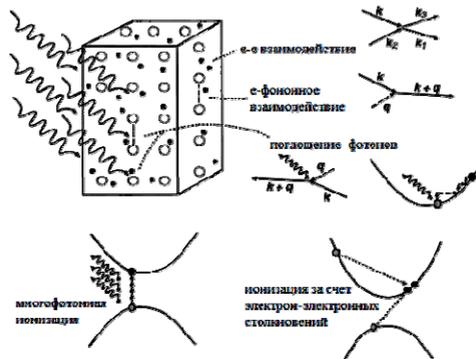


Д.С. Поляков, Г.Д. Шандыбина, Е.Б. Яковлев

Методические рекомендации по выполнению
практических заданий по курсу

Взаимодействие лазерного излучения с
веществом (силовая оптика)

Часть 1. Поглощение излучения в твердых
телах



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Д.С. Поляков, Г.Д. Шандыбина, Е.Б. Яковлев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО
ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ**

по курсу
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ
(СИЛОВАЯ ОПТИКА)
ЧАСТЬ 1. ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2016

Поляков Д.С., Шандыбина Г.Д., Яковлев Е.Б. Методические рекомендации по выполнению практических заданий по курсу «Взаимодействие лазерного излучения с веществом» (Часть 1. Поглощение излучения в твердых телах). – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 83 с.

В пособии подробно рассмотрены решения ряда задач, связанных со взаимодействием лазерного излучения с веществом, способствующие усвоению материала лекционного курса, включены задания и контрольные вопросы для самостоятельной проработки по разделам курса.

Методические рекомендации предназначены для самостоятельной работы студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Лазерная техника и лазерные технологии», по направлениям подготовки бакалавров 12.03.05, бакалавров по направлению 16.03.01 «Техническая физика», и магистров 12.04.05. Материал учебного пособия будет также полезен для самостоятельной работы магистров и аспирантов, интересующихся нелинейными процессами и вопросами самомодификации поверхности.

Рекомендовано к печати на заседании Ученого Совета факультета Лазерной и Световой Инженерии 15 марта 2016 г. протокол № 3.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© Поляков Д.С., Шандыбина Г.Д., Яковлев Е.Б., 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С МЕТАЛЛАМИ.....	5
1.1. Механизм поглощения света в металлах	5
Задание 1	5
Задание 2	7
Вопросы для самостоятельной работы	8
1.2. Электродинамическая модель Друде применительно к металлам.....	9
Задание 3	9
Задание 4	11
1.3. Поглощательная способность металлов	13
Задание 5	13
Задание для самостоятельной работы.....	15
Вопросы для самостоятельной работы	15
2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОЛУПРОВОДНИКАМИ	16
2.1. Кинетика лазерного возбуждения полупроводников	16
Задание 6	16
Задание 7	18
Задание для самостоятельной работы.....	19
Вопросы для самостоятельной работы	19
3. ЛАЗЕРНАЯ АКТИВАЦИЯ ПРОЦЕССОВ АРРЕНИУСОВСКОГО ТИПА.....	20
3.1. Лазерное окисление	20
Задание 8	21
Задание для самостоятельной работы.....	24
4. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ	25
4.1. Условия возбуждения ПЭВ.....	25
Задание 9	26
Задание 10	29
Задание для самостоятельной работы.....	30
Список рекомендуемой литературы	31
Приложения	33
П1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	34
1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	34
1.1.1. Определения	34
П2. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	41
2.1. ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	41
2.1.1. Векторные величины	41
2.1.2. Операции над векторами	42
2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ	47
2.2.1. Дифференцирование	47
2.2.2. Основные формулы дифференцирования	48
2.3. Функции точки	49
2.3.1. Наиболее употребительные формулы.....	55
П3. ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	62
3.1. Основные формулы.....	62
П4. Приложение векторного исчисления к теории электромагнитного поля.....	69
П5. Системы единиц измерения	76

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из актуальных областей современной науки и технологии, находящейся в фазе динамического развития, является научное направление, изучающее воздействие лазерного излучения на вещество. Различные аспекты этого направления стали предметом таких разделов экспериментальной и теоретической физики, как оптика, электродинамика, квантовая механика, фотохимия, термохимия, лазерная обработка и др.

При этом вещество может быть в различных состояниях: от микроскопического (атомы, молекулы) до конденсированной среды. Углубленное и систематическое изучение физико-химических механизмов взаимодействия лазерного излучения с различными материалами способствует широкому внедрению и эффективному использованию лазеров в любой сфере деятельности.

Пособие включает в себя 4-е раздела, в каждом из которых изложены основные принципы и подробно рассмотрены решения ряда задач, связанных с материалом лекционного курса «Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика)», сформулированы задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы.

В первом разделе рассматривается возможность поглощения света свободными электронами, выводятся формулы Друде, проводятся количественные оценки поглощательной способности металлов. Во втором разделе решается дифференциальное уравнение 2-го порядка, описывающее процесс фотовозбуждения полупроводника; оценивается концентрация неравновесных носителей и ее распределение. Третий раздел знакомит студентов с расчетом параметров лазерного окисления; исследуется влияние на результат окисления формы лазерного импульса. В последнем разделе приводится вывод дисперсионных соотношений, удовлетворяющих условию возбуждения поверхностных электромагнитных волн.

В приложении даны основы комплексного и векторного исчисления, а также представления о системах единиц измерения.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С МЕТАЛЛАМИ

1.1. Механизм поглощения света в металлах

Известно, что в ИК- и видимой области оптического диапазона металлы сильно отражают падающее излучение. Это объясняется преимущественным рассеянием света при его взаимодействии со свободными электронами, концентрация которых достигает в металлах 10^{22} - 10^{23} см⁻³. Электроны излучают в процессе рассеяния вторичные волны, которые при сложении формируют сильно отраженную волну. Формирование из рассеянного света отраженной волны происходит в тонком приповерхностном слое, в котором затухает проникающее в металл излучение.

Роль свободных электронов во взаимодействии электромагнитного излучения с металлами является ведущей в широком диапазоне частот, так как электрические и теплофизические свойства металлов в первую очередь определяются свободными электронами.

В то же время хорошо известно, что масса электрона намного превосходит массу фотона (под массой фотона понимается энергетическая масса $\hbar\omega/c^2$, где \hbar – приведенная постоянная Планка, ω – частота, c – скорость света). В связи с этим возникает вопрос, а всегда ли свободный электрон может поглотить фотон?

Задание 1

На основании фундаментальных законов сохранения энергии и импульса для изолированной системы рассмотрите возможность поглощения свободным электроном оптического фотона.

В приближении классической физики предполагается, что скорость движения электрона много меньше скорости света.

Действительно, скорость движения фотона $c \sim 3 \cdot 10^8$ м/с, скорость движения электрона в металлах $v_e \sim 10^6$ м/с, получаем $v_e/c \ll 1$, т.е. фотон налетает на практически неподвижный электрон.

Решать задачу будем методом от противного. Предполагаем, что свободный электрон может поглотить фотон.

При записи для этого случая законов сохранения энергии и импульса необходимо воспользоваться элементами векторного исчисления, изложенными в приложении (П2).

Если закон сохранения энергии электромагнитного поля записывается в скалярных величинах (1), то закон сохранения импульса электромагнитного поля (2) выражается через векторные величины. Векторная величина, в отличие от скалярной, зависит от двух элементов разной природы: алгебраического элемента – модуля и геометрического элемента – вектора.

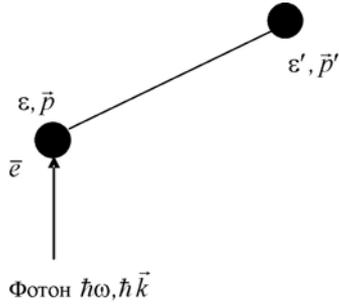


Рис.1. Схема взаимодействия фотона с электроном.

$$\varepsilon + \hbar\omega = \varepsilon', \quad (1)$$

$$\vec{p} + \hbar\vec{k} = \vec{p}', \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}, \quad (3)$$

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad (4)$$

где: ε – энергия невозбужденного электрона, ω – частота света, p – импульс электрона, k – волновое число, \hbar – приведенная постоянная Планка, m – масса электрона, штрих означает возбужденное состояние.

Подставив (3) в (1), получим

$$\frac{p^2}{2m} + \hbar\omega = \frac{p'^2}{2m}. \quad (5)$$

Заменив p'^2 его значением через (2)

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega &= \frac{(\vec{p} + \hbar\vec{k})^2}{2m} \Rightarrow \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{2p\hbar k \cos\theta}{2m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega = \frac{(\vec{p} + \hbar\vec{k})^2}{2m} \Rightarrow \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{2p\hbar k \cos\theta}{2m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{pk \cos\theta}{m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar\omega^2}{c^2 2m} + \frac{p\omega \cos\theta}{cm}. \end{aligned}$$

В выполненных выше операциях мы воспользовались свойствами сложения векторов: коммутативностью и ассоциативностью, а также правилом скалярного произведения. Кроме того, скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату модуля этого вектора, а квадрат модуля равен квадрату самой величины.

Получаем выражение для косинуса угла между направлением движения электрона и волновым вектором фотона:

$$\cos\theta = \frac{mc}{p} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{2mc^2} \right).$$

Учитывая, что

$$\vec{p} = m\vec{v}_e,$$

получаем значение множителя перед скобками

$$\frac{mc}{p} = \frac{mc}{mv_e} = \frac{c}{v_e} \gg 1.$$

Оценим выражение в скобках для следующих значений параметров $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\omega = 10^{15}$ Гц, $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг, $\hbar = h/(2\pi)$:

$$\left(1 - \frac{\hbar\omega}{2mc^2}\right) \approx 1 - \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15}}{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 1 - 6,5 \cdot 10^{-7} \approx 1.$$

Получаем $\cos \theta \gg 1$, что невозможно.

Наше предположение о том, что свободный электрон может поглотить фотон, оказалось неверным.

Каким же образом происходит поглощение света свободными электронами в металлах?

В металлах понятие «свободный» электрон является относительным. Действительно, электрон свободен, так как не привязан к конкретному атому и свободно перемещается по кристаллу. Однако, электрон находится в поле кристаллической решетки и при своем движении испытывает столкновения с другими электронами, ионами металла, примесями, дефектами и т. п. Поглощение фотона непосредственно электроном проводимости возможно при одновременном столкновении пары электрон-фотон с фононом решетки, примесью, другим электроном, поверхностью металла, границами зерен и кристаллитов. В этом случае выполняется не только закон сохранения энергии, но и закон сохранения импульса.

При выполнении сравнительных количественных оценок физических величин необходимо использовать единую систему единиц измерения. Исторический процесс развития естествознания способствовал созданию нескольких единиц измерения (см. П5). При решении задач кинематики основными системами единиц измерения являются системы СГС, СИ и МКС. На примере следующего задания покажем простой подход к переводу из одной системы единиц в другую.

Задание 2

Оцените количественные значения импульса и энергии для электрона и фотона и сравните их. Воспользуйтесь исходными данными из предыдущего задания.

Импульс электрона определяется его массой и скоростью движения:

$$p_e = mv_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6 \approx 10^{-24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Расчет выполнен в системе МКС.

Масса покоя фотона равна нулю, однако, как показали опыты Комптона, фотоны подчиняются тем же кинематическим законам, что и частицы вещества. Квант излучения с частотой ω обладает импульсом

$$p_{\phi} = \hbar k = \hbar \frac{\omega}{c} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15}}{2,3,14 \cdot 10^8} \approx 10^{-27} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

Расчет проведен в системе СИ.

Чтобы определить связь между единицами измерения системы МКС и системы СИ, воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$A = FS = maS \Rightarrow [\text{Дж}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Получаем значение импульса фотона в системе МКС:

$$p_{\phi} \approx 10^{-27} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Сравнивая импульсы фотона и электрона в единой системе единиц измерения, видим, что импульс фотона в 1000 раз меньше импульса электрона.

В то время как энергии электрона и фотона:

$$\varepsilon_e = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{(10^{-24})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж},$$

$$\varepsilon_{\phi} = \hbar \omega = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15}}{2,3,14} \approx 10^{-19} \text{ Дж},$$

одного порядка. Проведенные количественные оценки подтверждают необходимость участия третьей частицы в процессе поглощения света свободными электронами в металлах.

В определенном диапазоне длин волн и для определенного типа электронов (имеется в виду релятивистские и нерелятивистские электроны) наблюдаются эффекты упругого столкновения фотона и электрона, приводящие к изменению частоты падающего фотона. К таким эффектам относятся эффект Комптона (прямой и обратный), эффекты Рамана и Мандельштама.

Вопросы для самостоятельной работы

1. В чем суть прямого эффекта Комптона, и в каком диапазоне длин волн он проявляется? Оцените импульс фотона и сравните с импульсом электрона.
2. Почему обратный эффект Комптона можно использовать для объяснения поведения релятивистских электронов в поле электромагнитного излучения? Напишите законы сохранения энергии и импульса для этого случая.
3. Какова физическая природа эффектов Рамана и Мандельштама. В каких средах эти эффекты первоначально наблюдались?

1.2. Электродинамическая модель Друде применительно к металлам

Согласно классической электронной теории строения вещества физические свойства металлов объясняются на основе допущений о наличии свободных электронов, движущихся между ионами кристаллической решетки и образующих особый "электронный" газ.

При наложении электрического поля свободные электроны наряду с беспорядочным тепловым движением участвуют в направленном, ускоренном движении, которое собственно и обуславливает собой электрический ток. Наличие у металлов сопротивления указывает на торможение электронов при столкновении с ионами решетки. В противном случае энергия электрона могла бы возрастать неограниченно, что привело бы к бесконечной длине свободного пробега. Это физически означает, что при столкновении электрон теряет свою скорость, приобретенную им за время, прошедшее с момента предшествующего столкновения.

В предположении, что электроны металла – классический газ, нем. физик Поль Друде (1900 г.) вывел формулы для удельной высокочастотной электропроводности $\sigma(\omega)$. Формулы Друде используются для описания оптических свойств металлов в приближении комплексной диэлектрической проницаемости ϵ вещества, зависящей от частоты ω .

Задание 3

Выведите формулу Друде для металлов в приближении комплексной диэлектрической проницаемости.

Для выполнения этого задания потребуются знание свойств и действий с комплексными числами (см. П1).

Электрическая напряженность электромагнитного поля является комплексной величиной, и, согласно формуле Эйлера, может быть записана в виде

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t},$$

где E_0 – амплитуда поля, t – время.

Уравнение, описывающее движение электрона вдоль оси y в поле электромагнитной волны, можно представить в виде

$$m\ddot{y} = e_0 E_0 e^{-i\omega t} - m\gamma \dot{y},$$

где e_0 – заряд электрона, $\gamma = \nu_{ee} + \nu_{ei} + \nu_{ep}$ – суммарная частота электрон-электронных, электрон-ионных и электрон-примесных столкновений. Перепишем уравнение в более удобной форме

$$m\ddot{y} + m\gamma \dot{y} = e_0 E_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Ищем решение в виде $y = y_0 e^{-i\omega t}$ и подставим его в уравнение (1):

$$-m\omega^2 y_0 e^{-i\omega t} - i\omega m \gamma y_0 e^{-i\omega t} = e_0 E_0 e^{-i\omega t}.$$

Получаем выражение для амплитуды колебательного движения электрона

$$y_0 = -\frac{e_0 E_0}{m\omega(\omega + i\gamma)},$$

откуда траектория движения электрона также является комплексной величиной и равна

$$y = -\frac{e_0 E_0}{m\omega(\omega + i\gamma)} e^{-i\omega t}.$$

Плотность наведенного электрического тока согласно определению составляет

$$j = e_0 N v_e = e_0 N \dot{y} = e_0 N (-i\omega) y = i \frac{e_0^2 \omega N E_0}{m\omega(\omega + i\gamma)} e^{-i\omega t},$$

где N – концентрация электронов.

Выполняется закон Ома для тока, наведенного электромагнитным полем

$$\vec{j} = i \frac{e_0^2 N}{m(\omega + i\gamma)} \vec{E}. \quad (2)$$

Учитывая, что произведение двух сопряженных комплексных чисел есть вещественное число, умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное выражение, получим:

$$\vec{j} = \frac{N e_0^2}{m(\omega^2 + \gamma^2)} (i\omega + \gamma) \vec{E}. \quad (3)$$

Из уравнения Максвелла для тока смещения известно

$$\vec{j} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

В нашем случае

$$\vec{j} = -i \frac{\varepsilon \omega}{4\pi} \vec{E}. \quad (5)$$

Приравняем оба выражения для тока (3) и (5)

$$-i \frac{\varepsilon \omega}{4\pi} = \frac{N e_0^2 (\gamma + i\omega)}{m(\omega^2 + \gamma^2)},$$

и, выделяя действительную и мнимую части, для диэлектрической проницаемости получаем следующее выражение:

$$\varepsilon_{\text{эл-м}} = \frac{4\pi N e_0^2}{m\omega(\omega^2 + \gamma^2)} (-\omega + i\gamma) = -\frac{4\pi N e_0^2}{m(\omega^2 + \gamma^2)} + i \frac{4\pi N e_0^2 \gamma}{m\omega(\omega^2 + \gamma^2)}.$$

Вводя плазменную частоту электронного газа

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e_0^2}{m}}, \quad (6)$$

получаем

$$\varepsilon_{\text{эл-м}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)},$$

и, учитывая, что диэлектрическая проницаемость вакуума равна 1 имеем

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \varepsilon_{\text{эл-л}}.$$

Окончательно получаем формулу Друде для комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (7)$$

Эта формула связывает макроскопическую характеристику среды ε с микроскопическими характеристиками: концентрацией электронов, массой электрона и частотой столкновений электрона при его движении в кристалле.

Замечание. При выводе формулы Друде использовалось уравнение Максвелла (5), записанное в системе СГС, поэтому и диэлектрическая проницаемость в выражении (7) относится к системе СГС (см. П5).

