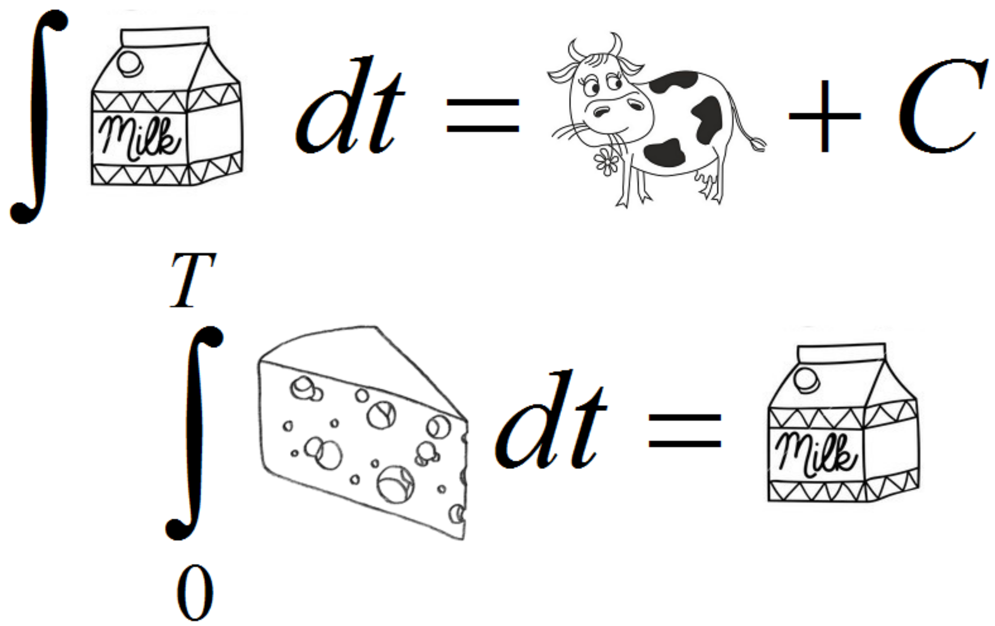
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Кафедра высшей математики

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика"

3 модуль



Санкт-Петербург
2016

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А. Типовой расчет по математическому анализу для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика". 3 модуль. Учебно-методическое пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 25 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов бакалавриата первого курса по направлению подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика".

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 28.06.2016, протокол №4.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Содержание

ЧАСТЬ 1. Методические указания

В данном пособии предлагаются методические указания и задания типовых расчетов для студентов первого курса, обучающихся по направлению подготовки бакалавров “Прикладная математика и информатика”.

Перед решением каждого задания студенту рекомендуется изучить соответствующие разделы литературы [1,2]. В конце каждого задания приведены вопросы для самоконтроля, на которые студент должен знать ответ при защите типовых расчетов.

Задание 1. Площадь плоской фигуры

В первом задании требуется найти площадь плоской фигуры, ограниченной некоторой кривой (или кривыми). В пункте а) кривые заданы в полярных координатах или неявно. Если кривые, определяющие границу фигуры, заданы неявно, то требуется перейти к полярным координатам. В пункте б) кривые заданы параметрически или неявно, в последнем случае требуется перейти к их параметрическому заданию. Рекомендуется изучить [1: гл. 6, §§ 8, 9; гл. 7, §§ 1, 2; 2: гл. 2, § 7].

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2\left(x^2+y^2\right)^3=4y^4, \quad x^2+y^2=3, \quad x=0, \quad y=0$$

$$\left(x^2\left(x^2+y^2\right)^3\geqslant 4y^4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\right).$$

☺ Перейдем к полярным координатам. В уравнениях $x^2\left(x^2+y^2\right)^3=4y^4$ и $x^2+y^2=3$ положим

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi; \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда получим задание кривых в полярных координатах:

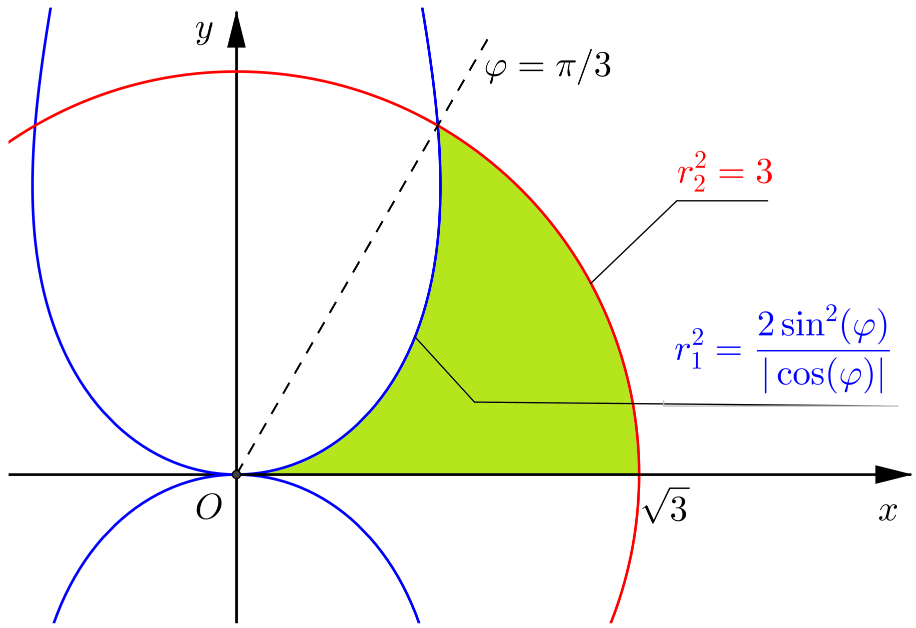
$$r_1^2 = \frac{2\sin^2\varphi}{|\cos\varphi|}, \quad r_2^2 = 3.$$

Найдем точку пересечения этих кривых:

$$\frac{2\sin^2\varphi}{|\cos\varphi|} = 3,$$

откуда $|\cos\varphi| = 1/2$. Так как нас интересует только точка, лежащая в первой четверти, то получим $\varphi = \pi/3$.

Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке.



Искомая площадь будет равна разности интегралов:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} r_2^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} r_1^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} 3d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} \frac{2\sin^2\varphi}{\cos\varphi} d\varphi.$$

Первое слагаемое равно

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} 3d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислим второе слагаемое:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3}\frac{2\sin^2\varphi}{\cos\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-\int\limits_0^{\pi/3}\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/3}-\sin\varphi\Big|_0^{\pi/3}=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

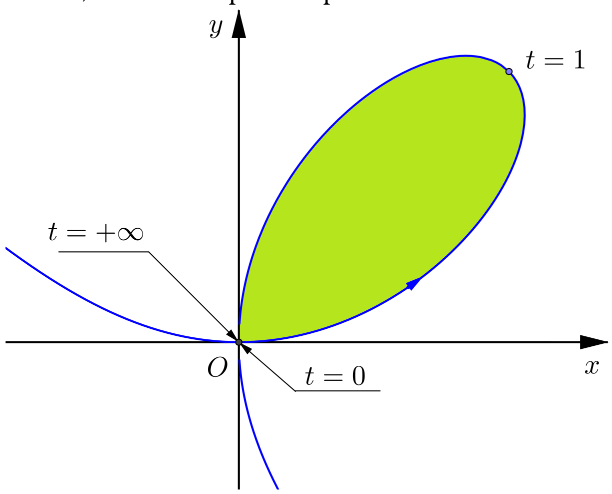
Тогда ответ: $S=\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{2}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. ☻

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей линии $x^3+y^3=3axy$, $a>0$ (лист Декарта).

☺ Перейдем к параметрическому заданию, взяв за параметр $t=\dfrac{y}{x}$. Отсюда $y=tx$, и справедливо равенство $x^3+x^3t^3=3ax^2t$. Тогда получаем параметрическое задание кривой:

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Кривая описывает петлю, если параметр t меняется от 0 до $+\infty$.



Площадь петли будем искать по формуле [2: гл. 2]:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|y\left(t\right)x'\left(t\right)-x\left(t\right)y'\left(t\right)\right|dt.$$

Найдем производные

$$x'\left(t\right)=\frac{3a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2},\quad y'\left(t\right)=\frac{3at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}.$$

Тогда

$$y(t)\,x'(t) - x(t)\,y'(t) = -\frac{9a^2t^2}{\left(1+t^3\right)^2}$$

и

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{9a^2t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt = -\left.\frac{3a^2}{2\left(1+t^3\right)}\right|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}.$$

Ответ: $S = 3a^2/2$. ☻

Задание 2. Длина кривой

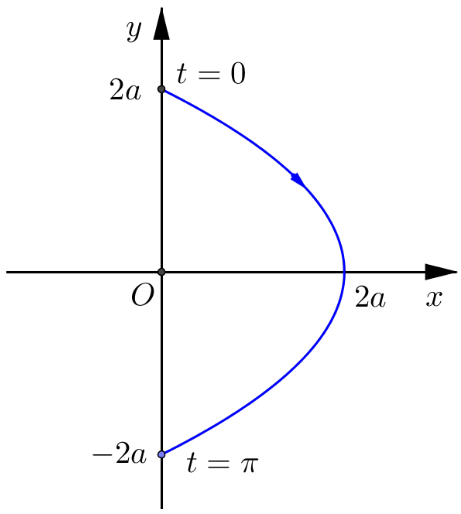
Во втором задании нужно найти длину кривой. В пункте а) кривая – плоская и задана параметрически или в полярных координатах (если кривая образует петлю, то нужно найти длину петли), в пункте б) кривая в трехмерном пространстве задается как пересечение двух поверхностей. Рекомендуется изучить [1: гл. 7, § 3; 2: гл. 2, § 7].

Пример 3. Найти длину кривой, заданной параметрически:

$$x = 2a\sin^2 t, \quad y = 2a\cos t, \quad a > 0.$$

☺ Заметим, что при изменении параметра t от 0 до $\pi/2$ переменная x будет расти от 0 до $2a$, а переменная y убывать от $2a$ до 0, т.е. точка (x, y) будет описывать кривую, соединяющую точки $(0, 2a)$ и $(2a, 0)$.

Аналогично, при изменении параметра от $\pi/2$ до π точка (x, y) опишет дугу, симметричную первой относительно оси OY, от точки $(2a, 0)$ до точки $(0, -2a)$. При дальнейшем изменении параметра до 2π точка (x, y) вернется в исходную по уже полученной траектории. То есть всю кривую можно получить, если изменять параметр t от 0 до π.



Длину кривой будем вычислять по формуле

$$L = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где $t_0 = 0$ и $t_1 = \pi$. Вычислим подынтегральное выражение:

$$x'(t) = 4a \sin t \cos t, \quad y'(t) = -2a \sin t,$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{16a^2 \sin^2 t \cos^2 t + 4a^2 \sin^2 t} = 2a\left|\sin t\right| \sqrt{4\cos^2 t + 1} =$$
$$= 2a \sin t \sqrt{4\cos^2 t + 1}.$$

Последнее равенство верно, так как $\sin t \geqslant 0$ при $t \in [0, \pi]$. Тогда

$$L = 2a \int\limits_0^{\pi} \sin t \sqrt{4\cos^2 t + 1} dt = \begin{pmatrix} 2\cos t = z \\ -2\sin t dt = dz \end{pmatrix} =$$
$$= -a \int\limits_2^{-2} \sqrt{z^2 + 1} dz = 2a \int\limits_0^2 \sqrt{z^2 + 1} dz =$$
$$= a\left(z\sqrt{z^2+1} + \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)\right)\Big|_0^2 = a\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right).$$

Ответ: $L = 2a\sqrt{5} + a\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$. ☻

Пример 4. Найти длину кривой, заданной системой уравнений

$$9y^2 + 8z^2 = 8x^2, \quad (x - z)^2 = 3a^3(x + z), \quad 0 \leqslant y \leqslant a, \quad a > 0.$$

☺ Эта кривая задана, как линия пересечения двух поверхностей. Для вычисления длины кривой зададим ее параметрически.

Из второго уравнения получим $x+z=\dfrac{(x-z)^2}{3a^3}$. Тогда из первого уравнения

$$9y^2=8\,(x-z)\,(x+z)=\frac{8\,(x-z)^3}{3a^3}$$

или

$$\frac{27}{8}a^3y^2=(x-z)^3\,.$$

Положим $\dfrac{27}{8}a^3y^2=t^3$, откуда $y=\sqrt{\dfrac{8}{27a^3}}t^{3/2}$ и $0\leqslant t\leqslant\dfrac{3}{2}a^{5/3}$. Тогда $x-z=t$ и $x+z=\dfrac{(x-z)^2}{3a^3}=\dfrac{t^2}{3a^3}$. Решая эту систему, получим $x=\dfrac{t^2}{6a^3}+\dfrac{t}{2}$ и $z=\dfrac{t^2}{6a^3}-\dfrac{t}{2}$.

Итак, параметрические уравнения кривой:

$$x=\frac{t^2}{6a^3}+\frac{t}{2},\quad y=\sqrt{\frac{8}{27a^3}}t^{3/2},\quad z=\frac{t^2}{6a^3}-\frac{t}{2},\quad t\in\left[0,\,\frac{3}{2}a^{5/3}\right].$$

Отсюда

$$\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2=\left(\frac{t}{3a^3}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27a^3}}t^{1/2}\right)^2+\left(\frac{t}{3a^3}-\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{2t^2}{9a^6}+\frac{1}{2}+\frac{2t}{3a^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{4t^2}{9a^6}+1+\frac{4t}{3a^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{3a^3}+1\right)^2.$$

Тогда

$$L=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{3}{2}a^{5/3}}\left(\frac{2t}{3a^3}+1\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{3a^3}+t\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}a^{5/3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4}a^{1/3}+\frac{3}{2}a^{5/3}\right)=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(a^{1/3}+2a^{5/3}\right).$$

Ответ: $L=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\left(a^{1/3}+2a^{5/3}\right)$. ☻

Задание 3. Сходимость несобственных интегралов

В третьем задании требуется исследовать несобственные интегралы на сходимость. Если подынтегральная функция меняет знак на промежутке интегрирования, то в случае сходимости интеграла требуется определить тип сходимости: абсолютная или условная. Рекомендуется изучить [1: гл. 8; 2: гл. 3].

Будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится условно, если он сходится, но интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^{-1}\right)}{\sqrt{x^{1/2}+x^{-1/2}}}dx.$

☺ Заметим, что подынтегральная функция положительна на промежутке $(0,+\infty)$. Сделаем замену переменной по формуле $x=\frac{1}{t}$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^{-1}\right)}{\sqrt{x^{1/2}+x^{-1/2}}}dx = \int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{dt}{t^{7/4}}.$$

В этом интеграле две особые точки $t=0$ и $t=+\infty$. Следуя определению несобственного интеграла с двумя особыми точками, представим его в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$$

и исследуем сходимость каждого интеграла в отдельности.

Рассмотрим первый интеграл. При $t\to 0+$ выполняется соотношение

$$\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1}{t^{7/4}} \sim \frac{t}{t^{7/4}} = \frac{1}{t^{3/4}}.$$

Так как $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{3/4}}$ сходится, то по признаку сравнения первый интеграл тоже сходится.

Во втором интеграле особая точка $t = +\infty$. Так как

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}} = 0,$$

то можно найти такое значение t_0, что при $t \geqslant t_0$ будет выполняться неравенство

$$0 < \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}} < 1.$$

Следовательно, для этих значений t будет справедлива оценка подынтегральной функции:

$$0 < \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}} \cdot \frac{1}{t^{7/4}} < \frac{1}{t^{7/4}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^{7/4}}$ сходится, то по признаку сравнения второе слагаемое в сумме тоже сходится.

Следовательно, исходный интеграл сходится. ☻

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^\infty \left(1 - e^{\sin x/x}\right)\sqrt{x}dx.$

☺ Подынтегральная функция не определена в нуле, но ее предел при $x \to 0$ равен нулю, значит, точка $x = 0$ не является особой, и интеграл надо исследовать только на бесконечности.

При $x \to +\infty$ величина $\frac{\sin x}{x}$ – бесконечно малая, Поэтому, используя формулу Маклорена, подынтегральную функцию можно представить в виде суммы

$$\left(1 - e^{\frac{\sin x}{x}}\right)\sqrt{x} = \left(1 - \left(1 + \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right)\right)\sqrt{x} = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{\sin^2 x}{x^{3/2}}\right).$$

Интеграл от функции $O\left(\frac{\sin^2 x}{x^{3/2}}\right)$ сходится абсолютно, так как модуль этой функции оценивается сверху неотрицательной функцией, интеграл от которой сходится:

$$\left|O\left(\frac{\sin^2 x}{x^{3/2}}\right)\right| \leqslant \frac{C}{x^{3/2}}.$$

Воспользуемся теоремой о том, что если подынтегральную функцию можно представить в виде суммы двух функций таких, что интеграл от второй сходится абсолютно, то исходный интеграл расходится или сходится условно или абсолютно одновременно с интегралом от первой функции. Значит задача сводится к исследованию сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится по признаку Дирихле: первообразная от функции $\sin x$ ограничена, а функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ стремится к нулю, монотонно убывая.

Исследуем его абсолютную сходимость. Для этого оценим модуль подынтегральной функции:

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}.$$

Интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}dx$ сходится по признаку Дирихле, а интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ расходится. Значит $\int\limits_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx$ расходится, откуда следует, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$, а значит и исходный интеграл сходятся условно. ☻

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-x}}$.

☺ Интеграл имеет две особые точки $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому представим его в виде суммы двух интегралов: $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^{1/4} + \int\limits_{1/4}^1$.

Для исследования первого слагаемого преобразуем и оценим на промежутке $(0, 1/4]$ подынтегральную функцию:

$$\left|\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-x}}\right| = \left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\frac{1}{x^{1/6}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} \leqslant \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{1/6}}.$$

$\Big($Мы воспользовались тем, что на данном промежутке выполняется неравенство $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, следовательно, будет справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} \leqslant \sqrt[3]{2}.\Big)$

Интеграл от мажоранты сходится, следовательно, исходный интеграл сходится абсолютно.

Теперь преобразуем и оценим подынтегральную функцию на промежутке $[1/4, 1)$:

$$\left|\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-x}}\right| = \left|\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^{1/6}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}\right| \leqslant \frac{2^{2/3}}{(1-x)^{1/3}}.$$

$\Big($Воспользовались оценками $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, $\frac{1}{x^{1/6}} \leqslant \frac{1}{(1/4)^{1/6}} = 2^{1/3}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1-x}} \leqslant \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{1}}}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{2^{1/3}}{(1-x)^{1/3}}.\Big)$

Интеграл $\int\limits_{1/4}^{1}\frac{2^{2/3}}{(1-x)^{1/3}}$ сходится, значит второй интеграл в сумме сходится абсолютно. Следовательно, абсолютно сходится и исходный интеграл. ☻

Пример 8. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$

☺ Интеграл имеет одну особую точку $x = 0$. Сделаем замену переменной $x = \frac{1}{t^2}$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int\limits_1^{+\infty} t\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{t^2}\sin t dt.$$

При $t \to +\infty$ выполнено $\frac{1}{t^2} \to 0$, поэтому представим гиперболический синус по формуле Маклорена:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

Тогда

$$t\operatorname{sh}\frac{1}{t^2}\sin t = t\sin t\left(\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right) = \frac{\sin t}{t} + \sin t \cdot o\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Аналогично исследованиям в примере 2 получим, что интеграл от первого слагаемого сходится условно, а от второго – абсолютно, поэтому данный интеграл сходится условно. ☻

Пример 9. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x+5}dx.$

☺ В точке $x = 0$ вычислим предел подынтегральной функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x+5} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2x}{x+5} = 0.$$

Отсюда следует, что функция в окрестности нуля ограничена, и ноль не является особой точкой интеграла.

Поэтому исследуем этот интеграл только на бесконечности. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x+5} = \operatorname{arctg}2,$$

то выполняется соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x+5} \sim \frac{\operatorname{arctg}2}{\sqrt{x}}$$

при $x \to +\infty$. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, и, следовательно, данный интеграл тоже расходится. ☻

ЧАСТЬ 2. Индивидуальные задания

Задание 1. Площадь плоской фигуры

Найти площадь, ограниченную заданными кривыми. В пункте а) кривые заданы в полярных координатах или неявно. В пункте б) кривые заданы параметрически или неявно.

1. а) $r = 4\cos\varphi$, $r = \dfrac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi = 0$; б) $x^7 + y^7 = 2x^3y^3$.

2. а) $r = 2\sqrt{3}\sin\varphi$, $r = 4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; б) $x^2(x+y) = 4y^4$.

3. а) $r = 2\,|\mathrm{tg}\,\varphi|$, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}$; б) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{2}\right)^{2/3} = 1$.

4. $r = 2\sqrt{3}\,|\mathrm{tg}\,\varphi|$, $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$; б) $y^3 + (x+2)^2 = y^2$.

5. а) $r = \dfrac{4\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$, $r = \dfrac{2}{\sin\varphi}$; б) $(x-1)^2 = y^2 - y^3$.

6. а) $r = \sqrt{\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}}$, $r = 4\cos\varphi$; б) $x^3 = ay^4 - x^2y$.

7. а) $r = \sqrt{\dfrac{\cos 3\varphi}{\cos\varphi}}$, $r = \cos\varphi$; б) $x^4 = axy^2 + ay^3$.

8. а) $r = 1 - 2\cos 2\varphi$, $r = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\varphi$, $\left(r \geqslant 1 - 2\cos 2\varphi,\ r \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\varphi\right)$; б) $(x+y)^3 = 2xy$.

9. а) $r = \cos^{-1}\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $r = \cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi$, $\left(r \leqslant \cos^{-1}\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)\right)$; б) $x^4 = 3y^2(x+y)$.

10. а) $r = \dfrac{3}{1+\sin\varphi}$, $r = 4\sin\varphi$ $\left(r \leqslant \dfrac{3}{1+\sin\varphi}\right)$; б) $x^5 + y^5 = x^2y^2$.

11. а) $x^7 + y^7 = ax^3y^3$; б) $x = a\cos t$, $y = a\sin t\cos^2 t$.

12. а) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 - y^2)$; б) $x = 3\sin t\cos^2 t$, $y = 3\sin^2 t\cos t$.

13. а) $x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)$; б) $x=\cos t\,(1+\cos t),\ y=\sin t\,(1+\cos t)$.

14. а) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy^2$; б) $x=\cos t,\ y=\dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t}$.

15. а) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2x^2+b^2y^2$; б) $x=\dfrac{1}{1+t^2},\ y=\dfrac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$.

16. а) $x^4+y^4=a^2xy$; б) $x=3\sin t,\ y=3\sin 2t$.

17. а) $x^3+y^3=3axy$; б) $x=1+2\cos t,\ y=\operatorname{tg} t+2\sin t$.

18. а) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2x^2$; б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t$.

19. а) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2y^2$; б) $x=\cos t\,(1-\cos t),\ y=\sin t\,(1-\cos t)$.

20. а) $\left(x^2+y^2\right)^2=ax^2y$; б) $x=\dfrac{\sqrt{t}}{\left(1+t^2\right)^2},\ y=\dfrac{t\sqrt{t}}{\left(1+t^2\right)^2}$.

Вопросы:

1. Сформулируйте определение интеграла Римана.
2. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции (по Риману).
3. Какие классы интегрируемых (по Риману) функций Вы знаете?
4. Что такое верхняя и нижняя суммы Дарбу, верхний и нижний интегралы Дарбу?
5. Являются ли суммы Дарбу интегральными суммами?
6. Какие критерии интегрируемости функций вы знаете?
7. Приведите пример неинтегрируемой на отрезке функции.
8. Приведите пример неинтегрируемой на отрезке функции, квадрат которой интегрируем на этом отрезке.

9. Как связаны определенный интеграл (Римана) и неопределенный интеграл?

10. Что такое измеримое (по Жордану) множество? Что называется мерой (Жордана) множества?

11. Какие свойства меры Жордана Вы знаете?

12. Какая фигура называется криволинейной трапецией? Что называется ее площадью? Чему равна площадь криволинейной трапеции?

13. Что называется площадью плоской фигуры?

14. Как вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной явно, параметрически, в полярной системе координат?

15. Как вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной неявно?

16. Верно ли равенство $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$? Почему этот результат противоречит теореме об интеграле от положительной функции?

Задание 2. Длина кривой

Найти длину данной кривой. В пункте а) кривая задана параметрически или в полярных координатах. В пункте б) кривая задана как пересечение поверхностей, заданных в декартовых координатах.

1. а) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; б) $x^3 = 27y$, $2xz = 9$, $1 \leqslant y \leqslant 27$.

2. а) $x = 8at^3$, $y = 3a\left(2t^2 - t^4\right)$, $y \geqslant 0$; б) $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$, $0 \leqslant y \leqslant 27$.

3. а) $x = 6 - 3t^2$, $y = 4t^3$, $x \geqslant 0$; б) $y^3 = 3z$, $2yx = 1$, $1 \leqslant y \leqslant 3$.

4. а) $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$; б) $x^2 + y^2 = z$, $x\sin z - y\cos z = 0$, $0 \leqslant z < \dfrac{\pi}{2}$.

5. а) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$; б) $y^2 = z$, $2yz = 3x$, $0 \leqslant z \leqslant 9$.

6. а) $x = 6 - 3t^3$, $y = \dfrac{9\left(2t^2 - t^4\right)}{8}$, $y \geqslant 0$; б) $z^3 = 12x$, $2zy = 4$, $2/3 \leqslant x \leqslant 18$.

7. а) $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$; б) $z^2 + x^2 = 2y$, $z \sin \dfrac{y}{2} - x \cos \dfrac{y}{2} = 0$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

8. а) $x = 2\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$; б) $z^2 = 2x$, $xz = 3y$, $0 \leqslant x \leqslant 8$.

9. а) $x = t^2$, $y = t\left(\dfrac{1}{3} - t^2\right)$; б) $2x^2 + z^2 = 2$, $2y^2 + z^2 = 2$.

10. а) $x = 2t^3\left(1 - t^2\right)$, $y = \sqrt{15}t^4$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, $x + z = 1$.

11. а) $\varphi = \dfrac{\sqrt{r^2 - 2}}{\sqrt{2}} - \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{r}$, $2 \leqslant r \leqslant 3$; б) $x^2 = 9y$, $16xy = 9z^2$, $|z| \leqslant 12$.

12. а) $r = a\cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $|y| = x$.

13. а) $r = \dfrac{a}{\sin^3(\varphi/3)}$; б) $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \ln \dfrac{z}{2}$, $4\left(x^2 + y^2\right) = z^2$.

14. а) $r = a\cos^2 t$, $\varphi = 2\,(t - \operatorname{tg} t)$ от точки $A(a, 0)$ до точки $B(a/2, \pi/2 - 2)$; б) $xy = 1$, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ln \dfrac{x}{y}$.

15. а) $x = 2 - t^2$, $y = \dfrac{t\left(1 - 3t^2\right)}{3}$; б) $z^2 = x$, $16xz = 9y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 36$.

16. а) $r = 4\sin^4 \dfrac{\varphi}{4}$; б) $x^2 + y^2 = z^2$, $x \cos\left(\sqrt{2}z\right) + y \sin\left(\sqrt{2}z\right) = 0$, $|z| \leqslant 1$.

17. а) $r = 1 + \operatorname{tg} t$, $\varphi = \operatorname{tg} t - \ln(1 + \operatorname{tg} t)$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(r_0, \varphi_0)$, $r_0 = 2$, $\varphi_0 = 1 - \ln 2$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $|z| = y$.

18. а) $r = \dfrac{2}{\cos^4(\varphi/4)}$; б) $2\left(y^2 + z^2\right) = x$, $z\cos 2x - y \sin 2x = 0$, $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4}$.

19. а) $r = 1 + \cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg}(t/2)$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(r_0, \varphi_0)$: $r_0 = 1$, $\varphi_0 = \pi/2$; б) $y^2 = 25z$, $16yz = 9x^2$, $|x| \leqslant \dfrac{36}{5}$.

20. а) $\varphi = \ln r + r$, $1 \leqslant r \leqslant 5$; б) $2\operatorname{arctg} \dfrac{z}{x} = \ln y$, $x^2 + z^2 = y^2$.

Вопросы:

1. Какая кривая называется спрямляемой?

2. Сформулируйте определение длины кривой.

3. Какой класс спрямляемых кривых Вы знаете?

4. Какие способы задания кривой на плоскости и в пространстве Вы знаете?

5. Как выражается длина кривой, заданной радиус-вектором?

6. Как вычислить длину кривой, заданной явно, параметрически, в полярной системе координат?

Задание 3. Сходимость несобственных интегралов

Исследовать несобственные интегралы на сходимость (в каждом варианте 4 интеграла). Для интегралов от знакопеременной функций исследовать абсолютную и условную сходимости.

1. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x}{\sqrt{x^2-1}}dx$; б) $\int\limits_e^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{\ln x}}\frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{|1/3-\sin x|}$;

   г) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln^{4/3}\left(1+x^2\right)}{x^4}\cos\frac{1}{x}dx.$

2. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x\ln^2 x}dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{\exp\left(x^2+\sin x\right)}dx$;

   в) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$; г) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^{-4}\sin(1/x)}{(1+x^{-2})^{3/2}}dx.$

3. а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{1+x^2}dx$; б) $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{1}{x}\ln\frac{x-5}{x+5}dx$; в) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt[3]{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}dx$;
г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}dx.$

4. а) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{\left(\exp(x^2)+3\right)^{1/x}}dx$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\left(x+1/x\right)}{x\sqrt{x}}dx$; в) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{|\operatorname{tg}x|}}$;
г) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^{7/4}}dx.$

5. а) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{100}+1}{(1+1/x)^{x\sqrt{x}}}dx$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{|x|}}\sin e^x dx$; в) $\displaystyle\int_0^{1/8} \frac{\arcsin\left(x^2+x^5\right)}{x\ln^2(1+x)}dx$;
г) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}.$

6. а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\left|\pi^2-x^2\right|}dx$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\ln^2 x\right)\frac{dx}{x}$; в) $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{x^{1/2}-x^{-1/2}}{\ln x}\right|dx$;
г) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{(1-x^2)^2}.$

7. а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^3 x}{x^2}dx$; б) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx$;
в) $\displaystyle\int_0^1 x^{-1}(1-x)^{-2}\left|\ln x\right|dx$; г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{\sqrt{x}-x}}dx$

8. а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}dx$; в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln\left(1/x\right)}}{x\sqrt{x}}dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x}\sin\frac{1}{x}dx.$

9. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2}\left|\frac{x}{e^x-e^{-x}}-2\right|dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|\ln\sin x|\,dx}{\sqrt{x\,(\pi-2x)^5}}$;
г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^3}\sin\frac{1}{x}dx.$

10. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \left(e^{-1/x^2}-e^{-4/x^2}\right)dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{|\ln x|\,dx}{\sqrt{\sin x}}$;
г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^{3/2} x\cos\frac{1}{x}dx.$

11. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|\operatorname{ctg}\frac{1}{x}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos\left(x+x^2\right)}{\sqrt{x}}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$;
г) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2-\sin^2 x}dx.$

12. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[5]{x^5+1}\right)\frac{dx}{x^2}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{\sin 3x}{x}dx$;
в) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$; г) $\displaystyle\int\limits_0^1 x\ln\ln\frac{1}{x}dx.$

13. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\left(2^x+3^x\right)^{1/x}}{\sqrt{x^2\sqrt{x^2+1}}}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x\ln x}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \left|\ln\left|\sin^2 x-1/2\right|\right|dx$;
г) $\displaystyle\int\limits_0^{1/3} \frac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x^{3/2}\left(e^x-1\right)}dx.$

14. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_1^\infty e^{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{|\ln\sin x|}{x}dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x\sqrt{\sin x}}dx.$

15. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^5-1}}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^x\sin x}{x\,(e^x+1)}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{1+\cos x}{(\pi-x)^{5/2}}dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)dx.$

16. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty xe^{-x}\sin x dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^{-1/2}\cos x}{1+x^{-1/3}}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\ln(2-x/2)}{\sin(x-2)}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}dx.$

17. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty x\exp\left(-x^3\right)\left(2x^4-1\right)dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{\cos x}\sin x}{x}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^3}$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin(\sec x)\,dx.$

18. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty x\left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty (e^x+x)\sin e^{2x}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^1 (x-\sin x)^{-1}\,dx$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi/x)}{x(1-x)^{3/2}}dx.$

19. а) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\cdot\frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty x\cos\left(x^3-x\right)dx$; в) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x}dx.$

20. а) $\int\limits_0^\infty \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[4]{x^4+4x^3}\right) dx$; б) $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1} dx$;

в) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(4-x^2\right)^2}}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\cos(1-x)^{-1}}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$

Вопросы:

1. Сформулируйте определения несобственных интегралов первого и второго родов. Как можно обобщить эти определения?
2. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
3. Какие признаки сходимости несобственных интегралов от положительных функций Вы знаете?
4. Что означает, что несобственный интеграл сходится абсолютно, условно? Есть ли связь между этими сходимостями?
5. Какие признаки сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций Вы знаете?
6. Какие способы доказательства условной сходимости интеграла Вы знаете?
7. Что можно сказать о сходимости интеграла, если подынтегральную функцию удалось представить в виде суммы двух слагаемых, и при этом а) интегралы от обоих слагаемых сходятся; б) один интеграл сходится, а второй расходится; в) интегралы от обоих слагаемых расходятся; г) интеграл от одного из слагаемых сходится абсолютно?
8. Пусть $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится. Следует ли из этого, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

9. Приведите пример такой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $f(x)$, что $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

10. Приведите пример такой непрерывной и неотрицательной на $[0, +\infty)$ функции $f(x)$, что $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

Список литературы

[1] Родина Т.В., Трифанова Е.С. Курс лекций по математическому анализу – II (Для направления «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2013, 153 стр.

[2] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. Учебное пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. М.:Физматлит, 2003, 504 с.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А. Тартаковский, В.Н. Попов, И.А. Молотков, А.Г. Аленицын, В.В. Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Родина Татьяна Васильевна
Трифанова Екатерина Станиславовна
Бойцев Антон Александрович

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика" 3 модуль

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе