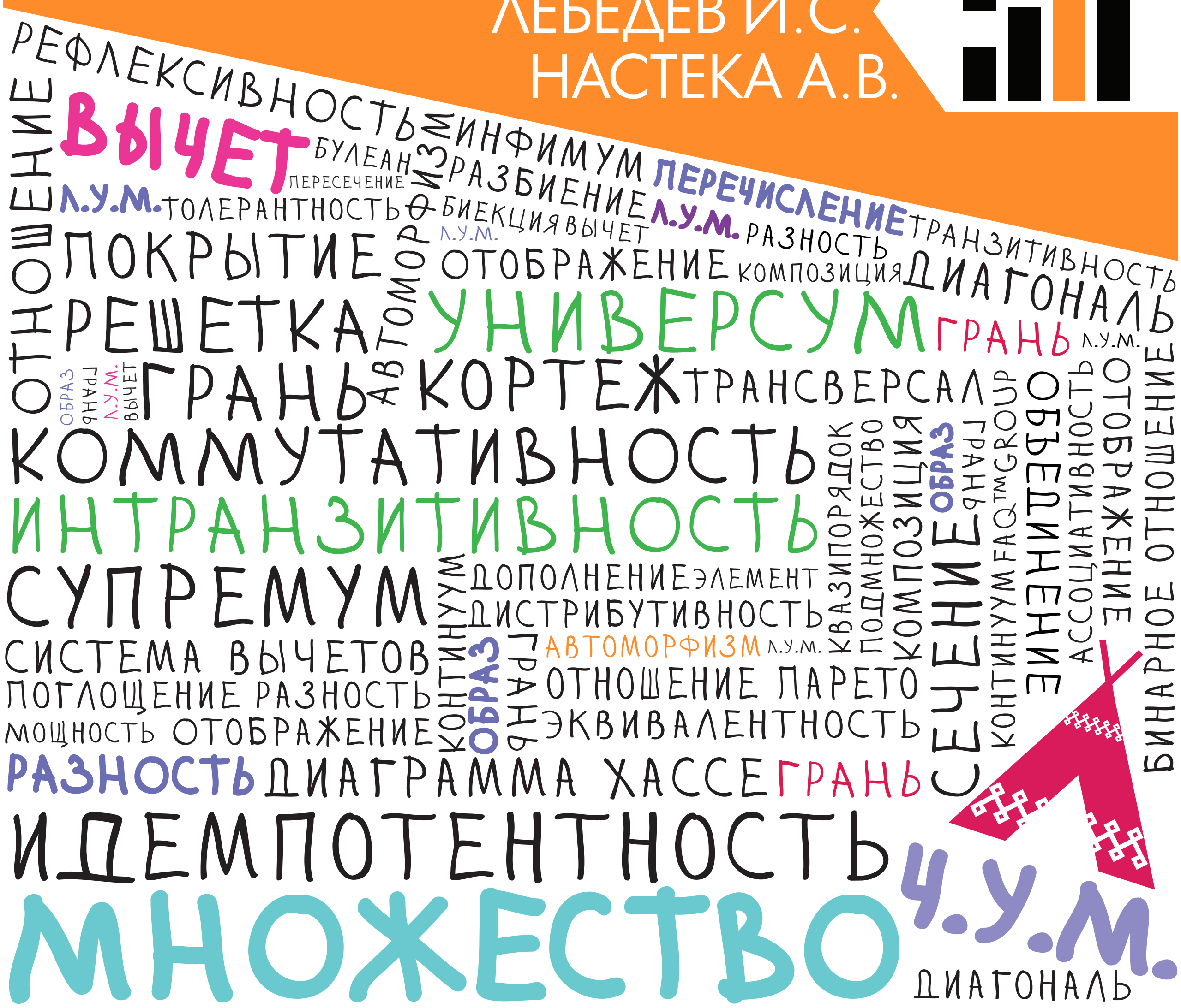
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ 1

КРИВЦОВА И.Е.
ЛЕБЕДЕВ И.С.
НАСТЕКА А.В.



2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

И.Е. Кривцова
И.С. Лебедев
А.В. Настека

Основы дискретной математики
Часть 1
Учебное пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2016

Кривцова И.Е., Лебедев И.С., Настека А.В., Основы дискретной математики. Часть 1. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 92с.

Учебное пособие соответствует дидактике дисциплины базового модуля программы академического бакалавриата «Дискретная математика» и содержит основные теоретические сведения по следующим разделам дискретной математики: множества, соответствия, отношения на множествах, специальные отношения. В традиционные для технических вузов разделы дискретной математики включены базовые понятия теории чисел и общей топологии, необходимые для последующих дисциплин профессионального цикла. Пособие содержит большое количество примеров, графическую интерпретацию основных понятий, вопросы и задания для самостоятельной работы студентов. В приложении рассмотрены способы представления множеств в ЭВМ.

Учебное пособие предназначено для подготовки студентов технических университетов по направлениям 10.03.01 «Информационная безопасность» и 10.05.01 «Компьютерная безопасность».

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета информационной безопасности и компьютерных технологий, протокол №5 от 25 мая 2016 года.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ... 5

ГЛАВА I. МНОЖЕСТВА ... 6

1.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. БУЛЕАН ... 6

1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ И ИХ СВОЙСТВА ... 9

1.3. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. КОРТЕЖ ... 16

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ... 19

ГЛАВА II. МНОЖЕСТВА И СООТВЕТСТВИЯ ... 20

2.1. СООТВЕТСТВИЕ И ЕГО СВОЙСТВА. ПОНЯТИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ... 20

2.2. ОПЕРАЦИИ НАД СООТВЕТСТВИЯМИ ... 25

2.2.1. КОМПОЗИЦИЯ СООТВЕТСТВИЙ И ЕЕ СВОЙСТВА ... 25

2.2.2. ОБРАТНОЕ СООТВЕТСТВИЕ И ЕГО СВОЙСТВА ... 26

2.3. КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА ... 28

2.4. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА ... 30

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ... 35

ГЛАВА III. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ ... 36

3.1. ПОНЯТИЕ ОТНОШЕНИЯ ... 36

3.2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ ... 36

3.2.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ... 37

3.2.2. ОПЕРАЦИИ НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ ... 39

3.3. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА X ... 43

3.3.1. ОПЕРАЦИИ НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ НА X ... 46

3.3.2. СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ... 47

3.3.2.1. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ ... 48

3.3.2.2. СИММЕТРИЧНОСТЬ ... 50

3.3.2.3. ТРАНЗИТИВНОСТЬ ... 52

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ... 55

ГЛАВА IV. СПЕЦИАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ... 56

4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ... 56

4.2 РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВ ... 57

4.3. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ... 58

4.3.1. КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ... 59

4.3.2. ОТНОШЕНИЕ РАВЕНСТВА ПО МОДУЛЮ n ... 60

4.3.3. РАЗБИЕНИЕ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НА X ... 65

4.4. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА ... 66

4.4.1. ПОНЯТИЕ ЧАСТИЧНОГО ПОРЯДКА ... 66

4.4.2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ДИАГРАММА ХАССЕ ... 69

4.5. РЕШЕТКИ ... 73

4.5.1. НАИБОЛЬШИЙ (НАИМЕНЬШИЙ) И МАКСИМАЛЬНЫЙ (МИНИМАЛЬНЫЙ) ЭЛЕМЕНТЫ Ч.У.М. ... 73

4.5.2. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ Ч.У.М. ... 76

4.5.3. ПОНЯТИЕ РЕШЕТКИ ... 79

4.5.4. ПРИМЕРЫ РЕШЕТОК ... 82

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 84

ПРИЛОЖЕНИЕ......... 86

МНОЖЕСТВА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ЭВМ 86

1. СМЕЖНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ 86

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ КУРСОРОВ 86

3. ДВОИЧНЫЕ ВЕКТОРЫ 86

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИСКОВ С ПОМОЩЬЮ УКАЗАТЕЛЕЙ 87

ЛИТЕРАТУРА 89

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов младших курсов технических вузов, обучающихся по специальностям, связанным с информационной и компьютерной безопасностью, поэтому имеет ряд особенностей.

Оно содержит элементы теории чисел и элементы общей топологии, в частности, рассмотрены такие базовые понятия последующих дисциплин профессионального цикла, как фактор-множество вычетов по некоторому модулю, частично упорядоченные множества, называемые решетками, и др.

В пособии опущены строгие доказательства многих теоретических утверждений. По этим вопросам имеется целый ряд доступных источников, указанных в списке литературы, где доказательства можно изучить самостоятельно. Однако для каждого утверждения указывается метод доказательства, либо приводятся, по определению известного математика и педагога Джорджа Пойа, *правдоподобные (индуктивные) рассуждения*, заменяющие доказательства.

Для закрепления изученного материала и подготовки к зачету, в конце каждой главы помещены вопросы и задания для самостоятельной работы студентов.

Приложение может быть использовано при представлении множеств в ЭВМ.

В пособии используются следующие обозначения:

$\Rightarrow$ – следует,

$\forall$ – для любого, каждый,

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда,

$\exists$ – существует, $\nexists$ – не существует,

$x \vdots y$ – x делится нацело на y, т. е. y является делителем x,

$x \mid y$ – y делится нацело на x, т. е. x является делителем y,

Авторы приносят благодарность студентке кафедры БИТ Ксении Салахутдиновой за участие в оформлении учебного пособия.

Глава I. Множества

1.1. Понятие множества. Булеан

В современной математике и в различных ее приложениях фундаментальную роль играет понятие *множества*.

Понятие множества, в так называемой наивной теории множеств, является исходным не определяемым строго понятием.

Приведем “наивное” пояснение понятия «множество».

Георг Кантор (*G.Cantor*, 1845-1918) – немецкий математик, основатель теории множеств, писал:

«Под многообразием или *множеством* я понимаю вообще все многое, которое возможно мыслить как единое, т.е. такую совокупность определенных элементов, которая посредством одного закона может быть соединена в одно целое» [1].

Например, можно говорить о множестве студентов в группе, о множестве натуральных чисел, множестве букв в алфавите и т.д. При этом о множестве можно вести речь только тогда, когда элементы множества различимы между собой.

Обозначение: $A, B, C, \ldots X, Y, \ldots$.

В современной математической литературе также представлены аксиоматические теории множеств, в которых понятие множества строго определяется посредством набора аксиом, но при этом используются уже другие неопределяемые понятия.

Элементами множества называют отдельные объекты, из которых состоит множество.

Обозначение: $a, b, c, \ldots x, y, \ldots$.

Для указания того, что некоторый элемент x является элементом множества X, используют символ $\in$ принадлежности множеству: $x \in X$.

Запись $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Приняты следующие стандартные обозначения числовых множеств:

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел;

$\boldsymbol{C}$ — множество комплексных чисел.

Рассмотрим способы задания конкретных множеств — перечисление, рекурсия и описание.

Перечисление соответствует записи в фигурных скобках всех элементов множества через запятую.

Пример 1. $Y = \{a,b,c,d\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c, d;

$X = \{2,4,6,8,\ldots\}$ — такая запись применима, если вполне ясно, что понимается под многоточием.

При *рекурсивном задании* множество задается перечисляющей процедурой (алгоритмом).

Пример 2. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ задаем следующими правилами:

- ✔ Задаем исходный элемент: $1 \in \boldsymbol{N}$,
- ✔ Задаем алгоритм: $n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow (n+1) \in \boldsymbol{N}$,
- ✔ Устанавливаем правило замыкания: других элементов, кроме построенных по предыдущим двум правилам, в $\boldsymbol{N}$ нет.

Очевидно, что способ задания множества путем непосредственного перечисления элементов применим не для любого множества.

Приведем наиболее общий способ задания множеств.

Описание состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все элементы описываемого множества. Пусть $P(x)$ — утверждение, состоящее в том, что элемент x обладает свойством P. Тогда множество всех элементов x, обладающих свойством P, записывают следующим образом:

$$X = \{x\colon\ P(x)\}.$$

Пример 3. $A = \{a\colon a$ — четное$\}$ — множество четных чисел;

$B = \{b\colon b^2-1=0\}$ — множество корней уравнения $b^2-1=0$;

$Y = \{y \in \boldsymbol{Z}\colon 0 < y \leq 7\}$ есть множество целых чисел от 1 до 7.

Важным понятием теории множеств является понятие пустого множества.

Определение 1 *Пустым множеством* называется множество, не содержащее ни одного элемента.

Обозначение: $\varnothing$.

Рассмотрим отношения на множествах — равенство и включение.

Определение 2 Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A=B$.

Пример 4. Пусть $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{4,5,6,3\}$. Тогда $A=B$.

Таким образом, множество полностью определяется своими элементами.

Определение 3 Множество B называется *подмножеством* или *частью множества* A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Обозначение: $B \subseteq A$ (нестрогое включение).

Из определения 3 следует, что два множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения.

Если $B \neq \varnothing$, $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то говорят, что B есть *собственное подмножество* A.

Обозначение: $B \subset A$ (строгое включение).

Пример 5.

1. Пусть $B = \{1,2,3\}$, тогда $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,1\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ — собственные подмножества множества B;
2. Для числовых множеств справедливы включения:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C},$$

причем каждое из множеств есть собственное подмножество каждого последующего.

Для всякого множества может быть образовано множество его подмножеств.

В число подмножеств множества A входит, как это ясно из определения 3, само это множество: $\forall A \;\; A \subseteq A$.

Кроме того, в теории множеств постулируется, что пустое множество есть подмножество любого множества: $\forall A \;\; \varnothing \subseteq A$.

Определение 4 Множество всех подмножеств множества A называется *множеством-степенью* или *булеаном* множества A.

Обозначение: 2^A или $P(A)$.

Таким образом,

$$2^A = \{X:\; X \subseteq A\} \text{ или } P(A) = \{X:\; X \subseteq A\}.$$

Отметим, что образование булеана 2^A позволяет определять следующие булеаны: 2^{2^A}, $2^{2^{2^A}}$ и так далее.

Пример 6. Пусть $B = \{1,2,3\}$.

Тогда его булеан $P(B)=\{\{1,2,3\},\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\},\varnothing\}$.

Для того чтобы перейти к операциям над множествами, введем понятие *универсальное множество*.

Предположим, что все рассматриваемые в ходе какого-то рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества. Тогда это множество называют *универсальным* или *универсумом* для данного рассмотрения.

Обозначение: $\boldsymbol{I}$ или $\boldsymbol{U}$.

Например, если мы рассматриваем только различные числовые множества, то унивесальным можно считать множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Замечание. Конкретное содержание понятия универсума определяется тем конкретным контекстом, в котором применяются теоретико-множественные идеи. Зафиксировав универсальное множество, тем самым фиксируют область значений всех фигурирующих в математических рассуждениях переменных и констант.

Далее мы встретимся с разными примерами конкретных универсальных множеств.

Универсальное множество $\boldsymbol{I}$ удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника.

1.2. Операции над множествами и их свойства

Рассмотрим способы получения новых множеств из уже существующих, а именно:

- Объединение, пересечение множеств;
- Разность, симметрическая разность множеств;
- Дополнение множества до универсального.

Пусть A и B — произвольные множества.

Определение 5 *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B.

Обозначение: $A \cup B$.

Итак,

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Объединение множеств иногда называют *суммой множеств* и обозначают $A+B$.

Пример 7. Пусть $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,7\}$. Тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,6,7\}$.

Графическое представление универсального множества в виде прямоугольника позволяет наглядно представить операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна, где подмножества универсального множества изображают в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника.

На рис. 1 множество A — множество точек левого круга, B — множество точек правого круга, $A \cup B$ есть заштрихованная область.

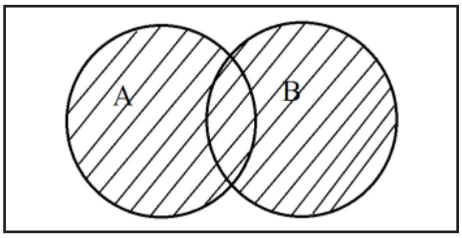


Рис.1. $A \cup B$

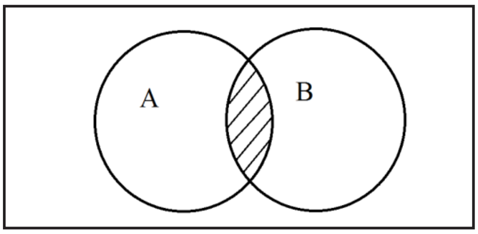


Рис.2. $A \cap B$

Операцию объединения можно распространить и на большее, чем два, число множеств.

Объединение n множеств A_1, A_2, …, A_n есть множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Обозначение: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

1. $A \cup B = B \cup A$ — *коммутативность*,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *ассоциативность*,
3. $A \cup \varnothing = A$,
4. $A \cup A = A$ — *идемпотентность*,
5. $A \cup \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$.

Замечание. В соответствии со свойством 3, пустое множество в алгебре множеств относительно операции объединения играет роль, аналогичную роли числа 0 в обычной числовой алгебре относительно операции сложения.

Перейдем к следующей операции.

Определение 6 *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Обозначение: $A \cap B$.

Итак,

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пересечение двух множеств обозначено штриховкой на рис.2.

Пример 8. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,7\}$. Тогда $A \cap B = \{2,4\}$.

Обобщим операцию пересечения множеств.

Пересечение n множеств A_1, A_2, …, A_n есть множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит всем этим множествам.

Обозначение: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Операция пересечения множеств обладает следующими свойствами:

6. $A \cap B = B \cap A$,
7. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
8. $A \cap A = A$,
9. $A \cap \varnothing = \varnothing$,
10. $A \cap \boldsymbol{I} = A$.

В англоязычной литературе символы $\cup$ и $\cap$ называют *cap* (шляпа).

Определение 7 Множества A и B называются *непересекающимися*, если они не имеют общих элементов.

Следовательно, A и B — *непересекающиеся* $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ (рис.3).

Пример 9. Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$. Тогда $A \cap B = \varnothing$.

Рассмотрим взаимосвязь между операциями объединения и пересечения:

11. Законы *дистрибутивности*:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$.

12. Законы *поглощения*:

$$A \cup (B \cap A) = A,$$
$$A \cap (B \cup A) = A.$$

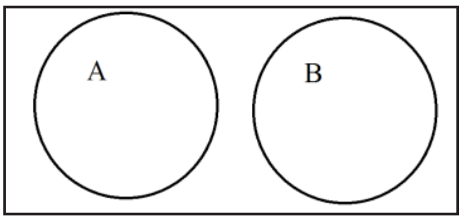


Рис.3. $A \cap B = \varnothing$

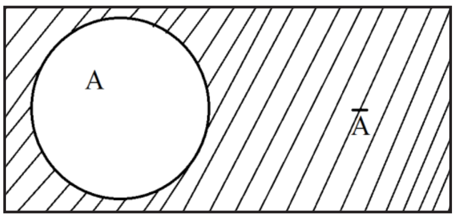


Рис.4. $\overline{A}$

Замечание.

1. В соответствии со свойством 10, универсальное множество в алгебре множеств относительно операции пересечения играет роль, аналогичную роли числа 1 в обычной числовой алгебре относительно операции умножения. Равенство 10 можно рассматривать как еще один подход к определению универсального множества.

2. С другой стороны, универсальное множество обладает интересным свойством, которое не имеет аналогии в обычной алгебре: по свойству 5 $\forall A\ A \cup \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$.

Определим следующую операцию.

Определение 8 *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B.

Обозначение: $A \setminus B$.

Итак,

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

В соответствии с определениями 6 и 8, разность множеств определяется равенством:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Пример 10. Пусть $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,7\}$. Тогда $A \setminus B = \{1,3,5\}$; $B \setminus A = \{6,7\}$.

Отметим, что разность множеств $A \setminus B$ определена только для двух множеств, причем как в случае, когда множество B является подмножеством A, так и в случае, когда B не содержит общие с A элементы.

Разность множеств $A \setminus B$ обозначена штриховкой на рис. 5.

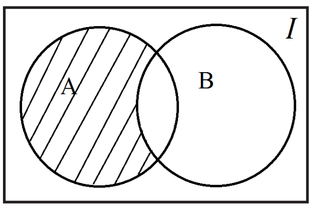


Рис.5. $A \setminus B$

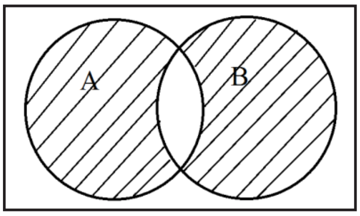


Рис.6. $A \,\Delta\, B$

Введем еще одну операцию на множествах, непосредственно связанную с операцией разности.

Определение 9 *Симметрической разностью множеств* A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат B, или принадлежат множеству B, но не принадлежат A.

Обозначение: $A \,\Delta\, B$.

Итак,

$$A \,\Delta\, B = \{x:\ (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}.$$

В соответствии с определениями 5 и 8, симметрическая разность множеств A и B определяется равенством:

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

В примере 10 $A \,\Delta\, B = \{1,3,5\} \cup \{6,7\}=\{1,3,5,6,7\}$.

Симметрическая разность $A \,\Delta\, B$ обозначена штриховкой на рис. 6.

Операция симметрической разности множеств обладает следующими свойствами:

13. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$,
14. $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$,
15. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
16. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ – дистрибутивность $\cap$ относительно Δ.

Зафиксируем универсальное множество $\boldsymbol{I}$ и определим следующую теоретико-множественную операцию.

Определение 10 *Дополнением (абсолютным дополнением)* множества *A* до универсального называется множество всех элементов универсального множества, не принадлежащих *A*.

Обозначение: $\overline{A}$.

Итак,

$$\overline{A} = \{x\colon x \in \boldsymbol{I} \text{ и } x \notin A\}.$$

В соответствии с определением 8, дополнение множества *A* до универсального определяется равенством:

$$\overline{A} = I \setminus A.$$

<u>Пример 11.</u> Зафиксируем в качестве универсального множество $\boldsymbol{I} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Пусть $A = \{1,2,3,4,5\}$. Тогда $\overline{A} = \{0,6,7,8,9\}$.

Дополнение множества *A* до универсального обозначено штриховкой на рис. 4.

Операция дополнения обладает следующими свойствами:

17. $A \cup \overline{A} = I$,
18. $A \cap \overline{A} = \varnothing$,
19. *Закон двойного отрицания*: $\overline{\overline{A}} = A$,
20. *Законы де Моргана*: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Замечание. Можно показать, что любая из определенных выше операций 1-20 выражается через операции пересечения и дополнения множества до универсального.

Таким образом, мы рассмотрели способы получения новых множеств из уже имеющихся путем применения теоретико-множественных операций.

Каждое из равенств 1-20 верно для любых подмножеств A, B, C универсального множества $\boldsymbol{I}$. Они называются *теоретико-множественными тожествами* или *основными тождествами алгебры множеств*.

Существуют следующие методы доказательства теоретико-множественных тождеств:

- метод двух включений,
- метод эквивалентных преобразований,
- метод характеристических функций.

Метод двух включений основан на том, что для того, чтобы доказать равенство $A=B$, необходимо и достаточно доказать два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Любое из тождеств 1-20 может быть доказано методом двух включений.

Пример 12. Докажем один из законов де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

- Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in \boldsymbol{I}$ и $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, а значит, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Итак, $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
- Пусть теперь $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, $x \in \boldsymbol{I}$ и $x \notin A$ и $x \notin B$. Значит, $x \notin A \cup B$ т.е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.
- Из того, что выполняются два включения $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ следует, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Метод эквивалентных преобразований состоит в том, что при доказательстве преобразовывают левую часть тождества к правой и наоборот, используя ранее доказанные тождества. Этот метод считается универсальным и наиболее часто применяемым методом доказательства теоретико-множественных тождеств.

Пример 13. Докажем методом эквивалентных преобразований тождество 15, пользуясь последовательно тождествами 20, 11, 18, 3 и 1.

- Преобразуем левую часть тождества 15:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$
$$= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) =$$
$$= (A \cap \overline{A} \cup B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{B}) =$$
$$= (\varnothing \cup B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cup \varnothing) =$$
$$= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) =$$
$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B;$$

✔ Следовательно, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Метод характеристических функций заключается в выражении характеристических функций обеих частей тождества через характеристические функции входящих в него множеств. Тождество верно тогда и только тогда, когда характеристические функции его левой и правой частей совпадают.

Сформулируем определение характеристической функции и ее свойства.

Зафиксируем универсальное множество $\boldsymbol{I}$. Пусть множества $X, Y \subseteq \boldsymbol{I}$.

Определение 11 *Характеристической функцией множества* $X \subseteq \boldsymbol{I}$ называется функция, заданная следующим образом:

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in X, \\ 0, & \textit{если } x \notin X. \end{cases}$$

Характеристическая функция обладает следующими свойствами:

✔ $\chi_{\overline{X}}(x) = 1 - \chi_X(x)$;

✔ $\chi_{X \cap Y}(x) = \chi_X(x) \cdot \chi_Y(x)$;

✔ $\chi_{X \cup Y}(x) = \chi_X(x) + \chi_Y(x) - \chi_X(x) \cdot \chi_Y(x)$.

Из определения 11 следует, что $\chi_X(x) = \chi_Y(x) \Leftrightarrow X = Y$.

Пример 14. Докажем методом характеричтекских функций второй из законов де Моргана: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

✔ По приведенным выше свойствам характеристических функций имеем:

$$\chi_{\overline{A \cap B}}(x) = 1 - \chi_{A \cap B}(x) = 1 - \chi_A \cdot \chi_B =$$
$$= 1 - \chi_A(x) + \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) =$$
$$= (1 - \chi_A(x) + \chi_A(x) \cdot (1 - \chi_B(x) = \chi_{\overline{A}}(x) + (1 - \chi_{\overline{A}}(x) \cdot \chi_{\overline{B}}(x) =$$
$$= \chi_{\overline{A}}(x) + \chi_{\overline{B}}(x) - \chi_{\overline{A}}(x) \cdot \chi_{\overline{B}}(x) = \chi_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x)$$

✔ Тогда $\chi_{\overline{A \cap B}}(x) = \chi_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x) \Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Отметим, что метод характеристических функций не является универсальным. Он не применим для доказательств тождеств, содержащих операцию прямого произведения множеств, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

1.3. Прямое произведение множеств. Кортеж

Наряду с понятием множества как совокупности элементов важным понятием является понятие *упорядоченного множества* или *кортежа*.

Пусть даны множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и элементы $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

Определение 12 *Кортежем* на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется совокупность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой каждый элемент занимает определенное место.

Обозначение: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Из определения 12 следует, что кортеж характеризуется не только входящими в него элементами, но и порядком, в котором они перечисляются. Роль порядка в кортеже фиксируется определением равенства кортежей.

Определение 13 Два кортежа $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются равными, если $a_i = b_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Элемент a_i называется *i-той проекцией* (компонентой) кортежа.

Число n называется *длиной кортежа*.

Например, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — кортеж длины n с компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Пример 15.</u>

1. Множество людей в очереди;
2. Множество слов в фразе;
3. Простейшим примером кортежа является *арифметический вектор*.

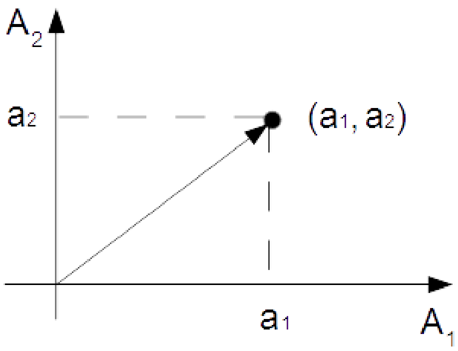


Рис. 7. Кортеж

В прямоугольной системе координат на плоскости каждая точка однозначно задается упорядоченной парой (a_1, a_2) действительных чисел – координатами этой точки. Каждая такая пара называется 2-мерным арифметическим вектором (рис.7), который является кортежем длины 2.

Кортеж (a_1, a_2, a_3) — точка в 3-мерном пространстве или трехмерный арифметический вектор.

Определение 15 *Прямым (декартовым) произведением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B.

Обозначение: $A \times B$.

Итак,

$$A \times B = \{(x,y)\colon x \in A,\ y \in B\}.$$

Из определения 15 следует, что прямое произведение множеств A и B есть множество всех кортежей длины 2 на множествах A, B.

<u>Пример 16.</u>

1. Пусть $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,3,4\}$.

   Тогда

$$X\times Y=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\} \text{ (рис. 8)},$$
$$Y\times X=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\},$$
$$X\times X=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

2. Пусть $X = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Множеству $X \times Y$ соответствует множество клеток шахматной доски.
3. Пусть $X = [0,1]$. Множество

   $X\times X = [0,1] \times [0,1] = \{(a,b)\colon 0\le a \le 1,\ 0\le b \le 1\}$

   – множество точек на плоскости, имеющих неотрицательные координаты, не превосходящие единицы (рис.9).

Координатное представление точек плоскости (пример 15.3) предложено французским математиком *Рене Декартом* (*R. Descartes*, 1596-1650). Исторически оно является первым примером прямого произведения и именно поэтому прямое произведение называют декартовым.

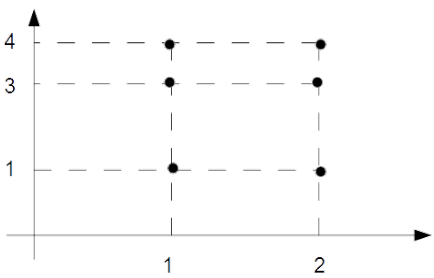


Рис.8. $X\times Y$

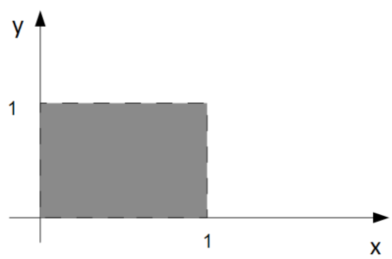


Рис.9. $X\times X$

Прямое произведение множеств обладает свойствами:

1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ – *дистрибутивность* $\times$ относительно $\cup$;
2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ – *дистрибутивность* $\times$ относительно $\cap$;
3. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

Отметим, что все эти свойства нетрудно доказать методом двух включений.

Замечание.

1. В соответствии с тождеством 3, пустое множество в алгебре множеств относительно операции прямого произведения играет

роль, аналогичную роли числа 0 в обычной числовой алгебре относительно операции умножения.

2. Из примера 16.1 следует, что операция прямого произведения множеств не коммутативна:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Операцию прямого произведения двух множеств можно обобщить.

Прямое (декартово) произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ есть множество всех кортежей длины m на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_m$:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m): \; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_m \in A_m\}.$

Если все множества A_i, где i=1,2, ... m, равны A, то указанное декартово произведение называют *m-й декартовой степенью множества A* и обозначают A^m.

Итак,

$$A^m = A \times A \times \ldots \times A.$$

В частности,

- при m=0 положим по определению $A^0 = \varnothing$,
- при m=1 положим по определению $A^1 = A$, то есть первая декартова степень любого множества есть само множество,
- при m=2 получаем $A \times A = A^2$ – *декартов квадрат*,
- при m=3 $A \times A \times A = A^3$ – *декартов куб* множества A.

Пример 17. Степенями множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ являются следующие множества:

$\boldsymbol{R}^2$ – множество всех мыслимых точек (x,y) плоскости в декартовой системе координат,

$\boldsymbol{R}^3$ – множество всех мыслимых точек (x,y,z) пространства в декартовой системе координат,

$\boldsymbol{R}^n$ – n-мерное евклидово арифметическое пространство.

Вопросы и задания для самостоятельной работы

1. Что называют множеством?
2. Охарактеризуйте способы задания множеств.
3. Задайте пустое множество.
4. Сформулируйте определения равенства и включения для двух множеств.
5. Дайте определение булеана множества A.
6. Назовите множество, которое является подмножеством любого множества.
7. Что называют универсальным множеством?
8. Дайте определение и графическую интерпретацию объединения множеств.
9. Дайте определение и графическую интерпретацию пересечения множеств.
10. Дайте определение и графическую интерпретацию разности множеств.
11. Дайте определение и графическую интерпретацию симметрической разности множеств.
12. Дайте определение и графическую интерпретацию дополнения множества до универсального.
13. Перечислите, какие из операций над множествами обладают свойством коммутативности?
14. Перечислите, какие из операций над множествами обладают свойством ассоциативности?
15. Перечислите, какие из операций над множествами обладают свойством идемпотентности?
16. Для каких операций над множествами выполняется закон дистрибутивности?
17. Для каких операций над множествами выполняются законы поглощения?
18. Какими свойствами обладает операция дополнения множества до универсального?
19. Что называется кортежем?
20. Чем отличается кортеж от обычного множества?
21. Что называется прямым произведением множеств?
22. Перечислите свойства прямого произведения.
23. Что означает символ A^m ?

Глава II. Множества и соответствия

2.1. Соответствие и его свойства. Понятие отображения

Рассмотрим различные варианты сопоставления элементов множеств.

Пусть даны множества X и Y.

Соответствием между множествами X и Y назовем тройку объектов $Г=<X, Y, G>$ [4], где:

- ✔ X – область отправления соответствия;
- ✔ Y – область прибытия соответствия;
- ✔ G – график соответствия.

Таким образом, соответствие отождествляют с его графиком и считают, что соответствие из множества X в множество Y есть некоторое подмножество G декартова произведения множеств X и Y т.е.

$$G \subseteq X \times Y.$$

В частности, при $G=\varnothing$ получаем *пустое соответствие*, а при $G=X\times Y$ – *универсальное соответствие.*

Область определения D соответствия – множество всех первых компонент упорядоченных пар из G:

$$D=\{x\in X:\ \exists\ y\in Y \text{ такой, что } (x,y)\in G\}.$$

Область значений R соответствия – множество всех вторых компонент упорядоченных пар из G:

$$R=\{y\in Y:\ \exists\ x\in X \text{ такой, что } (x,y)\in G\}.$$

Из приведенных выше определений следует, что в общем случае $D\subseteq X$, $R\subseteq Y$.

Рассмотрим основные свойства соответствий.

Соответствие называется *всюду определенным*, если $D=X$.

Соответствие называется *сюръективным*, если $R=Y$.

Соответствие называется *инъективным*, если

$$\forall x_1,\ x_2\in D\ \ (x_1,y)\in G \text{ и } (x_2,y)\in G \Rightarrow x_1=x_2.$$

Рассмотрим важные частные виды соответствий – функцию и отображение.

Пусть $X,\ Y\neq\varnothing$.

Определение 1 Соответствие называется *функциональным* или *функцией*, если:

$$\forall y_1,\ y_2\in R\ \ (x,y_1)\in G \ и\ (x,y_2)\in G \Rightarrow y_1=y_2.$$

Отметим, что четыре свойства: всюду определенность, сюръективность, инъективность и функциональность относят к основным свойствам соответствий.

Рассмотрим понятие отображения.

Определение 2 Соответствие называется *отображением* X *в* Y, если оно:

- ✔ всюду определено,
- ✔ функционально.

Определение 3 Соответствие называется *отображением* X *на* Y, если оно:

- ✔ всюду определено,
- ✔ функционально,
- ✔ сюръективно.

Таким образом, отображение определяют посредством перечисления определеных свойств соотвествия.

Однако существует и другой подход к определению отображения.

Отображение это тройка объектов $< X, Y, f >$ [4], где:

- ✔ X, Y – непустые множества,
- ✔ f – правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $y \in Y$.

При этом отображение также обозначается записью $f: X \to Y$.

Множество X называется *областью определения* отображения f;

элемент $x \in X$ – *аргументом* отображения f.

Образом элемента x при отображении f называется элемент $y \in Y$, который отображением f сопоставляется элементу x и обозначается $f(x)$, то есть пишут $y=f(x)$.

Областью значений отображения f называется множество:

$$R(f)=\{\, y \in Y\!:\ \exists x \in X \text{ и } y=f(x)\}.$$

Прообразом элемента $y_0 \in Y$ при отображении f называется множество всех элементов $x \in X$, для которых $f(x)=y_0$, и которое обозначается $f^{-1}(y_0)$, т.е.

$$f^{-1}(y_0)=\{\, x \in X\!:\ f(x)=y_0\}.$$

Замечание.

1. В общем случае для отображения $f: X \to Y$ может существовать несколько различных элементов множества X, образы которых совпадают.
2. Прообраз элемента может быть пустым множеством.

Понятия образа и прообраза элемента можно обобщить на случай множества.

Пусть задано соответствие $\Gamma=<X, Y, G>$ и $A \subseteq X$ – некоторое множество.

Определение 4 Множество

$$\Gamma(A)=\{\, y \in Y:\ (x,y) \in G \text{ и } x \in A\}$$

называется *образом множества А при соответствии Г* или *сечением соответствия* по множеству $A \subseteq X$.

Из определения 4 следует, что сечением соответствия для фиксированного элемента x является множество всех образов элемента x при данном соответствии.

Пусть $B \subseteq Y$ – произвольное множество.

Определение 5 Множество

$$\Gamma^{-1}(B) = \{x \in X:\ (x,y) \in G \text{ и } y \in B\}$$

называется *прообразом множества В при соответствии Г.*

Пример 1.

1. Рассмотрим соответствие $\Gamma=<X, Y, G>$, где $X=\{a,b,c,d\}$, $Y=\{1,2,3,4,5\}$, график соответствия $G=\{(a,2), (b,1), (b,5), (d,4)\}$. Пусть даны множества $A=\{a,b\} \subseteq X$ и $B=\{3,4\} \subseteq Y$.

   - ✔ Найдем образы элементов множества X: $\Gamma(a)=\{2\}$, $\Gamma(b)=\{1,5\}$, $\Gamma(c)=\varnothing$, $\Gamma(d)=\{4\}$.
   - ✔ Найдем образ множества A: $\Gamma(A)=\{1,2,5\}$.
   - ✔ Найдем прообразы элементов множества Y: $\Gamma^{-1}(1)=\Gamma^{-1}(5)=\{b\}$, $\Gamma^{-1}(2)=\{a\}$, $\Gamma^{-1}(3)=\varnothing$, $\Gamma^{-1}(4)=\{d\}$.
   - ✔ Найдем прообраз множества B: $\Gamma^{-1}(B)=\{d\}$.

2. Рассмотрим отображение $<X, Y, f>$, где $X=Y=\{1,2,3\}$, а правило $f: X \to Y$ зададим следующим образом: $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=2$.

   - ✔ Построим граф отображения f.

     Для наглядности множества X и Y изобразим диаграммами Эйлера-Венна, их элементы – точками, а правило f – стрелкой от x к y (рис.1). Отображение f можно наглядно представить также с помощью графика (рис.2).

   - ✔ Найдем образы элементов множества X и образ самого множества X:

     элемент $x_1 = 1$ имеет образ $y_1 = 1$, элемент $x_2 = 2$ также имеет образ $y_1 = 1$, то есть их образы совпадают; элемент $x_3 = 3$ имеет образ $y_2 = 2$. Следовательно, образ множества X есть множество $f(X) = \{1,2\}$.

- Найдем прообразы элементов множества Y и прообраз самого множества Y:

  элемент $y_1 = 1$ имеет два прообраза – $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$; элемент $y_2 = 2$ имеет прообраз $x_3 = 3$, а элемент $y_3 = 3$ не имеет прообраза (прообраз есть Ø). Следовательно, прообраз множества Y есть множество $f^{-1}(Y)=\{1,2,3\}$.

- Выясним, какими из 4 основных свойств обладает отображение f.

  Из рис.1 следует, что f:

  1. всюду определено,
  2. не сюръективно,
  3. не инъективно,
  4. функционально.

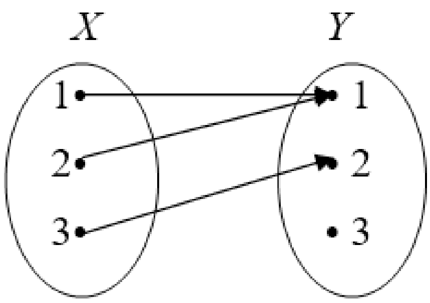


Рис.1. Граф отображения f

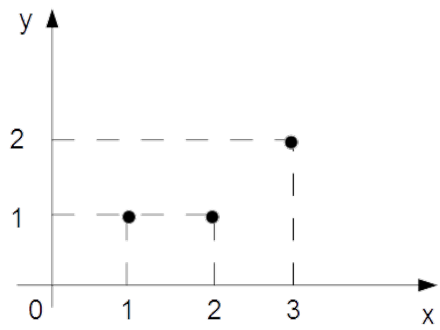


Рис.2. График отображения f

Вернемся к свойствам соответствий.

Определение 6 Соответствие называется *взаимно однозначным*, если оно:

- функционально,
- инъективно.

В примере 1 отображение f является функциональным, но не инъективным, поэтому оно не является взаимно однозначным.

Определение 7 Соответствие называется *биекцией*, если оно:

- всюду определено,
- сюръективно,
- функционально,
- инъективно.

Существование биекции $f: X \to Y$ означает, что каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y, и наоборот. Таким образом, биекция осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y. Однако, как следует из определений 6 и 7, обратное утверждение неверно. В частности, функция является биекцией, если она не только инъективна, но и сюръективна.

Пример 2. Пусть функции $f_i : [0,1] \to [0,1]$, где $i=\{1, 2, 3, 4\}$ заданы графически (рис. 3). Определим свойства представленных функций:

- f_1 сюръективна, но не инъективна,
- f_2 инъективна, но не сюръективна,
- f_3 биективна,
- f_4 не инъективна и не сюръективна.

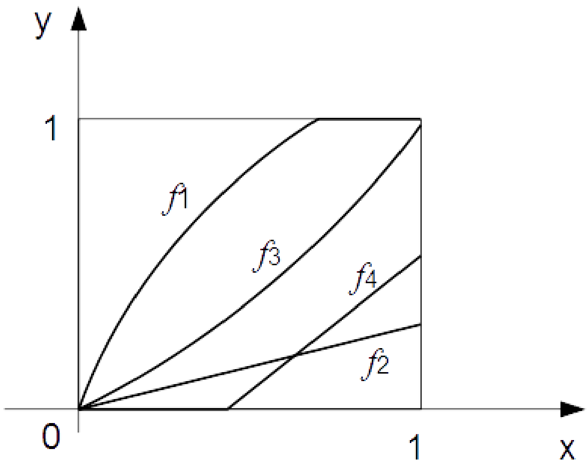


Рис.3. Графики функций f_i

Рассмотрим некоторые виды биекций.

Определение 8 Биекция множества X на себя называется *автоморфизмом множества X*.

Наряду с термином *автоморфизм* используют также термин *подстановка множества*.

Пример 3.

- ✔ Отображение $<\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N} \setminus \{1\}, f>$, где $f(n)=n+1$ – биекция множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ на его подмножество $N \setminus \{1\}$.
- ✔ Отображение $<\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^+, f>$, где $f(x)=a^x$, $a>0$ – любая показательная функция, есть биекция множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел на множество $\boldsymbol{R}^+$ всех положительных действительных чисел.
- ✔ Отображение, сопоставляющее каждой точке окружности точку, в которую она перейдет при повороте всей окружности вокруг ее центра на угол α (поворот окружности на угол α) – автоморфизм множества точек окружности.

Определение 9 *Тождественным отображением множества X в себя* называется отображение $e_X: X \to X$ такое, что:

$$e_X(x)=x \quad \forall x \in X.$$

Поскольку тождественное отображение есть биекция множества X на себя, то оно является еще одним примером автоморфизма множества X.

2.2. Операции над соответствиями

Из определения соответствия следует, что любое соответствие можно считать множеством. Следовательно, теоретико-множественные операции над множествами, определенные в главе I, можно применять и к соответствиям. При этом, говоря о дополнении соответствия между множествами X и Y, мы имеем в виду дополнение до *универсального соответствия* из X в Y, т.е. до декартова произведения $X \times Y$. Аналогично и равенство соответствий трактуется как равенство множеств.

В то же время на соответствия можно распространить операции, определенные для функций. Рассмотрим две такие операции – композицию и обратное соответствие.

2.2.1. Композиция соответствий и ее свойства

Пусть даны два соответствия $\Gamma_1 = <X, Z, G_1>$ и $\Gamma_2 = <Z, Y, G_2>$, графики которых $G_1 \subseteq X \times Z$ и $G_2 \subseteq Z \times Y$ соответственно.

Определение 10 *Композицией (произведением)* соответствий называется соответствие на множествах X и Y, график которого обозначается $G_1 \circ G_2$ и определяется следующим образом:

$$G_1 \circ G_2 = \{(x,y)\colon \exists z \in Z \text{ такой, что } (x,z) \in G_1 \text{ и } (z,y) \in G_2\}. \qquad (1)$$

Поясним построение композиции двух соответствий.

Пусть область определения соответствия G_1 не пуста, то есть множество $D(G_1) \neq \varnothing$. Возьмем произвольный элемент $x \in D(G_1)$. Пусть сечение $\Gamma_1(x) \subseteq Z$, $\Gamma_1(x) \neq \varnothing$ и найдется такой элемент $z \in \Gamma_1(x)$, что сечение $\Gamma_2(z) \subseteq Y$ и $\Gamma_2(z) \neq \varnothing$. Тогда непустое множество $\{(x,t)\colon t \in \Gamma_2(z)\}$ будет подмножеством сечения соответствия $G_1 \circ G_2$ в точке x. В силу сделанных предположений, сечением соответствия $G_1 \circ G_2$ в точке x будет непустое множество всех таких упорядоченных пар $(x,t) \in Z \times Y$, что $x \in D(G_1)$, а $t \in \Gamma_2(z)$ для некоторого $z \in \Gamma_1(x)$. Другими словами, при построении композиции двух соответствий нужно перебрать все элементы z из сечения $\Gamma_1(x)$. Таким образом, промежуточный элемент z в общем случае не единственный и каждому такому элементу также ставится в соответствие не единственный элемент $y \in Y$.

Отметим, что для того, чтобы композиция (1) была отлична от пустого соответствия, необходимо и достаточно, чтобы $R(G_1) \cap D(G_2) \neq \varnothing$.

Пусть дано также соответствие $\Gamma_3 = <Y, H, G_3>$, график которого $G_3 \subseteq Y \times H$.

Приведем некоторые свойства композиции соответствий:

- ✔ $(G_1 \circ G_2) \circ G_3 = G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$ – *ассоциативность*;
- ✔ $G \circ \varnothing = \varnothing \circ G = \varnothing$;
- ✔ $G_1 \circ (G_2 \cup G_3) = (G_1 \circ G_2) \cup (G_1 \circ G_3)$ – дистрибутивность $\circ$ относительно $\cup$.

Эти свойства доказываются *методом двух включений*.

Заметим, что роль пустого соответствия аналогична роли нуля при умножении чисел.

Рассмотрим частный случай соответствия – отображение.

Композиция отображений определяется как частный случай композиции соответствий.

Пусть заданы отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$.

Композицией отображений $f \circ g$ называется отображение из X в Z, задаваемое формулой $y = g(\, f(x)\,)\ \ \forall x \in X$.

Тем самым задается график отображения $f \circ g$ как множество упорядоченных пар (x,y), таких, что $y = g(\, f(x)\,)$. При этом упорядоченная пара (x,y) будет принадлежать графику отображения $f \circ g$ если и только если найдется элемент $z \in Z$ такой, что $z = f(x)$ и $y = g(z)$.

Отметим, что при построении композиции отображений предполагают, что пересечение области значений $R(f)$ отображения f и области определения $D(g)$ отображения g не пусто, т.е. $R(f) \cap D(g) \neq \varnothing$.

Очевидно, что для композиции отображений выполняются все приведенные выше свойства композиции соответствий.

При этом если отображения f и g – биекции, то их композиция $f \circ g$ есть также биекция.

2.2.2. Обратное соответствие и его свойства

Пусть дано соответствие $\Gamma = \langle X, Z, G \rangle$, график которого $G \subseteq X \times Y$.

Определение 11 *Соответствием, обратным к соответствию* Γ называется соответствие из Y в X, график которого обозначается G^{-1} и определяется следующим образом:

$$G^{-1} = \{(y,x):\ (x,y) \in G\}. \tag{2}$$

Пусть даны два соответствия $\Gamma_1 = \langle X, Z, G_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle Z, Y, G_2 \rangle$, графики которых $G_1 \subseteq X \times Z$ и $G_2 \subseteq Z \times Y$ соответственно.

Обратное соответствие обладает следующими свойствами:

- ✔ $(G^{-1})^{-1} = G$;
- ✔ $(G_1 \circ G_2)^{-1} = G_2^{-1} \circ G_1^{-1}$.

Перечисленные свойства нетрудно проверить, исходя из определений 10 и 11.

Заметим, что в общем случае $G \circ G^{-1} \neq G^{-1} \circ G$. Проиллюстрируем это утверждение на примере 4.

Пример 4. Рассмотрим соответствие $\Gamma = \langle X, Y, G \rangle$, где $X = Y = \{1,2,3,4\}$, график соответствия $G = \{(4,2), (3,1), (4,1)\}$ (рис.4).

- ✔ Построим обратное соответствие, график которого задается (2) и имеет вид $G^{-1} = \{(1,3), (1,4), (2,4)\}$ (рис. 5).

- Построим композицию соответствий G и G^{-1}, график которой $G \circ G^{-1}=\{(3,3), (3,4), (4,3),(4,4)\}$ (рис.6).
- Построим композицию соответствий G^{-1} и G, график которой $G^{-1} \circ G=\{(1,1), (1,2), (2,1),(2,2)\}$ (рис.7).

Из рисунков 6 и 7 следует, что действительно графики соответствий $G \circ G^{-1}$ и $G^{-1} \circ G$ не совпадают.

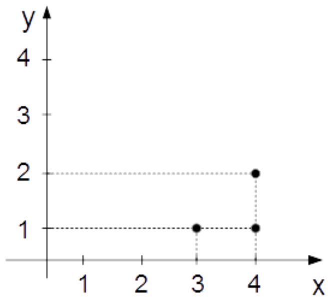


Рис. 4. График соответствия G

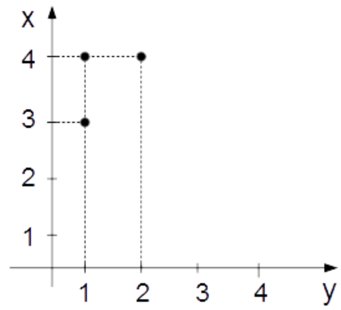


Рис. 5. График соответствия G^{-1}

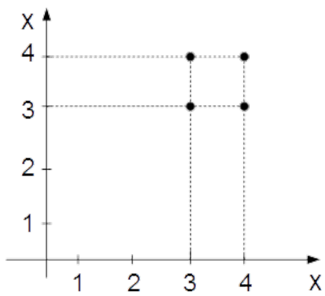


Рис. 6. График композиции $G \circ G^{-1}$

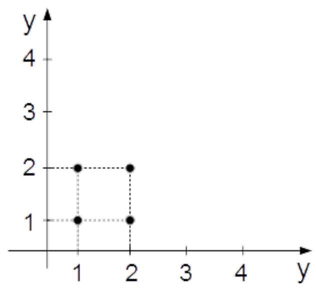


Рис. 7. График композиции $G^{-1} \circ G$

Перейдем к отображениям.

Пусть f: $X \to Y$ – отображение. Соответствие, обратное к f, в общем случае не является отображением. Действительно, оно состоит из всех упорядоченных пар вида $(f(x), x)$, где $x \in X$. Поскольку в общем случае могут найтись два различных элемента x_1 и x_2, таких, что $f(x_1)=f(x_2)$, то соответствие, обратное к f, не будет отображением, поскольку не функционально.

Определим обратное отображение.

Пусть заданы отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to X$, e_X – тождественное отображение множества X в себя, e_Y – тождественное отображение множества Y в себя.

Определение 12 Отображение g называется *обратным к отображению* f (а отображение f обратным к g), если

$$f \circ g = e_X, \quad g \circ f = e_Y.$$

Обозначение: отображение, обратное к f, обозначается f^{-1}.

Обратное отображение существует не всегда. Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения сформулируем в следующей теореме.

Теорема 1

Отображение f имеет обратное $\Leftrightarrow f$ – биекция.

Доказательство.

1) Необходимость.

Пусть f: $X \to Y$ и существует обратное отображение g: $Y \to X$. Рассмотрим $\forall y \in Y$ и $x=g(y)$. Тогда $f(x) = f(g(y)) = y$ и x – прообраз y при отображении f. Таким образом, любой $y \in Y$ имеет прообраз, то есть f сюръективно.

Далее, если $x_1, x_2 \in X$, причем $f(x_1) = f(x_2)$, то $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Следовательно, по определению обратного отображения $e_X(x_1) = e_X(x_2)$, т.е. $x_1=x_2$. Отсюда f инъективно.

2) Достаточность.

Пусть f – биекция. Определим отображение g: $Y \to X$ следующим образом: положим $g(y)=x$, если $f(x)=y$. В силу биективности f отображение g определено на всем Y и является обратным к f.

Ч.т.д.

Таким образом, если отображение f: $X \to Y$ биективно, то обратное соответствие f^{-1} является отображением из Y в X, причем имеют место равенства:

$$f \circ f^{-1} = e_X, \quad f^{-1} \circ f = e_Y.$$

Наряду с вопросом о существовании обратного отображения, важным является также вопрос о его единственности.

Теорема 2

Если обратное отображение существует, то оно единственно.

Доказательство.

Пусть f: $X \to Y$ – некоторое отображение множества X во множество Y и существуют два отображения, обратные к нему: g: $Y \to X$ и h: $Y \to X$.

Тогда $(g \circ (f \circ h))(y) = (g \circ e_X)(y) = g(y)$ и $((g \circ f) \circ h)(y) = (e_Y \circ h)(y) = h(y)$.

В силу ассоциативности композиции, имеем $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$. Отсюда получаем $g(y) = h(y) \ \ \forall y \in Y$, то есть отображения g и h совпадают.

Таким образом, обратное отображение единственно.

Ч.т.д.

2.3. Конечные и бесконечные множества

Приведенное выше понятие биекции имеет важное значение при классификации множеств по количеству элементов.

Рассмотрим понятие количества элементов во множестве, на основе которого можно классифицировать множества следующим образом: конечные и бесконечные; бесконечные множества, подразделяются на счетные и несчетные (рис.8).

Определение 13 Множество называется *конечным*, если число его элементов конечно, то есть существует натуральное число n, являющееся числом элементов множества.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Пустое множество $\varnothing$ считается конечным с числом элементов, равным нулю.

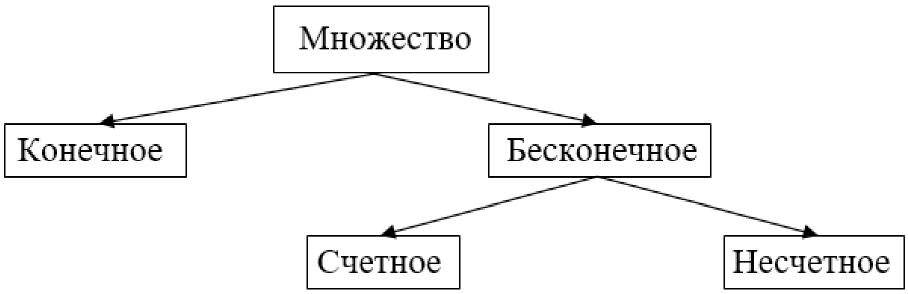


Рис.8. Классификация множеств по количеству элементов

Определение 14 Бесконечное множество X называется *счетным*, если существует биекция $f: X \to \boldsymbol{N}$ множества X на множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$.

Другими словами, если элементы множества X можно пронумеровать натуральными числами.

В противном случае множество называется *несчетным*.

Пример 5.

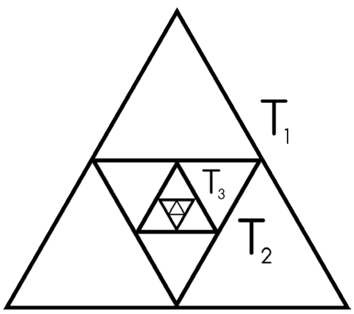


Рис.9. Множество треугольников

1. Бесконечное множество вписанных равносторонних треугольников (рис.9) можно пронумеровать, расположив их в порядке уменьшения длин сторон: $T_1, T_2, T_3, \ldots$ – счетное множество.
2. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ – счетное, так как каждому натуральному числу можно присвоить номер, равный ему самому.
3. Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ – счетно, хотя натуральный ряд номеров представляет собой лишь собственное подмножество этого множества: числу 0 присвоим номер 1, числу 1 – номер 2, числу 1 – номер 3 и т.д.
4. Множество всех нечетных натуральных чисел: $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ – счетно. Нумерацию v можно задать так: $v(n) = 2n-1$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Существование несчетных множеств является одним из важнейших открытий теории множеств. Оно следует из теоремы Кантора, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

2.4. Мощность множества

При сравнении множеств по числу элементов возникает понятие мощности множества.

Определение 15 Два множества X и Y называются *равномощными*, если существует биекция одного из них на другое.

Обозначение: $X \sim Y$ (читается «тильда»).

Обратим внимание, что в определении 15 из того, что существует биекция $f: X \to Y$, следует (по теореме 1), что существует обратное соответствие $f^{-1}: Y \to X$, которое есть также биекция. Поэтому если X равномощно Y, то и Y равномощно X, и мы можем говорить, что множества X и Y *равномощны*.

Кроме того, из определения равномощности и свойств биекции следует, что для любых множеств X, Y и Z выполняются следующие свойства:

- $X \sim X$,
- $X \sim Y,\ Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Существование биекции между двумя равномощными множествами позволяет переносить изучение свойств с одного множества на другое, когда природа элементов не важна.

Рассмотрим, например, два *конечных* множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$:

- они равномощны $\Leftrightarrow$ когда состоят из одного и того же числа элементов, то есть $n = m$;
- каждое из них не является равномощным никакому своему собственному подмножеству.

Таким образом, задавая натуральное число n, мы задаем целый класс всех попарно равномощных множеств вида $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. И обратно: каждый такой класс однозначно определяет натуральное число n, как число элементов в каждом множестве данного класса.

Этот класс называют *классом эквивалентности* множества X.

Определение 16 *Мощностью* множества X называется класс эквивалентности множества X.

Обозначение: $|X|$.

Тогда утверждение о равномощности X и Y можно записать так: $|X|=|Y|$.

Из определения 16 следует, что мощность (порядок) конечного множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть число его элементов, т.е. $|X|=n$.

Естественно считается, что мощность пустого множества равна нулю.

Мощность множества можно рассматривать и как новый объект, называемый *кардинальным числом* или *кардиналом*. Кардинальные числа можно рассматривать как имена собственные, обозначающие соответствующие мощности. Например, кардинальным числом конечного множества служит число его элементов n.

Перейдем к исследованию мощности бесконечных множеств. Оказывается, что бесконечные множества могут иметь разные мощности.

Из определения 14 следует, что бесконечное множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$.

Кардиналом (обозначением мощности) счетного множества является первая буква древнееврейского алфавита $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль»). Таким образом, все бесконечные счетные множества имеют одинаковую мощность, равную мощности множества натуральных чисел N, а именно $\aleph_0$.

Однако существуют бесконечные множества, не являющиеся счетными.

Пусть X – некоторое множество. Рассмотрим его булеан – множество, которое в главе I мы обозначили символом 2^X (или $P(X)$).

Теорема Кантора Множество 2^X, состоящее из всех подмножеств множества X, не равномощно ни самому X, ни его подмножеству.

Продемонстрируем идею доказательства этой теоремы, принадлежащую Г. Кантору (1878), при доказательстве теоремы 3.

Рассмотрим множество всех бесконечных двоичных последовательностей вида $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$ $\forall\ i \geq 1$ и обозначим его $\{0,1\}^\omega$.

Теорема 3 Множество $\{0,1\}^\omega$ не есть счетное множество.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть множество $\{0,1\}^\omega$ счетное. Тогда существует биекция $f: \boldsymbol{N} \to \{0,1\}^\omega$. Выпишем бесконечное множество последовательностей $f(n)$:

$$\begin{gathered} f(1) = \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}, \ldots\}, \\ f(2) = \{\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots\}, \\ \ldots \\ f(n) = \{\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}, \ldots\}, \ldots \end{gathered}$$

Построим новую последовательность по правилу:

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots\} = \begin{cases} \beta_i = 1, \ \text{если}\ \alpha_{ii} = 0, \\ \beta_i = 0, \ \text{если}\ \alpha_{ii} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что эта последовательность не совпадает ни с одной из последовательностей $f(n)$, а это противоречит допущению о существовании биекции. Итак, $\boldsymbol{N}$ не равномощно $\{0,1\}^\omega$.

Однако, при этом множество $\{0,1\}^\omega$ содержит подмножество последовательностей, в каждой из которых только один член отличен от нуля. Это подмножество равномощно множеству всех одноэлементных подмножеств множества $\boldsymbol{N}$ и, следовательно, самому $\boldsymbol{N}$. Таким образом, множество $\{0,1\}^\omega$ бесконечно, но не равномощно счетному множеству и потому не является счетным. *Ч.т.д.*

Рассмотрим булеан множества натуральных чисел – множество 2^N.

Теорема 4 Множество 2^N и множество $\{0,1\}^\omega$ равномощны.

Отметим, что доказательство теоремы 4 также основано на построении биекции, только теперь множества 2^N на множество $\{0,1\}^\omega$.

Из теоремы 4 следует, что множество 2^N несчетно. Мощность множества 2^N имеет специальное название.

Определение 17 Мощность множества 2^N называется *мощностью континуума*.

Определение 18 Любое множество, равномощное множеству 2^N, называется *континуальным множеством* или *континуумом*.

Кардиналом (обозначением мощности) несчетного континуального множества является латинская буква *C* (от латинского *continuum* – непрерывность) во фрактурном начертании: $\mathfrak{C}$.

Рассмотрим примеры множеств, имеющих мощность континуума.

Пример 6.

- ✔ множество действительных чисел отрезка [0,1],
- ✔ множество действительных чисел интервала (0,1),
- ✔ множество действительных чисел отрезка [a,b],
- ✔ множество действительных чисел интервала (a,b),
- ✔ множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$,
- ✔ множество всех точек пространства $\boldsymbol{R}^n$, где n – натуральное,
- ✔ множество иррациональных чисел;
- ✔ множество трансцендентных чисел;
- ✔ множество всех непрерывных функций $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ действительного переменного и т.д.

Таким образом, следующие множества равномощны:

$$\{0,1\}^\omega \sim 2^N \sim [0,1] \sim (0,1) \sim (a,b) \sim [a,b] \sim \boldsymbol{R},$$

а множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ – несчетно и иногда континуумом называют мощность множества всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Пусть задано некоторое множество X, мощность которого $|X|$. В следующей теореме рассмотрим взаимосвязь мощности самого множества X с мощностью его булеана $P(X)$.

Теорема 5 Для любого множества X выполняется следующее равенство:

$$|P(X)|=2^{|X|}.$$

Доказательство теоремы 5 для конечного множества X очевидно. В случае бесконечного множества X равенство доказывается путем построения биекции любого подмножества множества X на его характеристическую функцию.

Если множество X конечное, т.е. $|X| = n$, то теорему 5 можно перефразировать так: мощность булеана конечного множества вычисляется по формуле $|P(X)| = 2^n$.

До сих пор речь шла о равенстве мощностей, однако из теоремы Кантора следует, что никакие два из множеств

$$X,\ 2^X,\ 2^{2^X},\ 2^{2^{2^X}},\ \ldots$$

не равномощны. Таким образом, в определенном смысле можно говорить о большей или меньшей мощности одного множества по сравнению с другим.

Определение 19 Мощность множества X *строго меньше* мощности множества Y, если множества X и Y не равномощны и существует собственное подмножество Z множества Y, равномощное множеству X, т.е.

$$X \nsim Y \text{ и } \exists Z \subset Y \text{ такое, что } X \sim Z.$$

Обозначение: $|X| < |Y|$.

Из определения 19 следует, что мощность любого конечного множества строго меньше $\aleph_0$, а из доказательства теоремы 3 следует, что $\aleph_0 < \mathfrak{C}$. Кроме того, мощность счетного множества $\aleph_0$ является наименьшей на множестве мощностей бесконечных множеств, поэтому можно сказать, что всякое бесконечное множество не менее чем счетно.

Считают, что мощность множества X не превосходит мощности множества Y, то есть $|X| \leq |Y|$, если X равномощно некоторому подмножеству множества Y.

Приведем без доказательства две важные теоремы. Первая из них утверждает, что любые два множества сравнимы по мощности.

Теорема Кантора-Бернштейна Для любых двух множеств X и Y существует одна и только одна из следующих возможностей:

- либо $|X| < |Y|$;
- либо $|X| > |Y|$;
- либо $|X| = |Y|$.

Во второй теореме сравнивается мощность множества с мощностью его булеана.

Теорема о мощности булеана Для любого множества X верно неравенство:

$$|X| < |2^X|.$$

Из теоремы о мощности булеана следует, что для любого множества

X существует множество большей мощности – его булеан 2^X. Следовательно, наибольшей мощности нет. Другими словами, имеются бесконечные несчетные множества мощности сколь угодно большей, чем мощность континуума, например, булеан множества вещественных чисел, т.е. множество $2^{\boldsymbol{R}}$.

Таким образом, для мощностей бесконечных множеств можно записать следующую последовательность неравенств:

$$\aleph_0 < \mathfrak{C} < |2^{\boldsymbol{R}}| < \ldots$$

Однако неизвестно о существовании множеств промежуточной мощности между счетным $\boldsymbol{N}$ и континуальным $\boldsymbol{R}$ – в этом состоит *проблема континуума.*

Вопросы и задания для самостоятельной работы

1. Сформулируйте основные свойства соответствий.
2. Дайте определение взаимно однозначного соответствия.
3. Дайте определение биективного соответствия (биекции).
4. При каких условиях функция является биекцией?
5. Дайте определение отображения.
6. Сформулируйте определение образа множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \to Y$.
7. Сформулируйте определение прообраза множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \to Y$.
8. Сформулируйте определение сюръективного отображения (сюръекции) $f: X \to Y$.
9. Сформулируйте определение инъективного отображения (инъекции) $f: X \to Y$.
10. Сформулируйте определение биективного отображения (биекции) $f: X \to Y$.
11. Перечислите теоретико-множественные операции над соответствиями.
12. Перечислите свойства композиции соответствий. Обладает ли композиция коммутативным свойством?
13. Всегда ли (т.е. для любых ли пар отображений) определена композиция отображений? Почему?
14. Верно ли, что если композиция $f \circ g$ отображений есть биекция, то отображения f и g также биекции?
15. Дайте определение отображения, обратного к отображению $f: X \to Y$.
16. Сформулируйте свойства обратного отображения.
17. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования отображения, обратного к отображению $f: X \to Y$. Является ли оно единственным?
18. К какому классу относится множество рациональных чисел в классификации множеств по количеству элементов? Докажите.
19. Приведите пример множества из каждого класса в классификации множеств по количеству элементов.
20. Перечислите свойства равномощных множеств.
21. Назовите множество, которому равномощно каждое бесконечное счетное множество.
22. Как обозначается мощность любого бесконечного счетного множества?
23. Пусть X – произвольное множество. Назовите множество, которое не равномощно ни самому множеству X, ни любому его подмножеству.
24. Назовите множество, которому равномощно любое континуальное множество.
25. Как обозначается мощность континуума?
26. Как можно сравнить любые два множества по мощности?
27. Расположите кардинальные числа множеств, соответственно классификации множеств по количеству элементов, в порядке возрастания.

Глава III. Множества и отношения

3.1. Понятие отношения

Достаточно часто при решении задач возникает необходимость выбирать элементы одного или нескольких множеств, «связанные» между собой некоторым отношением. Рассмотрим пример.

Пример 1. Имеется два множества:

- ✔ X – студенты, пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- ✔ Y – города, пусть $Y = \{М, Х, С, Р, Т, К\}$.

Составим все пары вида (студент; город). Из множества таких пар мы выберем лишь те, которые «связывают» каждого студента только с тем городом, где он действительно побывал: студент 1 побывал в М и С, 2 в Х, 3 в Т, К и М, 5 в К.

Очевидно, что множество всех возможных пар (студент; город) есть прямое произведение множеств $X \times Y$, а «список» пар (студент; город, в котором побывал студент) будет являться подмножеством этого прямого произведения:

$$\{(1, М), (1, С), (2, Х), (3, Т), (3, К), (3, М), (5, К)\} \subseteq X \times Y.$$

Обобщим рассмотренный пример на случай нескольких множеств.

Пусть даны множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Определение 1 Произвольное подмножество Q прямого произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ называется *n-арным* или *n-местным отношением* на множествах $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т.е.

$$Q \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Если Q – n-арное отношение на множествах $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и кортеж $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$, то говорят, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *связаны отношением* Q.

В примере 1 элементы x и y связаны отношением Q – «x побывал в городе y», где $x \in X$, $y \in Y$.

При $n=1$ отношение Q является подмножеством множества X и называется *унарным отношением* или *свойством*.

При $n=2$ получаем *бинарное отношение* на множествах X_1 и X_2.

В примере 1 $n=2$, т.е. мы рассмотрели бинарное отношение на множествах X и Y.

Если все множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ совпадают, т.е. $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то говорят о *n-арном отношении на множестве* X.

3.2. Бинарные отношения на множествах

Изучим бинарные отношения более подробно.

Из определения 1 следует, что каждое *бинарное отношение* Q на множествах X и Y есть подмножество прямого произведения X и Y, т.е.

$$Q \subseteq X \times Y.$$

Таким образом, *бинарное отношение* Q на множествах X и Y есть произвольное подмножество упорядоченных пар (x,y), где $x \in X$, $y \in Y$.

Обозначение: xQy или $(x,y) \in Q$.

Элементы x и y называют *координатами (компонентами) отношения* Q.

Областью определения бинарного отношения Q называется множество

$$D_Q = \{x\text{: } \exists y \text{ такое, что } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in Q\}.$$

Областью значений бинарного отношения Q называется множество

$$R_Q = \{y\text{: } \exists x \text{ такое, что } (x,y) \in Q\}.$$

В примере 1: $D_Q = \{1, 2, 3, 5\}$, $R_Q = \{\text{М, С, К, Х, Т}\}$.

Пример 2. Пусть $X = \{2,4\}$, $Y = \{2,3,4,6\}$. На множествах X и Y зададим бинарное отношение Q: y делится на x (вторая компонента делится на первую):

$$Q = \{(2,2),(2,4),(4,4), (2,6)\}.$$

- Область определения отношения $D_Q = \{2,4\} = X$,
- область значений отношения $R_Q = \{2,4,6\} \subseteq Y$.