Задание 4

Воспользовавшись формулой Друде, получите дисперсионные зависимости показателя преломления $n(\omega)$ и показателя поглощения $k(\omega)$ для металлов.

При выполнении этого задания также потребуется знание действий с комплексными величинами (см. прил. П1)

Диэлектрическая проницаемость связана с показателями преломления n и поглощения k согласно выражению

$$\varepsilon = (n + ik)^2 = n^2 + 2nki - k^2 = n^2 - k^2 + 2nki. \quad (8)$$

Формула Друде, полученная в предыдущем задании, выражает диэлектрическую проницаемость через микроскопические характеристики среды

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{\gamma \cdot \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (9)$$

Приравниваем выражения для ε . Из теории комплексного исчисления следует, что комплексные величины равны, если равны их действительные и мнимые части, получаем:

$$n^2 - k^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (10)$$

$$2nk = \frac{\gamma \cdot \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}.$$

Для упрощения выкладок введем величину $\theta = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} n^2 - k^2 &= 1 - \theta, \\ 2nk &= \frac{\gamma\theta}{\omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

В системе (11) возведем обе части второго уравнения в квадрат и подставим в первое, получим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2\theta^2}{4k^2\omega^2} - k^2 &= 1 - \theta, \\ k^4 + (1 - \theta)k^2 - \frac{\gamma^2\theta^2}{4\omega^2} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из двух решений биквадратного уравнения (12)

$$k_{1,2}^2 = -\frac{1-\theta}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-\theta)^2}{4} + \frac{\gamma^2\theta^2}{4\omega^2}}$$

имеет смысл только положительное решение

$$k^2 = \frac{\theta-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\theta)^2 + \frac{\gamma^2\theta^2}{\omega^2}}.$$

Получаем выражения для $n(\omega)$ и $k(\omega)$:

$$k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(1-\theta)^2 + \left(\frac{\gamma\theta}{\omega}\right)^2} + (\theta-1) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$n(\omega) = \sqrt{k^2 + 1 - \theta},$$

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(1-\theta)^2 + \left(\frac{\gamma\theta}{\omega}\right)^2} - (\theta-1) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Учитывая, что

$$\theta = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{(10^{16})^2}{(10^{15})^2 + (10^{14})^2} \approx 10^2 \gg 1,$$

упрощаем выражение для $k(\omega)$ и $n(\omega)$ и получаем дисперсионные зависимости показателя преломления $n(\omega)$ и показателя поглощения $k(\omega)$ для металлов в оптическом диапазоне

$$\left. \frac{n(\omega)}{k(\omega)} \right\} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2(\omega^2 + \gamma^2)}} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} \mp 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Из вида полученных дисперсионных соотношений показателя преломления и показателя поглощения следует сложный характер спектральных изменений $n(\omega)$ и $k(\omega)$ для металлов.

1.3. Поглощательная способность металлов

Поглощательная способность является самой важной оптической характеристикой при разработке лазерных технологий для металлов. Она характеризует долю падающего лазерного излучения, участвующую в технологическом процессе. Поэтому теоретические оценки и экспериментальное определение этой характеристики крайне важны. Поглощательная способность A является интегральной характеристикой материала и связана с его оптическими микрохарактеристиками.

В законе Бугера для металлов

$$I = AI_0 e^{-\alpha x}$$

поглощательная способность A определяется из закона сохранения энергии электромагнитного излучения через коэффициент отражения R и коэффициент пропускания T как

$$A = I - T - R.$$

Коэффициент поглощения α - величина, обратная расстоянию, на котором интенсивность уменьшается в e раз, $[\alpha] = \text{см}^{-1}$.

В комплексный показатель преломления

$$N = n - ik$$

входят n - показатель преломления и k - показатель поглощения, также k называют показателем экстинкции.

Показатель поглощения k связан с коэффициентом поглощения α соотношением

$$k = \frac{\lambda \alpha}{4\pi}.$$

Коэффициент отражения при нормальном падении определяется показателем преломления и показателем поглощения как

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2},$$

а поглощательная способность как

$$A = \frac{4n}{(n+1)^2 + k^2}. \quad (16)$$

Задание 5

Закон Бугера в дифференциальной форме верен для различных видов материалов. Выведите интегральный закон Бугера, который успешно применяется для металлов.

Экспериментальный закон Бугера теоретически был выведен И.Г. Ламбертом при очень простых предположениях: при прохождении любого слоя вещества относительное изменение интенсивности монохроматического света зависит только от коэффициента поглощения и толщины слоя

$$dI = -\alpha(I)I dx. \quad (17)$$

Для металлов коэффициент поглощения определяется концентрацией свободных электронов, которая практически не меняется, поэтому можно считать, что

$$\alpha(I) = \alpha = \text{const}.$$

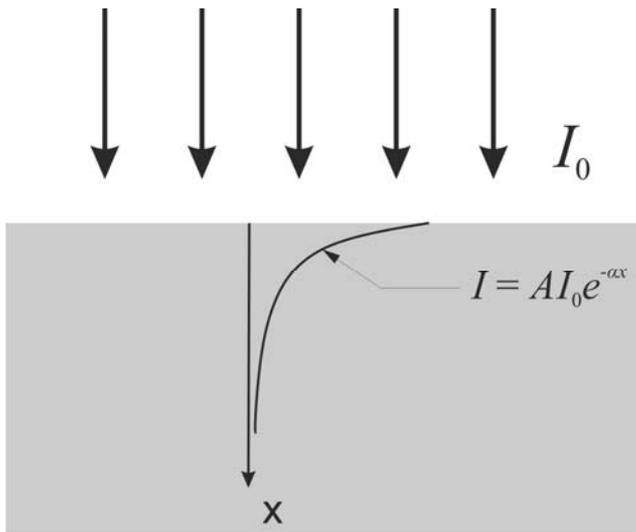


Рис.2. Поглощение света в металле.

Это приближение позволяет в выражении

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx$$

разделить переменные и проинтегрировать обе части дифференциального уравнения

$$\ln I = -\alpha x + C. \quad (18)$$

Учитывая условие на границе

$$I|_{x=0} = AI_0,$$

получаем выражение для константы

$$\ln AI_0 = C,$$

подставив которое в уравнение (18)

$$\ln I = -\alpha x + \ln AI_0,$$

и, сделав ряд преобразований: $\ln I - \ln AI_0 = -\alpha x$, $\ln \frac{I}{AI_0} = -\alpha x$, $\frac{I}{AI_0} = e^{-\alpha x}$,

получаем интегральную форму закона Бугера:

$$I = AI_0 e^{-\alpha x}.$$

Согласно полученному выражению интенсивность света экспоненциально спадает с глубиной. Это приближение весьма удовлетворительно работает при действии лазерного излучения на металлы.

Задание для самостоятельной работы

Получите выражения для поглощательной способности металлов в различных спектральных диапазонах: а) $\omega < \gamma$; б) $\gamma < \omega$ и оцените ее значение при $\lambda = 10,6$ мкм, $\lambda = 1,06$ мкм, $\gamma = 10^{13}$ - 10^{14} с⁻¹, $\omega_p = 10^{16}$ с⁻¹.

При выполнении задания воспользуйтесь формулами (13-16).

Вопросы для самостоятельной работы

1. Чем ограничивается длина свободного пробега электронов в металле?
2. Какое основное предположение сделал П. Друде при выводе своих формул?
3. Почему для описания оптических свойств металлов Друде использовал приближение комплексной (а не вещественной) диэлектрической проницаемости?
4. Напишите выражение для тока смещения из уравнений Максвелла.
5. Чем определяется величина комплексной диэлектрической проницаемости согласно формуле Друде?
6. Почему для металлов можно использовать закон Бугера в интегральной форме?

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОЛУПРОВОДНИКАМИ

В случае полупроводников процесс поглощения света более сложен, чем в металлах. В полупроводниках, имеющих при комнатной температуре незначительную концентрацию свободных электронов, поглощение света определяется, в основном, связанными электронами. Сильно поглощать излучение на частоте ω будут лишь те полупроводники, для которых энергия кванта $\hbar\omega$ больше ширины запрещенной зоны ε_g .

2.1. Кинетика лазерного возбуждения полупроводников

Под действием лазерного излучения в полупроводнике происходит генерация неравновесных носителей n (носители являются неравновесными, т.к. существуют только в процессе фотовозбуждения и спустя некоторое время после его окончания). Спустя некоторое время (время жизни в возбужденном состоянии) начинаются процессы рекомбинации. Кроме того, возбужденные носители могут диффундировать на расстояния, определяемые коэффициентом диффузии D . Для одномерного случая уравнение, учитывающее изменение концентрации неравновесных носителей под действием лазерного излучения имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha J e^{-\alpha x} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \beta_1 n - \beta_2 n^2 - \beta_3 n^3, \quad (1)$$

где J – плотность потока фотонов, β_1 – величина обратная времени жизни носителей при безызлучательной рекомбинации, β_2 – параметр излучательной рекомбинации электрона и дырки (участвуют две частицы, поэтому скорость рекомбинации пропорциональна n^2), β_3 – коэффициент трехчастичной ударной (Оже) рекомбинации.

Через некоторое время распределение носителей в полупроводнике становится стационарным

$$D \frac{d^2 n}{dx^2} = -\alpha J e^{-\alpha x} + \beta_1 n + \beta_2 n^2 + \beta_3 n^3. \quad (2)$$

Задание 6

Определите распределение концентрации неравновесных носителей в глубину в фотовозбужденном полупроводнике с учетом безызлучательной рекомбинации в объеме и с учетом рекомбинации на поверхности. Оцените величину концентрации неравновесных носителей на поверхности при $J = 10^{24} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, $D = 10 \text{ см}^2/\text{с}$, $\alpha = 10 \text{ см}^{-1}$, $\beta = 10^3 \text{ см}^3/\text{с}$ (здесь β – коэффициент поверхностной рекомбинации).

В случае безызлучательной рекомбинации стационарное распределение концентрации неравновесных носителей (2) описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$D \frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{\tau} = -J\alpha e^{-\alpha x}, \quad (3)$$

где $\tau = 1/\beta_1$ – время жизни носителей в возбужденном состоянии при безызлучательной рекомбинации.

Учтем в граничном условии поверхностную рекомбинацию возбужденных носителей

$$D \frac{dn}{dx} \Big|_{x=0} = \beta n_0, \quad (4)$$

где β – коэффициент поверхностной рекомбинации.

Перепишем исходное уравнение (3)

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{D\tau} = -\frac{J\alpha}{D} e^{-\alpha x}, \quad (5)$$

и будем искать решение в виде суммы двух частных решений

$$n = Ce^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau}}} + Be^{-\alpha x}, \quad \alpha \neq \frac{1}{\sqrt{D\tau}}. \quad (6)$$

Подставим в уравнение (5) второе решение

$$n = Be^{-\alpha x}. \quad (7)$$

Получим уравнение для константы B

$$B \left(\alpha^2 - \frac{1}{D\tau} \right) = -\frac{J\alpha}{D}.$$

Отсюда

$$B = \frac{J\alpha\tau}{1 - \alpha^2 D\tau}. \quad (8)$$

Подставим B в общее решение (6)

$$n = Ce^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau}}} - \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} e^{-\alpha x}.$$

Воспользуемся граничным условием (4)

$$\left(\frac{dn}{dx} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\beta}{D} n \Big|_{x=0},$$

и определим C :

$$-\frac{C}{\sqrt{D\tau}} + \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} = \frac{\beta}{D} \left(C - \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} \right),$$

$$C \left(\frac{\beta}{D} + \frac{1}{\sqrt{D\tau}} \right) = \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} \left(\alpha + \frac{\beta}{D} \right).$$

Получаем аналитическое выражение для концентрации неравновесных носителей в зависимости от глубины:

$$n = \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} \left[\frac{\alpha + \frac{\beta}{D}}{\frac{\beta}{D} + \frac{1}{\sqrt{D\tau}}} e^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau}}} - e^{-\alpha x} \right] = \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} \left[\frac{1 + \frac{\alpha D}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{D}{\tau}}} e^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau}}} - e^{-\alpha x} \right]. \quad (9)$$

Концентрация неравновесных носителей на поверхности имеет вид:

$$n_0 = \frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} \cdot \frac{\frac{\alpha D}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sqrt{D\tau}}{1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{D}{\tau}}} = \frac{J\alpha\tau}{\left(\beta + \frac{\sqrt{D}}{\tau}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\frac{D}{\tau}} (\alpha\sqrt{D\tau} - 1)}{(\alpha^2 D\tau - 1)} = \frac{J\alpha\sqrt{D\tau}}{\beta + \sqrt{\frac{D}{\tau}}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{D\tau}\alpha}.$$

Для $J=10^{24}$ см²с⁻¹, $D=10$ см²/с, $\alpha=10$ см⁻¹, $\beta=10^3$ см/с концентрация неравновесных носителей на поверхности составит величину $n_0 \sim 10^{19}$ см⁻³. Это значение превышает концентрацию равновесных электронов (10^{16} - 10^{18} см⁻³) и соответствует концентрации носителей сильно легированного полупроводника.

Задание 7

Постройте график распределения концентрации неравновесных носителей в глубине, воспользовавшись выражением (9) и данными из предыдущего задания.

Чтобы построить график распределения концентрации неравновесных носителей в глубину, надо исследовать точки экстремума:

$$\frac{dn}{dx} = 0, \text{ при } x = x_0.$$

Выполнив дифференцирование, получаем:

$$\frac{J\alpha\tau}{\alpha^2 D\tau - 1} \left(\alpha e^{-\alpha x_0} - \frac{1 + \frac{\alpha D}{\beta}}{\sqrt{D\tau} \left(1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{D}{\tau}} \right)} \cdot e^{-\frac{x_0}{\sqrt{D\tau}}} \right) = 0.$$

После несложных преобразований получаем:

$$e^{x_0 \left(\frac{1}{\sqrt{D\tau}} - \alpha \right)} = \frac{1 + \frac{\alpha D}{\beta}}{\alpha \sqrt{D\tau} \left(1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{D}{\tau}} \right)}.$$

Отсюда глубина залегания экстремума соответствует

$$x_0 = \frac{\sqrt{D\tau}}{1 - \alpha \sqrt{D\tau}} \ln \frac{1 + \frac{\alpha D}{\beta}}{\alpha \sqrt{D\tau} \left(1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{D}{\tau}} \right)}.$$

Характерный вид графика распределения концентрации неравновесных носителей в глубину приведен на рис. 3.

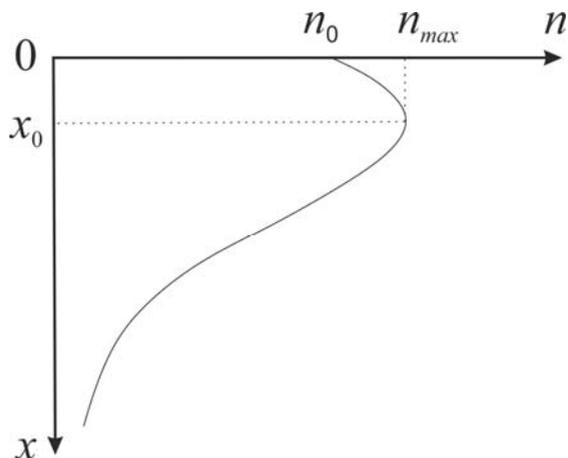


Рис.3. Характерный вид графика распределения концентрации неравновесных носителей в глубину

Задание для самостоятельной работы

Определите распределение стационарной концентрации неравновесных носителей в фотовозбужденном полупроводнике с учетом ударной рекомбинации. Оцените ее значение на поверхности для $J=10^{24} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Какими электронами определяется, в основном, поглощение света в полупроводниках?
2. Какие носители в полупроводнике называются неравновесными?
3. Какова зависимость от концентрации для различных типов рекомбинации?
4. Почему диффузионные процессы весьма значимы при анализе кинетики фотовозбуждения полупроводников?

3. ЛАЗЕРНАЯ АКТИВАЦИЯ ПРОЦЕССОВ АРРЕНИУСОВСКОГО ТИПА

При лазерном нагреве материалов на их поверхности могут инициироваться химические реакции, скорость которых растет с температурой по активационному закону (закону Аррениуса), например, реакции окисления, разложения, нитрирования, карбидизации др. Большие скорости изменения температуры, реализуемые при лазерном воздействии, определяют особенности протекания этих процессов по сравнению с изотермическими условиями.

3.1. Лазерное окисление

Наиболее распространенным является термохимический процесс лазерного окисления металлов. При построении физических моделей и теории лазерного окисления исходят из представлений, сформированных в результате исследований обычного, изотермического гетерогенного окисления поверхности с образованием твердых окисных пленок.

В большом числе случаев кинетику изотермического окисления металла можно описать обобщенным активационным законом вида

$$\frac{db}{dt} = \frac{B_m}{T^n b^m} \exp\left(-\frac{T_a}{T}\right), \quad (1)$$

где b – толщина окисла, T – температура, t – время; B_m – некоторая константа; T_a – выраженная в Кельвинах энергия активации лимитирующей стадии реакции (обычно $T_a = (1-5) \cdot 10^4$ К), m и n – параметры.

Если окисная пленка не влияет на оптические свойства металла, то для построения простейшей феноменологической теории лазерного окисления необходимо найти временной закон, по которому изменяется температура окисляющейся поверхности $T(t)$, и ввести его в общее решение уравнения (1):

$$b^{m+1} = B_m (m+1) I_n(t) + b_0^{m+1},$$
$$I_n(t) = \int_0^t \exp\left[-\frac{T_a}{T(t)}\right] T^{-n}(t) dt,$$

где b_0 — начальная толщина окисной пленки. Такой подход фактически означает, что микрокинетика лазерного окисления считается идентичной кинетике изотермического окисления.

Поскольку при $T(t) \ll T_a$ активационная экспонента резко растет с температурой, основной вклад в $I_n(t)$ вносят лишь те моменты времени, когда температура близка к максимальной.

Поэтому процесс неизотермического окисления по своему результату эквивалентен изотермическому окислению при максимальной (на данном

временном интервале) температуре, которая поддерживается в течение некоторого «эквивалентного» времени t_e .

