МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Т.А. Малышева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2016

УДК 681.3

Малышева Т.А. Численные методы и компьютерное моделирование. Лабораторный практикум по аппроксимации функций: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 33 с.

В работе изложена методика выполнения лабораторной работы по аппроксимации функций различными способами. Представлены алгоритмы решения задач средствами Microsoft Excel, среде программирования Fortran PowerStation, математической библиотеки IMSL. Предназначено для студентов бакалавриата направлений 14.03.01 Ядерная энергетика и теплофизика и 16.03.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения всех форм обучения по дисциплине «Численные методы и компьютерное моделирование».

Рецензент: кандидат техн. наук, проф. А.В. Зайцев

Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования, протокол № 3 от 30.11.2015 г.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие служит руководством к лабораторным занятиям по дисциплине «Численные методы и компьютерное моделирование». Приводятся основные сведения по аппроксимации функций, их алгоритмы, блок-схемы и программная реализация задачи. Кроме этого изложены способы нахождение коэффициентов эмпирической формулы средствами *Microsoft Excel* и с помощью математической библиотеки IMSL, входящей в состав профессиональных версий Фортрана. На конкретных примерах разобраны алгоритмы решения задачи по аппроксимации функций.

Студентам рекомендуется внимательно изучить теоретические разделы и осмыслить приведенный программный код квадратичной аппроксимации перед работой на компьютере. В приложении приведены задания по лабораторным работам.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ
Постановка задачи

В практике известны 3 способа задания функции: аналитический, графический, табличный. В инженерной практике наиболее распространенным является случай, когда вид связи между параметрами X и Y неизвестен, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. Как правило, даже при известной зависимости $y = f(x)$, она настолько громоздка, что ее использование в практических расчетах затруднительно. Чаще всего эта связь представлена в виде таблицы, т.е. дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}(i = 1, 2, .., n)$. Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Часто эти значения можно получить лишь путем сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов. Таким образом, необходимо использовать имеющиеся табличные данные для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y = f(x)$ неизвестна. Задачи исследования в большинстве случаев требуют установить определенный вид функциональной зависимости между характеристиками изучаемого явления. Этой цели и служит задача о приближении функции. Т.е. задача о приближении (аппроксимации) функции состоит в том, чтобы данную функцию $f(x)$ приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$, значения которой в заданной области мало отличались от опытных данных – $f(x) \approx \varphi(x)$. Методы решения такой задачи относятся к категории *численных методов или методов вычислительной математики*. Один из способов аппроксимации функций – *интерполяция*. Он используется в тех случаях, когда основная информация о приближаемой функции дается в виде таблицы ее значений. В результате решения задачи *интерполяции* линия, соответствующая интерполирующей функции, будет обязательно проходить через все точки исходных данных. В этом случае точки являются *узлами интерполяции*.

При интерполяции от приближения требуется, чтобы оно имело ту же таблицу значений, что и приближаемая функция:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Это условие называется *условием интерполяции*. Функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям интерполяции, называется *интерполяционной*, а точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – *узлами интерполяции*.

Чаще всего в качестве *интерполяционных функций* выбирают алгебраические многочлены, так как их значения вычисляются проще всего. Таким образом, решается следующая задача – определяется алгебраический многочлен n-й степени:

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \qquad (1)$$

удовлетворяющий условиям интерполяции:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \ i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Алгебраический многочлен, удовлетворяющий этим условиям, называется *интерполяционным многочленом*. Геометрический смысл интерполяции состоит в том, что графики функции $y = f(x)$ и интерполяционного многочлена $y = P_n(x)$ должны проходить через все табличные точки (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \dots, n$. На рис. 1, а эти точки выделены. Именно это условие должно обеспечить близость графиков этих функций на рассматриваемом отрезке, чтобы можно было использовать интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в качестве приближения для функции $f(x)$. Существуют различные формы записи интерполяционного многочлена: традиционная форма (1), многочлен Лагранжа и интерполяционная формула Ньютона. В данном учебном пособии они не рассматриваются.

Кроме построения *интерполяционных зависимостей*, можно использовать более общий вариант приближения функции – построение *аппроксимирующих зависимостей* на основе различных функциональных взаимосвязей между двумя рассматриваемыми величинами.

Приближенная функциональная зависимость, полученная на основании экспериментальных данных, называется *аппроксимирующей функцией или эмпирической формулой.*

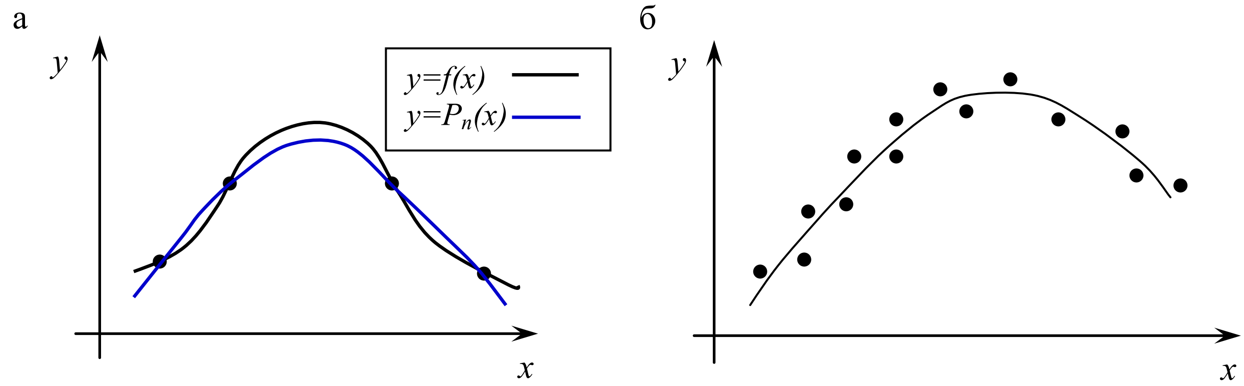


Рис. 1. Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующей линии (б) для точечно заданной функции

Построение эмпирической формулы состоит из 2 этапов:

1. Подбор общего вида формулы. Иногда он известен из физических соображений. Если характер зависимости неизвестен, то первоначально его выбирают геометрически: экспериментальные точки наносятся на график и примерно угадывается общий вид зависимости путем сравнения полученной кривой с графиками известных функций (многочлена, логарифмической, показательной функций и т.п.). Выбор вида эмпирической зависимости – наиболее сложная часть решения задачи, ибо класс известных аналитических зависимостей необъятен. Практика, однако, показывает, что при выборе аналитической зависимости достаточно ограничиться довольно узким кругом функций: линейные, степенные и показательные.

2. Определение значений параметров аппроксимирующей функции.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Будем считать, что вид аппроксимирующей функции или эмпирической формулы выбран и представлен в виде:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \ldots., a_m),$$

где φ – известная функция, a_0, a_1, $a_2, \ldots., a_m$ – неизвестные параметры.

Требуется определить такие параметры, при которых значения аппроксимирующей функции приблизительно совпадали со значениями исследуемой функции в точках x_i, т.е. $y_i \approx \varphi(x_i)$. Разность между этими значениями (отклонения) обозначим через ε_i.

Тогда $\varepsilon_i = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, \ldots., a_m) - y_{i,} i = 1,2, \ldots n$

Мерой отклонения многочлена $\varphi(x)$ от заданной функции $f(x)$ на множестве точек (x_i, y_i) является величина S, равная сумме квадратов разности между значениями многочлена и функции для всех точек $x_0, x_1, \ldots., x_n$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \to \min.$$

Задача нахождения наилучших значений параметров $a_0, a_1, \ldots., a_m$ сводится к некоторой минимизации отклонений ε_i. Существует несколько способов решения этой задачи. Рассмотрим один из наиболее используемых – метод наименьших квадратов. Параметры $a_0, a_1, \ldots., a_m$ эмпирической формулы находятся из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, a_2, \ldots., a_m)$,. Так как здесь параметры выступают в роли независимых переменных функции S, то ее минимум найдем, приравнивая к нулю частные производные по этим переменным:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \ldots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Полученные соотношения – система уравнений для определения $a_0, a_1, a_2, \ldots., a_m$.

Линейная аппроксимация

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы линейную функцию:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b.$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min.$$

Для нахождения a и b необходимо найти минимум функции $S(a,b)$. Необходимое условие существования минимума для функции S:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Упростим полученную систему:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad SY = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Получим систему уравнений для нахождения параметров a и b:

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY, \end{cases} \qquad (2)$$

из которой находим:

$$a = \frac{SXY \cdot n - SX \cdot SY}{SXX \cdot n - SX \cdot SX}, \; b = \frac{SXX \cdot SY - SX \cdot SXY}{SXX \cdot n - SX \cdot SX}.$$

<u>Пример 1</u>. Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между x и y, в результате серии экспериментов, была получена таблица значений (табл. 1). Необходимо найти приближенную функциональную зависимость и определить значения параметров аппроксимирующей функции.

Таблица 1

Данные эксперимента

X	1,2	2,9	4,1	5,5	6,7	7,8	9,2	10,3
Y	7,4	9,5	11,1	12,9	14,6	17,3	18,2	20,7

Для определения вида зависимости нанесем экспериментальные точки на график (рис. 2).

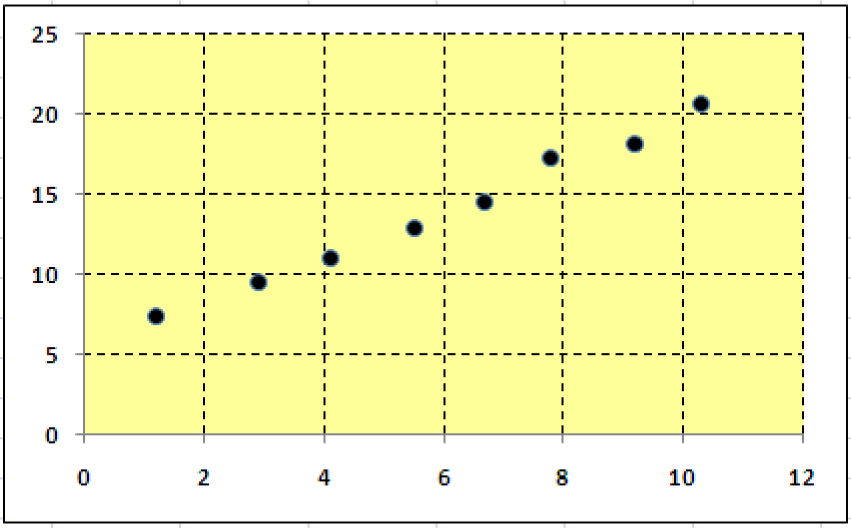


Рис. 2. Экспериментальные точки

Из графика видно, что в качестве аппроксимирующей функции можно выбрать многочлен первой степени. Тогда необходимо построить линейную модель $f = ax + b$, которая наилучшим образом будет описывать наблюдаемые значения. Далее, используя метод наименьших квадратов, найдем значения коэффициентов аппроксимирующей функции: a и b. Для этого вычислим:

$$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,2 + 2,9 + 4,1 + 5,5 + 6,7 + 7,8 + 9,2 + 10,3 = 47,7\,;$$

$$SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,2^2 + 2,9^2 + 4,1^2 + 5,5^2 + 6,7^2 + 7,8^2 + 9,2^2 + 10,3^2 = 353,37\,;$$

$$SY=\sum_{i=1}^{n} y_i = 7,4+9,5+11,1+12,9+14,6+17,3+18,2+20,7=111,7;$$

$$SXY=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1,2\cdot 7,4+2,9\cdot 9,5+4,1\cdot 11,1+5,5\cdot 12,9+6,7\cdot 14,6+$$

$$+7,8\cdot 17,3+9,2\cdot 18,2+10,3\cdot 20,7=766,3.$$

Система уравнений (2) для нахождения параметров a и b будет иметь вид:

$$\begin{cases} 353,37a+47,7b=766,3 \\ 47,7a+8b=111,7. \end{cases}$$

Решая систему, получим значения коэффициентов: a = 1,4543 и b=5,2911. Проверим правильность выбора линейной модели. Для этого вычислим значения аппроксимирующей функции $\boldsymbol{f = 1,4543x + 5,2911}$ и внесем полученные значения в табл. 2.

Таблица 2

Результаты вычислений

№ пп.	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1,2	2,9	4,1	5,5	6,7	7,8	9,2	10,3
Y	7,4	9,5	11,1	12,9	14,6	17,3	18,2	20,7
$\boldsymbol{F = ax + b}$	**7,0363**	**9,5086**	**11,2538**	**13,2899**	**15,0351**	**16,6348**	**18,6709**	**20,2707**
$\boldsymbol{\varepsilon_i}$	**–0,3637**	**0,0086**	**0,1538**	**0,3899**	**0,4351**	**–0,6652**	**0,4709**	**–0,4293**

Из таблицы видно, что значения аппроксимирующей функции приблизительно совпадают с Y для всех точек X. Следовательно, делаем вывод: исследуемая функциональная зависимость может быть приближенно описана линейной моделью f = 1,4543x + 5,2911.

Определим меру отклонения S:

$$S=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 1,3459\,.$$

Вычисленное значение S (небольшое → min), что еще раз подтверждает правильность выбора модели.

Задание: написать и отладить программный код, реализующий метод наименьших квадратов для линейной модели, блок-схема которого приведена на рис. 3.

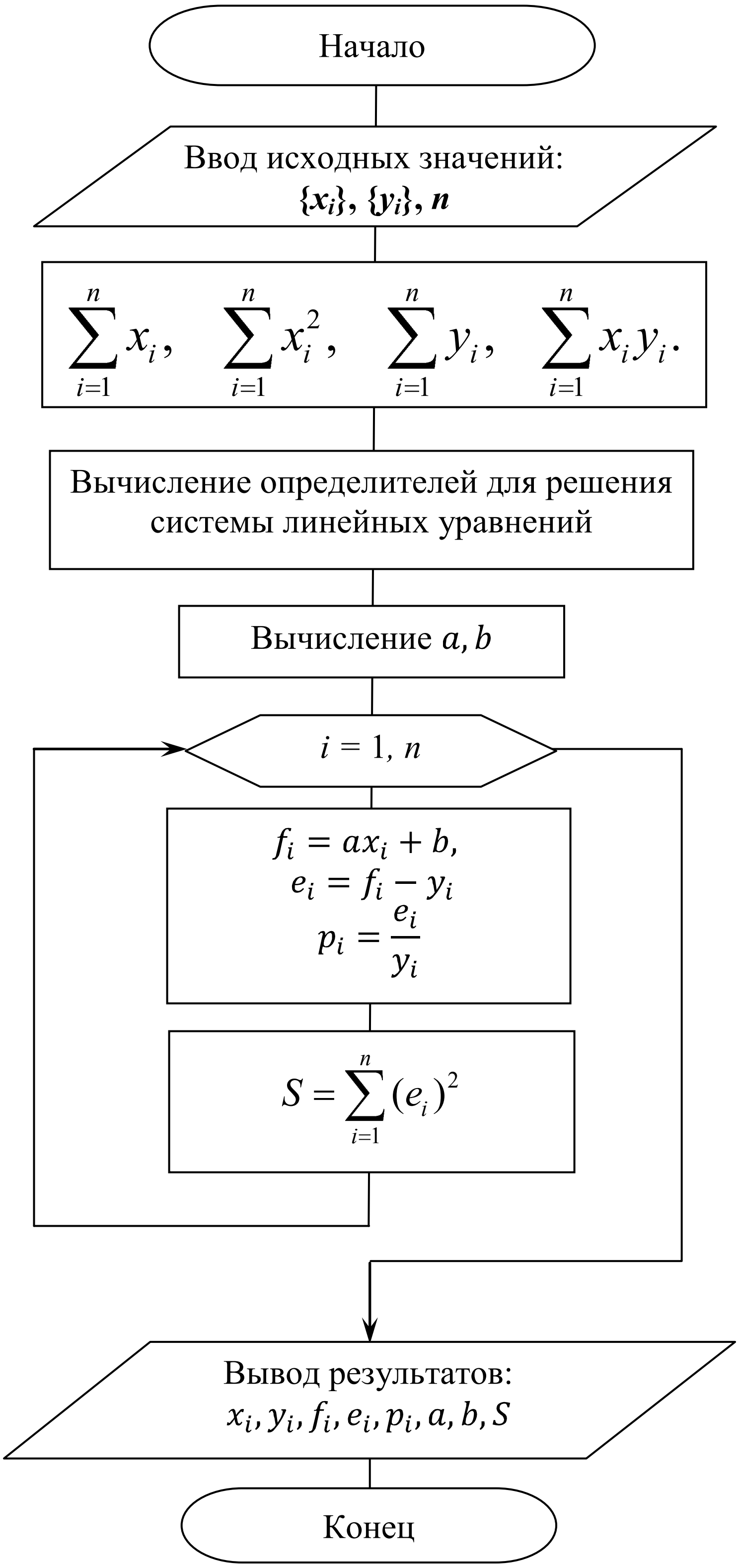


Рис. 3. Укрупненная блок-схема метода наименьших квадратов

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ СРЕДСТВАМИ EXCEL

В *Excel* для построения аппроксимирующих функций или регрессий имеются две возможности:

1. Добавление выбранных регрессий (линий тренда – trendlines) на диаграмму, построенную на основе таблицы экспериментальных данных исследуемого процесса.

2. Использование встроенных статистических функций *Excel*, позволяющих получать регрессии (линии тренда) непосредственно на основе таблицы исходных данных.

Добавление линий тренда на диаграмму

Для таблицы данных, описывающих некоторый процесс и представленных диаграммой, в *Excel* имеется эффективный инструмент регрессионного анализа, позволяющий:

- строить на основе метода наименьших квадратов и добавлять в диаграмму пять типов регрессий, которые с той или иной степенью точности моделируют исследуемый процесс – линейный, полиномиальный, логарифмический, степенной, экспоненциальный;
- добавлять к диаграмме уравнение построенной регрессии;
- определять степень соответствия выбранной регрессии отображаемым на диаграмме данным.

Линейная регрессия используется при моделировании характеристик, значения которых увеличиваются или убывают с постоянной скоростью. Это наиболее простая в построении модель исследуемого процесса. Она строится в соответствии с уравнением:

$$y = ax + b,$$

где a – тангенс угла наклона линейной регрессии к оси абсцисс; b – координата точки пересечения линейной регрессии с осью ординат.

Полиномиальная регрессия полезна для описания характеристик, имеющих несколько ярко выраженных экстремумов (максимумов и минимумов). Выбор степени полинома определяется количеством экстремумов исследуемой характеристики. Так, полином второй степени может хорошо описать процесс, имеющий только один максимум или минимум; полином третьей степени – не более двух экстремумов; полином четвертой степени – не более трех экстремумов и т. д. В этом случае линия тренда строится в соответствии с уравнением:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots a_6$ – константы, значения которых определяются в ходе построения.

Логарифмическая линия тренда применяется при моделировании характеристик, значения которых вначале быстро меняются, а затем постепенно стабилизируются. Строится в соответствии с уравнением:

$$y = alnx + b,$$

где коэффициенты a, b – константы.

Степенная линия тренда дает хорошие результаты, если значения исследуемой зависимости характеризуются постоянным изменением скорости роста. Примером такой зависимости может служить график равноускоренного движения автомобиля. Если среди данных встречаются нулевые или отрицательные значения, использовать степенную линию тренда нельзя. Строится в соответствии с уравнением:

$$y = ax^b,$$

где коэффициенты a, b – константы.

Экспоненциальная регрессия используется в том случае, если скорость изменения данных непрерывно возрастает. Для данных, содержащих нулевые или отрицательные значения, этот вид приближения также неприменим. Строится в соответствии с уравнением:

$$y = ae^{bx},$$

где коэффициенты a, b – константы.

При подборе линии тренда *Excel* автоматически рассчитывает значение величины R^2, которая характеризует достоверность аппроксимации: чем ближе значение R^2 к единице, тем надежнее линия тренда аппроксимирует исследуемый процесс. При необходимости значение R^2 всегда можно отобразить на диаграмме. Эта величина определяется по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \varphi_i)^2}.$$

Добавить линии тренда к ряду данных можно двумя способами:

1. активизировать построенную на основе ряда данных диаграмму, в меню ***Диаграмма*** выбрать команду ***Добавить линию тренда*** (или ***Макет→ Линия тренда*** для *Excel*-2007);
2. в контекстном меню для ряда данных (правой кнопкой мыши щелкнуть по ряду данных) выбрать команду ***Добавить линию тренда***.

После этого на экране появится диалоговое окно ***Формат линии тренда*** (рис. 4), где можно выбрать:

- необходимый тип линии тренда (по умолчанию выбирается тип Линейный). Для типа Полиномиальная в поле Степень следует задать степень выбранного полинома;
- изменить название линии тренда;
- задать количество периодов (вперед или назад) для прогноза;
- вывести в область диаграммы уравнение линии тренда, для чего следует включить флажок Показывать уравнение на диаграмме;
- вывести в область диаграммы значение достоверности аппроксимации R^2, для чего следует включить флажок Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2);
- задать точку пересечения линии тренда с осью Y, для чего следует включить флажок Пересечение кривой с осью Y в точке.

Достоинствами рассмотренного инструмента регрессионного анализа являются:

- относительная легкость построения на диаграммах линии тренда без создания для нее таблицы данных;
- достаточно широкий перечень типов предложенных линий трендов, причем в этот перечень входят наиболее часто используемые типы регрессии;
- возможность прогнозирования поведения исследуемого процесса на произвольное (в пределах здравого смысла) количество шагов вперед, а также назад;

- возможность получения уравнения линии тренда в аналитическом виде;
- возможность, при необходимости, получения оценки достоверности проведенной аппроксимации.

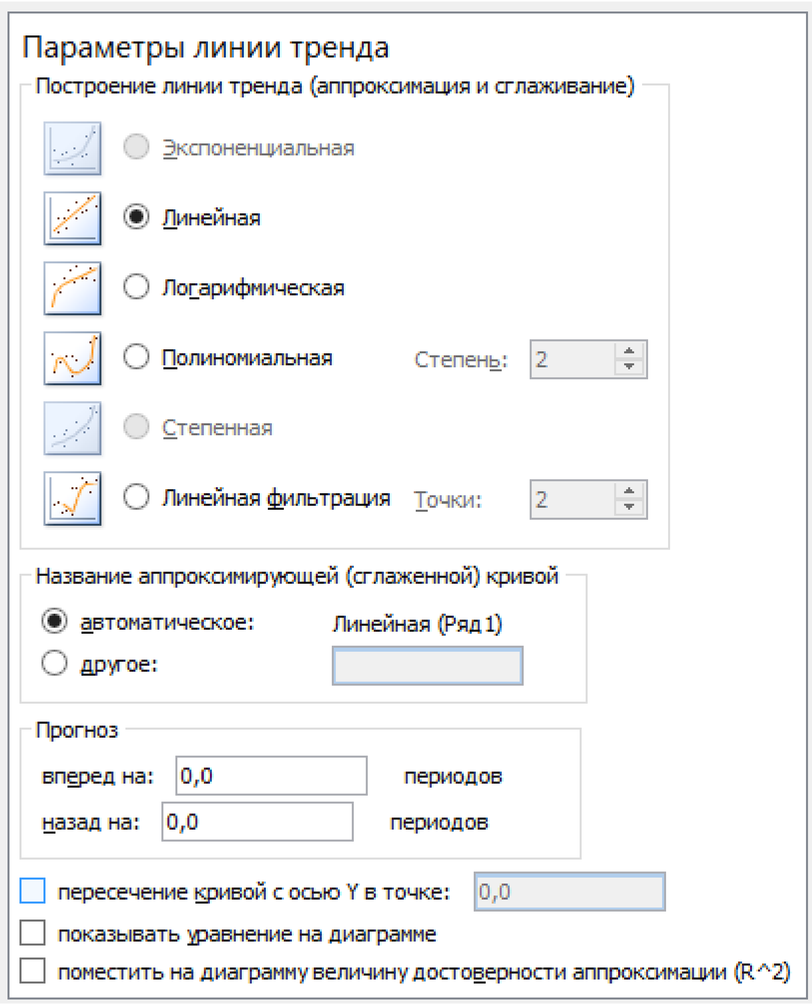


Рис. 4. Вид диалогового окна «Формат линии тренда»

Линиями тренда можно дополнить ряды данных, представленные на диаграммах типа график, гистограмма, плоские ненормированные диаграммы с областями, линейчатые, точечные, пузырьковые и биржевые. Нельзя дополнить линиями тренда ряды данных на объемных, нормированных, лепестковых, круговых и кольцевых диаграммах.

Использование встроенных функций Excel

В *Excel* имеется также инструмент регрессионного анализа для построения линий тренда вне области диаграммы. Для этой цели можно использовать ряд статистических функций, однако все они позволяют строить лишь линейные или экспоненциальные регрессии.

В *Excel* имеется несколько функций для построения линейной регрессии, в частности:

- ТЕНДЕНЦИЯ,
- ЛИНЕЙН,
- НАКЛОН и ОТРЕЗОК.

А также несколько функций для построения экспоненциальной линии тренда, в частности:

- РОСТ,
- ЛГРФПРИБЛ.

Достоинствами инструмента встроенных функций для регрессионного анализа являются:

- достаточно простой однотипный процесс формирования рядов данных исследуемой характеристики для всех встроенных статистических функций, задающих линии тренда;
- стандартная методика построения линий тренда на основе сформированных рядов данных;
- возможность прогнозирования поведения исследуемого процесса на необходимое количество шагов вперед или назад.

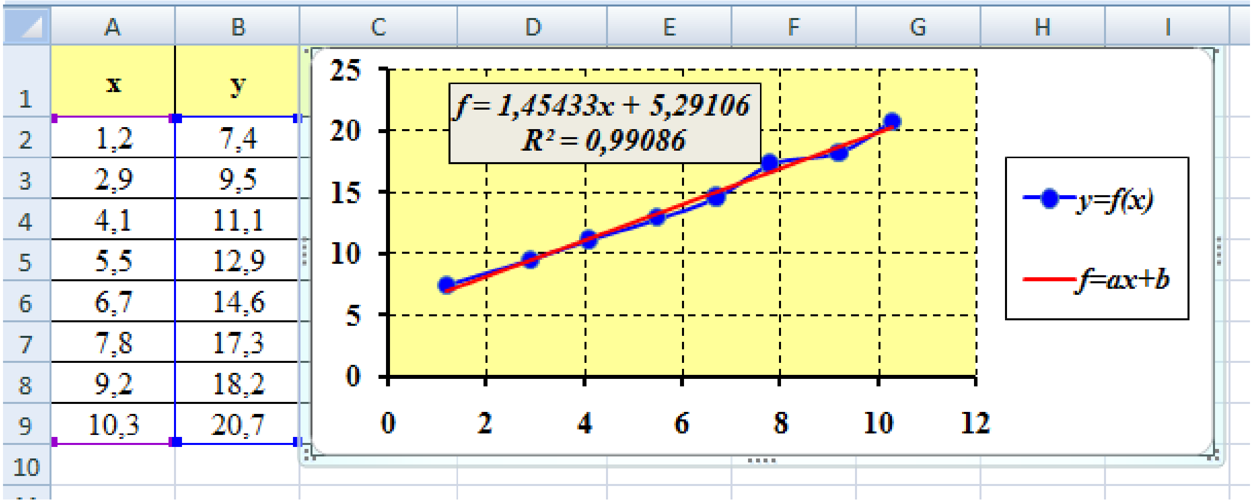
А к недостаткам относится то, что в *Excel* нет встроенных функций для создания других (кроме линейного и экспоненциального) типов линий тренда. Это обстоятельство часто не позволяет подобрать достаточно точную модель исследуемого процесса, а также получить близкие к реальности прогнозы.

Линейная аппроксимация в Excel

Рассмотрим решение конкретной задачи (см. пример 1) с помощью перечисленных инструментов *Excel*.

1. На рабочем листе *Excel* сформируем таблицу табулирования функции, построим диаграмму.

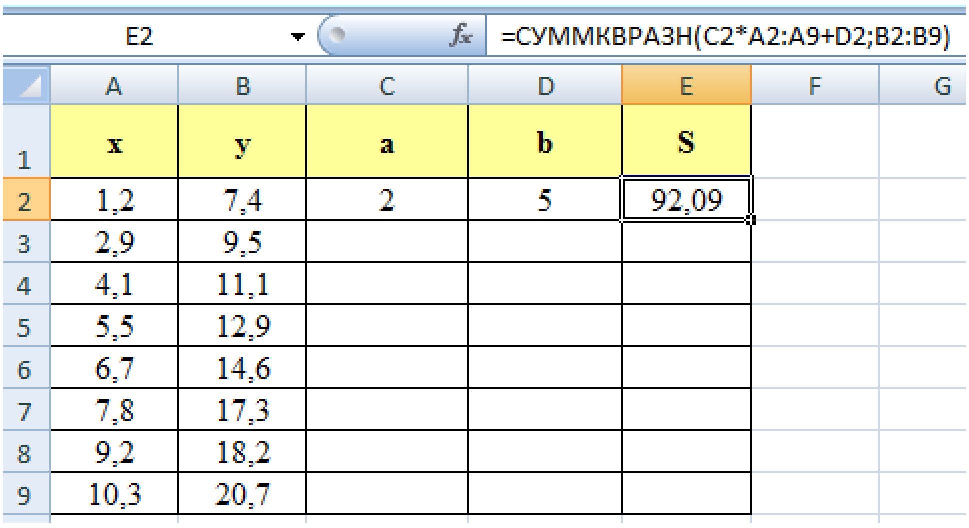
2. На диаграмме добавим линейную линию тренда, выведем уравнение регрессии и величину достоверности аппроксимации (рис. 5).



x	y
1,2	7,4
2,9	9,5
4,1	11,1
5,5	12,9
6,7	14,6
7,8	17,3
9,2	18,2
10,3	20,7

Рис. 5. Вид рабочего листа *Excel*. Линейный тренд

3. Для определения коэффициентов линейного тренда $f=ax+b$ по методу наименьших квадратов $\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ введем в ячейки C2 и D2 приближенные значения *a и b*, например, 2 и 5. В ячейку E2 введем функцию СУММКВРАЗН, которая вычисляет $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$. Для нашего случая, массив $\{x_i\}$ – это массив аппроксимирующей функции $f = ax+b$, массив $\{y_i\}$ – это табличные значения y (рис. 5, 6, 7).



E2 =СУММКВРАЗН(C2*A2:A9+D2;B2:B9)

x	y	a	b	S
1,2	7,4	2	5	92,09
2,9	9,5			
4,1	11,1			
5,5	12,9			
6,7	14,6			
7,8	17,3			
9,2	18,2			
10,3	20,7			

Рис. 6. Вид рабочего листа *Excel*. Вычисление *S*

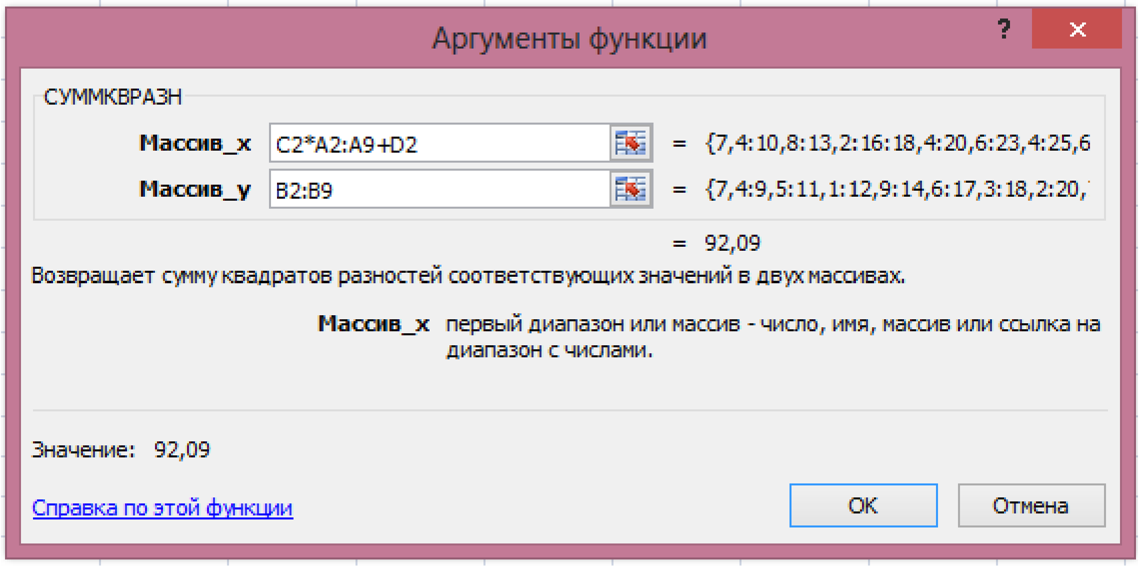


Рис. 7. Мастер функции СУММКВРАЗН

4. Полученное значение меры отклонения *S*, которое должно → min, достаточно велико (92,09). Поэтому его необходимо минимизировать. Для этого:

4.1. Зададим относительную погрешность вычислений и предельное число итераций, равными 0,00001 и 100, соответственно, с помощью команды *Сервис → Параметры → Вычисления* (или *Параметры Excel→ Формулы→ Параметры вычислений* для *Excel*-2007).

4.2. Далее уточним значения коэффициентов эмпирической формулы с помощью команды *Сервис→Поиск решения* (*Данные→Поиск решения* для *Excel*-2007). В диалоговом окне *Поиск решения* в поле *Установить целевую ячейку* вводим ссылку на ячейку E2. В группе *Равной* установим переключатель в положение *Минимальному Значению*. В поле *Изменяя ячейки* вводим ссылки на ячейки с будущими ответами (рис. 8). Отметим, что вводить ссылки на ячейки удобнее не с клавиатуры, а щелчком по соответствующей ячейке. При этом они автоматически будут превращаться в абсолютные ссылки (в нашем примере E2, C2, B2). Результаты минимизации представлены на рис. 9.

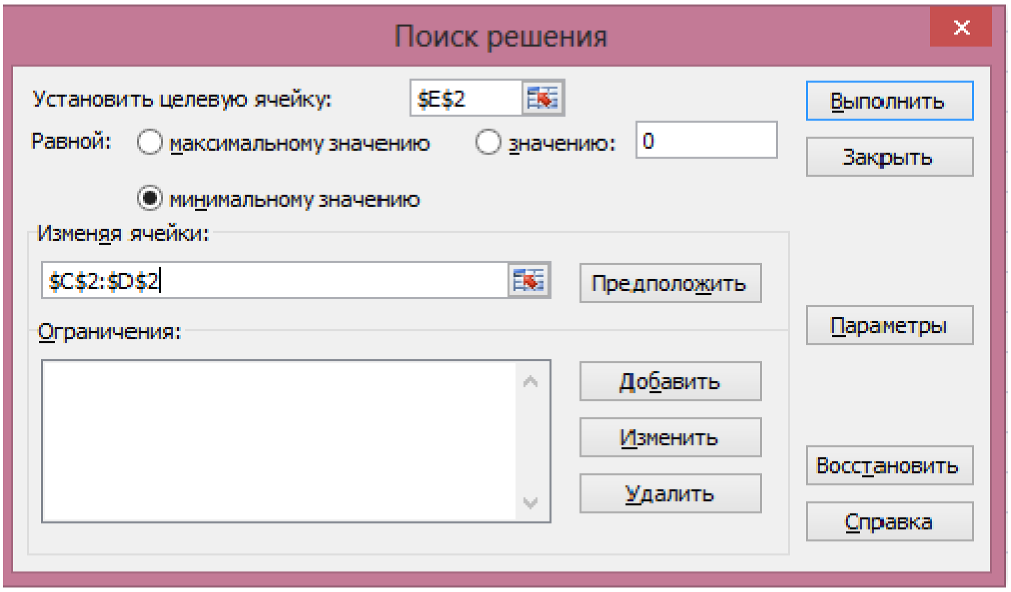


Рис. 8. Диалоговое окно поиска решения

	A	B	C	D	E
1	**x**	**y**	**a**	**b**	**S**
2	1,2	7,4	1,45433	5,29106	1,34585
3	2,9	9,5			
4	4,1	11,1			
5	5,5	12,9			
6	6,7	14,6			
7	7,8	17,3			
8	9,2	18,2			
9	10,3	20,7			

Рис. 9. Вид рабочего листа *Excel*
Уточненные коэффициенты аппроксимирующей функции

5. Определим коэффициенты *a* и *b* с помощью статистических функций:

5.1. Функция НАКЛОН определяет угловой коэффициент регрессии (*a*). Функция ОТРЕЗОК определяет точку пересечения регрессии с осью абсцисс (*b*). Отметим, что эти функции не являются регрессией, а играют лишь вспомогательную роль, определяя необходимые параметры регрессии. Введем в ячейки C5, D5 вышеперечисленные функции (рис. 10), формат которых представлен так:

НАКЛОН (известные_значения_y; известные_значения_x),

ОТРЕЗОК (известные_значения_y; известные_значения_x),

где известные_значения_y – зависимое множество наблюдений или данных (для нас диапазон B2:B9), известные_значения_x – независимое множество наблюдений или данных (для нас диапазон A2:A9).

5.2. Функция ЛИНЕЙН возвращает параметры линейного приближения по методу наименьших квадратов. Аргументы функции представлены на рис. 10. Так как функция ЛИНЕЙН возвращает сразу два параметра, следовательно, выделим диапазон ячеек A8:B8 и введем эту функцию как формулу массива: ={ЛИНЕЙН(B2:B9;A2:A9;1;1)}, не забывая при этом нажимать «Ctrl»+«Shift»+«Enter». В результате получаем в ячейке A8 значение параметра *a*, в ячейке B8 – значение параметра *b* (рис. 11).

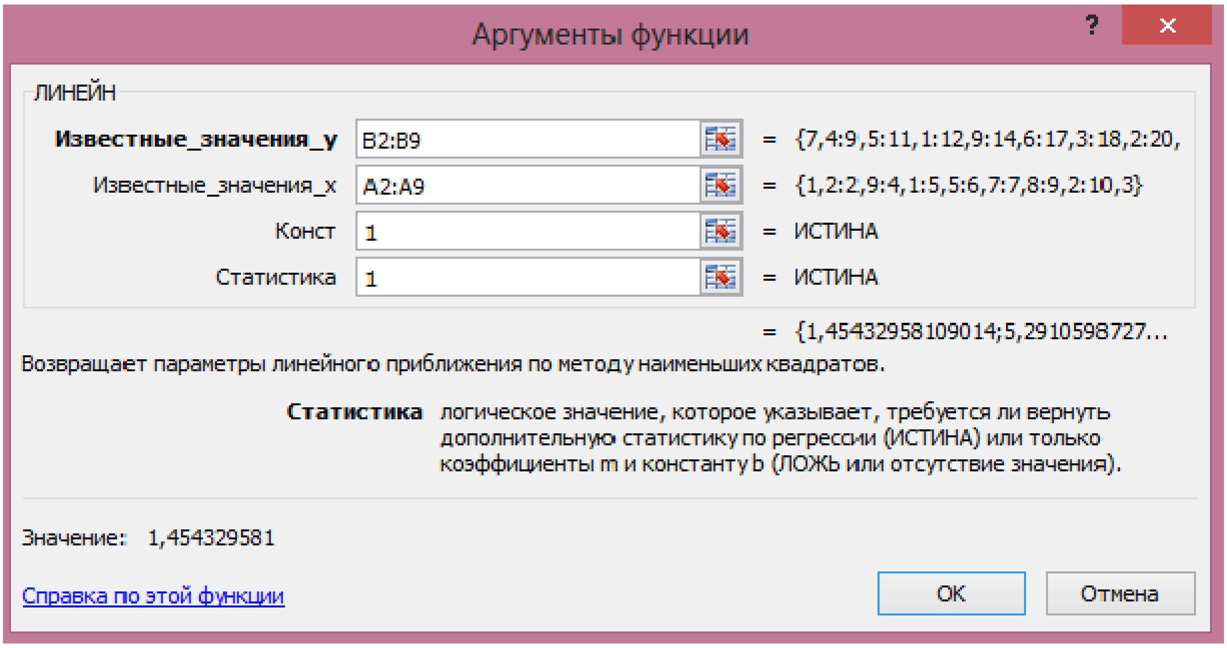


Рис. 10. Аргументы функции ЛИНЕЙН

	A	B	C	D	E
1	**x**	**y**	**a**	**b**	**S**
2	1,2	7,4	1,45433	5,29106	1,34585
3	2,9	9,5			
4	4,1	11,1	НАКЛОН	ОТРЕЗОК	
5	5,5	12,9	1,45433	5,2910599	
6	6,7	14,6			
7	7,8	17,3	ЛИНЕЙН		
8	9,2	18,2	1,4543296	5,2910599	
9	10,3	20,7			

Рис. 110. Вид рабочего листа *Excel*.
Использование статистических функций

6. Получим ряд данных для линейной регрессии, используя вычисленные значения a и b. Для этого введем в ячейку F2 формулу:=C2*A2+D2 и скопируем ее до конца диапазона, не забывая при этом использовать абсолютные ссылки для a и b. В столбце G вычислим $\varepsilon_i = ax_i + b - y_i$, а в столбце H – относительную погрешность $\delta_i = \frac{\varepsilon_i}{y_i}$. Окончательная таблица вычислений представлена на рис. 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**x**	**y**	**a**	**b**	**S**	**Линейный тренд: ax+b**	**Отклонение**	**Погрешность**
2	1,2	7,4	1,45433	5,29106	1,34585	7,03626	-0,36374	0,04915
3	2,9	9,5				9,50862	0,008615	0,00091
4	4,1	11,1	НАКЛОН	ОТРЕЗОК		11,25381	0,15381	0,01386
5	5,5	12,9	1,45433	5,29106		13,28987	0,389871	0,03022
6	6,7	14,6				15,03507	0,435067	0,02980
7	7,8	17,3	ЛИНЕЙН			16,63483	-0,66517	0,03845
8	9,2	18,2	1,45433	5,29106		18,67089	0,47089	0,02587
9	10,3	20,7				20,27065	-0,42935	0,02074

Рис. 12. Вид рабочего листа *Excel*. Результаты вычислений

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы квадратичную функцию:

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 - y_i)^2 \to \min.$$

Приравниваем к нулю частные производные S по неизвестным параметрам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i^2 = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad X_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad X_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3, \quad X_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^4,$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad Z_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad Z_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i.$$

Получим систему уравнений для нахождения параметров a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 X_1 + a_2 X_2 = Z_1 \\ a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 = Z_2 \\ a_0 X_2 + a_1 X_3 + a_2 X_4 = Z_3. \end{cases} \tag{3}$$

Используя правило Крамера, находим:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_0 = \det\begin{pmatrix} Z_1 & X_1 & X_2 \\ Z_2 & X_2 & X_3 \\ Z_3 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \det\begin{pmatrix} n & Z_1 & X_2 \\ X_1 & Z_2 & X_3 \\ X_2 & Z_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} n & X_1 & Z_1 \\ X_1 & X_2 & Z_2 \\ X_2 & X_3 & Z_3 \end{pmatrix} \quad \Delta = \det\begin{pmatrix} n & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}.$$

Вычислять определители в программном коде весьма затруднительно (не зная курса высшей математики), необходимо владеть навыками обработки матриц. Поэтому воспользуемся встроенной библиотекой Фортрана для матричных вычислений.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЦЕДУРАМИ IMSL

Математическая библиотека IMSL, входящая в состав профессиональных версий Фортрана, позволяет быстро получить решение необходимой задачи. Алгоритмы решения записаны в виде процедур, которые формируют библиотечные модули. Доступ к библиотечным модулям выполняется посредством использования оператора *use*. Воспользуемся этой библиотекой для нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2 системы (3). Для решения систем линейных уравнений и вычисления определителей применяется модуль с именем *msimsl*, который содержит множество процедур для обработки вещественных несимметрических матриц. Рассмотрим одну из них.

Подпрограмма LSARG

Назначение: выполняет *LU*-разложение матрицы A, решает систему линейных уравнений $Ax = b$ и выполняет итерационное уточнение решения.

Вызов подпрограммы:

CALL LSARG (*n, a, lda, b, ipath, x*)

Параметры подпрограммы: Входные: *n, a, lda, b, ipath*

Выходные: *x*

n − порядок матрицы A.

a − массив формы (*lda*, *lda*), содержащий элементы матрицы A, как правило, *lda* задается равным *n*,

lda − ведущий размер массива *a* по первому и второму измерениям,

b − вектор размера *n*, содержащий правую часть системы линейных уравнений,

ipath − флаг, *ipath*=1, если решается система $Ax = b$, *ipath* = 2, если решается система $A^T x = b$.

x – вектор размера *n*, в который записывается решение системы линейных уравнений.

На рис. 13 представлена программа нахождения коэффициентов эмпирической формулы $a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0$ с помощью библиотечного модуля LSARG.

Пояснения к программе approx2:

Исходные данные определяются в массивах *x* и *y*. Массив *f* содержит значения аппроксимирующей функции, массив *e* – значения разности полинома и функции, массив *p* – значения относительной погрешности.

Программа вычисляет коэффициенты левой части системы (3) с помощью встроенных функций для векторов и матриц. Функция sum(a) определяет сумму элементов массива, а функция dot_product(a,b) обеспечивает скалярное перемножение векторов а и b. Формирование матрицы A (3) происходит посредством анализа суммы индексов элемента этой матрицы в условной конструкции.

В качестве фактических параметров при вызове библиотечной процедуры использованы собственные имена (см. табл. 3), что никак не отражается на результатах работы программы.

Вывод результатов организован в файл с именем res (рис. 14). Сначала статус этого файла определен как «new» в операторе OPEN, при повторном запуске программы его необходимо изменить на «old». При этом использован форматированный вывод, который обеспечивает вывод результатов с помощью дескрипторов преобразования в удобном для нас виде.

```
program approx2
use msimsl
integer, parameter::n=8,lda=3,k=3,ipath=1
real a(k,k),b(k),c(k)
real::x(n)/-1.0,-0.4,0.2,0.8,1.4,2.0,2.6,3.2/
real::y(n)/-5.43,-4.47,-2.81,-0.65,1.94,5.31,9.23,12.75/
real::f(n),e(n),p(n),x1,x2,x3,x4,z1,z2,z3
open(7,file='res',status='new')
x1=sum(x);x2=sum(x**2);x3=sum(x**3);x4=sum(x**4)
z1=sum(y);z2=dot_product(x,y);z3=dot_product(x**2,y)
do i=1,k
do j=1,k
if (i+j==4) then
a(i,j)=x2
elseif(i+j==3) then
a(i,j)=x1
elseif(i+j==5) then
a(i,j)=x3
else
a(1,1)=n;a(k,k)=x4
endif
enddo
enddo
b(1)=z1;b(2)=z2;b(3)=z3
call lsarg(k,a,lda,b,ipath,c)
write(7,30)
30 format(8x,'x',13x,'y',15x,'f',12x,'e',11x,'p'/)
do i=1,n
f(i)=c(3)*x(i)**2+c(2)*x(i)+c(1)
e(i)=f(i)-y(i)
p(i)=e(i)/y(i)
s=s+e(i)**2
write(7,15) x(i),y(i),f(i),e(i),p(i)
15 format(f10.1,5x,f10.2,5x,3f12.4)
enddo
write(7,9)  s
9 format(/3x,'s=',f8.5/)
write(7,25) (c(i),i=1,k)
25 format(3x,'a0=',f8.4,5x,'a1=',f8.4,5x,'a2=',f8.4)
end
```

Рис. 13. Программа нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2 с помощью библиотечного модуля LSARG

Таблица 3

Соответствие формальных и фактических параметров для процедуры LSARG в программе approx2

Наименование параметра	Формальный параметр	Фактический параметр
Порядок матрицы *A*	*n*	*k*
Массив, содержащий элементы матрицы *A*	*a*	*a*
Ведущий размер массива *a* по первому и второму измерениям	*lda*	*lda*
Вектор правых частей системы линейных уравнений	*b*	*b*
Флаг для определения типа системы	*ipath*	*ipath*
Вектор решения системы линейных уравнений	*x*	*c*

```
          x             y              f            e           p

       -1.0          -5.43          -5.5438      -.1138       .0209
        -.4          -4.47          -4.3942       .0758      -.0170
         .2          -2.81          -2.7441       .0659      -.0234
         .8           -.65           -.5934       .0566      -.0871
        1.4           1.94           2.0579       .1179       .0608
        2.0           5.31           5.2098      -.1002      -.0189
        2.6           9.23           8.8623      -.3677      -.0398
        3.2          12.75          13.0154       .2654       .0208

   s=  .25580

   a0= -3.3498      a1=   2.8893      a2=    .6953
```

Рис. 14. Результаты работы программы approx2 (содержимое файла res)

Задание: построить в *Excel* полиномиальный тренд, разместить на диаграмме его уравнение и величину достоверности аппроксимации (рис. 15). Сформировать и заполнить таблицу на примере линейной аппроксимации (рис. 16). Сравнить результаты выполнения программы approx2 с результатами *Excel*. Сделать вывод.

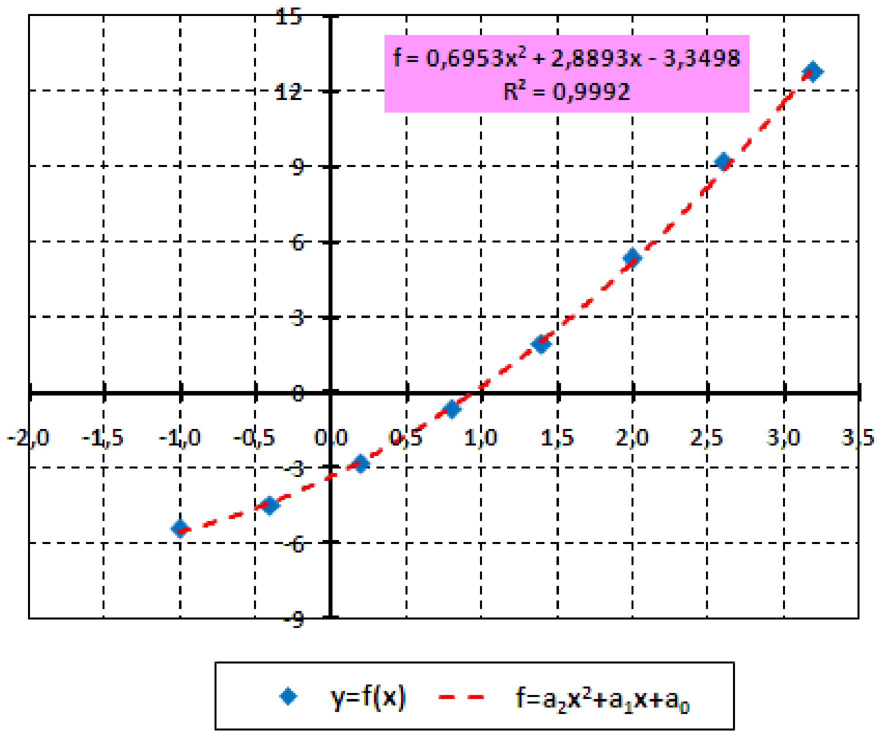


Рис. 15. Полиномиальный тренд

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	№	x	y	a_0	a_1	a_2	S	Полиномиальный тренд	Отклонение	Относительная погрешность
2	1									
3	2									
4	3									
5	.									
6	.									
7	.									
8	n									

Рис. 16. Квадратичная аппроксимация в *Excel*

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Написать и отладить программу метода наименьших квадратов для линейной аппроксимации (см. рис. 3).

2. Написать и отладить программу метода наименьших квадратов для квадратичной аппроксимации с использованием библиотечной процедуры (см. рис. 13).

3. По результатам выполненных программ сделать вывод о более достоверной аппроксимирующей функции для таблично заданной функции.

4. На рабочем листе *Excel* сформировать таблицу табулирования функции, построить диаграмму, добавить линейную линию тренда, уравнение регрессии и величину достоверности аппроксимации (см. рис. 5).

5. Для линейной регрессии получить значения коэффициентов, используя статистические функции: НАКЛОН, ОТРЕЗОК, ЛИНЕЙН.

6. Уточнить меру отклонения S, используя функцию СУММКВРАЗН и команду Поиск решения.

7. Получить ряды значений линейной регрессии, отклонения, относительной погрешности (см. рис. 12).

8. По заданной таблице исследовать полиномиальную регрессию, вычислить коэффициенты регрессии, минимизируя меру отклонения S.

9. Получить ряды значений полиномиальной регрессии, отклонения, относительной погрешности (см. рис. 16).

10. Выбрать наиболее достоверную регрессию по величине R^2 для заданной таблицы данных.

11. Создать отчет, который должен содержать:

11.1. Титульный лист.

11.2. Цель работы.

11.3. Рабочий лист *Excel* (см. рис. 5, 12, 15, 16).

11.4. Текст программы и результаты работы программы метода наименьших квадратов для линейной регрессии.

11.5. Текст программы и результаты работы программы для квадратичной регрессии.

11.6. Выводы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты заданий для лабораторной работы

Вариант №1

2,0	7,03
2,1	7,20
2,2	7,22
2,3	7,37
2,4	7,62
2,5	7,74
2,6	7,82
2,7	7,92
2,8	8,38
2,9	8,22
3,0	8,54

Вариант №2

-3,0	8,56
-2,6	7,55
-2,2	6,79
-1,8	6,15
-1,4	5,11
-1,0	4,77
-0,6	4,1
-0,2	3,58
0,2	2,95
0,6	1,73
1,0	0,92
1,4	0,32
1,8	0,11

Вариант №3

-2,0	3,73
-1,2	3,11
-0,4	2,25
0,4	1,98
1,2	1,35
2,0	0,73
2,8	0,32
3,6	-0,23
4,4	-0,78
5,2	-1,34
6,0	-2,05
6,8	-2,94
7,6	-3,73
8,4	-4,44
9,2	-5,11
10,0	-5,98

Вариант №4

-1,1	2,22
-0,9	2,57
-0,7	2,89
-0,5	3,76
-0,3	3,98
-0,1	4,34
0,1	4,79
0,3	5,67
0,5	6,21
0,7	6,88
0,9	7,49
1,1	8,03
1,3	8,85
1,5	9,67
1,7	10,23

Вариант №5

0,0	-0,23
0,3	-0,94
0,6	-1,32
0,9	-1,87
1,2	-2,45
1,5	-3,11
1,8	-3,95
2,1	-4,67
2,4	-5,13
2,7	-5,79
3,0	-6,45
3,3	-7,32
3,6	-7,84
3,9	-8,55

Вариант №6

2,0	0,22
2,7	1,11
3,4	2,23
4,1	3,34
4,8	4,45
5,5	5,67
6,2	6,81
6,9	7,34
7,6	8,67
8,3	9,90
9,0	10,23

Вариант №7

-3,0	-1,12
-1,8	0,34
-0,6	1,17
0,6	2,78
1,8	4,04
3,0	5,98
4,2	6,45
5,4	8,03
6,6	9,45
7,8	10,24
9,0	11,38
10,2	12,14
11,4	13,56

Вариант №8

-3,0	-5,55
-2,2	-6,78
-1,4	-7,32
-0,6	-8,11
0,2	-9,57
1,0	-10,3
1,8	-11,7
2,6	-12
3,4	-13
4,2	-13,9
5,0	-15,1

Вариант №9	
2,0	-1,22
2,5	-1,56
3,0	-2,45
3,5	-2,98
4,0	-3,76
4,5	-4,12
5,0	-4,83
5,5	-5,25
6,0	-5,72
6,5	-6,77
7,0	-7,31
7,5	-7,98
8,0	-8,16
8,5	-8,92
9,0	-9,45

Вариант №10	
1,0	1,35
1,2	2,46
1,4	3,12
1,6	3,95
1,8	4,67
2,0	5,29
2,2	6,42
2,4	7,75
2,6	8,49
2,8	9,24
3,0	10,33
3,2	11,05
3,4	12,38
3,6	13,51
3,8	14,37
4,0	15,72

Вариант №11	
2,0	3,17
2,2	3,87
2,4	4,22
2,6	4,67
2,8	5,35
3,0	5,74
3,2	6,22
3,4	6,92
3,6	7,38
3,8	8,22
4,0	8,54
4,2	9,11
4,4	9,67
4,6	10,25
4,8	10,79
5,0	11,53

Вариант №12	
-3,0	1,12
-2,5	2,15
-2,0	3,54
-1,5	4,32
-1,0	5,45
-0,5	6,73
0,0	7,29
0,5	8,31
1,0	9,56
1,5	10,83
2,0	11,29
2,5	12,38
3,0	13,55

Вариант №13	
-2,0	10,21
-1,4	9,35
-0,8	8,67
-0,2	6,12
0,4	4,95
1,0	3,64
1,6	2,11
2,2	1,05
2,8	-0,53
3,4	-1,89
4,0	-2,47
4,6	-3,28
5,2	-4,75
5,8	-6,04
6,4	-7,41

Вариант №14	
2,0	0,52
2,3	1,71
2,6	2,89
2,9	3,94
3,2	4,85
3,5	5,67
3,8	6,81
4,1	7,54
4,4	8,78
4,7	10,05
5,0	10,94

Вариант №15	
0,0	-0,13
0,2	-0,97
0,4	-1,52
0,6	-1,97
0,8	-2,35
1,0	-3,16
1,2	-3,95
1,4	-4,87
1,6	-5,33
1,8	-5,94
2,0	-6,45
2,2	-7,28
2,4	-7,84
2,6	-8,75
2,8	-9,34
3,0	-10,1

Вариант №16	
-3,0	2,32
-2,8	2,76
-2,6	3,15
-2,4	3,46
-2,2	3,98
-2,0	4,44
-1,8	4,96
-1,6	5,77
-1,4	6,31
-1,2	6,88
-1,0	7,49
-0,8	8,03
-0,6	8,75
-0,4	9,32
-0,2	10,23
0,0	10,89

Вариант №17	
1,0	-2,52
1,4	-1,37
1,8	0,19
2,2	1,78
2,6	3,11
3,0	5,38
3,4	6,45
3,8	7,73
4,2	8,45
4,6	10,24
5,0	11,38
5,4	12,84
5,8	13,56
6,2	14,21

Вариант №18	
-2,0	-1,25
-2,5	-2,77
-3,0	-3,72
-3,5	-4,31
-4,0	-5,47
-4,5	-6,34
-5,0	-7,22
-5,5	-8,43
-6,0	-9,67
-6,5	-10,5
-7,0	-11,4

Вариант №19	
2,0	-0,21
2,1	-0,86
2,2	-1,65
2,3	-2,58
2,4	-3,72
2,5	-4,27
2,6	-4,93
2,7	-5,25
2,8	-5,72
2,9	-6,77
3,0	-7,31
3,1	-8,24
3,2	-8,86

Вариант №20	
1,0	3,35
1,3	4,76
1,6	5,52
1,9	6,95
2,2	7,47
2,5	8,29
2,8	9,42
3,1	10,45
3,4	11,83
3,7	12,24
4,0	13,71

Вариант №21	
2,0	-1,46
2,3	-1,92
2,6	-2,57
2,9	-3,20
3,2	-3,98
3,5	-4,61
3,8	-5,09
4,1	-5,68
4,4	-6,34
4,7	-6,95
5,0	-7,62
5,3	-8,24
5,6	-8,84
5,9	-9,57
6,2	-10,16
6,5	-10,65

Вариант №22	
-2,0	4,30
-1,3	3,29
-0,6	2,21
0,1	1,21
0,8	0,19
1,5	-0,83
2,2	-1,87
2,9	-2,82
3,6	-3,94
4,3	-4,95
5,0	-5,96
5,7	-6,94
6,4	-8,03

Вариант №23	
-2,0	-1,72
-1,2	-1,03
-0,4	-0,61
0,4	-0,35
1,2	0,36
2,0	0,54
2,8	1,28
3,6	1,69
4,4	2,07
5,2	2,52
6,0	2,93
6,8	3,59
7,6	4,04

Вариант №24	
-3,0	5,14
-2,1	4,13
-1,2	3,01
-0,3	1,94
0,6	0,97
1,5	-0,11
2,4	-1,21
3,3	-2,23
4,2	-3,32
5,1	-4,29
6,0	-5,37
6,9	-6,44
7,8	-7,53

Вариант №25	
-1,8	-0,14
-1,6	0,04
-1,4	0,32
-1,2	0,63
-1	0,85
-0,8	1,07
-0,6	1,32
-0,4	1,64
-0,2	1,91
0	2,12
0,2	2,43
0,4	2,57

Вариант №26	
-0,7	1,58
-0,5	1,96
-0,3	2,44
-0,1	2,91
0,1	3,35
0,3	3,80
0,5	4,31
0,7	4,79
0,9	5,24
1,1	5,72
1,3	6,18
1,5	6,67

Вариант №27	
2,0	2,76
2,2	2,28
2,4	1,81
2,6	1,33
2,8	0,95
3,0	0,43
3,2	-0,02
3,4	-0,48
3,6	-0,87
3,8	-1,34
4,0	-1,82
4,2	-2,37
4,4	-2,79

Вариант №28	
-3,1	6,07
-2,3	5,88
-1,5	5,61
-0,7	5,34
0,1	5,17
0,9	4,89
1,7	4,65
2,5	4,41
3,3	4,12
4,1	2,91
4,9	3,65
5,7	3,47

Вариант №29	
-2,0	-8,05
-1,6	-7,17
-1,2	-4,53
-0,8	-5,72
-0,4	-6,87
0,0	-3,31
0,4	-2,65
0,8	-1,84
1,2	-0,75
1,6	0,93
2,0	1,57

Вариант №30	
-3,3	0,09
-2,1	1,03
-0,9	1,86
0,3	2,65
1,5	3,54
2,7	4,33
3,9	5,17
5,1	5,98
6,3	6,84
7,5	7,71
8,7	8,59
9,9	9,37
11,1	10,52

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бартеньев О.В. FORTRAN современный. – М.: Диалог – МИФИ, 2005.

Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека ISML. Часть 1. – М.: Диалог – МИФИ, 2001.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4397.

Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4397.

Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2008. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid= 25&pl1_id=54.

Демидович Б.Н., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2009.

Кудашов В.Н. Введение в численные методы: Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2011.

Кудашов В.Н., Малышева Т.А. Фортран – 90. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2007.

Сулейманов Р.Р. Компьютерное моделирование математических задач. – М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4397.

Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Малышева Татьяна Алексеевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Компьютерная верстка
Д.Е. Мышковский

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 08.04.2016. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,09. Печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,0
Тираж 70 экз. Заказ № С 12

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9