3.2.1. Способы задания бинарных отношений

Рассмотрим способы задания бинарных отношений на множествах:

- перечисление,
- матрица отношения,
- график отношения,
- граф отношения.

Задать бинарное отношение *перечислением* означает указать множество пар, для которых это отношение выполняется. Таким способом заданы отношения в примерах 1 и 2. Очевидно, что такой способ применим для конечных множеств.

Пусть X и Y – конечные множества порядка m и n соответственно, Q – бинарное отношение на X и Y.

Определение 2 *Матрицей бинарного отношения* на множествах X и Y называется матрица порядка $m \times n$, в которой элемент q_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца определяется так:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i Q y_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначение: $[Q]$.

Пример 2.

1. Пусть $X = \{\text{а,е,и,о}\}$, где m=4 и $Y = \{\text{б,з,п}\}$, где n=3. Зададим на множествах X и Y бинарное отношение Q: буква x стоит в алфавите

после буквы y. Матрица отношения Q размерности 4×3 имеет вид:

$$[Q]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. В примере 1 на множествах $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где m=5, и Y = {М, Х, С, Р, Т, К}, где n=6, задано бинарное отношение

   P={(1, М), (1, С), (2, Х), (3, Т), (3, К), (3, М), (5, К)}.

Матрица отношения P размерности 5×6 имеет вид:

$$[P]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица бинарного отношения содержит полную информацию о связях между элементами и позволяет представить бинарное отношение на ЭВМ.

Заметим, что любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения [2].

Для наглядного представления бинарных отношений, как частных случаев соответствий, применяют два способа. Первый из них состоит в интерпретации бинарного отношения как подмножества прямого произведения, которое изображают аналогично тому, как в декартовых координатах на плоскости изображают подмножества декартова квадрата числовых множеств. Такой способ изображения бинарных отношений называют *графиком отношения*.

Второй способ – построение графа отношения. Пусть X и Y – конечные множества. Граф бинарного отношения на множествах X и Y строится следующим образом:

- ✔ элементы множеств X и Y изображаются точками на плоскости,
- ✔ если имеет место xQy, то на рисунке изображается стрелка, ведущая от точки, соответствующей элементу x, к точке, соответствующей элементу y.

<u>Пример 3.</u> Вернемся к примеру 2.

1. Представим наглядно бинарное отношение Q в примере 2.1 (рис.1 и рис.2).

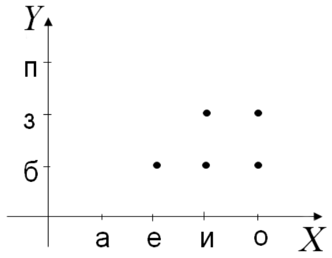


Рис.1. График отношения Q

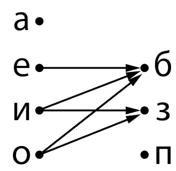


Рис.2. Граф отношения Q

2. Представим наглядно бинарное отношение P в примере 2.2 (рис.3 и рис.4).

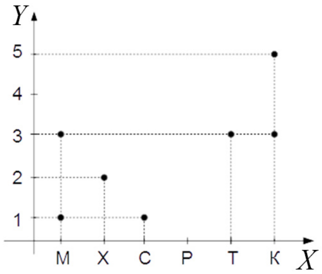


Рис.3. График отношения P

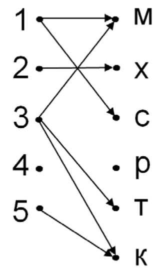


Рис.4. Граф отношения P

Замечание. Многоместные отношения удобно задавать с помощью *реляционных таблиц*. Такое задание соответствует перечислению в первой строке таблицы множеств, на которых задано n-местное отношение, а в последующих строках таблицы – множества n-ок отношения Q (табл.1).

X_1	X_2	…	X_n
x_1	x_2	…	x_n
x_1'	x_2'	…	x_n'
…	…	…	…

Табл.1. Реляционная таблица

Реляционные таблицы широко используют в компьютерной практике в реляционных базах данных. При этом множества X_i называют атрибутами (свойствами), а элементы $x_i \in X_i$ – доменами (значениями) атрибутов.

3.2.2. Операции над бинарными отношениями

Для бинарных отношений, поскольку они являются множествами, определены теоретико-множественные операции (объединение, пересечение и т.д.) по соответствующим правилам операций над множествами.

При этом на конечных множествах такие операции можно проводить также в матричном виде.

Рассмотрим конечные множества $X = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ и бинарные отношения Q, $P \subseteq X \times Y$, заданные матрицами $[Q] = (q_{ij})$ и $[P] = (p_{ij})$

соответственно, где i=1,2,…,m, j=1,2,…,n. Отметим, что матрицы $[Q]$ и $[P]$ имеют одинаковую размерность, равную $m \times n$.

Приведем основные свойства матриц бинарных отношений:

1. Если выполняется включение $P \subseteq Q$, то $\forall i,j$ выполняется $p_{ij} \le q_{ij}$.
2. Матрица *объединения* $Q \cup P$ двух бинарных отношений есть матрица
$$[Q \cup P] = (q_{ij} + p_{ij}) = [Q]+[P],$$
где сложение элементов $q_{ij} + p_{ij}$ осуществляется по бинарным правилам:
$$0+0=0;\ 1+0=0+1=1;\ 1+1=1.$$
3. Матрица *пересечения* $Q \cap P$ двух бинарных отношений есть матрица
$$[Q \cap P] = (q_{ij} * p_{ij}) = [Q]*[P],$$
где умножение $q_{ij} * p_{ij}$ осуществляется поэлементным перемножением соответствующих элементов из $[Q]$ и $[P]$.

Пример 4. Пусть $[Q]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[P]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда:

1. $[Q \cup P]=[Q]+[P]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $[Q \cap P]=[Q]*[P]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть даны бинарные отношения $Q \subseteq X \times Z$ и $P \subseteq Z \times Y$.

Определение 3 *Композицией* (*произведением*) $Q \circ P$ бинарных отношений Q и P называется множество
$$Q \circ P = \{(x,y):\ x \in X,\ y \in Y,\ \exists z \in Z \text{ такой, что } (x,z) \in Q \text{ и } (z,y) \in P\}.$$

Из определения 3 следует, что композиция бинарных отношений отлична от пустого отношения тогда и только тогда, когда Z – непустое множество, т.е.
$$Q \circ P \neq \varnothing \Leftrightarrow Z \neq \varnothing.$$

Пример 5. Пусть X={a, b, c}, Z ={1,2,3,4}, Y ={♣,♦}, $Q \subseteq X \times Z$, $P \subseteq Z \times Y$. Зададим отношения Q и P перечислением:

Q ={(a,2), (b,1), (b,4), (c,2)}, P ={(2,♣), (2,♦), (3,♦), (1,♣)}.

Найдем композицию Q и P:

$Q \circ P$ ={(a,♣), (a,♦), (b,♣), (c,♣), (c,♦)}.

Композиция бинарных отношений есть также бинарное отношение, поэтому ее можно задать не только перечислением, как в примере 4, но и матрицей. Рассмотрим, как строится матрица композиции.

Пусть $X=\{x_1, x_2, \dots x_m\}$, $Z=\{z_1, z_2, \dots z_n\}$, $Y=\{y_1, y_2, \dots y_r\}$ – конечные множества. Рассмотрим бинарные отношения $Q \subseteq X \times Z$ и $P \subseteq Z \times Y$, заданные матрицами $[Q]=(q_{ij})$ размерности $m \times n$ и $[P]=(p_{ij})$ размерности $n \times r$.

Матрицу *композиции* $Q \circ P$ бинарных отношений находят по правилу

$$[Q \circ P] = [Q] \cdot [P],$$

где:

- ✔ умножение матриц справа производят по обычному правилу (строка на столбец),
- ✔ но произведение и сумму соответствующих элементов из $[Q]$ и $[P]$ находят по бинарному правилу.

Пример 6. Пусть даны матрицы отношений Q и P:

$$[Q]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ [P]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем:

- ✔ матрицу композиции отношений Q и P

$$[Q \circ P]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- ✔ матрицу композиции отношений P и Q

$$[P \circ Q]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из примера 6 следует, что $Q \circ P \neq P \circ Q$, т.е. композиция бинарных отношений не коммутативна.

Определение 4 *Обратным отношением* для отношения $Q \subseteq X \times Y$ называется отношение $Q^{-1} \subseteq Y \times X$ такое, что:

$$Q^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in Q\}.$$

Матрица *обратного отношения* Q^{-1} равна транспонированной матрице отношения Q, т.е.

$$[Q^{-1}] = [Q]^{T}.$$

Пример 7. Пусть бинарное отношение $Q=\{(a,2), (b,1), (b,4), (c,2)\}$, $Q \subseteq X \times Y$, где $X=\{a, b, c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$.

Найдем:

- ✔ матрицу отношения $[Q]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,
- ✔ обратное отношение $Q^{-1}=\{(2,a),(1,b),(4,b),(2,c)\}$, $Q^{-1}\subseteq Y\times X$,
- ✔ матрицу обратного отношения $[Q^{-1}]=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Действительно, $[Q^{-1}]=[Q]^{\mathrm{T}}$.

Приведем свойства рассмотренных операций.

Для любых бинарных отношений Q, P, R, выполняются следующие свойства:

1. $(Q\circ P)\circ R=Q\circ(P\circ R)$ – *ассоциативность* композиции.

Доказательство.

Докажем включение $(Q\circ P)\circ R\subseteq Q\circ(P\circ R)$. Пусть $(x,y)\in(Q\circ P)\circ R$, тогда для некоторых u и v имеем $(x,u)\in Q$, $(u,v)\in P$, $(v,y)\in R$. Таким образом, $(u,y)\in P\circ R$ и $(x,y)\in Q\circ(P\circ R)\Rightarrow(Q\circ P)\circ R\subseteq Q\circ(P\circ R)$.

Включение $Q\circ(P\circ R)\subseteq(Q\circ P)\circ R$ доказывается аналогично.

Ч.т.д.

2. $(Q^{-1})^{-1}=Q$.

Доказательство.

По определению обратного отношения условие $(x,y)\in Q$ равносильно условию $(y,x)\in Q^{-1}$, что, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда $(x,y)\in(Q^{-1})^{-1}\Rightarrow Q=(Q^{-1})^{-1}$.

Ч.т.д.

3. $(Q\circ P)^{-1}=P^{-1}\circ Q^{-1}$.

Доказательство.

Докажем включение $(Q\circ P)^{-1}\subseteq P^{-1}\circ Q^{-1}$. Пусть $(x,y)\in(Q\circ P)^{-1}$, тогда $(y,x)\in Q\circ P$, и, следовательно, $(y,z)\in Q$ и $(z,x)\in P$ для некоторого элемента z. Значит, $(x,z)\in P^{-1}$ и $(z,y)\in Q^{-1}$ и $(x,y)\in P^{-1}\circ Q^{-1}\Rightarrow(Q\circ P)^{-1}\subseteq P^{-1}\circ Q^{-1}$.

Включение $P^{-1}\circ Q^{-1}\subseteq(Q\circ P)^{-1}$ доказывается аналогично.

Ч.т.д.

3.3. Бинарные отношения на X

Между элементами одного множества также можно задавать различные бинарные отношения.

Пусть $X \neq \varnothing$.

Определение 5 *Бинарным отношением на множестве X* называется любое подмножество Q декартова квадрата множества X, т.е.

$$Q \subseteq X^2.$$

Бинарное отношение на X также можно определить на основе понятия соответствия, которое было рассмотрено в главе II (п. 2.1).

Другими словами, *бинарное отношение на X* – это пара объектов $Q = \langle X, G \rangle$, где:

- ✔ X – область задания отношения,
- ✔ G – график отношения,

причем $G \subseteq X^2$.

Если $(x,y) \in G$, то пишут xQy и говорят, что x и y вступают в отношение Q, в противном случае пишут $\overline{xQy}$.

Рассмотрим примеры бинарных отношений на множестве.

Пример 8.

1. Бинарные отношения между числами на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$: равно, не равно, меньше, больше, не меньше, не больше и так далее. При этом используют запись xQy, что согласуется с традиционной формой записи, например, $x \le y$, а не $(x,y) \in \le$. Для таких отношений употребляют устоявшееся словосочетание: x не больше y.
2. Бинарные отношения между точками на прямой: предшествует, следует за.
3. Зафиксируем универсальное множество $\boldsymbol{I}$. Бинарные отношения между множествами на $\boldsymbol{I}$: включено, равно, пересекаются, не пересекаются.

Для любого множества X рассмотрим его декартов квадрат X^2 и определим на нем следующие два отношения.

Определение 6 *Универсальным (полным)* называется отношение, которое имеет место для каждой пары (x, y) из X^2.

Обозначение: U_X.

Итак,

$$U_X = X^2.$$

Определение 7 *Тождественным отношением (диагональю)* множества X называется отношение, состоящее из всех пар с совпадающими компонентами.

Обозначение: id_X .

Итак,

$$id_X = \{(x,x): x \in X\}. \quad (1)$$

Отметим, что по определению 9 в главе II (п. 2.1), диагональ множества X есть *тождественное отображение* X на себя.

Замечание. Поскольку элементами диагонали множества X являются упорядоченные пары (x,x), то более корректно называть это множество диагональю декартова квадрата X^2.

Пример 9.

1. Пусть $X = \{2,4\}$. На множестве X зададим:
   - ✔ декартов квадрат множества X: $X^2 = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$;
   - ✔ диагональ множества X: $id_X = \{(2,2),(4,4)\}$.
   - ✔ зададим отношение Q – «вторая координата делится на первую» на множестве X^2:

     $$Q = \{(2,2),(2,4),(4,4)\}.$$

     Отношение Q не является универсальным, т.к. имеет место не для каждой пары $(x, y) \in X^2$.

Для задания бинарных отношений на X используют те же способы, что и для бинарных отношений на двух множествах. Помимо перечисления, это матрица, график и граф.

Однако в случае бинарного отношения на конечном множестве X строят граф иного вида, а именно:

- ✔ элементы множества X изображаются точками один раз,
- ✔ если имеет место xQy, то на рисунке изображается направленная дуга, ведущая от точки, соответствующей элементу x, к точке, соответствующей элементу y,
- ✔ если имеет место xQx, то на рисунке изображается петля, исходящая из точки, соответствующей элементу x, и заходящая в эту же точку.

Пример 10.

1. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$. Зададим на множестве X бинарное отношение P: $x \le y$.

✔ Матрица отношения P имеет вид:

$$[P]=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

✔ Наглядно отношение P представлено на рис. 5 и рис. 6.

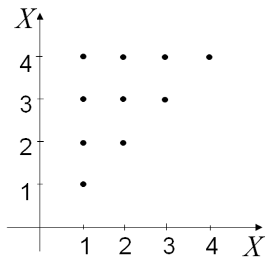


Рис.5. График отношения P

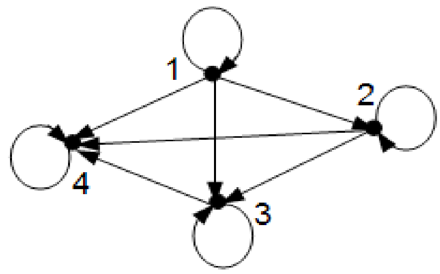


Рис.6. Граф отношения P

2. Для любого конечного множества X матрица тождественного отношения id_X есть единичная матрица:

$$[id_X]=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

3. Представим наглядно тождественное отношение id_X, если:
   - ✔ $X=\{1,2,3,4\}$ – конечное множество (рис.7 и рис.8),
   - ✔ $X=\boldsymbol{R}$ – бесконечное множество (рис.9).

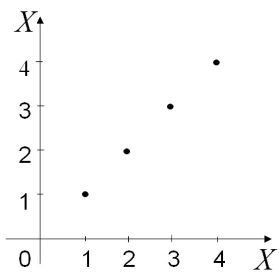


Рис.7. График отношения id_X

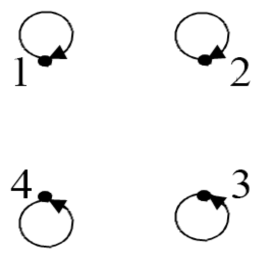


Рис.8. Граф отношения id_X

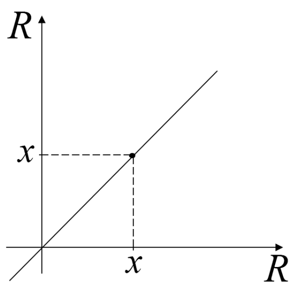


Рис.9. График отношения id_R

Таким образом, если X – конечное множество, то бинарное отношение на X можно задать ориентированным графом (рис.6, рис.8).

Если X – бесконечное множество, то бинарное отношение на X задается графиком отношения (рис.9).

3.3.1. Операции над бинарными отношениями на X

Из определения бинарного отношения на множестве следует, что теоретико-множественные операции над такими отношениями сводятся к операциям над их графиками.

Пусть на множестве X заданы отношения $Q = \langle X,G \rangle$, $Q_1 = \langle X,G_1 \rangle$ и $Q_2 = \langle X,G_2 \rangle$ с графиками G, G_1 и G_2 соответственно. Пусть $U_X = X^2$ – универсальное отношение на X.

Определим следующие операции над отношениями на X:

- объединение отношений $Q_1 \cup Q_2 = \langle X, G_1 \cup G_2 \rangle$;
- пересечение отношений $Q_1 \cap Q_2 = \langle X, G1 \cap G_2 \rangle$;
- разность отношений $Q_1 \setminus Q_2 = \langle X, G_1 \setminus G_2 \rangle$;
- симметрическая разность отношений $Q_1 \cup Q_2 = \langle X, G_1 \Delta G_2 \rangle$;
- дополнение отношения Q до универсального $\overline{Q} = \langle X,\ X^2 \setminus G \rangle$.

Из определения 3 следует, что для двух бинарных отношений, заданных на множестве X, их композиция является бинарным отношением на этом же множестве. В этом случае говорят о *композиции бинарных отношений на множестве X*. При этом выполняется свойство ассоциативности композиции, приведенное в п. 2.2.3. Кроме того, справедливо следующее двойное равенство:

$$Q \circ id_X = id_X \circ Q = Q.$$

Отметим, что доказательство этого свойства проводится методом двух включений.

Отсюда следует, что диагональ id_X множества X на множестве всех бинарных отношений на X относительно операции композиции играет роль, аналогичную роли единицы относительно операции умножения на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Квадратом бинарного отношения Q называют композицию $Q \circ Q$ бинарного отношения Q на некотором множестве с самим собой и обозначают Q^2, т.е.

$$Q^2 = Q \circ Q.$$

<u>Пример 11.</u> Пусть бинарное отношение Q на $\boldsymbol{R}$ определено как линейная функция $y = ax+b$.

Найдем Q^2. Это будет функция h такая, что $h(x)=a(ax+b)+c$, т.е. $h(x)=a^2x+(ab+c)$ – тоже линейная функция, но с другими коэффициентами.

Из определения 4 следует, что для бинарного отношения Q на множестве X обратное отношение есть бинарное отношение на этом же множестве. В этом случае говорят о *бинарном отношении* Q^{-1} *на множестве* X, *обратном к* Q.

Пример 12. Пусть $X=\{1,2,3,4\}$, бинарное отношение $P=\{(4,2), (3,1), (4,1)\}$ задано на X.

1. Найдем:

- квадрат бинарного отношения $P^2=\varnothing$,
- обратное отношение $P^{-1}=\{(2,4), (1,3), (1,4)\}$,
- композицию $P\circ P^{-1}=\{(4,4), (3,3), (3,4), (4,3)\}$,
- композицию $P^{-1}\circ \mathrm{P}=\{(2,2), (2,1), (1,1), (1,2)\}$.

2. Построим:

- граф отношения P (рис. 10),
- граф обратного отношения P^{-1} (рис. 11),
- граф композиции $P\circ P^{-1}$ (рис. 12),
- граф композиции $P^{-1}\circ \mathrm{P}$ (рис. 13).

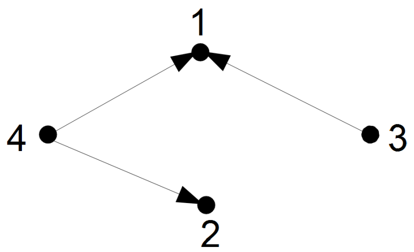


Рис. 10. Отношение Р

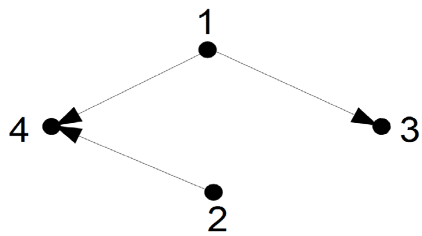


Рис. 11. Отношение P^{-1}

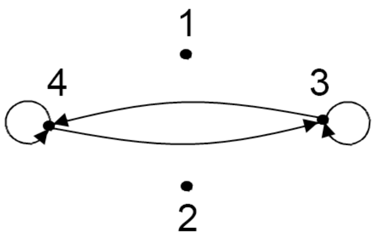


Рис. 12. Отношение $P\circ P^{-1}$

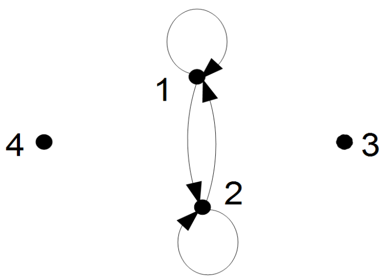


Рис. 13. Отношение $P^{-1}\circ \mathrm{P}$

3.3.2. Свойства бинарных отношений

Существует бесконечное множество бинарных отношений самой разнообразной природы. Например, среди отношений родства на множестве людей можно выделить отношения «быть родственником», «быть братом», «быть отцом» и т.д. В математике: «быть кратным», «быть параллельным», «быть обратным» и т.д. Кажется, что невозможно ориентироваться в этом многообразии отношений.

Однако выделяют несколько специальных свойств *бинарных отношений*, которые позволяют подразделить все основные отношения на сравнительно небольшое число типов и тем самым изучать не каждое отношение отдельно, а сразу множество отношений одного и того же типа. Эти свойства лежат в основе классификации бинарных отношений на множестве.

3.3.2.1. Рефлексивность

Рассмотрим *бинарное отношение Q на множестве X*.

Определение 8 Бинарное отношение Q на множестве X называется:

- *рефлексивным*, если любой элемент множества X находится в отношении Q с самим собой, т.е.

$$\forall x \in X \ (x,x) \in Q;$$

- *антирефлексивным (иррефлексивным)*, если ни для какого $x \in X$ не выполняется $(x,x) \in Q$.

Таким образом, отношение Q рефлексивно, если $id_X \subseteq Q$, т.е. диагональ множества X содержится в Q.

И отношение Q антирефлексивно, если $id_X \cap Q = \varnothing$.

Указанные свойства бинарных отношений на множестве X называют *рефлексивностью* и *антирефлексивностью*.

В случае одноэлементного множества $X = \{x\}$ граф рефлексивного отношения изображен на рис. 14; граф антирефлексивного отношения состоит только из вершины x.

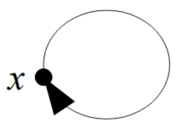


Рис. 14. Рефлексивное отношение

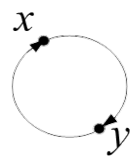


Рис. 15. Симметричное отношение

Приведем примеры рефлексивных отношений.

<u>Пример 13.</u>

1. Бинарное отношение Q – «равенство»:
   - на $\boldsymbol{R}$, т.е. равенство чисел, действительно, $\forall x \in \boldsymbol{R} \ x = x$;
   - на R^n, т.е. равенство векторов,
   - на $\boldsymbol{I}$, т.е. равенство множеств.
2. Бинарное отношение Q: $x \le y$ («меньше, либо равно») на $\boldsymbol{R}$.
3. Бинарное отношение Q: $A \subseteq B$ («нестрого включено») на $\boldsymbol{I}$.

Из определения 8 следует, что:

- в матрице рефлексивного отношения на главной диагонали стоят только единицы;
- в графе рефлексивного отношения любая вершина имеет петлю.

Приведем примеры антирефлексивных отношений.

<u>Пример 14.</u>

1. Бинарное отношение Q: $x \perp y$ («быть перпендикулярным») на множестве всех прямых.
2. Бинарное отношение Q: $x < y$ («меньше») на $\boldsymbol{R}$.
3. Бинарное отношение Q: $A \subset B$ («строго включено») на $\boldsymbol{I}$.

Из определения 8 также следует, что:

- в матрице антирефлексивного отношения все элементы главной диагонали равны нулю;
- граф антирефлексивного отношения не содержит ни одной петли.

Рассмотрим пример нерефлексивного, то есть не являющегося рефлексивным, отношения.

<u>Пример 15.</u> Пусть X={0,1,2,3,4}. Бинарное отношение Q: x=x^2 на множестве X.

- Составим диагональ множества X:

$$id_X = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}.$$

- Зададим Q перечислением: $Q = \{(0,0), (1,1)\}$.

Поскольку диагональ множества X не содержится в Q, то отношение Q не рефлексивно.

Следует отличать антирефлексивное отношение от нерефлексивного. Антирефлексивное отношение нерефлексивно, но не всякое нерефлексивное отношение антирефлексивно.

Антирефлексивному отношению на X не принадлежит ни один элемент диагонали id_X. Нерефлексивное отношение может содержать некоторые, (но не все!) элементы диагонали id_X, как это наглядно видно в примере 14.

На рис. 16 и рис.17 приведены графики антирефлексивного и нерефлексивного отношений на бесконечном множестве X (пунктиром указана диагональ множества X).

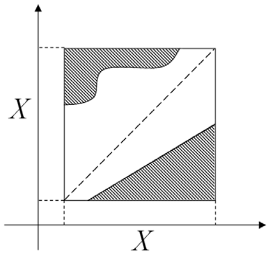


Рис.16. Антирефлексивное отношение на X

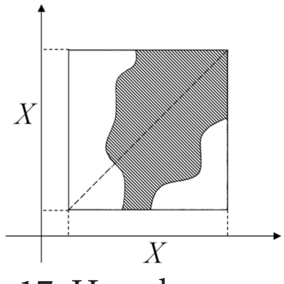


Рис.17. Нерефлексивное отношение на X

3.3.2.2. Симметричность

Определение 9 Бинарное отношение Q на множестве X называется:

- *симметричным*, если для любых элементов x, y множества X из того, что x находится в отношении Q с y, следует, что y находится в отношении Q с x, т.е.

$$\forall x,y \in X: \ (x,y) \in Q \Rightarrow (y,x) \in Q;$$

- *антисимметричным*, если его наличие между x и y, где $x \neq y$, влечет за собой его отсутствие между y и x, т.е.

$$\forall x,y \in X: \ (x,y) \in Q \text{ и } (y,x) \in Q \Rightarrow x=y.$$

Соответствующие свойства бинарных отношений на множестве X называют *симметричностью* и *антисимметричностью*.

В случае двухэлементного множества $X = \{x, y\}$ граф симметричного отношения изображен на рис. 15.

Приведем примеры симметричных отношений.

Пример 16.

1. Бинарное отношение Q – «равенство» на $\boldsymbol{R}$, на $\boldsymbol{R}^n$, на универсальном множестве $\boldsymbol{I}$.

Действительно, пусть $X = \boldsymbol{R}$, тогда

$$\forall x,y \in \boldsymbol{R} : x = y \Rightarrow y = \mathrm{x}, \text{ т.е. } Q \text{ симметрично.}$$

2. Все бинарные отношения типа равенства или подобия в геометрии.

Теорема 1 Бинарное отношение Q на X симметрично тогда и только тогда, когда бинарное отношение на X, обратное к Q, совпадает с Q, т.е.

$$Q \text{ симметрично} \Leftrightarrow Q^{-1} = Q.$$

Доказательство.

Пусть $(x,y) \in Q^{-1}$, т.е. $(y,x) \in Q$. Тогда, в силу симметричности Q, $(x,y) \in Q$. Следовательно, $Q^{-1} \subseteq Q$. Включение $Q \subseteq Q^{-1}$ доказывается аналогично.

Теперь пусть $Q^{-1} = Q$. Тогда $(x,y) \in Q$ и $(x,y) \in Q^{-1}$. Из определения 4 следует, что $(y,x) \in Q$. Следовательно, Q – симметричное бинарное отношение.

Ч.т.д.

Из определения 9 следует, что:

- матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали, то есть $[Q] = [Q]^{\mathrm{T}}$;
- связь между вершинами в графе симметричного отношения, если она есть, отображается парой противоположно направленных дуг;

- ✔ график симметричного бинарного отношения на множестве X симметричен относительно диагонали множества X.

На рис.18 представлен график симметричного бинарного отношения на бесконечном множестве X.

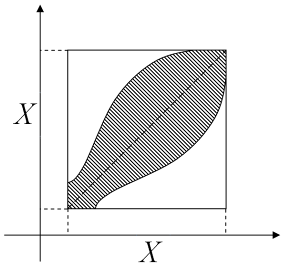


Рис.18. Симметричное отношение

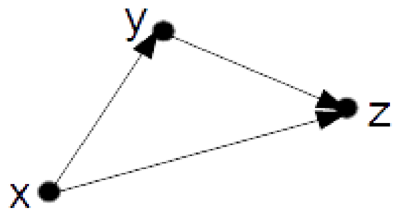


Рис.19. Транзитивное отношение

Приведем примеры антисимметричных отношений.

Пример 17.

1. Бинарное отношение Q: $x \leq y$ («не больше») на $\boldsymbol{R}$.

Действительно, $\forall x,y \in X$: $x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x=y$, т.е. Q антисимметрично.

2. Бинарное отношение P: $x \vdots y$ («делится на») на $\boldsymbol{R}$.

Действительно, $\forall x,y \in X$: $x \vdots y$, $y \vdots x \Rightarrow x=y$, т.е. P антисимметрично.

3. Бинарное отношение L: $x > y$ («больше») на $\boldsymbol{R}$.

   Действительно, $\forall x,y \in X$: если $x > y$, то неверно, что $y > x$, т.е. L антисимметрично.

Теорема 2 Бинарное отношение Q на X антисимметрично тогда и только тогда, когда бинарное отношение $Q \cap Q^{-1}$ либо является подмножеством, либо равно диагонали множества X, т.е.

$$Q \text{ антисимметрично} \Leftrightarrow Q \cap Q^{-1} \subseteq id_X.$$

Доказательство.

Пусть $(x,y) \in Q \cap Q^{-1}$, тогда $(x,y) \in Q$ и $(x,y) \in Q^{-1}$ (т.е. $(y,x) \in Q$). Таким образом, выполняются xQy и yQx. Отсюда, в силу антисимметричности Q, следует, что $x=y$, т.е. $(x,y) \in id_X$.

Обратно, пусть $Q \cap Q^{-1} \subseteq id_X$. Предположим, что $(x,y) \in Q$ и $(y,x) \in Q$, причем $x \neq y$. Тогда $(x,y) \in Q^{-1}$ и $(x,y) \in Q \cap Q^{-1}$, но $(x,y) \notin id_X$. Получили противоречие.

Ч.т.д.

Замечание. Для антисимметричного бинарного отношения Q на множестве X может иметь место равенство $Q \cap Q^{-1} = \varnothing$.

Из теоремы 2 следует, что отношение Q антисимметрично тогда и только тогда, когда в матрице

$$[Q \cap Q^{-1}] = [Q] * [Q]^{T}$$

все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Напомним, что операция $*$ означает поэлементное умножение матриц, т.е. попарное перемножение элементов с одинаковыми индексами i, j.

<u>Пример 18.</u> Пусть $X = \{1,2,3\}$. Найдем матрицу $[Q]*[Q]^{\mathrm{T}}$ для антисимметричных отношений в примере 17:

1. $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[Q]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[Q]*[Q]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[P]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[P]*[P]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $[L] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[L]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[L]*[L]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, для всех антисимметричных отношений, рассмотренных в примере 17, в матрице $[Q]*[Q]^{\mathrm{T}}$ все элементы вне главной диагонали являются нулевыми.

Следует отличать антисимметричное отношение от несимметричного.

<u>Пример 19.</u> Пусть на множестве $X = \{1,2,3\}$ задано отношение

$$Q = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}.$$

1. $(1,2) \in Q$, а $(2,1) \in Q \Rightarrow Q$ не симметрично;
2. $(2,3) \in Q$ и $(3,2) \in Q$, и отсюда не следует, что $2=3 \Rightarrow Q$ не антисимметрично.

Таким образом, отношение Q является несимметричным, но не является антисимметричным.

3.3.2.3. Транзитивность

Определение 13 Бинарное отношение Q на множестве X называется:

- ✔ *транзитивным*, если его наличие между x и y, y и z влечет его наличие между x и z, т.е.

$$\forall x,y,z \in X: (x,y) \in Q \text{ и } (y,z) \in Q \Rightarrow (x,z) \in Q;$$

- ✔ *интранзитивным*, если его наличие между x и y, y и z влечет его отсутствие между x и z, т.е.

$$\forall x,y,z \in X: (x,y) \in Q \text{ и } (y,z) \in Q \Rightarrow (x,z) \notin Q.$$

Соответствующее свойство бинарного отношения называется *транзитивностью* и *интранзитивностью*.

В случае трехэлементного множества $X = \{x, y, z\}$ граф транзитивного отношения изображен на рис. 19.

Приведем примеры транзитивных отношений.

<u>Пример 20.</u>

1. Бинарное отношение Q – «равенство» на $\boldsymbol{R}$, на $\boldsymbol{R}^n$, на универсальном множестве $\boldsymbol{I}$.

Действительно, пусть $X = \boldsymbol{R}$, тогда

$$\forall x,y,z \in R \; x=y,\; y=z \Rightarrow x=z, \text{ т.е. } Q \text{ транзитивно.}$$

2. Бинарные отношения равенства и подобия в геометрии.
3. Бинарное отношение Q: $x \le y$ («не больше») на $\boldsymbol{R}$.
4. Бинарное отношение P: $x \vdots y$ («делится на») на $\boldsymbol{R}$.
5. Бинарное отношение L: $x > y$ («больше») на $\boldsymbol{R}$.

Приведем следующее важное свойство транзитивного бинарного отношения.

Теорема 3 Бинарное отношение Q на множестве X транзитивно тогда и только тогда, когда его квадрат содержится в нем, т.е.

$$Q^2 \subseteq Q.$$

Доказательство.

Докажем включение $Q^2 \subseteq Q$.

Пусть бинарное отношение Q на X транзитивно и $(x,z) \in Q^2 = Q \circ Q$. По определению композиции бинарных отношений на множестве X, $\exists y \in X$ такой, что $(x,y) \in Q$ и $(y,z) \in Q$, откуда ввиду транзитивности Q получаем $(x,z) \in Q$, а значит $Q^2 \subseteq Q$.

Докажем включение $Q \subseteq Q^2$.

Пусть бинарное отношение Q на X таково, что $Q^2 \subseteq Q$, а $(x,y) \in Q$ и $(y,z) \in Q$. Тогда, по определению композиции бинарных отношений на множестве X, $(x,z) \in Q^2$. Поскольку $Q^2 \subseteq Q$, то $(x,z) \in Q$. Таким образом, из того, что $(x,y) \in Q$ и $(y,z) \in Q$, следует, что $(x,z) \in Q$, т.е. $Q \subseteq Q^2$ и бинарное отношение Q на множестве X транзитивно.

Ч.т.д.

Из определения 13 и теоремы 3 следует, что:

- ✔ если матрица $[Q \circ Q] = [Q]$, то Q транзитивно;
- ✔ граф транзитивного отношения при наличии дуг (x,y), (y,z) содержит и замыкающую их дугу (x,z).

Рассмотрим пример интранзитивного отношения.

Пример 21. Пусть $X = \{1,2,3\}$, зададим бинарное отношение $Q = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ на множестве X.

Найдем:

- граф отношения Q (рис. 20).

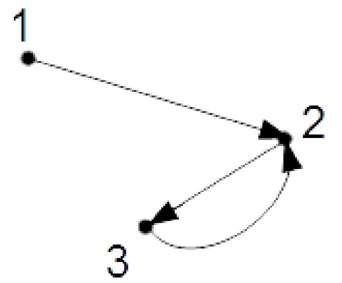


Рис. 20. Граф отношения Q

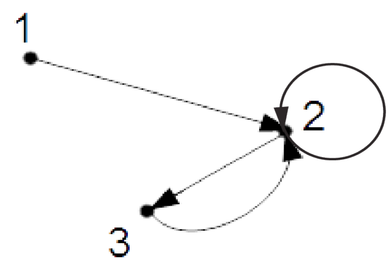


Рис. 21. Граф отношения P

На рис. 20 видно, что:

1. для пары дуг (1,2) и (2,3) отсутствует (1,3),
2. для пары (2,3) и (3,2) отсутствует (2,2),
3. для пары (3,2) и (2,3) отсутствует (3,3).

Таким образом, отношение Q интранзитивно.

- Матрицу отношения $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и матрицу композиции

$$[Q \circ Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $[Q \circ Q] \neq [Q]$.

- Композицию $Q^2 = \{(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

Очевидно, что $Q^2 \not\subseteq Q$.

По аналогии с предыдущими свойствами, не следует смешивать нетранзитивное отношение с интранзитивным.

Например, отношение $P=\{(1,2),(2,2),(2,3),(3,2)\}$ на множестве $X=\{1,2,3\}$, граф которого представлен на рис. 21, не транзитивно, но и не является интранзитивным.

Вопросы и задания для самостоятельной работы

1. Что является элементом n-арного (n-местного) отношения на множествах $X_1, X_2, \dots, X_n$?
2. Что такое реляционная таблица?
3. Какие из способов задания бинарных отношений применимы к отношениям на конечных множествах? Какие – к отношениям на бесконечных множествах?
4. Можно ли утверждать, что любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения?
5. Определите операцию объединения двух бинарных отношений с помощью их матриц.
6. Определите операцию пересечения двух бинарных отношений с помощью их матриц.
7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования композиции двух бинарных отношений.
8. Определите операцию композиции двух бинарных отношений с помощью их матриц.
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратного бинарного отношения.
10. Как найти матрицу обратного бинарного отношения?
11. Верно ли, что для бинарных отношений Q_1, Q_2, Q_3 на X выполняется тождество $Q_1 \circ (Q_2 \cap Q_3) = (Q_1 \circ Q_2) \cap (Q_1 \circ Q_3)$?
12. Верно ли, что для бинарного отношения P на X выполняется:
    - ✔ $P \circ P^{-1} = P^{-1} \circ P$,
    - ✔ $P \circ P^{-1} = id_X$,
    - ✔ $P^{-1} \circ P = id_X$.
13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие рефлексивности бинарного отношения на X.
14. Сформулируйте необходимое и достаточное условие антирефлексивности бинарного отношения на X.
15. Сформулируйте необходимое и достаточное условие симметричности бинарного отношения на X.
16. Сформулируйте необходимое и достаточное условие антисимметричности бинарного отношения на X.
17. Может ли бинарное отношение на X быть симметричным и антисимметричным?
18. Сформулируйте необходимое и достаточное условие транзитивности бинарного отношения на X.

Глава IV. Специальные бинарные отношения

4.1. Классификация бинарных отношений

Бинарные отношения на произвольном множестве классифицируют, основываясь на свойствах, которыми эти отношения обладают.

Бинарное отношение на некотором множестве называют [1]:

- ✔ *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;
- ✔ *толерантностью*, если оно рефлексивно и симметрично;
- ✔ *порядком (частичным порядком)*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- ✔ *предпорядком (квазипорядком)*, если оно рефлексивно и транзитивно;
- ✔ *строгим порядком*, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- ✔ *строгим предпорядком*, если оно антирефлексивно и транзитивно.

Взаимосвязь между классами бинарных отношений представлена на рис.1.

Рис.1. Классы бинарных отношений на множестве

Отношения толерантности, эквивалентности, предпорядка и частичного порядка – важнейшие в современной математике.

4.2 Разбиение множеств

Рассмотрим системы подмножеств множества X.

Определение 1 *Покрытием множества X* называется совокупность подмножеств $\{X_1, X_2,\ldots, X_n\}$ таких, что объединение всех подмножеств X_i, где $i = 1,2,\ldots,n$ есть данное множество X, т.е.

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n.$$

Покрытие множества X изображено на рис.2.

Определение 2 *Разбиением множества X* называется его покрытие $\{X_1, X_2,\ldots, X_n\}$, если выполняются условия:

1. все подмножества X_i – непустые: $\forall i \;\; X_i \subset X,\ X_i \neq \varnothing$;
2. любые два подмножества X_i – непересекающиеся:

$$\forall i, j,\;\; i \neq j,\ X_i \cap X_j = \varnothing.$$

Разбиение множества X изображено на рис.3.

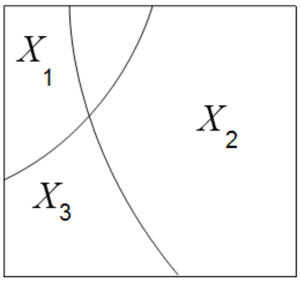


Рис.2. Покрытие X

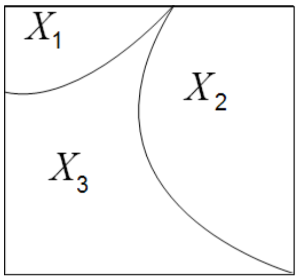


Рис.3. Разбиение X

Другими словами, разбиением множества называется совокупность непересекающихся непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Блоками покрытия (классами разбиения) называются подмножества X_i данного множества X, образующиеся при покрытии (разбиении).

Число n называется *порядком покрытия (разбиения)*.

Определение 3 *Тривиальными разбиениями* множества X называются:

- ✔ разбиение $\{X\}$, состоящее только из самого X;
- ✔ разбиение, состоящее из всех одноэлементных подмножеств множества X.

Рассмотрим примеры разбиений.

<u>Пример 1.</u> Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ допускает следующие разбиения:

- ✔ на два класса – класс четных чисел и класс нечетных чисел, т.е.

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_{чет.} \cup \boldsymbol{N}_{нечет.};$$

- ✔ на его одноэлементные подмножества, т.е.

$$\boldsymbol{N} = \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots;$$

- ✔ разбиение, содержащее только один класс – само множество $\boldsymbol{N}$, т.е.

$$\boldsymbol{N} = \{\boldsymbol{N}\}.$$

Заметим, что последние два разбиения являются тривиальными.

Для *разбиения конечного множества X* справедливо ***правило суммы:*** число элементов множества X равно сумме числа элементов в каждом из подмножеств его разбиения.

Таким образом,

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|.$$

Для *покрытия конечного множества X* справедливо ***обобщенное правило суммы***: число элементов множества X не больше суммы числа элементов в каждом из подмножеств его покрытия.

Таким образом,

$$|X| \le |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|.$$

Разбиение множества тесно связано с отношением эквивалентности на этом множестве.

4.3. Отношение эквивалентности

Рассмотрим более подробно отношение эквивалентности. Оно является формализацией такой ситуации, когда имеется сходство (одинаковость) двух объектов.

Определение 4 Бинарное отношение Q на множестве X называется *эквивалентностью*, если оно:

- ✔ рефлексивно,
- ✔ симметрично,
- ✔ транзитивно.

▶ ***Обозначение:*** $x \equiv y$ или $x \sim y$.

Определенное выше бинарное отношение называют *отношением эквивалентности*.

<u>Пример 2.</u>

1. Бинарное отношение Q: $x = y$ («равенство») на любом множестве X обладает свойствами:

- ✔ рефлексивностью, т.к. $\forall x \in X \;\; x = x$;
- ✔ симметричностью, т.к. $\forall x,y \in X \;\; x = y \Rightarrow y = x$;
- ✔ транзитивностью, т.к. $\forall x,y,z \in X \;\; x = y,\, y = z \Rightarrow x = z$.

Таким образом, отношение равенства на любом множестве является отношением эквивалентности.

2. Пусть I – универсальное множество, $P(I)$ – его булеан. Бинарное отношение Q: $|A|=|B|$ («равномощность») множеств является отношением эквивалентности на $P(I)$.

3. Пусть X – множество программ, вычисляющих некоторые функции. Бинарное отношение $Q=\{(x,y)$: программы x и y вычисляют одну и ту же функцию$\}$ является эквивалентностью на X.

Итак, отношение эквивалентности является обобщением отношения равенства: эквивалентные элементы считаются «равными», а информация об одном элементе достаточно полно характеризует свойства всего множества.

4.3.1. Классы эквивалентности

Пусть Q – отношение эквивалентности на множестве X, $x\in X$.

Определение 5 *Классом эквивалентности*, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов y, для которых $x\sim y$.

Обозначение: $[x]$.

Таким образом, $[x] = \{y\in X: x\sim y\}$.

Замечание. В силу рефлексивности отношения эквивалентности, $\forall x\in X$ класс эквивалентности не пуст, т.е. $[x] \neq \varnothing$.

Пример 3.

1. Отношение Q – «равенство» на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$ порождает следующие классы эквивалентности: $\forall z\in \boldsymbol{Z}$, $[z] = \{z\}$, т.е. каждый класс эквивалентности состоит только из одного элемента – самого числа z.

2. Пусть X – множество студентов Университета ИТМО, а отношение эквивалентности Q – «быть в одной группе». Классом эквивалентности является множество студентов одной группы. Группа, в которой учится студент x, будет классом эквивалентности, порожденным студентом x.

Определение 6 Множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности Q на X называется *фактор-множеством* множества X по отношению Q.

Обозначение: X/Q.

Таким образом, $X/Q = \{\ [x]:\ x\in X\ \}$.

Определение 7 *Трансверсалом множества* X по отношению Q называется система представителей всех классов эквивалентности.

В примере 3.2 фактор-множество представляет собой множество учебных групп ИТМО, а трансверсал состоит из студентов, взятых по одному из каждой учебной группы.

Заметим, что трансверсал множества по отношению эквивалентности в общем случае определен неоднозначно.

4.3.2. Отношение равенства по модулю *n*

Рассмотрим понятие равенства двух целых чисел по модулю натурального числа n.

Пусть $x,y \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Определение 8 Числа x и y называются *равными (сравнимыми) по модулю натурального числа* n, если и только если разность $x - y$ делится на n.

Обозначение: $x = y\ (mod\ n)$ или $x \equiv y\ (mod\ n)$.

Например, $2 = 9\ (mod\ 7)$ или $7 = -8\ (mod\ 5)$.

Число n называется *модулем*.

Число x называется *вычетом* y *по модулю* n, а число y – *вычетом* x *по модулю* n.

Из определения 8 следует, что $x = y\ (mod\ n) \Leftrightarrow x - y = t \cdot n,\ t \in \boldsymbol{Z}$,

Если какое-либо число $z \in \boldsymbol{Z}$ не сравнимо с y по модулю n, то z называют *невычетом* y *по модулю* n и пишут $z \neq y\ (mod\ n)$.

Например, $2 \neq 9\ (mod\ 11)$, а $7 \neq -8\ (mod\ 14)$.

Утверждение 1. Бинарное отношение Q: $x = y\ (mod\ n)$ на $\boldsymbol{Z}$ обладает следующими свойствами:

- ✔ рефлексивностью, т.к. $\forall x \in \boldsymbol{Z}\ \ (x - x) = 0 \,\vdots\, n \Rightarrow x = x\ (mod\ n)$;
- ✔ симметричностью, т.к. $\forall x,y \in \boldsymbol{Z}\ \ x = y\ (mod\ n)$, т.е.
  $(x - y) \,\vdots\, n \Rightarrow (y - x) \,\vdots\, n$, т.е $y = x\ (mod\ n)$;
- ✔ транзитивностью:
  $\forall x,y,z \in \boldsymbol{Z}\ \ x = y\ (mod\ n),\ y = z\ (mod\ n) \Rightarrow x = z\ (mod\ n)$.

Докажем транзитивность.

Действительно, $x = y\ (mod\ n)$, т.е. $(x - y) \,\vdots\, n \Leftrightarrow x - y = t \cdot n$, где $t \in \boldsymbol{Z}$, откуда $y = x - t \cdot n$. Аналогично, $y = z\ (mod\ n)$, т.е. $(y - z) \,\vdots\, n \Leftrightarrow y - z = k \cdot n,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $x - t \cdot n - z = k \cdot n$ и $x - z = (t + k) \cdot n \Leftrightarrow (x - z) \,\vdots\, n$, т.е. $x = z\ (mod\ n)$.

Из утверждения 1 следует, что бинарное отношение равенства двух целых чисел по модулю n является *отношением эквивалентности на* $\boldsymbol{Z}$.

Известно, что любое целое число x при делении на n можно представить в виде $x = t \cdot n + r$, где $t \in \boldsymbol{Z}$, а r – остаток от деления x на n, причем $0 \leq r < n$. Тогда $x - r = t \cdot n$, то есть $x = r\ (mod\ n)$. Таким образом, равенство чисел x и y по модулю n означает, что при делении на n эти числа имеют одинаковые остатки.

Сравнение $x = r \ (mod\ n)$ также означает, что каждое целое число x попадает в тот же класс эквивалентности по отношению Q, что и остаток r от его деления на n. Всего различных остатков может быть ровно n: $0,1,\ldots, n-1$.

Следовательно, остатки от деления целых чисел на n порождают попарно различные классы эквивалентности по данному отношению Q:

$$[0], [1], [2],\ldots, [n-1],$$

которые называются *классами вычетов по модулю n*.

Здесь каждый класс $[r]$ состоит из всех целых чисел, дающих при делении на n остаток r, то есть содержит бесконечное множество целых чисел вида

$$x = t \cdot n+r, \text{ где } t\in \boldsymbol{Z}, 0 \le r < n.$$

При этом число классов по модулю n, как уже указывалось выше, конечно и равно n.

Отсюда следует, что фактор-множество множества $\boldsymbol{Z}$ по отношению Q имеет вид:

$$\boldsymbol{Z}/Q = \{ [0], [1],\ldots, [n-1] \},$$

или также принятно обозначение $\boldsymbol{Z}_{[n]} = \{ [0], [1],\ldots, [n-1] \}$.

Пример 4. На множестве $\boldsymbol{Z}$ зададим отношение Q: $x = y \ (mod\ 3)$.

- ✔ Выпишем классы вычетов по модулю n=3. По модулю 3 имеется всего три класса, а именно:

$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6,\ldots\}$ – множество целых чисел вида $3t$, $t\in\boldsymbol{Z}$;

$[1] = \{\ldots,-8, -5, -2, 1, 4, 7,\ldots\}$ – множество целых чисел вида $3t+1$, $t\in\boldsymbol{Z}$;

$[2] = \{\ldots,-7,-4,-1, 2, 5, 8,\ldots\}$ – множество целых чисел вида $3t+2$, $t\in\boldsymbol{Z}$.

- ✔ составим фактор-множество множества $\boldsymbol{Z}$ по отношению Q:

$$\boldsymbol{Z}_{[3]} = \{[0], [1], [2]\}.$$

Замечание. Нельзя считать, что фактор-множество $\boldsymbol{Z}_{[n]}$ равно множеству $\boldsymbol{Z}_n = \{0,1,\ldots, n-1\}$. Указанное фактор-множество состоит из n элементов, каждый из которых есть не число, а множество всех целых чисел, при делении на n дающих фиксированный остаток. Но каждому такому классу эквивалентности однозначно сопоставляется целое число от 0 до $n-1$, и, наоборот, каждому целому числу от 0 до $n-1$ соответствует единственный класс эквивалентности по отношению равенства по модулю n. Таким образом, установлено *взаимно однозначное соответствие* между фактор-множеством $\boldsymbol{Z}_{[n]}$ и множеством чисел $\boldsymbol{Z}_n$. Заметим, что в математике часто используется прием сопоставления некоторому фактор-множеству такого находящегося с ним во взаимно однозначном соответствии множества, которое легко представить и описать.

Определение 9 *Вычетом класса* называется любое из чисел, принадлежащих этому классу.

Рассмотрим, как строятся системы вычетов по некоторому модулю.

Среди неотрицательных (положительных) вычетов класса содержится наименьшее число, которое называют наименьшим неотрицательным (положительным) вычетом класса. Наименьший неотрицательный (положительный) вычет класса $[x]$ по модулю n равен остатку от деления x на n.

В каждом классе также имеется наименьший по абсолютной величине вычет класса.

Различают *полную* и *приведенную* системы вычетов.

Определение 10 *Полной системой вычетов* по некоторому модулю называется система чисел, взятых по одному из каждого класса по этому модулю.

Например, числа 6,–8, –1 образуют полную систему вычетов по модулю 3 в примере 4.

Обычно в качестве представителей классов берут:

- ✔ наименьшие неотрицательные вычеты,
- ✔ наименьшие положительные вычеты,
- ✔ наименьшие по абсолютной величине вычеты.

Тогда полными системами вычетов по модулю n являются:

- ✔ система наименьших неотрицательных вычетов $0, 1, 2,\ldots, n-1$;
- ✔ система наименьших положительных вычетов $1, 2,\ldots, n$;
- ✔ система наименьших по абсолютной величине вычетов при нечетном n:

$$-\frac{n-1}{2}, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2};$$

- ✔ система наименьших по абсолютной величине вычетов при четном n:

$$-\frac{n}{2}+1, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2}.$$

Пример 5. Составим полные системы вычетов по модулю n=3:

- ✔ наименьших неотрицательных вычетов, это 0, 1, 2;
- ✔ наименьших положительных вычетов, это 1, 2, 3;
- ✔ наименьших по абсолютной величине вычетов, это –1, 0, 1.

Теорема 1

1. В полной системе вычетов $x_1, x_2,\ldots, x_n$ по модулю n все числа x_i попарно несравнимы, т.е. $x_i \neq x_j\ (mod\ n)$ при $i \neq j$.
2. Справедливо и обратное утверждение: любые n чисел, попарно несравнимых между собой по модулю n, представляют собой полную систему вычетов.

Отметим, что первое утверждение теоремы следует из того, что в полной системе вычетов из каждого класса может быть только один вычет. Доказательство второго утверждения теоремы проводится непосредственным применением «принципа ящиков» и представлено в издании [5] из списка литературы.

Перейдем к приведенной системе вычетов.

По определению 8, если $x \equiv y \ (mod\ n)$, то $x - y = t \cdot n$, а $y = x - t \cdot n$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Тогда любой общий делитель δ чисел x и n является общим делителем чисел y и n, и наоборот, если $y \vdots \delta$ и $n \vdots \delta$, то $x \vdots \delta$. Таким образом, множество общих делителей x и n совпадает с множеством общих делителей y и n. В частности, НОД (x, n) = НОД (y, n).

Следовательно, все числа класса $[x]$, т.е. все числа, сравнимые с x по модулю n, имеют с n один и тот же наибольший общий делитель, равный НОД (x, n).

Определение 11 *Наибольшим делителем класса* называется наибольший общий делитель какого-либо числа этого класса и модуля.

Определение 12 *Классами, взаимно простыми с модулем*, называются классы, у которых наибольший общий делитель равен единице.

Согласно определениям 11 и 12 классы, взаимно простые с модулем, состоят из взаимно простых с модулем чисел.

Определение 13 *Приведенной системой вычетов* по некоторому модулю называется система чисел, взятых по одному из каждого класса, взаимно простого с модулем.

Пример 6. Пусть n=8.

- ✔ По модулю 8 имеется восемь классов вычетов:

$$[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].$$

- ✔ Классами, взаимно простыми с модулем, являются три из них:

$$[1], [5], [7].$$

- ✔ Приведенная система вычетов по модулю 8, имеет вид:

$$1, 29, -9,$$

поскольку $1 \in [1]$, $29 \in [5]$, $-9 \in [7]$.

Теорема 2 Если в полной системе вычетов отбросить вычеты всех классов, не взаимно простых с модулем, то оставшиеся вычеты образуют приведенную систему вычетов.

Действительно, в полной системе вычетов имеются представители всех классов, в том числе по одному представителю классов, взаимно простых с модулем. Все остальные числа полной системы вычетов по условию отбрасываются, т.е. остается приведенная система вычетов. В частности, если в полной системе положительных вычетов 1, 2,…, n оставить только числа, взаимно простые с модулем n, то получим приведенную систему наименьших положительных вычетов.

Таким образом, очевидно, что число классов, взаимно простых с модулем n, равно числу целых чисел, не превосходящих n, и взаимно простых с n. Число таких классов зависит от величины модуля, т.е. является функцией от модуля. В определении 14 дадим два эквивалентных определения этой функции.

Определение 14 *Функцией Эйлера* называется:

1. число классов по модулю n, взаимно простых с модулем;
2. число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Обозначение: $\varphi(n)$.

Пример 7. Определим значение функции Эйлера для некоторых значений модуля n:

- ✔ по модулю n=1 имеется один класс [1] чисел, взаимно простых с модулем, поэтому $\varphi(1)=1$;
- ✔ по модулю n=3 имеется два класса [1], [2] чисел, взаимно простых с модулем, поэтому $\varphi(3)=2$;
- ✔ по модулю n=8 имеется три класса [1], [5], [7], чисел, взаимно простых с модулем, поэтому $\varphi(8)=3$;
- ✔ чтобы определить $\varphi(12)$, выпишем натуральные числа от 1 до 12 и вычеркнем числа, имеющие с числом 12 общие делители, большие 1, т.е. делящиеся на 2 и 3:

$$1,\ \cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10},\ 11,\ \cancel{12}.$$

Оставшиеся числа 1, 5, 7, 11, по теореме 2, образуют приведенную систему вычетов по модулю 12, поэтому $\varphi(12)=4$.

Теорема 3

1. Любая приведенная система вычетов по модулю n представляет собой систему $\varphi(n)$ чисел $x_1, x_2,\dots, x_{\varphi(n)}$, где $x_i \neq x_j \ (mod\ n)$ при $i \neq j$ и для всех i НОД $(x_i, n)=1$.
2. Справедливо и обратное утверждение: любые φ(n) чисел, попарно несравнимых между собой по модулю n и взаимно простых с этим модулем, представляют собой полную систему вычетов.

Отметим, что первое утверждение теоремы очевидно, поскольку приведенная система вычетов содержит вычеты всех $\varphi(n)$ классов, взаимно простых с модулем n. Доказательство второго утверждения теоремы, как и теоремы 1, проводится применением «принципа ящиков» и представлено в издании [5] из списка литературы. Здесь же рассмотрены основные свойства функции Эйлера и удобная формула для ее вычисления.

4.3.3. Разбиение и эквивалентность на X

Отношение эквивалентности Q на множестве X находится в тесной связи с разбиением этого множества.

Теорема 4

1. Для любого отношения эквивалентности на множестве X множество классов эквивалентности образует разбиение множества X.
2. И обратно: всякое разбиение множества X определяет на X отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения:

Доказательство.

1. Докажем, что совокупность классов эквивалентности определяет некоторое разбиение множества X.

Так как $\forall x \in X$ в силу рефлексивности Q справедливо $x \in [x]$, то есть каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности по отношению Q, то каждый класс эквивалентности является непустым множеством, а множество всех классов эквивалентности по отношению Q образует разбиение исходного множества X.

Любые два класса эквивалентности по отношению Q либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если два класса эквивалентности пересекаются, т.е. имеют общий элемент $z \in [x]$ и $z \in [y]$, то zQx и zQy. В силу симметричности отношения Q имеем xQz, и тогда xQz и zQy. В силу транзитивности отношения Q получим xQy. Пусть теперь $h \in [x]$, тогда hQx, но так как xQy, то hQy и, следовательно, $h \in [y]$. Обратно, если $h \in [y]$, то из симметричности Q получаем hQy, yQx и, в силу транзитивности, hQx. Следовательно, $[x]=[y]$. Итак, любые два не совпадающих класса эквивалентности не пересекаются.

Таким образом, любое отношение эквивалентности на множестве однозначно определяет некоторое разбиение множества.

2. Докажем и обратное. Пусть $\{X_1, X_2, \ldots, X_к\}$ – некоторое разбиение множества X. Рассмотрим на X отношение Q, такое, что xQy имеет место тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу X_i данного разбиения.

Рефлексивность и симметричность Q очевидны. Докажем транзитивность Q. Пусть $\forall x, y, z \in X$ имеет место xQy и yQz, тогда x, y и z по определению отношения Q принадлежат одному и тому же элементу X_i разбиения.

Следовательно, xQz и отношение Q транзитивно. Таким образом, Q – эквивалентность на X.

Ч.т.д.

Теорема 4 позволяет отождествлять отношения эквивалентности и разбиения: любая эквивалентность определяет единственное разбиение и наоборот.

4.4. Отношения порядка

Рассмотрим еще один тип специальных бинарных отношений – *отношение порядка*.

Отношение порядка является формализацией часто встречающейся ситуации, когда при сравнении двух элементов множества хотят подчеркнуть, что один элемент превосходит другой.

Интуитивное отношение порядка – предшествование, предпочтение, превосходство. Например, шеренга студентов, выстроенных по росту, или список учебной группы в алфавитном порядке.

4.4.1. Понятие частичного порядка

Определим отношение порядка путем перечисления его свойств.

Определение 15 Бинарное отношение Q на множестве X называется *отношением порядка* (*частичного порядка*), если оно:

- ✔ рефлексивно,
- ✔ антисимметрично,
- ✔ транзитивно.

Обозначение: $x \preceq y$.

Записывая $x \preceq y$, говорят, что элемент x не больше элемента y.

<u>Пример 8.</u> Рассмотрим отношения частичного порядка.

1. На множестве $\boldsymbol{R}$ отношение Q: $x \le y$ («x не больше y»). Здесь отношение частичного порядка задано по правилу: $x \preceq y \Leftrightarrow x \le y$. Отношение Q – *естественный числовой порядок* на $\boldsymbol{R}$.

   Действительно, отношение Q:

   - ✔ рефлексивно, т.к. $\forall x \in \boldsymbol{R}\ \ x \ge x$;
   - ✔ антисимметрично, т.к. $\forall x, y \in \boldsymbol{R}\ \ x \ge y, y \ge x \Rightarrow x = y$;
   - ✔ транзитивно, т.к. $\forall x, y, z \in \boldsymbol{R}\ \ x \ge y, y \ge z \Rightarrow x \ge z$.

2. На множестве $\boldsymbol{R}$ отношение P: $x \ge y$ («x не меньше y»).
3. На множестве $\boldsymbol{N}$ отношение H: $x \mid y$ («x делит y», т.е. x является делителем y).
4. На булеане $P(\boldsymbol{I})$ отношение L: $A \subseteq B$ («A нестрого включено в B»).

5. Пусть $X=\{a, b, c\}$. Бинарное отношение, заданное графом на рис. 4, является отношением частичного порядка.

Замечание. Однако следует понимать, что на некотором множестве $X \subseteq \boldsymbol{R}$ рассматриваться может любое отношение порядка, а не только естественный числовой порядок.

Бинарное отношение, заданное графом на рис. 5, не является отношением частичного порядка.

Итак, отношение порядка дает возможность сравнивать между собой различные элементы множества.

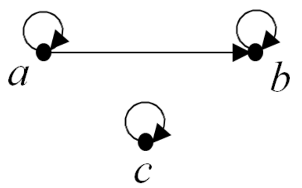


Рис. 4. Частичный порядок

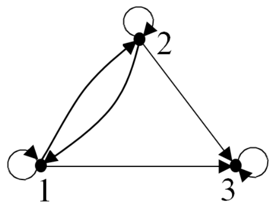


Рис. 5. Не частичный порядок

Каждому отношению частичного порядка на множестве X можно сопоставить двойственный порядок.

Определение 16 Бинарное отношение на множестве X, обратное отношению частичного порядка $\preceq$, называется *двойственным порядку* $\preceq$.

Обозначение: $\succeq$.

Записывая $x \succeq y$, говорят, что элемент x не меньше элемента y.

Например, в примере 8 частичный порядок $\geq$ является двойственным порядку $\leq$.

Определение 17 Бинарное отношение Q на множестве X называется отношением строгого порядка, если оно:

- антирефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Обозначение: $x \prec y$.

Записывая $x \prec y$, говорят, что элемент x строго меньше элемента y (элемент x предшествует элементу y).

Из определения 17 следует, что отношение $x \prec y$ получается из отношения $x \preceq y$ отбрасыванием всех элементов диагонали id_X множества X, т.е.

$$\forall x, y \in X \quad x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \text{ и } x \neq y.$$

Аналогично определению 16, отношение на множестве X, обратное отношению $\prec$, называется отношением, *двойственным строгому порядку* $\prec$, и обозначается $\succ$.

При этом говорят, что элемент x строго больше элемента y.

Таким образом,

$$\forall x, y \in X \;\; x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ и } x \neq y.$$

Пример 9. Рассмотрим отношения строгого порядка.

1. На множестве $\boldsymbol{R}$ отношение Q: $x < y$ («x меньше y») является отношением строгого порядка.

   Действительно, отношение Q:

   - ✔ антирефлексивно, т.к. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ неверно, что $x < x$;
   - ✔ антисимметрично, т.к. $\forall x, y \in \boldsymbol{R}\;\; x < y \Rightarrow$ неверно, что $y < x$.
   - ✔ транзитивно, т.к. $\forall x, y, z \in \boldsymbol{R}\;\; x < y, y < z \Rightarrow x < z$.
2. На множестве $\boldsymbol{R}$ отношение P: $x > y$ («x больше y»).
3. На булеане $P(\boldsymbol{I})$ отношение L: $A \subset B$ («A строго включено в B»).

Каждому отношению частичного порядка на X можно сопоставить отношение доминирования.

Пусть $X \neq \varnothing$ – конечное множество.

Определение 18 Бинарное отношение Q на множестве X называется отношением доминирования, если для двух элементов x, y множества X элемент x находится в отношении Q с y тогда и только тогда, когда $x \prec y$ и не существует такого элемента $z \in X$, что $x \prec z \prec y$.

Обозначение: $x \lhd y$.

В этом случае говорят, что элемент y *доминирует* над элементом x (или элемент y *покрывает* элемент x), а отношение $\lhd$ называют также *доминированием, ассоциированным с отношением порядка* $\preceq$.

Таким образом,

$$x \lhd y \Leftrightarrow x \prec y \text{ и } \nexists z \in X \text{ такое, что } x \prec z \prec y.$$

Другими словами, y доминирует над x, если x строго меньше y и отсутствует «промежуточный элемент» z такой, что $x \prec z \prec y$.

Пример 10. Рассмотрим отношения доминирования.

1. На множестве $\boldsymbol{Z}$ рассмотрим отношение доминирования, ассоциированное с естественным числовым порядком $\leq$:

   $2 \lhd 3 \Leftrightarrow 2 < 3$, $-6 \lhd -5 \Leftrightarrow -6 < -5$ и т. д. Но неверно, что $10 \lhd 12$, поскольку $10 < 11 < 12$, т.е. существует «промежуточный элемент» 11, который меньше 12, но не равен ни 10, ни 12.
2. На множестве $X = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$ рассмотрим отношение доминирования Q, ассоциированное с отношением делимости:

   $3 \lhd 15 \Leftrightarrow 3 \mid 15$, $5 \lhd 15 \Leftrightarrow 5 \mid 15$, $2 \lhd 10 \Leftrightarrow 2 \mid 10$ и т. д.

Но неверно, что $5 \lhd 20$, т.к. $5 \mid 10 \mid 20$, т.е. существует «промежуточный» элемент 10 – делитель 20, который делится на 5, но не равен ни 20, ни 5. Отношение Q можно задать перечислением:

$$Q = \{(5,15),(3,15),(5,10),(2,10),(10,20)\}.$$

Утверждение 2. Отношение Q: $x \lhd y$ на множестве X обладает свойствами:

- ✔ антирефлексивно,
- ✔ антисимметрично,
- ✔ не транзитивно.

Доказательство утверждения 2 проводится по определению вышеперечисленных свойств.

4.4.2. Упорядоченные множества. Диаграмма Хассе

Пусть $X \neq \varnothing$.

Множество X с заданным на нем отношением порядка Q называют *упорядоченным* и обозначают $<X,Q>$.

Множество X, на котором зафиксирован некоторый частичный порядок $\preceq$, называется *частично упорядоченным множеством* (сокращенно ч.у.м) и обозначается $< X, \preceq >$.

Определение 19 Элементы x и y частично упорядоченного множества $< X, \preceq >$ называются:

- ✔ *сравнимыми* по отношению частичного порядка $\preceq$, если $x \preceq y$ или $y \preceq x$,
- ✔ *несравнимыми* – в противном случае.

Например, на рис.4 элементы a и c, b и c несравнимы.

Каждому отношению частичного порядка на X можно сопоставить отношение линейного порядка.

Определение 20 Отношение частичного порядка на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы, называется *отношением линейного порядка*.

Множество X, на котором зафиксирован некоторый линейный порядок, называется *линейно упорядоченным множеством* (сокращенно л.у.м).

<u>Пример 11.</u>

1. На множестве $\boldsymbol{R}$ отношение естественного числового порядка Q: $x \leq y$ – отношение линейного порядка, т.к. для любых двух действительных чисел выполняется или неравенство $x \leq y$, или неравенство $y \leq x$, т.е. любые два элемента $\boldsymbol{R}$ сравнимы по отношению $\leq$. Следовательно, $< \boldsymbol{R}, \leq >$ – л.у.м.

2. На множестве $\boldsymbol{N}$ отношение делимости Q: $x \mid y$ является отношением частичного порядка, но не является отношением линейного порядка, т.к. для любых двух натуральных чисел не выполняется $x \mid y$, или $y \mid x$. Следовательно, $< \boldsymbol{N}, \mid >$ – ч.у.м.

3. На булеане $P(X)$ некоторого множества X отношение нестрогого включения L: $A \subseteq B$ является отношением частичного порядка, но не является отношением линейного порядка, за исключением случая одноэлементного множества X. Следовательно, $< P(X), \subseteq >$ – ч.у.м., а $< P(X)$, где $|X|=1;\ \subseteq >$ – л.у.м.

Упорядоченные множества были введены немецким математиком *Феликсом Хаусдорфом* (*F. Hausdorf*, 1868–1942) в 1914 году, однако аксиомы упорядоченного множества рассматривал еще *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (*G.W. Leibniz*, 1646–1716) в 1690 году.

Рассмотрим один из способов наглядного представления упорядоченных множеств. Конечное упорядоченное множество можно графически изобразить в виде диаграммы Хассе.

Упорядоченное множество X имеет *диаграмму Хассе*, если в нем строгий порядок $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ определяется отношением доминирования, а именно:

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ тогда и только тогда, когда в X существует конечная последовательность $x_0 = \boldsymbol{x}$, x_1, $x_2, \ldots$, $x_n = \boldsymbol{y}$ такая, что x_{i+1} доминирует над x_i $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$, т.е.

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X\ \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = x_0 \lhd x_1 \lhd x_2 \lhd \ldots \lhd x_n = \boldsymbol{y}.$$

В диаграмме Хассе любой элемент множества X изображается точкой на плоскости и, если x_{i+1} доминирует над x_i, то точку x_{i+1} располагают выше точки x_i, при этом точки x_i и x_{i+1} соединяют отрезком. Иногда для большей наглядности из x_i в x_{i+1} проводят дугу.

Пример 12. Пусть $X=\{1,2,3,4\}$ – конечное множество. Зададим на X естественный числовой порядок $\leq$, тогда $< X, \leq >$ – л.у.м.

- ✔ Строгий порядок на X имеет вид $1 < 2 < 3 < 4$;
- ✔ строгий порядок на X определен отношением доминирования, ассоциированным с отношением $\leq$:

$$1 \lhd 2 \lhd 3 \lhd 4;$$

- ✔ диаграмма Хассе л.у.м. $< X, \leq >$ изображена на рис. 6.

Пример 13. Пусть $< B, \preceq >$ – ч.у.м. Определим на множестве B^2 отношение Π условием:

$$(a_1, a_2)\ \Pi\ (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq b_1,\ a_2 \leq b_2.$$

Отношение Π называется *отношением Парето* [3].

Рассмотрим свойства отношения $П$:

- $П$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, следовательно $П$ – отношение частичного порядка на B^2;
- пара $<B^2, П>$ – ч.у.м. Если B – одноэлементное множество, то $<B^2, П>$ – л.у.м.;
- пусть $B = \{0,1\}$ – конечное множество. Строгий порядок на B^2 определен отношением доминирования, ассоциированным с отношением $П$: $(0,0)\lhd(0,1)$, $(0,0)\lhd(1,0)$, $(0,1)\lhd(1,1)$, $(1,0)\lhd(1,1)$;
- диаграмма Хассе ч.у.м. $<\{0,1\}^2, \le>$ изображена на рис. 7.

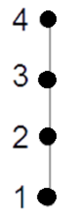


Рис. 6. Л.у.м. $< X, \le >$

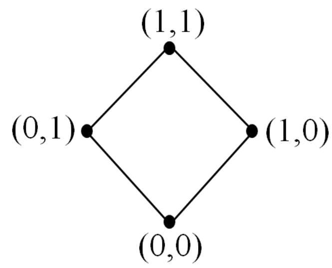


Рис. 7. Ч.у.м. $< \{0,1\}^2, \le >$

Пример 14. Пусть $X=\{a, b, c\}$ – конечное множество. Рассмотрим ч.у.м. $< P(X), \subseteq >$, где:

- булеан $P(X) =\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$;
- строгий порядок на X определен отношением доминирования, ассоциированным с отношением $\subseteq$:

$$\varnothing\lhd\{a\}, \varnothing\lhd\{b\},\varnothing\lhd\{c\},$$
$$\{a\}\lhd\{a, b\}, \{a\}\lhd\{a, c\},\{b\}\lhd\{a, b\}, \{b\}\lhd\{b, c\}, \{c\}\lhd\{a, c\},$$
$$\{c\}\lhd\{b, c\},$$
$$\{a, b\}\lhd\{a, b, c\}, \{a, c\}\lhd\{a, b, c\}, \{b, c\}\lhd\{a, b, c\};$$

- диаграмма Хассе ч.у.м. $< P(X), \subseteq >$ изображена на рис. 8.

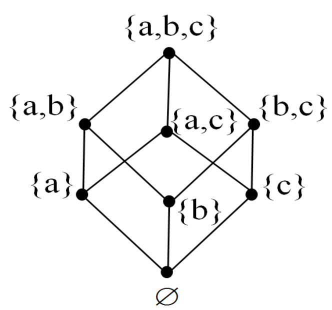


Рис. 8. Ч.у.м. $< P(X), \subseteq >$

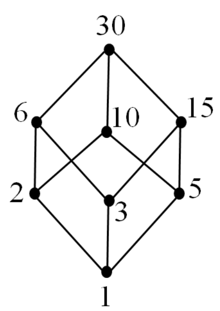


Рис. 9. Ч.у.м. $< X, x \mid 30 >$

Пример 15. Рассмотрим ч.у.м. $< \mathbf{N}, \mid >$. Здесь отношение частичного порядка задано по правилу: $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$.

1. Рассмотрим отношение делимости $x \mid 2$. Составим множество X натуральных чисел – делителей числа 2: $X = \{1,2\}$.
   Строгий порядок на X определен отношением доминирования, ассоциированным с отношением «быть делителем числа 2», а именно $1 \lhd 2 \Leftrightarrow 1 \mid 2$. Диаграмма Хассе упорядоченного множества делителей числа 2 изображена на рис. 10. Очевидно, что $< X, x \mid 2>$ – л.у.м.
2. Рассмотрим отношение делимости $x \mid 6$. Составим множество X натуральных чисел – делителей числа 6: $X = \{1,2,3,6\}$. Строгий порядок на X определен отношением доминирования, ассоциированным с отношением «быть делителем числа 6», а именно $1 \lhd 2$, $1 \lhd 3$, $2 \lhd 6$, $3 \lhd 6$. Диаграмма Хассе упорядоченного множества делителей числа 6 изображена на рис.11. Очевидно, что множество $< X, x \mid 6 >$ – ч.у.м.
3. Рассмотрим отношение делимости $x \mid 30$. Составим множество X натуральных чисел – делителей числа 30: $X = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Строгий порядок на X определен отношением доминирования, ассоциированным с отношением $x \mid 30$, а именно $1 \lhd 2$, $1 \lhd 3$, $1 \lhd 5$, $2 \lhd 6$, $3 \lhd 6$, $2 \lhd 10$, $5 \lhd 10$, $3 \lhd 15$, $5 \lhd 15$, $6 \lhd 30$, $10 \lhd 30$, $15 \lhd 30$. Диаграмма Хассе упорядоченного множества делителей числа 30 изображена на рис. 9. Очевидно, что множество $< X, x \mid 30 >$ – ч.у.м.

Рис. 10. Л.у.м. $< X, x \mid 2 >$

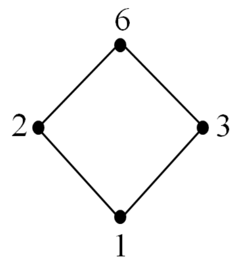


Рис. 11. Ч.у.м. $< X, x \mid 6 >$

Заметим, что диаграммы Хассе на рис. 8 и 9 совпадают с точностью до обозначения вершин. Это означает, соответствующие два ч.у.м. имеют одинаковую структуру. Аналогично, совпадают диаграммы Хассе на рис. 7 и 11. Значит, в свою очередь, эти два ч.у.м. имеют одинаковую структуру, причем отличную от структуры третьего ч.у.м., представленного на рис. 6, хотя оно содержит такое же количество элементов. Формально такая общность структуры определяется понятием *изоморфизм*.

Пусть имеется два частично упорядоченных множества $\boldsymbol{X} = < A, \preceq_X >$ и $\boldsymbol{Y} = < B, \preceq_Y >$, где $\preceq_X$, $\preceq_Y$ – отношения частичного порядка на $\boldsymbol{X}$ и на $\boldsymbol{Y}$ соответственно.

Определение 21 Отображение $f : A \to B$, называется *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, если выполняются следующие условия:

- f – биекция между A и B,
- f сохраняет отношение частичного порядка, т. е.

$$\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \preceq_X a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \preceq_Y f(a_2).$$

Если существует изоморфизм $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, то частично упорядоченные множества $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называются *изоморфными*.

Обозначение: $X \cong Y$.

4.5. Решетки

Рассмотрим частично упорядоченные множества специального вида, называемые решетками , которые играют важную роль в теории организации компьютерных сетей (*grid network* или *mesh* – англ.).

4.5.1. Наибольший (наименьший) и максимальный (минимальный) элементы ч.у.м.

Пусть $< X, \preceq >$ – ч.у.м.

Определение 22 Элемент $x^* \in X$ называется *наибольшим элементом* множества X по данному отношению порядка, если выполняется:

$$\forall x \in X\ \ x \preceq x^*.$$

Другими словами, x^* – наибольший элемент множества X, если все другие элементы множества строго предшествуют ему.

Определение 23 Элемент $x_{\max} \in X$ называется *максимальным элементом* множества X по данному отношению порядка, если $\forall x \in X$ имеет место одно из двух:

- или $x \preceq x_{\max}$;
- или x и $x_{\max}$ не сравнимы.

Другими словами, $x_{\max}$ – максимальный элемент множества X, если не существует элементов множества, строго следующих за ним:

$$\nexists x \in X \text{ таких, что } x \succ x_{\max}.$$

Аналогично определяются наименьший и минимальный элементы упорядоченного множества.

Определение 24 Элемент $x_* \in X$ называется наименьшим элементом множества X по данному отношению порядка, если выполняется:

$$\forall x \in X\ \ x_* \preceq x.$$

Другими словами, x_* – наименьший элемент множества X, если все другие элементы строго следуют за ним.

Из определения 24 следует, что в диаграмме Хассе множества X вершина x_i соответствует наименьшему элементу, если существует ориентированный путь из вершины x_i в любую другую вершину.

Определение 25 Элемент $x_{\min} \in X$ называется *минимальным элементом* множества X по данному отношению порядка, если $\forall x \in X$ имеет место одно из двух:

- ✔ или $x_{\min} \preceq x$,
- ✔ или $x_{\min}$ и x не сравнимы.

Другими словами, $x_{\min}$ – минимальный элемент множества X, если не существует элемента строго предшествующего ему:

$$\nexists x \in X \text{ таких, что } x \prec x_{\min}.$$

Из определения 25 следует, что в диаграмме Хассе множества X вершина x_j соответствует минимальному элементу, если в нее дуги не заходят.

Наибольший элемент часто называют *единицей*, а наименьший элемент – нулем множества X по данному отношению порядка [2].

Замечание. Из приведенных выше определений следует, что всякий наибольший элемент является максимальным, а всякий наименьший элемент – минимальным. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. пример 16.1).

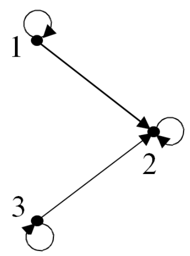


Рис. 12. Ч.у.м. $< \{1, 2, 3\}, \preceq >$

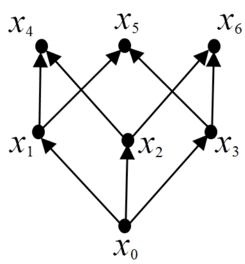


Рис. 13. Ч.у.м.$<\{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \preceq>$

<u>Пример 16.</u>

1. Пусть ч.у.м. $< \{1, 2, 3\}, \preceq >$, задано графом на рис. 12.

   Найдем:
   - ✔ наибольший элемент $x^* = 2$, он же максимальный;
   - ✔ множество минимальных элементов $X_{\min} = \{1, 3\}$;
   - ✔ наименьший элемент x_* – не существует.

2. Пусть ч.у.м. $< \{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}, \preceq >$, задано диаграммой Хассе на рис. 13.

   Найдем:
   - ✔ множество максимальных элементов $X_{\max} = \{x_4, x_5, x_6\}$;
   - ✔ наибольший элемент x^* – не существует;
   - ✔ наименьший элемент $x_* = x_0$, он же минимальный.

3. Рассмотрим интервал $[0,1)$ с естественным числовым порядком $\leq$. Тогда $< [0,1), \leq >$ – л.у.м. Найдем:

   - ✔ наименьший элемент $x_* = 0$, он же минимальный;
   - ✔ наибольший элемент x^* – не существует;
   - ✔ максимальный элемент $x_{\max}$ – не существует.

4. Рассмотрим множество точек плоскости с некоторой фиксированной декартовой системой координат. Координаты каждой точки плоскости задаются упорядоченной парой (x,y) действительных чисел. Определим отношение частичного порядка на множестве точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$ как отношение Парето Π:

$$(a, b)\ \Pi\ (c, d) \Leftrightarrow a \leq c, b \leq d.$$

   Рассмотрим множество точек ΔOAB (рис. 14). Тогда $< \Delta OAB, \Pi >$ – бесконечное ч.у.м. Найдем:

   - ✔ наименьший элемент множества ΔOAB $x_* = (0,0)$, он же минимальный;
   - ✔ множество максимальных элементов $X_{\max} = [A, B]$;
   - ✔ наибольший элемент x^* – не существует.

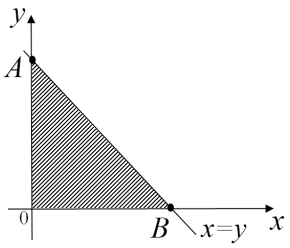


Рис. 14. Ч.у.м.$< \Delta OAB, \Pi >$

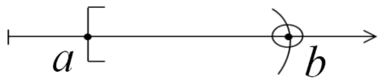


Рис. 15. Л.у.м. $< [a,b), \leq >$

Итак, всякое *конечное* ч.у.м. содержит как максимальные, так и минимальные элементы.

Множество максимальных (минимальных) элементов ч.у.м. может быть как конечным, так и бесконечным.

Однако наибольшего или наименьшего элементов ч.у.м. может не существовать.

Теорема 4 Если наибольший (наименьший) элемент множества X по данному отношению порядка существует, то он единственный.

Доказательство.

Предположим противное: пусть x_1^*, x_2^* – наибольшие элементы множества X по отношению порядка $\preceq$. Тогда, по определению, $\forall x \in X$ выполняется $x \preceq x_1^*$ и $x \preceq x_2^*$. В частности, $x_1^* \preceq x_2^*$ и $x_2^*\ x_1^*$. Из антисимметричности отношения частичного порядка следует, что $x_1^* = x_2^*$.

Ч.т.д.

Таким образом, если у множества по данному отношению порядка существует наибольший (наименьший) элемент, то он является единственным максимальным (минимальным) элементом данного множества.

Замечание. Подчеркнем, что определенные выше элементы x^*, x_{max}, x_*, x_{min}, при условии существования, являются *элементами множества* X по данному отношению порядка $\preceq$.

4.5.2. Супремум и инфимум ч.у.м.

Отношения частичного порядка можно переносить на непустые подмножества исходного упорядоченного множества.

Пусть $< X, \preceq >$ – ч.у.м. Рассмотрим его произвольное непустое под-множество $M \subseteq X$.

Обозначим $\preceq_м$ – *ограничение отношения* $\preceq$ *на подмножество* M.

Частично упорядоченное множество $< M, \preceq_м >$ называют *упорядоченным подмножеством* упорядоченного множества $< X, \preceq >$.

Порядок $\preceq_м$ на подмножестве M называют *порядком, индуцированным исходным порядком* $\preceq$ на всем множестве X.

Определим понятия верхней и нижней грани упорядоченного подмножества M.

Определение 26 Элемент $a \in X$ называется:

- *верхней гранью* множества M, если $\forall x \in M$ выполняется $x \preceq a$.
- *нижней гранью* множества M, если $\forall x \in M$ выполняется $a \preceq x$.

Аналогично можно определить верхнюю и нижнюю грани любых двух элементов множества.

Пусть $x, y \in X$.

Определение 27 Элемент $a \in X$ называется:

- *верхней гранью* элементов x и y, если $x \preceq a$ и $y \preceq a$,
- *нижней гранью* элементов x и y, если $a \preceq x$ и $a \preceq y$.

Таким образом, элемент множества является верхней гранью некоторых двух других элементов, если они строго предшествуют ему, а нижней гранью – если он им строго предшествует.

Верхним конусом множества M называют множество всех его верхних граней.

Обозначение: $M^{\vartriangle}$.

Нижним конусом множества M называют множество всех его нижних граней.

Обозначение: $M^{\triangledown}$.

Во множествах верхних и нижних граней выделяют особые элементы – супремум (*supremum*) и инфимум (*infimum*).

Точной верхней гранью или *супремумом* множества M называется наименьший элемент множества всех его верхних граней.

Обозначение: $supM$.

Таким образом, $supM$ есть наименьший элемент верхнего конуса множества M.

Точной нижней гранью или *инфимумом* множества M называется наибольший элемент множества всех его нижних граней.

Обозначение: $inf\,M$.

Таким образом, $inf\,M$ есть наибольший элемент нижнего конуса множества M.

Пример 17.

1. На числовой прямой с «выколотой» точкой b рассмотрим естественный числовой порядок. Тогда $< \boldsymbol{R} \setminus \{b\}, \ \leq >$ – л.у.м. Пусть подмножество $M=[a,\ b)$ – полуоткрытый интервал с индуцированным на нем отношением порядка $\leq$ (рис. 15), тогда:
   - верхний конус множества M есть $M^{\Delta} = (b, +\infty)$,
   - нижний конус множества M есть $M^{\nabla} = (-\infty, a]$,
   - $supM$ не существует,
   - $inf\,M = a$.
2. Рассмотрим л.у.м. $< \boldsymbol{R}, \ \leq >$. Пусть подмножество $M=(0,1]$, тогда:
   - верхний конус множества M есть $M^{\Delta} = [1, +\infty)$,
   - нижний конус множества M есть $M^{\nabla} = (-\infty, 0]$,
   - точная верхняя грань $supM = 1$,
   - точная нижняя грань $inf\,M = 0$,
   - наименьший элемент x_* множества M не существует,
   - наибольший элемент множества M $x^*=1$.
3. Рассмотрим ч.у.м. $< \boldsymbol{R}^2, \varPi \ >$, где отношение порядка является отношением Парето и определено следующим образом:

   $$(a, b)\ \varPi\ (c, d) \Leftrightarrow a \leq c, b \leq d.$$

   Рассмотрим множество B точек прямоугольника (рис. 16) с индуцированным на нем отношением порядка $\varPi$:

   $$B=\{(x,y)\text{: } 0 \leq x \leq c \text{ и } 0 \leq y \leq d\}.$$

   - Верхний конус множества B обозначен B^{Δ};
   - нижний конус множества B обозначен B^{∇}.
   - $sup\,B = a^* = (c,d)$,
   - $inf\,B = a^*=(0,0)$.

Заметим, что в этом случае как точная верхняя, так и точная нижняя грань, принадлежат множеству B.

4. Рассмотрим множество F с тем же отношением порядка (рис. 17). Верхний и нижний конусы множества F, $sup\ F = a^*$, $inf\ F = a_*$ те же, что и у множества B. Однако a^* и a_* множеству F не принадлежат.

Замечание.

1. В отличие от наибольшего и наименьшего элементов множества M, элементы $supM$ и $inf\ M$ могут множеству M не принадлежать.
2. Точная верхняя (нижняя) грань множества существует не всегда.

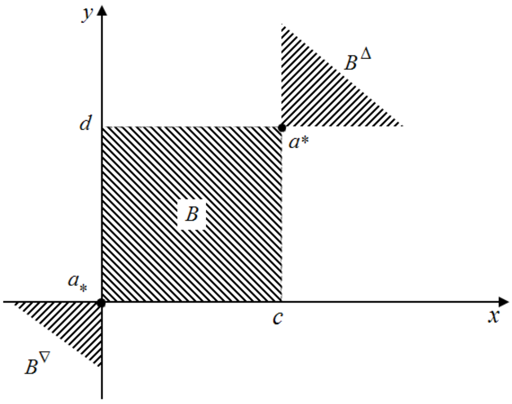


Рис. 16. Ч.у.м. < B, $П$ >

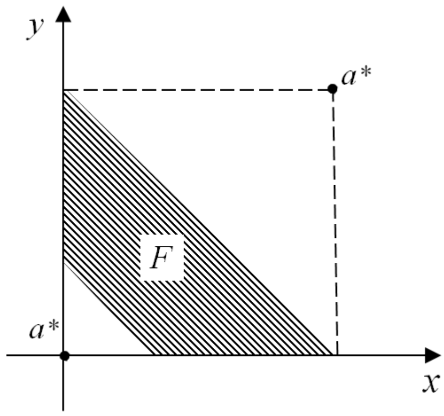


Рис.17. Ч.у.м. < F, $П$ >

Теорема 5 Если точная верхняя (нижняя) грань упорядоченного множества существует, то она *единственная*.

Доказательство.

Проведем для супремума. Предположим обратное: пусть множество M имеет два супремума: $supM = a_1$ и $supM = a_2$. Пусть $a_1 < a_2$ и т.к. a_2 – точная верхняя грань M, то существует $m' \in M$ такое, что $m' > a_1$, что противоречит тому, что $a_1 = supM$. Таким образом, $a_1 = a_2$.

Ч.т.д.

<u>Пример 18.</u> Пусть $X=\{0,1,2,\ldots,20\}$. Ч.у.м. < X,$\preceq$ > задано диаграммой Хассе (рис. 18) [6].

Рассмотрим множество $B=\{5,6,9,10\}\subset X$ с индуцированным на нем отношением порядка $\preceq_B$ (рис. 19):

- ✔ верхний конус множества B есть одноэлементное множество $B^\Delta = \{20\}$,
- ✔ нижний конус множества B есть множество $B^\nabla=\{0,1,2,3\}$ (рис. 20),
- ✔ точная верхняя грань B (наименьший элемент B^Δ) $supB=20$,

- ✔ точная нижняя грань B (наибольший элемент B^{∇}) $inf\,B$ не существует.

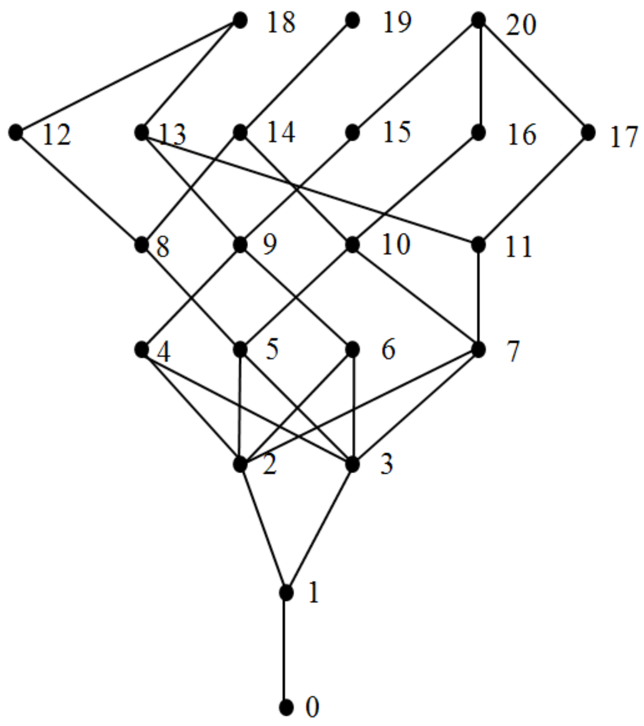


Рис. 18. Диаграмма Хассе ч.у.м. $< X, \preceq >$

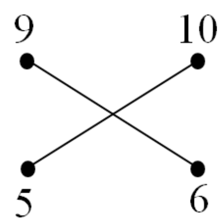


Рис. 19. Ч.у.м.$<B, \preceq_X>$

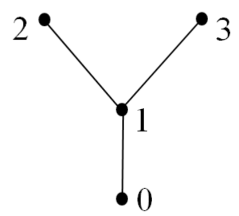


Рис. 20. Множество B^{∇}

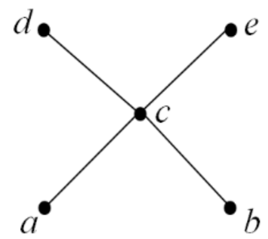


Рис. 21. Не решетка

4.5.3. Понятие решетки

Аналогично определению верхней и нижней граней подмножества некоторого упорядоченного множества, можно определить верхнюю и нижнюю грани двух любых элементов множества.

Пусть $x, y \in X$.

Определение 28 Элемент $a^* \in X$ называется *точной верхней гранью* элементов x и y, если

$$\forall t \in X,\ x \preceq t \text{ и } y \preceq t \Rightarrow a_* \preceq t.$$

Обозначение: $a^* = sup\{x,y\}$.

Точная верхняя грань элементов x и y есть наименьший элемент верхнего конуса этих элементов.

Определение 29 Элемент $a_* \in X$ называется *точной нижней гранью* элементов x и y, если

$$\forall t \in X,\ t \preceq x \text{ и } t \preceq y \Rightarrow t \preceq a_*.$$

Обозначение: $a_* = inf\,\{x,y\}$.

Точная нижняя грань элементов x и y есть наибольший элемент нижнего конуса этих элементов.

Определение 30 *Решеткой* называется ч.у.м. $<X, \preceq>$, в котором каждая пара элементов x и y имеет супремум и инфимум.

Условия существования точных граней накладывают на ч.у.м. жесткие ограничения. В примере 18 ч.у.м. $< B, \preceq_X >$ (рис.19) не является решеткой, т.к. каждая из пар элементов 5 и 6, 9 и 10 не имеет ни точной верхней, ни точной нижней грани.

Пример 19. Рассмотрим ч.у.м., диаграмма Хассе которого изображена на рис. 21:

- пара $\{d, e\}$ не имеет точной верхней грани, хотя имеет точную нижнюю грань: $inf\,\{d, e\}=c$;
- пара $\{a, b\}$ не имеет точной нижней грани, хотя имеет точную верхнюю грань: $sup\{a, b\}=c$,

Следовательно, данное ч.у.м. – не решетка.

Из шестнадцати представленных на рис. 22 четырехэлементных ч.у.м. лишь два – 11 и 16 являются решетками [12].

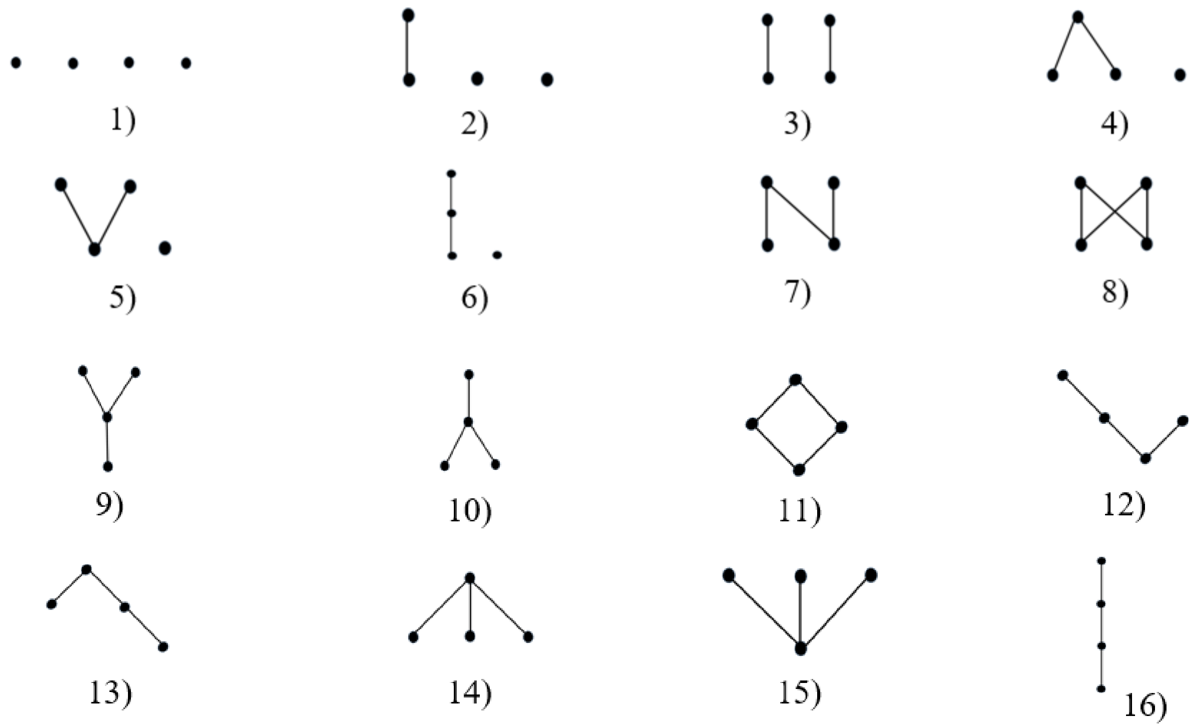


Рис. 22. Четырехэлементные ч.у.м.

Все попарно неизоморфные пятиэлементные решетки представлены на рис. 23.

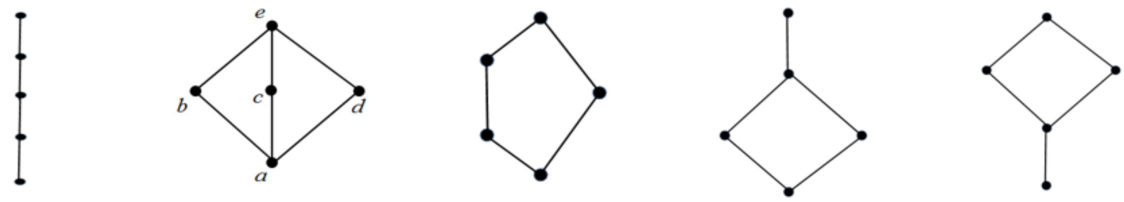


Рис. 23. Пятиэлементные решетки

На рис. 24 представлена восьмиэлементная решетка делителей числа 30. Заметим, что после удаления из нее элемента 10 (рис. 25), она останется решеткой (семиэлементной), а после удаления элемента 30 – нет.

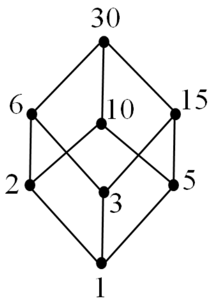


Рис. 24. Восьмиэлементная решетка

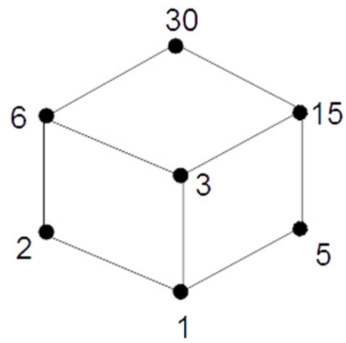


Рис. 25. Семиэлементная решетка

Проиллюстрируем на диаграммах Хассе условия, при которых ч.у.м. не является решеткой. Это происходит в двух случаях [7].

1. Если любые два элемента множества не имеют верхней или нижней грани.

   На рис. 26 а) элементы *d* и *e*, *c* и *d* не имеют верхней грани; элементы *b* и *c* не имеют нижней грани.

   На рис. 26 б) множество точек многоугольника ABCDEF с индуцированным на нем отношением Парето не является решеткой. Действительно, множество $\{A, F\}$ не имеет inf , а множество $\{C, D\}$ – не имеет sup.

2. Если для некоторой пары элементов наименьшая верхняя (или наибольшая нижняя) грань не единственна.

   На рис. 26 в) все элементы имеют верхние и нижние грани, однако *b* и *c* имеют две наименьшие и несравнимые верхние грани, *d* и *e* имеют две наибольшие и несравнимые нижние грани.

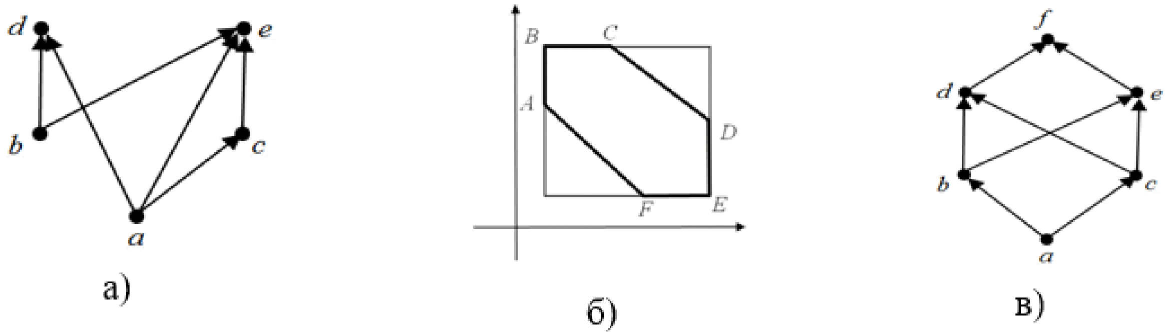


Рис. 26. Не решетки

4.5.4. Примеры решеток

Приведем наиболее известные примеры решеток из различных разделов математики.

1. Каждое *линейно упорядоченное множество,* конечное или бесконечное, является решеткой:

   ✔ множество действительных чисел с естественным числовым порядком $< \boldsymbol{R}, \ \le >$. Здесь $sup\{x,y\} = max\{x,y\}$, $inf\,\{x,y\}= min\{x,y\}$;

   ✔ множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ с естественным числовым порядком, а множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ – его подрешетка.

2. *Декартов квадрат множества целых чисел $\boldsymbol{Z}^2$ с индуцированным на нем отношением Парето* – решетка.
   Относительно этого же отношения порядка любой «целочисленный прямоугольник» $[m\ldots n]\times[k\ldots l]$, где $[a\ldots b]$ обозначает множество всех целых чисел p, таких, что $a \le p \le b$ и $a \le b$ – решетка.

   Действительно, на рис. 27 этот «прямоугольник» для случая [1,2,3]×[1,2,3,4], графически выглядит как «решетка».

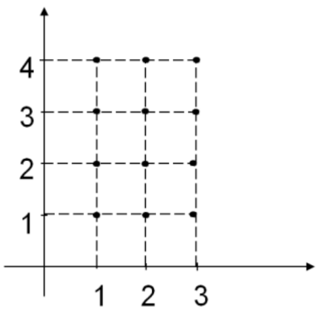


Рис. 27. Решетка [1,2,3]×[1,2,3,4].

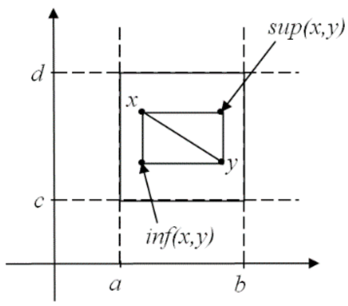


Рис. 28. Решетка $[a,b]\times[c,d]$

3. *Множество точек любого прямоугольника* $[a,b]\times[c,d]$ в декартовой системе координат, *упорядоченных по отношению Парето* – решетка (рис. 28):

   ✔ наименьшим элементом (нулем) решетки является (a,c);

   ✔ наибольшим элементом (единицей) является (b,d).

4. *Множество всех упорядоченных по включению подмножеств* некоторого множества X, конечного или бесконечного, является решеткой $< P(X), \subseteq>$:
   - ✔ если $A,B \subseteq P(X)$, то $sup\{A,B\}=A \cup B$ – решетчатое объединение, $inf\,\{A,B\}=A \cap B$ – решетчатое пересечение;
   - ✔ нулем решетки является $\varnothing$;
   - ✔ единицей решетки является само X.
5. *Множество натуральных чисел, упорядоченных по делимости* $< \boldsymbol{N}, | >$, т.е.

$$m \preceq n \Leftrightarrow m \mid n :$$

   - ✔ $sup(m,n)$ = НОК(m,n), $inf\,(m,n)$ = НОД(m,n);
   - ✔ нулем решетки является число 1;
   - ✔ единица решетки не существует.
6. *Множество всех подпространств векторного пространства, упорядоченных по включению.*

   Инфимумом двух подпространств является их пересечение (подпространство), а супремумом – их сумма, т.е. подпространство, образованное суммами всевозможных пар векторов, один из которых взят из одного подпространства, другой – из другого.

Вопросы и задания для самостоятельной работы

1. Сформулируйте свойства разбиения множества X.
2. Как найти мощность конечного множества по его разбиению?
3. Какими свойствами обладает отношение эквивалентности на множестве X?
4. Докажите, что отношение равномощности множеств, заданное на булеане некоторого универсального множества, является отношением эквивалентности.
5. Объясните, почему класс эквивалентности – не пустое множество.
6. Какими свойствами обладает отношение равенства двух целых чисел по модулю натурального числа n на множестве $\boldsymbol{Z}$?
7. Как определяется класс вычетов по модулю n на $\boldsymbol{Z}$?
8. Что такое фактор-множество множества $\boldsymbol{Z}$ по отношению равенства целых чисел по модулю n?
9. Как строятся трансверсалы фактор-множества множества $\boldsymbol{Z}$ по отношению равенства целых чисел по модулю n?
10. Каков смысл значения функции Эйлера $\varphi(n)$?
11. Как связано разбиение множества X с отношением эквивалентности на X?
12. Какими свойствами обладает отношение частичного порядка на X?
13. Докажите, что отношение $x \mid y$ (x является делителем y) на множестве $\boldsymbol{N}$ является отношением частичного порядка.
14. Какими свойствами обладает отношение строгого порядка на X?
15. Как взаимосвязаны отношения строгого и частичного порядков на X?
16. Докажите, что отношение $x \lhd y$ (y доминирует над x) на множестве X антирефлексивно, антисимметрично, не транзитивно.
17. Какими свойствами обладает отношение линейного порядка на X?
18. Докажите, что отношение естественного числового порядка $x \le y$ на множестве $\boldsymbol{R}$ является отношением линейного порядка.
19. Какими свойствами обладает отношение Парето на X^2? Является ли $<X^2, \Pi>$ ч.у.м.? Является ли $<X^2, \Pi>$ л.у.м.?
20. Как строится диаграмма Хассе упорядоченного множества?
21. Как понимают изоморфизм частично упорядоченных множеств?
22. Дайте определение максимального и минимального элементов упорядоченного множества.

23. Дайте определение наибольшего и наименьшего элементов упорядоченного множества.
24. Какова взаимосвязь между наибольшим и максимальным элементами, между наименьшим и минимальным элементами множества?
25. Всегда ли существует наибольший (наименьший) элемент множества по данному отношению порядка и является ли он единственным?
26. Дайте определение верхнего конуса ч.у.м. X. Как называется и как обозначается наименьший элемент верхнего конуса?
27. Дайте определение нижнего конуса ч.у.м. X. Как называется и как обозначается наибольший элемент нижнего конуса?
28. Дайте определение точной верхней и точной нижней граней двух элементов ч.у.м.
29. Дайте определение решетки.
30. Изобразите четырех, пятиэлементные неизоморфные решетки.
31. Сформулируйте условия, при которых ч.у.м. не является решеткой.

Приложение

Множества и их представление в ЭВМ

Множество (*set* – англ.) – список из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в котором отсутствуют повторяющиеся элементы ($x_i \neq x_j$, при $i \neq j$) и все его элементы относятся к определенному типу данных.

Из определения следует, что множество можно представить в памяти ЭВМ любым из известных способов представления списков [13].

Рассмотрим способы представления списков.

1. Смежное представление

В алгоритмах на дискретных структурах часто приходится встречаться с представлением последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n$ в виде точного перечисления ее элементов, размещенных по порядку в смежных ячейках памяти. В языках высокого уровня такому представлению соответствуют массивы. Наряду с очевидными преимуществами смежное представление имеет два существенных недостатка:

- ✔ включение нового элемента s_k в последовательность требует сдвига вправо на одну позицию подпоследовательности $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_n$;
- ✔ исключение одного элемента s_d из последовательности требует сдвига влево на одну позицию подпоследовательности $s_{d+1}, s_{d+2}, \ldots, s_n$.

При реализации указанных операций необходим перебор всех элементов последовательности, что может занять определенное время при больших значениях n.

2. Представление с помощью курсоров

Другим распространенным механизмом объединения ячеек в языках программирования является структура записи. Запись можно рассматривать как ячейку, включающую в себя несколько других ячеек (называемых *полями*), которые, в свою очередь, могут быть разных типов. Зачастую записи объединяются массивами.

3. Двоичные векторы

Если приходится иметь дело с подпоследовательностями $S' = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ некоторой последовательности S, то есть $S' \subseteq S$, то их можно представить, используя двоичный вектор $V(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, который является последовательностью из 0 и 1, причем $v_i = 1$, тогда и только тогда, когда $s_i \in S'$.

На рис. 1 представлена схема получения подпоследовательности простых чисел S' из последовательности целых чисел S.

Индекс массива	1	2	3	4	5	6	7
s_i	1	2	3	4	5	6	7
v_i	1	1	1	0	1	0	1

Рис. 1. Представление списков с помощью битовых векторов

Двоичные векторы удобны в том случае, когда формирование нужной подпоследовательности S' выполняется путем удаления элементов из основной последовательности S.

4. Представление списков с помощью указателей

Неудобство реализации операций включения и исключения элементов при смежном представлении породило более гибкий способ представления списков, называемый связным размещением. При таком способе в последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n$, каждому элементу s_i ставится в соответствие указатель l_i, который указывает на следующую подобную пару элементов s_{i+1}, l_{i+1} по списку. Вводится начальный указатель l_0, который указывает на первый элемент s_1 последовательности. Последний указатель l_n в списке является нулевым, это признак конца списка.

Каждый элемент связанного списка состоит из двух полей. В поле DATA размещен сам элемент последовательности, а в поле NEXT – указатель на область памяти, где размещен следующий за ним элемент. Связанное представление последовательностей облегчает операции включения и удаления элементов из списка. Например, для исключения второго элемента достаточно присвоить указателю l_1 значение указателя l_2. А при включении нового элемента в состав списка необходимо указателю его предшествующего элемента (например, l_1) присвоить адрес размещения нового элемента списка s_p, а указателю нового элемента l_p присвоить старое значение l_1.

Еще большая гибкость достигается, если использовать дважды связанный список, когда каждый элемент последовательности вместо одного имеет два связанных с ним указателя. В таком списке для любого элемента имеется мгновенный прямой доступ к предыдущему и последующему элементам.

Следует помнить, что выбор того или иного представления последовательности в значительной степени зависит от типа операций, выполняемых с элементами последовательности.

Наиболее эффективный метод представления множеств определяется набором операторов, с помощью которых достигается решение поставленной задачи.

Абстрактный тип данных в виде множеств характеризуется следующими операторами:

- Union (A, B) – объединение двух множеств $A \cup B$;
- Intersection (A, B) – пересечение двух множеств $A \cap B$;
- Difference (A, B) – разность множеств $A \setminus B$;
- Symmdiff (A, B) – симметрическая разность множеств $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

- Member (a, A) – принимает значение истина, если $a \in A$, и ложь в противном случае;
- MakeNull (A) – присваивает множеству A значение пустого множества;
- Insert (a, A): если элемент a имеет тот же тип данных, что и элементы множества A, то делает его элементом множества A, т.е. $\{a\} \cup A$. Если же элемент $a \notin A$, то в результате выполнения данной процедуры множество A не изменяется;
- Delete (a, A) – удаляет элемент a из множества A, т. е. $A = A \setminus \{a\}$. Если элемент $a \notin A$, то множество A остается без изменений;
- Assign (A, B) – присваивает множеству A в качестве значения множество B;
- Min (A), Max (A) – возвращает наименьший (наибольший) элемент множества A. Для применения этой функции необходимо, чтобы множество A было типизировано и его элементы были линейно упорядочены. Например, Min ({2,3,1}) = 1, а Max ({'a', 'b', 'c'}) = 'c';
- Equal (A, B) – возвращает значение истина тогда и только тогда, когда множества A и B состоят из одних и тех же элементов;
- Select (n_i, n_j, A) – возвращает то подмножество множества A, элементы которого попадают в диапазон $n_i \dots n_j$;
- Primary (A) – выделяет подмножество простых чисел из множества A целых чисел;
- $P(A)$ – мощность множества A.

Отметим, что в приложении рассмотрены способы представления в ЭВМ *линейных структур* данных.

Литература

1. Белоусов А.И. Дискретная математика: Учеб. для втузов / А.И.Белоусов, С. Б. Ткачев; Под ред.: В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 744 с. Режим доступа: портал_"Электронные_ издания _Издательства МГТУ_им._Н.Э._ Баумана"
2. Судоплатов С.В. Дискретная математика: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – 4-е изд. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 280 с. – (Серия «Учебники НГТУ»).
3. Соболева Т.С. Дискретная математика: учебник для студ. вузов / Т.С. Соболева, А.В. Чечкин; под ред. А.В. Чечкина. – 2-е изд., испр. – М.: Издательский центр "Академия", 2012. – 256 с. – (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
4. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 352 с. : ил. – (Учебная литература для вузов).
5. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Изд-во «Просвещение», 1966. – 384 с.
6. Набебин А.А. Сборник заданий по дискретной математике. – М.: Научный мир, 2009. – 280 с.
7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.: ил.
8. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Микони С.В. Дискретная математика для бакалавра – Лань, 2012. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4316
9. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Шевелев Ю.П. Дискретная математика – Лань, 2008. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=437
10. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Магадан, 2011. – 264 с.: ил.
11. Чашкин А.В. Дискретная математика: учебник для студентов учреждений высшего профессионального образования по направлению подготовки 010100 «Математика». – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 350 [2] с.: ил.
12. Зуев Ю.А. По океану дискретной математики. От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т. 1: Основные структуры. Методы перечисления. Булевы функции. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 274 с.
13. Башмаков А.В., Зуров Е.В., Нырков А.П. Дискретная математика. Методы кодирования и обработки дискретных структур данных: учебное пособие. – СПб.: СПГУВК, 2012. – 81 с.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА БЕЗОПАСНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Кафедра Безопасные Информационные Технологии была создана в 1998 году по решению Федеральной службы по техническому и экспортному контролю (ФСТЭК), как базовая кафедра для подготовки квалифицированных специалистов по защите информации.

С 2010 года кафедру возглавляет профессор, д.т.н. Зикратов Игорь Алексеевич.

В составе кафедры известные ученые, опытные преподаватели и практикующие специалисты ведущих компаний отрасли информационной безопасности.

На кафедре созданы две научные лаборатории: международная научная лаборатория «Защита криптосистем от атак по сторонним каналам» и лаборатория «Компьютерная криминалистика и расследования преступлений в области информационных технологий». В лабораториях проводятся фундаментальные и прикладные научные исследования, осуществляется разработка программных и программно-аппаратных средств защиты информации, инструментов компьютерной криминалистики.

Также в состав кафедры входит инициативны научные группы из состава преподавателей кафедры и студентов – "Информационная безопасность мультиагентных робототехнических систем" и "Безопасный Умный Дом".

В 2008 году на кафедре создана команда Leet More, которая представляет кафедру БИТ и Университет ИТМО на соревнованиях по компьютерной безопасности формата CTF. Команда стала победителем многих российских и зарубежных соревнований.

Кафедра является организатором ежегодной международной конференции Университета ИТМО по информационной безопасности Information Security and Protection of Information Technology (ISPIT).

В 2016 году на кафедре начинается обучение по совместным образовательным программам подготовки магистров Информационная безопасность компьютерных систем, реализуемых совместно с Университетом Аалто, Хельсинки, Финляндия (Aalto University).

Кривцова Ирина Евгеньевна
Лебедев Илья Сергеевич
Настека Александр Владимирович

Основы дискретной математики
Часть 1

Учебное пособие.

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49