При этом t_e определяется поведением функции $T(t)$ вблизи ее максимального значения T_{max} . Если при всех $t \geq 0$ температура растет, то есть максимальное значение $T = T_{max}$ достигается в каждый момент времени на конце временного промежутка, то

$$t_e = \frac{T^2(t)}{T_a T'(t)}. \quad (2)$$

Если внутри промежутка $(0, t)$ попадает максимум температуры T_{max} , достигаемый в некоторый момент t_0 , причем скорость изменения температуры в этот момент претерпевает разрыв, то

$$t_e \approx \frac{T_{max}^2}{T_a} \left\{ \frac{1}{T'|_{t_0-0}} + \frac{1}{|T'|_{t_0+0}} \right\}. \quad (3)$$

Такой температурный режим характерен для нагрева металла импульсом прямоугольной формы.

Если же $T'(t_0) = 0$ (импульс треугольной формы), то, используя для вычисления $I_n(t)$ метод перевала, получим:

$$t_e \approx \left\{ \frac{2\pi T_{max}^2}{T_a |T''(t_0)|} \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Задание 8

Получите выражения для эквивалентного времени t_e и толщины окисла h , образующегося на поверхности металла в случае а) лазерного импульса прямоугольной формы б) лазерного импульса треугольной форм.

а) прямоугольный импульс

В случае прямоугольной формы импульса температура достигает максимального значения к концу импульса

$$T_m = \frac{2q\sqrt{at}}{\sqrt{\pi k}}, \quad (5)$$

где a – температуропроводность, k – коэффициент теплопроводности.

С учетом начального значения она составит величину

$$T_M = T_H + T_m = T_H + \frac{2q\sqrt{at}}{\sqrt{\pi k}}. \quad (6)$$

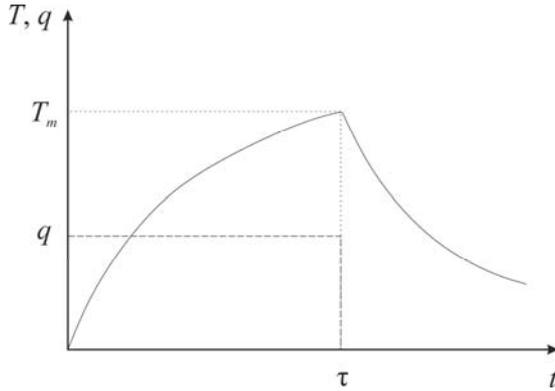


Рис. 4. Изменение температуры при действии прямоугольного лазерного импульса.

По окончании действия лазерного импульса мишень начинает остывать. Это равносильно включению источника с обратным знаком. Суммарный процесс нагрева с последующим остыванием по окончании импульса можно представить с помощью выражений:

$$\frac{T(t) - T_H}{T_m} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}}, \quad 0 \leq t < \tau, \quad (7)$$

$$\frac{T(t) - T_H}{T_m} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\frac{t}{\tau} - 1}, \quad t \geq \tau. \quad (8)$$

Возьмем производные от функций (7), (8) в точке разрыва $t = \tau$:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=\tau-0} = T_m \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \Big|_{t=\tau-0} = \frac{T_m}{2\tau} = \frac{T_m - T_H}{2\tau} \approx \frac{T_m}{2\tau}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=\tau+0} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Используя выражения (8) и (9) получим для прямоугольного импульса выражение для эквивалентного времени

$$t_e = \frac{T_M^2}{T_a \left| \frac{dT}{dt} \right|_{t=\tau-0}} + \frac{T_M^2}{T_a \left| \frac{dT}{dt} \right|_{t=\tau+0}} \Rightarrow \frac{T_M^2 2\tau}{T_a T_m} = 2\tau \frac{T_M}{T_a} \quad (11)$$

и толщины окисла

$$h = \sqrt{2Bt_e} e^{\frac{T_a}{T_m}} = 2\sqrt{B \frac{T_m \tau}{T_a}} e^{\frac{T_a}{2T_m}}.$$

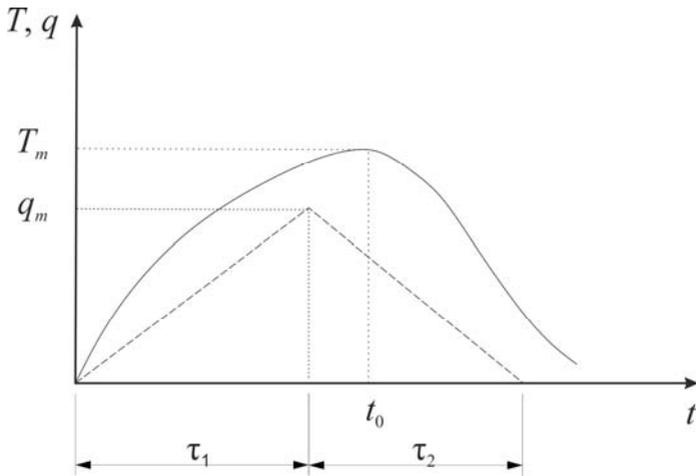


Рис. 5. Изменение температуры при действии треугольного лазерного импульса.

б) треугольный импульс

В случае импульса треугольной формы распределение температуры на поверхности

$$T(t) = T_H + \frac{4q_m \sqrt{a}}{3\sqrt{\pi k \tau_1}} \left[t^{\frac{3}{2}} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2} (t - \tau_1)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (12)$$

имеет максимум при $t = t_0$. Найдём t_0 .

Для этого возьмем производную от функции (12) и приравняем ее к нулю.

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{3}{2} t_0^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{\tau_2} (t_0 - \tau_1)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

После ряда алгебраических преобразований

$$t_0 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_2^2} (t_0 - \tau_1),$$

$$t_0 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2 \cdot \tau_1}{\left(\frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_2^2} - 1 \right) \tau_2^2},$$

$$t_0 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2 \tau_1}{(\tau_1 + \tau_2 - \tau_2)(\tau_1 + \tau_2 + \tau_2)}.$$

Получаем выражения для точки экстремума

$$t_0 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1 + 2\tau_2}. \quad (13)$$

Максимальное значение температуры, достигаемое при треугольной форме импульса составит:

$$T_m = T(t_0) = \frac{4q_m \sqrt{a} (\tau_1 + \tau_2)}{3\sqrt{\pi k} (\tau_1 + 2\tau_2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (14)$$

Для плавного экстремума первая производная равна нулю и все определяет вторая производная

$$t_e = \sqrt{\frac{2\pi T_M^2}{(T_a |T''(t_0)|)}}. \quad (15)$$

Полагая $T_M = T_H + T_m$ и воспользовавшись выражениями (12), (13), (14), получаем для эквивалентного времени (15) следующее выражение

$$t_e = \sqrt{\frac{8\pi}{3T_a (T_M - T_H)}} T_M \frac{\tau_2 (\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1 + 2\tau_2}, \quad (16)$$

а для толщины окисла

$$h = \sqrt{2Bt_e} e^{-\frac{T_a}{T_M}}. \quad (17)$$

Задание для самостоятельной работы

Количественно оцените влияние формы импульса на лазерное окисление титана, если $B = 330 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$; $T_a = 3,3 \cdot 10^4 \text{ К}$; $T_H = 300 \text{ К}$; $T_M = 1500 \text{ К}$; (в прямоугольном импульсе); $\tau = 100 \text{ мкс}$. Используйте формулы, полученные в предыдущем задании.

Результаты расчета эквивалентного времени и толщины окисла в случае лазерного окисления титана импульсами различной формы представьте таблице 1

Таблица 1

τ_1/τ	$T_M, \text{ К}$	$t_e, \text{ мкс}$	$h, \text{ \AA}$
прямоугольный импульс	1500		
0	1430		
0,25	1500		
0,5	1600		
0,75	1730		
1	1900		

Сопоставляя результаты расчетов, сделайте вывод о наиболее выгодном режиме.

4. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Теоретически поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ) известны с начала прошлого века. Их некоторые свойства и структура поля были изучены еще А. Зоммерфельдом. Однако представления о ПЭВ долгое время были достоянием узкого круга специалистов и, за исключением радиофизики, практически нигде не использовались.

В оптику представления о ПЭВ проникли около 30-ти лет назад, когда их научились возбуждать лазерным излучением и детектировать различными методами. В настоящее время исследования и применения ПЭВ развиваются достаточно динамично. Это обусловлено уникальными свойствами таких волн: высокой пространственной локализацией и возможностью значительного усиления напряженности поля в ПЭВ.

Интерес к изучению ПЭВ оптического диапазона связан также с тем, что они могут эффективно возбуждаться светом на реальной поверхности и существенно влиять на разнообразные явления. Среди них рассеяние света адсорбированными на поверхности частицами, генерация второй гармоники при отражении лазерного излучения от металла, изменение поглощения, фотохимические реакции, а также физико-химические процессы, сопровождающие действие на поверхность интенсивного лазерного излучения, к которым, в первую очередь, относится образование поверхностных периодических структур. Практический интерес к ПЭВ и другим поверхностным электромагнитным возбуждениям обусловлен новыми возможностями, открываемыми их использованием в оптической спектроскопии, нелинейной оптике, технологии, а в последнее время и в микроскопии сверхвысокого разрешения.

4.1. Условия возбуждения ПЭВ

Поверхностными электромагнитными волнами, или поверхностными поляритонами называются волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух разнородных сред и существующие одновременно в них обеих. Поля, переносимые этими волнами, локализованы вблизи поверхности и затухают по обе стороны от нее. В отличие от объемных, чисто поперечных электромагнитных волн ПЭВ являются частично продольными волнами ТМ-типа. Интересно, что с формальной точки зрения ПЭВ описываются обычными волновыми уравнениями со стандартными граничными условиями, но являются их особым решением.

В простом и вместе с тем важном модельном случае ПЭВ рассматривают на плоской границе двух однородных изотропных сред без потерь, одна из которых является диэлектриком ($\varepsilon_1 = n_1^2$) а другая – так называемой поверхностно-активной средой, у которой $\varepsilon_2 < 0$, причем $|\varepsilon_2| > \varepsilon_1$. Решение в

виде ТМ–ПЭВ в этом случае существует только, когда ϵ_1 и ϵ_2 имеют разные знаки.

Задание 9

Определите необходимые условия возникновения плоской поверхностной электромагнитной волны, которая может распространяться без потерь вдоль оси «x» - плоской границы двух однородных изотропных сред.

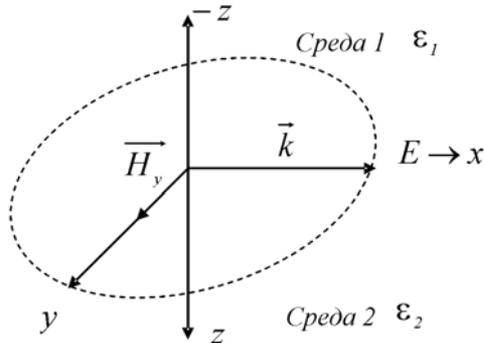


Рис. 6. Ориентация электрического и магнитного векторов в ПЭВ, бегущей вдоль поверхности в направлении оси x.

Уравнения Максвелла для распространения электромагнитного поля в средах 1,2:

$$\text{rot} \vec{H}_{1,2} = \frac{\epsilon_{1,2}}{c_0} \frac{\partial \vec{E}_{1,2}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot} \vec{E}_{1,2} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \vec{H}_{1,2}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{H}_{1,2} = \text{div} \vec{E}_{1,2} = 0. \quad (3)$$

Воспользуемся основными положениями векторного анализа (см приложение П2):

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\text{rot} \vec{a} = \left\{ \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right\}.$$

Электрический вектор \vec{E} имеет две составляющие, магнитный вектор \vec{H} – лежит в плоскости поверхности $\vec{E} = E_0\{\vec{i}, 0, \vec{k}\}$, $\vec{H} = H_0\{0, \vec{j}, 0\}$, т.е. $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_z \vec{e}_z$, $\vec{H} = H_y \vec{e}_y$.

Граничные условия, отражающие непрерывность тангенциальных компонентов электрического и магнитного полей и нормальных компонентов индукций при переходе через границу раздела между средами,

$$E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0}, \quad (4)$$

$$H_{1y}|_{z=0} = H_{2y}|_{z=0}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 E_{1z}|_{z=0} = \varepsilon_2 E_{2z}|_{z=0}, \quad (6)$$

$$\mu_1 H_{1z}|_{z=0} = \mu_2 H_{2z}|_{z=0}. \quad (7)$$

Для электрического вектора напряженности плоской ПЭВ, бегущей на границе двух сред вдоль оси x ищем решение в виде

$$\vec{E}_{1,2} = E_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \cdot e^{\pm \kappa_{1,2} z}, \quad (8)$$

$$\kappa_0 = \frac{\omega}{c_0},$$

где E_0 — амплитуда; $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$ – коэффициенты затухания ПЭВ в средах 1 и 2; t – время. Знак (+) относится к среде 1 ($z \leq 0$), а знак (–) – к поверхностно-активной среде 2 ($z \geq 0$). Аналогично выглядит решение и для магнитной напряженности ПЭВ.

Возьмем производную от функции (8):

$$\frac{\partial \vec{E}_{1,2}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_{1,2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_{1,2}}{\partial t} = -i\omega \vec{H}_{1,2}, \quad (10)$$

и подставим в уравнения (1), (2):

$$\text{rot} \vec{H}_{1,2} = -ik_0 \varepsilon_{1,2} \vec{E}_{1,2}, \quad (11)$$

$$\text{rot} \vec{E}_{1,2} = ik_0 \vec{H}_{1,2}. \quad (12)$$

Проекции $\text{rot} \vec{H}$ и $\text{rot} \vec{E}$ для ПЭВ в нашем случае равны:

$$\operatorname{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\operatorname{rot}_y \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot}_y \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (16)$$

Для решения типа (8) получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = ik_0 \varepsilon E_x, \quad (17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -ik_0 \varepsilon E_z, \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik_0 H. \quad (19)$$

Для решения данной системы продифференцируем уравнения (17) и (18):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = ik_0 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -ik_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

и подставим в выражение (19). Получаем волновое уравнение:

$$\frac{1}{ik_0 \varepsilon} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{ik_0 \varepsilon} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - ik_0 H = 0.$$

Перепишем иначе:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon H = 0. \quad (20)$$

Подставим в волновое уравнение (20) решение (8) для 1 – ой и 2 – ой сред

$$-k_s^2 + \kappa_1^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_1 = 0, \quad (21)$$

$$-k_s^2 + \kappa_2^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2 = 0, \quad (22)$$

и определяем коэффициенты затухания (оставляя только положительные решения):

$$\kappa_1 = \sqrt{k_s^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_1}, \quad (23)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{k_s^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2}. \quad (24)$$

Применяя условие непрерывности компонент электрической напряженности на границе сред (4) к уравнению (11) получаем:

$$-\frac{1}{ik_0\varepsilon_1} \operatorname{rot}_x H_1 = -\frac{1}{ik_0\varepsilon_2} \operatorname{rot}_x H_2 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_1} \left(-\frac{\partial H_{y1}}{\partial z} \right) = \frac{1}{\varepsilon_2} \left(-\frac{\partial H_{y2}}{\partial z} \right).$$

Таким образом, получаем необходимое условие для возбуждения ПЭВ:

$$\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\kappa_2}{\varepsilon_2}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что решение в виде ТМ–ПЭВ существует только, когда ε_1 и ε_2 имеют разные знаки, т. е. если $\varepsilon_1 > 0$, то $\varepsilon_2 < 0$.

Задание 10

Воспользовавшись выкладками предыдущего задания, получите дисперсионные соотношения для постоянной распространения ПЭВ и спектральные зависимости коэффициентов затухания ПЭВ в граничащих средах.

Коэффициент затухания 2 среды, согласно условию (25), связан с коэффициентом затухания 1 среды:

$$\kappa_2^2 = \left(-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 \kappa_1^2.$$

Подставим его в уравнение (22) системы (21-22). Получаем:

$$-k_s^2 + \kappa_1^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_1 = 0,$$

$$-k_s^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \kappa_1^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2 = 0,$$

$$\kappa_1^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Новая система уравнений имеет вид:

$$\kappa_1^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2},$$

$$k_s^2 = \kappa_1^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_1.$$

Откуда легко получить:

$$\kappa_1^2 = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$k_s^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Соответственно, дисперсионные соотношения имеют вид:

$$k_s = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}},$$

$$\kappa_1 = \frac{\omega}{c} \varepsilon_1 \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}},$$

$$\kappa_2 = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_2 \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}.$$

Задание для самостоятельной работы

Получите дисперсионные соотношения для возбуждения ПЭВ на границе металл/воздух и посчитайте величины волнового вектора ПЭВ k_s и коэффициентов затухания поверхностной электромагнитной волны в средах κ_1 и κ_2 для $\omega = 10^{14}$ Гц, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -4$.

Список рекомендуемой литературы

1. Бургун Г.Д. Справочник по Международной системе единиц. М.: Изд. стандартов, 1980. 232 с.
2. Волькенштейн Ф.Ф. Электроны и кристаллы. М.: Наука, 1983. 128 с.
3. Фейнман Ф., Лейтон Р., Сэнд С.М. Пер. с англ., М.: Мир, 1978. 524 с.
4. Фабрикант В.А. Физика, оптика, квантовая электроника. М.: Изд. МЭИ, 2001. 210 с.
5. Старк Д.П. Диффузия в твердых телах. Пер. с англ. М. Энергия, 1980. 239 с.
6. Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. М.: Высшая школа, 1974. 400 с.
7. Либенсон М. Н. Лазерно-индуцированные оптические и термические процессы в конденсированных средах и их взаимное влияние. СПб: Наука, 2007. 424 с.
8. Драйв Г.В. Таблицы интегралов и другие математические формулы. СПб, 1995.
9. Либенсон М. Н., Яковлев Е.Б., Шандыбина Г.Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика). Часть II. Лазерный нагрев и разрушение материалов. Под общей ред. В.П.Вейко Учебное пособие. СПб: Университет ИТМО, 2014. 181 с.
10. Либенсон М. Н., Яковлев Е.Б., Шандыбина Г.Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика). Часть 1. Поглощение лазерного излучения в твердых телах. Под общей ред. В.П. Вейко. Учебное пособие. Издание второе переработанное и дополненное. СПб: Университет ИТМО, 2015. 130 с.
11. Progress in Nonlinear Nano-Optics. S. Sakabe, C. Lienau, R.Grunwald Springer. 2015, 279с DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-12217-5>
12. Topics in Present-day Science Technology and Innovation: Ultrafast Relaxation Processes in Semiconductors. C.G. Rodrigues, Á.R. Vasconcellos, R. Luzzi. Materials Research. 2015, т.18, в.3 с. 453-467. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1516-1439.293614>

13. The physics of ultra-short laser interaction with solids at non-relativistic intensities. E.G. Gamaly. *Physics Reports*, 508, 2011, pp. 91-243. DOI:10.1016/j.physrep.2011.07.002
14. Fabrication of Micro/Nano Structures on Metals by Femtosecond Laser Micromachining K. M. Tanvir Ahmmed, C. Grambow, A-M. Kietzig. *Micromachines* 2014, 5, 1219-1253; DOI:10.3390/mi5041219

Приложения

П1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1.1. Определения.

Вещественное число можно изобразить графически. В самом деле, пусть $x'x$ (рис. 1.1) — бесконечная прямая, на которой выбрано положительное направление. От точки O , принятой за начало, отложим в определенном масштабе отрезок, длина которого пропорциональна рассматриваемому вещественному числу. На рис. 1.1 отрезок OA представляет положительное число, а OB — отрицательное. На прямой $x'x$ размещаются все вещественные числа: целые, дробные, алгебраические, трансцендентные, причем как положительные, так и отрицательные.

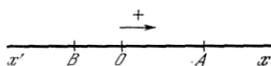


Рис. 1.1. Числовая ось

Понятие вещественного числа можно обобщить, если ввести в рассмотрение число z , образованное парой вещественных чисел x и y , взятых в определенном порядке. Такое число назовем комплексным. Временно будем записывать его в виде

$$z = [x, y].$$

Вещественные числа x и y составляют соответственно вещественную и мнимую части комплексного числа z . Часто используются обозначения

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Комплексные числа также можно изобразить графически. Это изображение будет двухмерным на плоскости, образованной двумя взаимно перпендикулярными осями Ox и Oy .

Комплексное число на плоскости xOy (рис. 1.2) представляется точкой M с координатами x, y ; эту точку называют также изображением комплексного числа. И обратно, пару чисел $[x, y]$, образующих комплексное число z , называют аффиксом точки M .

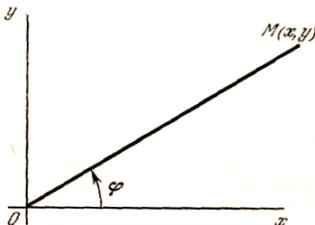


Рис. 1.2. Плоскость комплексных чисел

Два комплексных числа $z = [x, y]$ и $z' = [x', y']$ считаются равными, если совпадают изображающие их точки. Это означает, что равенство z и z' имеет место в том и только в том случае, когда

$$x = x', \quad y = y'.$$

Если изображение комплексного числа совпадает с началом координат, то его вещественная и мнимая части равны нулю. Такое комплексное число называют нулем. Следовательно, равенства $z = 0$ и $x = 0, y = 0$ равносильны.

Положительное число $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, равное длине отрезка OM (рис. 1.2), называется модулем комплексного числа z ; модуль z обычно обозначают $|z|$. Угол φ на который нужно повернуть ось Ox в положительном направлении (против часовой стрелки) до совпадения с направлением OM , называется аргументом комплексного числа z . Этот угол определяется с точностью до целого числа оборотов; углы $\varphi + 2k\pi$ также будут представлять собой аргументы z (k может принимать все возможные целые значения: положительные, отрицательные и нуль).

Если заменить x на $\rho \cos \varphi$, а y на $\rho \sin \varphi$, то комплексное число можно написать в виде:

$$z = [\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi].$$

Вместо того чтобы изображать комплексное число $[x, y]$ точкой M , мы можем представить его отрезком OM . И обратно, отрезок OM изображает комплексное число $[x, y]$.

Сложение. Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z , вещественная и мнимая части которого представляют собой соответственно сумму вещественных и мнимых частей z_1 и z_2 :

$$Z = [x, y] = z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2].$$

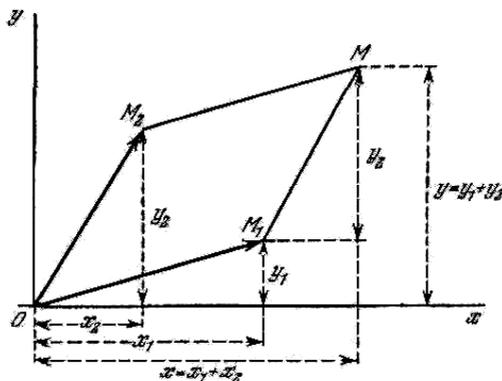


Рис. 1.3. Графическое представление сложения комплексных чисел

Пусть точки M_1 , M_2 и M – изображения чисел z_1 , z_2 и z . Из рис. 1.3 видно, что точка M может быть получена по точкам M_1 и M_2 с помощью правила параллелограмма. Следовательно, сложение комплексных чисел z_1 и z_2 графически представляется как геометрическое суммирование отрезков OM_1 и OM_2 . Если ρ_1 и ρ_2 обозначают модули z_1 и z_2 , то из рис. 1.3 непосредственно следует справедливость двух неравенств:

$$|z_1 + z_2| \leq \rho_1 + \rho_2, \quad |z_1 - z_2| \geq |\rho_1 - \rho_2|.$$

Умножение. Пусть $z_1 = [x_1, y_1]$ и $z_2 = [x_2, y_2]$ – два комплексных числа, изображения которых суть точки M_1 и M_2 . Произведением этих двух чисел называют комплексное число, изображение которого M получается следующим способом (рис. 1.4): выбирают точку F оси Ox таким образом, чтобы $OF = 1$, и строят подобные треугольники OFM_1 и OM_2M .

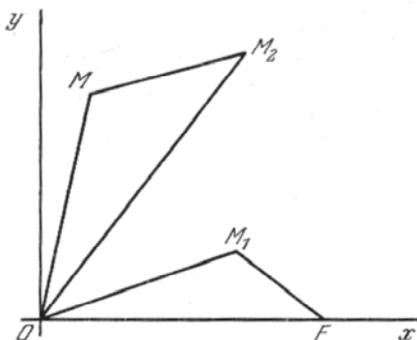


Рис. 1.4. Графическое представление умножения комплексных чисел

Легко получить

$$z = z_1 z_2 = [x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2].$$

Из рис. 1.4 видно, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей:

$$OM = OM_1 \cdot OM_2$$

и что аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей:

$$\angle xOM = \angle xOM_1 + \angle M_1OM = \angle xOM_1 + \angle xOM_2.$$

Тот же прием, выполняемый в обратном порядке, позволяет осуществить графически деление комплексных чисел. Очевидно, модуль частного равен частному модулей числителя и знаменателя, а аргумент частного равен разности аргументов числителя и знаменателя.

В дальнейшем комплексное число будем записывать в виде $z = x + iy$, или

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Сопряженные комплексные числа. Комплексные числа $x + iy$ и $x - iy$ называются сопряженными. Комплексное число, сопряженное с числом z , обозначается \bar{z} или z^* .

Сумма двух сопряженных комплексных чисел есть вещественное число: $z + \bar{z} = 2x$.

Произведение двух сопряженных комплексных чисел есть вещественное число: $z z^* = x^2 + y^2 = \rho^2$.

Степень комплексного числа. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения — сумме аргументов сомножителей. Поэтому при возвышении в степень n комплексного числа $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ модуль степени будет равен ρ^n , а аргумент — $n\varphi$.

Строго говоря, поскольку φ определено с точностью до $2k\pi$, аргумент степени равен $n\varphi + 2nk\pi$. Последнее слагаемое здесь не существенно, так как лучи $n\varphi$ и $n\varphi + 2nk\pi$ совпадают; поэтому оно опускается. Следовательно,

$$z^n = \rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Извлечение корней из комплексного числа. Если считать, что

$$z^n = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ и } z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

то, используя предыдущее рассуждение, находим

$$r^n = \rho \text{ и } n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

откуда получаем

$$r = \rho^{1/n} \text{ и } \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Здесь слагаемым $2k\pi$ пренебречь нельзя. В самом деле, придавая k значения n последовательных целых чисел, получаем n различных корней. Все эти корни имеют один и тот же модуль $\rho^{1/n}$, но отличаются аргументами.

Корни из единицы. Единица может быть записана в комплексной форме $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, если положить $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Следовательно, корни n -й степени из единицы определяются по формулам

$$\cos 2k \frac{\pi}{n} + i \sin 2k \frac{\pi}{n}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Если сравнить формулы

$$\rho^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2k \frac{\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2k \frac{\pi}{n} \right) \right]$$

$$\text{и } \cos \left(2k \frac{\pi}{n} \right) + i \sin \left(2k \frac{\pi}{n} \right),$$

то увидим, что все корни n -й степени из $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ можно получить, умножая любой такой корень z_k последовательно на n корней n -й степени из единицы.

Отметим важные частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{\pm 2\pi i} = 1, \quad e^{\pm \pi i} = -1, \quad e^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \pm i, \quad e^{\pm \frac{\pi}{4} i} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

Формула Эйлера дает возможность комплексное число

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

записать в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Последняя формула непосредственно иллюстрирует правило умножения и деления двух комплексных чисел $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. В самом деле, имеем

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Экспоненциальная функция и логарифм. Функцию $w = e^z$, где $z = x + iy$, с помощью формулы Эйлера можно написать в таком виде:

$$w = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Заменяя z на $z_1 = z + 2k\pi i$, где k — целое число, получаем

$$e^{z_1} = e^z e^{2k\pi i} = e^z.$$

Таким образом, экспоненциальная функция имеет период $2\pi i$.

Рассмотрим функцию w , определенную соотношением $z = e^w$ при $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$. Имеем

$$w = \ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$w = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi).$$

Дифференцирование и интегрирование по аргументу. Дано комплексное число $z = \rho e^{i\varphi}$. Его производная по φ есть

$$\frac{dz}{d\varphi} = i\rho e^{i\varphi} = \rho e^{\frac{i\pi}{2}} e^{i\varphi} = \rho e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Графическое изображение синусоидальной функции. Рассмотрим вектор постоянной длины \mathbf{I}_1 вращающийся в заданной плоскости вокруг точки O с угловой скоростью ω . Введем в указанной плоскости систему прямоугольных координат xOy (рис. 1.5). Пусть φ_1 - угол, образованный OM_1 с осью Ox в начальный момент времени. Тогда y_1 - ордината точки M_1 в момент времени t - выражается формулой

$$y_1 = M_1 \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Вектор \mathbf{OM}_1 удобно использовать для графического представления синусоидальных функций времени (синус получится при проектировании на ось Oy , косинус - на ось Ox).

Пусть нам нужно сложить две синусоидальные функции с одинаковым периодом, но с разными начальными фазами

$$y_1 = M_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad y_2 = M_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

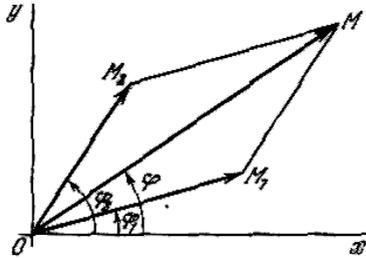


Рис. 1.5. Графическое представление синусоидальных функций времени

По известному правилу вектор \mathbf{OM} , изображающий сумму обеих функций y_1 и y_2 можно получить как геометрическую сумму векторов \mathbf{OM}_1 и \mathbf{OM}_2 , изображающих эти функции. Все три вектора вращаются одновременно с угловой скоростью ω . Легко непосредственно проверить, что ордината точки M представляет собой сумму функций $M_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ и $M_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Аналогично абсцисса точки M равна сумме функций $M_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $M_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

На рис. 1.5 изображено относительное расположение векторов и осей (в момент $t = 0$).

Геометрическое построение, описанное выше, определяет амплитуду $OM = E$ и фазу φ и тем самым позволяет найти выражения

$$E \sin(\omega t + \varphi) = E_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = E_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

$$E \cos(\omega t + \varphi) = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Часто нужно уметь вычислять производные или интегралы синусоидальных функций типа $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Имеем

$$\frac{dE}{dt} = \omega E_0 \cos(\omega t + \varphi) = \omega E_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int E dt = -\frac{E_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_0}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Производные и первообразные от функции E изображаются векторами, повернутыми по отношению к исходному вектору соответственно на угол $+\pi/2$ и $-\pi/2$. Длины этих векторов будут ωE_0 и E_0/ω . Такой прием позволяет графически получить синусоидальные решения дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Представление синусоидальных функций времени с помощью комплексных чисел. Поскольку речь идет о векторах, расположенных в одной плоскости, то можно походить на рис. 1.5 считать комплексной и трактовать вектор как комплексное число, вещественная и мнимая части которого

представляют собой соответственно проекции вектора на оси Ox и Oy . Вектор **OM** определяется комплексным числом

$$E_0 [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] = E_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}.$$

Член $E_0 e^{i\varphi}$ определяет собой неподвижный вектор **OM**, отнесенный к неподвижным осям (рис. 1.5). Величина $E_0 e^{i\varphi}$ называется комплексной амплитудой.

Покажем теперь, что сложение двух синусоидальных функций, изображенное на рис. 1.5, можно произвести и без графического построения. Действительно, пусть даны две (или несколько) синусоидальных функций

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega t + \varphi_1), \quad E_2 = E_{02} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Положим, что

$$E_1 = E_{01} e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} = \tilde{E}_{01} e^{i\omega t}, \quad E_2 = E_{02} e^{i\varphi_2} e^{i\omega t} = \tilde{E}_{02} e^{i\omega t}.$$

Так как сложение комплексных чисел подчиняется правилу векторного сложения, то очевидно, что вектор **OM** на рис. 1.5 определяется комплексным числом $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_{01} + \tilde{E}_{02}$. Искомая синусоидальная функция будет представлять собой мнимую часть от $\tilde{E}_0 e^{i\omega t}$.

Производная по времени функции $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$ будет мнимой частью производной по времени от функции $\tilde{E}_0 e^{i\omega t}$. В этом легко убедиться непосредственно, если сравнить оба выражения. Точно так же неопределенный интеграл по времени от E совпадает с мнимой частью интеграла от $\tilde{E}_0 e^{i\omega t}$.

П2. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1.1. Векторные величины

Ось. Ось - это бесконечная прямая, на которой выбрано положительное направление.

Если взять несколько параллельных прямых, то, определив положительное направление на одной из них, мы тем самым определяем его на остальных. Иначе обстоит дело, если прямые не параллельны, тогда нужно специально улаживать относительно выбора положительного направления для каждой прямой.

Направление вращения. Пусть xx' - ось. Вращение относительно оси xx' назовем положительным или прямым, если оно осуществляется для наблюдателя, стоящего вдоль положительного направления оси, справа и налево (рис. 2.1). В противном случае оно называется отрицательным или обратным.

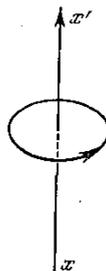


Рис. 2.1. Положительное направление вращения

Векторы. Векторная величина зависит от двух элементов разной природы: алгебраического элемента — числа, измеряющего длину (модуль) вектора, и геометрического элемента — направления вектора.

Единичный вектор. Это вектор, модуль которого равен единице. Обычно его называют ортом. Орт вектора или оси имеет всегда то же направление, что и рассматриваемый вектор или ось. Единичные векторы координатных осей $0x, 0y, 0z$ обозначаются соответственно через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Полярный вектор. Осевой вектор. Некоторые векторы не зависят от изменения направления, выбранного на осях координат в качестве положительного (например, сила, скорость, вектор электрического поля). Векторы, обладающие указанным свойством, называются полярными.

Другие векторы, напротив, меняют знак, если изменить направление, выбранное на осях координат в качестве положительного. Такие векторы называются осевыми.

Полярные и осевые векторы существенно отличаются друг от друга по своей природе. Лишь полярные векторы являются векторами в чистом виде. Векторное равенство может иметь место либо только между полярными векторами, либо только между осевыми. Если, например, вектор, являющийся первым членом векторного равенства, — осевой, то и второй член этого равенства тоже должен быть осевым вектором. Такая однородность, присущая векторному исчислению, позволяет обнаруживать вычислительные ошибки.

Положительное расположение трех векторов. Говорят, что три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ расположены положительно (отрицательно), если расположен положительно (отрицательно) трехгранник, имеющий ребра, параллельные этим векторам, таким же образом ориентированные и взятые в том же порядке.

Угол между двумя векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Это угол, не превосходящий π , на который нужно повернуть вектор \mathbf{a} , чтобы совместить его с вектором, эквивалентным \mathbf{b} , начало которого совпадает с началом вектора \mathbf{a} . Он обозначается (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

2.1.2. Операции над векторами

Произведение вектора на скаляр. Результат умножения вектора \mathbf{a} на скаляр f - это вектор с модулем, равным $f|\mathbf{a}|$, параллельный вектору \mathbf{a} , направленный в ту же сторону, что и \mathbf{a} , при положительном f и в противоположную при отрицательном f .

В частности, любой вектор \mathbf{a} равен произведению его модуля $|\mathbf{a}|$ - скаляра - на орт \mathbf{u} направления вектора \mathbf{a} , т. е.

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{u} \text{ или } \mathbf{a} = au.$$

Составляющие вектора. Введем три оси прямоугольных координат и рассмотрим геометрические проекции (компоненты) вектора \mathbf{a} на эти оси: a_x, a_y, a_z .

Имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z.$$

Используя \mathbf{i} - орт оси Ox , можем написать $\mathbf{a}_x = \mathbf{i}a_x$ (a_x - число, измеряющее алгебраическую длину \mathbf{a}_x по направлению оси Ox ; следовательно, это число положительно, если \mathbf{a}_x и \mathbf{i} имеют одинаковое направление, и отрицательно в противном случае). Аналогично

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{j}a_y, \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{k}a_z.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z.$$

Числа a_x, a_y, a_z называются составляющими вектора \mathbf{a} относительно соответствующих осей координат. Числа a_x, a_y, a_z называются также проекциями (алгебраическими проекциями) и координатами вектора относительно соответствующих осей координат.

Сложение векторов. Сумма нескольких векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{p}$ определяется следующим образом.

Из произвольной точки O проводим вектор \mathbf{OA} , эквивалентный вектору \mathbf{a} , затем из точки A проводим вектор \mathbf{AB} , эквивалентный вектору \mathbf{b} , и т. д. до получения точки P - конца вектора, эквивалентного вектору \mathbf{p} (рис. 2.2).

Вектор \mathbf{OP} представляет собой сумму векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{p}$. Эта сумма, очевидно, не зависит от выбора точки O . Следовательно, вектор суммы \mathbf{s} также представляет собой свободный вектор.

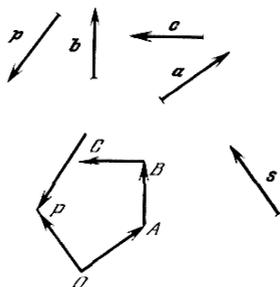


Рис. 2.2. Сложение векторов

Векторное сложение записывается в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots + \mathbf{p}.$$

Из геометрического определения суммы векторов непосредственно следует, что эта операция коммутативна, т. е. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, и ассоциативна, т. е. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Составляющая по оси Ox вектора суммы \mathbf{s} векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{p}$ равна сумме составляющих этих векторов относительно той же оси:

$$s_x = a_x + b_x + \dots + p_x.$$

Скалярное произведение. Скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} - это число, равное произведению трех величин a, b и $\cos(a, b)$; оно обозначается через $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Легко заметить, что скалярное произведение коммутативно: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ и дистрибутивно: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Вопрос об ассоциативности скалярного произведения отпадает, так как формула $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ не имеет смысла; кроме того, очевидно, неверно равенство $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Замечание 1. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы ортогональны. Действительно, $\cos(a, b) = 0$; следовательно, $(a, b) = \pi/2$.

Замечание 2. Пусть xx' - ориентированная ось, а \mathbf{u} - единичный вектор этой оси (рис. 2.3). Тогда скалярное произведение любого вектора \mathbf{a} на \mathbf{u} равно проекции вектора \mathbf{a} на ось xx' :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = a \cos(a, u). \quad (4)$$

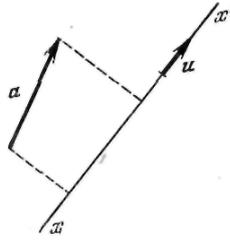


Рис. 2.3. Скалярное произведение вектора на орт оси

Замечание 3. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату модуля этого вектора:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2.$$

Замечание 4. Если через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ обозначить единичные векторы осей координат, то

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Скалярное произведение в декартовых координатах. Пусть $a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z$ - соответственно проекции на оси Ox, Oy, Oz векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Имеем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}).$$

Учитывая дистрибутивность скалярного произведения и замечание 4, получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (5)$$

Векторное произведение. Векторным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называют вектор \mathbf{c} , длина которого равна $ab \sin(a, b)$ и который перпендикулярен обоим векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} , причем векторы \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} расположены положительно.

Векторное произведение обозначают так: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Замечание. Если ни один из векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} не равен нулю, то выражение $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ означает, что линии действия векторов параллельны, так как $\sin(a \times b) = 0$.

Модуль вектора \mathbf{c} численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах, эквивалентных \mathbf{a} и \mathbf{b} , проведенных через любую точку O пространства.

Это замечание позволяет дать более наглядное определение векторного произведения. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — два вектора. Проведем через точку O векторы \mathbf{OA} и \mathbf{OB} , эквивалентные \mathbf{a} и \mathbf{b} (рис. 2.4). Тогда векторное произведение \mathbf{c} векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} будет определяться следующим образом.

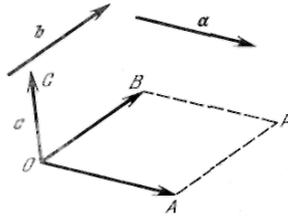


Рис. 2.4. Графическое представление векторного произведения

Модуль вектора \mathbf{c} равен числу, измеряющему площадь параллелограмма $OAPB$. Линия действия этого вектора перпендикулярна плоскости OAB , а направление его таково, что поворот на угол, не превышающий π , совмещающий \mathbf{OA} с \mathbf{OB} , происходит в положительном относительно \mathbf{c} направлении.

Использование векторного произведения двух векторов \mathbf{OA} и \mathbf{OB} позволяет легко определить алгебраическую площадь треугольника OAB . Ориентируем плоскость OAB , иначе говоря, выберем в этой плоскости положительное направление вращения. Алгебраическая площадь треугольника OAB равна половине алгебраической длины векторного произведения $\mathbf{OA} \times \mathbf{OB}$, отсчитанной вдоль оси, перпендикулярной плоскости OAB и ориентированной таким образом, чтобы выбранное направление вращения было для нее положительным.

Векторное произведение в декартовых координатах. Так как вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикулярен плоскости OAB , а модуль его равен площади параллелограмма $OAPB$, то проекция векторного произведения \mathbf{c} на Ox равна площади проекции параллелограмма на Oyz . Следовательно,

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

По аналогии находим

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

т. е.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Это выражение можно записать в более симметричной форме:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Перечислим основные свойства векторного произведения.

Эта операция *антикоммутативна*, т. е. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. В самом деле, обе тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$, образуют противоположно расположенные трехгранники.

Векторное произведение не ассоциативно. Действительно, равенство $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, вообще говоря, неверно, так как направления векторов, записанных в левой и правой частях этого соотношения, отличаются друг от

друга. Однако *векторное произведение* - операция *дистрибутивная*, т. е. справедлива формула

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Эта формула равносильна соотношению

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. Векторные произведения ортов координатных осей соответственно равны:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Смешанное произведение трех векторов. Смешанным произведением трех векторов называется скаляр

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Применяя формулы для скалярного и векторного произведений в декартовых координатах, получаем

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (b_y c_z - b_z c_y) a_x + (b_z c_x - b_x c_z) a_y + (b_x c_y - b_y c_x) a_z$$

т. е.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Мы видим, что смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на трех векторах **ОА**, **ОВ**, **ОС** (с общим началом в точке *O*), эквивалентных векторам **a**, **b**, **c**. Объем положителен или отрицателен в зависимости от того, положительно или отрицательно расположены эти три вектора. Следовательно, роль векторов, составляющих смешанное произведение, совершенно одинакова и

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Первая строка показывает, что при круговой перестановке векторов **a**, **b**, **c** их смешанное произведение не меняется, вторая — что можно менять местами знаки скалярного и векторного произведений. Последнее обстоятельство служит обоснованием для упрощения обозначения смешанного произведения: оно записывается в виде **(abc)** или **abc**.

Двойное векторное произведение трех векторов. Двойное векторное произведение трех векторов выражается формулой

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}. \quad (2.1)$$

В самом деле, например, проекции на ось *Ox* векторов левой и правой части этой формулы соответственно равны

$$a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z),$$

$$(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_x.$$

Легко проверить тождественность этих двух выражений.

Используя формулу (2.1) и правила перестановки векторов, составляющих смешанное произведение, получим

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$$

2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

2.2.1. Дифференцирование

Производная вектора. Производная точки. Допустим, что каждому значению переменной t соответствует определенный вектор \mathbf{a} . В таком случае говорят, что этот вектор является функцией переменной t и записывают его в виде $\mathbf{a}(t)$. Дадим переменной t приращение Δt и рассмотрим вектор $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$. Если при Δt , стремящемся к нулю, модуль вектора $\Delta \mathbf{a}$ стремится к нулю, то $\mathbf{a}(t)$ есть непрерывная функция от t . Предел вектора $\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t}$ называется производной вектора $\mathbf{a}(t)$ по t .

Производная вектора $\mathbf{a}(t)$ обозначается через $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ или $\mathbf{a}'(t)$. Она равна $\mathbf{i} \frac{da_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{da_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{da_z}{dt}$. Аналогично определяется вторая производная вектора и т. д.

Если вектор \mathbf{a} зависит от нескольких переменных τ, θ, \dots , то можно также определить частные производные \mathbf{a} различных порядков.

Если каждому значению переменной t соответствует точка пространства M , то говорят, что точка M есть функция от t . Для наглядности запишем ее в виде $\mathbf{M}(t)$. Придадим переменной t приращение Δt и рассмотрим вектор

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M}(t + \Delta t) - \mathbf{M}(t).$$

Если при Δt , стремящемся к нулю, модуль этого вектора тоже стремится к нулю, то $\mathbf{M}(t)$ есть непрерывная функция от t . Предел вектора $\frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t}$ называется производной точки $\mathbf{M}(t)$ по t .

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t}.$$

Используя определение производной первого порядка, можно определить производные точки \mathbf{M} высших порядков. Если точка \mathbf{M} является функцией нескольких независимых переменных, то для нее определяются также и частные производные.

Замечание. Понятие производной точки сводится к понятию производной вектора. Для этого достаточно зафиксировать любую точку O . Производная точки $\mathbf{M}(t)$ представляет собой производную вектора \mathbf{OM} .

Производная вектора по другому вектору. Даны два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} . Производной вектора \mathbf{a} по вектору \mathbf{b} называется вектор

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} b_z, \quad (2.2)$$

который обозначают через $\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}}$. Проекции этого вектора на оси $0x, 0y, 0z$

соответственно равны:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z,$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z,$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} b_z.$$

2.2.2. Основные формулы дифференцирования

Производная суммы. Пусть $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots, \mathbf{p}$, очевидно, $\mathbf{s}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \dots, \mathbf{p}'$.

Производная произведения вектора на число. Пусть $\mathbf{b} = n\mathbf{a}$. Очевидно, $\mathbf{b}' = n\mathbf{a}'$. Следовательно, если n, m, \dots, g - числа, то производная вектора $\mathbf{u} = n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + \dots + g\mathbf{p}$ равна

$$\mathbf{u}' = n\mathbf{a}' + m\mathbf{b}' + \dots + g\mathbf{p}'.$$

Производная произведения векторной и скалярной функций. Пусть $f(t)$ и $\mathbf{a}(t)$ - скалярная и векторная функции от t и $\mathbf{u} = f\mathbf{a}$. Тогда

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) - f\mathbf{a}}{\Delta t} = f \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} + \mathbf{a} \frac{\Delta f}{\Delta t} + \frac{\Delta a \Delta f}{\Delta t}.$$

В пределе получим

$$\mathbf{u}' = f\mathbf{a}' + f'\mathbf{a}.$$

Производная скалярного произведения. Пусть $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ - две векторные функции и $f = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ - их скалярное произведение. Рассмотрим

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\Delta t} = \mathbf{a} \cdot \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} + \mathbf{b} \cdot \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{b}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу, имеем

$$f' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' + \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}.$$

Производная векторного произведения. Аналогично предыдущему получим, что производная векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ равна

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' + \mathbf{a}' \times \mathbf{b}.$$

В этой формуле следует внимательно следить за порядком множителей, так как $\mathbf{b} \times \mathbf{a}' = -\mathbf{a}' \times \mathbf{b}$.

Интеграл от вектора. Дан переменный вектор $\mathbf{a}(t)$.

$$\mathbf{a}(t) = i a_x + j a_y + k a_z.$$

Обозначая через t_0 и t_1 два значения t , имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}(t) dt = i \int_{t_0}^{t_1} a_x dt + j \int_{t_0}^{t_1} a_y dt + k \int_{t_0}^{t_1} a_z dt.$$

2.3. Функции точки

В математической физике часто рассматривается величина, которая зависит не только от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z , но и еще от какой-либо другой переменной, в большинстве случаев от времени. Если рассматриваемая величина является числом (вектором), то принято говорить, что речь идет о скалярной (векторной) функции точки. В этих случаях говорят также, что в рассматриваемой области пространства задано скалярное или векторное поле.

Например, плотность заряда в различных точках изолированного наэлектризованного тела представляет собой скалярную функцию точки; электрическое поле, которое создается этими зарядами в различных точках тела, представляет собой векторную функцию точки. Электрические заряды создают скалярное поле плотности и векторное поле электрических сил. Если электрические заряды изменяются в зависимости от времени, то скалярное и векторное поля являются не только функциями координат рассматриваемой точки, но также и функциями времени.

Наиболее важные поля характеризуют следующие три функции:

1. *градиент* — векторная функция, аргументом которой является скалярная функция точки;
2. *дивергенция* — скалярная функция, аргументом которой является векторная функция точки;
3. *вихрь* — векторная функция, аргументом которой является векторная функция точки.

Градиент. Дана скалярная функция $f(x, y, z)$. Градиентом этой функции называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Он обозначается как $grad f$. Следовательно, согласно определению можно написать

$$grad f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Пусть $M(x, y, z)$ и $M + dM$ — бесконечно близкие точки поверхности S (рис. 2.5). Скалярное произведение $grad f \cdot dM$ равно df . Действительно,

$$grad f \cdot dM = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2.3)$$

Отношение $\frac{df}{|d\mathbf{M}|}$ называется производной скалярной функции f в точке M по направлению $d\mathbf{M}$. Формула $grad f \cdot d\mathbf{M} = df$ показывает, что эта производная равна проекции вектора $grad f$ на направление $d\mathbf{M}$, так как

$$\frac{df}{|d\mathbf{M}|} = \frac{d\mathbf{M}}{|d\mathbf{M}|} \cdot grad f$$

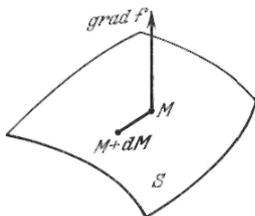


Рис. 2.5. Графическое представление градиента функции.

Нормальная производная. Рассмотрим нормаль в точке M_k некоторой поверхности Σ , проходящей через эту точку (рис. 2.6). Производная от f в точке M по направлению нормали называется нормальной производной от f для поверхности Σ . Если \mathbf{n} — единичный вектор нормали, то эта производная равна $grad f \cdot \mathbf{n}$, т. е. проекции вектора $grad f$ на нормаль \mathbf{n} .

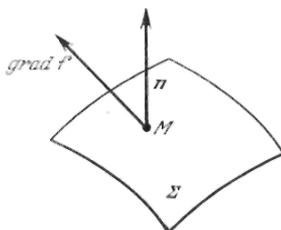


Рис. 2.6. Графическое представление нормальной производной функции

Смысл вектора $grad f$. Вектор $grad f$ полностью описывает поведение функции f в окрестности рассматриваемой точки M . В частности, самое быстрое изменение f происходит при перемещении по нормали к поверхности уровня. Это максимальное изменение определяется по величине и направлению вектором $grad f$.

Для того чтобы представить поле вектора $grad f$, построим поверхности уровня

$$f(x, y, z) = kc,$$

где $k = 1, 2, \dots$, а c — достаточно малая постоянная.

Рассмотрим две поверхности уровня S_1 и S_2 , соответствующие двум значениям $k: n$ и $n+1$. Пусть M — точка поверхности S_1 и d — расстояние от M до S_2 . Вектор $\text{grad } f$ будет в точке M нормален к S_1 , направлен в сторону возрастающих f и по модулю приближенно равен $\frac{c}{d}$. Следовательно, $\text{grad } f$ будет тем больше, чем ближе друг к другу рассматриваемые поверхности.

Замечание. Как показывает формула $\text{grad } f \cdot d\mathbf{M} = df$, вектор $\text{grad } f$ не зависит от выбора осей.

Силовые линии. Кривая, направление которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора $\text{grad } f$, соответствующего этой точке, называется силовой линией. Векторное уравнение силовой линии: $\text{grad } f \cdot d\mathbf{M} = 0$. Ее скалярные уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Следовательно, силовые линии представляют собой ортогональные траектории к поверхностям уровня:

$$f(x, y, z) = \text{const}.$$

Силовая трубка — это поверхность, описанная силовой линией, перемещающейся вдоль замкнутого контура C (рис. 2.7).

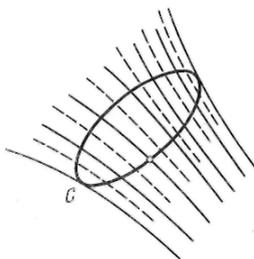


Рис. 2.7. Схема силовой трубки

Градиент сложной скалярной функции. Если скалярная функция $f(m, n, \dots)$ является функцией нескольких скаляров m, n, \dots , которые сами представляют собой функции координат x, y, z , то имеет место формула:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial m} \text{grad } m + \frac{\partial f}{\partial n} \text{grad } n + \dots \quad (2.4)$$

Действительно,

$$\text{grad } f \cdot d\mathbf{M} = df = \frac{\partial f}{\partial m} \text{grad } m \cdot d\mathbf{M} + \frac{\partial f}{\partial n} \text{grad } n \cdot d\mathbf{M} + \dots$$

но

$$dm = \text{grad } m \cdot d\mathbf{M}, \quad dn = \text{grad } n \cdot d\mathbf{M}.$$

Отсюда в силу произвольности вектора $d\mathbf{M}$ вытекает справедливость формулы (2.4).

Сравнив эту формулу с формулой для полного дифференциала $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$, убедимся, что знак $grad$ ведет себя точно так же, как знак дифференциала.

Применяя формулу (2.4) к функциям $f(m,n) = m + n$ и $f(m,n) = mn$, получим:

$$grad(m + n) = grad m + grad n,$$

$$grad mn = m grad n + n grad m.$$

Далее, из соотношения $grad f \cdot d\mathbf{M} = df$ следует, что уравнение $grad m = grad n$ равносильно уравнению $m = n + const$.

Дивергенция и ротор. Дана векторная функция \mathbf{a} точки $M(x, y, z)$.

Пусть ax, ay, az — проекции вектора \mathbf{a} на соответствующие оси координат.

Дивергенция. Дивергенция вектора \mathbf{a} — это скалярная величина

$$div \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Вихрь вектора \mathbf{a} — это векторная величина

$$rot \mathbf{a} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Следовательно, проекции вектора $rot \mathbf{a}$ равны:

$$\text{на ось } Ox: \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$

$$\text{на ось } Oy: \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\text{на ось } Oz: \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Замечание. Дивергенция представима в виде суммы следующих скалярных произведений:

$$div \mathbf{a} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}.$$

Ротор представим в виде суммы следующих векторных произведений:

$$rot \mathbf{a} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Оператор Лапласа. Оператором Лапласа (лапласианом) называют

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если применить его к скалярной функции, то

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Название оператора происходит от уравнения Лапласа, которое записывается в виде $\Delta f = 0$.

Применим оператор Лапласа к вектору \mathbf{a} . Имеем

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}.$$

Так как $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$, то для вектора $\Delta \mathbf{a}$ получаем следующее выражение:

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{i}\Delta a_x + \mathbf{j}\Delta a_y + \mathbf{k}\Delta a_z.$$

Символический вектор набла (оператор Гамильтона). Оператором Гамильтона называют векторный оператор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя его к скаляру f , получаем

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Скалярное произведение векторов ∇ и \mathbf{a} равно:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{i} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial a_y}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Векторное произведение векторов ∇ и \mathbf{a} равно:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \mathit{rot} \mathbf{a}.$$

Поэтому для функций $\mathit{grad} f$, $\mathit{div} \mathbf{a}$ и $\mathit{rot} \mathbf{a}$ часто используются следующие обозначения:

$$\nabla f, \nabla \cdot \mathbf{a}, \nabla \times \mathbf{a}.$$

Аналогично получаем

$$\Delta f = \nabla^2 f, \Delta \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a},$$

где скалярный оператор $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ обозначен через Δ .

Далее, выражение (2.2) для производной вектора \mathbf{a} по вектору \mathbf{b} можно переписать в виде

$$\left\{ b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \mathbf{a},$$

т.е.

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{a}.$$

При расчетах следует помнить, что символический вектор ∇ обладает не только свойствами вектора. В самом деле, рассмотрим произведение

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Применяя к нему формулу (2.1), получим

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$$

или, возвращаясь к обычным обозначениям,

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a},$$

а это неверно.

Если применить ту же самую формулу (2.1) к произведению

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}),$$

то получим

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

или в обычных обозначениях

$$\text{rotrot} \mathbf{a} = \text{grad div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.$$

Эта формула верна.

Неправильность первого результата объясняется тем, что вектор ∇ , кроме векторных свойств, обладает также дифференциальными свойствами, которые не проявлялись, пока нужно было умножить на вектор ∇ какое-либо число, вектор или линейную комбинацию векторов, однако проявились при умножении на вектор ∇ произведения векторов.

Действительно, рассмотрим снова произведение $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$. Согласно формуле (2.5) имеем

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{j} \times \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

или, ограничиваясь записью только первого члена,

$$\mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \times \mathbf{b} \right) + \mathbf{i} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \right) + \dots$$

Применим теперь формулу (2.1):

$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} - \left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right) \mathbf{b} + \left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \right) \mathbf{a} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \dots$$

Далее получаем последовательно:

$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \dots = \left\{ b_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots \right\} \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a},$$

$$\left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right) \mathbf{b} + \dots = \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a} = \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}),$$

$$\left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \right) \mathbf{a} + \dots = \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \dots = \left\{ a_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots \right\} \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{a}} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b},$$

откуда

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

или в обычных обозначениях

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}} - \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{a}}.$$

Справедливость этого результата мы проверим в следующем пункте.

2.3.1. Наиболее употребительные формулы

Градиент скалярного произведения.

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{b}} + \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{a}}. \quad (2.6)$$

Проекция левой части формулы (2.6) на ось Ox равна

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial x} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial x} b_z + \frac{\partial b_x}{\partial x} a_x + \frac{\partial b_y}{\partial x} a_y + \frac{\partial b_z}{\partial x} a_z.$$

Проекция правой части формулы (2.6) на ось Ox равна

$$\begin{aligned} & a_y \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) - a_z \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) + b_y \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \\ & - b_z \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z + \frac{\partial b_x}{\partial x} a_x + \frac{\partial b_x}{\partial y} a_y + \frac{\partial b_x}{\partial z} a_z. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что полученные выражения для проекций совпадают. То же самое, очевидно, имеет место для проекций на оси Oy и Oz .

Дивергенция произведения скалярной функции на векторную.

$$\text{div}(f\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \text{grad } f + f \text{div } \mathbf{a}. \quad (2.7)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{div}(f\mathbf{a}) &= \frac{\partial(fa_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fa_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fa_z)}{\partial z} = \\ &= f \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} = f \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } f. \end{aligned}$$

Дивергенция векторного произведения.

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}. \quad (2.8)$$

Действительно,

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \right).$$

Учитывая свойства смешанного произведения и формулу (2.5), получаем

$$\mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \times \mathbf{b} \right) = \mathbf{b} \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right),$$

$$\mathbf{i} \cdot \left(\mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \right) = -\mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \right),$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \dots \right) - \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \dots \right) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}.$$

Дивергенция градиента.

$$\text{div}(\text{grad } f) = \Delta f. \quad (2.9)$$

Действительно,

$$\text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Дивергенция ротора.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0. (2.10)$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Дивергенция лапласиана.

$$\operatorname{div}(\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\operatorname{div} \mathbf{a}).$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(\Delta \mathbf{a}) = \frac{\partial \Delta a_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta a_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta a_z}{\partial z}.$$

Используя определение лапласиана, придадим этому выражению следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \Delta \operatorname{div} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Ротор градиента.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

(2.11)

Действительно,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Ротор произведения скалярной функции на векторную.

$$\operatorname{rot}(f \mathbf{a}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{a} + f \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f \mathbf{a}) &= \mathbf{i} \times \frac{\partial(f \mathbf{a})}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial(f \mathbf{a})}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial(f \mathbf{a})}{\partial z} = \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \times \mathbf{a} + f \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{a} + f \operatorname{rot} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Ротор векторного произведения.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{a}}.$$

Проекция, например, на ось Ox левой части равенства равна

$$\frac{\partial}{\partial y} (a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z} (a_z b_x - a_x b_z).$$

Проекция на ось Ox правой части равенства равна

$$a_x \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - b_x \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z - \frac{\partial b_x}{\partial x} a_x - \frac{\partial b_x}{\partial y} a_y - \frac{\partial b_x}{\partial z} a_z.$$

Легко проверить, что обе эти проекции равны.

Ротор ротора.

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \quad (2.12)$$

Проекция на ось $0x$ вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ равна

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Если $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{a}$, то

$$A_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \\ A_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}.$$

Следовательно, проекция вектора $\text{rot rot } \mathbf{a}$ на ось $0x$ равна

$$\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \Delta a_x = \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{a}) - \Delta a_x.$$

Аналогично доказывается равенство проекций векторов обеих частей формулы (2.12) на оси $0y$ и $0z$.

Смысл вектора $\text{rot } \mathbf{a}$. Рассмотрим вращательное движение материальной точки с угловой скоростью ω вокруг некоторой оси. Из механики известно, что линейная скорость точки \mathbf{V} связана с ω и радиусом-вектором точки \mathbf{r} соотношением

$$\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\text{rot } \mathbf{V} = 2\omega.$$

Перейдем к более общему случаю. Рассмотрим поле скоростей текущей жидкости $\mathbf{V}(x, y, z, t)$. Движение малого элемента жидкости складывается из параллельного переноса, поворота как твердого тела и деформаций. Можно показать, что и в этом случае ротор скорости \mathbf{V} равен удвоенной угловой скорости вращения ω элемента жидкости.

Скалярный потенциал. Любая векторная функция точки M , вихрь которой тождественно равен нулю, может рассматриваться как градиент некоторой скалярной функции точки M ,

Действительно, пусть ротор вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$ равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (2.13)$$

Введем функции f с помощью соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_x. \quad (2.14)$$

Докажем, что тогда из равенства (2.13) следует

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z.$$

Согласно формуле (2.14)

$$f = \int_0^x a_x dx + \varphi(y, z), \quad (2.15)$$

где φ — произвольная функция. Продифференцируем (2.15) по y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial a_x}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}.$$

Учитывая третье равенство из (2.13), находим

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial a_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_y - a_y|_{x=0} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}.$$

Точно так же, дифференцируя равенство (2.15) по z и применяя второе равенство (2.13), находим

$$\frac{\partial f}{\partial z} = a_z - a_z|_{x=0} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}.$$

Далее, функцию $\varphi(y, z)$ можно определить так, что

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = a_z|_{x=0}, \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = a_y|_{x=0}. \quad (*)$$

Действительно, положим

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = a_z|_{x=0}.$$

Отсюда

$$\varphi(y, z) = \int_0^z a_z|_{x=0} dz + \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — произвольная функция. Дифференцируя по y , имеем

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = \int_0^z \frac{\partial a_z}{\partial y}|_{x=0} dz + \psi'(y)$$

Применяя первое равенство (2.13), можем написать

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = \int_0^z \frac{\partial a_z}{\partial z}|_{x=0} dz + \psi'(y)$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = a_y \Big|_{x=0} - a_y \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} + \psi'(y).$$

Для доказательства (*) достаточно положить

$$\psi'(y) = a_y \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}}.$$

Используя (*), получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z.$$

Таким образом, если $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, то можно найти такую скалярную функцию f , что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z.$$

Обратно, если

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z,$$

то

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0.$$

Это очевидно, так как в рассматриваемом случае $\mathbf{a} = \operatorname{grad} f$, а согласно формуле (2.11) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

Следовательно, для того чтобы данное векторное поле \mathbf{a} являлось градиентом некоторой скалярной величины f , необходимо и достаточно обращение в ноль вихря \mathbf{a} , т. е. выполнение равенства $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.

Итак, если $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, то существует такая скалярная функция $V = -f$, что $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} V$. Если при этом функция V однозначна, то она называется скалярным потенциалом, а про вектор \mathbf{a} говорят, что он равен производной от скалярного потенциала V . Из равенства $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} V$ и формулы (2.9) следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = -\Delta V.$$

Такое поле векторов \mathbf{a} называется потенциальным, ньютоновым, слоистым или безвихревым. Эти названия напоминают, что поле всемирного тяготения относится к рассматриваемому типу полей, что эти поля могут быть разложены с помощью поверхностей уровня $V = \text{const}$ на слои и что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Отметим, что стационарное электрическое поле равно производной от скалярного потенциала.

Векторный потенциал. Любая векторная функция точки M , для которой дивергенция тождественно равна нулю, может рассматриваться как вихрь некоторого вектора.

Действительно, пусть задан вектор $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$, причем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0.$$

Отыскание вектора $\mathbf{b} = \mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z$, удовлетворяющего условию $\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{b}$, сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} = a_x, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} = a_y, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = a_z. \quad (2.18)$$

Таких векторов \mathbf{b} существует бесконечно много. Выберем один из них при условии, что $b_z = 0$. В этом случае равенства (2.16) и (2.17) переходят в

$$\frac{\partial b_y}{\partial z} = -a_x, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} = a_y. \quad (2.20)$$

Из равенства (2.19) получаем

$$b_y = -\int_0^z a_x dz + f(x, y).$$

В силу последнего соотношения равенство (2.18) переходит в уравнение относительно b_x :

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} = -\int_0^z \frac{\partial a_x}{\partial x} dz + f'_x(x, y) - a_z, \quad (2.21)$$

Дифференцируя равенство (2.20) по y , найдем

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial z \partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Используя это соотношение и равенство (2.21), продифференцированное по z , имеем

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\int_0^z \frac{\partial a_x}{\partial x} dz + f'_x(x, y) - a_z \right]$$

или

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Эта формула справедлива в силу предположения, что $\text{div } \mathbf{a} = 0$.

Таким образом, соотношение (2.18) является следствием формул (2.19), (2.20) и уравнения $\text{div } \mathbf{a} = 0$. Иначе говоря, равенства (2.19) и (2.20) при условии $\text{div } \mathbf{a} = 0$ определяют вектор \mathbf{b} такой, что $b_z = 0$ и $\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Пусть теперь вектор \mathbf{c} удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{c} = \mathbf{a}$. Тогда

$$\text{rot } \mathbf{c} - \text{rot } \mathbf{b} = 0$$

или

$$\text{rot } (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0,$$

т. е.

$$\mathbf{c} - \mathbf{b} = \text{grad } f.$$

Следовательно, вектор \mathbf{c} определяется лишь с точностью до градиента произвольной скалярной функции точки M . Это соотношение очевидно, так как к полю векторов \mathbf{c} , для которых $\text{rot } \mathbf{c} = \mathbf{a}$, можно добавить поле любых других векторов с нулевым вихрем. Из бесконечного множества этих векторов выберем вектор, дивергенция которого равна нулю. Обозначим его через \mathbf{v} . Вектор \mathbf{v} можно представить в виде суммы определенного выше вектора \mathbf{b} и градиента произвольной скалярной функции f .

Имеем

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{b} = \text{grad } f.$$

Из последнего равенства следует

$$\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{b}) = \text{div } \text{grad } f = \Delta f,$$

$$\text{div } \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{b} = \Delta f.$$

Так как $\text{div } \mathbf{v} = 0$, то f определяется из уравнения $\Delta f = -\text{div } \mathbf{b}$. Итак, если $\text{div } \mathbf{v} = 0$, то существует такой вектор \mathbf{v} , что $\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{v}$ и $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Вектор \mathbf{v} называется векторным потенциалом \mathbf{a} , а про вектор \mathbf{a} говорят, что он равен производной от векторного потенциала \mathbf{v} . Вектор \mathbf{a} , для которого $\text{div } \mathbf{a} = 0$, называется соленоидальным вектором. Поле векторов с нулевой дивергенцией называется соленоидальным или лапласовым (магнитное поле системы токов, элементарные поля которых задаются законом Лапласа, относятся к рассмотренному типу полей).

Замечание. Векторный потенциал определяется неоднозначно. В самом деле, рассмотрим вектор

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \text{grad } \varphi.$$

Имеем

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 = \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot } \text{grad } \varphi.$$

Так как $\text{rot } \text{grad } \varphi = 0$, то $\text{rot } \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}$ при любом φ . Условие

$$\text{div } \mathbf{v}_1 = 0$$

выполняется, если $\text{div } \text{grad } \varphi = \Delta \varphi = 0$. Следовательно, векторный потенциал определяется с точностью до градиента скалярной функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа.

ПЗ. ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Циркуляция вектора. Пусть M — переменная точка дуги AB (рис. 3.1), \mathbf{a} — векторная функция точки M .

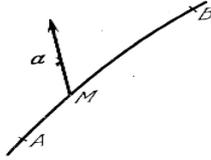


Рис. 3.1. Иллюстрация к определению циркуляции вектора

Циркуляцией вектора \mathbf{a} по дуге AB называется значение криволинейного интеграла $\int_A^B \mathbf{a} \cdot d\mathbf{M}$ (криволинейный интеграл берется от скалярного произведения).

Если \mathbf{a} — сила, то рассматриваемый интеграл представляет собой работу этой силы вдоль дуги AB .

Замечание. Если вектор \mathbf{a} равен производной от скалярного потенциала V , то согласно формуле $\text{grad } V \cdot d\mathbf{M} = dV$ имеем $\int_A^B \mathbf{a} \cdot d\mathbf{M} = V_A - V_B$. В этом случае циркуляция зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования.

Поток вектора. Пусть S — двухсторонняя поверхность, M — переменная точка на S , \mathbf{a} — векторная функция точки M , MN — нормаль к S , на которой выбрано положительное направление, $d\sigma$ — элемент поверхности, окружающий точку M . Обозначим через $d\boldsymbol{\sigma}$ вектор, длина которого равна площади $d\sigma$, а направление совпадает с положительным направлением нормали к этому элементу. Поток вектора \mathbf{a} через поверхность S называют двойной интеграл $\int_S \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ (двойной интеграл берется от скалярного произведения).

3.1. Основные формулы

Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем τ , M — переменная точка τ (или на поверхности S), $d\boldsymbol{\sigma}$ — определенный выше вектор, направленный по внешней нормали к поверхности S . Пусть, далее, f — скалярная и \mathbf{a} — векторная функция точки M . Предполагается, что они непрерывны вместе со своими первыми производными в любой точке объема τ и его границы S .

Справедливы следующие три формулы, заменяющие тройной интеграл двойным:

1) формула для градиента

$$\int_{\tau} \text{grad } f d\tau = \int_S f d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.1)$$

2) формула для дивергенции (теорема Остроградского)

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{a} d\tau = \int_S \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.2)$$

3) формула для ротора

$$\int_{\tau} \operatorname{rot} \mathbf{a} d\tau = \int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{a}.$$

Теорема Остроградского. Теорема Остроградского — это теорема, выраженная формулой (3.2): интеграл от дивергенции \mathbf{a} , распространенный на объем τ , равен потоку вектора \mathbf{a} , направленному по внешней нормали через замкнутую поверхность S , ограничивающую этот объем τ .

Левая часть формулы (3.2) в декартовых координатах имеет вид

$$I = \int_{\tau} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\tau} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz + \int_{\tau} \frac{\partial a_y}{\partial y} dx dy dz + \int_{\tau} \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\tau} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz$. В объеме τ с помощью четырех плоскостей $y, y+dy, z, z+dz$, вырежем параллелепипед. На поверхности S указанные плоскости вырезают два криволинейных четырехугольника $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $A_2 B_2 C_2 D_2$, площади которых обозначим через $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ (рис. 3.2).

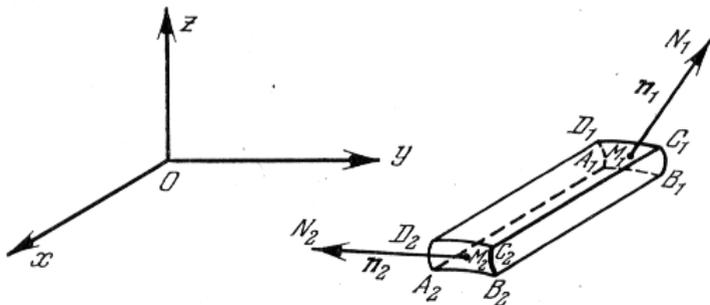


Рис. 3.2. Объем интегрирования в теореме Остроградского

Пусть M_1 и M_2 — точки этих четырехугольников, $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$ — внешние нормали к поверхности S , орты которых соответственно \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 .

Нормаль $M_1 N_1$ образует с осью Ox тупой угол $(\mathbf{i}, \mathbf{n}_1)$; нормаль $M_2 N_2$ образует с осью Ox острый угол $(\mathbf{i}, \mathbf{n}_2)$. Имеем

$$dy dz = -\cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}_1) d\sigma_1 = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}_2) d\sigma_2.$$

Пусть $(a_x)_1$ и $(a_x)_2$ — значения a_x в M_1 и M_2 . Интеграл $\int_{\tau} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz$ распространенный на элемент объема $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2 B_2 C_2 D_2$, равен

$$dy dz \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx = dy dz [(a_x)_2 - (a_x)_1] = (a_x)_2 \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}_2) d\sigma_2 + (a_x)_1 \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}_1) d\sigma_1;$$

но

$$\cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}_1) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1, \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}_2) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2.$$

Векторы $\mathbf{n}_1 d\sigma_1$ и $\mathbf{n}_2 d\sigma_2$ совпадают с векторами $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$, введенными в предыдущем пункте, если считать, что направление внешней нормали положительно.

Следовательно, имеем

$$dydz \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx = (a_x)_2 \mathbf{i} \cdot d\sigma_2 + (a_x)_1 \mathbf{i} \cdot d\sigma_1$$

откуда

$$\int_{\tau} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz = \int_S a_x \mathbf{i} \cdot d\sigma.$$

Тройной интеграл распространяется на объем τ , а двойной интеграл на поверхность S .

Повторяя приведенные рассуждения для $\int_{\tau} \frac{\partial a_y}{\partial y} dx dy dz$ и $\int_{\tau} \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz$

покажем, что

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{a} d\tau = \int_S (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot d\sigma.$$

Смысл скаляра $\operatorname{div} \mathbf{a}$. Из формулы Остроградского следует, что полный поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность, ограничивающую бесконечно малый объем $d\tau$, равен $\operatorname{div} \mathbf{a} d\tau$. Следовательно, дивергенция, вычисленная в точке векторного поля, приближенно равна потоку, выходящему из единицы объема, окружающего эту точку. Точное значение дивергенции векторного поля \mathbf{a} может быть определено следующим образом -

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_{\tau} \mathbf{a} \cdot d\sigma}{\tau}.$$

Рассмотрим движение жидкости. Пусть ее плотность ρ и скорость движения \mathbf{a} — соответственно скалярная и векторная функции точки пространства и времени t . Предположим, что S — произвольная поверхность в пространстве, заполненном жидкостью, и \mathbf{n} — орт внешней нормали к этой поверхности. Масса жидкости, проходящая в направлении \mathbf{n} за единицу времени через поверхность S , равна

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{a} d\sigma.$$

Если поверхность S замкнута и ограничивает объем τ , то полученная формула дает массу жидкости, вытекающую за единицу времени из τ . С другой стороны, увеличение массы жидкости внутри объема τ за единицу времени равно

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Применяя теорему Остроградского, получим

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{a} d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) d\tau.$$

Если предположить, что внутри τ отсутствуют источники и стоки, то

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\tau} \operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) d\tau.$$

Это равенство справедливо для любого объема τ рассматриваемого поля. В силу непрерывности функций и их производных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) называется уравнением неразрывности жидкости. Если жидкость несжимаемая, то

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) = 0.$$

Если, кроме того, скорость \mathbf{a} равна производной от скалярного потенциала V , а плотность ρ постоянна, то уравнение неразрывности принимает вид

$$\Delta V = 0.$$

Это уравнение можно непосредственно применить к электрическому полю, если вместо плотности жидкости ρ взять плотность электрических зарядов, движущихся со скоростью \mathbf{a} .

Введем обозначения: θ — температура, ρ — плотность, k — коэффициент внутренней теплопроводности и c — удельная теплоемкость тела в рассматриваемой точке (скалярные функции). Количество тепла, вытекающего через поверхность S , равно

$$- \int_S k \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \theta d\sigma.$$

С другой стороны, увеличение количества тепла внутри τ равно

$$\int_{\tau} c \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} d\tau.$$

Отсюда по аналогии с предыдущим случаем получаем

$$c \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = 0.$$

Это уравнение теплопроводности.

В случае однородной среды и при стационарном распределении температуры ($\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$) уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta \theta = 0.$$

Формула для градиента. Положим

$$\mathbf{a} = f \mathbf{b},$$

где f — скалярная функция точки M , а \mathbf{b} — произвольный постоянный вектор. Согласно формуле (2.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div}(f \mathbf{b}) = f \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Вектор \mathbf{b} постоянен, поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Применим формулу (3.2) к вектору \mathbf{a} :

$$\mathbf{b} \cdot \int_{\tau} \operatorname{grad} f d\tau = \mathbf{b} \cdot \int_S f d\sigma.$$

В силу произвольности вектора \mathbf{b} отсюда следует формула (3.1).

Формула для ротора. Пусть \mathbf{b} – произвольный постоянный вектор. Тогда по формуле (2.8)

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Подставим в формулу (3.2) вместо вектора \mathbf{a} вектор $p \operatorname{grad} q$. Имеем

$$\int_{\tau} (p \Delta q + \operatorname{grad} q) d\tau = \int_S p \operatorname{grad} q \cdot d\sigma.$$

Меняя роли функций p и q , находим

$$\int_{\tau} (p \Delta q + \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} q) d\tau = \int_S q \operatorname{grad} p \cdot d\sigma.$$

Вычитая последнее выражение из предыдущего, получим формулу Грина.

Формула Стокса. Пусть двухсторонняя поверхность S ограничена замкнутой кривой C , на которой указано определенное направление обхода. Нормали к поверхности S ориентируем таким образом, чтобы выбранное на C направление обхода оказалось положительным.

В каждой точке P поверхности S отложим вдоль отрицательного направления нормали отрезки постоянной длины PP' . Точки P' , соответствующие точкам P , образуют поверхность S' , параллельную поверхности S и ограниченную замкнутой кривой C' . Обозначим через Σ поверхность, образованную нормальными, соединяющими точки кривых C и C' . Пусть τ — объем тела, ограниченного поверхностями S , S' , Σ (рис. 3.3).

Будем считать, что отложенная вдоль направления нормали постоянная длина достаточно мала. Пусть M — точка внутри или на поверхности рассматриваемого тела τ . Опустим из точки M перпендикуляр MP к поверхности S ; l — длина MP . Тогда $\mathbf{MP} = l\mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали.

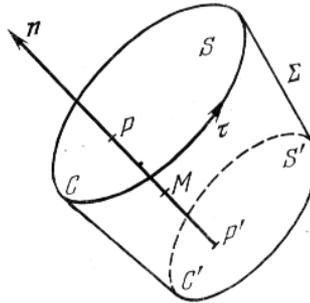


Рис. 3.3. К выводу формулы Стокса

Рассмотрим точку $M + d\mathbf{M}$. Ей соответствует точка $P + d\mathbf{P}$. Имеем $d\mathbf{P} - d\mathbf{M} = l d\mathbf{n} + \mathbf{n} dl$.

Это выражение умножим скалярно на \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{P} - \mathbf{n} \cdot d\mathbf{M} = l \mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dl.$$

Но $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{P} = 0$, так как векторы \mathbf{n} и $d\mathbf{P}$ перпендикулярны. Кроме того, $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$, потому что вектор постоянной длины перпендикулярен своей производной. Учитывая также, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, получаем

$$-\mathbf{n} \cdot d\mathbf{M} = dl.$$

Далее, согласно (2.3) $\text{grad} l \cdot d\mathbf{M} = dl$. Следовательно, при любом $d\mathbf{M}$ имеет место $-\mathbf{n} \cdot d\mathbf{M} = \text{grad} l \cdot d\mathbf{M}$. Поэтому $\mathbf{n} = -\text{grad} l$.

Возьмем вихрь от обеих частей этого равенства. Имеем

$$\text{rot} \mathbf{n} = -\text{rot} \text{grad} l = 0.$$

Применим теорему Остроградского к вектору $\mathbf{a} \times \mathbf{n}$:

$$\int_{\tau} \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) d\tau = \int_{S+S'+\Sigma} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Вектор $d\boldsymbol{\sigma}$ имеет длину $d\sigma$ и отложен по нормали к поверхности. На поверхности S вектор $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot d\sigma$, а на поверхности Σ вектор $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_1 \cdot d\sigma$ (через \mathbf{n}_1 обозначается орт нормали к поверхности Σ). Имеем

$$\int_{\tau} \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) d\tau = \int_{S+S'} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma.$$

Смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$, очевидно, равно нулю, так как векторы $\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ и \mathbf{n} ортогональны. Поэтому предыдущая формула принимает вид

$$\int_{\tau} \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) d\tau = \int_{\Sigma} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma.$$

Смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_1 = (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{a}$. Но $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1$ — это орт \mathbf{t} касательной к кривой C при условии, что точка P находится на этой кривой C (рис. 3.4). Следовательно,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{t}.$$

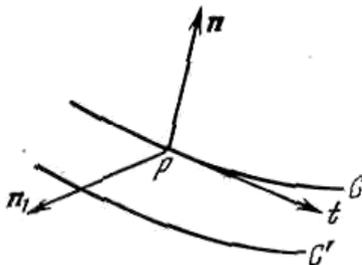


Рис. 3.4. Положение точки P

Далее, согласно формуле (2.8) и доказанному выше равенству $\text{rot} \mathbf{n} = 0$, находим

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a}.$$

Таким образом,

$$\int_{\tau} \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} d\tau = \int_{\Sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} d\sigma.$$

Если расстояние $PP' = d\delta$ мало, то $d\tau = d\sigma d\delta$, где $d\sigma$ — элемент поверхности S . Если $d\sigma$ — элемент поверхности Σ , то $d\sigma = dl d\delta$, где dl — элемент кривой C . Тогда

$$d\delta \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} d\sigma = d\delta \int_C \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} dl = d\delta \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{M},$$

откуда и получается формула Стокса

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} d\sigma = \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{M}.$$

Итак, циркуляция вектора \mathbf{a} по замкнутой кривой C равна потоку его вихря через поверхность, ограниченную C . В случае соленоидального векторного поля \mathbf{a} известно, что \mathbf{a} является производной от векторного потенциала \mathbf{v} , т. е. $\mathbf{a} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$. По формуле Стокса поток вектора $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ через поверхность равен циркуляции \mathbf{v} по контуру, ограничивающему эту поверхность. Таким образом, поток соленоидального вектора через поверхность равен циркуляции его векторного потенциала по контуру этой поверхности.

Теорема Стокса позволяет дать новое определение вихря. Для этого определим составляющую $\mathbf{rot} \mathbf{a}$ в точке A по любому фиксированному направлению \mathbf{AW} .

Опишем из точки A , как из центра, окружность C малого радиуса r , лежащую в плоскости, перпендикулярной рассматриваемому направлению (рис. 3.5). Составляющая ротора по направлению \mathbf{AW} имеет следующий вид:

$$\mathbf{rot}_W \mathbf{a} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{\pi r^2}, \quad d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl = d\mathbf{M}. \quad (3.4)$$

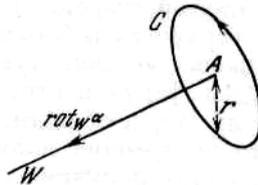


Рис. 3.5. Положение $\mathbf{rot}_W \mathbf{a}$

П4. Приложение векторного исчисления к теории электромагнитного поля

Электростатическое поле. Рассмотрим два точечных заряда Q_1 и Q_2 , помещенных в пустоте в точках A и B на расстоянии r друг от друга (рис. 4.1). Тогда сила, действующая на заряд Q_1 , равна

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u} \quad (\text{закон Кулона}),$$

где \mathbf{u} - орт вектора \mathbf{BA} . Пусть в точке O помещен заряд Q . Электрическое поле заряда Q в точке A равно силе, действующей на единичный заряд, помещенный в точке A (рис. 4.2):

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}.$$

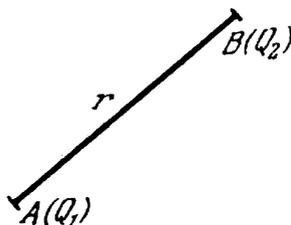


Рис. 4.1. Расположение электрических зарядов

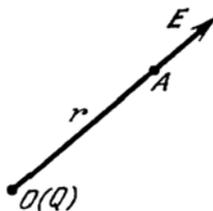


Рис. 4.2. Сила, действующая на заряд

Это электрическое поле представляет собой поле векторов, проходящих через фиксированную точку O . Для $f(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

а скалярный потенциал \mathbf{E} равен

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Применяя формулу (3.2) к замкнутой поверхности, не содержащей внутри себя точки O (теорема Остроградского, вообще говоря, неверна, если в области тройного интегрирования векторная функция имеет бесконечный разрыв), получим, что поток вектора \mathbf{E} через эту поверхность равен нулю. С другой стороны, непосредственно очевидно, что поток вектора \mathbf{E} через поверхность любого шара с центром в O равен Q/ε_0 . Обозначим через S произвольную замкнутую поверхность, содержащую внутри себя точку O , и проведем сферу с центром O , целиком находящуюся внутри S . Применяя формулу (3.2) к области, ограниченной S и поверхностью этой сферы (учтем, что внутренняя нормаль сферы является внешней для рассматриваемой области), получим

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \text{ (теорема Гаусса).}$$

Если внутри поверхности S содержится несколько точечных зарядов Q_1, \dots, Q_n , то

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Предположим, что заряды распределены непрерывно внутри объема v и плотность распределения зарядов дается скалярной функцией точки ρ . Тогда соотношение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ нарушается. Распространяя на этот случай теорему Гаусса, получим

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv,$$

а так как

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \operatorname{div} \mathbf{E} dv,$$

то при непрерывном распределении зарядов

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Далее,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\Delta V,$$

и поэтому

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ (уравнение Пуассона).}$$

До сих пор мы рассматривали поле в пустоте. Обратимся теперь к полю внутри диэлектрика. В этом случае молекулы тела ведут себя как электрические диполи - каждый элемент объема содержит большое число зарядов противоположного знака, соединенных попарно.

При отсутствии внешнего поля моменты молекул ориентированы по-разному, и их векторная сумма равна нулю. При наличии внешнего поля диполи частично повернутся, и сумма моментов станет отличной от нуля.

Диэлектрик с ориентированными в той или иной степени дипольными моментами окажется поляризованным. Степень поляризации характеризуется

вектором поляризации \mathbf{P} , который, по определению, равен суммарному моменту молекул, отнесенному к единице объема. Учет поляризации можно осуществить, если ввести фиктивную плотность электрических зарядов, равную $-\operatorname{div} \mathbf{P}$. При этом условии теорема Гаусса записывается в следующей форме:

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv - \int_v \operatorname{div} \mathbf{P} dv.$$

Применяя формулу (3.2), получаем

$$\int_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv.$$

В данном случае векторное поле, удовлетворяющее теореме Гаусса, имеет вид

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Вектор \mathbf{D} называется вектором электростатической индукции. Он, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Магнитное поле постоянных токов. Все, что говорилось выше относительно электрического поля \mathbf{E} , можно повторить для магнитного поля \mathbf{H} . Однако следует учитывать, что свободные магнитные заряды не существуют, т. е. вне магнитной среды

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Внутри магнитной среды присутствуют элементарные магниты. Повторяя предыдущие рассуждения, мы приходим к необходимости определить вектор магнитной индукции \mathbf{B} , дивергенция которого равна нулю как внутри, так и вне магнитной среды:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Рассмотрим контур C , окружающий ток I (рис. 4.3). Циркуляция вектора магнитного поля по контуру C равна

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{теорема Ампера}).$$

Если внутри контура C тока нет, то

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Из определения вихря по формуле (3.4) следует, что в точках, где ток отсутствует,

$$\operatorname{rot}_W \mathbf{H} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{S} = 0. \quad (W - \text{любое}), \text{ т. е. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0.$$

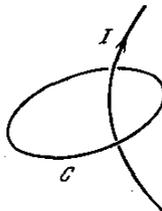


Рис. 4.3. Контур C , окружающий ток I

Электромагнитное поле. Выпишем формулы, используемые при выводе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I.$$

Закон Фарадея. Электродвижущая сила, индуцированная на контуре C , помещенном в электрическом поле \mathbf{E} , выражается криволинейным интегралом

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Если обозначить через S какую-либо поверхность, опирающуюся на контур C (рис. 4.4), то согласно теореме Стокса получим

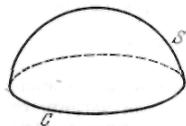


Рис. 4.4. Поверхность S , опирающаяся на контур C

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

По закону Фарадея индуцированная электродвижущая сила пропорциональна изменению потока \mathbf{B} во времени, т. е.

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

В силу произвольности поверхности S

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Закон Ампера. Обозначим через \mathbf{J} вектор плотности тока в точке. Тогда закон Ампера можно записать в виде

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.2)$$

так как поток вектора \mathbf{J} через поверхность S равен интенсивности тока, проходящего по контуру C . В силу теоремы Стокса

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Сравнивая с формулой (4.2), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (4.3)$$

Ток \mathbf{J} создается зарядами, движущимися со скоростью \mathbf{V} . Обозначим через ρ пространственную плотность этих зарядов. Очевидно, что вектор плотности тока

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}.$$

При этом формула (4.3) принимает вид

$$\text{rot} \mathbf{H} = \rho \mathbf{V}. \quad (4.4)$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей этого равенства. Учитывая формулу (2.10), имеем

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (4.5)$$

Формула (51) дает

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Дифференцируем по времени равенство (4.1):

$$\text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Используя две последние формулы, получим

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = -\text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Формулы (4.5) и (4.6) противоречивы.

