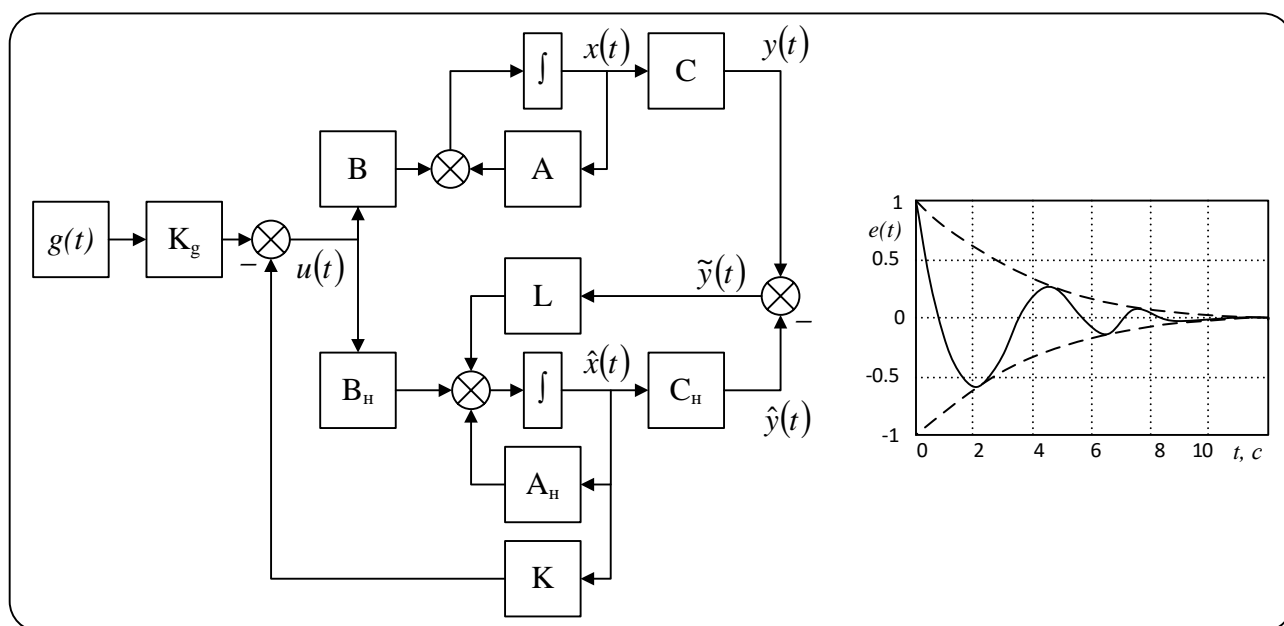


Беляев М.Е., Павлов А.С., Шаветов С.В.

**Методические указания к выполнению  
практической работы по курсу «Управление  
непрерывными и дискретными процессами»**



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Беляев М.Е., Павлов А.С., Шаветов С.В.**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ  
ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «УПРАВЛЕНИЕ  
НЕПРЕРЫВНЫМИ И ДИСКРЕТНЫМИ ПРОЦЕССАМИ»**

**Учебно-методическое пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**  
**2016**

Беляев М.Е., Павлов А.С., Шаветов С.В. Методические указания к выполнению практической работы по курсу «Управление непрерывными и дискретными процессами». – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 40 с.

В учебно-методическом пособии приведены методы описания непрерывных и дискретных процессов управления, основные подходы к анализу устойчивости линейных и синтезу модальных управлений. Особое внимание уделено качественной экспоненциальной устойчивости. Рассмотрены практические примеры, наглядно демонстрирующие изложенные методы и подходы.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.04.03 – Системный анализ и управление, магистерская программа «Интеллектуальные системы управления техническими процессами».

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета систем управления и робототехники, протокол № 4 от 24 мая 2016 г.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© Беляев М.Е., Павлов А.С., Шаветов С.В., 2016

## Содержание

Анализ структурных свойств и устойчивости линейных систем.....	4
Анализ свойства управляемости.....	4
Анализ свойства наблюдаемости.....	7
Анализ свойства устойчивости линейной непрерывной системы.....	9
Анализ свойств дискретных систем.....	11
Дискретизация непрерывной системы управления.....	11
Анализ свойства устойчивости линейной дискретной системы.....	13
Синтез регуляторов для линейных систем.....	15
Синтез регулятора методом модального управления.....	15
Синтез регулятора методом локальной оптимизации для непрерывной системы.....	18
Синтез регулятора методом локальной оптимизации для дискретной системы.....	21
Синтез устройства оценки для систем с неполной информацией.....	24
Приложение 1. Задание на практическую работу.....	28
Приложение 2. Примеры команд для вычислений в среде MATLAB.....	30
Приложение 3. Решение уравнений в среде Mathcad.....	34
Список литературы.....	36

# Анализ структурных свойств и устойчивости линейных систем

## Анализ свойства управляемости

Рассмотрим линейный непрерывный объект управления, заданный в виде «вход-состояние-выход»:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  –  $l$ -мерный вектор регулируемых переменных;  $u(t) \in \mathbb{R}^k$  –  $k$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $A$  – квадратная матрица размерности  $n \times n$ , задающая параметры системы;  $B$  – матрица входа по управлению размерности  $n \times k$ , определяющая точки приложения управляющих воздействий;  $C$  – матрица выхода размерности  $l \times n$ , определяющая связь регулируемых переменных с переменными состояния.

**Определение 1.** Объект управления (1) с парой матриц  $(A, B)$  называется *полностью управляемым*, если его можно за конечное время  $T = t_k - t_0$  перевести из произвольного начального состояния  $x(t_0)$  в произвольное конечное  $x(t_k)$ , применив соответствующим образом выбранное управляющее воздействие  $u = u(t)$ , определенное на интервале  $[t_0, t_k]$ .

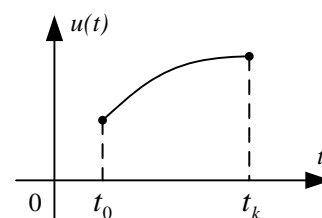


Рис. 1 – Интервал управления.

**Утверждение 1.** Объект с парой матриц  $(A, B)$  является полностью управляемым тогда и только тогда, когда матрица управляемости объекта:

$$N_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2)$$

обладает полным рангом, т.е.  $\text{rang } N_c = n$ .

**Замечание 1.** Система является полностью управляемой, если нельзя указать такой базис, при котором уравнения пространства состояний разбиваются на две группы с векторами состояний  $x^1$  и  $x^2$  ( $\dim x^1 = r$ ,  $\dim x^2 = n - r$ ) соответственно, так, что в уравнения второй группы  $x^2$  не входят ни фазовые координаты первой группы  $x_i^1$ , ни входные сигналы системы  $u = u(t)$  (рис. 2).

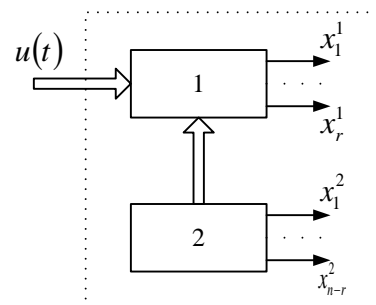


Рис. 2 – Разделение системы на управляемую и неуправляемую части.

В случае *не полностью управляемого* объекта ( $\text{rang } N_c = r < n$ ) неуправляемую часть (блок 2 на рис. 2) в силу Замечания 1 можно рассматривать как источник внешнего возмущающего воздействия. Для его компенсации систему необходимо преобразовать к разделенному виду и найти передаточную функцию между выходом неуправляемой части (неуправляемыми состояниями) и выходом системы  $y = y(t)$ .

Для приведения системы к разделенному виду необходимо заменить базис в пространстве состояний  $\tilde{x} = Mx$ ,  $\det|M| \neq 0$ , где  $M$  – квадратная матрица преобразования подобия размерности  $n \times n$ . Для этого требуется найти невырожденное решение следующего уравнения относительно матрицы  $M$ :

$$M \cdot B = \begin{bmatrix} 1_{[r \times 1]} \\ 0_{[n-r \times 1]} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

После замены базиса, матрицы описания приведенной системы примут вид:

$$A_r = M \cdot A \cdot M^{-1}, \quad (4)$$

$$B_r = M \cdot B = \begin{bmatrix} 1_{[r \times 1]} \\ 0_{[n-r \times 1]} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$C_r = C \cdot M^{-1}. \quad (6)$$

Минимальная реализация полученной системы имеет вид:

$$A_{min} = [I_{[r \times r]} \quad 0_{[r \times n-r]}] \cdot A_r \cdot \begin{bmatrix} I_{[r \times r]} \\ 0_{[n-r \times r]} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$B_{min} = [I_{[r \times r]} \quad 0_{[r \times n-r]}] \cdot B_r, \quad (8)$$

$$C_{min} = C_r \cdot \begin{bmatrix} I_{[r \times r]} \\ 0_{[n-r \times r]} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $I_{[f \times f]} = \begin{bmatrix} 1_{1,1} & 0_{1,2} & \dots & 0_{1,f} \\ 0_{2,1} & 1_{2,2} & \dots & 0_{2,f} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{f,1} & 0_{f,2} & \dots & 1_{f,f} \end{bmatrix}$  – единичная матрица размерности  $f \times f$ ,  $0_{[v \times w]}$  и  $1_{[v \times w]}$

– матрицы заполненные нулями и единицами соответствующих размерностей.

Для компенсации каждого неуправляемого состояния необходимо найти образ Лапласа  $U_{nu}(s)$  требуемого компенсационного воздействия следующего вида:

$$U_{nu}(s) = -X_{nu}(s) \frac{W_{nu}(s)}{W_{min}(s)}, \quad (10)$$

$$W_{nu}(s) = s \cdot C_r \cdot (s \cdot I - A_r)^{-1} \cdot e_{x_{nu}}, \quad (11)$$

$$W_{min}(s) = C_{min} \cdot (s \cdot I - A_{min})^{-1} \cdot B_{min}, \quad (12)$$

$$e_{x_{nu}} = [0 \quad \dots \quad 1_{nu} \quad \dots \quad 0]^T, \quad (13)$$

где  $W_{nu}(s)$  – передаточная функция, связывающая неуправляемое состояние  $x_{nu}(t)$  с выходом системы  $y(t)$ ;  $W_{min}(s)$  – передаточная функция преобразованной системы;  $e_{x_{nu}}$  – единичный множитель семантически эквивалентный управляющему воздействию для каждого из неуправляемых состояний.

Затем необходимо найти обратное преобразование Лапласа  $L^{-1}[U_{nu}(s)]$  компенсационного воздействия и преобразовать вектор состояния разделенной системы к исходной. В итоге компенсационное управляющее воздействие для неуправляемого состояния  $x_{nu}(t)$  будет иметь вид:

$$u_c(t) = K_{nu} \cdot M \cdot x(t), \quad (14)$$

где  $K_{nu}$  – коэффициенты обратных связей, найденные при переходе от образа Лапласа компенсационного воздействия.

Для дальнейшей работы с системой необходимо использовать ее минимальное представление (7)-(9). Для перехода от минимальной реализации к исходной системе требуется произвести преобразование координат согласно следующему соотношению:

$$M \cdot x(t) = \begin{bmatrix} x_{min}(t) \\ x_{nu}(t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

**Алгоритм 1.** Анализ свойства управляемости:

1. Сформировать матрицу управляемости  $N_c$  согласно (2), найти ранг полученной матрицы  $\text{rang } N_c$  и сделать вывод об управляемости объекта.
  - 1.1. В случае, когда ранг меньше размерности вектора состояния  $\text{rang } N_c < n$  выполнить шаги 2 и 3.
2. Привести систему к минимальной реализации (7)-(9);
3. Найти компенсационные управляющие воздействия (14).

**Пример 1.**

Рассмотрим систему вида (1), где:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0].$$

$$n = 2,$$

$$N_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{rang } N_c = 2 = n \Rightarrow \text{система полностью управляема.}$$

**Пример 2.**

Рассмотрим систему вида (1), где:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [0.5 \quad -1 \quad 0.5].$$

$$n = 3,$$

1. Проверка системы на полную управляемость.

$$N_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -9 \end{bmatrix}, \text{rang } N_c = 2 < n = 3 \Rightarrow \text{система не полностью управляема.}$$

Ранг матрицы управляемости на единицу меньше размерности вектора состояния, следовательно в системе присутствует одно неуправляемое состояние.

2. Вычисление матрицы преобразования подобия и приведение системы к минимальной реализации.

$$M = \begin{bmatrix} -0.593 & -0.195 & 0.661 \\ 0.059 & -0.03 & 0.334 \\ -0.672 & 0.672 & -0.224 \end{bmatrix},$$

$$A_r = M \cdot A \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} -5.26 & 7.83 & 11.2 \\ -2.31 & 3.26 & 2.12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{min} = [I_{[r \times r]} \quad 0_{[r \times n-r]}] \cdot A_r \cdot \begin{bmatrix} I_{[r \times r]} \\ 0_{[n-r \times r]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.26 & 7.83 \\ -2.31 & 3.26 \end{bmatrix},$$

$$B_r = M \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{min} = [I_{[r \times r]} \quad 0_{[r \times n-r]}] \cdot B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_r = C \cdot M^{-1} = [0.61 \quad -0.61 \quad -1.34], C_{min} = C_r \cdot \begin{bmatrix} I_{[r \times r]} \\ 0_{[n-r \times r]} \end{bmatrix} = [0.61 \quad -0.61].$$

3. Вычисление компенсационных управляющих воздействий.

$$W_{nu}(s) = s \cdot C_r \cdot (s \cdot I - A_r)^{-1} \cdot e_{x_{nu}} = \frac{-1.338s^2 + 2.875s - 4.462s}{s^2 + 2s + 1.004}, \text{ где } e_{x_{nu}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W_{min}(s) = C_{min} \cdot (s \cdot I - A_{min})^{-1} \cdot B_{min} = \frac{0.9994}{s^2 + 2s + 1.004},$$

$$U_{nu}(s) = -X_{nu}(s) \frac{W_{nu}(s)}{W_{min}(s)} = -\frac{-1.338s^2 + 2.875s - 4.462}{0.9994}.$$

Компенсация в установившемся режиме примет вид:

$$K_{nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4.462}{0.9994} \end{bmatrix}.$$

$$u_c(t) = K_{nu} M x(t) = [-3.0731 \quad 3.0731 \quad -1.0244] x(t).$$

### Анализ свойства наблюдаемости

**Определение 2.** Объект управления (1) с парой матриц (A, C) называется *полностью наблюдаемым* на интервале наблюдения  $t \in [t_0, t_k], t_0 \geq 0$ , если его состояние в течение интервала наблюдения  $x(t_1), t_0 < t_1 \leq t_k$  может быть определено на основе наблюдений за выходом  $y = y(t)$ .

**Утверждение 2.** Объект с парой матриц (A, C) является полностью наблюдаемым тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости объекта:

$$N_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

обладает полным рангом, т.е.  $\text{rang } N_o = n$ .

**Замечание 2.** Система является полностью наблюдаемой, если нельзя указать такой базис, при котором фазовые координаты разбиваются на две группы  $x_i^1$  и  $x_j^2$  с векторами состояний  $x^1$  и  $x^2$  ( $\dim x^1 = r, \dim x^2 = n - r$ ) соответственно, так, что координаты второй группы  $x_j^2$  не входят ни в уравнения для координат первой группы  $x_i^1$ , ни в алгебраические соотношения для выходных переменных  $y = y(t)$  (рис. 4).

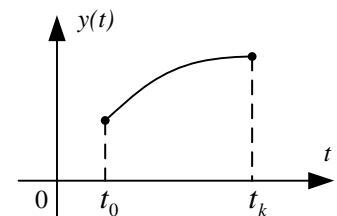


Рис. 3 – Интервал наблюдения.



В случае *не полностью наблюдаемого* объекта ( $\text{rang } N_o = r < n$ ) ненаблюдаемой частью (блок 2 на рис. 4) можно пренебречь, поскольку она в силу Замечания 2 не будет оказывать влияния на выход системы.

Для приведения системы к разделенному виду необходимо аналогично случаю с не полностью управляемой системой заменить базис в пространстве состояний  $\tilde{x} = Mx, \det|M| \neq 0$ , где  $M$  – квадратная матрица преобразования координат размерности  $n \times n$ . Для этого требуется найти невырожденное решение следующего уравнения относительно матрицы  $M$ :

$$[1_{[1 \times r]} \quad 0_{[1 \times n-r]}] \cdot M = C. \quad (17)$$

После замены базиса, матрицы описания приведенной системы примут вид:

$$A_r = M \cdot A \cdot M^{-1}, \quad (18)$$

$$B_r = M \cdot B, \quad (19)$$

$$C_r = C \cdot M^{-1} = [1_{[1 \times r]} \quad 0_{[1 \times n-r]}]. \quad (20)$$

Для дальнейшей работы с системой необходимо использовать ее минимальное представление (7)-(9). Для перехода от минимальной реализации к исходной системе требуется произвести преобразование координат согласно следующему соотношению:

$$M \cdot x(t) = \begin{bmatrix} x_{min}(t) \\ 0_{[n-r \times 1]} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

**Алгоритм 2.** Анализ свойства наблюдаемости:

1. Сформировать матрицу наблюдаемости  $N_o$  согласно (16), найти ранг полученной матрицы  $\text{rang } N_o$  и сделать вывод об наблюдаемости объекта.
  - 1.1. В случае, когда ранг меньше размерности вектора состояния  $\text{rang } N_o < n$  выполнить шаг 2;
2. Привести систему к минимальной реализации (7)-(9).

**Пример 3.**

Рассмотрим систему вида (1), где:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [0.5 \quad -1 \quad 0.5].$$

$$n = 3,$$

Исследование системы на полную наблюдаемость.

$$N_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 7.5 & -10 & 3.5 \end{bmatrix}, \text{rang } N_o = 3 = n \Rightarrow \text{система полностью наблюдаема.}$$

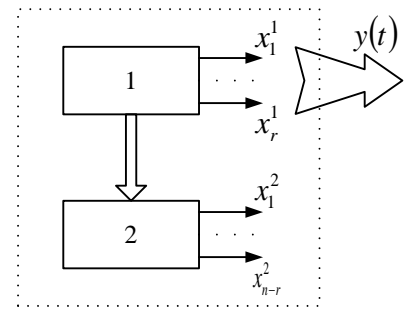


Рис. 4 – Разделение системы на наблюдаемую и ненаблюдаемую части.

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности вектора состояния, следовательно система полностью наблюдаема.

### Анализ свойства устойчивости линейной непрерывной системы

Рассмотрим невозмущенное уравнение системы:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (22)$$

где  $F(x(t))$  –  $n$ -мерная векторзначная функция векторного аргумента  $x \in \mathbb{R}^n$  такая, что существует единственное решение  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  данного уравнения, и выполняется равенство  $F(0) = 0$ .

**Определение 3.** Устойчивость – это способность системы возвращаться в исходное равновесное состояние после окончания действия на нее внешних воздействий.

**Определение 4.** Положение равновесия  $x = 0$  устойчиво по Ляпунову, если для любого малого положительного числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех траекторий движения системы  $x(t)$ , исходящих из начальных условий  $\|x(0)\| \leq \delta(\varepsilon), \forall t \geq 0$ , выполняется неравенство  $\|x(t)\| < \varepsilon$ .

**Замечание 3.** Устойчивость по Ляпунову гарантирует ограниченность траекторий  $x(t)$ , но не обеспечивает их сходимости к некоторому установившемуся значению  $y_\infty$ .

**Определение 5.** Положение равновесия  $x = 0$  асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и для любых траекторий движения системы  $x(t)$ , исходящих из произвольных начальных условий  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , выполняется условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = 0$ .

**Определение 6.** Положение равновесия  $x = 0$  экспоненциально устойчиво, если для любых траекторий движения системы  $x(t)$ , исходящих из произвольных начальных условий  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , существуют такие числа  $\beta < 0$  и  $\rho \geq 1$ , что в любой момент времени  $t \geq 0$  выполняется неравенство  $\|x(t)\| \leq \rho e^{\beta t} \cdot \|x(0)\|$ .

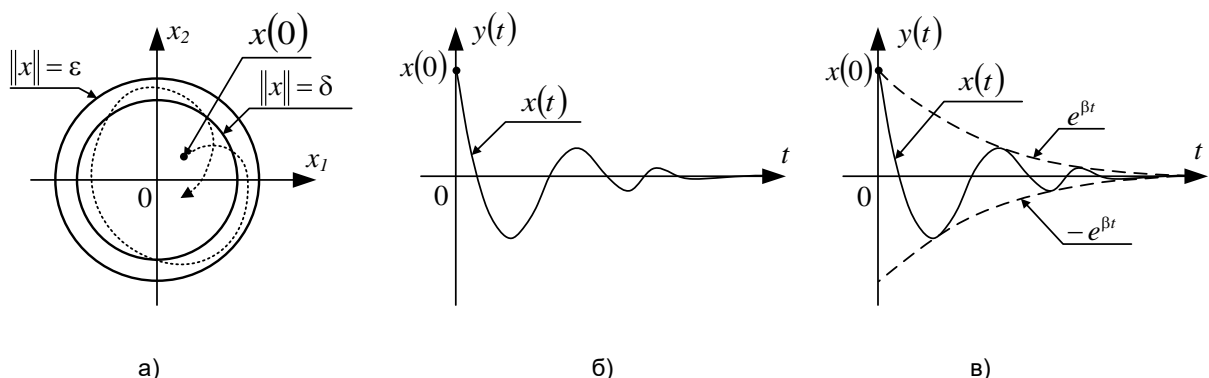


Рис. 5 – а) геометрическая интерпретация устойчивости по Ляпунову;  
 б) переходный процесс асимптотически устойчивой системы;  
 в) переходный процесс экспоненциально устойчивой системы.

**Определение 7.** Положение равновесия  $x = 0$  качественно экспоненциально устойчиво, если для любых траекторий движения системы  $x(t)$ , исходящих из

произвольных начальных условий  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , существуют такие числа  $r > 0$ ,  $\beta + r < 0$ , и  $\rho \geq 1$ , что в любой момент времени  $t \geq 0$  выполняется неравенство:

$$\|x(t) - e^{\beta t} x(0)\| \leq \rho(e^{(\beta+r)t} - e^{\beta t}) \|x(0)\|.$$

**Замечание 4.** Из качественной экспоненциальной устойчивости следует экспоненциальная устойчивость, а из экспоненциальной устойчивости – асимптотическая устойчивость.

