

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

В.А. Коротков, Ю.В. Татаренко

**РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ
ВРАЩЕНИЯ ДВУХОПОРНЫХ РОТОРОВ
КОМПРЕССОРОВ И ДЕТАНДЕРОВ
ДИНАМИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА
ДЕЙСТВИЯ**

Учебно-методическое пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург
2015**

УДК 661.57

Коротков В.А., Татаренко Ю.В. Расчет критической частоты вращения двухпорных роторов компрессоров и детандеров динамического принципа действия: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2015. – 60 с.

Рассмотрены способы определения критической частоты вращения ротора холодильного центробежного компрессора энергетическим методом Релея. Подробно рассмотрен графоаналитический способ и даны рекомендации для составления программы расчета на ЭВМ по определению критической частоты вращения ротора холодильного центробежного компрессора. Приведенные способы могут использоваться для расчета критической частоты вращения ротора радиально-центробежного детандера.

Предназначено для бакалавров направления 16.03.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения по дисциплине «Динамические компрессоры и детандеры холодильных машин» всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Пронин

Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования, протокол № 3 от 30.11. 2015 г.

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2015

© Коротков В.А., Татаренко Ю.В., 2015

СОДЕРЖАНИЕ

1. КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА ВРАЩЕНИЯ РОТОРА	4
1.1. Критическая частота вращения невесомого упругого ротора с массивным диском.....	4
1.2. Критическая угловая скорость идеально сбалансированного ротора	11
1.3. Зависимость между критической угловой скоростью и частотой собственных свободных колебаний невращающегося ротора.....	13
1.4. Критическая угловая скорость массивного вала постоянного диаметра без дисков	15
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕЛЕЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРОВ ТУРБОМАШИН.....	23
2.1. Применение уравнения сохранения энергии к колебательным системам.....	23
2.2. Определение статического прогиба вала методом фиктивных сил	26
3. СПОСОБЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ РЕЛЕЯ.....	29
3.1. Разбиение ротора на участки, определение масс участков и реакций опор.....	29
3.2. Расчет и построение эпюры действительного изгибающего момента.....	35
3.3. Определение фиктивной нагрузки и реакций опор фиктивной балки	37
3.4. Расчет и построение эпюры фиктивного изгибающего момента.....	41
3.5. Определение критической частоты вращения ротора.....	46
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОЙ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ РОТОРОВ	47
5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ПЕРВОЙ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ РОТОРОВ.....	50
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	52
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	53

1. КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА ВРАЩЕНИЯ РОТОРА

Валы радиальных и осевых компрессоров и детандеров испытывают воздействие поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов. Однако диаметры валов реальных машин, выпускаемых промышленностью, во многих случаях больше определенных из условий прочности. Это объясняется особенностями динамики быстро вращающихся валов, которые могут при определенных частотах вращения, называемых критическими, терять устойчивость. В результате возникают поперечные колебания валов, которые могут быть столь значительными, что способны вывести из строя всю машину.

По мере приближения частоты вращения вала к критической наблюдается увеличение амплитуды колебаний вала и связанной с ней вибрации, которая достигает наибольшей величины при критической частоте вращения. Однако по мере увеличения частоты вращения вала амплитуда его поперечных колебаний уменьшается и машина снова начинает работать устойчиво.

1.1. Критическая частота вращения невесомого упругого ротора с массивным диском

Для выяснения физической сущности этого явления рассмотрим простейший ротор (рис. 1.1, а), состоящий из упругого невесомого вала, расположенного горизонтально на двух подшипниках такой конструкции, которая позволяет валу свободно прогибаться. Посередине между опорами на валу установлен диск, имеющий массу m .

При прогибе вала диск перемещается поступательно, силы инерции от ускорения при поворотах (качаниях) диска не возникают.

Невращающийся ротор испытывает действие силы тяжести диска, под действием которой прогибается по штриховой линии AOB . Максимальный прогиб невращающегося ротора будет y_0 .

Несмотря на то, что при изготовлении роторов стремятся добиться возможно более точной их балансировки, абсолютное совпадение центра масс ротора с геометрической осью его вращения не достигается практически никогда.

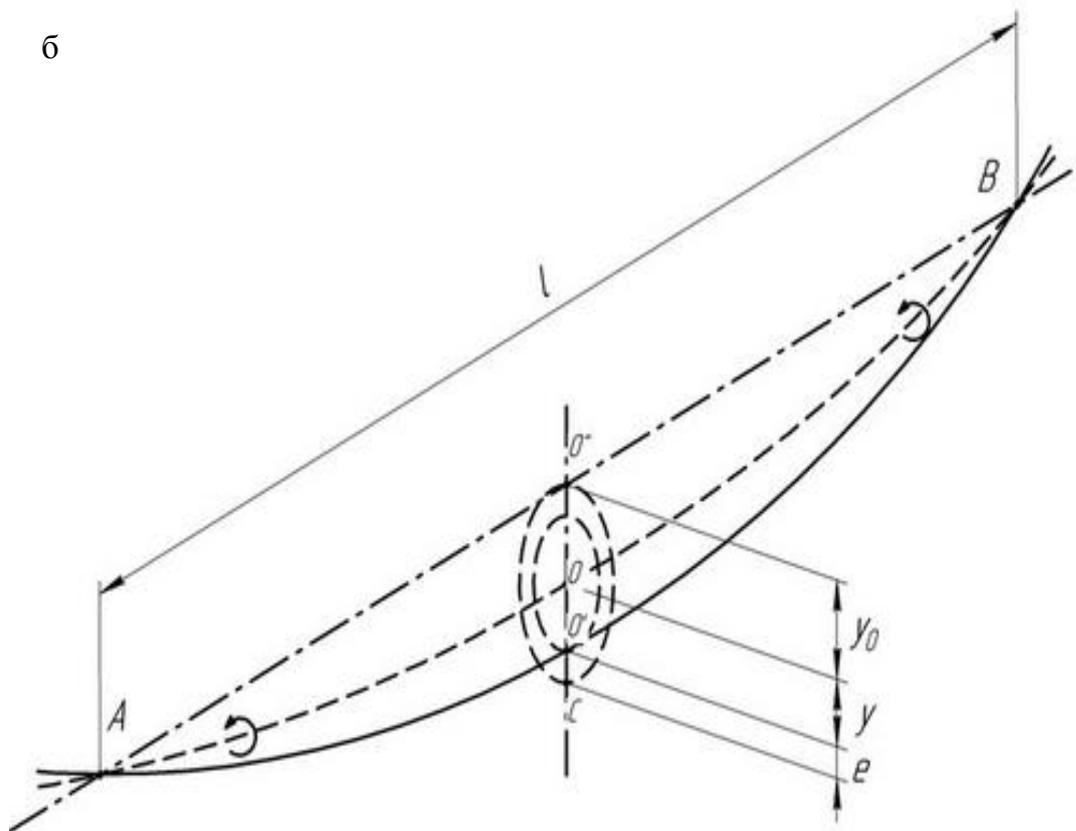
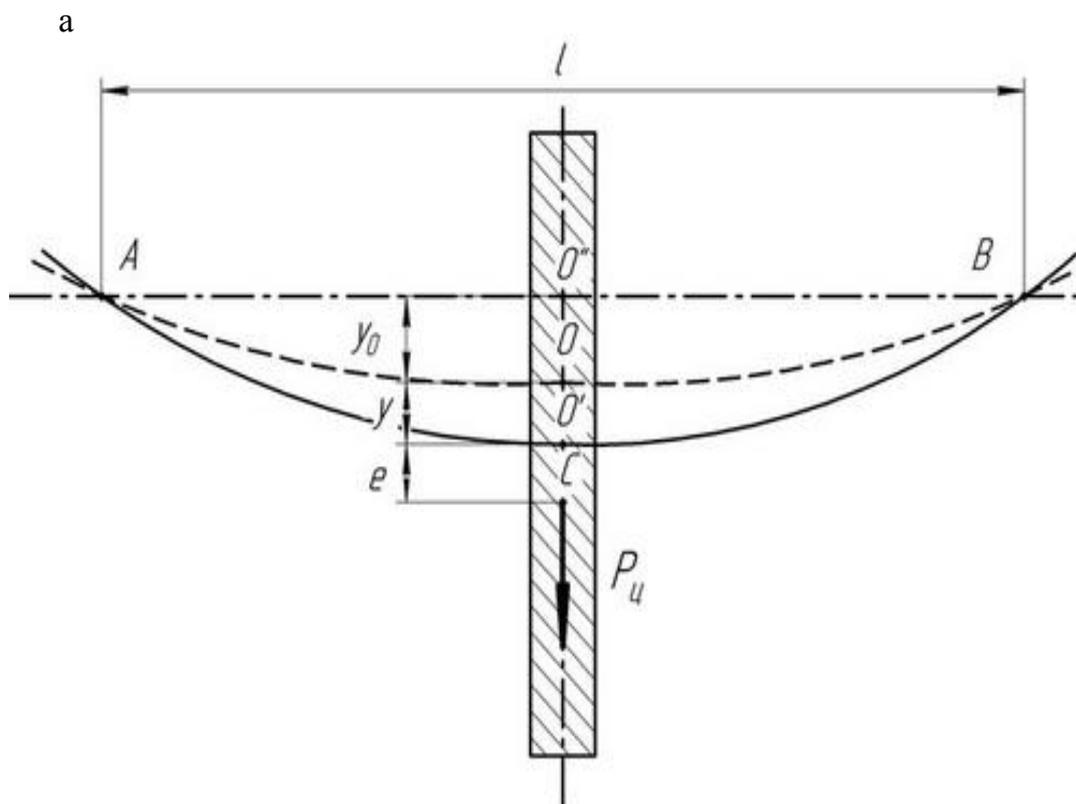


Рис. 1.1. Простейший ротор

Поэтому обычно центр масс C смещен относительно оси вращения на некоторый эксцентриситет e , который, как бы мал он не был, обуславливает возникновение центробежной силы $P_{ц}$, пропорциональной квадрату угловой скорости ротора.

Под воздействием этой силы упругий вал дополнительно прогибается на величину y , вследствие чего радиус вращения центра масс диска относительно линии статического прогиба AOB становится равным $y+e$. Траектория вращения центра масс C относительно точки O показана на рис. 1.1, б. Под действием силы $P_{ц}$ линия центров вращающегося вала AOB , являющаяся его динамической упругой линией, сама совершает вращательные движения вокруг статической упругой линии AOB .

Центробежная сила

$$P_{ц} = m (y+e) \omega^2, \text{ Н.} \quad (1.1)$$

При определении силы упругости вала $P_{упр}$ учитывается только динамический прогиб y , вызванный центробежной силой $P_{ц}$, так как статический прогиб y_0 от действия $P_{ц}$ не зависит:

$$P_{упр} = c y, \quad (1.2)$$

где c – жесткость упругого вала, численно равная силе, которую необходимо приложить, чтобы получить прогиб, равный единице.

Для вала постоянной толщины длиной l жесткость

$$c = A \frac{E J}{l^3}, \quad (1.3)$$

где A – безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от условий закрепления концов вала (табл. 1.1); E – модуль упругости материала вала, Па; J – момент инерции сечения вала, м^4 ; l – длина вала, м.

Приравняв центробежную силу $P_{ц}$, вызывающую прогиб вала, силе его упругого противодействия, получаем уравнение

$$m (y+e) \omega^2 = c y, \quad (1.4)$$

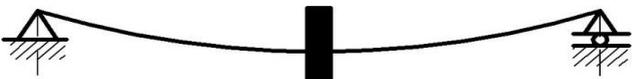
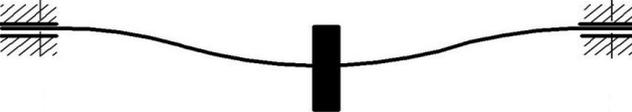
тогда величина динамического прогиба

$$y = \frac{me\omega^2}{c - m\omega^2}. \quad (1.5)$$

Анализ показывает, что при увеличении угловой скорости ω знаменатель полученного выражения уменьшается. Это сопровождается увеличением динамического прогиба y .

Таблица 1.1

Значение коэффициента А для трех случаев закрепления опор

	<p>Опоры вала позволяют ему свободно прогибаться</p>	<p>A=48</p>
	<p>Опоры вала жестко закреплены</p>	<p>A=192</p>
	<p>Левая опора жестко закреплена, диск располагается на консоли</p>	<p>A=3</p>

Критической угловой скоростью ротора называется угловая скорость, при которой знаменатель в выражении (1.5) становится равным нулю, а динамический прогиб – теоретически бесконечной величиной $y \rightarrow \infty$:

$$c - m\omega^2 = 0. \quad (1.6)$$

В действительности из-за внешнего и внутреннего (в материале вала) трения и, конечно, из-за конструктивных ограничений динамический прогиб не может бесконечно возрастать, возникающие при этом вибрации могут вызвать разрушения как самого ротора, так и окружающих его деталей и привести к аварии.

Критическую угловую скорость $\omega_{кр}$ выразим из уравнения (1.6):

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}, c^{-1}. \quad (1.7)$$

Критическое число оборотов

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} = 9,549 \sqrt{\frac{c}{m}}, \text{ об/мин.} \quad (1.8)$$

Также критическое число оборотов $n_{кр}$ можно определить, учитывая вместо массы численно равный ей вес:

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{981c}{G}} = 299 \sqrt{\frac{c}{G}}. \quad (1.9)$$

Выразив жесткость из уравнения (1.7), можно проанализировать поведение ротора при угловой скорости выше критической:

$$c = m \omega_{кр}^2. \quad (1.10)$$

Динамический прогиб ротора, используя выражение (1.5), можно записать в следующем виде:

$$y = \frac{m e \omega^2}{m \omega_{кр}^2 - m \omega^2} = e \frac{\omega^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2}. \quad (1.11)$$

Видно, что при $\omega > \omega_{кр}$ динамический прогиб вала становится отрицательным и при увеличении ω будет уменьшаться. Однако это уменьшение имеет свой предел.

Теоретически при бесконечном увеличении угловой скорости $\omega \rightarrow \infty$ динамический прогиб вала будет стремиться к эксцентриситету $y \rightarrow -e$. В рассматриваемом предельном режиме центр масс диска S перемещается в центр вращения и совпадает с точкой O , а все остальные элементы системы вращаются вокруг него.

В результате упругий вал все время имеет динамический прогиб, равный эксцентриситету, так как вынужден вращаться не вокруг своей геометрической оси, а вокруг оси, проходящей через центр масс C . Вследствие этой особенности валы, вращающиеся при $\omega > \omega_{кр}$, условно называются «гибкими», а работающие при $\omega < \omega_{кр}$ – «жесткими».

Таким образом, при $\omega < \omega_{кр}$ центр масс C находится на большем расстоянии от точки O (рис. 1.2, а), а после перехода критической частоты при $\omega > \omega_{кр}$ он занимает промежуточное положение, при котором динамический прогиб вала y становится значительно больше, чем при докритической угловой скорости (см. рис. 1.2, б). По мере увеличения ω точка C приближается к O , при $\omega \rightarrow \infty$ эти точки совпадают (см. рис. 1.2, в) и в этой области вал обладает свойством самоцентрирования.

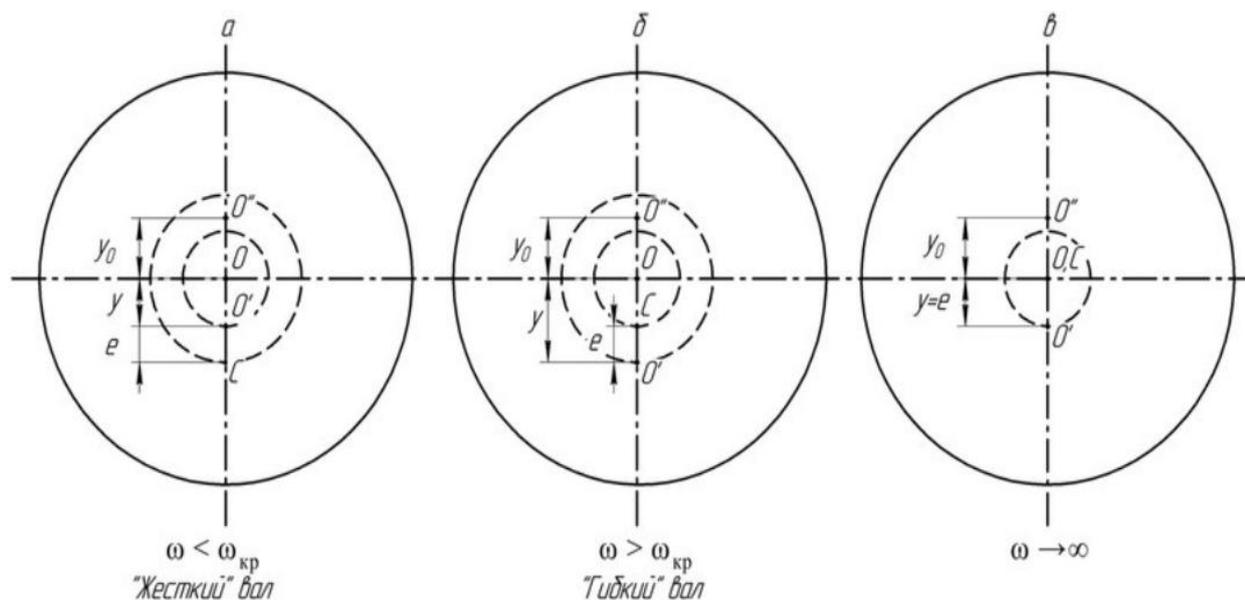


Рис. 1.2. Изменение динамического прогиба невесомого упругого вала

Изменение динамического прогиба невесомого упругого вала с диском, имеющим массу m и расположенным посередине между опорами в зависимости от угловой скорости, представлено на рис. 1.3.

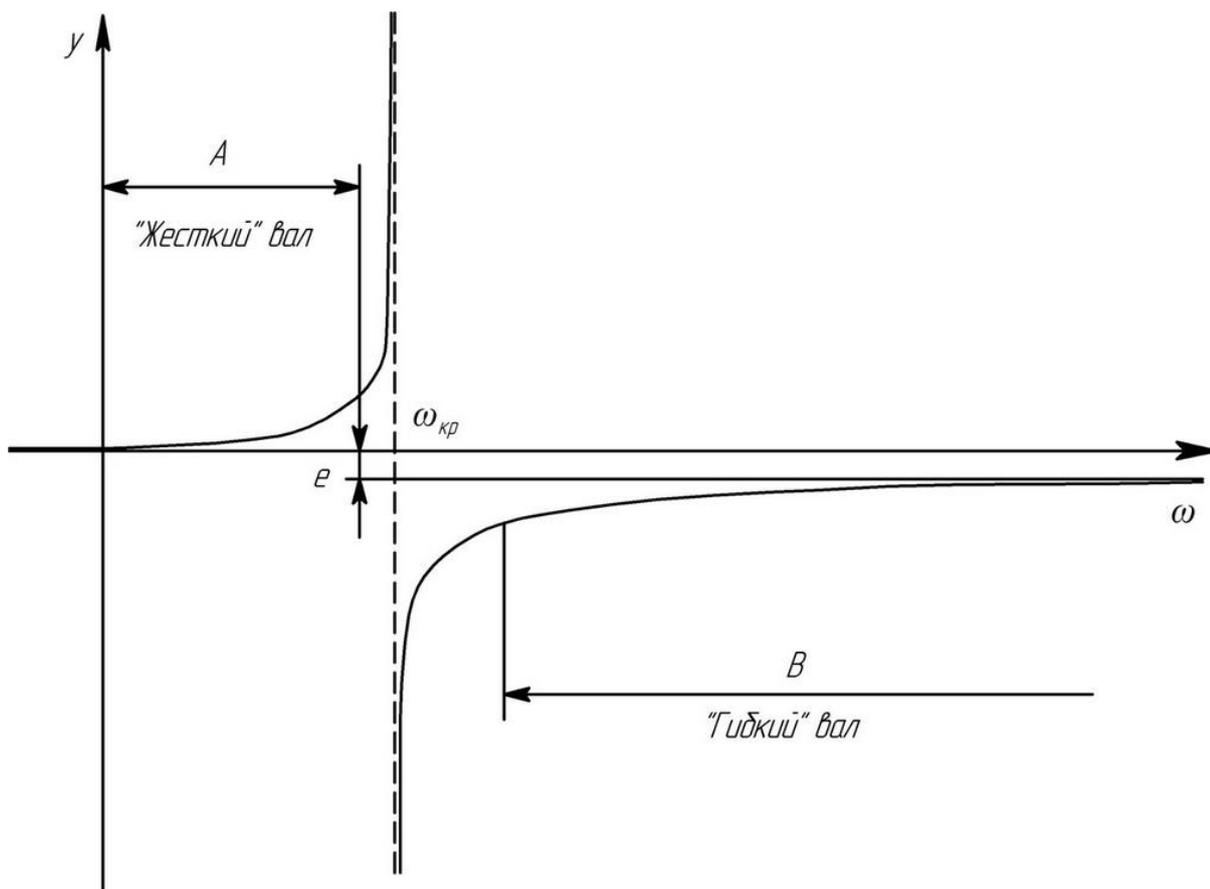


Рис. 1.3. Область работы «жесткого» и «гибкого» валов

Область A работы «жесткого» вала располагается на графике (см. рис. 1.3) при

$$\omega \leq 0,7 \div 0,8 \omega_{кр}. \quad (1.12)$$

Область B работы «гибкого» вала (см. рис. 1.3) – при

$$\omega \geq 1,2 \div 1,3 \omega_{кр}.$$

В дальнейшем будет доказано, что реальные упругие валы с распределительной по длине массой имеют бесчисленное множество критических угловых скоростей, из которых практическое значение в подавляющем большинстве случаев имеют первые две, которые обозначаются $\omega_{кр1}$ и $\omega_{кр2}$.

Исходя из этого область работы «гибких валов» лежит в пределах

$$1,2 \div 1,3 \omega_{кр1} \leq \omega \leq 0,7 \div 0,8 \omega_{кр2}. \quad (1.13)$$

В практических условиях при проектировании машин, как правило, стараются получить «жесткие» валы, так как это дает следующие преимущества:

– нет необходимости применять какие-либо приспособления, ограничивающие вибрации при переходе через $\omega_{кр}$;

– можно уменьшить зазоры в лабиринтных уплотнениях;

– нет необходимости применять подшипники специальной конструкции, позволяющие валу свободно прогибаться при переходе через критическую угловую скорость;

– улучшаются условия работы концевых торцевых уплотнений, особенно если они расположены между подшипниками и прочной частью.

В компрессорных и расширительных машинах динамического принципа действия «жесткий» вал удастся получить не всегда.

В некоторых машинах малой производительности и высоких отношений давления вал может быть выполнен только гибким. Поэтому для таких машин при расчетах определяют как первую, так и вторую критическую угловую скорость с тем, чтобы проверить условие (1.13) и гарантировать его выполнение [1].

1.2. Критическая угловая скорость идеально сбалансированного ротора

Выше был рассмотрен случай, когда динамический прогиб вала вызывается центробежной силой, возникающей из-за наличия эксцентриситета между геометрическим центром вращения и центром масс диска. Значит ли это, что в том случае, когда эксцентриситет равен нулю, опасность потери устойчивости вала исчезает?

Рассмотрим случай, когда ротор идеально сбалансирован и, значит, $l = 0$. Приложив произвольную силу к вращающемуся ротору и придав ему некоторый прогиб y , определим, при каких условиях этот прогиб сохранится или наступит некоторое новое

равновесное состояние. Для этого необходимо, чтобы центробежная сила уравновешивалась упругой реакцией вала:

$$m y \omega^2 = c y. \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.14) непосредственно следует, что искомая угловая скорость в точности равна ранее найденной критической угловой скорости ротора:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_{\text{кр}}.$$

При всех значениях $\omega \neq \omega_{\text{кр}}$ прогиб y , вызванный принудительным внешним воздействием, не сохраняется; таким образом, система является устойчивой, так как, будучи выведена из первоначального состояния, снова к нему возвращается.

При $\omega = \omega_{\text{кр}}$ равновесие наступает при любом прогибе y . Поэтому сколь бы мало ни было внешнее воздействие, прогиб, им вызванный, может теоретически неограниченно возрастать, так как вал находится в состоянии безразличного равновесия и, значит, система является неустойчивой.

Даже идеальная, возможная лишь теоретически, балансировка ротора не гарантирует от потери устойчивости и неограниченного роста динамического прогиба при приближении его угловой скорости к критической.

Исходя из этого, можно дать такое определение критической угловой скорости: критической угловой скоростью называется такая скорость, при которой в случае идеально сбалансированного ротора центробежная сила будет уравновешиваться упругой реакцией вала при любых прогибах y .

Установим связь между статическим прогибом y_0 (см. рис. 1.1) под действием силы тяжести диска и критической угловой скоростью $\omega_{\text{кр}}$.

Сила тяжести диска

$$G = m g, \text{ Н,}$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести.

Сила тяжести диска также связана с прогибом y_0 соотношением, аналогичным (1.2):

$$G = c y_0.$$

Прогиб y_0 можно определить как

$$y_0 = \frac{G}{c} = \frac{m g}{c}, \text{ м.}$$

Из выражения для определения жесткости (1.10), подставив полученный результат в предыдущее уравнение, найдем $\omega_{кр}$:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{y_0}}. \quad (1.15)$$

Задав значение критической скорости ротора $\omega_{кр}$, можно определить величину его статического прогиба под действием силы тяжести.

Этот важный вывод в дальнейшем будет использован для практического определения критической угловой скорости роторов турбомашин.

1.3. Зависимость между критической угловой скоростью и частотой собственных свободных колебаний невращающегося ротора

Предположим, что ротор, представленный на рис. 1.1, а, находится в состоянии равновесия, при котором его статический изгиб равен y_0 , и не вращается – $\omega = 0$.

Выведем его из этого состояния равновесия, приложив внешнюю силу, а после достижения определенного прогиба мгновенно прекратим действие внешней силы и предоставим систему невесомый вал–диск самой себе. Рассматриваемая система начнет совершать колебательные движения, уравнение которых будет иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c y, \quad (1.16)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} y = 0, \quad (1.17)$$

где $\frac{d^2 y}{dt^2}$ – ускорение центра масс диска.

Уравнение (1.16) отражает равенство силы инерции диска и силы упругого сопротивления вала.

Введем в рассмотрение коэффициент

$$p^2 = \frac{c}{m} \quad (1.18)$$

и получим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + p^2 y = 0. \quad (1.19)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi^2 + p^2 = 0. \quad (1.20)$$

Оба корня характеристического уравнения мнимые:

$$\varphi_1 = pi; \quad \varphi_2 = -pi.$$

В соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений общий интеграл уравнения

$$y = c_1 \cos pt + c_2 \sin pt, \quad (1.21)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, зависящие от начальных условий.

Окончательное выражение для динамического прогиба вала при гармонических колебаниях, если $c_1 = A \sin \delta$ и $c_2 = A \cos \delta$,

$$y = A \sin pt + \delta, \quad (1.22)$$

где A – амплитуда колебаний; p – круговая частота колебаний; δ – начальная фаза колебаний.

Круговая частота колебаний, как следует из уравнения (1.18), равна критической угловой скорости вращения ротора (1.7):

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_{\text{кр}}. \quad (1.23)$$

Это показывает, с одной стороны, что неограниченное возрастание динамического прогиба вала при $\omega \rightarrow \omega_{\text{кр}}$ объясняется возникновением резонанса, а с другой стороны, что определение критической угловой скорости ротора сводится к отысканию собственной частоты свободных колебаний невращающегося ротора.

1.4. Критическая угловая скорость массивного вала постоянного диаметра без дисков

Рассмотрим массивный вал постоянного диаметра без дисков, опирающийся на концах на подшипники такой конструкции, которая позволяет валу свободно прогибаться.

Схематически такой вал можно представить в виде балки, опирающейся на концах на шарнирные опоры (рис. 1.4).

Пусть при вращении вала с угловой скоростью ω он прогнулся так, что на абсциссе x прогиб составил y .

Выделим элемент вала dx . На него будет действовать распределенная нагрузка от центробежных сил:

$$dq = q dx = m \omega^2 y dx, \quad (1.24)$$

где m – масса единицы длины вала, кг/м.

К левому торцу выделенного элемента приложены поперечная сила Q и изгибающий момент M ; к правому – поперечная сила $Q + dQ$ и изгибающий момент $M + dM$.

Сумма проекций поперечных сил на ось y имеет такой вид:

$$Q + m \omega^2 y dx - Q - dQ = 0.$$

После сокращений представляется как

$$\frac{dQ}{dx} = m\omega^2 y. \quad (1.25)$$

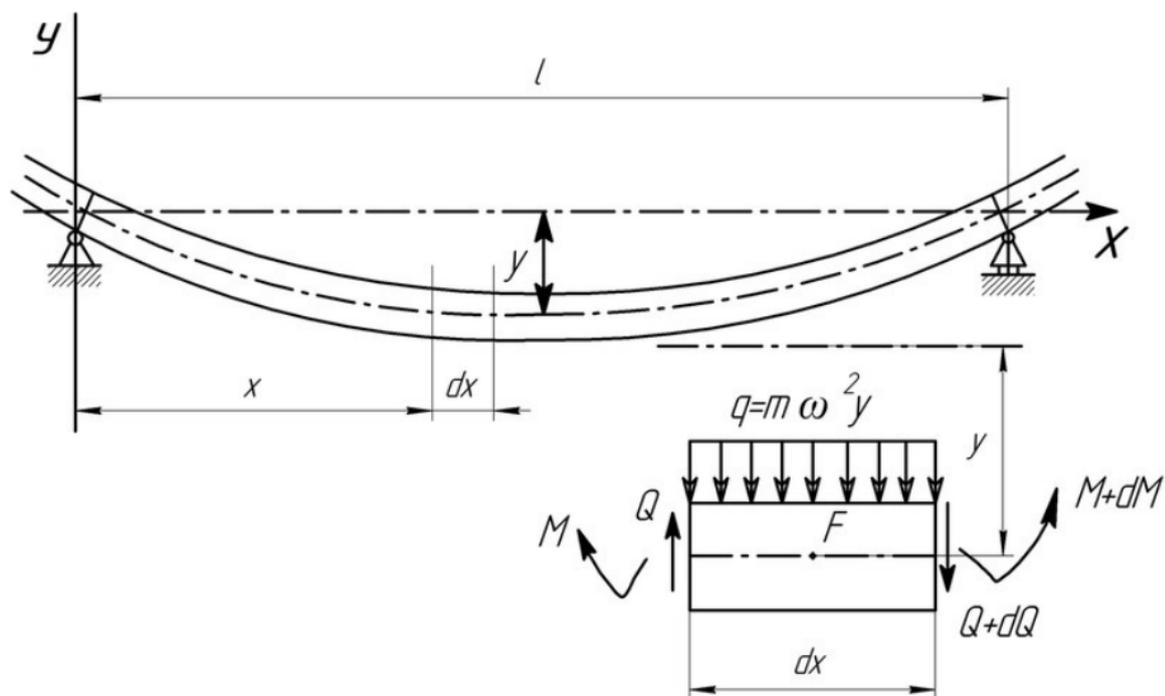


Рис. 1.4. Схема массивного вала постоянного диаметра без дисков

Сумма изгибающих моментов относительно центральной точки F элемента dx записывается как

$$M + Q \frac{dx}{2} + Q + dQ \frac{dx}{2} - M - dM = 0.$$

После сокращения и отбрасывания членов второго порядка малости уравнение принимает вид

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (1.26)$$

Продифференцировав (1.26) по x и подставив его в (1.25), найдем

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = m\omega^2 y. \quad (1.27)$$

Приближенное уравнение упругой линии балки постоянного сечения, известное из курса сопротивления материалов, имеет вид

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M. \quad (1.28)$$

Продифференцировав его дважды по x и подставив в (1.27), получаем окончательно следующее уравнение:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{m\omega^2}{EJ} y = 0. \quad (1.29)$$

Обозначив

$$k^4 = \frac{m\omega^2}{EJ}, \quad (1.30)$$

запишем уравнение (1.29) в виде

$$y^4 - k^4 y = 0. \quad (1.31)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка.

В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений характеристическим уравнением будет уравнение

$$\varphi^4 - k^4 = 0. \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) имеет два действительных и два мнимых корня:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \pm\sqrt{k^2} = \pm k; \\ \varphi_{3,4} &= \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki. \end{aligned}$$

Общий интеграл уравнения (1.31) представляется как

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + c_3 \operatorname{sh} kx + c_4 \operatorname{ch} kx, \quad (1.33)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Для рассматриваемого вала, свободно лежащего на двух опорах, граничные условия следующие:

- 1) при $x = 0$ будет $y = 0$;
- 2) при $x = l$ будет $y = 0$;
- 3) при $x = 0$ будет $y'' = 0$;
- 4) при $x = l$ будет $y'' = 0$.

Третье и четвертое условия являются следствием того, что при $x = 0$ и $x = l$ изгибающие моменты в сечениях будут равны нулю, а это в соответствии с уравнением (1.28) приводит к равенству нулю и вторых производных $\frac{d^2 y}{d x^2}$.

Из первого условия после подстановки $x = 0$ в уравнение (1.33) получаем

$$c_2 + c_4 = 0. \quad (1.34)$$

Двукратное дифференцирование уравнения (1.33) принимает следующий вид:

$$y'' = c_1 k^2 \sin kx + c_2 k^2 \cos kx + c_3 k^2 \operatorname{sh} kx + c_4 k^2 \operatorname{ch} kx. \quad (1.35)$$

Из третьего условия, подставив его в (1.35), находим

$$-c_2 + c_4 = 0. \quad (1.35a)$$

Второе условие преобразуется в следующее уравнение:

$$c_1 \sin kl + c_2 \cos kl + c_3 \operatorname{sh} kl + c_4 \operatorname{ch} kl = 0. \quad (1.36)$$

Из четвертого условия

$$-c_1 k^2 \sin kl - c_2 k^2 \cos kl + c_3 k^2 \operatorname{sh} kl + c_4 k^2 \operatorname{ch} kl = 0,$$

или, так как $k^2 \neq 0$,

$$-c_1 \sin kl - c_2 \cos kl + c_3 \operatorname{sh} kl + c_4 \operatorname{ch} kl = 0. \quad (1.37)$$

Вычитая (1.35а) из (1.34), находим $2c_2 = 0$ и $c_2 = 0$. Тогда из этих же уравнений получаем, что $c_4 = 0$. С учетом этого уравнения преобразуем уравнения (1.36) и (1.37):

$$c_1 \sin kl + c_3 \operatorname{sh} kl = 0;$$

$$-c_1 \sin kl + c_3 \operatorname{sh} kl = 0.$$

Сложив эти уравнения, находим, что

$$2c_3 \operatorname{sh} kl = 0. \quad (1.37a)$$

Проанализировав уравнение (1.37а), получим, что $c_3 = 0$.

Также, рассматривая вышепредставленные уравнения и вычитая одно из другого, получаем, что

$$2c_1 \sin kl = 0$$

или

$$c_1 \sin kl = 0. \quad (1.38)$$

Рассмотрев уравнение (1.33), можно сделать вывод, что при $0 < x < l$, когда $y \neq 0$ (что подразумевается постановкой задачи), при $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ должно быть $c_1 \neq 0$. Из уравнения (1.38) следует, что

$$\sin kl = 0. \quad (1.39)$$

Это возможно, если

$$kl = n\pi, \quad (1.40)$$

где n – любое из чисел натурального ряда $1, 2, 3, \dots$

Из найденного уравнения следует, что

$$k = \frac{n\pi}{l}. \quad (1.41)$$

Подставив (1.41) в (1.30), находим критическую угловую скорость вала:

$$\omega_{\text{кр}} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (1.42)$$

Если принять во внимание, что полная масса вала

$$M_{\text{в}} = ml,$$

то (1.42) можно привести к виду

$$\omega_{\text{кр}} = n\pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{M_{\text{в}} l^3}}. \quad (1.43)$$

Из выражений (1.42) и (1.43) следует, что массивный вал имеет не одну критическую угловую скорость, как было ранее получено для не имеющего массы упругого вала с массивным диском, а бесчисленное множество критических угловых скоростей, так как n может быть любым числом натурального ряда.

В соответствии с этим критическую угловую скорость при $n = 1$ называют «первой» $\omega_{\text{кр}1}$, при $n = 2$ – «второй» $\omega_{\text{кр}2}$, при $n = 3$ – «третьей» $\omega_{\text{кр}3}$ и т. д. Значения этих угловых скоростей относятся друг другу как квадраты чисел натурального ряда:

$$\omega_{\text{кр}1}, \omega_{\text{кр}2}, \omega_{\text{кр}3} \dots = 1^2 : 2^2 : 3^2 \dots$$

Для рассмотренного вала постоянного сечения $\omega_{\text{кр}2} = 4\omega_{\text{кр}1}$ и $\omega_{\text{кр}3} = 9\omega_{\text{кр}1}$. Критические угловые скорости более высокого порядка, чем второй, в большинстве случаев в компрессорной и холодильной технике не определяются.

В качестве примера отметим, что для массивного стального вала диаметром $d = 0,05$ м и длиной $l = 1$ м первая и вторая критические угловые скорости будут равны:

$$\omega_{кр1} = 625 \text{ рад/с}$$

и

$$\omega_{кр2} = 2500 \text{ рад/с},$$

что соответствует

$$n_{кр1} = 5968 \text{ об/мин}$$

и

$$n_{кр2} = 23873 \text{ об/мин.}$$

Рассмотрим теперь форму упругой линии вала, которую он принимает при критических угловых скоростях различного порядка.

Так как выше было установлено, что произвольные постоянные $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, то из (1.33) получим уравнение упругой линии:

$$y = c_1 \sin kx, \quad (1.44)$$

с учетом (1.41)

$$y = c_1 \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.45)$$

При различных n и $\omega_{крn}$ упругая линия вала будет описываться следующими уравнениями:

$$n = 1; \quad \omega_{кр1} = \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}}; \quad y_1 = c_1 \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$n = 2; \quad \omega_{кр2} = 4\pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}}; \quad y_2 = c_1 \sin \frac{2\pi x}{l};$$

$$n = 3; \quad \omega_{кр3} = 9\pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{Ml^3}}; \quad y_3 = c_1 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Из этих выражений видно, что форма упругой линии вала при критических угловых скоростях различных порядков является синусоидальной с числом полуволн, равным порядку критической угловой скорости.

При $\omega_{кр1}$ синусоида имеет одну полуволну (рис. 1.5), при $\omega_{кр2}$ – две полуволны с одной узловой точкой, при $\omega_{кр3}$ – три полуволны и две узловые точки, делящие вал на три равные части, и т. д.

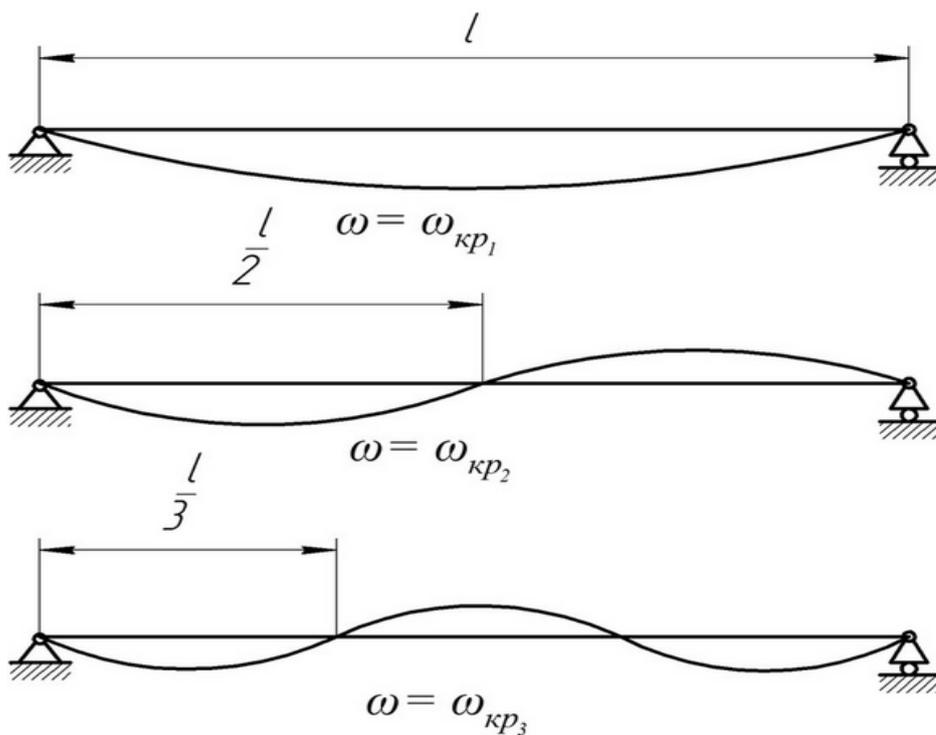


Рис. 1.5. Форма упругой линии вала при критических угловых скоростях различных порядков

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕЛЕЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРОВ ТУРБОМАШИН

2.1. Применение уравнения сохранения энергии к колебательным системам

Для сложных колебательных систем составление и решение частотных уравнений являются весьма сложными, на практике часто предпочитают применять приближенные методы определения собственных частот колебаний.

Метод Релея основывается на приравнивании максимальных кинетической и потенциальной энергий колебательной системы.

Кинетическая энергия системы имеет максимум тогда, когда скорость системы достигает максимума, а напряжения в упругих элементах равны нулю. Для колеблющегося ротора это соответствует прохождению линии нулевого прогиба, при котором потенциальная энергия равна нулю.

Потенциальная энергия, наоборот, имеет максимум, когда скорость системы равна нулю, а прогиб достигает наибольшего значения.

Вспомнив формулу (1.15), показавшую связь статического прогиба вала с его критической частотой вращения, сделаем допущение, что истинная динамическая упругая линия колеблющегося ротора может быть заменена статической упругой линией, вдоль которой вал прогибается под собственным весом и весом насаженных на него частей. Опыт практических расчетов показывает, что это допущение не приводит к значительным погрешностям в определении ω .

На рис. 2.1 представлена схема ротора, расположенного на двух опорах. Массы M_i участков самого вала с насаженными на него деталями вызывают действие сил тяжести $G_i = M_i g$, приложенных в центрах масс участков (вопрос о разбиении ротора на участки будет рассмотрен ниже при практическом определении собственной частоты его колебаний). Рассмотрим его свободные поперечные колебания под действием сил тяжести G_i .

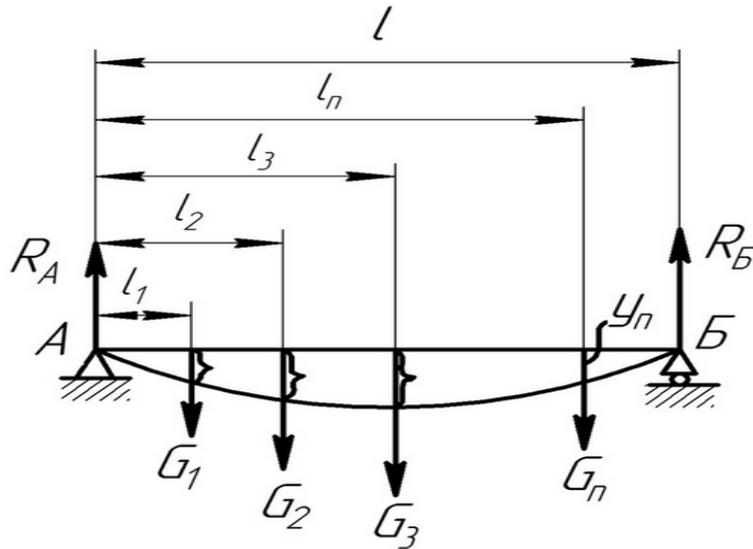


Рис. 2.1. Схема ротора, расположенного на двух опорах

Потенциальная энергия системы будет наибольшей при максимальном прогибе вала, она вычисляется по формуле

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{G_i y_i}{2} = \frac{g}{2} \sum_{i=1}^n M_i y_i, \quad (2.1)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести; $1/2$ – множитель, который показывает, что сопротивление изгибу (или напряжение в изогнутом вале) возрастает линейно от нуля при отсутствии прогиба, до $\sum_{i=1}^n G_i$ при наибольшем изгибе, а значит, потенциальная энергия изогнутого вала будет определяться как площадь треугольника со сторонами G_i и y_i для каждого i -го элемента разбиения ротора.

Кинетическая энергия системы будет наибольшей при нулевом прогибе, когда скорости перемещения масс M_i достигают наибольших значений $\vartheta_i = \vartheta_{i \max}$, а сопротивление материала вала изгибу полностью отсутствует:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{M_i \vartheta_{i \max}^2}{2}. \quad (2.2)$$

При гармонических колебаниях вала его прогиб Y_i в любой промежуток времени определяется для каждой массы M_i зависимостью, аналогичной (1.22), в которой начальная фаза колебаний $\delta = 0$:

$$Y_i = y_i \sin pt, \quad (2.3)$$

где y_i – амплитуда колебаний или максимальный прогиб вала в месте расположения массы M_i , м; p – круговая частота колебания, рад/с; t – текущее время, с.

Скорость перемещения i -й массы M_i определяется дифференцированием зависимости (2.3) по времени:

$$\vartheta_i = \frac{dY}{dt} = y_i p \cos pt. \quad (2.4)$$

Ее максимальное значение будет, очевидно, при $t = 0$, когда $\cos pt = 1$:

$$\vartheta_{i \max} = y_i p. \quad (2.5)$$

С учетом этого результата максимальная кинетическая энергия (2.2) может быть записана как

$$K = \frac{p}{2} \sum_{i=1}^n M_i y_i^2. \quad (2.6)$$

В соответствии с законом сохранения энергии при колебательном движении без трения максимальная кинетическая энергия системы равна максимальной потенциальной энергии ($K = \Pi$). Тогда, применив уравнения (2.1) и (2.6), получим, что

$$\frac{p}{2} \sum_{i=1}^n M_i y_i^2 = \frac{g}{2} \sum_{i=1}^n M_i y_i.$$

Преобразовав полученное уравнение, получим выражение для расчета собственной частоты свободных колебаний вала:

$$p = \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^n M_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i y_i^2}} = 3,132 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n M_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i y_i^2}}, \quad (2.7)$$

где y_i – прогибы вала в центрах масс i -х участков, м; M_i – массы i -х участков с насаженными на вал деталями, кг; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести; p – частота, рад/с.

2.2. Определение статического прогиба вала методом фиктивных сил

Из выражения (2.7) следует, что для определения собственной частоты свободных колебаний вала, численно равной критической угловой скорости его вращения, необходимо знать его прогибы y_i под действием сил тяжести. Для их определения можно воспользоваться известным из курса сопротивления материалов методом фиктивных сил [2].

Приближенное уравнение (1.28) изогнутой оси балки, нагруженной произвольной системой сил, имеет вид

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = M(x). \quad (2.8)$$

Кроме того, известны дифференциальные соотношения, связывающие распределенную нагрузку, поперечную силу и изгибающий момент:

$$\frac{d Q}{d x} = q \text{ и } \frac{d M}{d x} = Q, \quad (2.9)$$

где Q – поперечная сила, Н; M – изгибающий момент, Н·м; q – распределенная нагрузка, Н/м.

Из этих выражений следует, что

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = q. \quad (2.10)$$

Положим, что имеется вал АБ (рис. 2.2), нагруженный некоторой системой сил, и определим на нее эпюру изгибающего момента M_x .

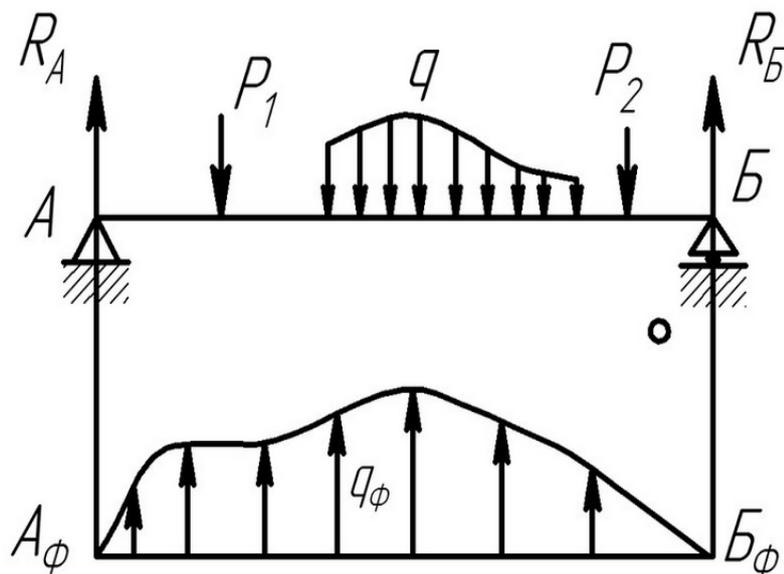


Рис. 2.2. Нагружение валов различными видами сил

Под ним изобразим вал $A_\phi B_\phi$ точно такой же геометрии, что и вал АБ, но нагрузим его некоторой сплошной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону действительного изгибающего момента, а саму эту нагрузку условно назовем фиктивной:

$$q_\phi = M_x. \quad (2.11)$$

Определим для вала $A_\phi B_\phi$ эпюру фиктивного изгибающего момента $M_\phi x$, вызванного распределенной нагрузкой q_ϕ , используя уравнение (2.10):

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = q_\phi = M_x. \quad (2.12)$$

Подставив полученное выражение в (1.28), найдем, что

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 M_\phi}{d x^2}. \quad (2.13)$$

После двукратного интегрирования, добившись равенства произвольных постоянных справа и слева, получим

$$E J y = M_{\phi}; \quad y = \frac{M_{\phi}}{E J}. \quad (2.14)$$

Таким образом, прогиб действительного вала АБ равен фиктивному изгибающему моменту в том же сечении балки $A_{\phi}B_{\phi}$, деленному на жесткость вала. Иными словами, эпюра фиктивного изгибающего момента представляет собой непосредственно упругую линию статического прогиба вала под действием сил тяжести в определенном масштабе.

Зависимость (2.14) справедлива для вала постоянного сечения, нагруженного произвольной системой сил, однако в компрессорах и детандерах динамического принципа действия валы постоянного сечения никогда практически не применяются. Могут лишь встречаться валы примерно одинакового сечения, да и то редко. Поэтому необходимо осуществлять приведение полученной эпюры действительного изгибающего момента к валу постоянного диаметра, за который обычно принимают максимальный диаметр вала d_{\max} .

Двукратное интегрирование уравнения упругой линии (1.28) дает такое выражение для прогиба:

$$y = \int \left[\int \frac{M}{E J} dx \right] dx + cx + D. \quad (2.15)$$

Очевидно, что эпюра изгибающего момента для вала постоянного диаметра d_{\max} должна быть изменена так, чтобы линия его прогиба была такой же, как и у вала переменного диаметра. Это возможно в том случае, если в каждом сечении по длине вала постоянного диаметра d_{\max} будет действовать некоторый приведенный изгибающий момент $M_{\text{пр}}$, такой, что будет выдержано равенство

$$\frac{M_{\text{пр}}}{E J_{\max}} = \frac{M}{E J}. \quad (2.16)$$

Полученное выражение дает нам правило для определения приведенного изгибающего момента:

$$M_{\text{пр}} = M \frac{J_{\text{max}}}{J} = M \left(\frac{d_{\text{max}}}{d} \right)^4, \quad (2.17)$$

где J_{max} – момент инерции вала диаметром d_{max} ; J – момент инерции вала текущего диаметра d ; M – действительный изгибающий момент, действующий в рассматриваемом сечении вала диаметра d .

Заметим, что замена соотношения моментов инерции на отношение диаметров в четвертой степени справедлива только для сплошных валов, не имеющих внутренней полости.

Для стационарных радиальных машин динамического принципа действия такие валы наиболее характерны [3, 4], однако для осевых компрессоров часто применяются роторы с внутренним отверстием, это необходимо учитывать во избежание ошибок.

3. СПОСОБЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ РЕЛЕЯ

3.1. Разбиение ротора на участки, определение масс участков и реакций опор

Для проведения расчетов необходимо выполнить чертеж ротора – вала со всеми насаженными на него деталями в не слишком малом масштабе, чтобы не снизить точность получаемого результата (прил. 1). Для каждой детали, насаженной на вал, необходимо определить массу и положение центра масс.

Масса детали M_i определяется по ее объему и плотности материала:

$$M_i = V_i \rho, \text{ кг}, \quad (3.1)$$

где V_i – объем детали, определяемый путем суммирования объемов элементарных тел (конусов, цилиндров, пластин и т. д.), вписанных в контур детали, м^3 ; ρ – плотность материала детали, $\text{кг}/\text{м}^3$.

В тех случаях, когда элемент, насаженный на вал, является узлом, состоящим из нескольких деталей, выполненных из разных материалов, масса его определяется по более сложной формуле:

$$M_i = \sum_{j=1}^n V_{ij} \rho_j, \quad (3.2)$$

где $j = 1, \dots, n$ – текущий номер детали, входящей в состав элемента; V_{ij} – объем этой детали, м^3 ; ρ_j – плотность материала этой детали, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Положение центра масс детали для проведения расчетов отсчитывается вдоль оси вала.

На рис. 3.1 изображена ступенчатая втулка, насаженная на вал. Ее масса m может быть определена как

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \text{ кг.}$$

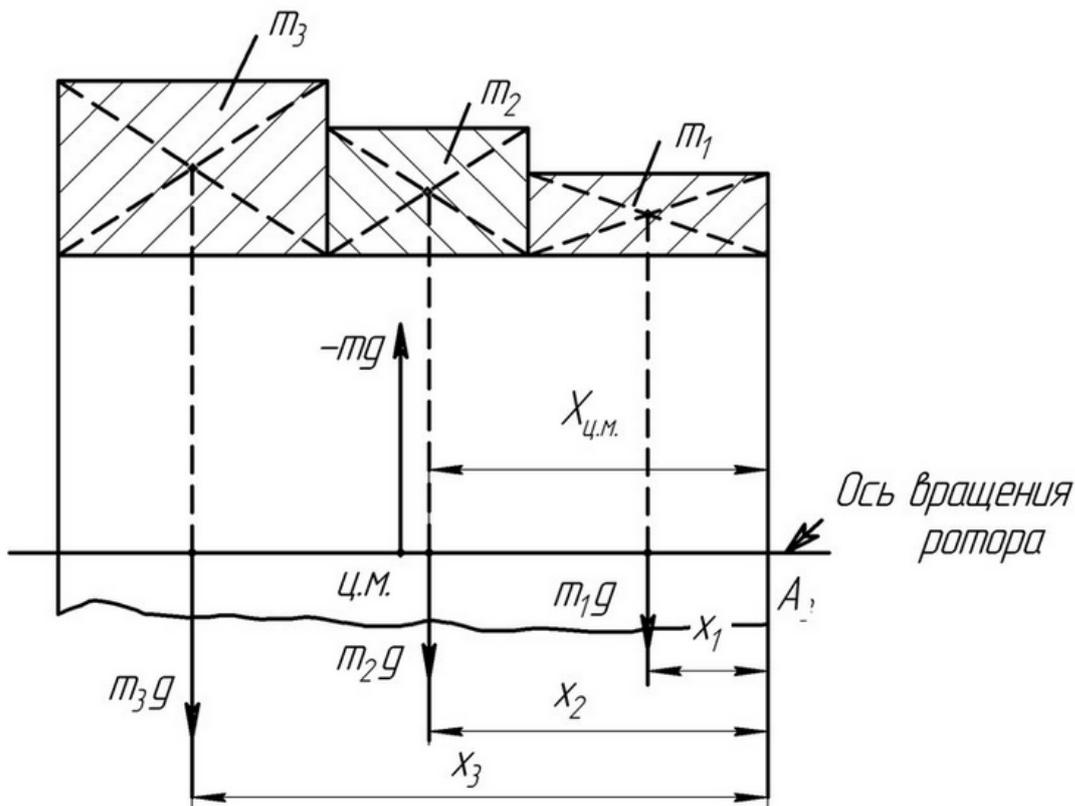


Рис. 3.1. Схема ступенчатой втулки, насаженной на вал

Осевые координаты центров масс каждого цилиндрического кольца, на которые втулка расчленяется, обозначены x_1, x_2, x_3 .

Центр масс втулки располагается на расстоянии $x_{\text{цм}}$ (м) от ее правого торца, которое может быть определено из уравнения моментов относительно точки А:

$$\sum_{i=1}^3 m_i x_i = m x_{\text{цм}}, \quad (3.3)$$

откуда

$$x_{\text{цм}} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{m}. \quad (3.4)$$

Заметим, что множитель g (ускорение силы тяжести) в уравнениях (3.3) и (3.4) опускается, что не сказывается на результате.

При разбиении ротора участки вала постоянного диаметра, на которых нет насаженных деталей или центры масс имеющихся деталей совпадают с центром масс самого участка, принимаются за расчетные участки. Однако, если на одном из участков вала постоянного диаметра насажена деталь или узел, центр масс которой совпадает с центром масс участка, необходимо этот участок разделить на несколько и под насаженной деталью выделить в качестве расчетного участка такой, центр масс которого будет совпадать с центром масс насаженной детали.

На рис. 3.2 изображен участок постоянного диаметра длиной l , на котором располагаются рабочее колесо 1 и втулка 2 с центрами масс в точках Б и В. Этот участок разбивается на три участка, длины которых l_i , l_{i+1} и l_{i+2} выбираются так, чтобы центры масс участков, на которых располагаются детали, совпадали с центрами масс этих деталей, т.е. располагались в точках Б и В.

Положение точек А левого участка затем определяется обычным образом.

На следующем этапе определяются массы участков со всеми насаженными на них деталями и силы тяжести, приложенные к центрам масс участков.

Силы тяжести G определяются по известной зависимости

$$G_i = m_i g, \text{ Н.} \quad (3.5)$$

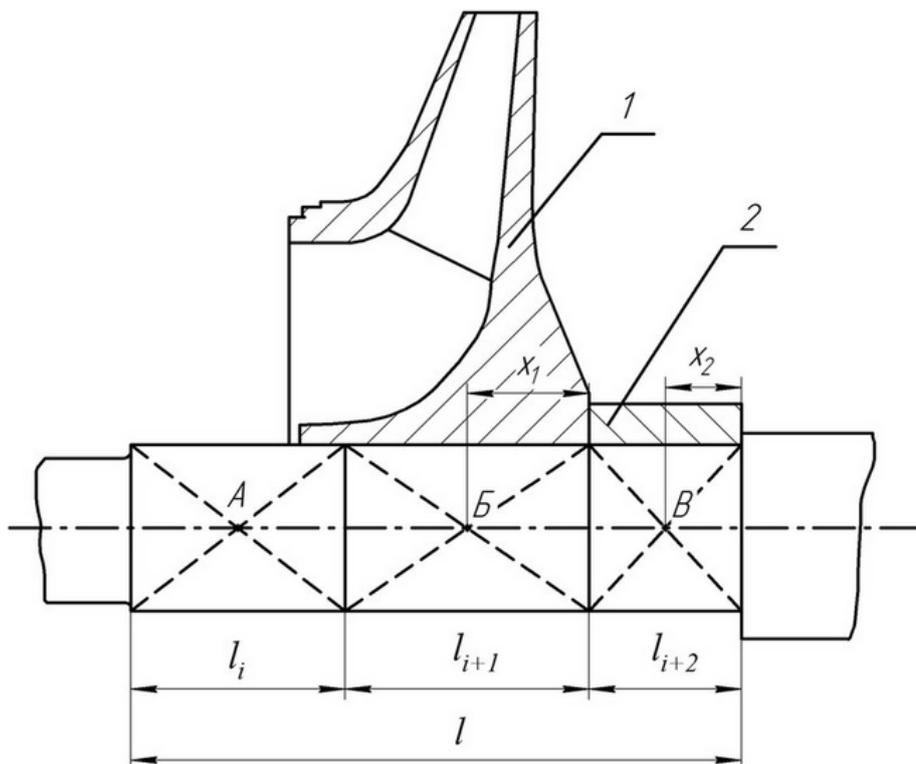


Рис. 3.2. Схема вала, нагруженного рабочим колесом и втулкой

Необходимо отметить, что направление сил тяжести при определении критической частоты вращения ротора зависит от формы его упругой линии, по которой ротор будет совершать вращательные движения относительно нейтральной оси, как это показано на рис. 1.1, б.

Для валов без консолей, а такие валы встречаются редко, упругая линия вала при первой критической угловой скорости будет такой, как показано на рис. 3.3, и все силы тяжести следует направить в одну сторону.

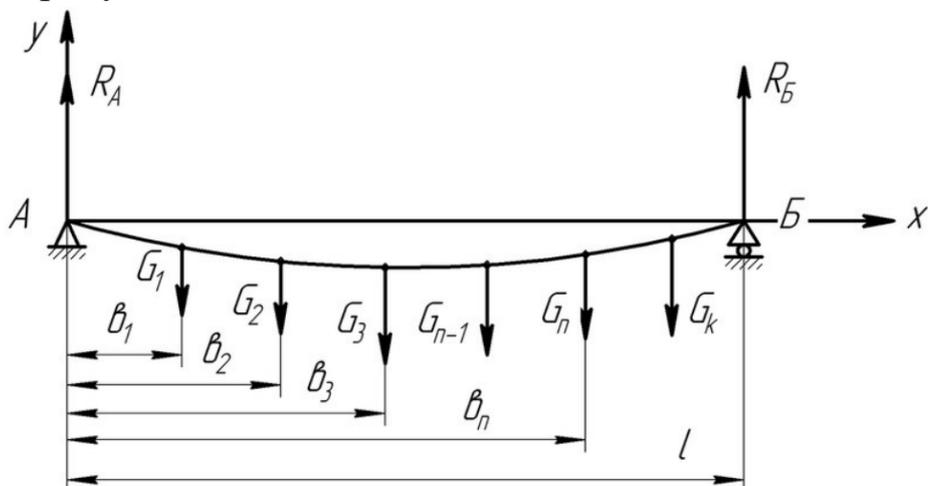


Рис. 3.3. Схема вала без консолей

Для валов с консолями форма упругой линии вала чаще всего подобна изображенной на рис. 3.4. Видно, что массы, расположенные на консолях, будут, вращаясь вокруг нейтральной оси, создавать центробежные силы в направлении, противоположном силам, которые будут создавать массы, расположенные между опорами. Поэтому силы тяжести, создаваемые массами, расположенными на консолях, следует изобразить в направлении, противоположном силам тяжести масс, находящимся между опорами.

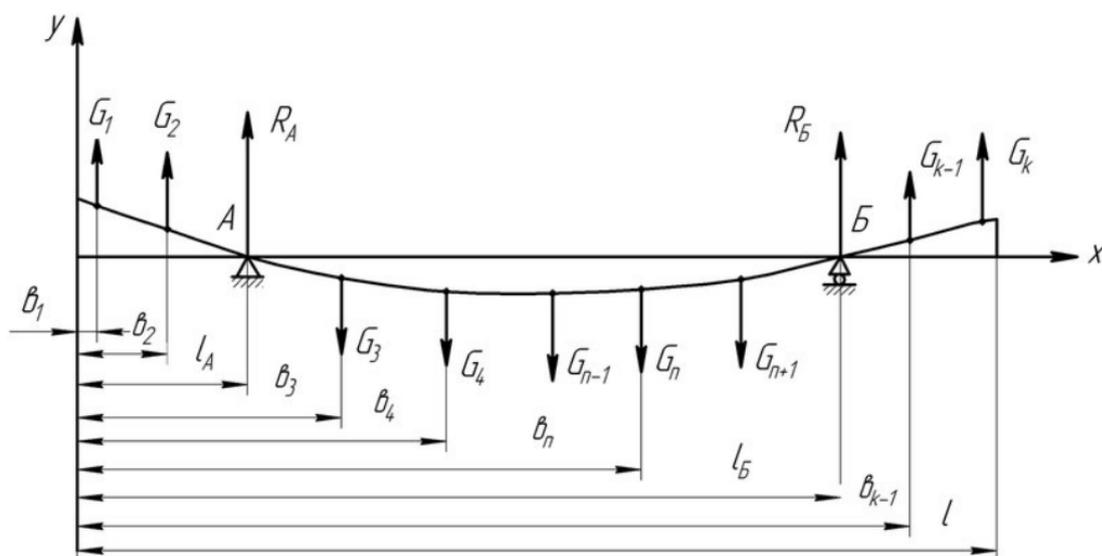


Рис. 3.4. Схема вала с консолями

Для определения эпюры действительно изгибающегося момента необходимо определить реакции опор R_A и R_B (см. рис. 2.1, 3.3). Это делается известным статическим способом, когда для нахождения, например, реакции R_B составляется уравнение моментов сил относительно опоры А.

Предварительно необходимо установить правило знаков. В соответствии с направлением оси y на рис. 3.3 и рис. 3.4 положительными считаются силы, направленные вверх. Моменты сил, стремящиеся повернуть систему по часовой стрелке, также считаются положительными.

Силы, направленные вниз, и моменты, стремящиеся повернуть систему против часовой стрелки, считаются отрицательными.

Для вала без консолей (см. рис. 3.3) уравнение моментов выглядит как

$$-l R_B + \sum_{i=1}^k G_i b_i = 0, \quad (3.6)$$

откуда

$$R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^k G_i b_i. \quad (3.7)$$

Для вала с консолями (см. рис. 3.4) уравнение моментов относительно опоры А записывается в виде

$$-R_B l_B - l_A + \sum_{i=1}^k G_i l_A - b_i = 0, \quad (3.8)$$

реакция

$$R_B = \frac{1}{l_B - l_A} \sum_{i=1}^k G_i l_A - b_i. \quad (3.9)$$

Заметим, что во всех этих уравнениях силы G_i необходимо записывать с соответствующим знаком.

Реакция опоры А может быть найдена путем записи уравнений моментов относительно опоры Б. Записав сумму проекций всех сил на вертикальную ось также с учетом знаков

$$R_A + R_B + \sum_{i=1}^k G_i = 0, \quad (3.10)$$

откуда

$$R_A = - \left(R_B + \sum_{i=1}^k G_i \right) 0, \quad (3.11)$$

можно проверить правильность определения реакций опор.

Полученных данных достаточно для расчета или построения эпюры действительного изгибающего момента, действующего на вал.

3.2. Расчет и построение эпюры действительного изгибающего момента

Эпюра действительного изгибающего момента, действующего на вал, может быть получена либо путем графического построения, либо непосредственно расчетом.

3.2.1. Графическое построение эпюры действительного изгибающего момента

Графическое построение эпюры действительного изгибающего момента производится методом веревочного многоугольника (прил. 2).

При построении веревочного многоугольника выбирается некоторый масштаб сил, m_G (Н/см черт.), такой, что длины $G_{i \text{ черт}}$ (см. прил. 2) векторов, наносимых на чертеж, находятся по формуле

$$G_{i \text{ черт}} = \frac{G_i}{m_G}. \quad (3.12)$$

Справа (или слева) от эскиза ротора, выполненного, как уже отмечалось, в достаточно большом масштабе, проводится вертикальная линия, вдоль которой из произвольной точки откладывается с учетом знака сначала реакция R_A . Конечная точка вектора \vec{R}_A обозначается буквой А. Затем из вершины А вектора \vec{R}_A последовательно откладываются с учетом знака все силы \vec{G}_i , конечная точка каждого вектора обозначается порядковым номером силы. Из конечной точки вектора последней силы (в рассматриваемом случае – силы номер 18) проводится вектор реакции \vec{R}_B , конечная точка которого должна совпасть с начальной точкой вектора реакции \vec{R}_A . Эту точку обозначаем буквой Б.

Если окажется, что точка Б не совпадает с начальной точкой вектора \vec{R}_A , необходимо искать ошибку либо в расчетах сил и реакций, либо в построении.

Далее из точки Б вправо проводится горизонтальная линия, на которую на некотором полюсном расстоянии H_1 наносится полюс O_1 . Выбор полюсного расстояния имеет значение для точности построения эпюры. Если оно будет слишком большим, то высота эпюры получится малой, что приведет к погрешности при опре-

делении изгибающих моментов. Если его выбрать слишком малым, то точность повысится, но высота эпюры может стать настолько большой, что все построения не уместятся на поле чертежа.

Конечные точки каждого вектора силы соединяются отрезками прямых с полюсом O_1 . Каждый отрезок обозначается двумя номерами или буквами векторов, с которыми он имеет общую точку. Так, отрезок, проведенный из точки А, обозначается А – 1, так как он имеет общую точку с векторами А и 1. Отрезок, проведенный из 10, обозначается 10–11 и т. д.

После того как силовой многоугольник построен, приступают к построению эпюры изгибающего момента. Для этого из произвольной точки на линии действия силы 1 (G_1) проводят прямую 1–2 параллельно отрезку 1–2 силового многоугольника до пересечения с линией действия силы 2 (G_2). Из полученной таким образом точки проводят прямую 2–3, параллельную отрезку 2–3 силового многоугольника, до пересечения с линией действия силы 3 (G_3) и таким образом продолжают построение до линии действия силы 18 (G_{18}).

Затем из полученных точек на линиях действия сил 1 (G_1) и 18 (G_{18}) проводят прямые 1–А и 18–Б, параллельные соответствующим отрезкам силового многоугольника, до пересечения с линиями действия реакции опор R_A и R_B . Точки, полученные на линиях действия реакций R_A и R_B , соединяются отрезком Б–А. Отрезок Б–А должен быть параллелен отрезку Б–А силового многоугольника, т. е. в нашем случае должен располагаться строго горизонтально. Этим проверяется правильность построения.

В результате проделанного построения получена эпюра действительного изгибающего момента. Вертикальные отрезки, заключенные между линиями веревочного многоугольника, пропорциональны изгибающему моменту в масштабе построения.

3.2.2. Расчетное определение эпюры действительного изгибающего момента

Расчетное определение эпюры действительного изгибающего момента можно проводить либо в табличной форме, как, например, в [5], либо с помощью ЭВМ [6]. Ниже приводятся рекомендации для написания программы и процедур для расчета действительного изгибающего момента автоматизированным способом (на ЭВМ).

Вначале необходимо перенумеровать и переименовать все силы и расстояния до них. Обозначим все силы, т. е. силы тяжести и реакции опор, через $PP (1)$, а расстояния линий их действия от левого конца вала – через $BB (1)$.

Будем считать точкой приложения первой силы $PP (1)$ левый торец первого участка, т.е. левый конец вала.

Очевидно, что $PP (1) = 0$ и $BB (1) = 0$. Точкой приложения второй силы $PP (2)$, равной весу первого участка G_1 , считаем середину первого участка и так далее до того момента, когда мы достигнем левой опоры А. В систему сил необходимо включить реакции опор, поэтому если расстояния до левых торцов участков окажутся равными l_A или l_B , то силы, приложенные к ним, принимаются равными реакциям опор, т. е. соответственно R_A и R_B . Силы, приложенные к остальным торцам, принимаются равными нулю.

В итоге мы получили однородную в смысле обозначений систему расстояний и сил, линии действия которых проходят как через торцы, так и через центры масс выбранных участков, поэтому число этих сил будет равно удвоенному числу участков плюс единица. Это позволяет нам для каждого сечения, определяемого линиями действий сил $PP (1)$, найти изгибающий момент $MIZG (K)$ по формуле

$$MIZG K = \sum_{I=1}^k PP I BB K - BB I , \quad (3.13)$$

где $PP I$ – сила, Н; $BB (K)$ – расстояние от левого торца вала до k -го сечения вала, м; $BB I$ – расстояние от левого торца вала до каждого i -го сечения, расположенного между левым торцом вала и k -м его сечением, м.

3.3. Определение фиктивной нагрузки и реакций опор фиктивной балки

Вспомним, что фиктивная распределенная нагрузка в каждом сечении вала равна действительному изгибающему моменту в этом сечении (см. п. 2.2). Чтобы упростить задачу определения прогиба вала, заменим распределенную фиктивную нагрузку рядом сосре-

доточенных сил, расположенных в центрах тяжести соответствующих участков эпюры действительного изгибающего момента и численно равных площадям этих участков.

Вал и эпюры действительного изгибающего момента дополнительно разбиваются на участки, для чего проводятся вертикальные линии через все уступы вала, которые делят его на участки равного диаметра. (Заметим, что в п. 3.2.2 при расчетном определении эпюры действительного изгибающего момента мы это дополнительное разбивание уже проделали.)

Площадь каждого участка эпюры определяется по формуле, одинаково пригодной для нахождения площади как трапеции, так и треугольника (рис. 3.5):

$$f_i = \frac{l_i}{2} M_i + M_{i+1} , \quad (3.14)$$

где l_i – длина участка, м; M_i – действительный изгибающий момент в начале участка, Н·м; M_{i+1} – действительный изгибающий момент в конце участка, Н·м.

Рассматриваемый вал является ступенчатым, поэтому фиктивная нагрузка $P_{\phi i}$ должна быть приведена к максимальному диаметру вала d_{\max} по формуле

$$P_{\phi i} = f_i \left(\frac{d_{\max}}{d_i} \right)^4 , \quad (3.15)$$

где d_i – диаметр i -го участка вала, м.

Из приведенной зависимости видно, что $P_{\phi i} = f_i$ только для участка вала максимального диаметра, а для всех остальных участков приведенная фиктивная нагрузка будет тем больше вычисленной по формуле (3.14), чем меньше диаметр соответствующего участка вала.

Сосредоточенная фиктивная сила $P_{\phi i}$ приложена в центре тяжести треугольника или трапеции площадью f_i . Положение центра тяжести определяется из выражения

$$x_{ci} = k_{xi} l_i , \quad (3.16)$$

$$k_{xi} = \frac{1}{3} \frac{2 + \alpha_i}{1 + \alpha_i}, \quad (3.17)$$

$$\alpha_i = \frac{M_i}{M_{i+1}}. \quad (3.18)$$

Все обозначения представлены на рис. 3.5.

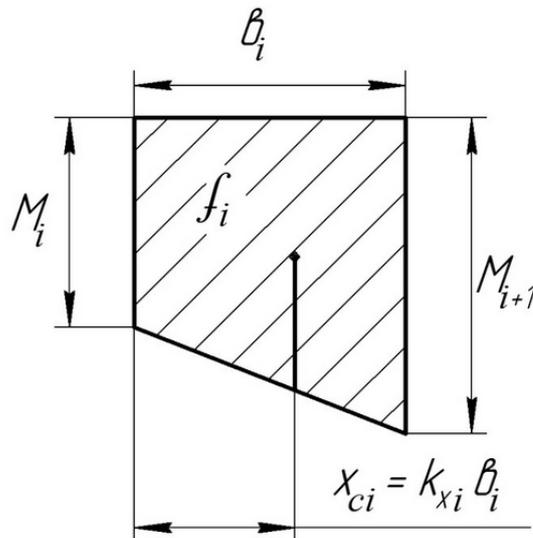


Рис. 3.5. Схема участка эпюры для определения его площади

Анализ зависимостей (3.16)–(3.18) показывает, что они являются универсальными для треугольника, трапеции и прямоугольника: для треугольника при $M_i = 0$; $\alpha = 0$; $k_x = 2/3$;

для прямоугольника при $M_i = M_{i+1}$; $\alpha = 1$; $k_x = 1/2$.

В результате получена новая система сил, теперь уже фиктивных, каждая из которых действует в точке с новой координатой по оси x , определяемой положением центра тяжести участка эпюры x_{ci} .

При графическом построении точки приложения фиктивных сил определяются, наносятся непосредственно на горизонтальную линию A_ϕ – B_ϕ (см. прил. 1, в) и нумеруются от 1 до 34. (В данном конкретном случае число фиктивных сил может быть и больше, и меньше, что определяется геометрией рассчитываемого вала.)

При расчетном определении фиктивных сил координата центра тяжести участка XCT может быть определена по формуле

$$XCT I = KOEFCT BB I+1 - BB I + BB I , \quad (3.19)$$

где $BB I$ – расстояние от левого торца вала до каждого i -го сечения, расположенного между левым торцом вала и k -м его сечением (3.13), м; $KOEFCT$ – коэффициент k_{xi} (см. (3.17)).

Сами фиктивные силы можно определить по формуле, объединяющей формулы (3.14) и (3.15),

$$PFICT I = BB I+1 - BB I MIZGIB I + \\ + MIZGIB I+1 DVMX/DV I^4/2, \quad (3.20)$$

где $PFICT (I)$ – фиктивная сила, Н; $MIZGIB (I)$ – действительный изгибающий момент в i -м сечении, Н·м; $DVMX$ – максимальный диаметр вала d_{max} , м; $DV (I)$ – диаметр i -го участка вала, м.

Отметим, что здесь и далее запись формул с использованием обозначений (идентификаторов), составленных из нескольких символов, отличается от общепринятых (не используются знаки умножения «*» и возведения в степень «**»), что соответствует обычным правилам записи алгебраических выражений.

Прежде чем определить реакции опор, необходимо установить, где эти опоры будут расположены у фиктивной балки. В соответствии со сказанным в п. 2.2 и анализом, выполненным в курсе сопротивления материалов [2], опоры фиктивной балки будут располагаться по ее краям, т. е. в точках A_ϕ и B_ϕ (см. прил. 1, в).

Реакции опор поэтому будут определяться из уравнений, аналогичных (3.7) и (3.11):

$$R_{B_\phi} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^k P_{\phi i} x_{цт i}, \quad (3.21)$$

где l – длина вала, м; $P_{\phi i}$ – i -я фиктивная сила, Н; $x_{цт i}$ – расстояние от левого торца вала до линии действия фиктивной силы $P_{\phi i}$, м;

$$R_{A_\phi} = - \left(R_{B_\phi} + \sum_{i=1}^k P_{\phi i} \right). \quad (3.22)$$

3.4. Расчет и построение эпюры фиктивного изгибающего момента

3.4.1. Графическое построение эпюры фиктивного изгибающего момента

Графическое построение эпюры фиктивного изгибающего момента проводится в той же последовательности, что и эпюры действительного изгибающего момента. При этом, чтобы увеличить высоту эпюры, целесообразно несколько уменьшить полюсное расстояние H_2 . Фиктивные силы наносятся на чертеж в масштабе m_ϕ , $\text{см}^2 \cdot \text{черт.} / \text{см. черт.}$

Построение веревочного многоугольника выполнено правильно, если отрезок, соединяющий крайние точки эпюры, располагается строго горизонтально (см. прил. 1, г).

Полученная в результате построения эпюра фиктивного изгибающего момента представляет собой в масштабе построения упругую линию вала.

Для определения прогибов вала следует принять во внимание, что в опорах А и Б прогибы равны нулю, а сама упругая линия имеет форму, изображенную на рис. 3.4. Поэтому линии действия действительных опорных реакций R_A и R_B продолжают до пересечения с упругой линией вала и через полученные точки А и Б (см. прил. 1, г) проводится прямая, определяющая относительное положение недеформированного вала. Именно от этой прямой отсчитываются величины прогибов вала y_i на линии действия каждой силы тяжести G_i .

Из построения видно, что прогибы на консолях являются положительными, а в пролете между опорами – отрицательными.

Значения прогибов y_i черт и промежуточные величины, необходимые для определения критической частоты вращения ротора, приведены в прил. 3 и 4.

Определение масштабного множителя фиктивного изгибающего момента

Масштабный множитель действительного изгибающего момента определяют, исходя из следующих соображений.

Действительный изгибающий момент в масштабе чертежа равен, как уже отмечалось, ординате эпюры изгибающего момента в данном сечении $M_{i \text{ черт}}$.

Из подобия треугольников веревочного и силового многоугольников следует, что для любой силы $G_{i \text{ черт}}$, действующей на плече $l_{i \text{ черт}}$ соответствует, что

$$G_{i \text{ черт}} l_{i \text{ черт}} = H_1 M_{i \text{ черт}}. \quad (3.23)$$

В этом выражении и в дальнейшем все величины с индексом «черт» даны в масштабе чертежа. Тогда действительный изгибающий момент в масштабе чертежа

$$M_{i \text{ черт}} = \frac{G_{i \text{ черт}} l_{i \text{ черт}}}{H_1}. \quad (3.24)$$

Пусть масштаб равен длине m_l (см/см черт), а масштаб сил – m_G (Н/см черт).

Тогда

$$G_{i \text{ черт}} = \frac{G_i}{m_G} \quad \text{и} \quad l_{i \text{ черт}} = \frac{l_i}{m_l}. \quad (3.25)$$

Действительный изгибающий момент $M_{i \text{ черт}}$ (см/см черт) в масштабе чертежа определяется подстановкой выражения (3.25) в (3.24):

$$M_{i \text{ черт}} = \frac{G_i l_i}{m_l m_G H_1}. \quad (3.26)$$

Так как $G_i l_i = M_i$, то истинное значение действительного изгибающего момента M_i определяется как

$$M_i = M_{i \text{ черт}} m_l m_G H_1. \quad (3.27)$$

Таким образом, масштабный множитель действительного изгибающего момента равен произведению

$$m_l m_G H_1. \quad (3.28)$$

Масштабный множитель фиктивной силы можно определить, используя выражение (3.14). Фиктивная сила при графическом построении определяется по данным эпюры действительного изгибающего момента. Мы будем записывать ее со штрихом, так как в дальнейшем она будет снова масштабироваться уже при построении силового многоугольника фиктивных сил:

$$P'_{\Phi_{i\text{черт}}} = \frac{l_{i\text{черт}}}{2} M_{i\text{черт}} + M_{i+1\text{черт}} . \quad (3.29)$$

Учитывая, как и раньше, что

$$l_{i\text{черт}} = \frac{l_i}{m_l} \quad \text{и} \quad M_{i\text{черт}} = \frac{G_i l_i}{m_l m_G H_1} ,$$

получим из (3.29)

$$P'_{\Phi_{i\text{черт}}} = \frac{l_i}{2m_l} \frac{M_i + M_{i+1}}{m_l m_G H_1} = \frac{P_{\Phi_i}}{m_l^2 m_G H_1} \quad (3.30)$$

или

$$P_{\Phi_i} = P'_{\Phi_{i\text{черт}}} m_l^2 m_G H_1 . \quad (3.31)$$

В итоге масштабный множитель фиктивной силы, определенный как площадь участка эпюры действительного изгибающего момента, полученной графическим построением веревочного многоугольника, будет равен

$$m_l^2 m_G H_1 . \quad (3.32)$$

Масштабный множитель фиктивного изгибающего момента определится после этого аналогично масштабному множителю действительного изгибающего момента.

Определив фиктивные силы $P'_{\Phi_{i\text{черт}}}$ в масштабе чертежа из (3.29), наносим их на линию вала в некотором масштабе m_Φ (см² черт/см черт),

с учетом которого строятся силовой и веревочный многоугольники (см. прил. 1, г, е).

Тогда каждая фиктивная сила будет определяться как

$$P_{\Phi_{i\text{черт}}} = \frac{P'_{\Phi_{i\text{черт}}}}{m_{\Phi}} = \frac{P_{\Phi_i}}{m_i^2 m_G m_{\Phi} H_1}. \quad (3.33)$$

Фиктивный изгибающий момент в масштабе чертежа запишется аналогично (3.24):

$$M_{\Phi_{i\text{черт}}} = \frac{P_{\Phi_{i\text{черт}}} l_{i\text{черт}}}{H_2}. \quad (3.34)$$

Используя выражения (3.33) и (3.25), получим из (3.34) уравнение для расчета фиктивного изгибающего момента:

$$M_{\Phi_{i\text{черт}}} = \frac{P_{\Phi_i} l_i}{m_i^3 m_G m_{\Phi} H_1 H_2} = \frac{M_{\Phi_i}}{m_i^3 m_G m_{\Phi} H_1 H_2}, \quad (3.35)$$

или

$$M_{\Phi_i} = M_{\Phi_{i\text{черт}}} m_i^3 m_G m_{\Phi} H_1 H_2. \quad (3.36)$$

Таким образом, окончательно масштабный множитель фиктивного изгибающего момента, а значит, и прогиба вала определится произведением

$$m_i^3 m_G m_{\Phi} H_1 H_2. \quad (3.37)$$

Определение действительного прогиба вала по результатам графического построения эпюры фиктивного изгибающего момента

Действительный прогиб вала определится из (2.14) с учетом приведения (2.17) к валу постоянного диаметра d_{\max} и того обстоятельства, что $y_{i\text{черт}} = \Delta M_{\Phi_{i\text{черт}}}$:

$$y_i = \frac{\Delta M_{\phi_{i\text{черт}}}}{E J_{\max}} m_i^3 m_G m_{\phi} H_1 H_2, \quad (3.38)$$

где $\Delta M_{\phi_{i\text{черт}}}$ – ордината, отсчитанная от прямой АБ (см. прил. 1, г), определяющей относительное положение недеформированного вала.

Отметим, что для вала без консолей положение опор действительной и фиктивной балок будет одинаково и отсчет $\Delta M_{\phi_{i\text{черт}}}$ следует вести от линии А_ф–Б_ф, т. е. в этом случае

$$\Delta M_{\phi_{i\text{черт}}} = M_{\phi_{i\text{черт}}}. \quad (3.39)$$

3.4.2. Расчетное определение эпюры фиктивного изгибающего момента

При автоматизированном расчете на ЭВМ определение фиктивного изгибающего момента осуществляется, по существу, так же, как и для действительного изгибающего момента.

Сначала создается однородная система сил, включающих реакции опор $R_{A\phi}$ и $R_{B\phi}$. Эти силы обозначаются $PPF(I)$, а расстояния точек их приложения от левого торца вала обозначаются $BBF(I)$. После этого вызывается процедура – функция $FIZGF(I)$, в которой возможно реализовать при автоматизированном расчете определение фиктивного изгибающего момента в виде, аналогичном (3.13):

$$MIZGF(K) = \sum_{I=1}^k PPI \cdot BBFK - BBFI, \quad (3.40)$$

где $MIZGF(K)$ – фиктивный изгибающий момент в k -м сечении вала.

Расчетное определение действительного прогиба вала

Для вала без консолей, как уже упоминалось, $\Delta M_{\phi_i} = M_{\phi_i}$ и значения фиктивного изгибающего момента представляют собой прогиб вала в масштабе $1/(E \cdot J_{\max})$.

Для вала с консолями задача несколько усложняется, так как необходимо найти аналитическое выражение прямой, проходящей через точки А и Б, пересечения линий действия реакций опор R_A и R_B с эпюрой фиктивного изгибающего момента (см. прил. 1, г).

При автоматизированном расчете на ЭВМ возможно определить угловой коэффициент $COEFA$ и коэффициент смещения $COEFB$ прямой линии оси вала на эпюре фиктивного изгибающего момента по формулам

$$COEFA = \frac{M_{\phi_B} - M_{\phi_A}}{l_B - l_A}; \quad (3.41)$$

$$COEFB = M_{\phi_A} - \frac{M_{\phi_B} - M_{\phi_A} l_A}{l_B - l_A}, \quad (3.42)$$

где M_{ϕ_B}, M_{ϕ_A} – фиктивные изгибающие моменты в точках опоры действительного вала на подшипники, Н·м; l_A, l_B – расстояние от левого торца вала до опор А и Б, м.

Используя эти коэффициенты, можно найти расстояния от любой точки на линии АБ до горизонтали $A_{\phi}B_{\phi}$ (см. прил. 1, г):

$$Y_i = COEFA b_i + COEFB, \quad (3.43)$$

где b_i – расстояние от левого торца вала до линии действия силы G_i , м.

Прогиб вала рассчитывается по следующей формуле:

$$y_i = \frac{M_{\phi_i} - Y}{E J_{\max}}, \quad (3.44)$$

где M_{ϕ_i} – фиктивный изгибающий момент в i -м сечении вала, Н·м;

E – модуль упругости материала вала, Па; $J_{\max} = \frac{\pi d_{\max}^4}{64}$ – момент инерции сечения участка вала максимального диаметра, м⁴.

3.5. Определение критической частоты вращения ротора

После того как определены величины прогибов вала y_i в точках приложения сил тяжести G_i , вызываемых массами участков, критическая частота вращения ротора $\omega_{кр}$ (рад/с) определяется по формуле, аналогичной (2.7):

$$\omega_{кр} = p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i y_i^2}}. \quad (3.45)$$

Критическое число оборотов в минуту

$$n_{кр} = \frac{30\omega_{кр}}{\pi}. \quad (3.46)$$

В случае, если расчет ведется графоаналитическим методом, необходимо учитывать масштабный множитель

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n G_i y_{i\text{черт}}}{\sum_{i=1}^n M_i y_{i\text{черт}}^2} \frac{E J_{\max}}{m_i^3 m_G m_\phi H_1 H_2}}, \quad (3.47)$$

где $y_{i\text{черт}} = \Delta M_{\phi i\text{черт}}$ – прогибы вала относительно оси недеформированного вала в масштабе чертежа (см. прил. 1, г).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОЙ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ РОТОРОВ

Вторую критическую скорость ротора можно приближено определить, если воспользоваться методом, предложенным Г.А. Раером [1].

Известно, что при второй критической скорости упругая линия имеет одну узловую точку А, в которой прогиб равен нулю (рис. 4.1), и одну точку перегиба, в которой равен нулю изгибающий момент. В основе метода Г.А. Раера лежит предложение, что эти точки совпадают.

Тогда можно расчленить ротор на два независимых ротора путем установки в точке А шарнирной опоры.

Положение точки А выбрано правильно, если окажется, что первые критические скорости каждого из роторов БА и АВ, полученных в результате расчленения, будут равны.

Вторая критическая скорость исходного ротора и будет равна первым критическим скоростям роторов, полученных при расчленении.

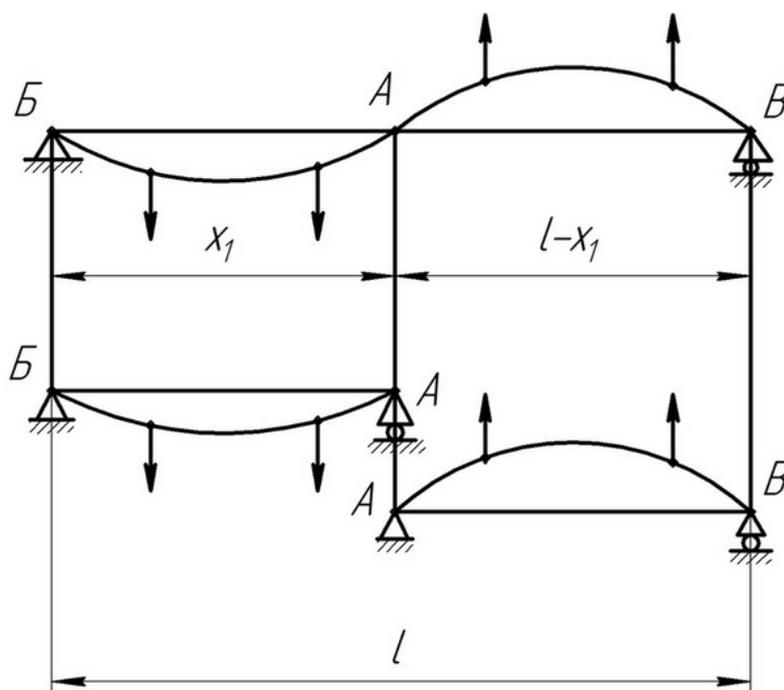


Рис. 4.1. Эскиз ротора для определения второй критической скорости

Расчет ведется в такой последовательности.

Ориентировочно выбирают положения точки расчленения А, разбивающей ротор на два независимых участка БА и АВ длиной x_1 и $l-x_1$.

Определяют по обычной изложенной выше методике первые критические скорости участков $\omega_{кр\text{БА}}^I$ и $\omega_{кр\text{АВ}}^I$.

Равенство $\omega_{кр\text{БА}}^I = \omega_{кр\text{АВ}}^I$, вторая критическая скорость $\omega_{кр\text{АВ}}^{II} = \omega_{кр\text{БА}}^{II} = \omega_{кр\text{АВ}}^{II}$. Это значит, что положение точек разбиения А выбрано верно и расчет на этом закончен.

При расхождении полученных значений критических скоростей проводят уточнения положения точки расчленения А,

полагая, что величина $\omega_{кр}$ изменяется пропорционально корню квадратному из отношения длин валов в третьей степени:

$$\frac{\omega_{кр1}^I}{\omega_{кр2}^I} = \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3}. \quad (4.1)$$

Тогда новое значение критической угловой скорости для вала БА

$$\omega_{кр\text{ БА}}^{I'} = \omega_{кр\text{ БА}}^I \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_p}\right)^3}, \quad (4.2)$$

для вала АВ

$$\omega_{кр\text{ АВ}}^{I'} = \omega_{кр\text{ АВ}}^I \sqrt{\left(\frac{l-x_1}{l-x_p}\right)^3}, \quad (4.3)$$

где x_p – новая координата точки расчленения А.

Так как после уточнения должно быть

$$\omega_{кр\text{ БА}}^{I'} = \omega_{кр\text{ АВ}}^{I'},$$

то, приравняв выражения (4.2) и (4.3) и разрешив полученное уравнение относительно x_p , найдем новое положение точки А:

$$x_p = \frac{l}{1 + \left(\frac{l}{x_1} - 1\right) \sqrt[3]{\left(\frac{\omega_{кр\text{ АВ}}^I}{\omega_{кр\text{ БА}}^I}\right)^2}}. \quad (4.4)$$

При незначительном расхождении в критических угловых скоростях можно найти уточненное значение второй критической угловой скорости ротора:

$$\omega_{\text{кр БВ}}^{\text{II}} = \omega_{\text{кр БА}}^{\text{I}} \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_p}\right)^3}. \quad (4.5)$$

Более точное значение $\omega_{\text{кр БВ}}^{\text{II}}$ может быть найдено из расчетов $\omega_{\text{кр БА}}^{\text{I}}$ и $\omega_{\text{кр АВ}}^{\text{I}}$ при новой координате расчленения x_p .

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ПЕРВОЙ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ РОТОРОВ

Для быстрой практической оценки критической скорости или критического числа оборотов ротора целесообразно воспользоваться приближенными способами, из которых заслуживают внимания формулы, предложенные инженером В.В. Звягнцевым [3].

Для ротора переменного диаметра с дисками, расположенного на двух опорах, первая критическая скорость может быть определена по формулам

$$n_{\text{кр1}} = 7,503 \cdot 10^6 \frac{d_{\text{max}}/l^2}{\sqrt{M/l}}, \quad (5.1)$$

где d_{max} – максимальный диаметр вала, м; l – расстояние между опорами, м; M – масса ротора, кг;

$$\omega_{\text{кр}}^{\text{I}} = 7,857 \cdot 10^5 \frac{d_{\text{max}}/l^2}{\sqrt{M/l}}. \quad (5.2)$$

При выводе этих формул учтено, что обычно валы роторов имеют наибольший диаметр посередине, а в направлении опор диаметр постепенно уменьшается.

Для валов, имеющих примерно постоянный по длине диаметр, формулы В.В. Звягнцева имеют иной числовой коэффициент:

$$n_{\text{кр1}} = 8,109 \cdot 10^6 \frac{d_{\text{max}}/l^2}{\sqrt{M/l}}; \quad (5.3)$$

$$\omega_{\text{кр}}^I = 8,492 \cdot 10^5 \frac{d_{\text{max}}/l^2}{\sqrt{M/l}}. \quad (5.4)$$

Эти формулы удобно использовать для приблизительной, качественной оценки первой критической угловой скорости при разработке конструкции ротора в процессе создания компоновки компрессора или детандера, а также для проверки расчетов, сделанных энергетическим методом Релея.

По данным работы [3] погрешность определения $n_{\text{кр}_1}$ по этим формулам по сравнению с энергетическим методом находится в пределах $\delta = \pm 3,5 \%$, что для качественной оценки можно признать вполне удовлетворительным.

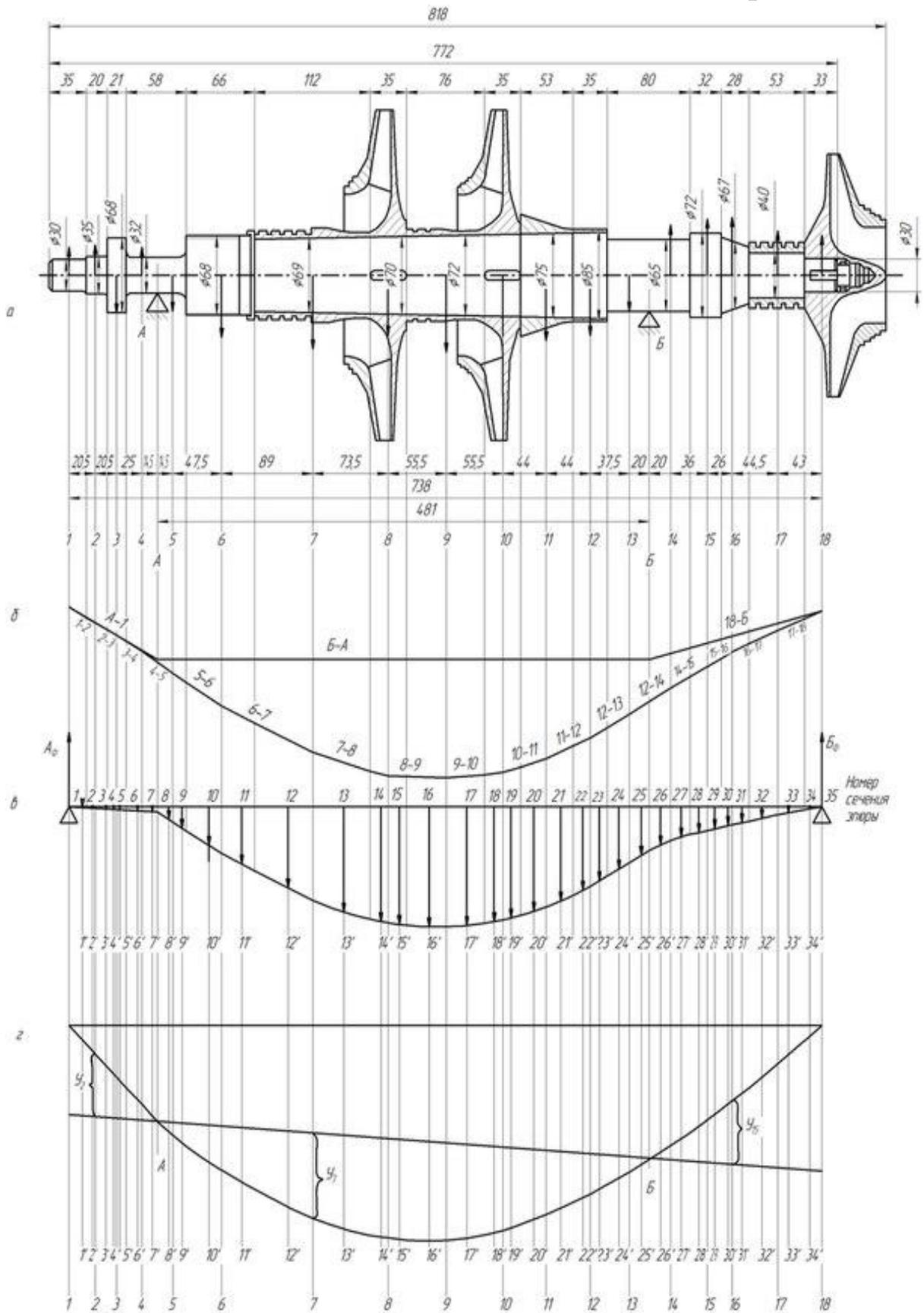
Необходимо отметить, что в одноступенчатых центробежных компрессорах и радиально-центробежных детандерах роторы часто выполняются консольными, с вынесением на консоль рабочего колеса. В этом случае формулы В.В. Звягнцева могут давать значительные погрешности, поэтому пользоваться ими следует с осторожностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

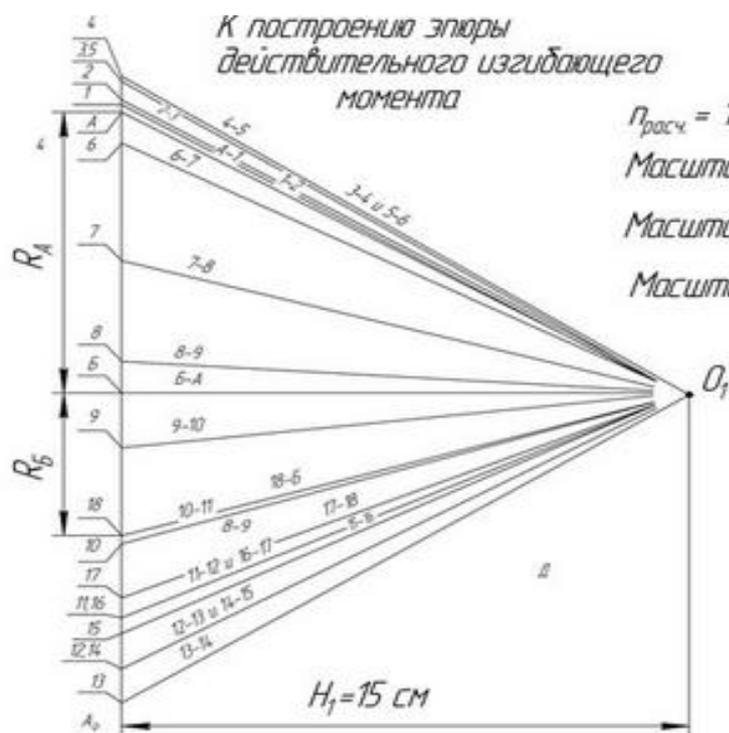
1. **Раер Г.А.** Динамика и прочность центробежных компрессорных машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 260 с.
2. **Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.** Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
3. **Жирицкий Г.С., Стрункин В.А.** Конструкция и расчет на прочность деталей паровых и газовых турбин. – М.: Машиностроение, 1968. – 523 с.
4. **Моисеев А.А., Розенберг А.Н.** Расчет прочности судовых, паровых и газовых турбозубчатых агрегатов. – Л.: Судостроение, 1970. – 432 с.
5. **Скубачевский Г.С.** Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 547 с.
6. Теплотехнические этюды с Excel, Mathcad и Интернет / Под общ. ред. В.Ф. Очкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2015. – 336 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1



Приложение 2

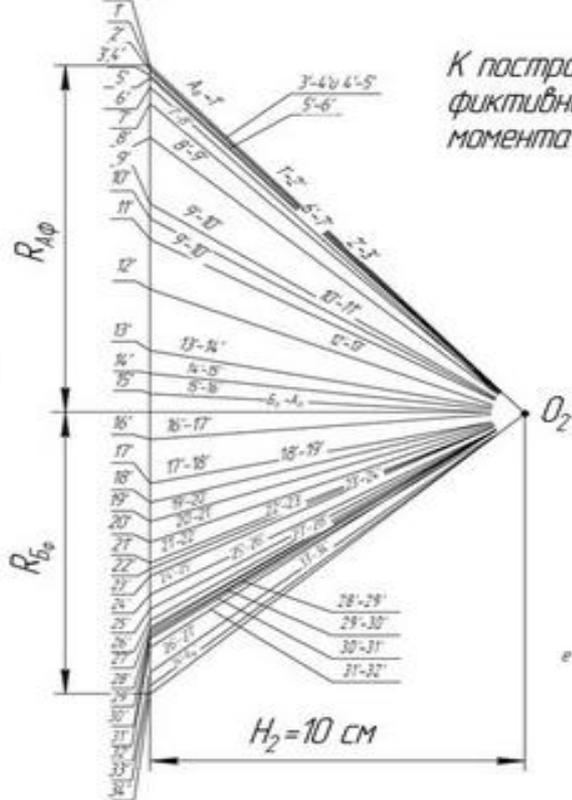


$n_{расч} = 19600 \text{ об/мин}$
 Масштаб длин $m_e = 2,5 \frac{\text{см}}{\text{см черт}}$
 Масштаб сил $m_o = 9,81 \frac{\text{Н}}{\text{см черт}}$
 Масштаб фиктивных сил $m_\phi = 10 \frac{\text{см}^2 \text{ черт}}{\text{см черт}}$

Действительный прогиб вала

$$y_i = \frac{y_i \text{ черт}}{100} \cdot m \text{ М}$$

$$J_{\max} = \frac{\pi d_{\max}^4}{64} = 0,2562 \cdot 10^{-5} \text{ М}^4$$



Масштабный множитель

$$m = \frac{E J_{\max}}{m_e^3 m_o m_\phi H_1 H_2} = \frac{0,215 \cdot 10^{12} \cdot 0,2562 \cdot 10^{-5}}{2,5^3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 10} = 2395726 \frac{\text{см черт}}{\text{Н}}$$

Критическое число оборотов

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i y_i^2}} \cdot m = 9,5493 \sqrt{\frac{704,5268}{244,3018}} \cdot 2395726 = 25189 \text{ об/мин}$$

$$\frac{n_{расч}}{n_{кр}} = \frac{19600}{25189} = 0,778$$

Приложение 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Номер участка	M_i	G_i	B_i	l_A-B_i	$3x5$	l_B-B_i	$3x7$	y_i	$y_i \cdot B_i$	$M_i \cdot y_i^2$
	кг	Н	м	м	Н·м	м	Н·м	см.черт.	–	–
1	0,1930	1,8931	0,0175	0,0875	0,1656	0,5685	1,0762	3,28	6,2094	2,0764
2	0,1501	1,4724	0,0450	0,0600	0,0883	0,5410	0,7966	2,20	3,2393	0,7265
3	0,5949	5,8357	0,0655	0,395	0,2305	0,5205	3,0375	1,40	8,1700	1,1660
4	0,1819	1,7846	0,0905	0,145	0,0259	0,4955	0,8843	0,50	0,8923	0,0455
5	0,1819	-1,7846	0,1195	-0,0145	0,0259	0,4665	-0,8325	-0,47	0,8388	0,0402
6	1,9900	-19,5218	0,1670	-0,0620	1,2104	0,4190	-8,1796	-1,60	31,2349	5,0944
7	3,6400	-35,7087	0,2560	-0,1510	5,3920	0,3300	-11,7839	-3,13	111,7682	35,6607
8	3,0700	-30,1170	0,3295	-0,2245	6,7613	0,2565	-7,7250	-3,70	111,4329	42,0283
9	2,6500	-25,9966	0,3850	-0,2800	7,2790	0,2010	-5,2253	-3,65	94,8876	35,3046
10	2,9800	-29,2340	0,4405	-0,3355	9,8080	0,1455	-4,2536	-3,10	90,6254	28,6378
11	2,2300	-21,8767	0,4845	-0,3795	8,3022	0,1015	-2,2205	-2,33	50,9727	12,1064
12	1,5491	-15,1971	0,5285	-0,4235	6,4360	0,0575	-0,8738	-1,45	22,0358	3,2570
13	1,0353	-10,1564	0,5660	-0,4610	4,6821	0,0200	-0,2031	-0,50	5,0782	0,2588
14	1,0353	10,1564	0,6060	-0,5010	-5,0884	-0,0200	-0,2031	0,58	5,8907	0,3483
15	1,0162	9,9694	0,6420	-0,5370	-5,3536	-0,0560	-5,5583	1,60	15,9510	2,6015
16	0,7700	7,5537	0,6720	-0,5670	-4,2829	-0,0860	-0,6496	2,42	18,2800	4,5094
17	0,6195	6,0772	0,7125	-0,6075	-3,6919	-0,1265	-0,7688	3,87	23,5188	9,2782
18	2,0000	19,6204	0,7555	-0,6505	-12,7631	-0,1695	-3,3257	5,53	108,5008	61,1618

$$\sum_{i=1}^{18} G_i = -125,23 \text{ Н}; \quad \sum_{i=1}^{18} G_i(l_A - B_i) = 19,2273 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad \sum_{i=1}^{18} G_i(l_B - B_i) = -41,0083 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad \sum_{i=1}^{18} G_i y_i = 709,5268 \text{ Н} \cdot \text{см черт.};$$

$$\sum_{i=1}^{18} M_i y_i^2 = 244,3018 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 \text{ черт.}; \quad R_A = 85,2564 \text{ Н}; \quad R_B = 39,9736 \text{ Н}.$$

Приложение 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13		14	15	16	17	18	19	20
Номер сечения	Диаметр вала, мм натур.		Изгибающий момент, см черт.		Средний момент (4+5)/2	Расстояние от левого торца вала, см черт.		Длина участка, см черт. 8-7	$(d_{\max}/d_i)^4$	Приведенный изгибающий момент, см черт		Площадь эпюры, см ² черт 6x9	Фиктивная сила $P_{\text{фи}}$, см черт 9x((11+12)/2)	$\alpha_i = 4/5$	$K_x = (1/3) \cdot ((2+15)/(1+15))$	Абсцисса центра тяжести = 9x16	$X_{\text{ц.т.}} = 17+7$	$P_{\text{фи}} \cdot X_{\text{ц.т.}} = 14x18$	Действительный прогиб в i-м сечении 10 ⁵ м на-тур
	Слева от сечения	Справа от сечения	В сечении i	В сечении i+1		до сечения i	до сечения i+1			В сечении i	В сечении i+1								
1	30	30	0	0,009	0,0045	0	0,70	0,70	64,45	0	0,5801	0,0032	0,2030	0	0,66 67	0,466 7	0,466 7	0,0947	0,1369
2	30	35	0,09	0,014	0,0115	0,70	1,10	0,40	34,79	0,3131	0,4871	0,0046	0,1600	0,6429	0,53 62	0,214 5	0,914 5	0,1463	-
3	35	35	0,14	0,023	0,0185	1,10	1,50	0,40	34,79	0,4871	0,8002	0,0074	0,2575	0,6087	0,54 05	0,216 2	1,316 2	0,1956	0,0918
4	35	68	0,023	0,033	0,0280	1,50	1,92	0,42	2,44	0,0561	0,0805	0,118	0,2869	0,6970	0,52 98	0,223 5	1,722 5	0,4942	-
5	68	68	0,033	0,059	0,0460	1,92	2,34	0,42	2,44	0,0805	0,1440	0,0193	0,0471	0,5593	0,54 71	0,229 8	2,149 8	0,1013	0,0584
6	68	32	0,059	0,095	0,0770	2,34	2,92	0,58	49,78	2,9370	4,7291	0,0447	2,2232	0,7662	0,52 21	0,302 8	2,642 8	5,8755	-
7	32	32	0,095	0,139	0,1170	2,92	3,50	0,58	49,78	4,7291	6,9194	0,0679	3,3781	0,6835	0,53 73	0,308 2	3,228 2	10,9052	0,0209
8	32	32	0,139	0,518	0,3285	3,50	4,08	0,58	49,78	6,9194	25,7860	0,1905	9,4846	0,2683	0,59 61	0,345 8	3,845 8	36,4759	-
9	32	32	0,518	0,890	0,7040	4,08	4,66	0,58	49,78	25,7860	44,3042	0,4083	20,3262	0,5820	0,54 40	0,315 5	4,395 5	89,3438	-0,0196
10	32	68	0,890	1,737	1,3135	4,66	5,98	1,32	2,44	2,1716	4,2883	1,7338	4,2305	0,5124	0,55 37	0,730 9	5,390 9	22,8062	-
11	68	68	1,737	2,409	2,0730	5,98	7,30	1,32	2,44	4,2383	5,8780	2,7364	6,6767	0,7210	0,52 70	0,695 7	6,675 7	44,5716	-0,0668
12	68	69	2,409	3,549	2,9790	7,30	9,54	2,24	2,30	5,5407	8,1627	6,6730	15,3478	0,6788	0,53 19	1,191 4	8,491 4	130,3243	-
13	69	69	3,549	4,146	3,8475	9,54	11,78	2,24	2,30	8,1627	9,5358	8,6173	18,8223	0,8560	0,51 29	1,149 0	10,68 90	211,8806	-0,1306

Продолжение прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
14	69	70	4,146	4,333	4,2395	11,78	12,48	0,70	2,17	9,9968	9,4026	2,9677	6,4398	0,9568	0,5037	0,3526	12,1326	78,1315	-
15	70	70	4,333	4,376	4,3545	12,48	3,18	0,70	2,17	9,4026	9,4959	3,0482	6,6145	0,9902	0,5008	0,3506	12,8306	84,8680	-0,1544
16	70	71	4,376	4,470	4,4230	3,18	14,70	1,52	2,05	8,9708	9,1635	6,7230	13,7821	0,9790	0,5018	0,7627	13,9427	192,1597	-
17	71	71	4,470	4,296	4,3830	14,70	16,22	1,52	2,05	9,1635	8,8068	6,6622	13,6574	1,0405	0,4967	0,7550	15,4550	211,0751	-0,1524
18	71	72	4,296	4,216	4,2560	16,22	16,92	0,70	1,94	8,3342	8,1790	2,9792	5,7796	1,0190	0,4984	0,3499	16,5689	95,7616	-
19	72	72	4,216	3,996	4,1060	16,92	17,62	0,70	1,94	8,1790	7,7522	2,8742	5,5759	1,0551	0,4955	0,3469	17,2669	96,2785	-0,1294
20	72	75	3,996	3,664	3,8300	17,62	18,68	1,06	1,65	6,5934	6,0456	4,0598	6,6987	1,0906	0,4928	0,5223	18,1423	121,3298	-
21	75	75	3,664	3,175	3,4195	18,68	19,74	1,06	1,65	6,0456	5,2388	3,6247	5,9807	1,1540	0,4881	0,5174	19,1974	114,8139	-0,0973
22	75	85	3,175	2,851	3,0130	19,74	20,44	0,70	1,00	3,1750	2,8510	2,1091	2,1091	1,1136	0,4910	0,3437	20,0837	42,3585	-
23	85	85	2,851	2,456	2,6535	20,44	21,14	0,7	1,00	2,8510	2,4560	1,8575	1,8575	1,1608	0,4876	0,3413	20,7813	38,6013	-0,0605
24	85	65	2,456	2,003	2,2295	21,14	21,94	0,8	2,92	7,1715	5,8488	1,7836	5,2081	1,2262	0,4831	0,3865	21,5265	112,1122	-
25	65	65	2,003	1,496	1,7495	21,94	22,74	0,8	2,92	5,8488	4,3683	1,3996	4,0868	1,3389	0,4759	0,3807	22,3207	91,2202	-0,0209
26	65	65	1,496	1,206	1,3510	22,74	23,54	0,8	2,92	4,3683	3,5215	1,0808	3,1618	1,2405	0,4821	0,3857	23,1257	73,1188	-
27	65	65	1,206	0,971	1,0885	23,54	24,34	0,8	2,92	3,5215	2,8353	0,8708	2,5427	1,2420	0,4820	0,3856	23,9256	60,8336	0,0242
28	65	72	0,971	0,783	0,8770	24,34	24,98	0,64	1,94	1,8837	1,1590	0,5613	1,0889	1,2401	0,4821	0,3086	24,6486	26,8399	-

Окончание прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
29	72	72	0,783	0,639	0,7110	24,98	25,62	0,64	1,94	1,5190	1,2397	0,4550	0,8828	1,2254	0,4831	0,3092	23,2892	22,3253	0,0668
30	72	67	0,639	0,512	0,5755	25,62	26,18	0,56	2,59	1,6550	1,3261	0,3223	0,8347	1,2480	0,4816	0,2697	25,8897	21,6101	-
31	67	67	0,512	0,414	0,4630	26,18	26,74	0,56	2,59	1,3261	1,0723	0,2593	0,6715	1,2367	0,4824	0,2701	26,4501	17,7612	0,1010
32	67	40	0,414	0,229	0,3215	26,74	27,80	1,06	20,39	8,4415	4,6693	0,3408	6,9487	1,8079	0,4520	0,4792	27,2192	189,1381	-
33	40	40	0,229	0,088	0,1585	27,80	28,86	1,06	20,39	4,6693	1,7943	0,1680	3,4257	2,6023	0,4259	0,4514	28,2514	96,7808	0,1615
34	40	30	0,088	0	0,0440	28,86	29,52	0,66	64,45	5,6716	0	0,0290	1,8716	∞	0,3333	0,2200	28,0800	54,4261	-
35	40	30	0	0	0	29,52	0	0	0	0	0	0	0	-	-	0	29,5200	0	0,2308

$$l = 29,52 \cdot 2,5 = 73,8 \text{ см}; \quad \sum P_{\Phi_i} = 181,6625 \text{ см}^2 \text{ черт}; \quad \sum P_{\Phi_i} \cdot x_{\text{цтг}_i} = 2394,9614 \text{ см}^3 \text{ черт}; \quad R_{\Delta\Phi} = 100,5324 \text{ см}^2 \text{ черт};$$

$$R_{\text{Б}\Phi} = 81,1301 \text{ см}^2 \text{ черт}.$$

Коротков Владимир Александрович
Татаренко Юлия Валентиновна

**РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ
ВРАЩЕНИЯ ДВУХОПОРНЫХ РОТОРОВ
КОМПРЕССОРОВ И ДЕТАНДЕРОВ
ДИНАМИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА
ДЕЙСТВИЯ**

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 25.12.2015. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 3,49. Печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 3,5
Тираж 50 экз. Заказ № С 114

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