Уравнения Максвелла. Чтобы устранить полученное противоречие, Максвелл видоизменил закон Ампера следующим образом: полный ток, который мы рассматриваем, состоит не только из тока проводимости $\rho \mathbf{V}$, но и из тока смещения $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Поэтому вектор $\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}$ следует заменить на

$$\rho \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

и тогда уравнение Ампера (4.4) примет вид

$$\text{rot} \mathbf{H} = \rho \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений Максвелла:

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho,$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Для вакуума система уравнений Максвелла (4.7) переписывается в виде

$$\text{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

В результате система уравнений, для расчета произвольного электромагнитного поля, создаваемого системой зарядов с плотностью ρ и системой токов с плотностью \mathbf{J} будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi k_1 \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= 4\pi \gamma \mathbf{J} + k_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эта система уравнений и получила название системы уравнений Максвелла.

Запись уравнений в форме (4.8) была установлена не Максвеллом, а Гауссом почти через тридцать лет. Однако идея модификации закона Ампера путем добавления тока смещения принадлежит Максвеллу (1862 г.), который ввел это слагаемое в интегральные уравнения. Дальнейшее использование этой системы в практических расчетах подтвердило справедливость гипотезы Максвелла и в настоящее время система уравнений (4.8) является исходной для описания электромагнитных полей создаваемых зарядами и токами в вакууме.

Стандартной задачей электродинамики является задача определения электромагнитного поля при известных значениях ρ и \mathbf{J} . Следовательно, необходимо найти шесть неизвестных скалярных функций (по три проекции векторов \mathbf{E} и \mathbf{B}). В системе уравнений (4.8) представлено девять скалярных уравнений. Если учесть, что плотность заряда и плотность тока предполагаются заданными, то закон сохранения заряда - это условие задачи. Таким образом остается восемь уравнений. Однако в силу того, что ρ и \mathbf{J} входят в разные уравнения (в закон Кулона и в обобщенный закон Ампера), эти уравнения не независимы. Следовательно, независимых остается 7 скалярных уравнений. Кроме того, закон электромагнитной индукции Фарадея и закон отсутствия магнитных зарядов имеют одинаковые дифференциальные следствия. В этом можно убедиться, если вычислить дивергенцию от закона электромагнитной индукции Фарадея. Получим в этом случае $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{const}$. Данное соотношение не является выводом закона отсутствия магнитных зарядов из закона Фарадея, так как величина константы из закона Фарадея не устанавливается. Закон отсутствия магнитных зарядов устанавливает, что эта константа равна нулю. Но, одновременно, это означает, что имеется еще одна дополнительная связь в уравнениях и, следовательно, независимых уравнений в системе уравнений Максвелла шесть. Таким образом, число независимых уравнений совпадает с числом неизвестных функций и система имеет однозначное решение.

Качественные рассуждения, представленные выше не являются строгим доказательством однозначности решений системы уравнений Максвелла. В общем случае однозначность доказана строгими математическими методами, которые здесь не приводятся.

П5. Системы единиц измерения

В предыдущем изложении при рассмотрении основных законов электродинамики были использованы коэффициенты пропорциональности $k_1, \gamma, \lambda, k_3$, которые должны выбираться в зависимости от использования системы единиц для физических величин, входящих в соответствующие законы. На основании системы уравнений Максвелла данные коэффициенты не независимы и между ними существуют связи, которые должны быть учтены в любой системе единиц.

Исторически электродинамика появилась как наука, объединившая исследования в области электростатики и магнитостатики, долгое время считавшиеся самостоятельными науками. И только после утверждения системы уравнений Максвелла стало ясно, что электрическое и магнитное поле — это частные случаи более общего понятия — электромагнитного поля. Однако до объединения полей, как в электростатике, так и в магнитостатике накопилось значительное число исследований по измерению характеристик полей в которых использовались единицы измерения, логически вытекающие из основных законов электростатики и магнитостатики, соответственно. Это привело к тому, что многие родственные понятия оказались определенными с использованием различных базисных единиц. В результате, в электродинамике, объединяющей электрические и магнитные поля, возникло несколько систем единиц измерения и единодушного признания той или иной системы не существует. Так как система единиц должна быть удобной и ясной, что содержит элемент субъективности, а область применения электродинамики разнообразна, это приводит к необходимости рассмотрения нескольких единиц измерения сложившихся под влиянием исторического процесса развития общей теории электромагнитного поля.

Определяющими формулами, из которых можно получить размерности соответствующих величин в электростатике являются следующие соотношения:

$$F = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}; \quad E = k_1 \frac{Q}{r^2}.$$

Соответственно для магнитостатического поля, можно использовать выражения:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\gamma\lambda \frac{II'}{d}, \quad B = \frac{2\gamma I}{d}.$$

В силу закона Фарадея размерности E и B связаны между собой, так как

$$\operatorname{rot} E + k_3 \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (5.1)$$

В соответствии с определением силы Кулона и силы, приходящейся на единицу длины проводника при взаимодействии двух токов, их отношение есть величина, размерность которой совпадает с размерностью длины $[l]$

$$\left[\frac{F}{\frac{dF}{dt}} \right] = [l]. \quad (5.2)$$

Подставляя в (5.2) размерности сил и используя для краткости обозначение $k_2 = \gamma\lambda$ находим

$$\left[\frac{F}{\frac{dF}{dt}} \right] = k_1 \frac{[q]^2}{[l]^2} \frac{1}{k_2 \frac{[l]^2}{[l]}} = \frac{k_1}{k_2} \frac{[t]^2}{l} = [l].$$

Таким образом, отношение коэффициентов $k_1/k_2 = [l]^2/[t]^2$ по размерности совпадает с размерностью квадрата скорости. Обозначим эту скорость через c , т.е.:

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2. \quad (5.3)$$

Составим теперь отношение размерностей напряженности электрического поля и индукции магнитного поля

$$\left[\frac{E}{B} \right] = k_1 \frac{[q]^2}{[l]^2} \frac{1}{\gamma \frac{[l]}{[l]}} = \frac{k_1}{\gamma} \frac{[t]}{l}.$$

Так как $\gamma = k_2/\lambda$ то:

$$\left[\frac{E}{B} \right] = \frac{k_1}{k_2} \lambda \frac{[t]}{[l]} = \lambda \frac{[l]}{[t]}. \quad (5.4)$$

Учитывая, что размерность $[rot E] = [E]/[l]$ получим на основании (5.1):

$$\frac{[E]}{[l]} = k_3 \frac{[B]}{[t]}, \quad \frac{[E]}{[B]} = k_3 \frac{[l]}{[t]}. \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.4) и (5.5) с учетом (5.3), находим, что:

$$k_3 \equiv \lambda; \quad \gamma = \frac{k_2}{k_3}. \quad (5.6)$$

Если в системе уравнений Максвелла (4.8) выбрать $\rho = 0$ и $J = 0$, то обобщенный закон Ампера в дифференциальной форме с учетом (5.6) имеет вид

$$rot \mathbf{B} = \frac{k_2}{k_1 k_3} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Вычислим ротор от последнего выражения, т.к.

$$rot rot \mathbf{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B},$$

с учетом закона отсутствия магнитных зарядов и закона электромагнитной индукции Фарадея из (5.7) находим:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{k_1/k_2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

Аналогично вычислив ротор от закона электромагнитной индукции Фарадея найдем:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{k_1/k_2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.8), (5.9)

являются волновыми уравнениями д'Аламбера решения которого определяют волну, распространяющуюся со скоростью $c = k_1/k_2$ (см. (

(5.3)). Экспериментально установлено,

что скорость распространения электромагнитного поля равна $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

Таким образом, выбор коэффициентов k_i ($i = 1, 2, 3$) должен удовлетворять установленным выше связям. В результате, в разных системах единиц измерения, возникших исторически, значения коэффициентов пропорциональности в экспериментально установленных законах таковы:

Система	k_1	$k_2 = \gamma\lambda$	$k_3 = \lambda$	$\gamma = k_2/k_3$	
СГСЭ	1	c^{-2}	1	c^{-2}	c^{-2}
СГСМ	c^2	1	1	1	c^{-2}
Гаусс	1	c^{-2}	c^{-1}	c^{-1}	c^{-1}
Хевисайд Лоренц	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	c^{-1}	$\frac{1}{4\pi c}$	c^{-1}
СИ	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	$\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ЛАЗЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЛАЗЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Лазерные технологии не случайно называют технологиями XXI века. Созданные в середине прошлого века, лазеры вызвали появление не только целого ряда новых направлений в физике, химии, биологии и других науках, но и большого количества новых технологий в обработке материалов, хранении, обработке и передаче информации, в приборостроении, связи, в микроэлектронике, медицине, военной технике, в контроле материалов и в точных измерениях, в науках о жизни, в искусстве и т.д.

Лазерные принтеры, оптические диски (CD, DVD, Blu-ray и др.), лазерные торговые сканеры и лазерные шоу сегодня известны всем. Занимают свое место лазерные аддитивные технологии - создание трехмерных объектов за счет прямой трансформации виртуального (компьютерного) образа в материальный объект при взаимодействии лазерного излучения с веществом. Лазерные технологии лечения болезней глаз, сосудов, опухолей и т.д. Проведены уже сотни операций по лазерной полировке роговицы глаза и кожи - избавления человечества от очков и морщин. На повестке дня сегодня разработка лазерного управляемого термоядерного синтеза, лазерных реактивных двигателей, и многое-многое другое.

История кафедры ЛТиЛТ

В мае месяце 2015 года были объединены две лазерные кафедры университета — Лазерной техники и биомедицинской оптики (ЛТБМО) и Лазерных технологий и экологического приборостроения (ЛТЭП). Вновь созданная кафедра получила название «Кафедра лазерных технологий лазерной техники».

Кафедра, созданная 15 мая 2015 года, объединила две кафедры — Лазерной техники и биомедицинской оптики (ЛТБМО) и Лазерных технологий и экологического приборостроения (ЛТЭП).

История кафедры начинается в 1963 году, когда, всего через три года после создания первого лазера, К.И. Крыловым была создана кафедра квантовой радиоэлектроники, впоследствии получившая название «Кафедра лазерной техники и биомедицинской оптики». Кафедра первой в России начала

подготовку и выпуск специалистов по новому направлению в науке и технике – квантовой электронике, лазерной физике и технике. С самого начала создания кафедры серьёзное внимание было уделено фундаментальной подготовке в области математики и физики, физическому эксперименту, учебно–исследовательской работе студентов. В кратчайшие сроки была создана проблемная научно–исследовательская лаборатория, а затем и отраслевая лаборатория, что значительно расширило круг проводимых научных исследований и обеспечило их высокий научный уровень. Основными научными направлениями кафедры стали оптика лазеров, силовая и нелинейная оптика, радиооптика, неразрушающий контроль материалов и изделий, биомедицинская оптика.

В 1965 г. учеником К.И. Крылова по кафедре спецфизики в ЛЭТИ В.П. Вейко в ИТМО была организована лаборатория лазерных технологий (совместно с ЛКТБ «Светлана»), которая в 1975-76 г.г. была преобразована в отраслевую (двух министерств – Высшего образования и Электронной промышленности), а в дальнейшем - в 1980 г. на базе лаборатории была создана кафедра, которая впоследствии получила название кафедры «Лазерных технологий и экологического приборостроения». В 1976 г. научные работы отраслевой лаборатории по «Физическим основам лазерной обработки тонких пленок» удостоены Премии Президиума АН СССР за лучшую научную работу в области «Фундаментальных проблем микроэлектроники». В 1983 и 1984 гг. работы кафедры Лазерных технологий и экологического приборостроения удостоены Премий Минвуза СССР за лучшую научную работу, а в 1986 г. совместно с рядом других организаций - Государственной Премии СССР в области науки и техники за «Разработку и широкое внедрение в промышленность процессов лазерной обработки тонких пленок».

В 1994 г. кафедры ЛТБМО и ЛТиЭП выступили инициаторами организации новой специальности «Лазерная техника и лазерные технологии», по которой в настоящее время ведут подготовку и систематический выпуск специалистов 11 ВУЗов России. С 2000 г. лаборатория и кафедра Лазерных технологий и экологического приборостроения признаны Ведущей научной школой Российской Федерации по «Фундаментальным основам лазерных микро- и нанотехнологий», этот статус ежегодно подтверждается вплоть до 2015 г. В 2010 г. работы кафедры совместно с рядом других организаций удостоены Премии Правительства России в области образования за «Создание инновационной системы подготовки специалистов по лазерной обработке материалов».

За время существования кафедр ЛТБМО и ЛТиЭП подготовлено более двух тысяч специалистов в области лазерной техники и лазерных технологий, свыше 80 выпускников и сотрудников кафедр защитили кандидатские и докторские диссертации и более 20 имеют учёное звание профессора. По результатам работ кафедр издано более 15 монографий. Результаты исследований сотрудников изложены более чем в 500 научных статьях и 50 патентах и авторских свидетельствах.

В настоящее время кафедра ЛТиЛТ активно сотрудничает с университетами и институтами Германии, Китая, Франции, Италии и других стран.

Основные научные направления кафедры ЛТиЛТ:

- Фундаментальные исследования в области взаимодействия лазерного излучения с веществом: лазерная абляция и конденсация металлических и композиционных пленок.

- Термохимическое действие лазерного излучения.
- Фазово-структурные переходы в функциональных материалах под действием лазерного излучения.

- Лазерная локальное осаждение и обработка тонких пленок.
- Лазерная инженерия поверхности.
- Лазерные технологии прецизионной размерной обработки.
- Сверхкороткие лазерные воздействия и их применение.
- Создание новых оптических материалов и элементов фотоники, микро- и волоконной оптики на базе лазерных технологий.

- Лазерная очистка и дезактивация в промышленности.
- Лазерный трехмерный синтез объемных изделий.
- Промышленные (индустриальные) инновационные технологии на основе волоконных лазеров для различных областей машиностроения и приборостроения.

- Взаимодействие лазерного излучения с конструкционными, функциональными материалами и биологическими тканями.

- Лазерные-оптические системы для объемных изображающих технологий: визуализация медицинских изображений и систем создания и сохранения культурного наследия, Laser 3D Ent. and Light Shows.

- Лазерная очистка и реставрация произведений культурно-исторического наследия.

- Лазерные биомедицинские технологии (флуоресцентная диагностика и фотодинамическая терапия).

- Лазерная стоматология и офтальмология.
- Лазерная дезактивация радиоактивно-загрязненных поверхностей.
- Лазерные микро- и нанотехнологии для различных направлений: механики, электроники, фотоники (оптики), флюидики, газоаналитики, фармацевтики, медицины и биологии.

- Нелинейно-оптические процессы и материалы в лазерной физике и технике.

- Интеллектуальные оптические и лазерные системы.
- Космическая оптика и технологии
- Лазеры и оптика в космических технологиях.
- Лазерные технологии в ядерных и термоядерных технологиях.
- Лазерные дальномеры и высотомеры, лазеры для стандартов частоты и времени.

- Лазерное освещение.

- Петабитная оптическая память.
- Лазерное управление структурой и свойствами поверхности (структура, морфология, физико–химические свойства).
- Лазерная очистка и сопутствующая обработка поверхности (в том числе дезактивация, флексвалы, биосовместимость, прокатные валы).
- Волоконные лазерные технологии.
- Многофункциональные нанозонды.
- Лазерное наноструктурирование методами лазерной термохимии и др.

Заведует кафедрой лазерных технологий и лазерной техники Заслуженный деятель науки России, Лауреат Государственной Премии СССР и Премии Правительства РФ, действительный член Академии Инженерных Наук РФ, д.т.н., профессор В.П. Вейко. Среди преподавателей кафедры Почетный работник высшей школы, Почетный работник науки и техники Российской Федерации, Лауреат Премии Правительства РФ, д.т.н., профессор Е.Б. Яковлев, Почетный работник науки и техники Российской Федерации, д.т.н., профессор Е.А. Шахно, Почетный работник высшей школы, к.ф.–м.н., доцент Г.Д. Шандыбина, Почетный работник высшей школы д.т.н. профессор В.Ю. Храмов, д.ф.–м.н. профессор А.В. Беликов, Почетный работник высшей школы к.т.н., доцент Смирнов С.А.. Занятия по основам биомедицинской оптики проводят ведущие специалисты Санкт–Петербургского Государственного медицинского университета им академика И.П. Павлова: д.б.н. профессор И.А. Михайлова, д.м.н. профессор В.И. Томсон, к.б.н. доцент Л.А. Александрова. Также занятия проводят: к.ф.–м.н. доцент А.В. Скрипник, к.ф.–м.н., доц. Ю.И. Копилевич, к.т.н., доцент А.А. Петров, к.т.н. доцент К.В. Шатилова, к.т.н. доцент А.Е. Пушкарева, к.т.н. доцент Д.Ю. Сачков, молодые научные сотрудники, кандидаты наук Э.И. Агеев, А.А. Самохвалов, Г.В. Одинцова, А.Н. Сергеев и др.

Кафедра ЛТиЛТ осуществляет подготовку бакалавров (12.03.05) и магистров (12.04.05) по направлению «Лазерная техника и лазерные технологии», бакалавров по направлению 16.03.01 «Техническая физика», магистров по направлению 12.04.02 «Оптотехника», кандидатов и докторов наук по специальностям 05.11.07 "Оптические и оптико–электронные приборы", 05.27.03 "Квантовая электроника" и 01.04.05 "Оптика".

Поляков Дмитрий Сергеевич
Шандыбина Галина Дмитриевна
Яковлев Евгений Борисович

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
практических заданий по курсу Взаимодействие лазерного излучения с
веществом (силовая оптика)**

Часть 1. Поглощение излучения в твердых телах

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 100 экз

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49