольные матрицы.

Рассмотрим **LU**-разложение матрицы \mathbf{R} с помощью метода Бартелса – Голуба [107]. **LU**-разложение включает серию элементарных преобразований, с помощью которых обращаются в нуль элементы матрицы, находящиеся ниже диагонали: $r_{p+1,p}$ в столбце p . Метод Бартелса – Голуба осуществляет это с помощью серии элементарных преобразований \mathbf{M}_j :

$$\mathbf{M}_j = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \|\mathbf{M}'_j\| & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right\| , \quad (4.241)$$

где 2×2 матрица \mathbf{M}'_j занимает столбцы $(j-1)$ и j и имеет вид

$$\mathbf{M}'_j = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ m_j & 1 \end{array} \right\| , \quad (4.242)$$

где $m_j = -r_{jj} / r'_{j-1,j}$, если не производится перестановка строк и

$$\mathbf{M}'_j = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & m_j \end{array} \right\| , \quad (4.243)$$

$m_j = -r'_{j-1,j} / r_{jj}$, если перестановка строк производится. Элемент $r'_{j-1,j}$ получается путём преобразования исходной матрицы \mathbf{R} на предыдущем шаге.

Общую схему получения верхней треугольной матрицы \mathbf{U} рассмотрим на примере КМ размерности 4×4 :

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{vmatrix}. \quad (4.244)$$

На первом шаге с помощью матрицы преобразований \mathbf{M}_3 обнуляется элемент r_{43} :

$$\mathbf{M}_3 \mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_{43}}{r_{33}} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \mathbf{R}_1, \quad (4.245)$$

где $a_{4j} = r_{4j} - r_{43}r_{3j}/r_{33}$.

Затем первый столбец полученной матрицы перемещается правее последнего столбца и в этой преобразованной матрице с помощью двух элементарных матриц \mathbf{M}_2 и \mathbf{M}_3 обнуляются поддиагональные элементы r_{33} и a_{44} :

$$\mathbf{R}'_1 = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{11} \\ r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{21} \\ r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{31} \\ a_{42} & 0 & a_{44} & a_{41} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{R}'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_{33}}{r_{23}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{11} \\ r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{21} \\ r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{31} \\ a_{42} & 0 & a_{44} & a_{41} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{11} \\ r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{21} \\ c_{32} & 0 & c_{34} & c_{31} \\ a_{42} & 0 & a_{44} & a_{41} \end{vmatrix} = \mathbf{R}_2; \quad (4.246)$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{R}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{44}}{c_{34}} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{11} \\ r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{21} \\ c_{32} & 0 & c_{34} & c_{31} \\ a_{42} & 0 & a_{44} & a_{41} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{11} \\ r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{21} \\ c_{32} & 0 & c_{34} & c_{31} \\ a_{42} & 0 & 0 & a_{41} \end{vmatrix} = \mathbf{R}_3.$$

(4.247)

Далее опять переносится первый столбец матрицы \mathbf{M}_3 правее последнего столбца и формируется новая матрица \mathbf{R}'_3 :

$$\mathbf{R}'_3 = \begin{vmatrix} r_{13} & r_{14} & r_{11} & r_{12} \\ r_{23} & r_{24} & r_{21} & r_{22} \\ 0 & c_{34} & c_{31} & c_{32} \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Поступая далее аналогично, с помощью преобразований $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ и \mathbf{M}_3 последовательно обнуляются очередные поддиагональные элементы r_{23}, c_{34} и d_{41} :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}'_3 &= \begin{vmatrix} r_{13} & r_{14} & r_{11} & r_{12} \\ 0 & g_{14} & g_{11} & g_{12} \\ 0 & c_{34} & c_{31} & c_{32} \\ 0 & 0 & d_{41} & d_{42} \end{vmatrix}; \mathbf{M}_2 [\mathbf{M}_1 \mathbf{R}'_3] = \begin{vmatrix} r_{13} & r_{14} & r_{11} & r_{12} \\ 0 & g_{14} & g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 0 & d_{41} & d_{42} \end{vmatrix}; \\ \mathbf{M}_3 \{\mathbf{M}_2 [\mathbf{M}_1 \mathbf{R}'_3]\} &= \begin{vmatrix} r_{13} & r_{14} & r_{11} & r_{12} \\ 0 & g_{14} & g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 0 & 0 & q_{12} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4.248)$$

где $c_{ij}, d_{ij}, g_{ij}, h_{ij}, q_{ij}$ – некоторые числа, получаемые в процессе преобразований.

Таким образом, исходная матрица \mathbf{R} преобразована в верхнюю треугольную. В процессе преобразований производилась перестановка столбцов матрицы (\mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_3). Для этой операции можно использовать перестановочную матрицу вида:

$$\mathbf{H}_{ik} = \mathbf{I}_N - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)^T, \quad (4.249)$$

где $\mathbf{e}_i^T = \|00\dots 1\dots 0\|$, т. е. i -я компонента вектора равна единице, а остальные – нулю.

Такая матрица меняет i -й и k -й столбцы местами в любой матрице, если эту матрицу умножить на перестановочную справа, и меняет i -ю и k -ю строки, если матрицу умножить на перестановочную слева. Заметим, что перестановочная матрица \mathbf{H}_{ik} – ортогональная:

$$\mathbf{H}_{ik} = \mathbf{H}_{ik}^{-1} \mathbf{H}_{ik}^T. \quad (4.250)$$

При электронных вычислениях перестановочную матрицу можно опустить: достаточно хранить запись позиций столбцов или строк.