**Замечание 5.** Параметр  $\beta$  называется *степенью сходимости* и характеризует среднюю скорость сходимости траекторий движения к положению равновесия  $x = 0$ . Параметр  $r$  определяет *отклонения траекторий* движения от усредненной траектории. Пример переходного процесса для системы первого порядка, обладающей качественной экспоненциальной устойчивостью, представлен на рис. 6, а). Качественно экспоненциально устойчивая непрерывная линейная динамическая система обладает распределением корней, представленным на рис. 6, б).

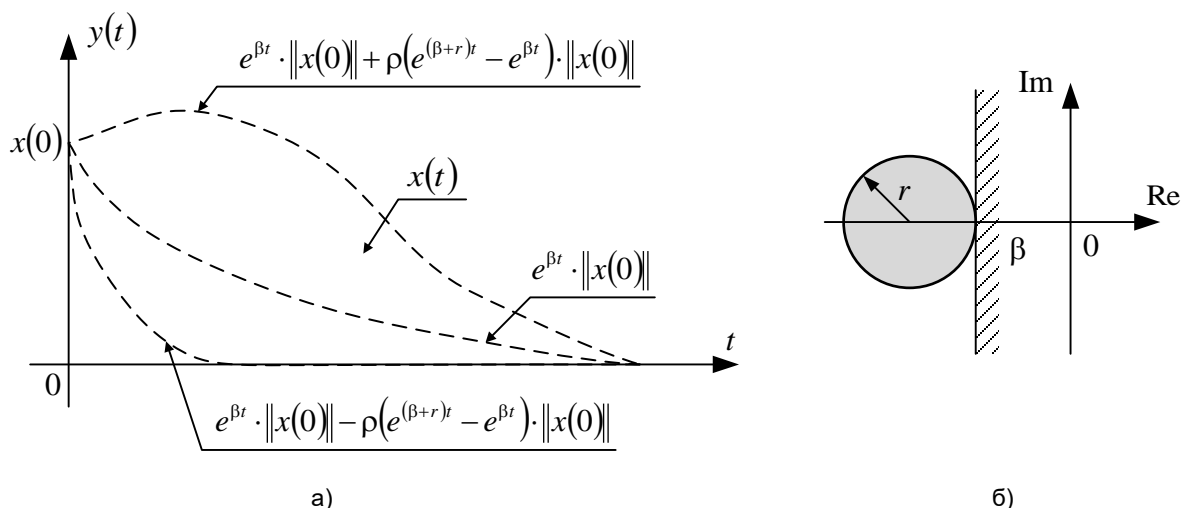


Рис. 6 – а) переходный процесс системы с качественной экспоненциальной устойчивостью; б) распределение корней в замкнутой системе с качественной экспоненциальной устойчивостью.

**Утверждение 3.** *Корневой критерий устойчивости.* Для того, чтобы непрерывная линейная система (1) была бы асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$  характеристического полинома  $D(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$  матрицы описания системы  $A$ , где  $\alpha_i, i = \overline{0, n-1}$  – коэффициенты характеристического полинома, обладали отрицательной вещественной частью  $\text{Re } \lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$ .

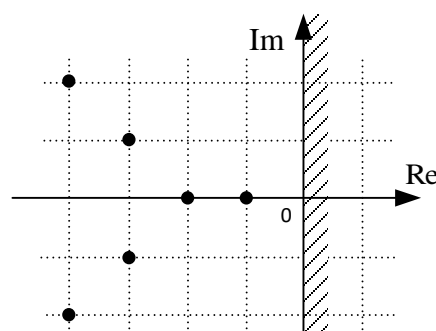


Рис. 7 – Распределение корней устойчивой системы.

**Замечание 6.** Если характеристическое уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью, а один или два корня имеют нулевую вещественную часть  $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$ , то система находится на *границе устойчивости нейтрального типа*.

**Замечание 7.** Если характеристическое уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью, а имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ , то система находится на *границе устойчивости колебательного типа*.

**Определение 8.** Корни числителя передаточной функции называются *нулями* системы, а корни знаменателя – *полюсами*.

**Пример 4.**

Задана передаточная функция системы  $W(s) = \frac{s^3+s^2+s+1}{s^4+11s^3+45s^2+83s+80}$ , требуется определить, является ли данная система устойчивой и отметить на комплексной плоскости нули и полюса системы.

В канонической управляемой форме матрица описания состояния системы имеет

вид:  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -11 & -45 & -83 & -80 \end{bmatrix}$ . Вычислим характеристический полином системы:

$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 + 11\lambda^3 + 45\lambda^2 + 83\lambda + 80$ . Приравняв полином нулю найдем корни системы:  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4, \lambda_{3,4} = -2 \pm i$ , следовательно, в силу Утверждения 3, система является устойчивой.

Вычислим нули системы:  $s^3 + s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm i$ . Отметим нули и полюса системы на комплексной плоскости (см. рис. 8), где мнимая ось Im является границей устойчивости.

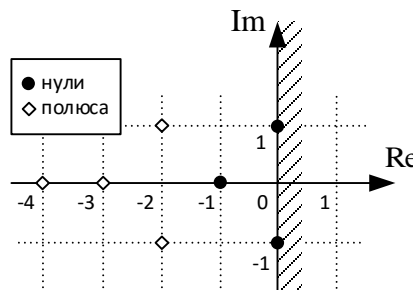


Рис. 8 – Нули и полюса системы на комплексной плоскости.

## Анализ свойств дискретных систем

### Дискретизация непрерывной системы управления

**Определение 9.** *Дискретная система* – это система, которая имеет хотя бы один элемент, в котором непрерывному изменению входного сигнала соответствует дискретное по времени изменение выходного сигнала, т.е. выходной сигнал изменяет свои значения только в дискретные моменты времени.

**Замечание 8.** Описание дискретных сигналов во времени с постоянным интервалом дискретности задаются функциями  $f(m)$ , определенными на дискретном интервале времени  $m$ , где  $t = mT$  – текущее время,  $m = 0, 1, \dots$  – номер интервала дискретности,  $T$  – значение интервала дискретности. Уравнения движения дискретных динамических систем задаются при помощи разностных уравнений, а производные – при помощи функций, смещенных на один такт:  $\dot{f}(t) \sim f(m + 1)$ .

Связь между матрицами непрерывной и дискретной моделями объектов задается в следующей форме:

$$A_d = e^{AT}, \quad (23)$$

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B|_{\exists A^{-1}}, \quad (24)$$

$$C_d = C, \quad (25)$$

где  $A, B, C$  – матрицы описания непрерывного динамического объекта вида (1),  $A_d, B_d, C_d$  – матрицы описания дискретного динамического объекта.

Матричную экспоненту  $e^{AT}$  можно вычислить приближенным методом, основанным на аппроксимации Тейлора порядка  $k$ , согласно которой ряд заменяется суммой:

$$e^{AT} \approx \sum_{i=0}^k \frac{A^i T^i}{i!}. \quad (26)$$

Таким образом, дискретное описание объекта примет вид:

$$\begin{cases} x(m+1) = A_d x(m) + B_d u(m) \\ y(m) = C_d x(m) \end{cases}. \quad (27)$$

Для дискретных систем анализ управляемости, наблюдаемости, синтез регуляторов методом модального управления и наблюдающих устройств аналогичны непрерывному случаю (см. соответствующие разделы), для чего достаточно заменить матрицы описания непрерывной системы на их дискретные аналоги с точностью до замены непрерывного времени  $t$  на дискретное  $m$ .

### Пример 5.

Рассмотрим систему вида (1), где:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \ 1]$ . Требуется найти дискретное описание системы с интервалом дискретности  $T = 0.05$  с. Вычислим матрицы описания дискретной системы  $A_d, B_d, C_d$  по формулам (23)-(25):

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0 \\ 0.3710 & 0.6703 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} -0.2719 \\ 0.1032 \end{bmatrix}, C_d = [1 \ 0].$$

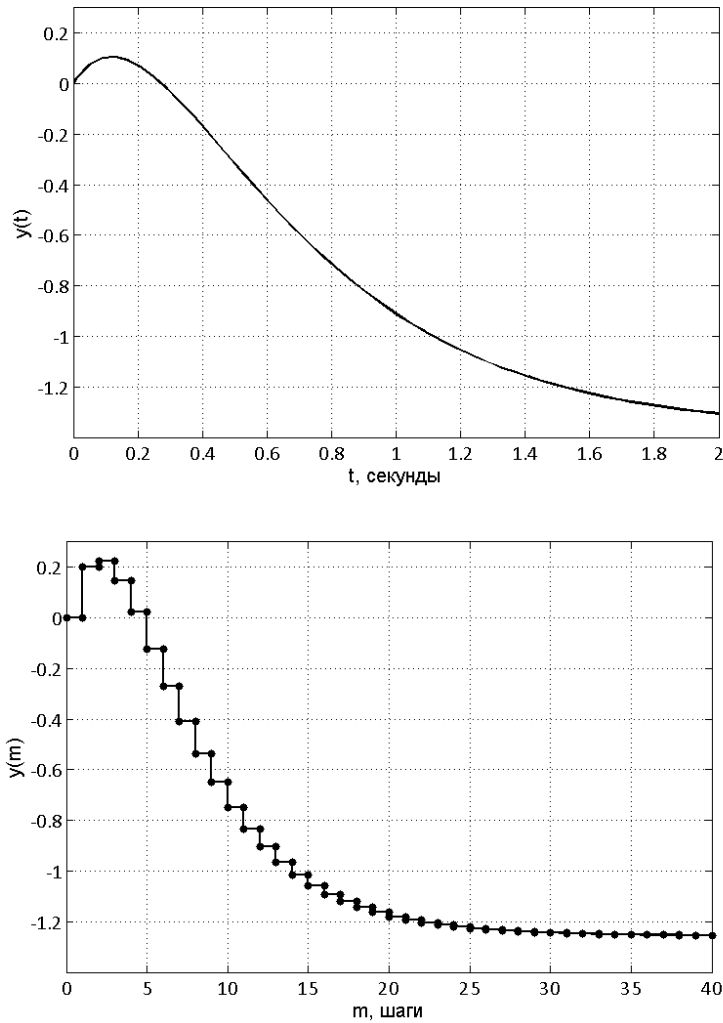


Рис. 9 – Моделирование непрерывного и дискретного описаний системы.

### Анализ свойства устойчивости линейной дискретной системы

Рассмотрим дискретную динамическую систему следующего вида:

$$x(m + 1) = f(x(m)), \quad (28)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  – номер интервала дискретности,  $f(x(m))$  –  $n$ -мерная векторозначная функция векторного аргумента  $x \in \mathbb{R}^n$  такая, что при любых начальных условиях  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  существует единственное решение  $x(m)$  данного уравнения.

**Определение 10.** Положение равновесия  $x = 0$  *асимптотически устойчиво*, если для всех траекторий движения системы  $x(m)$  исходящих из произвольных начальных условий  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  выполняется соотношение  $\lim_{m \rightarrow \infty} x(m) = 0$ .

**Замечание 9.** Асимптотическая устойчивость гарантирует сходимость траекторий движения системы в начало координат.

**Определение 11.** Положение равновесия  $x = 0$  *экспоненциально устойчиво*, если существуют такие числа  $\rho \geq 1$  и  $\beta < 1$ , что для всех траекторий движения системы  $x(m)$ ,

исходящих из произвольных начальных условий  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  для любого номера интервала дискретности  $m \geq 0$  выполняется неравенство  $\|x(m)\| \leq \rho \beta^m \cdot \|x(0)\|$ .

**Определение 12.** Положение равновесия  $x = 0$  качественно экспоненциально устойчиво, если существуют такие числа  $r > 0$ ,  $0 \leq \beta < 1 - r$ , и  $\rho \geq 1$ , что для всех траекторий движения системы  $x(m)$ , исходящих из произвольных начальных условий  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , что для любого номера интервала дискретности  $m \geq 0$  выполняется следующее неравенство:

$$\|x(m) - \beta^m x(0)\| \leq \rho((\beta + r)^m - \beta^m) \|x(0)\|. \quad (29)$$

**Замечание 10.** Параметры  $\beta$  и  $r$  содержательно аналогичны непрерывному случаю и характеризуют среднюю скорость сходимости траекторий движения к положению равновесия и отклонения траекторий движения от усредненной траектории соответственно. Качественно экспоненциально устойчивая дискретная линейная динамическая система обладает распределением корней, представленным на рис. 10, б).

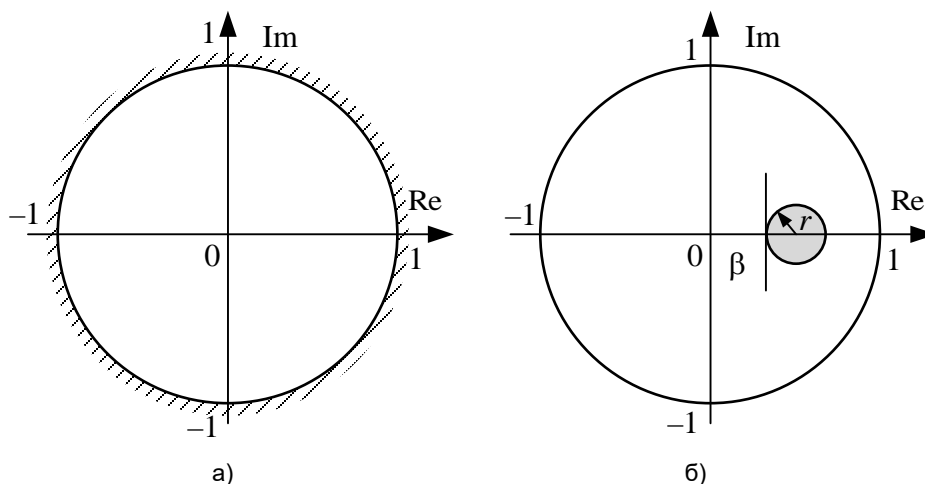


Рис. 10 – а) граница устойчивости дискретной системы на комплексной плоскости; б) распределение корней в замкнутой дискретной системе с качественной экспоненциальной устойчивостью.

**Утверждение 4. Корневой критерий устойчивости.** Для того, чтобы дискретная линейная система (27) была бы асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни  $z_i, i = \overline{1, n}$  характеристического полинома  $D_d(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$  матрицы описания системы  $A_d$ , где  $\alpha_i, i = \overline{0, n-1}$  – коэффициенты характеристического полинома, были по модулю меньше единицы  $|z_i| < 1, i = \overline{1, n}$ , см. рис. 10, а).

**Замечание 11.** Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один корень по модулю больший единицы, то система *неустойчива*.

**Замечание 12.** Если характеристическое уравнение не имеет корней по модулю больших единицы, но имеется один или два корня равные по модулю единице, то система будет находится на *границе устойчивости нейтрального типа*.

### Пример 6.

Задана дискретная матрица описания состояния  $A_d = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0 \\ 0.3710 & 0.6703 \end{bmatrix}$ ,

Требуется определить, является ли система устойчивой.

Вычислим характеристический полином системы:

$$D_d(z) = \det(zI - A_d) = z^2 - 1.49z + 0.55.$$

Корни характеристического полинома:  $z_1 = 0.8099$ ,  $z_2 = 0.6791$ , следовательно, в силу Утверждения 4, дискретная система является устойчивой.

## Синтез регуляторов для линейных систем

### Синтез регулятора методом модального управления

Рассмотрим задачу управления линейным непрерывным динамическим объектом (1).

**Определение 12.** Модальной моделью называется автономная динамическая система вида:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Gamma z(t), \\ \eta(t) = Hz(t), \end{cases} \quad (30)$$

где  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерный вектор состояния,  $\eta(t) \in \mathbb{R}^l$  –  $l$ -мерный вектор выхода;  $\Gamma$  – квадратная матрица размерности  $n \times n$ , задающая параметры системы;  $H$  – матрица выхода размерности  $l \times n$ . Пара матриц  $(\Gamma, H)$  является полностью наблюдаемой. Матрица состояния  $\Gamma$  характеризуется собственными числами  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ , обеспечивающими заданные динамические показатели качества системы, причем собственные числа матрицы  $A$  не совпадают с собственными числами матрицы  $\Gamma$ .

Необходимо синтезировать алгоритм управления, формирующий сигналы управления  $u(t)$  динамическим объектом (1) с показателями качества, определяемыми собственными числами матрицы  $\Gamma$ , с помощью отрицательной обратной связи по вектору  $x(t)$  и матрицей обратной связи  $K$ :

$$u(t) = -Kx(t). \quad (31)$$

Подставив управление (31) в векторно-матричное описание объекта (1) получим замкнутую систему с обратной связью, определяемой матрицей  $K$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (32)$$

где  $F = A - BK$  – матрица состояния замкнутой системы (1) с управлением (31).

Для того, чтобы матрица  $K$  обеспечивала показатели качества динамической системы (1) аналогичные системе (30) необходимо, чтобы выполнялось условие подобия:

$$x(t) = Mz(t), t \geq 0, \quad (33)$$



где  $M$  – матрица преобразования подобия, и совпадали собственные значения матриц  $F$  и  $\Gamma$ , где модальная система (30) является *эталонной моделью* системы (1).

В силу условия (33) можно записать соотношение:

$$z(t) = M^{-1}x(t), \quad (34)$$

из которого с учетом (31) следует соотношение:

$$u(t) = -Hz(t) = -HM^{-1}x(t). \quad (35)$$

Обозначим:

$$K = HM^{-1}. \quad (36)$$

В разрешенной относительно матрицы  $H$  форме уравнение (36) примет вид:

$$H = KM. \quad (37)$$

Подставим (37) в правую часть матричного уравнения типа Сильвестра:

$$M\Gamma - AM = -VKM. \quad (38)$$

С учетом обозначения  $F = A - BK$  уравнение (38) приводит к матричному условию подобия матриц  $\Gamma$  и  $F$ :

$$M\Gamma = FM. \quad (39)$$

Откуда следует, что система (1) будет обладать заданными динамическими показателями качества.

**Алгоритм 3.** Синтез модального регулятора.

1. Проверить пару матриц  $(A, B)$  на полную управляемость.
2. Сформировать описание эталонной модели (30) по заданным показателям качества.
3. Найти матрицу преобразования  $M$ , решив матричное уравнение Сильвестра (38).
4. Вычислить матрицу  $K$  линейных стационарных обратных связей (36).
5. Найти характеристический полином замкнутой системы и сравнить с эталонным.
6. Вычислить коэффициент прямой связи  $K_g = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}$ .
7. Сформировать сигнал управляющего воздействия в виде  $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$ .

**Пример 7.**

Рассмотрим систему вида (1) третьего порядка ( $n = 3$ ), где:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 14 \\ 6 & 5 & -8 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Требуется обеспечить время переходного процесса в замкнутой системе  $t_n = 1.7$ с.

1. Проверка системы на управляемость.

$$\text{rang } N_c = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 14 & -24 \\ 0 & -8 & 100 \\ 1 & -7 & 113 \end{bmatrix} = 3 = n \Rightarrow \text{система полностью управляема.}$$

## 2. Формирование эталонной модели.

Для формирования эталонной модели определим параметры желаемого характеристического полинома в соответствии с нормированным временем переходного процесса  $t_n^*$  для системы третьего порядка  $n = 3$ . Нормированное время может быть вычислено из полиномов Ньютона или Баттерворта. При  $n = 3$ :  $t_n^* = 6.2$  с,  $D_d(s) = s^3 + 3\omega s^2 + 3\omega^2 s + \omega^3$  – желаемый характеристический полином (полином Ньютона третьего порядка).

$$\omega = \frac{t_n^*}{t_n} = \frac{6.2}{1.7} = 3.65, D_d(s) = s^3 + 10.94s^2 + 39.9s + 48.51.$$

Теперь сформируем матрицы эталонной модели с помощью этого полинома:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -48.51 & -39.9 & -10.94 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0 \ 0].$$

## 3. Решение матричного уравнение Сильвестра относительно матрицы М.

$$M = \begin{bmatrix} -0.1497 & -0.0084 & -0.0020 \\ 0.2111 & 0.0215 & 0.0028 \\ 0.0365 & -0.0054 & 0.0014 \end{bmatrix}.$$

## 4. Вычисление матрицы К линейных стационарных обратных связей.

$$K = -HM^{-1} = [36.2969 \ 18.2453 \ 15.94].$$

## 5. Проверка.

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 14 \\ 6 & 5 & -8 \\ -32.2959 & -19.2453 & -22.94 \end{bmatrix},$$

$\det(sI - F) = s^3 + 10.94s^2 + 39.9s + 48.51 = D_d(s)$  – характеристический полином совпадает с эталонным, следовательно коэффициенты регулятора выбраны верно.

## 6. Вычисление коэффициента прямой связи.

$$K_g = -0.515.$$

## 7. Формирование управления вида $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$ .

Как видно из графика переходного процесса моделирования замкнутой системы с модальным регулятором (рис. 11), время переходного процесса удовлетворяет заданному, следовательно, коэффициенты регулятора рассчитаны верно.

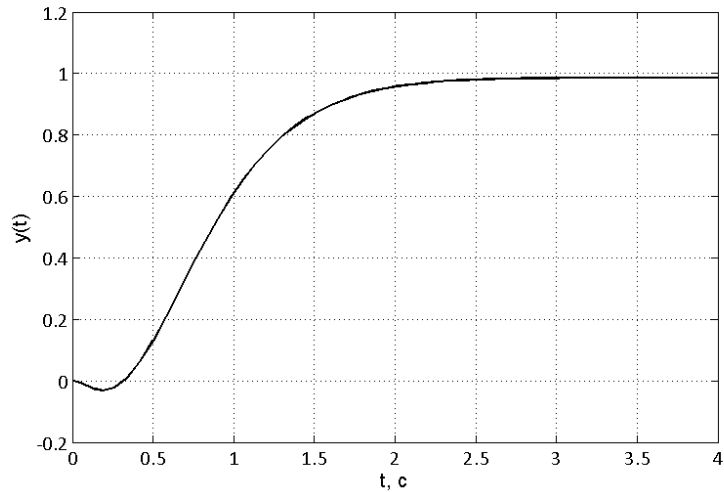


Рис. 11 – График переходного процесса в замкнутой системе с модальным регулятором.

### Синтез регулятора методом локальной оптимизации для непрерывной системы

Рассмотрим задачу управления линейным непрерывным динамическим объектом вида (1). При синтезе регулятора будем использовать класс квадратичных функций Ляпунова вида:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad (40)$$

где  $P$  – положительно определенная симметрическая матрица размерности  $n \times n$ .

Для синтеза качественно экспоненциально устойчивой системы будем использовать локальное достаточное условие:

$$V(Ax(t) + Bu(t) - \beta x(t)) \leq r^2 V(x(t)). \quad (41)$$

На основе неравенства (41) и функции Ляпунова вида (40), сформируем следующий локальный функционал качества:

$$L(x, u) = (Ax + Bu - \beta x)^T P (Ax + Bu - \beta x) - r^2 V(x) + x^T Q x, \quad (42)$$

где  $x = x(t)$ ,  $u = u(t)$ .

Продифференцируем (42) по управлению и приравняем нулю:

$$\frac{\partial L(x, u)}{\partial u} = 0. \quad (43)$$

Откуда получим следующий закон управления:

$$u(t) = -(B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I) x(t). \quad (44)$$

Обозначим член  $u$  вектора состояния как  $K$ :

$$K = (B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I). \quad (45)$$

Квадратная матрица  $P$  является решением уравнения типа Риккати (46) при условии полной управляемости пары матриц  $(A - \beta I, B)$ :

$$(A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q. \quad (46)$$

Симметрическую положительно полуопределенную матрицу  $Q$  можно назначить относительно параметра  $r$ :

$$Q = (10^{-1} \div 10^{-3})rI. \quad (47)$$

**Алгоритм 4.** Синтез регулятора, обеспечивающего качественную экспоненциальную устойчивость линейной непрерывной системе.

1. Проверить пару матриц  $(A, B)$  на полную управляемость.
2. Исходя из требуемых показателей качества (области нормального функционирования системы  $\delta$ , времени переходного процесса  $t_n$  и перерегулирования  $\sigma$ ) рассчитать значения параметров  $\beta$  и  $r$ :

$$t_n = \frac{1}{\beta} \ln(\delta), \quad (48)$$

$$\sigma = \rho e^{\frac{\beta+r}{r} \ln\left(\frac{\beta(\rho+1)}{\rho(r+\beta)}\right)} - (\rho+1) e^{r \ln\left(\frac{\beta(\rho+1)}{\rho(r+\beta)}\right)}. \quad (49)$$

3. Найти матрицу линейных стационарных обратных связей  $K$ :

$$K = (B^T B)^{-1} B^T (A - \beta I). \quad (50)$$

4. Проверить выполнение неравенства (51).

$$(A - BK - \beta I)^T (A - BK - \beta I) - r^2 I \leq 0. \quad (51)$$

При невыполнении неравенства перейти к шагу 5.

5. Назначить симметрическую положительно полуопределенную матрицу  $Q$  и решить относительно матрицы  $P$  уравнение Риккати (52).

$$(A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q. \quad (52)$$

6. Вычислить матрицу линейных стационарных обратных связей  $K$ :

$$K = (B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I). \quad (53)$$

7. Вычислить коэффициент прямой связи  $K_g = -(C(A - BK)^{-1} B)^{-1}$ . (54)

8. Сформировать сигнал управляющего воздействия в виде:

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (55)$$

9. Провести моделирование полученной системы. Оценить достигнутые показатели качества переходного процесса и установившегося режима. При необходимости перейти к шагу 2.

### Пример 8.

Рассмотрим систему вида (1) третьего порядка ( $n = 3$ ), где:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 2 \\ -8 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Требуется обеспечить время переходного процесса в замкнутой системе  $t_n = 1.5$  с, область нормального функционирования системы (отклонение)  $\delta = 5\%$ , перерегулирование  $\sigma$  не более 5%, параметр  $\rho = 1$ .

1. Проверка системы на управляемость.

$$\text{rang } N_c = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -22 \\ 1 & 0 & -34 \end{bmatrix} = 3 = n \Rightarrow \text{система полностью управляема.}$$

2. Расчет параметров  $\beta$  и  $r$ .

$$t_n = \frac{1}{\beta} \ln(\delta) \Rightarrow \beta = \frac{\ln(\delta)}{t_n} = \frac{\ln(0.05)}{1.5} = -1.997.$$

$$\sigma = \rho e^{\frac{\beta+r}{r} \ln\left(\frac{\beta(\rho+1)}{\rho(r+\beta)}\right)} - (\rho+1)e^{r \ln\left(\frac{\beta(\rho+1)}{\rho(r+\beta)}\right)} \Rightarrow r = 0.731.$$

$$\beta + r < 0 \Rightarrow -1.997 + 0.731 < 0.$$

3. Вычисление матрицы К линейных стационарных обратных связей:

$$K = [-8 \quad -1 \quad 1.997].$$

4. Проверка выполнения неравенства (51).

Результирующая матрица должна быть отрицательно полуопределена (все собственные значения матрицы неположительны  $\lambda_i \leq 0, i = 1, n$ ).

$$\text{Результирующая матрица } (A - BK - \beta I)^T(A - BK - \beta I) - r^2 I = \begin{bmatrix} 57.45 & -34.98 & -2.01 \\ -34.98 & 24.44 & 9.99 \\ -2.01 & 9.99 & 19.47 \end{bmatrix}. \text{ Собственные числа: } \lambda_1 = 80.45, \lambda_2 = -0.53, \lambda_3 = 21.44, \text{ откуда}$$

видно, что матрица не является отрицательно полуопределенной. Перейдем к следующему шагу Алгоритма 4.

Необходимо определить симметричную положительно определенную матрицу Q и решить относительно матрицы P уравнение Риккати (52):

5. Выбор матрицы Q и решение матричного уравнения типа Риккати (52).

$$Q = \frac{0.731}{1000} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из множества предложенных решений выберем ту матрицу P, которая является симметричной и положительно определенной:

$$P = \begin{bmatrix} 2.25 & -0.946 & 0.857 \\ -0.946 & 0.398 & -0.359 \\ 0.857 & -0.359 & 0.330 \end{bmatrix}.$$

6. Расчет матрицы линейных стационарных обратных связей К в соответствии с выражением (53).

$$K = [7.395 \quad -6.432 \quad 10.215].$$

7. Расчет матрицы прямой связи  $K_g$  в соответствии с выражением (54).

$$K_g = -0.738.$$

8. Формирование управляющего воздействия вида:

$$u(t) = -0.738g(t) - [7.395 \quad -6.432 \quad 10.215]x(t).$$

9. Моделирование замкнутой системы с полученными коэффициентами регулятора:

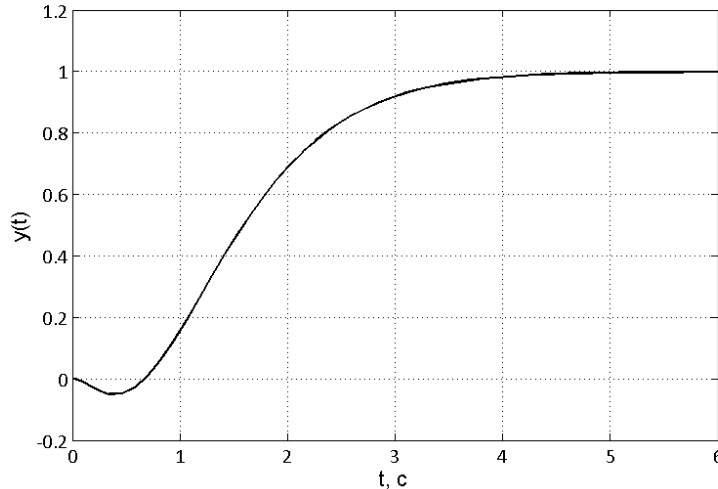


Рис. 12 – График переходного процесса в замкнутой системе с регулятором, синтезированным методом локальной оптимизации.

Из рис. 12 видно, что система не удовлетворяет заданным показателям качества, следовательно, необходимо перейти к шагу 2.

### Синтез регулятора методом локальной оптимизации для дискретной системы

Рассмотрим задачу управления линейным дискретным объектом вида (27). Вывод закона управления аналогичен случаю для непрерывных систем.

**Алгоритм 5.** Синтез регулятора, обеспечивающего качественную экспоненциальную устойчивость линейной дискретной системы.

1. Проверить пару матриц  $(A_d, B_d)$  на полную управляемость.
2. Исходя из интервала дискретности  $T$  и требуемых показателей качества (области нормального функционирования системы  $\delta$ , времени переходного процесса  $t_{\pi}$  и перерегулирования  $\sigma$ ) рассчитать значения параметров  $\beta$  и  $r$ :

$$t_{\pi} = T \log_{\beta}(\delta), \quad (56)$$

$$\sigma = \rho(\beta + r) \frac{\log_{\beta+r} \left( \frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(r+\beta)} \right)}{r} - (\rho + 1)\beta \frac{\log_{\beta+r} \left( \frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(r+\beta)} \right)}{r}. \quad (57)$$

3. Найти матрицу линейных стационарных обратных связей  $K_d$ :

$$K_d = (B_d^T B_d)^{-1} B_d^T (A_d - \beta I). \quad (58)$$

4. Проверить выполнение неравенства (59).

$$(A_d - B_d K_d - \beta I)^T (A_d - B_d K_d - \beta I) - r^2 I \leq 0. \quad (59)$$

При невыполнении перейти к шагу 5.

5. Назначить симметрическую положительно определенную матрицу  $Q$  и решить относительно матрицы  $P$  уравнение Риккати (60):

$$(A_d - B_d K_d - \beta I)^T P (A_d - B_d K_d - \beta I) - r^2 P = -Q. \quad (60)$$

6. Вычислить матрицу линейных стационарных обратных связей  $K_d$ :

$$K_d = (B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P (A_d - \beta I). \quad (61)$$

7. Вычислить коэффициент прямой связи  $K_g = -(C_d (A_d - B_d K_d)^{-1} B_d)^{-1}$ . (62)

8. Сформировать сигнал управляющего воздействия в виде:

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (63)$$

9. Провести моделирование полученной системы. Оценить достигнутые показатели качества переходного процесса и установившегося режима. При необходимости перейти к шагу 2.

### Пример 9.

Рассмотрим систему вида (27) третьего порядка ( $n = 3$ ), где:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9440 & -0.0223 & 0.3977 \\ -0.9021 & 1.3434 & 0.0651 \\ -0.7564 & -0.1106 & 0.8334 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.0201 \\ 0.0057 \\ 0.0944 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Требуется обеспечить время переходного процесса в замкнутой системе  $t_n = 1.5$  с, отклонение  $\delta = 5\%$ , перерегулирование  $\sigma$  не более  $5\%$ , параметр  $\rho = 1$ , интервал дискретности  $T = 0.1$  с.

1. Проверка системы на управляемость.

$$\text{rang } N_c = \text{rang} \begin{bmatrix} 0.0201 & 0.0564 & 0.0783 \\ 0.0057 & -0.0043 & -0.0526 \\ 0.0944 & 0.0628 & -0.0102 \end{bmatrix} = 3 = n \Rightarrow \text{система полностью управляема.}$$

2. Расчет параметров  $\beta$  и  $r$ .

$$t_n = T \log_{\beta}(\delta) \Rightarrow \beta = 0.819.$$

Параметр  $r$  вычислим из уравнения (57) причем:  $0 \leq \beta < 1 - r$ ,  $r = 0.059$ .

3. Вычисление матрицы  $K_d$  линейных стационарных обратных связей:

$$K_d = [-7.92 \quad -0.845 \quad 1.041].$$

4. Проверка выполнения неравенства (59).

Результирующая матрица должна быть отрицательно полуопределена (все собственные значения матрицы неположительны  $\lambda_i \leq 0, i = 1, n$ ).

Результирующая матрица:

$$(A - BK - \beta I)^T (A - BK - \beta I) - r^2 I = \begin{bmatrix} 0.812 & -0.455 & 0.057 \\ -0.455 & 0.278 & 0.032 \\ 0.057 & 0.032 & 0.149 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа:  $\lambda_1 = -0.003, \lambda_2 = 0.169, \lambda_3 = 1.073$ , откуда видно, что матрица не является отрицательно полуопределенной. Следовательно, необходимо назначить симметрическую положительно определенную матрицу  $Q$  и решить относительно матрицы  $P$  уравнение Риккати (60):

5. Выбор матрицы  $Q$  и решение матричного уравнения типа Риккати (60).

$$Q = \frac{0.059}{1000} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из множества предложенных решений выберем ту матрицу  $P$ , которая является симметрической и положительно определенной:

$$P = \begin{bmatrix} 0.136 & -0.071 & 0.021 \\ -0.071 & 0.037 & -0.011 \\ 0.021 & -0.011 & 0.003 \end{bmatrix}.$$

6. Расчет матрицы линейных стационарных обратных связей  $K_d$  в соответствии с выражением (61).

$$K_d = [14.846 \quad -9.766 \quad 11.436].$$

7. Расчет матрицы прямой связи  $K_g$  в соответствии с выражением (62).

$$K_g = 3.839.$$

8. Формирование управляющего воздействия вида:

$$u(t) = 3.839g(t) - [14.846 \quad -9.766 \quad 11.436]x(t).$$

9. Моделирование замкнутой системы с полученными коэффициентами регулятора:

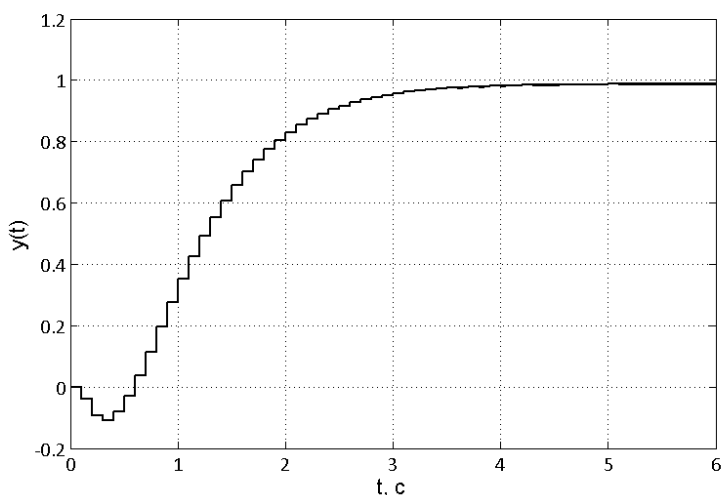


Рис. 13 – График переходного процесса в замкнутой дискретной системе с регулятором, синтезированным методом локальной оптимизации.

Из рис. 13 видно, что система не удовлетворяет заданным показателям качества, следовательно, необходимо перейти к шагу 2.



## Синтез устройства оценки для систем с неполной информацией

**Определение 13.** *Устройством оценки или наблюдателем* называется блок (алгоритм), оценивающий неизмеряемые переменные вектора состояния  $x(t)$  и вектора выхода  $y(t)$  объекта управления ОУ и вырабатывающий на основе модели объекта управления МОУ оценки этих переменных  $\hat{x}(t)$  и  $\hat{y}(t)$  соответственно.

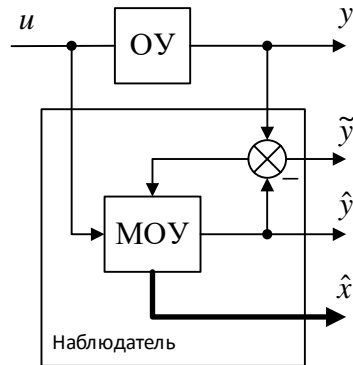


Рис. 14 – Устройство оценки полной размерности.

Управление реализуется на основе ошибки наблюдения:  $\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ .

Необходимо построить наблюдающее устройство, позволяющее восстановить вектор состояния  $x(t)$  непрерывного динамического объекта вида (1).

**Утверждение 5.** Устройство оценки вектора состояния  $x(t)$  линейного непрерывного объекта управления, реализующее алгоритм наблюдения, записываемое в следующем виде:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad (63)$$

где  $\hat{x}(t)$  – вектор состояния устройства оценки,  $A, B, C$  – матрицы описания исходного объекта,  $\dim \hat{x}(t) = \dim x(t) = n$ ,  $L$  – матрица входов устройства оценки, будет обеспечивать сходимость оценки вектора состояния  $\hat{x}(t)$  к вектору состояния  $x(t)$  так, что будет выполняться условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$ , если матрица описания замкнутой системы  $F = A - LC$  будет устойчивой.

Таким образом, требуется найти такую матрицу входов  $L$  размерности  $n \times l$ , которая бы обеспечивала для матрицы описания замкнутой системы  $F$  свойства устойчивости.

**Алгоритм 6.** Синтез устройства оценки полной размерности для линейной непрерывной системы с модальным регулятором.

1. Проверить пару матриц  $(A, C)$  на полную наблюдаемость.
2. По заданным показателям качества назначить пару матриц  $(\Gamma, H)$  эталонной модели из условия полной наблюдаемости этой пары.
3. Найти матрицу преобразования  $M$ , решив матричное уравнение типа Сильвестра:  $M\Gamma - A^T M = -C^T H$ .
4. Вычислить матрицу входов  $L^T = HM^{-1}$ .

5. Найти характеристический полином замкнутой системы и сравнить с эталонным.
6. Сформировать сигнал управляющего воздействия в виде  $u(t) = K_g g(t) - K\hat{x}(t)$ .

На рис. 15 представлена обобщенная схема моделирования наблюдателя третьего порядка.

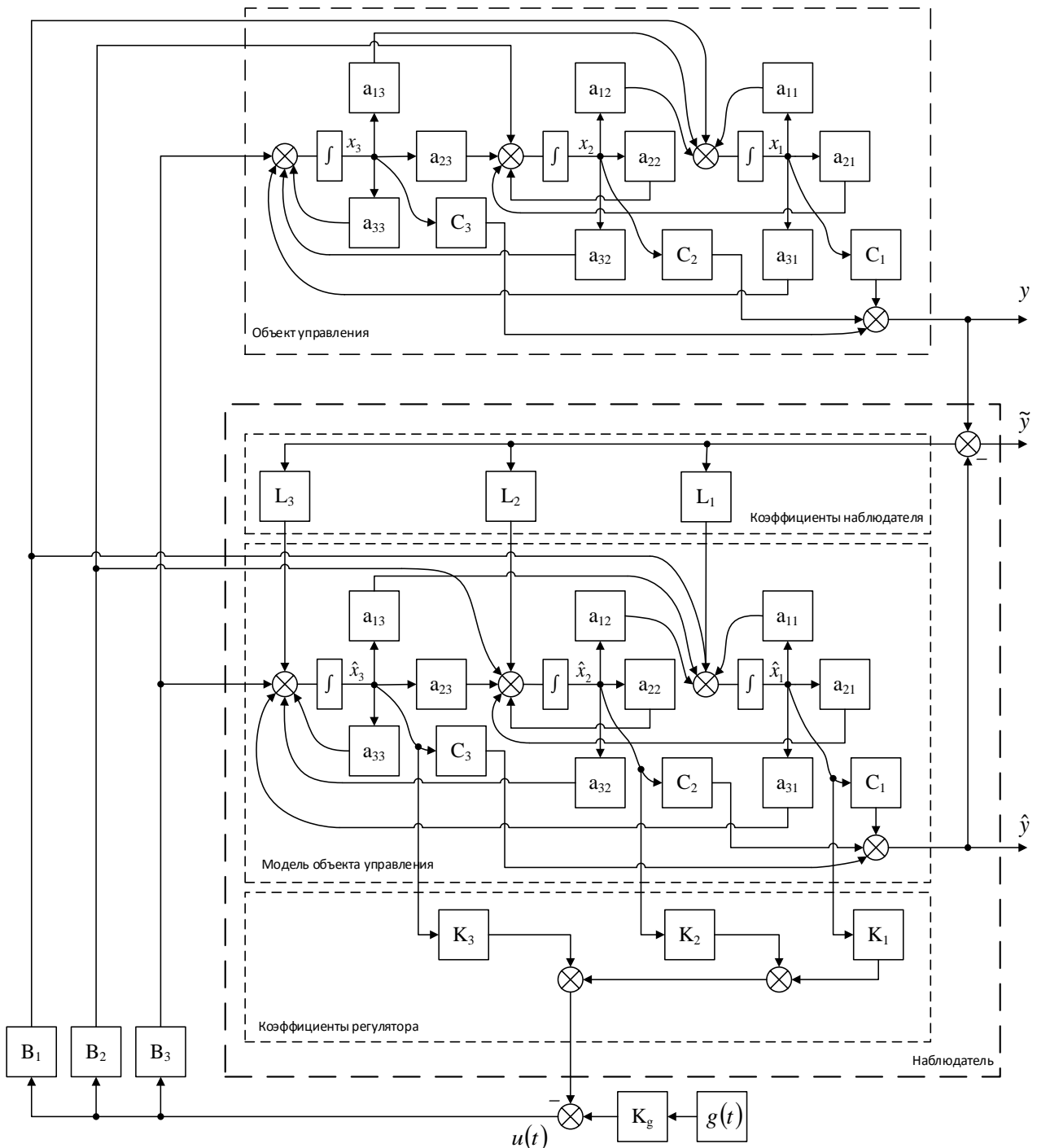


Рис. 15 – Схема моделирования наблюдателя третьего порядка с модальным управлением.

### Пример 10.

Рассмотрим объект управления вида (1) третьего порядка ( $n = 3$ ), где:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -4 \\ 9 & 15 & -8 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0].$$

Требуется синтезировать динамическое наблюдающее устройство для объекта, обеспечивающее сходимость оценки вектора состояния с вектором состояния не более, чем за **0.1 с**.

1. Проверка системы на наблюдаемость.

$$\text{rang } N_o = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -4 \\ 144 & 4 & -24 \end{bmatrix} = 3 = n \Rightarrow \text{система полностью наблюдаема.}$$

2. Формирование эталонной модели.

Для формирования эталонной модели определим параметры желаемого характеристического полинома в соответствии с нормированным временем переходного процесса  $t_n^*$  для системы третьего порядка  $n = 3$ . Нормированное время может быть вычислено из полиномов Ньютона или Баттерворта. При  $n = 3$ :  $t_n^* = 6.2$  с, где  $D_d(s) = s^3 + 3\omega s^2 + 3\omega^2 s + \omega^3$  – желаемый характеристический полином (полином Ньютона третьего порядка).

$$\omega = \frac{t_n^*}{t_n} = \frac{6.2}{0.1} = 62, D_d(s) = s^3 + 186s^2 + 11532s + 238328.$$

Теперь сформируем матрицы эталонной модели с помощью этого полинома:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -238328 & -11532 & -186 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0 \ 0].$$

3. Решение матричного уравнения типа Сильвестра относительно матрицы М.

$$M = \begin{bmatrix} 0.0343 & 0.0005 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0056 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

4. Вычисление матрицы входов L.

$$L^T = HM^{-1} = [210 \ 114560 \ -3350].$$

5. Проверка.

$$F = A - LC = \begin{bmatrix} -190 & 0 & 0 \\ -114550 & 10 & -10 \\ 3350 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$

$\det(sI - F) = s^3 + 186s^2 + 11532s + 238328 = D_d(s)$  – характеристический полином совпадает с эталонным, следовательно коэффициенты наблюдателя выбраны верно.

6. Формирование модального управления.

Управление имеет вид  $u(t) = K_g g(t) - K\hat{x}(t)$ , где коэффициент усиления по прямой связи вычисляется как  $K_g = -C(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}$ , а матрица линейных стационарных обратных связей  $K$  формируется по Алгоритму 3.

$K = [105.1 \quad -267 \quad 58.2]$  при  $t_n = 3$  с,

$K_g = -31.8$ .

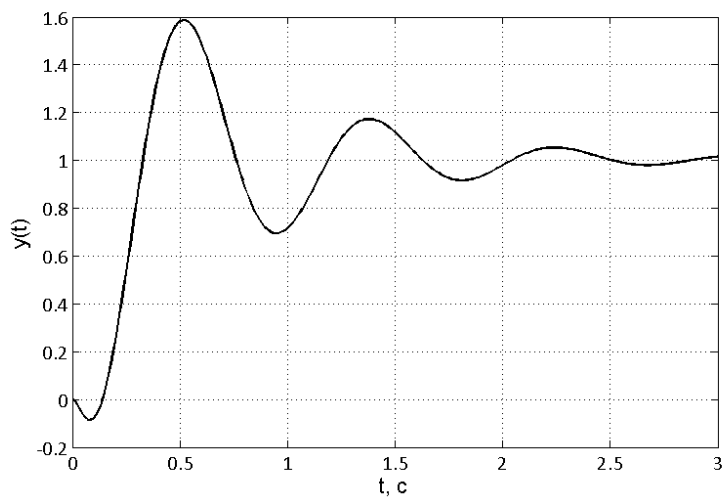


Рис. 16 – График переходного процесса в замкнутой системе.

## Приложение 1. Задание на практическую работу

В работе рассматривается линейный непрерывный объект управления, заданный в виде модели вход-состояние-выход. Параметры объекта указаны в Табл. 1.

Требуется:

1. Проанализировать свойства управляемости, наблюдаемости и устойчивости объекта управления, в соответствии с номером варианта.

2. По заданным величинам времени переходного процесса  $t_{п1}$  и  $t_{п2}$  произвести синтез регуляторов методом модального управления. Привести структурную схему полученной модели.

3. По заданным величинам времени переходного процесса  $t_{п1}$  и  $t_{п2}$  произвести синтез регуляторов методом локальной оптимизации, обеспечивающих качественную экспоненциальную устойчивость замкнутых систем.

4. Построить наблюдатель состояния полной размерности. Использовать наблюдатель в полученных ранее регуляторах, полученных в пунктах 2 и 3 Задания, при допущении, что объект обладает неполной информацией. Привести структурную схему полученной модели.

5. Произвести моделирование в пакетах MATLAB Simulink или Scilab Xcos исходного объекта управления и полученных в пунктах 2-4 систем управления. Привести в отчете схемы моделирования и графики переходных процессов систем, по которым определить время переходных процессов.

6. Перейти к дискретному времени, получив матрицы описания с новыми параметрами. Интервал дискретности выбрать самостоятельно.

7. Выполнить пункты 2-5 для дискретного времени.

8. Выполнить программную реализацию систем управления для дискретного объекта. Привести в отчете листинг программ. Сравнить переходные процессы при программной реализации с результатами моделирования из пункта 7.

9. Сделать выводы по полученной работе.

Табл. 1 – Варианты заданий.

№	$t_{п2} = t_{п1} + 5 c$				№	$t_{п2} = t_{п1} + 10 c$			
	A	B	C	$t_{п1}, c$		A	B	C	$t_{п1}, c$
1	$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -50 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	2.9	2	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	2.2
3	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 2]	1.5	4	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	[1 1]	4.8
5	$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -20 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 3]	3.5	6	$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	6.5
7	$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 -1]	2.6	8	$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 1]	2.8
9	$\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -30 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	1.8	10	$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	10.8
11	$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	4.6	12	$\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	2.6
13	$\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	0.7	14	$\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$	[1 0]	0.9
15	$\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 1]	5.6	16	$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	6.7
17	$\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -15 & 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	2.2	18	$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	[1 3]	8.2
19	$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	6.6	20	$\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	2.6
21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	9.1	22	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 3]	2.1
23	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	5.5	24	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	[1 0]	4.5
25	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 1]	1.2	26	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	[1 1]	6.2
27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix}$	[12 0]	7.6	28	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	8.6
29	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	3.3	30	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	1.3
31	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	3.5	32	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	6.5
33	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	[1 0]	7.3	34	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	[1 0]	9.3

## Приложение 2. Примеры команд для вычислений в среде MATLAB

### Основные команды MATLAB:

```
%задание матрицы A
A = [0 1 2; 0 -1 3; 2 1 -1]
```

Результат:

```
A =
    0     1     2
    0    -1     3
    2     1    -1
```

```
%вычисление обратной матрицы A-1
inv(A)
```

Результат:

```
ans =
-0.2000    0.3000    0.5000
 0.6000   -0.4000         0
 0.2000    0.2000         0
```

```
%вычисление транспонированной матрицы AT
A'
```

Результат:

```
ans =
    0     0     2
    1    -1     1
    2     3    -1
```

```
%вычисление собственных значений матрицы A
eig(A)
```

Результат:

```
ans =
 2.3539
-2.8774
-1.4765
```

```
%вычисление матричной экспоненты
expm(A)
```

Результат:

```
ans =
 4.4551    2.7486    5.0067
 2.9426    2.1970    3.8319
 3.5354    2.2582    4.1587
```

```
%задание единичной матрицы I порядка n
n = 3;
I = eye(n)
```

Результат:

```
I =
    1     0     0
    0     1     0
    0     0     1
```

```
%задание символьной переменной s
syms s;
%решение уравнения относительно символьной переменной s
solve(s^2 + 2*s + 1, s)
```

Результат:

```
ans =
-1
-1
```

```

%раскрытие скобок в выражении
expand((s - 1)*(s + 1))

```

Результат:

```

ans =
s^2 - 1

```

```

%упрощение выражения
expression = (s^3 + 3*s^2 + 2*s) / (s * (s + 1))
simplify(expression)

```

Результат:

```

ans =
s + 2

```

### Работа с системами управления:

```

%задание системы в виде «вход-выход»
s2 = tf([1 0 1], [2 4 7 0])

```

Результат:

```

s2 =
      s^2 + 1
-----
2 s^3 + 4 s^2 + 7 s

```

```

%задание матриц В и С
В = [0; 0; 1]; С = [1 0 0];
%задание системы в виде «вход-состояние-выход»
s1 = ss(А,В,С,0)

```

Результат:

```

s1 =
a =
      x1  x2  x3
x1  0   1   2
x2  0  -1   3
x3  2   1  -1

b =
      u1
x1  0
x2  0
x3  1

c =
      x1  x2  x3
y1  1   0   0

d =
      u1
y1  0

```

```

%переход от модели «вход-выход» к модели «вход-состояние-выход»
%в канонической управляемой форме
[А,В,С,Д] = tf2ss([1 0 1], [2 4 7 0])

```

Результат:

```

А =
-2.0000  -3.5000   0
 1.0000   0       0
 0        1.0000   0

В =
1
0
0

С =
0.5000   0   0.5000

```



```

%переход от модели «вход-состояние-выход» к модели «вход-выход»
%a – коэффициенты полинома числителя передаточной функции
%b – коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции
[a, b] = ss2tf(A,B,C,0)

```

Результат:

```

a =
      0      0.5000      0      0.5000
b =
  1.0000  2.0000  3.5000      0

```

### Определение свойств управляемости и наблюдаемости:

```

%вычисление матрицы управляемости Nc
Nc = ctrb(s1);
%вывод ранга матрицы управляемости
disp(rank(Nc));

%вычисление матрицы наблюдаемости No
No = obsv(s1);
%вывод ранга матрицы наблюдаемости No
disp(rank(No));

```

### Приведение системы к минимальной реализации:

```

[slmin,M] = minreal(s1)
%M – матрица преобразования координат
%slmin – минимальная реализация системы s1

```

### Решение матричного уравнения типа Сильвестра вида (38):

```

M = sylv(-A,G,-B*N);
%вычисление матрицы K линейных стационарных обратных связей
K = N * inv(M);

```

### Нахождение дискретных матриц описания модели:

```

T = 0.1;
Ad = 0;
Bd = 0;
for i=0:1:10,
    Ad = Ad + ((A^i)*(T^i)/factorial(i));
end
for i=1:1:10,
    Bd = Bd + (A^(i-1)*(T^i)/factorial(i)) * B;
end
Cd = C;

```

Программная реализация дискретной системы третьего порядка с наблюдателем полной размерности при единичном входном воздействии:

```

g = 1;
T = 0.1;
Kd = [10 -15 12];
Kg = -inv(Cd*inv(Ad-Bd*Kd)*B);
for m=0:T:1000,

%формирование вектора состояния объекта
xdot(1,m) = Ad(1,1)*x(1,m)+Ad(1,2)*x(2,m)+Ad(1,3)*x(3,m)+Bd(1,m)*u(1,m);
xdot(2,m) = Ad(2,1)*x(1,m)+Ad(2,2)*x(2,m)+Ad(2,3)*x(3,m)+Bd(2,m)*u(2,m);
xdot(3,m) = Ad(3,1)*x(1,m)+Ad(3,2)*x(2,m)+Ad(3,3)*x(3,m)+Bd(3,m)*u(3,m);

%формирование вектора состояния наблюдателя
xdoto(1,m)=

Ad(1,1)*xo(1,m)+Ad(1,2)*xo(2,m)+Ad(1,3)*xo(3,m)+Bd(1,m)*u(1,m)+L(1,m)*e(m);
xdoto(2,m)=

Ad(2,1)*xo(1,m)+Ad(2,2)*xo(2,m)+Ad(2,3)*xo(3,m)+Bd(2,m)*u(2,m)+L(2,m)*e(m);
xdoto(3,m)=

Ad(3,1)*xo(1,m)+Ad(3,2)*xo(2,m)+Ad(3,3)*xo(3,m)+Bd(3,m)*u(3,m)+L(3,m)*e(m);

%формирование сигналов управления
u(1,m) = -Kd(1)*xo(1,m)+g*Kg;
u(2,m) = -Kd(2)*xo(2,m)+g*Kg;
u(3,m) = -Kd(3)*xo(3,m)+g*Kg;

%формирование выходов объекта и наблюдателя, вычисление ошибки наблюдения
yo(m) = Cd(1)*xo(1,m)+Cd(2)*xo(2,m)+Cd(3)*xo(3,m);
y(m) = Cd(1)*x(1,m)+Cd(2)*x(2,m)+Cd(3)*x(3,m);
e(m) = y(m) - yo(m);

%смещение значений производных на один такт
x(1,m) = xdot(1,m);
x(2,m) = xdot(2,m);
x(3,m) = xdot(3,m);
xo(1,m) = xdoto(1,m);
xo(2,m) = xdoto(2,m);
xo(3,m) = xdoto(3,m);
end

%построение графиков переходных процессов объекта и наблюдателя
plot(m, yo, m, y);

```

### Приложение 3. Решение уравнений в среде Mathcad

Mathcad позволяет решать системы уравнений. Максимальное число уравнений и переменных не должно превышать 50 штук. Для решения системы уравнений необходимо:

1. Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений, поскольку Mathcad решает при помощи итерационных методов.
2. Напечатать ключевое слово `Given`, оно указывает Mathcad, что далее следует система уравнений.
3. Ввести уравнения и неравенства в любом порядке. Следует использовать сочетание клавиш `[ctrl] + [=]` для печати символа равенства `=`. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов `<`, `>`, `≤` и `≥`.
4. Ввести выражение, включающее функцию `Find`, например `a:= Find(x, y)`, которая возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Продемонстрируем решение уравнений в среде Mathcad на примере решения матричного уравнения типа Риккати.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 2 \\ -8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C := (1 \ 0 \ 0)$$

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ro := 1$$

$$tp := 1.5$$

$$\sigma := 0.05$$

$$\delta := 0.05$$

$$\beta := \frac{\ln(\delta)}{tp} = -1.997$$

$$A0 := A - \beta \cdot I$$

$$r := 0.1$$

Given

$$\sigma = r_0 \cdot \exp \left[ \left( \frac{\beta + r}{r} \right) \cdot \ln \left[ \frac{\beta \cdot (r_0 + 1)}{r_0 \cdot (r + \beta)} \right] \right] - (r_0 + 1) \cdot \exp \left[ \frac{\beta}{r} \cdot \ln \left[ \frac{\beta \cdot (r_0 + 1)}{r_0 \cdot (r + \beta)} \right] \right]$$

$$r := \text{Find}(r) = 0.731$$

$$K := (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot A_0 = (-8 \quad -1 \quad 1.997)$$

$$\text{test} := (A_0 - B \cdot K)^T (A_0 - B \cdot K) - r^2 \cdot I$$

$$\text{eigenvals}(\text{test}) = \begin{pmatrix} 80.446 \\ 21.44 \\ -0.534 \end{pmatrix}$$

$$Q := 0.001 \cdot r \cdot I$$

$$P := 0.5 \cdot r \cdot I$$

Given

$$P = P^T$$

$$\text{eigenvals}(P) > 0$$

$$\text{eigenvals} \left( A_0 - B \cdot ((B^T \cdot P \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot A_0) \right) < 0$$

$$\left( A_0 - B \cdot ((B^T \cdot P \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot A_0) \right)^T \cdot P \cdot \left( A_0 - B \cdot ((B^T \cdot P \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot A_0) \right) - r^2 \cdot P = -Q$$

$$P := \text{Find}(P) = \begin{pmatrix} 2.25 & -0.946 & 0.857 \\ -0.946 & 0.398 & -0.359 \\ 0.857 & -0.359 & 0.33 \end{pmatrix}$$

$$K := (B^T \cdot P \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P \cdot A_0 = (7.395 \quad -6.432 \quad 10.215)$$

$$K_g := -(C(A - B \cdot K)^{-1} \cdot B)^{-1} = -0.738$$

## Список литературы

1. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. / Под ред. Ушакова А.В. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 323 с.
2. Бобцов А.А., Болтунов Г.И., Быстров С.В., Григорьев В.В. Управление непрерывными и дискретными процессами / СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 175 с.
3. Григорьев В.В., Быстров С.В., Наумова А.К., Рабыш Е.Ю., Черевко Н.А. Использование условий качественной экспоненциальной устойчивости для оценки динамических процессов // Известия вузов. Приборостроение. 2011, №6, с. 24-30.
4. Григорьев В.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А. Современная теория систем управления / СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 260 с.
5. Рабыш Е.Ю., Григорьев В.В. Конструирование регуляторов на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Труды IX Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». 2012, с. 888-895.
6. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы / СПб: Питер, 2005. – 336 с.

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## **КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года автоматике и телемеханики) была образована в 1945 году как подразделение основанного в тот же год факультета Электроприборостроения ЛИТМО и называлась кафедрой Элетроприборостроения (№80). Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и первого декана факультета Электроприборостроения профессора Марка Львовича Цуккермана. В отличие от существовавших к тому моменту кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина), на кафедру автоматике и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений.

Осенью 1945 года кафедра провела первый набор студентов по специальности электроприборостроение. В 1947–м году название кафедры было изменено, и она стала называться кафедрой Автоматике и телемеханики (№80 вплоть до XX–го съезда КПСС). Первый выпуск инженеров–электромехаников по специальности «приборы автоматике и телемеханики» состоялся в 1948 году и составил 17 человек.

Профессор М.Л. Цуккерман руководил кафедрой с 1945 по 1959 год. К своей работе кафедра приступила, имея преподавательский состав, включавший профессора Д.И. Зорина, доцентов Е.А. Танского и Р.И. Юргенсона и заведующего лабораторией А.А. Мезерина. В 50-е годы в преподавательский состав кафедры вошли профессор А.А. Кампе-Немм, доцент Г.А. Тацитов, а также старшие преподаватели В.А. Борисов, В.Г. Новиков и В.В. Соколов. К концу 50-х годов преподавательский состав пополнился выпускниками ЛИТМО доцентом Н.М. Яковлевым, старшими преподавателями Л.Т. Никифоровой, Н.М. Перевозчиковым, Ю.Б. Ганту, ассистентом А.М. Шпаковым, а также доцентом Б.А. Арефьевым.

В 1955 году при кафедре образована научно-исследовательская лаборатория (НИЛ). В этот период основными направлениями научно-исследовательских работ являлись задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 года по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана, выпускник кафедры Автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) 1936 года, доцент Евфимий Аполлонович Танский. За время его руководства профессорско-преподавательский состав пополнился старшим преподавателем Л.Л. Бориной, доцентами А.И. Новоселовым и И.П. Пальтовым, пришедшими из промышленности и высших военных учебных заведений, а также выпускниками кафедры, успешно закончившими обучение в ее аспирантуре, доцентами В.Н. Дроздовым, А.В. Ушаковым, В.А. Власенко, и ассистентом И.Н. Богоявленской. В этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты Б.А. Арефьев и Р.И. Юргенсон. В научно-исследовательской работе на кафедре произошел поворот к проблемам автоматизации оптико-механического приборостроения.

С 1970 по 1990 год кафедрой руководил известный в стране специалист в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктор технических наук, профессор Юрий Алексеевич Сабинин. Коллектив преподавателей пополнился новым отрядом выпускников ее аспирантуры: доцентами Ю.Л. Тихоновым, В.В. Лаврентьевым, В.В. Григорьевым, В.В. Хабаловым, Л.С. Громовой, В.И. Бойковым, С.В. Быстровым, А.Б. Бушуевым, А.Н. Коровьяковым, И.В. Мирошником, Ю.П. Котельниковым, Г.И. Болтуновым, старшим преподавателем И.П. Салмыгиным. Из промышленности и других подразделений института пришли на кафедру доценты И.Ю. Рогинский, П.В. Николаев, И.П. Болтунов. В период с 1970-го по 1990-й защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты И.П. Пальтов и В.В. Григорьев.

Новый облик теории управления 1970 годов, внедрение метода пространства состояний и вычислительной техники, повышение математического уровня научных исследований нашли отражение в научных разработках кафедры, многочисленных трудах и монографиях. В эти годы интенсивно разрабатываются проблемы теории многомерных динамических систем, качественная теория устойчивости, методы согласованного и многорежимного управления, положено начало теоретическим работам в области робототехники. Научное руководство перечисленными работами осуществляли профессора кафедры Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В. Ушаков, В.В. Григорьев и И.В. Мирошник.

С 1995-го года по 2010-й кафедрой руководил ее воспитанник доктор технических наук, профессор Валерий Владимирович Григорьев, по инициативе которого в 2001-м году кафедра получила название кафедры «Систем управления и информатики». В эти годы профессорско-преподавательский состав пополнился профессором Е.Ф. Очиным (1993-1996 годы), а также выпускниками аспирантуры ИТМО В.В. Черноусовым, А.П. Баевым, В.О. Никифоровым, М.С. Чежиным, А.В. Лямыным, А.А. Бобцовым и К.А. Сергеевым.

Продолжала эффективно работать система подготовки кадров высшей квалификации, диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук защитили В.Н. Дроздов, И.В. Мирошник, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков, А.И. Скалон, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов. Помимо традиционной подготовки инженеров-электриков была начата подготовка бакалавров по направлению «Управление и автоматизация». С

1994 года существенно расширились международные контакты кафедры, участие в международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. Профессора кафедры В.В. Григорьев, И.В. Мирошник, А.В. Ушаков, а позднее и В.О. Никифоров стали действительными членами (академиками) Международной Академии нелинейных наук.

В феврале 2010 года заведующим кафедрой Систем управления и информатики был избран выпускник кафедры 1996-го года, директор мегафакультета компьютерных технологий и управления, доктор технических наук, профессор Алексей Алексеевич Бобцов. Также А.А. Бобцов является председателем Совета молодых ученых и специалистов при Правительстве Санкт-Петербурга, действительным членом академии Навигации и управления движением и членом научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации.

В последние годы профессорско-преподавательский состав кафедры пополнился молодыми кадрами: доцентами Кремлевым А.С., Чепинским С.А. (выпуска кафедры 2002-го года), Дударенко Н.А., Нуйей (Осипцевой) О.С., Николаевым Н.А., Слитой О.В. (выпуска кафедры 2003-го года), Герасимовым Д.Н. (выпуска кафедры 2005-го года), Арановским С.В., Блинниковым А.А. (выпуска кафедры 2006-го года), Сержантовой (Поляковой) М.В. (выпуска кафедры 2007-го года), Колюбиным С.А. (выпуска кафедры 2010-го года), профессором Пыркиным А.А. (выпуска кафедры 2008-го года), ассистентами Шаветовым С.В., Капитоновым А.А. (выпуска кафедры 2011-го года), Ведяковым А.А. (выпуска кафедры 2012-го года). К участию в подготовке магистров подключились профессора из Санкт-Петербургских университетов Фрадков А.Л., Андриевский Б.Р., Тертычный В.Ю. и Фуртат И.Б.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области автоматических систем и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI-го столетия. При кафедре проводятся ежегодные научные «Крещенские чтения», имеющие статус городского семинара по теории управления. В 2012 году на кафедре был проведен первый ежегодный семинар под названием «Пальтовские чтения», посвященный памяти доктора технических наук И.П. Пальтова, а с 2014 года начались серии ежегодных семинаров «Юбилейные чтения» и «Апрельские чтения».

Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и трудах международных конференций. Сотрудниками кафедры опубликовано более 100 монографий и учебников, 200 методических и учебных пособий, 2500 статей, из них более 280 в журналах академий наук, около 200 статей и докладов в зарубежных научных изданиях. Ученые кафедры являются авторами более 550 изобретений, постоянно принимают участие в работе российских и зарубежных семинаров, конференций и конгрессов. Кафедра поддерживает контакты с 20 техническими зарубежными университетами.



Беляев Михаил Евгеньевич  
Павлов Андрей Сергеевич  
Шаветов Сергей Васильевич

**Методические указания к выполнению  
практической работы по курсу «Управление  
непрерывными и дискретными процессами»**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати 17.06.2016

Заказ №3714

Тираж 50

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49