В общем виде преобразование матрицы \mathbf{R} в верхнюю треугольную без перемены строк можно представить в форме

$$\underbrace{\{\mathbf{M}_{N-1} \dots \mathbf{M}_1 [\dots \underbrace{\{\mathbf{M}_{N-1} [\mathbf{M}_{N-2} [\underbrace{\{[\mathbf{M}_{N-1} \mathbf{R}] \mathbf{H}(0)\} \mathbf{H}(1)]\} \dots \mathbf{H}(N-2)] \dots \}_{1} \dots \}_{2} \dots \}_{N-1}} = \mathbf{U}',$$

(4.251)

где \mathbf{U}' – верхняя треугольная матрица с учётом перестановки столбцов в промежуточных матрицах; $\mathbf{H}(0) = \mathbf{I}$; $\mathbf{H}(j) = \mathbf{H}_{21} \mathbf{H}_{32} \dots \mathbf{H}_{NN-1}$ – матрицы сдвига всех столбцов влево на один столбец ($j = \overline{1, N-2}$) и перестановки первого столбца на место справа от последнего.

Метод Бартелса – Голуба позволяет для обеспечения численной устойчивости производить перестановку строк матрицы (4.239).

Используем метод Бартелса – Голуба для решения системы уравнений вида

$$\mathbf{R}\mathbf{W} = \beta \mathbf{b}_c.$$

С этой целью представим последнее уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{M}_{N-1} \dots \mathbf{M}_1 \{ \dots \{ [\mathbf{M}_{N-1} \mathbf{R}] \mathbf{H}(0) \} \dots \mathbf{H}(N-2) \} \dots \} \mathbf{H}^T(N-2) \dots \mathbf{H}^T(1) \mathbf{H}^T(0) \mathbf{W} = \\ = \mathbf{M}_{N-1} \dots \mathbf{M}_1 \{ \dots [\mathbf{M}_{N-1} \beta \mathbf{b}_c] \dots \}. \end{aligned} \quad (4.252)$$

Уравнение (4.252) перепишем как

$$\mathbf{U}' \mathbf{W}' = \mathbf{Y}, \quad (4.253)$$

где \mathbf{U}' определяется выражением (4.251); $\mathbf{W}' = \mathbf{H}^T(N-2) \dots \mathbf{H}^T(0) \mathbf{W}$ – вектор \mathbf{W} , в котором $(N-2)$ раз переставлены местами элементы; $\mathbf{Y} = \mathbf{M}_{N-1} \dots \mathbf{M}_1 \{ \dots [\mathbf{M}_{N-1} \beta \mathbf{b}_c] \dots \}$.

Так как матрица \mathbf{U}' – верхняя треугольная, то система (4.253) решается обратной подстановкой довольно просто:

$$w'_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^N u'_{ij} w'_j \right) / u'_{ii}, \quad (4.254)$$

где $i = N - 2, \dots, 1$.

Особенность данного метода состоит в том, что каждое преобразование \mathbf{M}_j приводит к изменению только одной строки матрицы. Для расчёта очередной матрицы \mathbf{H}_j требуется вычислить лишь один её элемент. С увеличением номера шага преобразований уменьшается число операций на каждом шаге, что обусловлено формированием нулевых элементов. В процессе преобразований матрица перестановки столбцов $\mathbf{H}(f)$ не вычисляется в явном виде. Нет необходимости сохранять в памяти ЭВМ вычисленные значения матриц \mathbf{M}_j . Вектор \mathbf{w}' определяется без непосредственного использования матриц $\mathbf{Y}(j)$. Так как умножение $(N - 2)$ раз матриц $\mathbf{H}(1)$ на вектор \mathbf{W} приводит к циклическому изменению $(N - 2)$ раз элементов вектора \mathbf{W} , то после всех преобразований получается, что

$$\mathbf{W}' = \mathbf{H}(N - 2) \dots \mathbf{H}(0) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{N-1} \\ w_N \\ w_1 \\ w_c \\ \vdots \\ w_{N-2} \end{pmatrix}. \quad (4.255)$$

Этот алгоритм обуславливает высокую эффективность рассмотренного метода \mathbf{LU} -разложения корреляционной матрицы сигналов антенной решётки и может эффективно использоваться для расчёта оптимальных значений весовых коэффициентов.



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА БЕСПРОВОДНЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Кафедра основана в 2011 году группой специалистов в области электросвязи, занимающихся научно-исследовательской и практической деятельностью, и уже зарекомендовала себя как динамично развивающееся подразделение университета.

Основной упор при подготовке студентов делается на обучении основам построения и функционирования систем, сетей и технологий беспроводной связи. В процессе обучения изучаются современные и перспективные технологии сотовой связи (GSM, UMTS, LTE), телевидения и радиовещания (DVB-T/H, DRM), спутниковой связи и навигации (ГЛОНАСС, GPS), а также технологий специализированной связи.

Во время обучения уделяется особое внимание услугам в сетях беспроводной связи: мобильное телевидение, мобильный Интернет, IP-телефония и др.

Григорьев Владимир Александрович, Щесняк Сергей Станиславович,
Гулюшин Валерий Леонидович, Распаев Юрий Алексеевич,
Лагутенко Олег Иванович, Щесняк Анна Сергеевна

Адаптивные антенные решетки

Учебное пособие

Часть 1

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе