

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**В.Б. Тишин, А.Г. Новосёлов,  
О.В. Головинская**

**ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА  
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ АППАРАТАХ  
ПИЩЕВЫХ И МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОИЗВОДСТВ**

**Учебное пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**

**2016**

УДК 663.1  
ББК 36.81  
Т 147

**Тишин В.Б., Новосёлов А.Г., Головинская О.В.** Процессы переноса в технологических аппаратах пищевых и микробиологических производств: Учеб. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 195 с.

Изложены теоретические основы переноса импульса, теплоты и массы в технологических аппаратах пищевых и микробиологических производств и даны примеры решения некоторых прикладных задач, связанных с расчетами оборудования и процессов, протекающих в них.

Предназначено для магистрантов направления 15.04.02 Технологические машины и оборудование, 19.04.02 Продукты питания из растительного сырья; аспирантов направлений 05.18.12 Процессы и аппараты пищевых производств, 05.18.07 Биотехнология пищевых продуктов и биологически активных веществ всех форм обучения.

**Рецензент: ФГБНУ «Всероссийский научно-исследовательский институт жиров» РАН (зам. директора проф. А.В. Фёдоров); кандидат техн. наук В.Г. Оганесян (ООО «СИТИК»)**

**Рекомендовано к печати Советом факультета пищевых биотехнологий и инженерии, протокол № 3 от 21.05.2015 г.**



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2016

© Тишин В.Б., Новосёлов А.Г., Головинская О.В., 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Многолетний опыт общения со студентами, магистрантами, аспирантами и молодыми учёными, только начинающими свой путь в науке, показал, что при выполнении научно-исследовательских работ они не могут в полной мере использовать знания (прежде всего по математике и физике), полученные на первых курсах учёбы в вузе. Для тех, кто занимается исследованиями в области процессов, аппаратов и технологий пищевых и биотехнологических производств, трудности возникают при решении различных задач, связанных с гидродинамикой, теплообменом и массообменом. Причина кроется в том, что такие курсы, как математика, физика, физическая химия, преподаются в отрыве от общетехнических: гидродинамики, процессов и аппаратов и большинства специальных курсов, где приходится сталкиваться с решением чисто прикладных задач.

Цель данного учебного пособия – в какой-то мере ликвидировать этот разрыв. Для этого, на наш взгляд, необходимо показать на конкретных примерах, каким образом можно использовать основные теоретические положения гидродинамики, теплопроводности, молекулярной диффузии при решении задач молекулярного и конвективного тепло- и массообмена в однофазных и многофазных средах.

Следует иметь в виду, что решение многих задач будет носить полуэмпирический характер, т. е. в полученных аналитическим путём уравнениях появятся экспериментально определяемые коэффициенты. Поэтому эксперимент не только не теряет своей актуальности, но и требует высокого качественного уровня, так как точность определения эмпирических констант будет определять в конечном счёте точность расчётов.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность профессору ВНИИЖиров Российской академии наук доктору технических наук А.В. Фёдорову; сотрудникам Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики: заведующей кафедрой пищевой биотехнологии продуктов из растительного сырья профессору, доктору технических наук Т.В. Мелединой, сотруднице Н.Е. Дюба и другим за ценные советы, замечания и помощь в подготовке к печати данного учебного пособия.

## ВВЕДЕНИЕ

Технология производства любого пищевого продукта состоит из многих стадий, на которых исходное сырьё претерпевает различные изменения и превращения, прежде чем принять вид готового продукта требуемого качества. Изменение состояния вещества на различных стадиях называют технологическим процессом.

В курсе процессов и аппаратов технологические процессы делятся на четыре основных группы:

– механические, связанные с переработкой твердых материалов (дробление солода, кофейных зёрен; помол злакового зерна и т. п.);

– гидромеханические, протекающие в подвижных однофазных или многофазных потоках, к которым относятся транспортировка жидких, газообразных сред, пневмо- и гидротранспорт твёрдых материалов, разделение неоднородных сред и их смешение и т. д.;

– тепловые, связанные с нагревом или охлаждением без изменения или с изменением агрегатного состояния вещества, выделением теплоты клетками при их культивировании;

– массообменные, связанные с растворением, кристаллизацией, экстрагированием веществ, потреблением клетками питательных веществ и т. п.

Следует заметить, что каждый из процессов редко протекает самостоятельно, чаще они протекают одновременно и взаимосвязаны. Например, дробление твёрдых материалов и гомогенизация жидких сред всегда сопровождаются выделением теплоты и, как следствие, повышением температуры жидкости; культивирование микроорганизмов происходит при одновременном потреблении субстрата с выделением продуктов метаболизма и теплоты.

Протекание любых технологических процессов сопровождается переносом определённых субстанций из одной точки пространства в другую. Такими субстанциями являются количество движения (импульс), теплота и масса. Изучение законов переноса указанных субстанций и рассматривается в данном учебном пособии.

Процессы переноса субстанций могут протекать в стационарных и нестационарных условиях. В стационарных условиях параметры процессов (давление, температура, концентрация и пр.) не меняются во времени, но могут менять свои значения в пространстве.

В нестационарных процессах параметры меняются и в пространстве, и во времени.

Основная задача данного пособия в том, чтобы научить будущих специалистов высшей квалификации анализировать свои собственные исследования и данные других учёных, основываясь на общих законах переноса импульса, теплоты и массы с учётом их взаимосвязи.

Прежде чем приступить к изучению того или иного предмета или явления, мы должны представить себе его модель. Предметом нашего изучения будет служить модель сплошной текучей среды, под которой мы будем понимать непрерывное множество бесконечно малых объемов (материальных точек), способных заполнять собой окружающее пространство под действием приложенных к ним сил. Следует обратить внимание на одно важное обстоятельство: когда мы говорим «бесконечно малый объем» или «материальная точка», то должны помнить, что в этой точке сосредоточено определенное количество молекул и в ней отражены все физические свойства данной среды.

Кроме модели сплошной жидкой среды, существует дискретная модель, согласно которой жидкость представляют состоящей из отдельных молекул. При изучении процессов переноса на основе этой модели необходимо учитывать не только влияние внешних сил, но и сил межмолекулярного взаимодействия. Однако такая модель используется редко, так как решение и без того сложных задач переноса субстанций ещё более усложняется. Практика показывает, что модель сплошной среды достаточно точно для инженерных расчётов соответствует опытным данным. Поэтому в использовании дискретной модели при изучении процессов переноса нет необходимости.

Изложение курса начинается с подробного анализа переноса количества движения. Затем, несколько менее подробно, рассматриваются вопросы переноса теплоты и массы. Такая методика изложения материала не случайна. Опытами давно установлено, что скорость переноса теплоты и массы самым непосредственным образом зависят от скорости переноса количества движения. Поэтому, не разобравшись в основах теории переноса количества движения, нельзя понять теоретические основы переноса теплоты и массы.

Для более полного усвоения курса после отдельных разделов даются примеры задач, решение которых связано с пройденным материалом.

Однако, прежде чем переходить непосредственно к изучению данного курса, необходимо вспомнить основные положения кинематики движения жидких сред, которые излагаются в курсах «Гидравлика» и «Процессы и аппараты».

### **Основы кинематики движения сплошной среды**

Задачей кинематики является задание движения материальной точки или системы материальных точек в пространстве и времени независимо от причин, вызвавших это движение. По определению Н.Е. Жуковского, кинематика – это геометрия движения.

В отличие от твердого тела, движение которого происходит поступательно вместе с центром массы и вращательно вокруг оси, проходящей через этот центр, движение элемента жидкости, кроме того, сопровождается его линейной и угловой деформациями.

Задать движение – значит определить местонахождение и скорость движения точки в пространстве.

**Скорость**, или движение, жидкости может быть задана двумя методами – Лагранжа и Эйлера.

Метод Лагранжа заключается в задании траектории движения частиц жидкости.

*Траектория* – линия, по которой частицы жидкости перемещаются в пространстве. Траектория задается уравнением  $\vec{r} = f(\vec{r}_0, t)$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки относительно полюса 0;  $\vec{r}_0$  – начальный радиус-вектор;  $t$  – время. Вектор скорости в данной точке  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ .

Переходя от векторной формы задания положения точки в пространстве и скорости её движения к проекциям на координатные оси, запишем

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t);$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t);$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t);$$

$$u_x = dx/dt; \quad u_y = dy/dt; \quad u_z = dz/dt,$$

где  $x, y, z$  – проекции радиуса-вектора  $\vec{r}$  на координатные оси;  $u_x, u_y, u_z$  – проекции вектора скорости  $\vec{u}$  на координатные оси.

Время, за которое точка пройдет путь  $dr$ , будет равно

$$dt = \frac{d\vec{r}}{\vec{u}} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (1)$$

Зависимость (1) есть дифференциальное уравнение траектории движения.

Методом Лагранжа легко задать движение материальной точки или любого тела, когда их перемещение в пространстве можно фиксировать тем или иным способом, например следить за полётом самолёта с помощью радара.

При изучении течений жидких сред проследить за перемещением какого-то определённого элемента чрезвычайно сложно. В этом случае прибегают к методу задания движения по Эйлеру.

Метод Эйлера заключается в задании поля скоростей. Иными словами, задается скорость в фиксированных точках пространства. В таком случае векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{u}$  можно выразить через их проекции на координатные оси:

$$\vec{u} = f(\vec{r}; t); \quad (2)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad (3)$$

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}, \quad (3a)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы.

*Линия тока* – линия, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к ней, т. е. направление вектора  $\vec{u}$  совпадает с направлением вектора  $\vec{r}$ . Тогда  $d\vec{r} \times \vec{u} = 0$  и, согласно правилу перемножения векторов, из уравнений (3) и (3a) следует

$$\left( u_y dz - u_z dy \right) \vec{i} + \left( u_z dx - u_x dz \right) \vec{j} + \left( u_x dy - u_y dx \right) \vec{k} = 0.$$

Это равенство возможно в том случае, если его слагаемые равны нулю. В таком случае

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (4)$$

Вид уравнений (1) и (4) одинаков. Однако решение их различно. Уравнение (4) интегрируется для данного момента времени  $t = \text{const}$ .

**Ускорение** элемента жидкости может быть связано с изменением скорости движения во времени в данной точке пространства и перемещением его из одной точки пространства в другую под действием каких-либо сил. В первом случае ускорение называется локальным, во втором – конвективным. Исходя из принятых определений и уравнения (2), вектор ускорения можно представить в виде суммы

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{d\vec{u}}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{d\vec{u}}{d\vec{r}},$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt};$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{dt};$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Заменив производные от координат по времени соответствующими скоростями, получим

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (5)$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z};$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (5)$$

Различают несколько видов движения сплошных сред.

*Установившимся* называет движение, у которого характеристики (плотность, давление, составляющие скорости вдоль осей координат и т. д.) в каждой точке потока не изменяются во времени. Движение, не удовлетворяющее этому определению, называется *неустановившимся*.

*Равномерным* движение считается в том случае, если скорость не меняется по длине потока. Движение, для которого данное определение не выполняется, считается *неравномерным*.

*Напорным* называют такой вид движения жидкости, при котором поток не имеет свободной поверхности. Движение, при котором поток не со всех сторон ограничен стенками трубопровода, т. е. имеет свободную поверхность, называется *безнапорным* или движением со свободной поверхностью.

При движении элемент жидкости может претерпевать линейные и угловые деформации. Покажем, какими величинами они характеризуются.

**Линейная деформация.** Рассмотрим движение элемента жидкости в виде отрезка  $0A$  вдоль оси  $Ox$  (рис. 1). Пусть за время  $dt$  точка переместится из положения  $A$  в положение  $A_1$ . При этом приращение длины отрезка составит  $AA_1 = (u_{ax} - u_{0x}) dt$ .

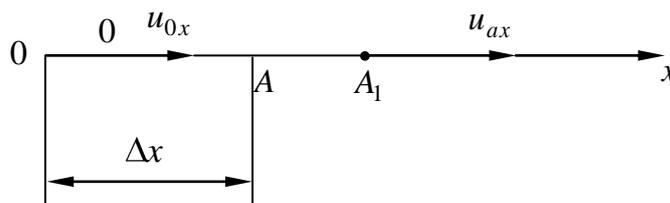


Рис. 1. Линейная деформация элемента жидкости

Для бесконечно малого отрезка  $\Delta x$  имеем  $u_{ax} = u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x$ ,

тогда  $AA_1 = \left( u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x - u_{0x} \right) dt = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x dt$ . Скорость относитель-

ного удлинения отрезка  $\Delta x$ , или скорость относительной линейной деформации вдоль оси  $Ox$ , равна

$$\varepsilon_{xx} = \frac{AA_1}{\Delta x dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично для остальных осей

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (6)$$

Таким образом, частные производные от составляющих скорости по одноименным координатам есть скорости относительных линейных деформаций элемента жидкости вдоль координатных осей.

**Угловая деформация.** Деформация может происходить по всем координатам. Выделим в жидкости элемент в виде отрезка длиной  $dx$ , ориентированного вдоль оси  $Ox$  (рис. 2) в плоскости  $xOz$ .

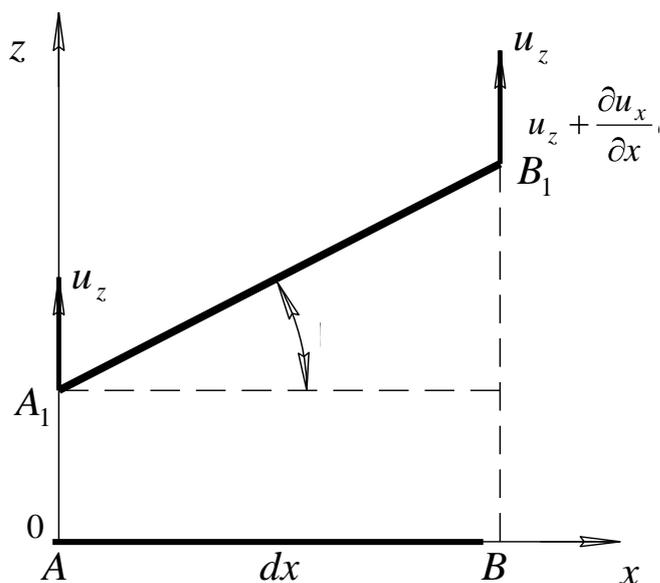


Рис. 2. Угловая деформация элемента жидкости

За время  $dt$  отрезок из положения  $AB$  переместится в положение  $A_1B_1$ . При этом происходят его угловая и линейная деформации  $A_1B_1 > AB$ :

$$d\gamma = \operatorname{tg} d\gamma = \frac{BB_1 - AA_1}{dx} = \frac{\left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx\right) dt - u_z dt}{dx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt,$$

откуда

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (7)$$

Аналогичным образом можно получить следующие скорости угловых деформаций в плоскостях  $xOy$ ,  $zOy$  и  $xOz$ :

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial y}\right); \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial z}\right). \quad (8)$$

Следовательно, производные от составляющих скоростей по разноименным координатам есть скорости относительных угловых деформаций элемента жидкости, или его угловые скорости вращения относительно осей координат.

Из выражения (8) видно, что первые две производные – это угловые скорости вращения бесконечно малого отрезка относительно оси  $Oz$ , вторые – относительно оси  $Ox$  и третьи – относительно оси  $Oy$ .

**Вихревое движение жидкости.** При движении жидкости можно наблюдать образование вихрей (например, при встрече с препятствиями). Рассмотрим движение элемента жидкости, имеющего проекцию на плоскость  $xOz$  в виде прямоугольника  $OABC$  (рис. 3). За время  $dt$  прямоугольник повернется и деформируется таким образом, что точка  $A$  переместится в положение  $A_1$ , точка  $B$  – в положение  $B_1$  и т. д.

Согласно выражениям (8) и рис. 3,

$$d\gamma_A = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt; \quad d\gamma_C = -\frac{\partial u_z}{\partial x} dt.$$

Суммарная угловая деформация элемента жидкости

$$d\gamma_{AC} = d\gamma_A - d\gamma_C = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) dt.$$

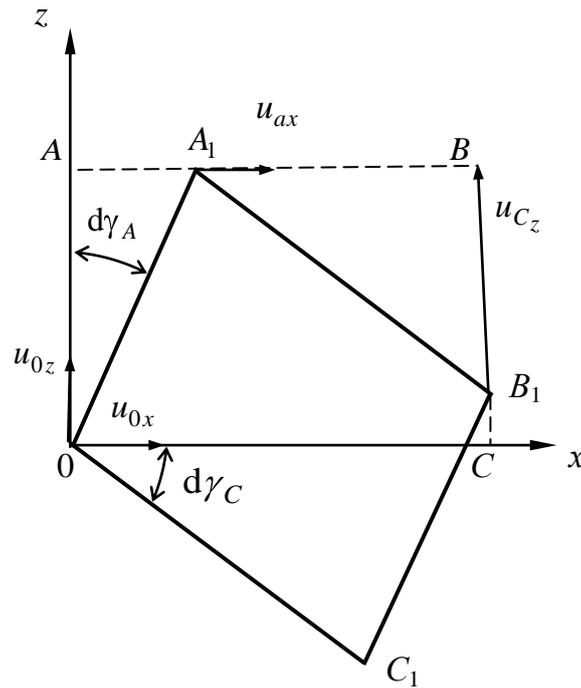


Рис. 3. Линейная и угловая деформации элементарного объема жидкости

Скоростью угловой деформации в плоскости  $x0z$  принято называть величину

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{AC}}{dt}. \quad (9)$$

Подставляя в равенство (9) значения  $d\gamma_{AC}$ , запишем

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Аналогичным образом можно выразить скорости угловых деформаций в плоскости  $x0y$  и  $y0z$ :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad (10a)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (106)$$

Из девяти скалярных величин линейных и угловых деформаций можно составить матрицу, называемую тензором скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

**Трубка тока, элементарная струйка.** Поверхность, образованная линиями тока, проведенными через точки произвольного контура, называется трубкой тока.

Трубка тока бесконечно малого сечения, заполненная линиями тока, называется элементарной стружкой.

Сечение, нормальное к линиям тока, называется «живым» сечением. Скорость по сечению элементарной струйки ввиду малости ее живого сечения постоянна и равна локальной скорости.

Расход жидкости через сечение элементарной струйки может быть определен следующим образом. За время  $dt$  через живое сечение  $dS$  элементарной струйки проходит объем жидкости  $dV = dS dl$ . Так как  $dl = udt$ , то  $dV = udt dS$ . Величина элементарного объемного расхода  $dQ$  определяется в виде  $dQ = dV / dt$  и, следовательно,

$$dQ = u dS. \quad (12)$$

Тогда объемный расход жидкости через живое сечение потока, состоящего из бесконечно большого множества элементарных струек,

$$Q = \int_S u dS. \quad (13)$$

Модель, согласно которой поток представляется в виде системы бесконечно большого количества элементарных струек, называется струйной моделью потока. При этом постулируется, что боковая

поверхность каждой струйки является непроницаемой для среды, движущейся в соседних с ней струйках.

Средняя скорость потока

$$w = \frac{G}{\rho S},$$

где  $G$  – массовый расход, кг/с, связанный с объемным расходом уравнением  $G = \rho Q$ .

Для среды с изменяющейся плотностью

$$\rho_1 w_1 S_1 = \rho_2 w_2 S_2 = G; \quad (14)$$

для несжимаемой жидкости

$$\rho_1 = \rho_2 \quad \text{и} \quad w_1 S_1 = w_2 S_2 = Q. \quad (15)$$

Равенство (14) представляет закон сохранения массы (неразрывности) или постоянства расхода в интегральной форме. В дифференциальной форме уравнение неразрывности мы получим в следующем разделе. Индексы 1 и 2 в равенствах (14) и (15) соответствуют двум произвольно выбранным по длине потока живым сечениям. Аналогичным образом можно записать закон постоянства расхода для любого числа выбранных живых сечений.

# 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

## 1.1. Уравнение сохранения массы (неразрывности потока)

Уравнение выражает закон сохранения массы в движущейся сплошной среде. С целью его получения выделим в пространстве произвольный объем жидкости  $V$  с поверхностью  $S$ , через который проходит поток жидкости (рис. 1.1). Масса жидкости в выделенном объеме  $m = \int_V \rho dV$ . Изменение массы во времени при постоянном объеме  $dV$  связано только с изменением плотности  $\rho$ . В таком случае можно записать

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.1)$$

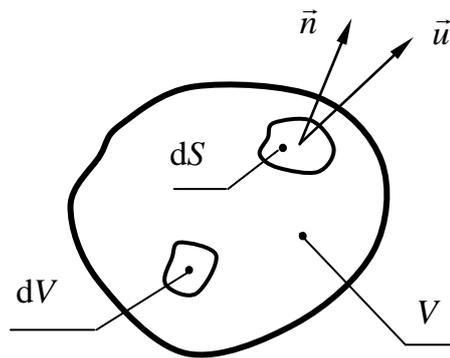


Рис. 1.1. Схема к выводу уравнения неразрывности потока

С другой стороны, это изменение возможно только за счет притока или оттока жидкости через площадь поверхности  $S$ :

$$G = - \int_S \rho u_n dS, \quad (1.2)$$

где  $u_n$  – скорость жидкости по нормали к поверхности в произвольной точке.

Значения массовых расходов в уравнениях (1.1) и (1.2) равны, поэтому

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho u_n dS. \quad (1.3)$$

Преобразуя по правилу Остроградского–Гаусса поверхностный интеграл в объемный, получим

$$\int_S \rho u_n dS = \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{u}) dV.$$

Подставив уравнение (1.3) в полученное равенство, запишем

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) \right) dV = 0.$$

Поскольку объем произволен и пределы интегрирования не ограничены, можно приравнять к нулю подинтегральную функцию. В результате получим уравнение неразрывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.4)$$

Равенство нулю суммы слагаемых в уравнении (1.4) означает, что масса движущейся среды остается постоянной, т. е. отсутствует приток или отток жидкости. Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ ,  $\partial \rho / \partial t = 0$ , уравнение (1.4) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1.5)$$

или в проекциях на координатные оси

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.5a)$$

Уравнение (1.5a) выражает также условие несжимаемости жидкости.

## 1.2. Уравнение переноса количества движения

### 1.2.1. Вязкость

Любое движение жидкости происходит под действием различных сил, которым противостоит сила трения, оказывающая сопротивление движению. Способность жидкости оказывать сопротивление движению называется вязкостью. Для пояснения сказанного рассмотрим движение жидкости вдоль плоской поверхности (рис. 1.2). Скорость жидкости по нормали к поверхности изменяется от  $u = 0$  при  $y = 0$  до  $u = u_\infty$  при  $y \rightarrow \infty$ , где  $u_\infty$  – скорость на бесконечном удалении от поверхности.

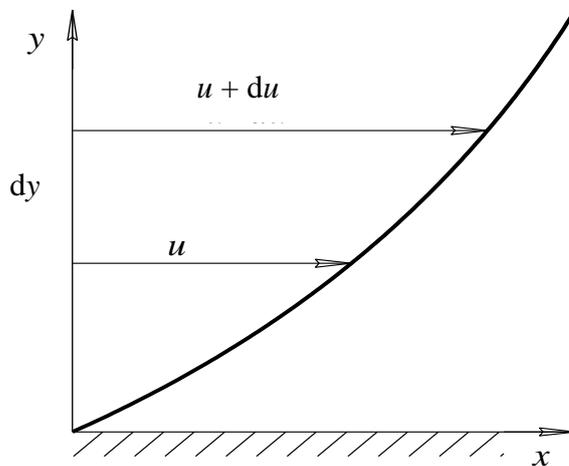


Рис. 1.2. Распределение скорости при движении жидкости у твердой поверхности

Согласно гипотезе Ньютона, сила трения, возникающая в результате проскальзывания слоёв жидкости относительно друг друга, пропорциональна площади трущихся поверхностей  $S$  и градиенту скорости (скорости сдвига)  $du/dy$ . Считая силу трения величиной положительной, запишем

$$F = \pm \mu S \frac{du}{dy}, \quad (1.6)$$

где знак плюс соответствует положительному значению градиента скорости, минус – отрицательному; коэффициент пропорционально-

сти  $\mu$  называется динамическим коэффициентом вязкости или просто динамической вязкостью.

Обозначив отношение  $F/S$  буквой  $\tau$ , из формулы (1.6) получим уравнение для определения касательного напряжения:

$$\tau_0 = \pm \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) выражает закон течения Ньютона. Жидкости, течение которых подчиняется этому закону, называются *ньютоновскими* (вода, спирт, молоко, глицерин и т. п.).

Из уравнения (1.7) следует размерность динамической вязкости – ньютон-секунда на квадратный метр ( $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ ). С позиций гидромеханики динамическая вязкость характеризует величину потока импульса силы трения через единицу поверхности трущихся слоёв.

В гидравлических расчетах часто используется понятие кинематического коэффициента вязкости  $\nu$ , представляющего собой отношение  $\mu/\rho$ . Размерность этой величины – квадратный метр на секунду ( $\text{м}^2/\text{с}$ ).

При определении вязкости жидкостей и газов предпочтительно пользоваться табличными данными, составленными на основе экспериментальных исследований. При отсутствии таковых можно воспользоваться формулами, приведенными в справочной литературе.

Вязкость несжимаемых жидкостей в значительной степени зависит от температуры и в меньшей – от давления.

В пищевой технологии весьма часто приходится транспортировать и перерабатывать жидкости, течение которых не подчиняется закону Ньютона. Такие жидкости называются *неньютоновскими*. Для них характерно отсутствие прямолинейной зависимости  $\tau$  от градиента скорости. В гидромеханике неньютоновских сред принято обозначать отношение  $du/dy$  через  $\dot{\gamma}$  и называть скоростью сдвига. Графическое изображение зависимостей  $\tau = f(\dot{\gamma})$  называют *кривыми течения*.

На рис. 1.3 изображены кривые течения некоторых наиболее часто встречаемых жидкостей. Линия 1 соответствует ньютоновской жидкости. Кривая 2 изображает закон течения псевдопластичных жидкостей, 3 – дилатантных, 4 – жидкостей Бингама. К псевдопластичным жидкостям относятся высокожирные сливки, сметана, мед,

джемы, а к дилатантным – некоторые высококонцентрированные дрожжевые и другие суспензии (речной песок, краски и пр.).

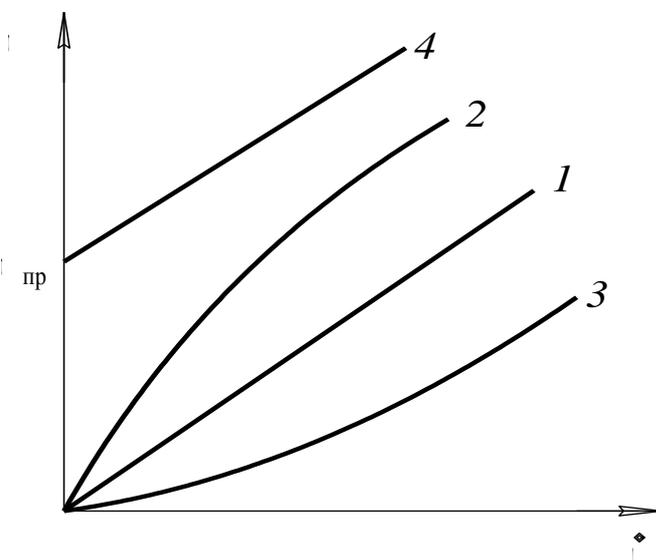


Рис. 1.3. Зависимость касательных напряжений от скорости сдвига для различных жидкостей

Жидкости Бингама начинают течь только после приложения к ним определенной внешней нагрузки, при которой касательное напряжение достигает предельной величины  $\tau_{пр}$ . После этого ее течение либо подчиняется закону Ньютона, либо отличается от него. К таким продуктам можно отнести плавленный сыр, сливочное масло, различные кремы и т. п.

Законы течения жидкостей, представленные кривыми 2 и 3, в определенных пределах изменения  $\tau$  и  $\dot{\gamma}$  могут быть выражены в виде степенной зависимости

$$\tau = k\dot{\gamma}^n, \quad (1.8)$$

где  $k$  – показатель консистенции жидкости;  $n$  – индекс течения, при  $n=1$   $k=1$ , следовательно, жидкость ньютоновская. По величине  $n$  можно судить о степени отклонения течения неньютоновских жидкостей от ньютоновских. Для жидкостей, представленных кривой 2,  $n < 1$ , а для жидкостей, изображенных кривой 3,  $n > 1$ .

По аналогии с ньютоновскими жидкостями можно записать

$$\tau = \mu_{\text{эф}} \dot{\gamma}, \quad (1.9)$$

где  $\mu_{\text{эф}}$  – эффективная (кажущаяся) вязкость, соответствующая данным значениям  $\tau$  и  $\dot{\gamma}$ .

Из уравнений (1.7) и (1.8) следует

$$\mu_{\text{эф}} = k\dot{\gamma}^{n-1}. \quad (1.10)$$

В псевдопластичных жидкостях, например кефире, сметане, некоторых видах теста и т. п.,  $\mu_{\text{эф}}$  снижается с ростом  $\dot{\gamma}$ , а в дилатантных – повышается.

### 1.2.2. Силы, действующие в жидкости Напряжённое состояние жидкости

Силы, под действием которых происходит движение жидкости, можно разделить на две группы – внутренние и внешние. Внутренними называются силы взаимодействия между молекулами жидкости. Внешние силы приложены к жидкости извне. Последние делятся на массовые и поверхностные. К массовым силам относятся сила тяжести и инерции; к поверхностным – силы давления и трения.

Так как нами принята модель сплошной текучей среды, то при выводе уравнений движения силы межмолекулярного взаимодействия, которые, в свою очередь, описываются специальными уравнениями, непосредственно не рассматриваются. Влияние этих сил учитывается введением коэффициентов молекулярного переноса, в частности коэффициентов вязкости.

**Массовые силы** пропорциональны массе жидкости и равны произведению массы на плотность распределения этой силы:

$$\vec{R}_m = \vec{F}m, \quad (1.11)$$

где  $F = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} (\Delta \vec{R}_m / \Delta m)$ .

По существу, плотность распределения массовых сил  $\vec{F}$  есть ускорение этих сил.

Через проекции на координатные оси вектор  $\vec{F}$  может быть представлен в виде

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k},$$

где  $i, j, k$  – единичные векторы.

**Поверхностные силы** пропорциональны площади поверхности, на которую они действуют. Напряжение сил на площадке с нормалью  $n$  определяется равенством

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta \vec{P} / \Delta S).$$

Рассмотрим напряжения, возникающие в элементе жидкости, в виде тетраэдра (рис. 1.4). Напряженное состояние будет определяться суммой массовых и поверхностных сил. Оценим их порядок. Массовые силы  $dR_m \sim \rho \cdot dV \sim \rho \cdot dx dy dz$ , поверхностные –  $dP \sim dS \sim dx dy$ , т. е.  $dR_m$  на порядок меньше  $dP$ , поэтому массовыми силами пренебрегаем.

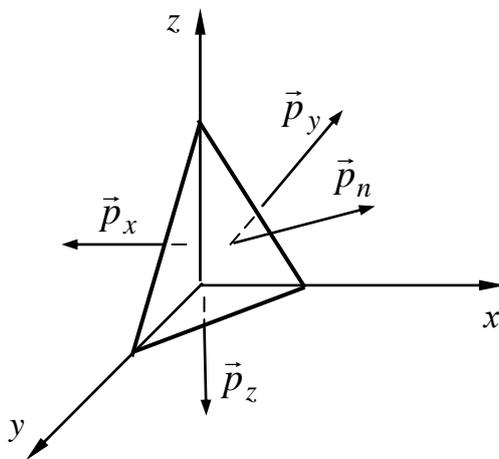


Рис. 1.4. Напряженное состояние элемента жидкости

Таким образом, мы будем рассматривать напряженное состояние элемента жидкости под действием только поверхностных сил. Напряжение этих сил  $\vec{p}_n$  выразим через составляющие, совпадающие с направлением осей координат, как  $\vec{p}_x, \vec{p}_y$  и  $\vec{p}_z$ .

Напряженное состояние будет определяться суммой массовых и поверхностных сил. Оценим их порядок. Массовые силы

$dR_m \sim \rho \cdot dV \sim \rho \cdot dx dy dz$ , поверхностные –  $dP \sim dS \sim dx dy$ , т. е.  $dR_m$  на порядок меньше  $dP$ . Поэтому массовыми силами пренебрегаем.

При произвольном расположении площадки с внешней нормалью  $n$  вектор  $\vec{p}_n$  может быть представлен в виде равенства

$$\vec{p}_n = \vec{p}_{nx} \cos(n, \wedge x) + \vec{p}_{ny} \cos(n, \wedge y) + \vec{p}_{nz} \cos(n, \wedge z),$$

или в проекциях на координатные оси:

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, \wedge x) + \tau_{xy} \cos(n, \wedge y) + \tau_{xz} \cos(n, \wedge z);$$

$$p_{ny} = \tau_{yx} \cos(n, \wedge x) + \sigma_y \cos(n, \wedge y) + \tau_{yz} \cos(n, \wedge z);$$

$$p_{nz} = \tau_{zx} \cos(n, \wedge x) + \tau_{zy} \cos(n, \wedge y) + \sigma_z \cos(n, \wedge z),$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  – нормальная и касательная компоненты напряжения.

В качестве примера на рис. 1.5 показаны направления компонентов напряжений в плоскости  $zOx$

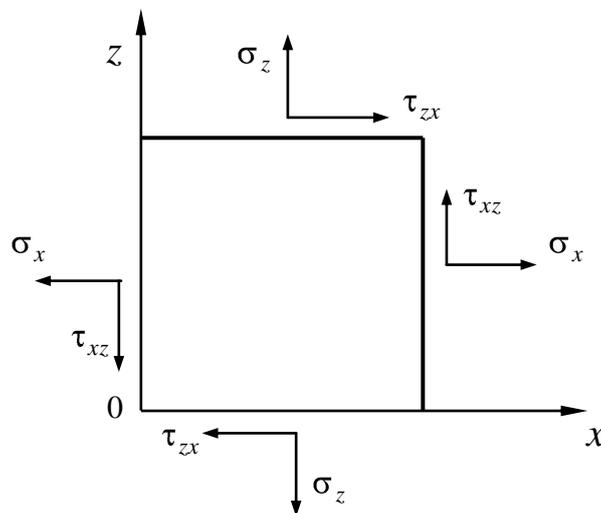


Рис. 1.5. Нормальные и касательные напряжения в элементарном объеме жидкости

Таким образом, вектор напряжения  $\vec{p}_n$  определяется девятью скалярными величинами ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ ) и может быть выражен тензором напряжений

$$\dot{T} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

Между матрицами (11) и (1.12) существует прямая зависимость, выражающая закон внутреннего трения для ньютоновских жидкостей:

$$\dot{T} = 2\mu\dot{\epsilon}.$$

В проекциях на координатные оси это равенство примет вид уравнений (1.17) и (1.18).

Примем условие симметричности тензора (1.12) относительно главной диагонали. Тогда  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ;  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  и  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const}$ . Таким образом, напряжение определяется только шестью скалярными величинами. В покоящейся жидкости, согласно уравнению (1.6), касательные напряжения равны нулю. Тогда,  $p_{nx} = \sigma_x \cos(n, \wedge x)$ ,  $p_{ny} = \sigma_y \cos(n, \wedge y)$ ,  $p_{nz} = \sigma_z \cos(n, \wedge z)$ , но  $p_{nx}$ ,  $p_{ny}$ ,  $p_{nz}$  есть проекции  $\vec{p}_n$  на соответствующие оси, т. е.  $\vec{p}_n = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ . Давление в произвольной точке покоящейся среды, равное  $p = -p_n = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z$ , не зависит от ориентации площадки в пространстве. В этом заключается важнейшее свойство гидростатического давления.

Давлением в движущейся жидкости постулируется величина

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.13)$$

Для нормальных напряжений эта связь выражается в виде равенства (по оси  $Ox$ )

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \eta \operatorname{div} \vec{u}, \quad (1.14)$$

где  $\mu$  и  $\eta$  – динамические коэффициенты вязкости, причем коэффициент  $\eta$  относится только к сжимаемой жидкости.

Суммируя нормальные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , запишем

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p + (2\mu + 3\eta)\operatorname{div} \vec{u}. \quad (1.15)$$

Для соблюдения равенства (1.13) необходимо, чтобы в уравнениях (1.14) и (1.15)

$$\eta = -\frac{2}{3}\mu. \quad (1.16)$$

Тогда нормальные составляющие тензора  $\dot{T}$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u}; \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u}; \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Касательные напряжения выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Уравнения (1.18) выражают обобщенный закон течения Ньютона. Они определяют поток импульса силы трения (количества движения) в единицу времени через единицу площади трущихся поверхностей. Для случая одномерного движения, приведённого на рис. 1.2, уравнения (1.18) приобретают вид (1.7).

### 1.2.3. Уравнение движения в напряжениях

Вывод уравнения основан на законе изменения количества движения применительно к массе жидкости, заключенной в объеме  $V$ : изменение количества движения в единицу времени равно главному вектору сил, действующих на элемент жидкости:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R} = \vec{R}_m + \vec{P}. \quad (1.19)$$

Количество движения можно представить в виде интеграла

$$\vec{K} = \int_V \rho \vec{u} dV. \quad (1.20)$$

Изменение количества движения связано с изменением вектора скорости  $\vec{u}$  во времени. Тогда из предыдущего уравнения

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \int_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV. \quad (1.21)$$

Главный вектор поверхностных сил

$$\vec{P} = \int_S \vec{p}_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{p}_n dV. \quad (1.22)$$

Подставляя уравнения (1.11), (1.21), (1.22) в равенство (1.19) и суммируя подынтегральные функции с учетом произвольности объема  $V$ , получим

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \vec{p}_n. \quad (1.23)$$

В проекциях на координатные оси уравнение движения в напряжениях (1.23) примет вид

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}; \quad (1.24)$$

$$\rho \frac{du_y}{dt} = \rho F_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}; \quad (1.25)$$

$$\rho \frac{du_z}{dt} = \rho F_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \quad (1.26)$$

#### 1.2.4. Уравнения движения вязкой сплошной среды

В общем виде уравнения движения могут быть получены путем подстановки уравнений (1.17) и (1.18) в выражения (1.24)–(1.26). В проекциях на координатные оси получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} = & \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \vec{u}); \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_y}{dt} = & \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \vec{u}); \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_z}{dt} = & \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \operatorname{div} \vec{u}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Уравнения (1.27)–(1.29) выражают баланс количества движения потока жидкости в общем виде.

Из уравнений (1.27)–(1.29) следует несколько частных решений. Если  $\mu = \text{const}$  и среда несжимаема, то  $\text{div } \vec{u} = 0$ . После деления уравнений (1.27)–(1.29) на  $\rho$  запишем

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x; \\ \frac{du_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y; \\ \frac{du_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Выразим полную производную через частные. Для краткости ограничимся одномерным потоком в направлении оси  $x$ :

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.\tag{1.31}$$

В векторной форме система уравнений (1.30) примет вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \text{ grad } \vec{u} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p + \nu \nabla^2 \vec{u},\tag{1.32}$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\tag{1.33}$$

При отсутствии сил трения из уравнения (1.32) следует уравнение движения идеальной жидкости:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p.\tag{1.34}$$

В случае статического равновесия  $u = 0$  и уравнение (1.34) примет вид

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{ grad } p.\tag{1.35}$$

Уравнения движения идеальной жидкости гидростатики (1.34) и (1.35) носят имя Эйлера.

Уравнение (1.32), называемое уравнением Навье–Стокса, по сути своей выражает второй закон Ньютона и устанавливает связь между массовыми и поверхностными силами, отнесёнными к единице массы жидкости. Слагаемые в нем имеют размерность ускорения и характеризуют величину сил, действующих в потоке жидкости.

Первое слагаемое левой части  $d\vec{u}/dt$  представляет собой ускорение элемента жидкости, вызванное изменением скорости во времени; второе – ускорение, вызванное изменением скорости элемента жидкости в пространстве при перемещении его из одной точки пространства в другую и называемое конвективным ускорением. Оба слагаемых определяют величину сил инерции.

Слагаемые в правой части равенства (1.32) выражают:  $\vec{F}$  – массовые силы;  $1/\rho \text{ grad } p$  – силы давления;  $\nu \nabla^2 \vec{u}$  – силы вязкого трения.

При решении задач гидрогазодинамики с использованием уравнения Навье–Стокса необходимо задание краевых условий, из которых отметим два:

- 1) нормальная к твердой поверхности составляющая скорости  $u_n = 0$ ;
- 2) касательная составляющая скорости равна скорости движения самой поверхности.

Уравнения Навье–Стокса (1.27)–(1.29) не являются замкнутой системой, поэтому к ним необходимо добавить уравнения зависимости плотности и вязкости от температуры и уравнение неразрывности потока (1.4). Уравнения Навье–Стокса понадобятся нам при решении целого ряда задач, связанных с динамикой движения жидких сред.

Однако, прежде чем переходить к решению частных задач, основанных на уравнении Навье–Стокса, необходимо познакомиться с законом сохранения энергии применительно к движущейся жидкости.

### 1.3. Уравнение энергии

При движении жидкости соблюдается закон сохранения и преобразования энергии, который может быть сформулирован следующим образом: изменение во времени полной энергии  $\vec{E}$  в объеме среды

равно сумме мощности  $N$  всех внешних сил, приложенных к объему, и теплового потока  $Q_T$ , т. е.

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = N + Q_T. \quad (1.36)$$

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной (внутренней) энергий. Для гомогенной жидкости, без изменения агрегатного состояния,

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV + \int_V c_v T \rho dV;$$

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \rho \frac{u^2}{2} + \rho c_v T \right) dV.$$

Мощность внешних сил

$$N = N_m + N_S,$$

где  $N_m$  и  $N_S$  – мощность массовых и поверхностных сил, причем

$$N_m = \vec{u} \vec{R}_m = \int_V \vec{u} \vec{F} \rho dV;$$

$$N_S = \vec{u} \vec{P}_S = \int_S \vec{u} p_n dS = \int_V \text{div} (\vec{p}_n \vec{u}) dV.$$

В общем случае подведенная теплота складывается из конвективного и радиационного потоков:

$$Q_T = Q_K + Q_p,$$

где

$$Q_K = \int_S \lambda \frac{dT}{dn} dS = \int_S (\lambda \text{grad } T)_n dS = \int_V \text{div} (\lambda \text{grad } T) dV;$$

$$Q_p = \int_V \rho q_p dV,$$

здесь  $q_p$  – плотность радиационного теплового потока.

Суммируя  $Q_k$  и  $Q_p$ , получим

$$Q_T = \int_V \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) dV + \int_V \rho q_p dV.$$

Подставим значения полученных величин в уравнение (1.36). Отнеся значения энергий к единице объёма элемента жидкости и суммируя подынтегральные функции, имея в виду, что при отсутствии изменения агрегатного состояния теплоёмкость при постоянном объёме равна теплоёмкости при постоянном давлении ( $c_V = c_p$ ), запишем

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{u^2}{2} + c_p T \right) = \rho \vec{u} \vec{F} + \operatorname{div}(\vec{p} \vec{u}) + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho q_p, \quad (1.37)$$

где  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

При отсутствии теплообмена с окружающей средой слагаемые  $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$  и  $\rho q_p$  равны нулю. В этом случае из уравнения (1.37) следует

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (c_p T) &= \vec{u} \vec{F} \rho - \rho \vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\partial(\vec{u} \vec{p}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{u} \vec{p}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{u} \vec{p}_z)}{\partial z} = \\ &= \vec{u} \vec{F} \rho - \rho \vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} + \vec{u} \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} + \vec{u} \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} + p_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}. \end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых запишем

$$\rho \frac{d}{dt} (c_p T) = -\vec{u} \left( \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) + p_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}.$$

Из уравнений (1.31) и (1.32) следует, что выражение в скобках равно нулю. Раскладывая  $\vec{p}$  на нормальные и касательные напряжения, запишем

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}(c_p T) = & \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \\ & + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Дальнейшие преобразования связаны с подстановкой уравнений (1.17) и (1.18) в уравнение (1.38). Уравнение (1.38) в случае  $c_p = \text{const}$  запишем в виде равенства

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = D_s \mu, \quad (1.39)$$

где  $D_s$  называется диссипативной функцией, которая характеризует процесс диссипации энергии и в общем виде выражается уравнением

$$\begin{aligned} D_s = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

Для несжимаемых жидкостей  $\text{div } \vec{u} = 0$ , и предыдущее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} D_s = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Уравнение (1.39) позволяет установить связь между механической энергией сил вязкого трения и тепловой.

Рассмотрим для простоты плоскую задачу. Пусть жидкость движется со скоростью  $u_x$ . Перпендикулярно оси  $y$  скорость  $u_y = u_z = 0$ . В таком случае из уравнений (1.39) и (1.40) получим

$$E = \rho c_p \frac{dT}{dt} = \mu \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2. \quad (1.41)$$

Из уравнений (1.6) и (1.41) следует

$$E = \frac{\tau^2}{\mu}. \quad (1.41a)$$

В уравнении (1.41) величина  $E$  носит название удельной мощности и имеет размерность ватт на кубический метр ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ). Оно послужит нам для решения целого ряда задач, связанных с нагревом пищевых жидкостей при движении их в трубопроводах и аппаратах в результате превращения механической энергии силы трения в тепловую энергию. Рассмотрим одну из таких задач, связанную с нагревом жидких сред в процессе гомогенизации.

### Нагрев жидкостей в процессе гомогенизации

Процесс гомогенизации неоднородных жидких сред является неотъемлемой частью технологического процесса производства многих видов пищевых продуктов. В качестве примеров можно привести производство фруктовых и молочных напитков, мороженого и т. п. Наиболее распространённым методом гомогенизации является пропускание жидкости через дроссель (гомогенизирующую головку) под большим давлением, достигающим нескольких десятков, а порой и сотен атмосфер. При этом в результате перехода механической энергии сил трения в тепловую энергию происходит нагрев жидкости на несколько градусов. Так, в работе [1] обращается внимание на повышение температуры молока при его гомогенизации под давлением 100–200 атм на 4–6 град. В силу того, что изменение температуры происходит в зоне гомогенизации в очень малом объёме жидкости за доли секунды, количество выделившейся в единицу времени энергии может достигать нескольких миллионов  $\text{Вт}/\text{м}^3$ .

Задача заключается в выводе уравнения, позволяющего рассчитать изменение температуры жидкости в зависимости от давления гомогенизации и физических свойств среды. Для решения поставленной задачи рассмотрим движение жидкости через гомогенизирующее устройство, представляющее собой кольцевую щель, образованную подвижным клапаном  $A$  и неподвижным седлом  $B$  (рис. 1.6). Необходимый перепад давления в гомогенизирующей головке  $\Delta p = p_1 - p_2$  устанавливается опусканием или поднятием клапана  $A$ . Сложность интегрирования уравнения (1.39) в целях определения перепада температур  $\Delta T = T_2 - T_1$  при заданном перепаде давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  связана с затруднениями определения диссипативной функции  $D$ . Энергию, которая диссипируется в единице объёма жидкости, находящейся между седлом и клапаном, за единицу времени, можно выразить уравнением

$$E = \mu D = \kappa N / \Delta V, \quad (1.42)$$

где  $\kappa$  – коэффициент пропорциональности;  $\Delta V$  – объём жидкости,  $\text{м}^3$ .

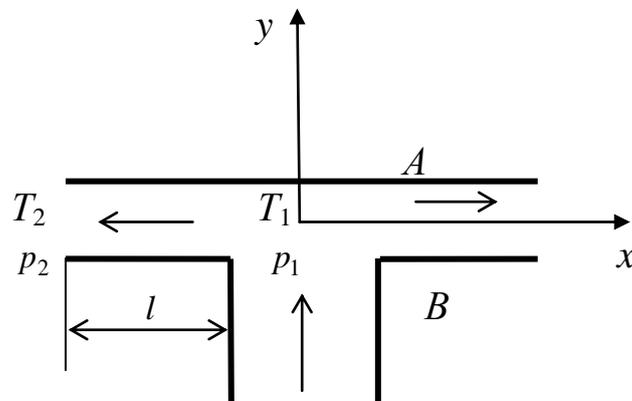


Рис. 1.6. Схема гомогенизирующей головки

Мощность, необходимая для преодоления сопротивления гомогенизирующей головки  $N$ , найдём из уравнения

$$N = \Delta p Q, \quad (1.43)$$

где  $Q$  – объёмный расход жидкости,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $\Delta p$  – перепад давления,  $\text{Н}/\text{м}^2$ .

Из уравнений (1.41)–(1.43) следует

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \kappa \frac{\Delta p Q}{\Delta V}. \quad (1.44)$$

Для решения уравнения (1.44) примем два условия. Согласно первому условию, основанному на малой ширине седла  $l$ , скорость жидкости на входе в кольцевую щель равна скорости на выходе из неё. Во-вторых, будем считать, что температура по ширине седла меняется по линейному закону. Это даёт нам право перейти от отношения бесконечно малых величин к конечным. Приняв условия, запишем уравнение (1.44) в следующем виде:

$$\rho c_p \Delta T = \kappa \frac{\Delta p Q \Delta \tau}{\Delta V}.$$

Так как отношение  $\Delta V / \Delta \tau = Q$ , полученное уравнение приводится к виду

$$\Delta T = \kappa \frac{\Delta p}{\rho c_p}. \quad (1.45)$$

Проверим полученное равенство на примере гомогенизации молока. Пусть плотность молока  $\rho = 1000 \text{ м}^3/\text{с}$ , теплоёмкость  $c_p = 3900 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

Примем в первом приближении  $\kappa = 1$ . Предположим  $\Delta p = 200 \cdot 10^5 \text{ Н}/\text{м}^2$ , что находится в пределах, указанных в работе [1]. Подставив численные значения указанных величин в уравнение (1.45), получим  $\Delta T \approx 5$  град, что соответствует данным работы [1, с. 76]. Для того чтобы знать более точное значение коэффициента  $\kappa$ , необходимы более точные сведения о закономерностях изменения температур при диссипативном нагреве жидкостей. Однако для оценочных расчётов уравнение (1.45) вполне пригодно при  $\kappa = 1$ .

## 2. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### 2.1. Режимы течения

Различают два режима течения жидкостей и газов – ламинарный и турбулентный. Ламинарное (слоистое) течение отличается постоянством скорости и давления во времени в любой точке потока. Такое течение существует при сравнительно небольшой скорости движения жидкости. При достижении некоторого критического значения скорости  $w_{кр}$  происходит переход от ламинарного к турбулентному движению, которое характеризуется непрерывным изменением во времени скорости и давления в любой точке. Возникает пульсация этих параметров, в результате чего происходит интенсивное перемешивание жидкости по всему объему потока.

В ходе экспериментальных исследований было установлено, что критическая скорость, соответствующая переходу от одного режима к другому, зависит от вязкости жидкости и диаметра трубопровода. Количественно переход от одного режима к другому определяется величиной критерия Рейнольдса  $Re = wd/\nu$ .

Толкование физического смысла критерия Рейнольдса будет дано в следующем подразделе. Здесь же отметим, что при движении жидкости в трубопроводах общего назначения за критическое значение критерия Рейнольдса, при котором происходит смена режимов течения, принята величина  $Re_{кр} = 2300$ . Считается, что при  $Re \leq 2300$  в трубопроводах имеет место ламинарный режим течения, при  $Re > 2300$  – турбулентный режим. Конечно, столь резкой границы смены режимов течения в природе не существует. Переход от одного режима к другому происходит в некотором диапазоне изменения  $Re$ .

### 2.2. Гидродинамическое подобие

Различают геометрическое, кинематическое и динамическое подобие потоков. Геометрическое подобие заключается в подобии сходных геометрических размеров, кинематическое – в подобии скоростных полей, динамическое – в подобии силовых полей. Последнее подобие невозможно без выполнения первых двух.

Соблюдение условий подобия необходимо при моделировании машин, аппаратов и процессов, происходящих в них. Исследуя модель и используя условия подобия, можно перенести результаты исследований на реальный объект.

Условия гидродинамического подобия можно получить из уравнений (1.30), приводя их к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные величины, выразив их через соответствующие масштабы:  $L$  – масштаб длины,  $U$  – масштаб скорости,  $t_0$  – масштаб времени,  $g$  – масштаб массовых сил,  $\Delta p$  – масштаб давления. В этом случае безразмерные величины будут равны:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x/L; & \bar{y} &= y/L; & \bar{z} &= z/L; \\ \bar{u}_x &= u_x/U; & \bar{u}_y &= u_y/U; & \bar{u}_z &= u_z/U; \\ \bar{t} &= t/t_0; & \bar{p} &= p/\Delta p; \\ \bar{F}_x &= F_x/g; & \bar{F}_y &= F_y/g; & \bar{F}_z &= F_z/g.\end{aligned}\tag{2.1}$$

В равенствах (2.1) индексом « $\bar{\phantom{x}}$ » обозначены безразмерные параметры.

Ограничиваясь осью  $x$ , преобразуем уравнение (1.30) с учетом равенств (2.1); сократив его стороны на отношение  $U^2/L$ , получим уравнение движения в безразмерном виде:

$$\frac{L}{Ut_0} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} = \frac{gL}{U^2} \bar{F}_x - \frac{\Delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{UL} \nabla^2 \bar{u}_x.\tag{2.2}$$

Вошедшие в уравнение (2.2) безразмерные коэффициенты являются критериями подобия, которые названы именами известных ученых, внесших большой вклад в развитие науки о движении жидких сред:

$$\frac{L}{Ut_0} = \text{St};\tag{2.3}$$

$$\frac{U^2}{gL} = \text{Fr};\tag{2.4}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho U^2} = Eu; , \quad (2.5)$$

$$\frac{UL}{\nu} = Re, \quad (2.6)$$

где  $St$  – критерий Струхаля;  $Fr$  – критерий Фруда;  $Eu$  – критерий Эйлера;  $Re$  – критерий Рейнольдса.

Для аналогичных процессов одноименные критерии подобия должны быть равными.

Критерии подобия имеют вполне определенный физический смысл и выражают отношение определяющих сил, действующих в потоке:  $St$  – соотношение сил инерции, вызванных локальными и конвективными ускорениями;  $Eu$  – отношение сил давления к силам инерции;  $Re$  – отношение сил инерции к силам вязкого трения;  $Fr$  – отношение сил инерции к массовым силам.

Критерии подобия можно получить, не прибегая к операции приведения дифференциальных уравнений движения жидкости к безразмерному виду. Это можно сделать проще, взяв соотношения любых сил, действующих в потоках, как в однофазных, так и многофазных.

Рассмотрим влияние сил инерции  $I$  и сил трения  $T$ . Запишем, чему равны эти числа:

$$I = ma = \rho V \frac{du}{dt}, \quad (2.7)$$

где  $m$  – масса элемента жидкости;  $V$  – его объем;  $\rho$  – плотность;  $a$  – ускорение;  $S$  – площадь трения;

$$T = \mu \frac{du}{dr} S. \quad (2.8)$$

Перейдем от равенств (2.7) и (2.8) к пропорциональностям (2.9) и (2.10), введя характерные величины  $L, U, t$ :

$$I \sim \rho L^3 \frac{L}{t^2}; \quad (2.9)$$

$$T \sim \mu L^3 \frac{U}{L} L^2. \quad (2.10)$$

Из соотношения сил (2.9) и (2.10) следует

$$\frac{I}{T} \sim \frac{\rho L L}{\mu t} = \frac{\rho UL}{\mu} = \text{Re}. \quad (2.11)$$

Таким образом, мы получили критерий Рейнольдса.

Подобным образом можно получить критерии подобия, характеризующие взаимоотношения сил инерции и поверхностного натяжения, сил трения и поверхностного натяжения. Такие взаимодействия имеют место на поверхности раздела фаз в системах жидкость–газ и жидкость–жидкость. В качестве примера приведём движение двухфазных сред, состоящих из сплошной жидкой фазы и диспергированных в ней газовых пузырьков или капель другой жидкости. Сплошной фазой может быть и газ, а дисперсной – капли жидкости.

**Пример.** Получить критерий подобия, характеризующий взаимоотношение сил инерции и сил поверхностного натяжения.

*Решение.* Определим величины силы. Мы уже установили, что сила инерции  $I \sim \rho L^3 L/t^2$ . Сила поверхностного натяжения  $P_\sigma \sim \sigma L$ .

Отношение сил

$$\frac{I}{P_\sigma} \sim \frac{\rho L^2 L^2}{\sigma L t^2} = \frac{\rho L U^2}{\sigma} = \text{We} \quad (2.12)$$

называется критерием Вебера.

Выбор линейного размера в критериях подобия зависит от постановки задачи. Независимо от вида движения при решении задач гидродинамики вводятся понятия гидравлического радиуса и эквивалентного диаметра в качестве характерных геометрических размеров. Гидравлический радиус  $r_r$  есть отношение площади затопленной части поперечного сечения трубопровода  $S$  к смоченному периметру  $\Pi$ :

$$r_{\Gamma} = \frac{S}{\Pi}. \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) для круглого трубопровода диаметром  $d$  получим

$$r_{\Gamma} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}. \quad (2.14)$$

Выражая  $d$  через  $r_{\Gamma}$ , имеем  $d = 4r_{\Gamma}$ . Диаметр, выраженный через гидравлический радиус, называется эквивалентным диаметром  $d_{\text{э}}$ . Поэтому из уравнений (2.13) и (2.14) следует

$$d_{\text{э}} = d = 4r_{\Gamma}, \text{ или } d_{\text{э}} = \frac{4S}{\Pi}. \quad (2.15)$$

Таким образом, исходя из формул (2.14) и (2.15), для канала прямоугольного сечения с высотой  $\delta$  и основанием (шириной)  $b$  получаем

$$d_{\text{э}} = \frac{4\delta b}{2(\delta + b)}. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) можно представить в ином виде:

$$d_{\text{э}} = \frac{2\delta}{\left(\frac{\delta}{b} + 1\right)}. \quad (2.17)$$

При  $\delta/b \ll 1$  имеет место  $d_{\text{э}} \approx 2\delta$ ; канал, удовлетворяющий этому условию, называется каналом бесконечной ширины.

При стекании жидкости по поверхности в виде пленки толщиной  $\delta$  площадь ее поперечного сечения  $S = \Pi\delta$ . Подставив значение  $S$  в равенство (2.16), получим  $d_{\text{э}} = 4\delta$ .

Можно легко доказать, что для трубопровода с круглым поперечным сечением  $d_{\text{э}} = d$ . Таким образом, эквивалентный диаметр равен диаметру гипотетического трубопровода круглого сечения, для которого отношение площади  $S$  к смоченному периметру  $\Pi$  имеет то же значение, что и для трубопровода некруглого сечения. Введение

понятий  $r_T$  и  $d_3$  позволяет унифицировать многие расчеты в задачах движения жидкостей.

За масштаб скорости при движении жидкости в каналах принимается средняя скорость  $w$ ; при обтекании тонких профилей – скорость набегающего потока  $U_\infty$ .

В качестве характерного размера при обтекании потоком тонкого профиля принимается его длина  $l$ . С учетом сказанного критерий Рейнольдса может иметь следующие виды:

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu}; \quad (2.18)$$

$$\text{Re} = \frac{wd_3}{\nu}; \quad (2.19)$$

$$\text{Re} = \frac{U_\infty l}{\nu}; \quad (2.20)$$

$$\text{Re}_{\text{шт}} = \frac{4w\delta}{\nu}. \quad (2.21)$$

Критерий Рейнольдса можно получить и как отношение количества движения, переносимого конвекцией, к молекулярному переносу. В уравнении (1.32) конвективную составляющую выразим в виде пропорциональности

$$\vec{u} \text{ grad } \vec{u} \approx \frac{u^2}{L}.$$

Молекулярная составляющая

$$\nu \nabla^2 \vec{u} \approx \frac{\nu u}{L^2}.$$

Отношение этих пропорциональностей даст нам значение критерия Рейнольдса. Аналогичным образом можно получить критерии подобия переноса теплоты и массы. Предлагаем читателям самим получить критерий подобия, характеризующий взаимодействие сил трения и поверхностного натяжения.

## 2.3. Ламинарные течения

Решение задач, связанных с нахождением параметров потока жидкости при ламинарном режиме течения, может быть выполнено точно на основе уравнения Навье–Стокса (1.32) с некоторыми упрощающими допущениями.

Рассмотрим плоское установившееся напорное течение несжимаемой жидкости вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $u_x$ . Так как  $u_y = u_z = 0$ ,  $\partial u_x / \partial t = 0$ , то из трёх уравнений (1.30) останется одно – первое. Из уравнения (1.5а) следует, что  $\partial u_x / \partial x = 0$ . Пренебрегая массовыми силами из первого уравнения системы (1.30), получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) называется уравнением слоистых течений. На основе данного уравнения решим несколько частных задач. При решении некоторых из них удобнее пользоваться цилиндрическими координатами. В таких случаях уравнение (2.22) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.22a)$$

### 2.3.1. Течение в плоском канале

Будем считать движение жидкости вдоль оси  $x$  в канале, образованном двумя параллельными пластинами (рис. 2.1), равномерным. Упростим задачу, введя понятие бесконечной ширины канала, удовлетворяющей условию  $\delta/b \ll 1$ . В этом случае можно считать, что боковые стенки не будут влиять на характер движения жидкости и  $\partial^2 u_x / \partial z^2 = 0$ . С учетом принятых допущений из уравнения (2.22) следует

$$\frac{dp}{dx} = -\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2}. \quad (2.23)$$

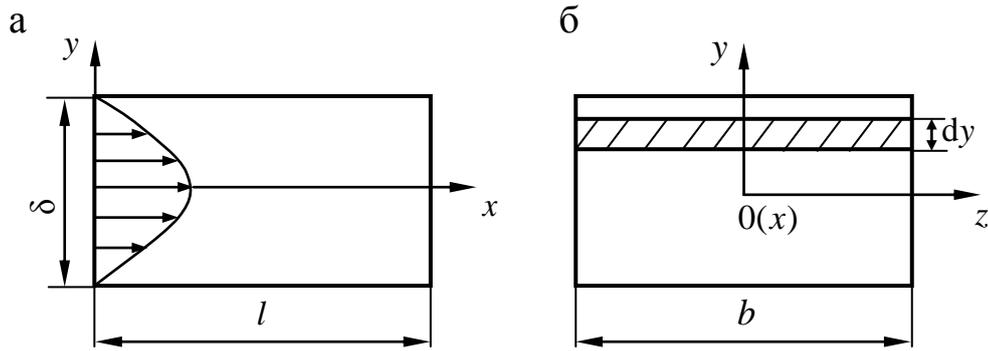


Рис. 2.1. Схема плоского канала:  
а – продольное сечение; б – поперечное сечение

Так как падение давления в канале на участке длиной  $l$  происходит линейно, от отношения бесконечно малых величин можно перейти к отношению конечных:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}.$$

Подставляя значение  $dp/dx$  в выражение (2.23), запишем

$$\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l} = -\frac{d^2 u_x}{dy^2}.$$

Наша задача заключается в нахождении уравнения, описывающего профиль скорости по сечению потока. С этой целью проинтегрируем полученное равенство дважды. После первого интегрирования получаем

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{\Delta p}{\mu l} y + c_1. \quad (2.24)$$

Постоянную интегрирования  $c_1$  находим из условий на оси канала  $y=0$ ,  $u_x = u_{\max} = \text{const}$  и  $du_{\max}/dy = 0$ . В итоге  $c_1 = 0$ .

После второго интегрирования следует

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\mu l} y^2 + c_2.$$

Постоянную интегрирования  $c_2$  находим, приняв второе граничное условие на стенке. При  $y = \delta/2$   $u_x = 0$  и

$$c_2 = \frac{\Delta p}{2\mu l} \delta^2.$$

С учетом значения  $c_2$  окончательно имеем

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\mu l} \left( \frac{\delta^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.25)$$

Таким образом, при ламинарном режиме течения профиль скорости по сечению потока имеет вид квадратичной параболы (см. рис. 2.1).

Расход жидкости через живое сечение канала находим из уравнения (13). Так как  $dS = Bdy$ , то после подстановки в него равенства (2.25) получим

$$Q = 2 \int_0^{\delta/2} \frac{\Delta p}{2\mu l} \left( \frac{\delta^2}{4} - y^2 \right) B dy.$$

Решая интеграл, найдем

$$Q = \frac{b\Delta p\delta^3}{12\mu l}. \quad (2.26)$$

Поскольку средняя скорость движения жидкости  $w = Q/S$ , где  $S = B\delta$ , из равенства (2.26) следует

$$w = \frac{\Delta p}{12\mu l} \delta^2. \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.25) следует, что при  $y = 0$   $u_x = u_{\max}$ ,

$$u_{\max} = \frac{\Delta p}{8\mu l} \delta^2. \quad (2.28)$$

Поделив уравнение (2.28) на (2.27), установим, что максимальная скорость в плоском канале в полтора раза больше средней.

Решая уравнение (2.27) относительно  $\Delta p$ , находим

$$\Delta p = \frac{12\mu lv}{\delta^2}.$$

Так как  $\delta = d_3/2$ , то после несложных преобразований получим

$$\Delta p = \frac{96}{\text{Re}} \frac{l}{d_3} \frac{\rho w^2}{2}. \quad (2.29)$$

Обозначив в полученном равенстве отношение

$$\frac{96}{\text{Re}} = \lambda, \quad (2.30)$$

окончательно запишем

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d_3} \frac{\rho w^2}{2}. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) называется уравнением Дарси–Вейсбаха и используется для расчета потерь давления по длине трубопроводов. Коэффициент  $\lambda$  называют коэффициентом Дарси или коэффициентом гидравлического трения. Разделив обе части равенства (2.31) на произведение  $\rho g$ , приведем его к виду

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d_3} \frac{w^2}{2g}. \quad (2.31a)$$

Уравнение (2.31a) определяет потери удельной энергии по длине канала (энергии, отнесенной к единице веса жидкости) и также называется зависимостью Дарси–Вейсбаха.

### 2.3.2. Течение в трубе с круглым поперечным сечением

При решении данной задачи перейдем от прямоугольной системы координат к цилиндрической [см. уравнение (2.22a)].

Поскольку профиль скорости симметричен относительно оси  $x$ , то вторая производная  $\partial^2 u_x / \partial \theta^2 = 0$  (рис. 2.2) и уравнение (2.22а) приводится к виду

$$-\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{l}.$$

После первого интегрирования запишем

$$r \frac{du_x}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu l} r^2 + c_1. \quad (2.32)$$

Постоянную интегрирования  $c_1$  находим из следующего условия: при  $u_x = u_{\max} = \text{const}$   $du_x / dy = 0$  и  $c_1 = 0$ .

После второго интегрирования и граничного условия –  $r = r_0$ ,  $u_x = 0$  получим уравнение, описывающее поле скоростей в канале круглого поперечного сечения:

$$u_x = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2). \quad (2.33)$$

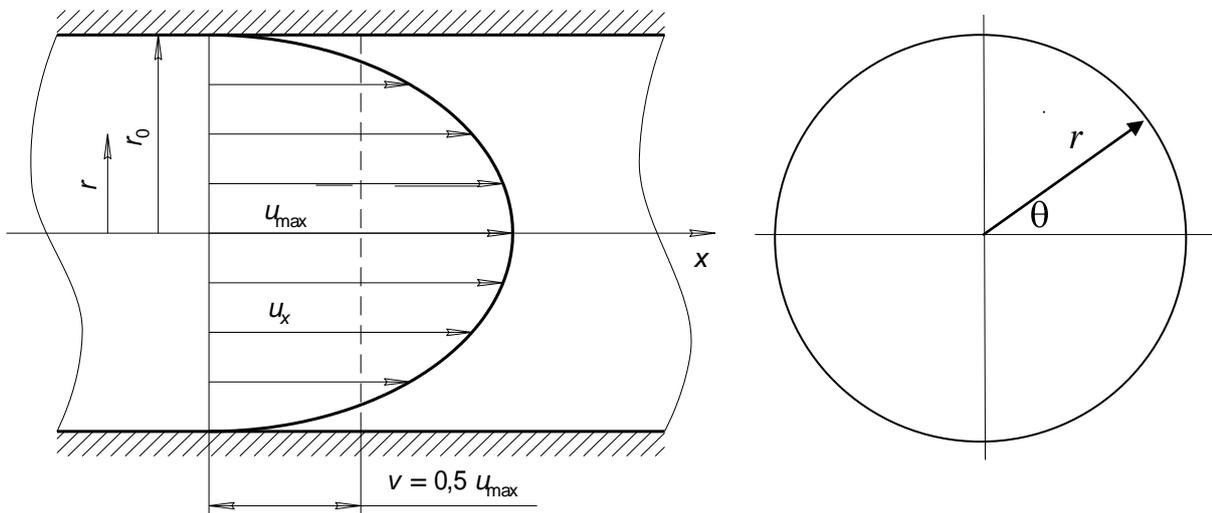


Рис. 2.2. Распределение скорости по сечению потока при ламинарном режиме течения

При  $r = 0$  скорость на оси потока имеет максимальное значение:

$$u_{\max} = \frac{\Delta p r_0^2}{4\mu l}.$$

Разделив  $u_x$  на  $u_{\max}$ , получим уравнение эпюры скоростей в безразмерном виде:

$$\frac{u_x}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Из уравнения (13) находим объемный расход жидкости:

$$Q = \int_S u dS = \int_0^{r_0} u_x 2\pi r dr = \frac{\pi r_0^4 \Delta p}{8\mu l}.$$

Зная расход, определим среднюю скорость:

$$w = \frac{Q}{S} = \frac{r_0^2 \Delta p}{8\mu l}. \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) называют законом Хагена–Пуазейля для течения в трубе с круглым поперечным сечением.

Взяв отношение максимальной скорости к средней, получим  $u_{\max} / w = 2$ . Таким образом, в отличие от плоского канала, в котором максимальная скорость в полтора раза больше средней, в трубопроводе с круглым поперечным сечением максимальная скорость в два раза превышает среднюю.

Из формулы (2.34) следует, что падение давления по длине трубы

$$\Delta p = \frac{32\mu w l}{d^2}. \quad (2.35)$$

Преобразуя равенство (2.35) аналогично тому, как это было сделано для плоского канала, найдем

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}, \quad (2.36)$$

где

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Таким образом, мы вновь пришли к уравнению Дарси–Вейсбаха (2.31).

Аналогичные решения можно выполнить для каналов с любой формой поперечного сечения. При этом в каждом случае будем получать закон сопротивления движению в виде зависимостей (2.31) или (2.36).

Общее уравнение для определения коэффициента Дарси–Вейсбаха можно записать в виде равенства

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}^m}. \quad (2.37)$$

Признаком ламинарного течения является равенство показателя степени, при  $\text{Re} \ m = 1$ . Значение  $A$  зависит от формы поперечного сечения канала; например, для кольцевого канала  $A$  равно 48, а для квадратного – 56.

Следует иметь в виду, что уравнения (2.36) и (2.37) с некоторыми поправками пригодны и для расчетов потерь энергии по длине трубопроводов при турбулентном режиме, о чем будет говориться в следующих разделах.

### 2.3.3. Течение Куэтта

Течение Куэтта имеет место в том случае, если одна из поверхностей, образующих канал, движется вдоль оси  $Ox$ , а другая неподвижна (рис. 2.3). Такие течения наблюдаются в зазорах между валом и корпусом подшипника скольжения; в роторно-пленочных и скребковых теплообменных аппаратах между торцами лопастей (скребков) и корпусом аппарата; в стерилизаторах фрикционного типа, в которых нагрев продукта происходит за счет теплоты, выделенной в результате трения жидкости при движении ее между вращающимися и неподвижными дисками или цилиндрами.

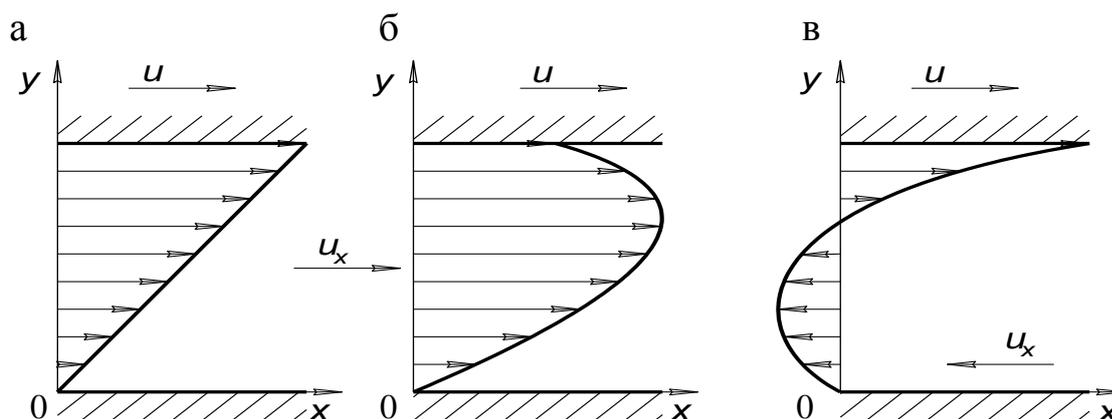


Рис. 2.3. Схема течения Куэтта при различных градиентах давления:  
 а –  $dp/dx = 0$ ; б –  $dp/dx < 0$ ; в –  $dp/dx > 0$

Для вывода уравнения, описывающего распределение скорости жидкости в зазоре между параллельными поверхностями, используем равенство (2.23). Проинтегрировав его дважды, получим

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2.$$

Постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  определяют, исходя из условий  $u_x = 0$  при  $y = 0$ ,  $u_x = U$  при  $y = \delta$ . Тогда

$$c_1 = \frac{U}{\delta} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \delta; \quad c_2 = 0.$$

Окончательное выражение для поля скоростей будет иметь вид

$$u_x = \frac{Uy}{\delta} + \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{\delta}{y}\right). \quad (2.38)$$

Из уравнения (2.38) следует, что скорость  $u_x$  принимает нулевое значение при  $y = 0$ , а также при следующем условии:

$$y = \delta - \frac{2U\mu}{\delta \frac{dp}{dx}}.$$

Соответственно этому результату на рис. 2.3 изображены поля скоростей, описываемых зависимостью (2.38). При наличии положительного градиента давления  $dp/dx$  происходит образование так называемого отрывного течения, при котором слои жидкости, находящиеся возле неподвижной плоскости, движутся в сторону, противоположную перемещению верхней плоскости. Причина этого явления заключается в совместном действии положительного градиента давления и вязкого трения о неподвижную плоскость.

Решение такой же задачи при непараллельном расположении поверхностей можно найти в работе [2, с. 112–117].

#### 2.3.4. Течение жидкости в капиллярах

Одним из примеров ламинарного движения является течение жидкости в капиллярных каналах. Название «капилляр» латинского происхождения от слова *capillaris* – волосяной, т. е. это каналы с очень малым поперечным сечением. В отличие от каналов с большим диаметром на скорость движения жидкости в капиллярах будет влиять сила поверхностного натяжения. Движущей силой движения будет разность между капиллярным давлением  $p_\sigma$  и давлением, обусловленным высотой подъёма жидкости в капилляре  $h_k$  (рис. 2.4). Капиллярное давление возникает в результате искривления поверхности раздела фаз между жидкостью и газом под действием силы поверхностного натяжения.

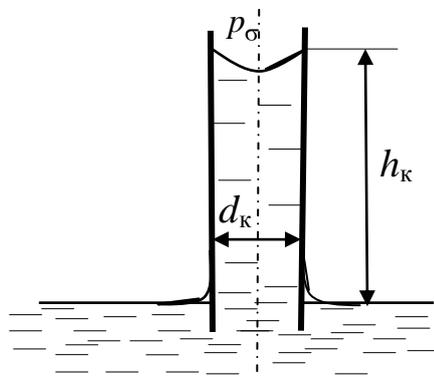


Рис. 2.4. Подъём жидкости в капиллярной трубке

*Поверхностным натяжением* называется способность жидкости оказывать сопротивление изменению величины и формы ее поверхности под действием внешних сил. Это свойство проявляется только на поверхностях раздела фаз и имеет большое значение при изучении и расчетах аппаратов, предназначенных для проведения процессов экстракции, абсорбции, десорбции или иных процессов, протекающих на границе раздела фаз.

Для понимания физической сущности явления рассмотрим пример изменения поверхности капли жидкости (пузырьки газа в жидкости) на бесконечно малую величину  $dS = S_1 - S_2$ . На это изменение требуется затратить энергию  $dE \sim dS$ . Введя в эту пропорциональность коэффициент  $\sigma$ , называемый коэффициентом поверхностного натяжения, получим

$$dE = \sigma dS. \quad (2.39)$$

Из уравнения (2.39) следует размерность  $\sigma$  – ньютон на метр (Н/м) или джоуль на квадратный метр (Дж/м<sup>2</sup>). Таким образом, из первой размерности видно, что коэффициент поверхностного натяжения есть сила, действующая на единицу длины, ограничивающей поверхность жидкости. Из второй размерности следует, что  $\sigma$  можно трактовать как энергию, необходимую для образования единицы новой поверхности. Поверхностное натяжение зависит от температуры и не зависит от давления.

Под действием сил поверхностного натяжения в каплях и газовых пузырьках сферической формы радиусом  $r$  возникает дополнительное давление

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{r}. \quad (2.40)$$

Силы поверхностного натяжения являются причиной движения жидкости в капиллярах и во многом определяют процессы переноса, происходящие в капиллярно-пористых материалах. Примером тому могут быть движение жидкостей в мелкопористых грунтах, процессы экстрагирования жидкостями веществ из твердых пористых материалов и т.п.

Уравнение для расчёта скорости движения в капилляре найдём из условия равновесия жидкости под действием сил трения  $T$ , тяже-

сти  $G$  и поверхностного натяжения  $T_\sigma$ . Обратимся к рис. 2.4 и представим условие равновесия сил, действующих на движущуюся в капилляре жидкость, в виде равенства

$$T + G = T_\sigma = \tau \pi d_k h_k + \rho g h_k \frac{\pi d_k^2}{4} = \sigma \pi d. \quad (2.41)$$

Так как  $\tau = \Delta p d_\sigma / 4l$ , то после подстановки в уравнение (2.41) значения  $\tau$  и после его преобразования получим

$$\Delta p + \rho g h_k = \frac{4\sigma}{d_k}. \quad (2.42)$$

Потери энергии при движении жидкости в капилляре  $\Delta p$  описываются уравнением (2.35). После подстановки уравнения (2.35) в уравнение (2.42) и решения его относительно скорости, получим уравнения для расчёта скорости движения жидкости в капилляре:

$$w_k = \frac{d_k^2}{32\mu h_k} \left( \frac{4\sigma}{d_k} - \rho g h_k \right). \quad (2.43)$$

При горизонтальном расположении капилляра силой тяжести можно пренебречь, уравнение (2.43) примет вид

$$w_k = \frac{d_k^2 \sigma}{8\mu h_k}.$$

Из уравнений (2.43) следует, что скорость движения жидкости будет равна нулю при условии

$$\frac{4\sigma}{d_k} = \rho g h_k.$$

Последнее равенство может быть использовано при экспериментальном определении коэффициента поверхностного натяжения при известных значениях  $d_k$  и  $h_k$ .

## 2.4. Вискозиметрия жидких продуктов

С измерениями вязкости приходится сталкиваться как в научных исследованиях, так и в производственных условиях. Для этих целей применяются приборы, называемые *вискозиметрами*. Все типы вискозиметров так или иначе связаны с измерением силы сопротивления движению жидкости или тел в жидкости. Рассмотрим два типа приборов для измерения вязкости, наиболее часто используемых в производственной и исследовательской практике, – капиллярный и ротационный.

Работа первого основана на измерении силы сопротивления течению жидкой среды в трубке малого диаметра. Диаметр подбирается с таким расчётом, чтобы течение жидкости в трубке было бы ламинарным. Это требование необходимо потому, что, согласно уравнению (2.35), скорость жидкости при ламинарном движении в канале с любой формой поперечного сечения обратно пропорциональна вязкости в первой степени. Поэтому точность определения вязкости из уравнения (2.35) будет наивысшей.

В ротационных вискозиметрах измеряется величина крутящего момента силы трения на валу ротора, вращающегося в исследуемой жидкости. Ротор представляет собой либо диск, либо цилиндр. Рассмотрим наиболее часто используемый в научных исследованиях цилиндрический вискозиметр, в котором жидкость заливается в зазор между ротором и неподвижным статором. В цилиндрическом вискозиметре движение жидкости в зазоре между ротором и статором представляет собой течение Куэтта. Профиль скорости описывается уравнением (2.38).

### 2.4.1. Капиллярный вискозиметр

Название «капиллярный» в данном случае несколько условно, так как силы поверхностного натяжения никакого влияния на течение жидкости здесь не оказывают. Название дано потому, что в капиллярных вискозиметрах используются трубки с внутренним диаметром более 0,005 м. Диаметр может быть увеличен, если понадобится исследовать очень вязкие жидкости.

Прибор, схематично изображённый на рис. 2.5, состоит из трёх основных деталей: ёмкости для исследуемой жидкости А, капилляр-

ной трубки  $B$  и кюветы  $C$ . Как правило, к вискозиметру прилагаются несколько капиллярных трубок. Каждая может быть использована в определенном диапазоне изменения вязкости. Рекомендации по выбору трубок даются в паспорте прибора. В случае отсутствия паспорта необходимо провести тарировку прибора. Для этого требуются жидкости с уже известными физическими свойствами, например глицерин, водные растворы которого подчиняются течению Ньютона.

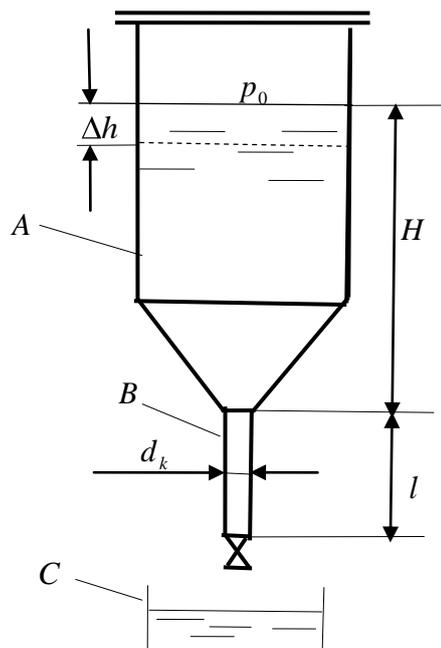


Рис. 2.5. Схема капиллярного вискозиметра

Жидкость по капилляру может либо течь под действием силы тяжести (сосуд открыт), либо выдавливаться из ёмкости сжатым до необходимого избыточного давления  $p_0$  газом. Последний вариант применяется для исследования высоковязких жидкостей.

В первом варианте для избегания влияния на точность измерений изменения напора  $H$  следует соблюдать условие  $\Delta h / H \ll 1$ .

Во время опыта в кювету за определенное время  $t$  сливается масса жидкости  $m$ . Скорость движения жидкости в капилляре рассчитывается по следующей формуле:

$$w_k = \frac{m}{\rho S_k} = \frac{4m}{\pi d_k \rho},$$

где  $d_k$  – внутренний диаметр капилляра.

Вязкость жидкости находится из уравнения

$$\mu = \frac{32w_{\text{к}}l_{\text{к}}}{\Delta p d_{\text{к}}^2}.$$

Величина  $\Delta p = p_0 + \rho g(H + l_{\text{к}})$ . При открытой ёмкости  $p_0 = 0$ .

При необходимости построения графиков зависимости касательных напряжений от скорости сдвига  $\dot{\gamma}$   $\tau$  находят по формуле, которая получается из условия равновесия сил трения и давления, действующих на объём жидкости в капилляре:

$$\tau = \frac{\Delta p d_{\text{к}}}{4l_{\text{к}}}. \quad (2.44)$$

При известной вязкости скорость сдвига находят из уравнения (1.9).

#### 2.4.2. Ротационные вискозиметры

Схема вискозиметра показана на рис. 2.6. Течение жидкости в зазоре между ротором 1 и статором 2 представляет собой течение Куэтта и подчиняется закону Ньютона (1.6). Сила трения между ротором и жидкостью вычисляется по формуле

$$R_{\text{т}} = \tau \cdot 2\pi r_0 l. \quad (2.45)$$

Так как движение жидкости вдоль ротора отсутствует, то в уравнении (2.38)  $dp/dx = 0$ . В таком случае скорость в зазоре меняется по линейному закону (см. рис. 2.3, а) и уравнение (1.6) можно представить в виде

$$\tau = \mu \frac{u_0}{\delta} = \mu \frac{2\pi r_0 n}{\delta}. \quad (2.46)$$

Подставив значение  $\tau$  из уравнения (2.46) в уравнение (2.45), определим силу трения:

$$R_{\text{т}} = \mu \frac{4\pi^2 r_0^2 n l}{\delta},$$

где  $n$  – число оборотов ротора.

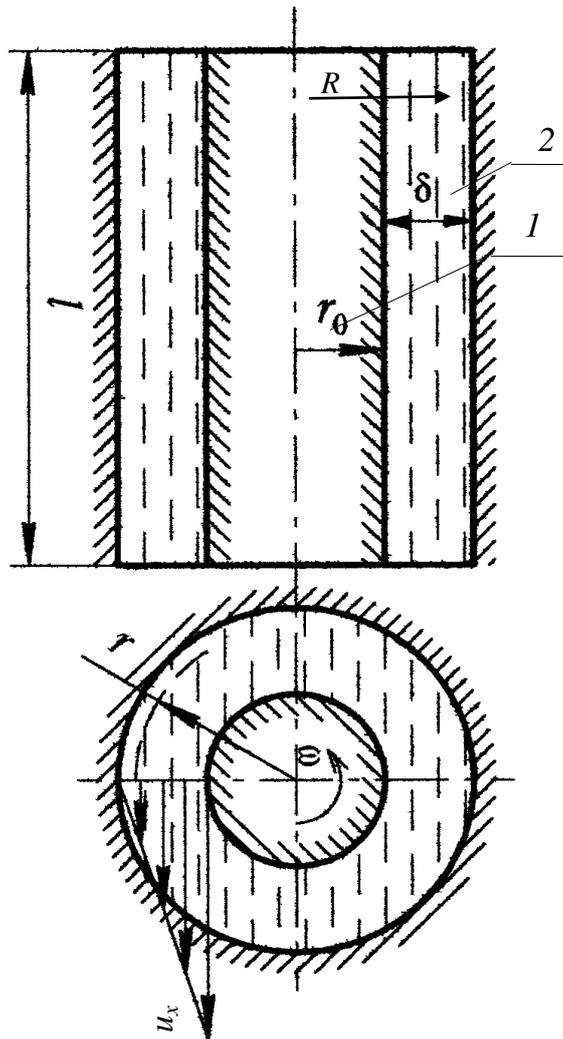


Рис. 2.6. Схема ротационного цилиндрического вискозиметра

Крутящий момент силы трения

$$M_k = R_T r_0 = \mu \frac{4\pi^2 r_0^3 n l}{\delta}.$$

В стандартных ротационных вискозиметрах измеряется либо сила трения, либо крутящий момент. Как правило, приборы показывают готовое значение вязкости.

Следует отметить, что рассмотренное решение справедливо при соблюдении условия – отношение  $r_0 / R$  близко к единице, т. е. когда на течение жидкости в зазоре влияет неподвижная стенка ста-

тора. Решение задачи в случае  $R \rightarrow \infty$  можно найти в работе [2, с. 87].

Нами рассмотрены только основы вискозиметрии. Более подробно с теориями капиллярной и ротационной вискозиметрии можно ознакомиться в работе [3, с. 99–120].

Заканчивая анализ ламинарных течений в каналах с разной формой поперечного сечения, отметим, что уравнение Навье–Стокса позволяет решать задачи и при внешнем обтекании тел разной формы. Разница заключается лишь в том, что определяется не перепад давления  $\Delta p$  [(см. уравнение (2.36)], а касательные напряжения на поверхности тела:

$$\tau_0 = C_f \frac{\rho w^2}{2}. \quad (2.47)$$

Для внутренней задачи касательное напряжение находят из равенства сил давления и сил трения. В результате из уравнения (2.36) получим уравнение для определения  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho w^2}{2}. \quad (2.47a)$$

Таким образом, для внутренней задачи коэффициент сопротивления

$$C_f = \frac{\lambda}{4}.$$

Коэффициент сопротивления  $C_f$ , так же как и  $\lambda$ , обратно пропорционален критерию Рейнольдса в первой степени, т. е. в общем случае можно записать

$$C_f = \frac{A}{\text{Re}},$$

где коэффициент  $A$  зависит от формы обтекаемого тела. Например, при обтекании шара  $A = 24$ .

Уравнения последнего типа можно назвать законом сопротивления первой степени. Более подробные сведения об обтекании тел ламинарным потоком жидкости можно найти в работах [2, 4–6].

Закону сопротивления первой степени подчиняются не только ламинарные течения в каналах или при обтекании тел, но и движение жидкостей в аппаратах с мешалками при перемешивании высоковязких сред (тесто, фарши, плавленые сыры и т.п.). При расчёте энергии, затрачиваемой на перемешивание в единицу времени, пользуются критерием мощности  $K_N$ , являющимся аналогом коэффициента сопротивления:

$$N = K_N \rho n^3 d^5, \quad (2.48)$$

где

$$K_N = \frac{A_2}{\text{Re}_c^m}, \quad (2.49)$$

здесь  $\text{Re}_c$  – центробежный критерий Рейнольдса.

Уравнение (2.49) является аналогом первого уравнения системы (2.30). Коэффициент  $A_2$  в нём зависит от типа мешалки, показатель степени  $m$  – от режима перемешивания, определяются они экспериментально. При ламинарном режиме перемешивания  $m = 1$ .

### 2.4.3. Диссипативный метод исследований реологических свойств высоковязких сред

Результаты исследования реологических свойств высоковязких сред (особенно неньютоновских) с помощью ротационных и капиллярных вискозиметров сложно использовать в технических расчетах того или иного оборудования. Например, для определения мощности аппаратов с мешалками, со шнеками, в диспергаторах и т.п. это просто невозможно, так как величина вязкости, полученная в ротационном или капиллярном вискозиметре, может сильно отличаться от вязкости среды, находящейся в реальном аппарате. Причина кроется в различии гидродинамических условий, от которых для неньютоновских жидкостей зависит величина вязкости.

Измерение вязкости в ротационных и капиллярных приборах основано на условии чистого сдвига в зазоре между ротором и статором или в капилляре. Соблюсти подобные условия в реальных аппаратах невозможно, даже если процесс обработки продукта происходит при ламинарном режиме. Но если всё же попытаться использовать для определения эффективной вязкости уже имеющиеся кривые течения продукта, то необходимо знать значения градиентов скоро-

сти или касательных напряжений в данном конкретном аппарате. К сожалению, такие данные в литературе в большинстве случаев отсутствуют.

Определить касательные напряжения и градиенты скоростей можно, измерив расход энергии в единицу времени на проведение того или иного процесса. Для этого существуют различные методы. Например, определяют мощность электродвигателя при разных числах оборотов, значениях температуры продукта и т. п. по изменению силы тока и напряжения в электрической цепи. Метод простой, но довольно грубый. Другие методы основаны на измерении крутящего момента непосредственно на валу исследуемого аппарата.

Можно предложить ещё один, пока малоизвестный, диссипативный метод, основанный на снятии кинетики разогрева жидкости за счёт сил трения. Идея использования данного метода была высказана В.В. Консетовым (к сожалению, ныне покойным), ученым, известным в области реологии и тепло- и массообмена в полимеризационных процессах [7]. Возможно, что аналогичную мысль высказывали и другие исследователи, однако в литературе никаких сведений об этом не обнаружено.

Рассмотрим для примера аппарат с перемешивающим устройством. Баланс мощностей тепловых источников при диссипативном нагреве, отнесённых к единице объёма жидкости, запишем в следующем виде:

$$E = \rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha F \Delta T}{V}. \quad (2.50)$$

Первое слагаемое правой части данного равенства характеризует мощность диссипативного источника теплоты [см. уравнение (1.41)]. Второе слагаемое, забегая вперёд [см. уравнение (3.3)], характеризует потери в окружающую среду. При хорошей изоляции вторым слагаемым можно пренебречь. В этом случае можно ограничиться уравнением (1.41), представив его в следующем виде:

$$E = \frac{N}{V} = \rho c_p \frac{dT}{dt} = \mu \dot{\gamma}^2, \quad (2.51)$$

где  $V$  – объём жидкости в аппарате;  $\dot{\gamma}$  – градиент скорости.

Из уравнения (2.51) следует, что мощность диссипативного источника энергии

$$N = \frac{M\mu\dot{\gamma}^2}{\rho}, \quad (2.52)$$

где  $M$  – масса жидкости в аппарате.

С другой стороны, энергия, расходуемая в единицу времени на перемешивание, определяется известным уравнением

$$N = K_N \rho n^3 d^5, \quad (2.53)$$

где критерий мощности

$$K_N = \frac{A_2}{\text{Re}_{\text{ц}}^m}, \quad (2.54)$$

здесь центробежный критерий Рейнольдса

$$\text{Re}_{\text{ц}} = \frac{\rho n d^2}{\mu}, \quad (2.55)$$

$n$  – частота вращения мешалки,  $d$  – её диаметр.

Показатель степени  $m$  в уравнении (2.54) меняется от нуля при развитом турбулентном режиме перемешивания до единицы – при ламинарном. Ясно, что проводить исследования надо при ламинарном режиме перемешивания, так как с переходом к турбулентному режиму влияние вязкости на затраты энергии вырождается.

В уравнении (2.54) коэффициент  $A_2$  зависит только от типа мешалки и не зависит от физических свойств перемешиваемой среды [8]. Поэтому при известных значениях  $A_2$  из уравнений (2.49) можно найти скорость сдвига:

$$\dot{\gamma} = \left( \frac{A_2 \rho n^2 d^3}{M} \right)^{0.5}. \quad (2.56)$$

Из уравнений (2.51), (2.52) и (2.56) найдём вязкость

$$\mu = \frac{M c_p T'(t)}{A_2 n^2 d^3}. \quad (2.57)$$

Суть реологических исследований будет сводиться к следующему. В каком-либо аппарате с перемешивающим устройством в течение определённого времени производится перемешивание исследуемой жидкости и через определённые промежутки времени измеряется её температура. Имея кинетику изменения температуры во времени и найдя в явном виде функциональную зависимость  $T' = f(t)$ , определим производную этой функции  $T'(t)$ . Подставив значение производной в уравнение (2.57), получим уравнение для расчёта  $\mu$ .

Если исследование реологических характеристик производится в аппарате, для которого значение  $A_2$  не найдено, то необходимо провести предварительные опыты с жидкостью с известными реологическими свойствами, обладающей высокой вязкостью. Желательно, чтобы жидкость имела пологую зависимость вязкости от температуры и обладала ньютоновскими свойствами.

Так как в опытах измеряется среднее значение температуры по объёму аппарата, следовательно, и находить мы будем осреднённые значения диссипации энергии, градиентов скорости и вязкости.

Для повышения точности эксперимента необходимо соблюдать определенные условия:

- в целях снижения влияния температуры на величину вязкости исследуемой жидкости разность между начальным и конечным значениями температуры не должна превышать 1–1,5 град (разность температур можно снизить, повысив точность измерения температуры);

- необходимо добиться хорошей изоляции аппарата от окружающей среды.

Последовательность определения вязкости вновь исследуемой жидкости такая:

1. В процессе перемешивания жидкости массой  $m$  фиксируется изменение температуры во времени с заранее выбранным шагом при различных числах оборотов перемешивающего устройства. Шаг изменения времени подбирается во время проведения опытов. Для обработки опытных данных можно использовать компьютерную программу CurveExpert. Программа предложит вам несколько уравнений, из которых нужно выбрать одно наиболее простое, но достаточно точно описывающее опытные данные. Предположим, что при данном числе оборотов  $n$  было выбрано степенное уравнение вида

$$T = T_H + (bt)^p, \quad (2.58)$$

где  $T_H$  – начальная температура.

Решим уравнение (2.58) относительно времени  $t$ :

$$t = \frac{(T - T_H)^{\frac{1}{p}}}{b}. \quad (2.59)$$

Производная функции (2.58) будет иметь вид

$$T' = \frac{dT}{dt} = b^p p t^{p-1},$$

или с учётом уравнения (2.59) она примет вид

$$T' = \frac{dT}{dt} = b^p p (T - T_H)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Подставив полученный результат в равенство (2.57), запишем

$$\mu = \left( \frac{c_p M b^p p (T - T_H)^{\frac{p-1}{p}}}{A_2 n^2 d^3} \right). \quad (2.60)$$

Для проверки предлагаемого метода реологических исследований нами были проведены опыты по установлению закономерности перемешивания чистого глицерина в лабораторном смесителе для теста с двумя Z-образными мешалками, вращающимися с различными скоростями. Отношение  $n_1/n_2 = 1,5$ . Эксперименты проводились при следующих числах оборотов мешалок:  $n_2 = 0,4; 0,6; 0,8; 1$  об/с;  $n_1 = 1,5 n_2$ ; среднее число оборотов  $n_c = 1,25 n_2$ . Диаметр мешалок одинаков и равен 0,068 м. Начальная температура в опытах колебалась в пределах 19–24 °С. Масса загружаемой в смеситель жидкости была постоянной,  $M = \rho V = 0,78$  кг.

Исследование кинетики разогрева глицерина показало, что изменение температуры от времени носит линейный характер:

$$T = T_n + bt, \quad (2.61)$$

поэтому в равенствах (2.54) – (2.60)  $p = 1$ . Поскольку перемешивание проводилось в ламинарном режиме, то и показатель степени  $m = 1$ . Производная  $dT/dt = b$  зависит от числа оборотов и физических свойств жидкости. Например, при  $T_n = 19,5$ ,  $n_c = 0,5$  и  $b = 2,14 \cdot 10^{-4}$ ; при  $T_n = 20,1$ ,  $n_c = 0,75$  и  $b = 4,1 \cdot 10^{-4}$ . Для неньютоновских сред показатель степени  $p$  будет отличаться от единицы.

На основе данных по кинетике разогрева жидкости из уравнений (2.48), (2.49), (2.53) и (2.60) определялись коэффициент  $A$  и показатель степени  $m$  в уравнении (2.49). В результате обработки опытных данных получено уравнение для расчёта критерия мощности в исследуемом смесителе:

$$K_N = \frac{3450}{\text{Re}_{\text{ц}}^{1,1}}. \quad (2.62)$$

В уравнении (2.62) вызывает некоторое сомнение величина показателя степени при критерии Рейнольдса. Известно, что при ламинарном режиме перемешивания должно быть  $m = 1$ . Отклонение показателя степени от единицы в уравнении (2.62) связано, скорее всего, с ошибками в эксперименте.

Несоблюдение постоянства начальных температур не позволило получить точную зависимость  $b$  от числа оборотов. Устранить указанные недостатки в данных опытах нельзя было по чисто техническим причинам. Однако, несмотря на это (в принципе недостатки устранимы), опыты показали, что диссипативный метод вполне пригоден для проведения исследований реологических свойств высоковязких жидкостей.

## 2.5. Турбулентные течения

При решении задач гидродинамики турбулентных потоков вводится понятие осредненных во времени значений составляющей

локальной скорости  $\bar{u}$  и локального давления  $\bar{p}$ . Тогда их локальные значения будут равны:

$$u = \bar{u} + u'; \quad p = \bar{p} + p', \quad (2.63)$$

где  $u'$  и  $p'$  – пульсационные составляющие локальной скорости и локального давления.

В проекциях на координатные оси (ограничимся осью  $Ox$ ) получаем  $u'_x, \sigma'_x, \tau'_{xy}, \tau'_{xz}$ .

Полагая, что уравнения движения в напряжениях могут быть пригодны для описания турбулентных течений, после введения в уравнения (1.24)–(1.26) осредненных параметров, получим уравнение движения жидкости при турбулентном режиме в проекции на координатную ось  $Ox$ :

$$\rho \frac{d\bar{u}_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{xz} - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_z), \quad (2.64)$$

где

$$\rho \bar{u}'_x \bar{u}'_x = \sigma'_x; \quad \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y = \tau'_{xy}; \quad \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_z = \tau'_{xz}. \quad (2.65)$$

Аналогичные уравнения можно записать для осей  $Oy$  и  $Oz$ . Уравнения (2.64) носят имя О. Рейнольдса.

Наличие в турбулентном потоке пульсаций скорости приводит к сглаживанию профиля скорости по его сечению. Исследования турбулентных течений показали наличие двух зон с различным характером изменения осредненной локальной скорости  $\bar{u}$ . У твердой поверхности происходит резкое изменение скорости в пристенном слое толщиной  $\delta$  (рис. 2.7, а), значительно меньшем по сравнению с поперечным размером канала. Считается, что в пределах этого слоя жидкость движется ламинарно.

В центре потока существует турбулентное ядро, в котором осредненная скорость  $\bar{u}$  изменяется слабо. Согласно этой так называемой двухслойной модели, описание профиля скорости по сечению потока требует соответственно двух уравнений. Для их вывода рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости у поверхности, ориентированной вдоль оси  $Ox$  (см. рис. 2.7, б).

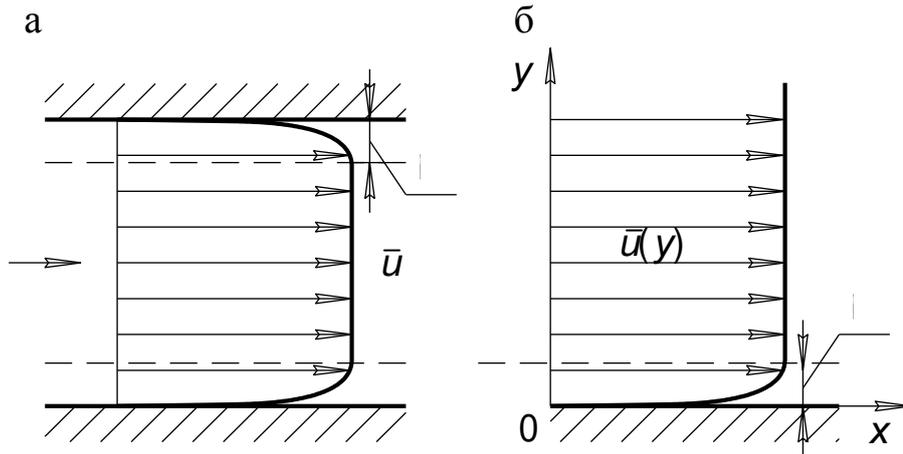


Рис. 2.7. Распределение скорости по сечению потока при турбулентном течении

Пренебрегая массовыми силами ( $F_x = 0$ ) и полагая движение равномерным, из уравнения (2.64) получим

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y \right) = 0. \quad (2.66)$$

В ламинарном пристенном слое толщиной  $\delta$  турбулентные напряжения  $\tau_t = \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y = 0$  и из уравнения (2.66) следует

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right) = 0.$$

После интегрирования этого выражения имеем  $\mu d\bar{u}_x / dy = c_1$ . Постоянную  $c_1$  находим из граничных условий: при  $y = 0$   $\bar{u}_x = 0$ , следовательно,  $c_1 = \tau_0$ . Таким образом, касательные напряжения в пределах пристенного ламинарного слоя изменяются по закону Ньютона (1.7)

С учетом  $c_1 = \tau_0$  после повторного интегрирования получим

$$\bar{u}_x = \frac{\tau_0 y}{\rho \nu}. \quad (2.67)$$

Величина

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* \quad (2.68)$$

называется динамической скоростью. На динамическую скорость следует обратить особое внимание, так как она в дальнейшем будет использована при решении многих задач по тепло- и массообмену в аппаратах различных конструкций при движении в них однофазных и многофазных сред.

Из уравнений (2.67) и (2.68) следует

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}. \quad (2.69)$$

Обозначим отношение  $\bar{u}_x / u_* = \varphi$  – безразмерная скорость, а отношение  $u_* y / \nu = \eta$  – безразмерная координата. В гидромеханике их называют универсальными координатами. Введя в уравнение (2.69)  $\varphi$  и  $\eta$ , получим

$$\varphi = \eta. \quad (2.70)$$

Уравнение (2.70) описывает профиль скорости в пристенном ламинарном слое.

Найдем распределение скоростей в турбулентном ядре потока, исходя из предположения, что на границе раздела ламинарного слоя и турбулентного ядра  $\tau_t = \tau_0 = c_1$ . Так как в турбулентном ядре молекулярный перенос импульса незначителен по сравнению с переносом импульса турбулентными пульсациями, то можно условно принять  $\mu = 0$  и из уравнения (2.66) следует

$$-\rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y = \tau_0 = \tau_t. \quad (2.71)$$

Согласно теории турбулентности Л. Прандтля [8, с. 165–185],

$$u'_x = k_1 l' \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad \text{и} \quad u'_y = k_2 l' \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (2.72)$$

Подставляя значения  $u'_x$  и  $u'_y$  в уравнение (2.71), получим

$$\tau_t = -\rho k_1 k_2 (l')^2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты пропорциональности;  $l = \sqrt{k_1 k_2 (l')^2}$  – длина перемешивания.

С учетом значения  $l$  предыдущее равенство примет вид

$$\tau_t = -\rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2. \quad (2.73)$$

Значение  $l^2 (d\bar{u}_x / dy) = \varepsilon$  принято называть коэффициентом турбулентного обмена, который является аналогом кинематического коэффициента вязкости. Различие между молекулярными и турбулентными значениями коэффициентов  $\nu$  и  $\varepsilon$  заключается в том, что первый является физической константой, не зависящей от гидродинамики, второй пределяется только гидродинамическими условиями. Подставив в уравнения (2.73) значения  $\varepsilon$ , получим

$$\tau_t = -\rho \varepsilon \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (2.74)$$

Согласно теории Прандтля, длина пути перемешивания прямо пропорциональна расстоянию от стенки, т. е.  $l = \chi y$ . После подстановки значения  $l$  в уравнение (2.73), с учётом равенств (2.68) и (2.74), запишем

$$u_* = \chi y \frac{d\bar{u}_x}{dy},$$

или в универсальных координатах

$$d\varphi = \frac{1}{\chi} \frac{d\eta}{\eta}.$$

После интегрирования получим

$$\varphi = C + \frac{1}{\chi} \ln \eta. \quad (2.75)$$

Экспериментально установлено, что  $C = 5,5$ ;  $\chi = 0,4$ . Решая совместно уравнения (2.50) и (2.75), с учетом значений  $C$  и  $\chi$ , найдем безразмерную толщину пристенного слоя  $\eta_\delta = 11,5$ .

Таким образом, окончательно запишем систему уравнений двухслойной модели Прандтля, описывающих профиль скорости по сечению турбулентного потока:

$$\begin{aligned} \varphi &= \eta \quad \text{при} \quad \eta \leq 11,5; \\ \varphi &= 5,5 + 2,5 \ln \eta \quad \text{при} \quad \eta > 11,5. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Согласно системе уравнений (2.76), безразмерная толщина ламинарного слоя может быть найдена из равенства

$$\eta_\delta = \frac{u_* \delta}{\nu} = 11,5. \quad (2.77)$$

Из уравнений (2.36), (2.44) и (2.68) можно получить

$$u_* = w \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (2.78)$$

Из уравнений (2.77) и (2.78) следует, что толщина гидродинамического ламинарного слоя для двухслойной модели

$$\delta = \frac{32,5d}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}. \quad (2.79)$$

В уравнении (2.66) выражение в скобках представляет собой полное касательное напряжение

$$\tau = \tau_0 + \tau_t.$$

Подставляя в это равенство значения  $\tau_0$  и  $\tau_t$  из уравнений (1.7) и (2.74), запишем

$$\tau = \rho(\nu + \varepsilon) \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (2.80)$$

После приведения уравнения (2.80) к безразмерному виду получим

$$1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \frac{d\varphi}{d\eta}. \quad (2.81)$$

Из уравнений (2.81) и (2.76) следует:

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = 0 \quad \text{при } \eta \leq 11,5, \quad (2.82)$$

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{2,5} - 1 \quad \text{при } \eta > 11,5.$$

Таким образом, отметим ещё раз, что, согласно двухслойной модели турбулентного потока, турбулентные пульсации в пристенном слое равны нулю. Эта модель пригодна только для решения задач, связанных с переносом количества движения. Решения различных задач, связанных с переносом количества движения, приводятся в курсах «Гидравлика» и «Процессы и аппараты». Попытки применить уравнения (2.82) для решения задач теплообмена и массообмена к успеху не привели и не могли привести. В последующих разделах разберёмся в причинах этих неудач.

## 2.6. Гидродинамика газожидкостных потоков

С движением двухфазных газожидкостных потоков приходится иметь дело в различных отраслях пищевой и микробиологической промышленности. Примерами тому могут быть: в пищевой промышленности – газирование диоксидом углерода различного рода безалкогольных и алкогольных напитков, производство мороженого; в микробиологической промышленности – аэрация культуральных жидкостей в процессе аэробного культивирования микроорганизмов.

Во всех приведённых примерах имеют место процессы переноса количества движения, теплоты и массы.

### 2.6.1. Основные понятия и определения гидродинамики многофазных потоков

**Приведенные скорости фаз** есть отношение их объемных расходов к площади сечения потока. Для двухфазных газожидкостных потоков запишем

$$w_{\Gamma} = \frac{Q_{\Gamma}}{S_a}; \quad w_{\text{ж}} = \frac{Q_{\text{ж}}}{S_a}, \quad (2.83)$$

где  $w_{\Gamma}$  и  $w_{\text{ж}}$  – приведенные скорости газа и жидкости;  $Q_{\Gamma}$  и  $Q_{\text{ж}}$  – объёмные расходы газа и жидкости, соответственно;  $w_{\text{см}} = w_{\Gamma} + w_{\text{ж}}$  – приведенная скорость смеси.

**Истинные скорости фаз** есть отношение объемного расхода данной фазы к площади сечения, занятой ею, т. е.

$$w_{\Gamma.и} = \frac{Q_{\Gamma}}{S_{\Gamma}}; \quad w_{\text{ж.и}} = \frac{Q_{\text{ж}}}{S_{\text{ж}}}, \quad (2.84)$$

где  $w_{\Gamma.и}$  и  $w_{\text{ж.и}}$  – истинные скорости газа и жидкости;  $S_{\Gamma}$  и  $S_{\text{ж}}$  – площади поперечного сечения аппарата, занятые газовой и жидкой фазами.

**Истинные объемные доли фаз.** Истинной объемной долей фазы называется отношение площади сечения, занятой данной фазой, к площади сечения аппарата. Доли газа (газосодержание), жидкости и клеток, соответственно, будут равны:

$$\varphi_{\Gamma} = \frac{S_{\Gamma}}{S}; \quad \varphi_{\text{ж}} = \frac{S_{\text{ж}}}{S}; \quad \varphi_{\text{к}} = \frac{S_{\text{к}}}{S}, \quad (2.85)$$

где  $\varphi_{\Gamma}$ ,  $\varphi_{\text{ж}}$ ,  $\varphi_{\text{к}}$  – объёмные доли газа, жидкости и клеток в среде;  $S_{\text{к}}$  – площадь поперечного сечения аппарата, занятого клетками.

Так как  $S_{\Gamma} + S_{\text{ж}} = S$ , то из уравнения (2.85) для двухфазной модели среды получим  $\varphi_{\Gamma} + \varphi_{\text{ж}} = 1$ , для трёхфазной модели –  $\varphi_{\Gamma} + \varphi_{\text{ж}} + \varphi_{\text{к}} = 1$ .

Из равенств (2.84) и (2.85) для двухфазной модели следует:

$$w_{г.и} = \frac{w_{г}}{\varphi_{г}}; \quad w_{ж.и} = \frac{w_{ж}}{\varphi_{ж}} = \frac{w_{ж}}{1 - \varphi_{г}}. \quad (2.86)$$

В дальнейшем при использовании параметра  $\varphi_{г}$  для простоты изложения будем оперировать только понятием «газосодержание».

Истинное объемное газосодержание является основным гидродинамическим параметром газожидкостных потоков, так как оно определяет истинные скорости фаз.

В общем случае истинные скорости фаз не равны, т. е. фазы движутся относительно друг друга с некоторой относительной скоростью  $w_0 = w_{г.и} - w_{ж.и}$  и для двухфазной модели

$$w_0 = \frac{w_{г}}{\varphi_{г}} - \frac{w_{ж}}{1 - \varphi_{г}}. \quad (2.87)$$

Значения  $\varphi_{г}$  и  $w_0$  зависят от конструктивных особенностей аппарата, расположения его в пространстве (горизонтальное или вертикальное) и направления движения. При восходящем течении смеси газ будет опережать жидкую фазу, так как подъемная сила, действующая на пузыри и обусловленная разностью  $\rho_{ж} - \rho_{г}$ , будет совпадать с направлением движения газожидкостного потока. При нисходящем движении подъемная сила направлена в сторону, обратную движению потока. В силу этих причин истинное газосодержание в нисходящем потоке больше, чем в восходящем, что соответствующим образом сказывается на величине  $w_0$ . В барботажных аппаратах  $w_{ж} = 0$  и относительная скорость газа равна истинной.

Величина, называемая объемным расходным газосодержанием, есть отношение

$$\beta_0 = \frac{Q_{г}}{Q_{г} + Q_{ж}} = \frac{w_{г}}{w_{см}}. \quad (2.88)$$

В случае, если  $w_0 = 0$ , имеет место  $\varphi_{г} = \beta_0$ . В барботажных культиваторах, где  $Q_{ж} = 0$ ,  $\beta_0 = 1$ . Расходное газосодержание значительно реже используется в качестве характеристики газожидкостных

потоков, чем истинное газосодержание. Иногда истинное объёмное газосодержание выражают через объёмное в виде зависимости [5]

$$\varphi_{\Gamma} = k\beta_0,$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности меньше единицы.

**Плотность газожидкостной смеси** определяют по правилу аддитивности [8]:

$$\rho_{\Gamma\text{ж}} = \varphi_{\Gamma}\rho_{\Gamma} + (1 - \varphi_{\Gamma})\rho_{\text{ж}}. \quad (2.89)$$

**Плотность трёхфазной смеси**

$$\rho_{\text{см}} = \varphi_{\Gamma}\rho_{\Gamma} + \varphi_{\text{ж}}\rho_{\text{ж}} + \varphi_{\text{к}}\rho_{\text{к}}. \quad (2.90)$$

### 2.6.2. Поверхность контакта фаз

Поверхность контакта фаз (ПКФ) есть сумма площадей поверхностей элементов дисперсной фазы, находящихся в контакте со сплошной фазой, т. е.  $F = fn$ , где  $f$  – поверхность элемента дисперсной фазы,  $n$  – количество элементов в смеси. В расчетные зависимости чаще вводят не значение  $F$ , а величину удельной поверхности контакта фаз (УПКФ)  $a = F/V$ , где  $V$  – объем газожидкостной смеси.

Величину УПКФ можно определить, исходя из следующих соображений. Будем считать, что в газожидкостной смеси объемом  $V$  находятся элементы дисперсной фазы сферической формы диаметром  $d_{\text{д}}$ . Согласно определению,

$$a = \frac{fn}{V} = \frac{\pi d_{\text{д}}^2 n}{V}, \text{ но } V = \frac{V_0 n}{\varphi_{\text{д}}} = \frac{\pi d_{\text{д}}^3 n}{6\varphi_{\text{д}}},$$

где  $V_0$  – объем элемента дисперсной фазы.

Из полученных равенств следует

$$a = \frac{6\varphi_{\text{д}}}{d_{\text{д}}}. \quad (2.91)$$

Для систем газ–жидкость и жидкость–твёрдое (например, жидкость–клетка) уравнение (2.91) выразится двумя равенствами

$$a_{\text{ГЖ}} = \frac{6\varphi_{\text{Г}}}{d_{\text{П}}}; \quad (2.92)$$

$$a_{\text{КЛ}} = \frac{6\varphi_{\text{К}}}{d_{\text{К}}}, \quad (2.93)$$

где  $d_{\text{П}}$  – средний диаметр пузырей;  $d_{\text{К}}$  – диаметр клетки.

Таким образом, снижение диаметра пузырей приводит, при  $\varphi_{\text{Г}} = \text{const}$ , к увеличению поверхности контакта фаз. О размерах пузырей (капель) будет сказано в следующих разделах. Здесь лишь отметим, что значение  $d_{\text{П}}$  определяется гидродинамическими характеристиками потока и физическими свойствами фаз.

Уравнение (2.92) требуется при расчётах аппаратов, предназначенных для проведения процессов тепло- и массообмена между фазами (абсорбция и десорбция газов, испарение жидкости с поверхности капель и т.п.); уравнение (2.93) – тепло- и массообмена в двухфазных средах жидкость–твёрдое (например, культуральная среда–клетка).

### 2.6.3. Режимы и структуры течения и газосодержание газожидкостных потоков

При изучении гидродинамики газожидкостных потоков в понятие «режим движения» вкладывается иной смысл по сравнению с тем, что имеют в виду при изучении движения однофазных сред. Режимы движения газожидкостных потоков отражают их структуру, которая зависит от распределения дисперсной фазы в объёме газожидкостной смеси. В дальнейшем выражение «режим движения» будет употребляться в классическом понимании этого выражения. При рассмотрении распределения дисперсной фазы в сплошной, будем пользоваться выражением «структура газожидкостной смеси».

Оценка режимов движения с позиций соотношения сил инерции и сил трения, т. е. по величине критерия Рейнольдса, в двухфазных потоках в большинстве случаев вряд ли целесообразна. Безу-

ловно, эти силы действуют и в газожидкостных потоках и проявляются как в каждой из фаз, так и при их взаимодействии. Однако попытку оценить режимы течения по критерию Рейнольдса смеси

$$Re_{см} = \frac{w_{см} \rho_{см} d}{\mu_{см}},$$

рассчитанному по параметрам смеси, нельзя считать удачной. Во-первых, потому, что не имеет физического смысла понятие вязкости смеси, определяемой по методу аддитивности; во-вторых, даже если значение критерия  $Re_{см}$  и соответствует ламинарному режиму, движение газожидкостной смеси будет иметь ярко выраженный турбулентный характер из-за наличия относительного движения фаз.

Движение многофазной среды можно рассматривать в качестве квазиоднородной в случаях отсутствия, во-первых, относительного движения фаз и, во-вторых, взаимодействия между элементами дисперсной фазы. Такое возможно при условии, если силы вязкости сплошной среды во много раз превосходят силы инерции, вызванные движением дисперсной фазы. В качестве примеров можно привести смеси растворов или расплавов полимеров с парами растворителей, вспенивателей или газов [7].

Второе исключение относится к течению газожидкостных смесей в капиллярных каналах, в которых наблюдается либо снарядная, либо плёночная (кольцевая) структура потока. В таких каналах, из-за малого размера их поперечного сечения, движение каждой из фаз носит чётко выраженный ламинарный характер.

Поскольку в рассматриваемых нами производствах указанные исключительные случаи течения газожидкостных потоков не встречаются, в дальнейшем будем считать течения газожидкостных смесей турбулентными.

Структура газожидкостных потоков зависит: от соотношения расходов фаз; от формы поперечного сечения и боковой поверхности каналов и их расположения в пространстве; от направления движения смеси (в вертикальных каналах). При одинаковых расходах фаз структура потока в вертикальных каналах может быть совершенно непохожа на структуру в горизонтальном канале, поэтому остановимся на каждом из них отдельно.

До сих пор нет единой классификации структуры газожидкостных смесей. Однако некоторые структуры отмечаются большинством исследователей (рис. 2.8).

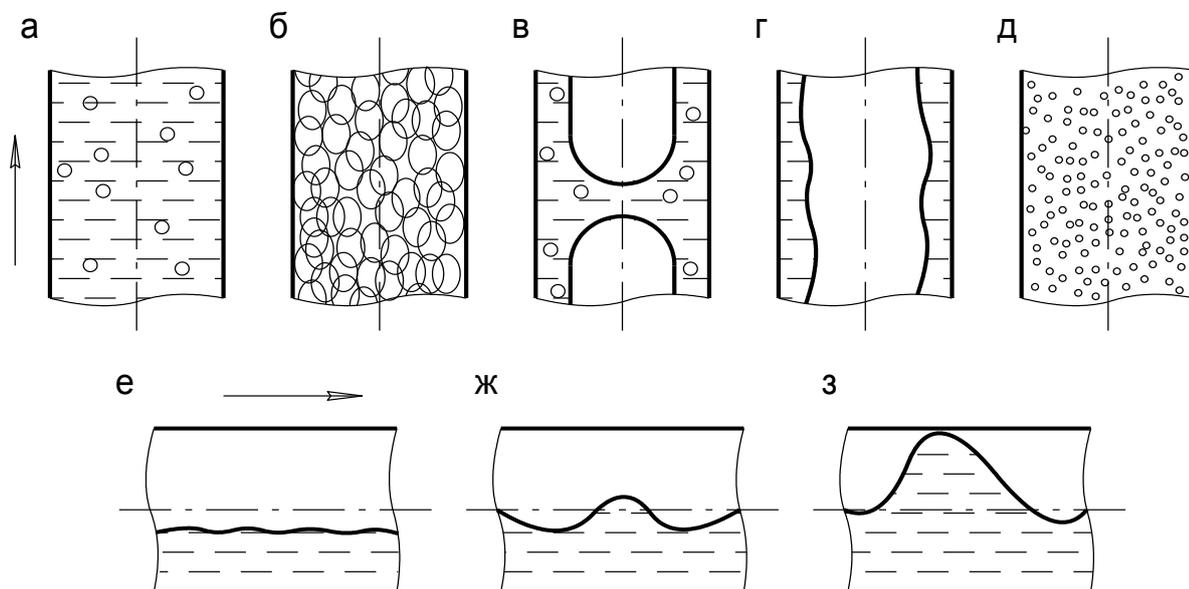


Рис. 2.8. Структуры газожидкостных потоков:  
а–д – в вертикальных каналах; е–з – в горизонтальных каналах

1. *Пузырьковая структура* (см. рис. 2.8, а) характеризуется равномерным распределением отдельных пузырей по объему жидкости, которые непосредственно не взаимодействуют между собой. Такая структура существует при сравнительно малых расходах газа, т. е. при малых значениях отношения  $Q_{\text{г}} / Q_{\text{ж}}$ , и может иметь место как в вертикальных, так и в горизонтальных трубах. Однако в последних пузырьки распределены неравномерно по сечению канала и скапливаются в верхней его части, что может привести к расслоению потока.

2. *Барботажная (пенная) структура* (см. рис. 2.8, б) наступает при более высоких расходах газа. Пузыри вступают в непосредственный контакт. Происходит их слияние, дробление, перемешивание, поверхность контакта фаз постоянно обновляется.

3. *Снарядная (пробковая) структура* (см. рис. 2.8, в) наступает при сравнительно умеренном газосодержании и низких скоростях потока. Происходит объединение отдельных мелких пузырей в боль-

шие, которые занимают все сечение трубы и имеют вид «снарядов». Между ними имеются прослойки жидкости с мелкими пузырями. Размеры «снарядов» и прослоек между ними зависят от соотношения расходов газа и жидкости. С увеличением  $Q_{\text{г}} / Q_{\text{ж}}$  длина снарядов увеличивается, толщина прослоек уменьшается. При достаточно больших значениях  $Q_{\text{г}} / Q_{\text{ж}}$  они исчезают вовсе, происходит переход к кольцевому режиму.

4. *Плёночная (кольцевая) структура* (см. рис. 2.8, г) названа так потому, что основная часть жидкой фазы движется вдоль поверхности в виде плёнки, имеющей вид кольца. В центре потока перемещается газовая фаза, в которой в виде мелких капель может быть распределена часть жидкой фазы. Этот режим может иметь место в конденсаторах, в трубах выпарных аппаратов.

5. *Эмульсионная (капельная) структура* (см. рис. 2.8, д). Образование этого режима во многом зависит от начальных условий возникновения двухфазного потока. Она может быть образована методом распыла жидкости в газовый поток (например, в системах кондиционирования воздуха, камерах сушильных установок).

При движении газожидкостных потоков в горизонтальных трубах структуры протоков несколько отличаются от структур в вертикальных трубах. Как правило, пузырьковую и пенную структуры объединяют в одну, а к оставшимся четырем добавляют еще три: расслоенную, волновую и толчкообразную (см. рис. 2.8, е, ж, з). Более подробно с этими проблемами можно ознакомиться в работах [5, 9].

Движение газожидкостных смесей в каналах с иной формой поперечного сечения имеет свои особенности, несколько отличные от особенностей их движения в трубах. Эти вопросы интересны потому, что в пищевой и микробиологической промышленности широко используются пластинчатые теплообменные аппараты, в которых может иметь место течение газожидкостных смесей. Учитывая указанные обстоятельства, рассмотрим структуры потоков в каналах пластинчатых аппаратов несколько подробнее.

Данных по исследованию структур газожидкостных потоков в плоских и гофрированных каналах значительно меньше, чем в трубах. В этой связи можно порекомендовать обратиться к работе [9]. Согласно указанной работе, в плоских и гофрированных каналах наблюдаются те же структуры, что и в трубах. Однако имеются

и некоторые отличия, связанные с условиями стеснённости в щелевых каналах.

Несмотря на достаточно большое количество работ, посвященных гидродинамике газожидкостных потоков, установлению границ между структурами уделяется сравнительно мало внимания. В литературе описываются различные методы определения границ между режимами течения по графикам, номограммам и формулам. Большой частью они представляют собой зависимости между безразмерными параметрами, характерными для гидродинамики двухфазных потоков, и сложны при использовании. Познакомиться с ними можно в работах [5, 9, 10]. В качестве примера можно указать работу [10], в которой авторы для приближенного определения границ режимов при нисходящем течении водовоздушных смесей в вертикальных трубах приводят диаграмму в виде зависимости  $w_{ж} = f(w_{г})$ . Авторы выделили в нисходящих потоках четыре структуры течения: пузырьковый, снарядный, переходный и пленочный (стержневой).

Такой же методикой пользуются авторы работ при определении границ структуры газожидкостных смесей в плоских и гофрированных каналах [9]. Если сравнивать между собой структуры газожидкостных потоков в трубах и плоских каналах, то можно обнаружить между ними большое сходство. Переходы от одной структуры к другой происходят примерно при одинаковых значениях приведённых скоростей жидкости и газа. Правда, внешний вид потоков может несколько различаться. Так, при снарядной структуре в плоском канале большие пузыри сплюснуты, назвать их снарядами можно с большой натяжкой.

В плоских и гофрированных каналах пленочная структура имеет место в центральной их части, по краям наблюдается пузырьковая или пенная (прил. 1–4). И в тех, и в других каналах не рекомендуется снижать приведённую скорость жидкости ниже 0,4 м/с, так как осуществляется переход к плёночному режиму, вследствие чего в аппаратах возникают сильные пульсации. Как в трубах, так и в щелевых каналах при нисходящем течении пузырьки газа распределены по сечению потока более равномерно, чем в восходящем.

В гофрированных каналах границы переходов от одной структуры к другой менее ярко выражены, чем в трубах и плоских каналах. Вызвано это взаимодействием потока с гофрами и постоянным дроб-

лением крупных пузырей на мелкие. В гофрированных каналах чётко просматривается только пузырьковая структура, границы между другими структурами сильно размыты (см. [9] и прил. 1–4).

#### 2.6.4. Газосодержание газожидкостных потоков

Газосодержание слабо зависит от режимов движения, структуры потока и состояния поверхности канала. В частности, уравнения для расчета газосодержания в трубах с круглым поперечным сечением охватывают диапазон изменения структуры от пузырькового до пленочного включительно и режимов – от ламинарного до турбулентного. Однако оно может существенно отличаться в каналах с разной формой поперечного сечения при одинаковых расходах жидкости и газа [5, 9, 10].

В значительно большей степени на величину газосодержания и на распределение газовой фазы по сечению потока влияет направление движения газожидкостного потока. В качестве примера на рис. 2.9 показано распределение газосодержания по сечению трубы при восходящем и нисходящем течении.

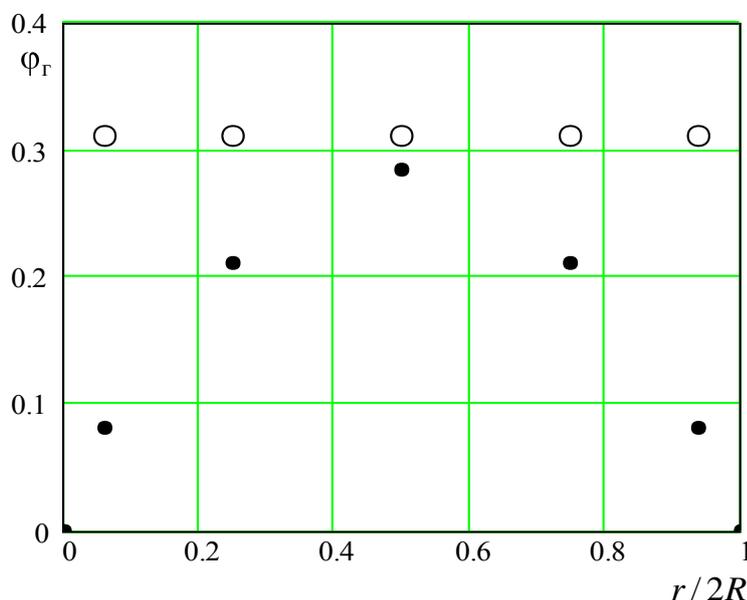


Рис. 2.9. Изменение газосодержания по сечению трубы в системе вода–воздух:

○ – нисходящее; • – восходящее течение;  
 $w_G = 0,146$  м/с;  $w_{ж} = 0,323$  м/с

Из рис. 2.9 видно, что при нисходящем течении газосодержание постоянно по сечению, при восходящем оно изменяется от минимального значения у стенки до максимального в центре трубы. Причём в нисходящем потоке среднее газосодержание значительно выше, чем в восходящем.

Изменение структуры потока и газосодержания может существенным образом сказаться на величине поверхности контакта фаз. В аппаратах, предназначенных для проведения тепло- и массообменных процессов между газом и жидкостью, знание границ перехода от одного режима к другому имеет не только чисто академический интерес, но и практический. Например, при переходе от пузырькового режима к плёночному величина ПКФ может упасть в несколько раз, что должно сказаться отрицательно на интенсивности процесса культивирования микроорганизмов в целом.

**Барботажные аппараты.** Для расчета газосодержания в барботажных аппаратах колонного типа, наиболее распространенных в микробиологической промышленности, можно рекомендовать уравнение В.В. Консетева [7, с. 189–195], полученное аналитически и наиболее полно учитывающее влияние на величину  $\varphi_{\Gamma}$  физических свойств жидкости и газа и размеров аппарата.

При диаметре аппарата  $d_a > 0,16$  м

$$\frac{\varphi_{\Gamma}}{1 - \varphi_{\Gamma}} = 0,54 \left( \frac{w_{\Gamma} (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Gamma})^{0,25}}{(g\sigma)^{0,25}} \right)^{0,68} \left( \frac{\rho_{\Gamma}}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{0,11} \left( \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Gamma}} \right) \left( \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{ж}}} \right)^{0,083}, \quad (2.94)$$

где  $\mu_{\text{в}}$  – вязкость воды.

При  $d_a < 0,16$  м

$$\frac{\varphi_{\Gamma}}{1 - \varphi_{\Gamma}} = 0,54 \left( \frac{w_{\Gamma} (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Gamma})^{0,25}}{(g\sigma)^{0,25}} \right)^{0,68} \left( \frac{0,16}{d_a} \right)^{0,33} \left( \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Gamma}} \right) \left( \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{ж}}} \right)^{0,083}. \quad (2.95)$$

Для вычисления истинного объемного газосодержания в трубах, например при газировании напитков диоксидом углерода, при восходящих потоках можно рекомендовать уравнение [10, с. 92]

$$\varphi_{ГВ} = 0,26 \beta_0 \left( \frac{\rho_{ж} - \rho_{Г}}{\rho_{Г}} \right)^{0,125}; \quad (2.96)$$

при нисходящих течениях [10, с. 117]

$$\varphi_{ГН} = 2 \beta_0 - \varphi_{ГВ}. \quad (2.97)$$

**Щелевые каналы.** В щелевых каналах газосодержание несколько выше, чем в трубах. Объяснить это можно тем, что в узких каналах сказываются пристеночные эффекты, тормозящие движение газа относительно жидкости, что приводит к его задержке и, как следствие, увеличению газосодержания [9, с. 83–84].

В каналах с плоской поверхностью при восходящем течении и пузырьковой структуре ( $w_{Г} < 0,1$  м/с)

$$\varphi_{Г} = \frac{w_{Г}}{0,96w_{см} + 0,25}. \quad (2.98)$$

В остальных случаях

$$\varphi_{Г} = \frac{w_{Г}}{1,45w_{см} + 0,25}.$$

В нисходящих потоках для всех структур и  $w_{Г} \geq 0,5$  м/с

$$\varphi_{Г} = \frac{w_{Г}}{1,3w_{см} - 0,5}.$$

Газосодержание в гофрированных каналах вычисляют по эмпирическим формулам, полученным на основе опытных данных по измерению газосодержания методом отсечек.

В восходящих течениях смесей при любых режимах

$$\varphi_{Г} = \frac{w_{Г}}{1,1(w_{Г} + w_{ж})}. \quad (2.99)$$

В нисходящих потоках

$$\varphi_{\Gamma} = \frac{w_{\Gamma}}{1,1(w_{\Gamma} + w_{\text{ж}}) - 0,1}. \quad (2.99a)$$

В процессах, протекающих при аэробном культивировании микроорганизмов, газосодержание является важным гидродинамическим параметром, но не единственным. Не менее важными являются параметр межфазной турбулентности и размеры пузырей. Под размером будем понимать некий усреднённый диаметр сферического пузыря.

Знание диаметра пузыря необходимо при расчете УПКФ по уравнению (2.92). Кроме того, диаметр пузырей входит в качестве определяющего размера в критериальные уравнения для определения коэффициентов массообмена в жидкой и газовой фазах. Задача по их определению решается, как правило, эмпирически, а вид формул зависит от конструкции аппарата, методов диспергирования газов, физических свойств фаз и т. п. Недостаток таких решений в том, что они пригодны только для конкретного аппарата и для конкретных условий его работы. Более перспективными являются полуэмпирические методы, основанные на решении дифференциальных уравнений гидромеханики. В этом случае экспериментальному определению подлежат лишь коэффициенты пропорциональности, являющиеся результатом определенных допущений, сделанных при выборе граничных условий.

Однако аналитические решения по определению  $d_{\text{п}}$  в литературе встречаются крайне редко. Они должны опираться, прежде всего, на ясно разработанную физическую модель взаимодействия поверхности раздела фаз с турбулентной средой. Представить подобную модель довольно трудно из-за сложных гидродинамических процессов, протекающих в газожидкостных средах. Такая попытка была сделана в работах С.А. Анисимова, В.П. Меткина и В.Б. Тишина [9, с. 92–105].

Решения В.П. Меткина основаны на общих положениях теории турбулентности и установлении связи между удельными энергетическими затратами и размерами пузырей. Причём физическую модель, поясняющую механизм дробления пузырей, автор не предлагает.

Другие два автора также используют основные положения теории турбулентности, но решение их основано на дифференциальном уравнении колебания поверхности пузыря под действием турбулентных пульсаций жидкости и является более строгим. Поэтому его и рассмотрим.

### 2.6.5. Определение параметра межфазной турбулентности

Рассмотрим поток газожидкостной смеси при пузырьковом режиме течения. Допустим, что объём жидкости  $\Delta V$  массой  $\Delta m$  движется в турбулентной среде с пульсационной скоростью  $u'$ , ударяется в поверхность пузыря и деформирует ее до тех пор, пока кинетическая энергия жидкости станет равной нулю, а потенциальная – максимальной. В этом положении участок деформируемой части ПКФ будет иметь размеры  $r = R$  (рис. 2.10).

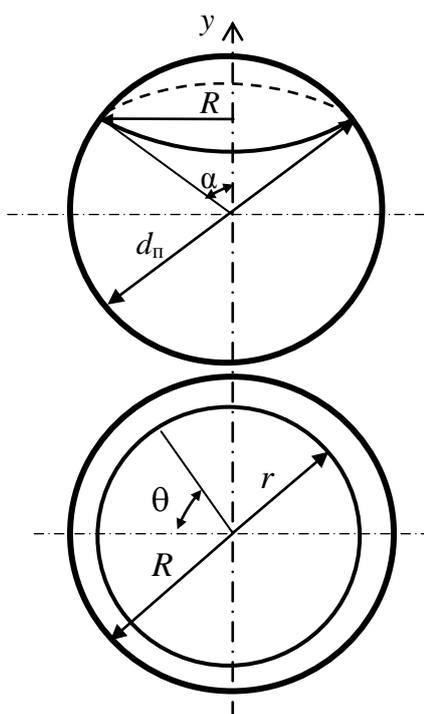


Рис. 2.10. Скорость пульсаций поверхностей пузыря

Далее под действием сил поверхностного натяжения поверхность пузыря стремится принять прежнюю форму. Однако сила инерции жидкости вновь приводит ПКФ в движение, и процесс по-

вторяется. Возникшие колебания поверхности будут затухать под действием вязких сил. Можно предположить, что дробление пузыря произойдет в момент достижения амплитуды колебаний некой максимальной величины. Таким образом, задачу можно свести к решению дифференциального уравнения колебаний круглой мембраны в вязкой среде [11]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) - 2\delta \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Полагая колебания части поверхности пузыря, ограниченной радиусом  $R$ , осесимметричными относительно координаты  $y$  (угол  $\theta = \text{const}$  и  $\partial^2 y / \partial \theta^2 = 0$ ), представим предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) - 2\delta \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (2.100)$$

Уравнение (2.100) устанавливает связь между силами, действующими на пузырь, отнесенными к единице массы жидкости. Применительно к конкретно решаемой задаче слагаемое в левой части характеризует силы инерции, возникающие в результате изменения направления вектора скорости, связанного с колебанием поверхности пузыря. В правой части равенства слагаемое в скобках определяется упругими свойствами поверхности раздела фаз и характеризует силы поверхностного натяжения, а слагаемое с отрицательным знаком – силу вязкого трения.

Задаваясь граничными и начальными условиями

$$y_{R=r} = 0, \quad y_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t_{t=0}} = u',$$

из уравнения (2.100) получим

$$y(r, t) = e^{-\delta t} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) I_0(\lambda_k r). \quad (2.101)$$

Численные значения  $a_k$  и  $b_k$  найдем согласно начальным условиям. При колебании неподвижными (узловыми) являются точки, лежащие на окружности  $r = R$ . При  $k = 1$  из уравнения (2.101) следует

$$y(r, t) = \frac{1,6u'}{q_1} e^{-\delta t} \sin q_1 t \left( I_0 \frac{2,4r}{R} \right). \quad (2.102)$$

Уравнение (2.102) дает нам значение амплитуды колебания (пульсаций) точек, лежащих на поверхности пузыря, ограниченной радиусом  $R$ :

$$u' = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1,6u'}{q_1} e^{-\delta t} (q_1 \cos q_1 t - \delta \sin q_1 t) \left( I_0 \frac{2,4r}{R} \right). \quad (2.103)$$

Из уравнений (2.102) и (2.103) можно получить безразмерное значение амплитуды в виде зависимости

$$f = \frac{2,56(u')^2}{q_1^2 v_{ж}} e^{-2\delta t} \sin q_1 t (q_1 \cos q_1 t - \delta \sin q_1 t) I_0^2 \left( \frac{2,4r}{R} \right). \quad (2.104)$$

После преобразования уравнения (2.104) запишем

$$f = \frac{2,56(u')^2}{q_1^2 v_{ж}} e^{-2\delta t} (q_1 \sin 2q_1 t + \delta \cos 2q_1 t - \delta) I_0^2 \left( \frac{2,4r}{R} \right). \quad (2.105)$$

Величина  $f$  есть параметр межфазной турбулентности, и уравнения (2.104) и (2.105) определяют закон его изменения во времени.

При изучении процессов массопереноса, как правило, определяют средние значения диаметров пузырей и коэффициентов массообмена, поэтому необходимо найти среднее значение параметра межфазной турбулентности  $\bar{f}$ . Определим его как среднее интегральное значение функции  $f = f(r, t)$  в пределах изменения от  $t = 0$  до  $t = t_T$  и от  $r = 0$  до  $r = R$ . Величина  $t_T$  характеризует время, которое проходит между двумя воздействиями на ПКФ турбулентных пульсаций (или время пребывания вихря у ПКФ), и может быть найдена как

$$t_T = \frac{2\pi}{\omega_T}, \quad (2.106)$$

где  $\omega_T$  – характерная частота пульсаций в потоке сплошной среды,

$$\omega_T = \frac{2\pi u'}{l_t}. \quad (2.107)$$

Из уравнений (2.106) и (2.107) следует

$$t_T = \frac{l_t}{u'}. \quad (2.108)$$

Число колебаний ПКФ за время  $t_T$  определяется по формуле

$$n_n = \frac{I_t q_1}{\pi u'}. \quad (2.109)$$

Таким образом, выражение для среднего значения параметра межфазной турбулентности можно представить в следующем виде:

$$\bar{f} = \frac{u'}{RI_t} \int_0^{RI_t} \int_0^{u'} f(r, t) dr dt. \quad (2.110)$$

Учитывая, что функция  $f = f(r, t)$  меняет знак при

$$t = \frac{K\pi}{q_1}, \quad (2.111)$$

или

$$t = \frac{1}{q_1} \left( \arccos \frac{\delta}{\sqrt{q_1^2 + \delta^2}} + K\pi \right), \quad (2.112)$$

при  $K = 1, 2, 3, \dots$ , после подстановки (2.105) в (2.110) с учётом (2.111) и (2.112), получим

$$\bar{f} = \frac{1,28u'^3}{q_1 v_{ж} R I_t} \left( \int_0^{z_1} \varphi(t) dt + \int_{z_1}^{\pi/q_1} \varphi(t) dt + \int_{\pi/q_1}^{z_2} \varphi(t) dt + \int_{z_2}^{2\pi/q_1} \varphi(t) dt + P \right) \times \\ \times \int_0^R I_0^2 \left( \frac{2,4r}{R} \right) dr, \quad (2.113)$$

где

$$z_1 = \frac{1}{q_1} \arccos \frac{\delta}{\sqrt{q_1^2 + \delta^2}}; \quad z_2 = \frac{1}{q_1} \left( \arccos \frac{\delta}{\sqrt{q_1^2 + \delta^2}} + \pi \right).$$

В уравнении (2.113)

$$\varphi(t) = e^{-2\delta t} (q_1 \sin 2q_1 t + \delta \cos 2q_1 t - \delta); \quad (2.114)$$

$$P = \int_{n\pi/q_1}^{I_t/u'} \varphi(t) dt, \quad (2.115)$$

где  $n$  – целое число,  $n \approx n_n$ .

Отметим, что величина  $P > 0$ , если  $\frac{I_t}{u'} > \frac{n\pi}{q_1}$ ; величина  $P < 0$

при  $\frac{I_t}{u'} < \frac{n\pi}{q_1}$  и  $P = 0$ , когда  $\frac{I_t}{u'} = \frac{n\pi}{q_1}$ .

В последнем случае  $n = n_n$  и

$$\bar{f} = \int_0^R \int_0^{n\pi/q_1} f(r, t) dt dr. \quad (2.116)$$

Для вычисления интеграла функции Бесселя воспользуемся формулами Ньютона–Котеса. В результате получим

$$\int_0^R I_0^2 \left( \frac{2,4r}{R} \right) dr = 0,474R. \quad (2.117)$$

Проинтегрировав (2.116) с учетом (2.114), (2.115), (2.117), находим

$$\bar{f} = \frac{0,303u'^3}{q_1^2 v_{ж} l_t} \left[ 4 \left( 1 - \frac{\delta^2}{q_1^2 + \delta^2} \right) e^{-\frac{2\delta}{q_1} \arccos \frac{\delta}{\sqrt{q_1^2 + \delta^2}}} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + e^{-\frac{2\delta\pi}{q_1}} + e^{-\frac{4\delta\pi}{q_1}} + \dots + e^{-\frac{2\delta\pi(n-1)}{q_1}} \right) + P \right]. \quad (2.118)$$

Сумма экспонентных функций в круглых скобках выражения (2.118) есть сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем, поэтому запишем

$$\left( 1 + e^{-\frac{2\delta\pi}{q_1}} + e^{-\frac{4\delta\pi}{q_1}} + \dots + e^{-\frac{2\delta\pi(n-1)}{q_1}} \right) = \frac{e^{-\frac{2\delta\pi n}{q_1}} - 1}{e^{-\frac{2\delta\pi}{q_1}} - 1}. \quad (2.119)$$

Кроме того, отметим, поскольку по физическому смыслу  $\frac{I_t}{u'} \gg \frac{n\pi}{q_1}$ , т. е.  $n \gg 1$ , а колебания затухающие, величиной  $P$  можно пренебречь, приняв одновременно  $n = n_n$ . В результате из уравнений (2.118) и (2.119) получим

$$\bar{f} = \frac{1,21u'^3}{q_1^2 v_{ж} l_t} \left( 1 - \frac{\delta^2}{q_1^2 + \delta^2} \right) \exp \left( -\frac{2\delta}{q_1} \arccos \frac{\delta}{\sqrt{q_1^2 + \delta^2}} \right) \times \\ \times \frac{\exp \left( -\frac{2\delta l_t}{u'} \right) - 1}{\exp \left( -\frac{2\delta\pi}{q_1} \right) - 1}, \quad (2.120)$$

где  $q_1$  – частота собственных колебаний ПКФ.

Вывод уравнения (2.120) приведён в сокращённом виде. Желая получить более подробную информацию о решении поставленной задачи могут обратиться к работе [9].

Частота собственных колебаний ПКФ

$$q_1 = \left( \left( \frac{2,4A}{R} \right)^2 - \delta^2 \right)^{0,5}. \quad (2.121)$$

Скорость распространения волн по поверхности пузыря  $A$  определяется ее упругими свойствами, зависящими от поверхностного натяжения и плотности жидкости. Тогда из условий размерности следует записать

$$A = \left( \frac{c\sigma}{R\rho_{\text{ж}}} \right)^{0,5}, \quad (2.122)$$

где  $c$  – коэффициент пропорциональности.

Согласно рис. 2.10,  $R = \sin \alpha \frac{d_{\text{п}}}{2}$ . Подставив значение  $R$  в равенство (2.121), запишем

$$A = \left( \frac{2\sigma}{c_1 d_{\text{п}} \rho_{\text{ж}}} \right)^{0,5}, \quad (2.123)$$

где  $c_1 = \sin \alpha / c$  – коэффициент, определяемый экспериментально.

Строго говоря, эта величина переменная, так как угол  $\gamma$  зависит от силы воздействия турбулентных пульсаций на поверхность пузыря, поэтому при решении каждой конкретной задачи должен быть определен отдельно.

Согласно работам [12, 13], пульсационную скорость можно выразить в виде зависимости

$$u' = \left( \frac{EL_t}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{1/3}, \quad (2.124)$$

где  $L_t$  (в дисперсных системах) является размерным значением масштаба турбулентности.

В вопросе о выборе масштаба турбулентности единого мнения нет. Нами при решении данной задачи, для расчёта масштаба турбулентности, принято уравнение, представленное в работе [9] (там же дана ссылка на первоисточник), так как оно в конечном итоге обеспечило наилучшую сходимость с опытными данными:

$$L_t = \frac{d_{\Pi}(1 - \varphi_{\Gamma})}{6\varphi_{\Gamma}}. \quad (2.125)$$

Подставляя уравнение (2.125) в (2.124), получим зависимость для определения пульсационной скорости:

$$u' = \left( \frac{Ed_{\Pi}(1 - \varphi_{\Gamma})}{6\varphi_{\Gamma}\rho_{\text{ж}}} \right)^{1,3}. \quad (2.126)$$

Силу сопротивления среды колебанию ПКФ и частоту  $\delta$  определим по данным работы [13]:

$$F_{\text{тр}} \sim \mu_{\text{ж}} \frac{u'}{d} ds = \frac{\mu_{\text{ж}}}{d} \frac{dy}{dt} ds. \quad (2.127)$$

В уравнении (2.100) слагаемое, характеризующее силу сопротивления, представим в виде пропорциональности

$$2\delta \frac{\partial y}{\partial t} \sim \frac{F_{\text{тр}}}{R\rho_{\text{ж}} ds}. \quad (2.128)$$

В таком случае из (2.127) и (2.128) следует

$$\delta = c_2 \frac{v_{\text{ж}}}{2Rd}, \quad (2.129)$$

где  $c_2$  – коэффициент пропорциональности.

Подставив уравнения (2.121)–(2.129) в равенство (2.120) и пренебрегая для маловязких жидкостей влиянием сил трения, получим выражение для определения осреднённой величины межфазной турбулентности в виде зависимости

$$\bar{f} = \frac{0,054c_1^{3/2} E^{2/3} d_{\text{п}}^{13/6}}{\pi \rho_{\text{ж}}^{1/6} \sigma^{1/2} v_{\text{ж}}} \left( \frac{1 - \varphi_{\Gamma}}{\varphi_{\Gamma}} \right)^{2/3}. \quad (2.130)$$

### 2.6.6. Определение диаметра пузырей

Значение диаметра пузыря, образующегося после дробления, найдём из следующих соображений. Предположим, что дробление пузырей происходит под воздействием динамического напора турбулентных пульсаций. При этом величина  $y$  в уравнении (2.102) достигает максимального значения, равного диаметру на момент дробления пузыря.

Величину  $y_{\text{max}}$  определим, исследовав уравнение (2.102) на максимум. Приравняв к нулю выражение (2.105), получим значение  $t_m$ , при котором  $y = y_{\text{max}}$ :

$$q_1 t_m = \text{arctg} \frac{q_1}{\delta}. \quad (2.131)$$

Функция  $I_0 \left( \frac{2,4 r}{R} \right)$  имеет максимум при  $r = 0$ ,  $I_0(0) = 1$ . Подставив эти значения и  $q_1 t_m$  из (2.131) в равенство (2.105), получим

$$y_{\text{max}} = d_{\text{п}} = \frac{1,6u'}{(q_1^2 + \delta^2)^{0,5}} \exp \left( -\frac{\delta}{q_1} \text{arctg} \frac{q_1}{\delta} \right). \quad (2.132)$$

Анализ уравнения (2.132) показал, что изменение коэффициента  $c_2$  в широком интервале не влияет на значение  $d_{\text{п}}$ . По данным работы [13] рекомендуется  $c_2 = 30$ . Исходя из этого влиянием экспоненты можно пренебречь; равенство (2.132) с учетом (2.121), (2.126) и (2.129) примет вид

$$d_{\text{п}} = \frac{11,6\sigma^{0,6}}{c_1^{1,8} E^{0,4} \rho_{\text{ж}}^{0,2}} \left( \frac{\varphi_{\Gamma}}{1 - \varphi_{\Gamma}} \right)^{0,4}. \quad (2.133)$$

В уравнении (2.133) значение коэффициента  $c_1$  определялось на основе экспериментальных данных по измерению среднего диа-

метра пузырей в аппаратах с различными системами аэрации [9]. В барботажных аппаратах колонного типа за основу определения  $c_1$  в уравнении (2.133) были взяты данные из работ [14, 15]. Этот выбор диктовался тем, что авторы К. Akita и Ф. Ioshida провели исследования по измерению размеров пузырей в барботажной колонне методом фотографирования в различных жидкостях в широком диапазоне изменения их физических свойств. Кроме того, одновременно измерялось истинное объемное газосодержание  $\varphi_{\Gamma}$ , для вычисления которого предложено эмпирическое критериальное уравнение

$$\frac{\varphi_{\Gamma}}{(1 - \varphi_{\Gamma})^4} = 0,2\text{Bo}^{0,125}\text{Ga}^{0,0833}\text{Fr}. \quad (2.134)$$

Этими же авторами было предложено уравнение для расчёта диаметра пузырей:

$$d_{\Pi} = 26 \left( \frac{gd_a^2 \rho_{\text{ж}}}{\sigma} \right)^{-0,5} \left( \frac{gd_a^3}{v_{\text{ж}}^2} \right)^{-0,12} \left( \frac{w_{\Gamma}}{(gd_a)^{0,5}} \right)^{-0,12}. \quad (2.135)$$

Вычисленные по уравнению (2.135) значения диаметра пузырей подставляли в уравнение (2.133), откуда затем определяли коэффициент  $c_1$ . Входящую в уравнение (2.133) величину  $E$  найдем из уравнения (5.43) – см. разд. 5.

В результате обработки экспериментальных данных указанных работ было установлено, что коэффициент  $c_1$  не является величиной постоянной и несколько зависит от размеров аппарата и физических свойств жидкости, слабо – от газосодержания. Для согласования опытных данных и уравнения (2.133) потребовалась необходимость представления  $c_1$  в виде зависимости

$$c_1 = 0,28 \left( \frac{d_a g^{1/3}}{v^{2/3}} \right)^{0,18}.$$

Отсутствие в уравнении (2.133) вязкости жидкости и появление её в полученном равенстве вполне понятно, так как при его выводе мы ею пренебрегли. Однако причиной появления в нём значи-

тельной поправки на диаметр аппарата является, скорее всего, не совсем корректная обработка авторами (Akita и Ioshida) своих опытных данных. Согласно уравнению (2.135), при  $d_a \rightarrow \infty$   $d_{\text{п}} \rightarrow 0$ , что никем не подтверждается. Более того, большинство авторов вообще не отмечают влияния самих размеров аппаратов, при прочих одинаковых условиях, на размеры пузырей.

В этой связи уместно обратиться к работам В.В. Консетова, в которых автор делит аппараты на два типа – большие и малые. К малым относятся аппараты, у которых  $d_a < 0,16$  м. Если  $d_a > 0,16$  м, то аппарат считается большим. Для каждого типа аппаратов даётся своё уравнение для расчёта  $\varphi_{\text{г}}$  [см. уравнения (2.94) и (2.95)]. Согласно работе В.В. Консетова, в малых аппаратах  $\varphi_{\text{г}}$  зависит от диаметра аппарата, а в больших – нет. Полученные полуэмпирическим методом уравнения для расчёта газосодержания автор работы [7] подтверждает многочисленными экспериментальными данными, как собственными, так и принадлежащими другим исследователям.

К. Akita и F. Ioshida проводили исследования в аппаратах диаметром 0,16–0,3 м, вследствие чего  $\varphi_{\text{г}}$  не должно было бы значительно зависеть от диаметра аппарата, как это следует из уравнения (2.134).

Есть ещё одно замечание в пользу работы [7]. Анализ уравнений типа (2.134) показывает, что они ограничены верхним пределом приведённой скорости газа. Для уравнения (2.135) она не превышает 0,4 м/с. Следовательно, все остальные величины, зависящие от газосодержания, ограничены теми же пределами скорости газа. Для наглядности на рис 2.11 представлен график изменения функции  $\varphi_{\text{г}}(w_{\text{г}})$  в пределах изменения  $w_{\text{г}}$  от 0,45 до 0,7 м/с.

Из графика видно, что, согласно уравнению (2.135), в указанных пределах изменения  $w_{\text{г}}$  функция  $\varphi_{\text{г}}(w_{\text{г}})$  имеет несколько резких изломов и  $\varphi_{\text{г}}$  может принимать значения больше единицы, что лишено какого-либо смысла.

Уравнения (2.94) и (2.95) не имеют недостатков, присущих уравнению (2.135). Они с высокой точностью аппроксимируют опытные результаты работ таких авторов, как К. Akita и F. Ioshida, и могут быть рекомендованы для широких пределов изменения приведённой скорости газа. Поэтому в дальнейшем будем использовать их при решении различных задач теплообмена и массообмена в аппаратах для аэробного культивирования микроорганизмов.

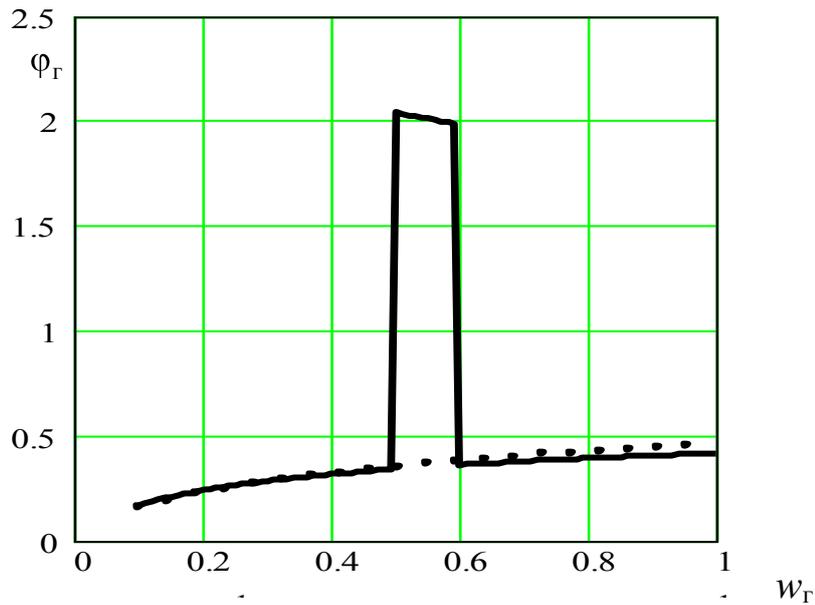


Рис. 2.11. Зависимость газосодержания  $\phi_{\Gamma}$  от приведённой скорости газа:  
 — уравнение (2.116); ••• уравнение (2.78)

Учитывая сделанные замечания, можно рекомендовать для расчёта диаметра пузырей уравнение (2.133), а газосодержание рассчитывать по уравнению (2.94) или (2.95). Коэффициент пропорциональности  $c_1$  можно принять постоянным:  $c_1 = 1,21$ .

### 3. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ И МАССЫ

Перенос теплоты и массы может протекать молекулярным и конвективным путём. Кроме того, перенос теплоты может происходить электромагнитным излучением или просто излучением. Последний вид переноса в данном курсе не рассматривается. Однако следует иметь в виду, что он широко используется при производстве многих пищевых продуктов. При желании глубоко изучить перенос теплоты излучением можно обратиться к работам [16, 17].

Молекулярный перенос происходит в результате теплового колебания молекул и называется: при переносе теплоты – теплопроводностью, при переносе массы – молекулярной диффузией.

Конвективный перенос осуществляется за счёт перемещения элементов жидкости из одной точки пространства в другую. В аппаратах пищевой технологии процессы молекулярного и конвективного переноса чаще происходят одновременно. Рассмотрим общие уравнения переноса теплоты и массы подробнее.

Уравнения переноса теплоты и массы в движущейся жидкости будут даны без выводов. При желании подробнее ознакомиться с их выводом советуем обратиться к работам [4, 16, 18]. В общем случае распределение температуры и концентрации вещества в пространстве можно выразить функциональными зависимостями от координат и времени, которые в неявном виде представлены уравнениями

$$T = f(x, y, z, t), \quad C = f(x, y, z, t). \quad (3.1)$$

При  $T = \text{const}$  и  $C = \text{const}$  функции (3.1) описывают поверхности равных температур и концентраций. В объёме среды можно провести бесчисленное множество поверхностей равных температур и концентраций, в каждой точке которых векторы потоков теплоты и массы направлены по нормали к ним.

Перенос субстанций происходит под действием движущей силы. При переносе теплоты ею является разность температур  $\Delta T$ , при переносе массы – разность концентраций  $\Delta C$ . Если температура и концентрация среды постоянны, то система будет находиться в равновесном состоянии. Условие равновесия определяется равенством нулю полных дифференциалов функций, т. е.  $dT = 0$  и  $dC = 0$ .

Таким образом, перенос субстанций может происходить только при отклонении системы от равновесного состояния.

### 3.1. Общие закономерности переноса теплоты

Технологии большинства пищевых и микробиологических производств так или иначе связаны с процессами нагрева и охлаждения продуктов в различных теплообменных устройствах. Процесс нагрева или охлаждения продукта через стенку теплообменного устройства называется теплопередачей. Доказано, что количество теплоты  $Q_T$ , которое передаётся в единицу времени через теплопередающую поверхность  $F$ , пропорционально разности температур между температурами продукта  $T_{p_1}$  и теплоносителя  $T_{p_2}$ , т. е.

$$Q_T = KF(T_{p_1} - T_{p_2}), \quad (3.2)$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость теплообмена между продуктом и теплоносителем, называемый коэффициентом теплопередачи.

Процесс теплообмена между потоком жидкости и теплопередающей поверхностью называют теплоотдачей. Количество теплоты, переданной теплоотдачей, должно быть равно значению  $Q_T$ , вычисленному по уравнению (3.2), с той лишь разницей, что оно будет пропорционально разности температур продукта  $T_p$  и поверхности стенки  $T_f$ , т. е.

$$Q = \alpha F \Delta T, \quad (3.3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи (теплообмена).

Разность температур  $(T_p - T_f) = \Delta T$  называют движущей силой переноса теплоты.

Коэффициенты  $K$  и  $\alpha$  имеют одинаковую размерность – ватт на квадратный метр-кельвин ( $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ) и зависят от физических свойств жидкости и гидродинамических условий. Отношение  $Q/F = q$  называют удельным тепловым потоком. В таком случае уравнение (3.3) приводится к виду

$$q = \alpha \Delta T. \quad (3.4)$$

Согласно рис. 3.1, с обеих сторон у поверхности стенки образуются слои, в которых температура меняется от  $T = T_p$  до  $T = T_f$ . В этих слоях имеют место наибольшие градиенты температур, а также в них сосредоточено основное сопротивление переносу теплоты. Так как движение в пристеночных слоях ламинарное, перенос теплоты в направлении к поверхности стенки происходит теплопроводностью. Аналогичным образом обстоит дело и с переносом массы. При массообмене образуются пристеночные диффузионные слои, в которых перенос массы осуществляется молекулярной диффузией. В дальнейшем мы ещё много будем говорить о пристеночных слоях, сейчас же только отметим, что коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  характеризует скорость переноса теплоты в пристеночном слое и зависит от гидродинамических условий.

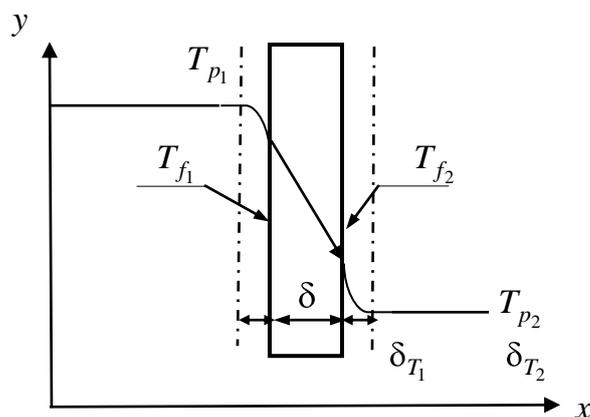


Рис. 3.1. Распределение температур в плоской стенке и окружающей её среде

Коэффициент теплопередачи характеризует скорость переноса теплоты в пристеночных слоях толщиной  $\delta_T$  с обеих сторон стенки и в стенке толщиной  $\delta$  и рассчитывается по уравнению

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_c} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (3.5)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты теплообмена по разные стороны стенки;  $\lambda_c$  – коэффициент теплопроводности стенки.

В общем виде перенос теплоты в несжимаемой среде и при постоянной теплоёмкости описывается дифференциальным уравнением Фурье–Кирхгофа

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_r}{\rho c_p}. \quad (3.6)$$

Подробный вывод уравнения (3.6) можно найти в работах [16, с. 60; 17, с. 277].

В векторной форме уравнение (3.6) имеет вид

$$\frac{dT}{dt} + (\vec{u}, \text{grad } T) = a \nabla^2 T + \frac{q_r}{\rho c_p}, \quad (3.7)$$

где  $a = \lambda/\rho c_p$  – коэффициент температуропроводности.

В левой части равенства (3.7), при любом варианте его решения, первое слагаемое определяет скорость переноса теплоты в нестационарных процессах, второе – скорость переноса теплоты только при наличии в жидкости конвекционных токов.

В правой части первое слагаемое определяет скорость переноса теплоты теплопроводностью, второе – учитывает влияние на процесс переноса внутреннего источника энергии. Если источником энергии служит жидкостное трение, то, согласно уравнению (1.41),  $q_r = E$ . При культивировании микроорганизмов источником тепловыделений являются метаболические процессы, протекающие внутри клеток.

Источником энергии могут быть также химические реакции, протекающие с выделением теплоты.

При отсутствии движения жидкости ( $\vec{u} = 0$ ) получаем уравнение, описывающее нестационарный перенос теплоты теплопроводностью:

$$\frac{dT}{dt} = a \nabla^2 T + \frac{q_r}{\rho c_p}. \quad (3.8)$$

### 3.2. Перенос теплоты теплопроводностью

Многочисленными исследованиями установлено, что количество теплоты, переданной теплопроводностью, пропорционально градиенту температур по нормали к изотермической поверхности и может быть выражено уравнением

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (3.9)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности среды, характеризующий скорость молекулярного переноса теплоты как в твёрдых телах, так и в покоящихся и движущихся жидкостях, Вт/(м·К);  $\partial T/\partial n$  – градиент температуры по нормали к поверхности.

Уравнение (3.9) называют законом теплопроводности Фурье.

В случае стационарной теплопроводности  $dT/dt = 0$  и уравнение (3.8) примет вид

$$a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_r}{\rho c_p} = 0. \quad (3.10)$$

При отсутствии внутренних источников теплоты для плоской задачи, изменение температуры по оси  $x$ , уравнение (3.10) примет вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (3.11)$$

После первого интегрирования уравнения (3.11) получаем  $dT/dx = C_1$ , после второго –

$$T = C_1 x + C_2. \quad (3.12)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находят из граничных условий: при  $x = \delta$   $T = T_{f_2}$ , следовательно,  $C_1 = (T_{f_2} - T_{f_1})/\delta$  и  $C_2 = T_{f_1}$ . Подставив постоянные интегрирования в уравнение (3.12), получим

$$T = T_{f_1} - \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{\delta} x. \quad (3.13)$$

Таким образом, при переносе теплоты теплопроводностью изменение температуры по толщине стенки происходит по линейному закону. Удельный тепловой поток через плоскую стенку находят из уравнения (3.9):

$$q = -\lambda_c \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{f_1} - T_{f_2}). \quad (3.14)$$

При наличии теплообмена со стенкой и движущимся около неё потоком жидкости уравнение теплового баланса, согласно уравнениям (3.4) и (3.9), записывается в виде равенства

$$\alpha(T_p - T_f) = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (3.15)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена, характеризующий скорость переноса теплоты в пристеночных тепловых слоях  $\delta_T$ .

Из условия постоянства теплового потока для каждой из сторон стенки (см. рис. 3.1) можно записать:

$$\alpha_1(T_{p_1} - T_{f_1}) = -\lambda_c dT / dx \quad \text{и} \quad \alpha_2(T_{f_2} - T_{p_2}) = -\lambda_c dT / dx. \quad (3.15a)$$

С учётом линейного профиля температуры (3.12), равенства (3.5) и полученных значений констант  $C_1$  и  $C_2$  из уравнений (3.15a) следует уравнение, описывающее распределение температуры по оси  $x$ :

$$T = T_{p_1} - \frac{T_{p_1} - T_{p_2}}{\lambda_c K} \left( \frac{\lambda_c}{\alpha_1} + x \right).$$

### Перенос теплоты при наличии внутреннего источника энергии

Определённый интерес представляет задача по отводу теплоты, образующейся в результате метаболических процессов внутри клетки, в культуральную жидкость при культивировании микроорганизмов.

Прежде чем решать поставленную задачу, необходимо иметь представление о том, каков механизм теплообмена между клеткой и окружающей её средой. Это может показаться странным, но четко-

го ответа на поставленный вопрос нет. Нет даже точного ответа на вопрос: намного ли отличается температура внутри клетки от температуры окружающей среды? Можно найти подробное описание различных моделей транспорта питательных веществ из культуральной среды в клетку и отвода продуктов метаболизма из клетки (эти вопросы мы рассмотрим несколько позднее при изучении процессов переноса массы), но вопросам теплообмена между клеткой и средой внимания уделяется немного.

Можно представить два механизма переноса теплоты из клетки в окружающую среду – теплопроводностью и конвекцией через клеточную мембрану. Скорее всего, присутствуют оба механизма. Под конвекцией в данном случае понимается перенос теплоты за счёт замены находящегося в клетке нагретого водного раствора продуктов метаболизма более холодным водным раствором питательных веществ из окружающей клетку культуральной жидкости (в дальнейшем для сокращения будем называть раствор просто «водой»). В работе [19] отмечается, что трансмембранный обмен воды протекает с высокой скоростью, но, к сожалению, не указывается, с какой именно. Таким образом, конвективный перенос теплоты связан с диффузионными процессами переноса массы, а его скорость определяется скоростью диффузии через клеточную мембрану.

При решении задачи по определению разности температур  $\Delta T = T_b - T_f$  (рис. 3.2) методом теплопроводности требуется уравнение (3.10). Если же основываться на механизме конвекционного переноса, то потребуется уравнение переноса массы (3.52), т. е. задача значительно усложняется. С моделями трансмембранного обмена в клетках можно ознакомиться в работах [19–22]. Поскольку нас интересуют только оценочные расчеты, воспользуемся пока механизмом теплопроводности и, если понадобится, введем необходимую поправку.

Рассмотрим, к примеру, очень схематично строение дрожжевой клетки. Ядро клетки защищено от внешней среды клеточной мембраной толщиной  $\delta_m$ . Сразу отметим, что в действительности клеточная мембрана многослойна и имеет сложное строение. При желании глубоко разобраться со строением мембран и их функциями в клетке можно обратиться к работам [19–21].

Далее решение можно разделить на два варианта. В первом варианте считать условно всю клетку твёрдым телом, в центре которого

температура  $T_b$  максимальна, а отвод из клетки происходит теплопроводностью за счёт разности температур  $\Delta T = T_b - T_f$ , где  $T_f$  – температура наружной поверхности клетки. Таким образом, в данном случае мы должны получить уравнение, описывающее распределение температуры по всему объёму клетки.

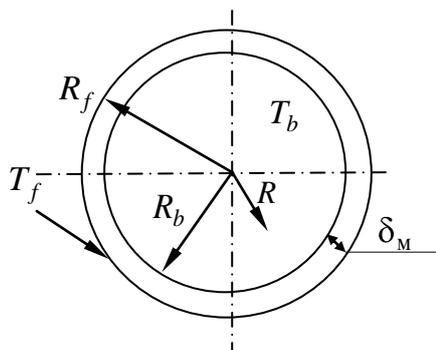


Рис. 3.2. Схематичное изображение клетки

Второй вариант принципиально мало чем отличается от первого. Разница лишь в том, что твёрдой будет считаться только клеточная мембрана, а внутри клетки находится что-то вроде геля, температура которого  $T_b = \text{const}$ . Вначале решим вторую задачу, как более общую. Первая задача является частным случаем второй.

Будем считать, что клетка имеет сферическую форму (см. рис. 3.2). В таком случае решение задачи переноса теплоты теплопроводностью следует вести в сферических координатах. Уравнение (3.10) в сферических координатах имеет вид

$$a \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{q_k}{\rho c_p} = 0, \quad (3.16)$$

где  $R$  – радиус расположения произвольной точки с температурой  $T$ ;  $\Theta$  и  $\varphi$  – углы, определяющие направление радиуса-вектора.

При наличии симметричности распределения температуры по объёму клетки производные температуры по углам будут равны нулю и уравнение (3.16) упрощается:

$$a \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dT}{dR} \right) + \frac{q_k}{\rho c_p} = 0. \quad (3.17)$$

В уравнениях (3.16) и (3.17)  $q_k$  является удельной биологической теплотой, выделяемой одной клеткой.

Будем полагать, что температура внутри клетки  $T_b$  постоянна и перенос теплоты из клетки в окружающую среду будет происходить через клеточную мембрану толщиной  $\delta_m$  (см. рис. 3.2), внутренний радиус которой равен  $R_b$ , наружный –  $R_f$ .

После первого интегрирования уравнения (3.17) получим

$$R^2 \frac{dT}{dR} = -\frac{1}{3} R^3 \frac{q_k}{\lambda} + C_1,$$

откуда следует

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{1}{3} R \frac{q_k}{\lambda} + \frac{C_1}{R^2}. \quad (3.18)$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  находим из следующих условий:  $R = R_b$ ,  $T = T_b = \text{const}$ ,  $dT/dR = 0$ :

$$C_1 = \frac{1}{3} \frac{q_k}{\lambda} R_b^3. \quad (3.19)$$

После интегрирования уравнения (3.18) получим

$$T = -\frac{1}{6} R^2 \frac{q_k}{\lambda} - \frac{C_1}{R} + C_2. \quad (3.20)$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  найдём из следующих условий:  $R = R_f$ ,  $T = T_f$ , где –  $T_f$  температура на наружной поверхности клетки. Согласно принятым условиям, из уравнения (3.20) следует

$$C_2 = T_f + \frac{1}{6} R_f^2 \frac{q_k}{\lambda} + \frac{1}{3} \frac{q_k}{\lambda} \frac{R_b^3}{R_f}. \quad (3.21)$$

Подставив равенство (3.19) и (3.21) в уравнение (3.20), запишем

$$T = T_f + \frac{1}{6} \frac{q_k}{\lambda} (R_f^2 - R^2) + \frac{1}{3} \frac{q_k}{\lambda} R_b^3 \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} \right). \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.22) найдём разность температур на внутренней и наружной поверхностях клетки:

$$\Delta T_k = \frac{1}{6} \frac{q_k}{\lambda} (R_f^2 - R_b^2) + \frac{1}{3} \frac{q_k}{\lambda} R_b^3 \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_b} \right). \quad (3.23)$$

Согласно условию первой задачи,  $R_b = 0$ . В таком случае уравнение (3.22) примет вид

$$T = T_f + \frac{1}{6} \frac{q_k}{\lambda} (R_f^2 - R^2). \quad (3.24)$$

Разность температур при  $R = R_b = 0$

$$\Delta T_k = \frac{1}{6} \frac{q_k}{\lambda} R_f^2. \quad (3.25)$$

В уравнениях (3.22)–(3.25) величина  $q_k$  есть удельный поток теплоты, выделяемый одной клеткой. Он зависит от скорости метаболических процессов, протекающих в клетке. Общее количество удельной теплоты, выделяемой всеми находящимися в культиваторе клетками,  $E_k = zq_k$ , где  $z$  – количество клеток в единице массы культуральной среды, рассчитываемое по уравнению [22, с. 96]

$$E_k = ax + b \frac{dx}{dt}, \quad (3.26)$$

где  $x$  – массовая концентрация биомассы в объёме культуральной среды  $V_p$ . Коэффициент  $a$  в данном случае представляет собой количество теплоты, выделившейся при поддержании жизнедеятельности единицы биомассы в единицу времени, Дж/(кг·с); коэффициент  $b$  –

количество теплоты, выделившейся при образовании новых клеток, отнесённых к единице биомассы, Дж/кг.

Удельную биологическую теплоту  $E_k$ , выделившуюся в единице объема среды в единицу времени, можно назвать ещё удельной мощностью биологического источника теплоты  $N_r/V_p$ , Дж/(м<sup>3</sup>·с).

По своей сути величина  $E_k$  имеет тот же смысл, что и диссипация энергии  $E$  в равенстве (1.41), т. е. по аналогии с  $E$  можно записать, что  $E_k = N_r/V_p$ . Разница лишь в том, что в равенстве (1.41) диссипация энергии определяется гидродинамическими условиями в культиваторе, а конкретнее – скоростями сдвига. В уравнении же (3.26) она определяется скоростями метаболических процессов, протекающих внутри живого организма.

Первое слагаемое уравнения (3.26) играет преобладающую роль в стационарной фазе роста, когда основное тепловыделение связано с поддержанием жизнедеятельности клеток и  $ax \gg bdx/dt$ . Второе слагаемое характеризует тепловыделение в фазе прироста биомассы, когда  $ax \ll bdx/dt$ . При расчёте теплообмена в культиваторах определяющую роль играет второе слагаемое.

Использование уравнения (3.26) в инженерных расчётах затруднено из-за отсутствия надёжных данных о численных значениях коэффициентов  $a$  и  $b$ . В литературе иногда приводится суммарное удельное количество биологической теплоты. Например, при культивировании пекарских дрожжей, по данным работы Ю.И. Шишацкого, В.А. Фёдорова и С.В. Острикова [23], общее количество биологической теплоты, отнесённой к единице массы прироста клеток  $q_m$ , составляет примерно  $4,17 \cdot 10^6$  Дж/кг. Для этого частного случая уравнение (3.26) можно представить в следующем виде:

$$E_k = 4,17 \cdot 10^6 \frac{dx}{dt}. \quad (3.27)$$

Выбор уравнения для вычисления производной в уравнении (3.27) зависит от выбора кинетической модели прироста клеток. Будем считать, что клетки не испытывают дефицита в субстрате, гибель клеток отсутствует, продукты метаболизма постоянно отводятся и потому не влияют на скорость размножения клеток. Если принять

экспоненциальный закон развития клеток  $x = x_H e^{\mu_k t}$ , то скорость прироста биомассы выразится уравнением

$$\frac{dx}{dt} = x_H \mu_k e^{\mu_k t}, \quad (3.28)$$

где  $\mu_k$  – удельная скорость прироста биомассы (клеток), зависящая от многих факторов.

При степенном законе [9]

$$x = x_H \left( 1 + (\gamma t)^n \right); \quad (3.29)$$

$$\frac{dx}{dt} = x_H n \gamma^n t^{n-1}. \quad (3.30)$$

Из уравнения (3.29) следует, что отношение  $1/\gamma$  представляет собой время удвоения биомассы.

В уравнении (3.29)  $x_H$  – концентрация биомассы в засевной культуре;  $\gamma$  определяет скорость прироста биомассы и зависит от тех же факторов, что и  $\mu_k$ , например от концентрации биомассы в начальном засеве, концентрации субстрата в культуральной среде, при аэробном культивировании – от условий аэрации и т. п.

Из уравнений (3.29) и (3.30) получаем выражение для расчёта удельной мощности источника биологического тепла:

$$E_k = 4,17 \cdot 10^6 x_H n \gamma^n t^{n-1}. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) устанавливает закон изменения скорости выделения биологического тепла в процессе культивирования. Для случая аэробного культивирования пекарских дрожжей значения  $\gamma$  и  $n$  могут быть рассчитаны по уравнениям [9, с. 35]:

$$\gamma = a_1 (b_1 - e^{-c_1 q}); \quad (3.32)$$

$$n = a_2 (b_2 - e^{-c_2 q}), \quad (3.33)$$

где  $q = W / V_p$  – удельный расход воздуха, здесь  $W$  – объёмный расход воздуха, м<sup>3</sup>/ч;  $V_p$  – объём культуральной жидкости в культиваторе, м<sup>3</sup>;  $a$ ,  $b$  и  $c$  – коэффициенты, зависящие от начальной концентрации сахара  $S_H$ , начального засева  $x_H$ , температуры, рН среды.

В качестве примера приведем уравнения для расчёта коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ , полученные на основе опытных данных по культивированию хлебопекарных дрожжей при температуре 32 °С и рН = 4,6:

$$a_1 = 0,2 + 0,184S_H^{0,596}; \quad (3.34)$$

$$b_1 = \frac{1}{0,587 + 233,7S_H^{2,514}}; \quad (3.35)$$

$$c_1 = 0,0175 + 16,38S_H^{2,788}; \quad (3.36)$$

$$a_2 = 2,033 \cdot 0,932 \frac{1}{S_H} S_H^{0,037}; \quad (3.37)$$

$$b_2 = 1,386 \cdot 1,078 \frac{1}{S_H} S_H^{0,179}; \quad (3.38)$$

$$c_2 = 0,00293 \cdot 1,031 \frac{1}{S_H} S_H^{-0,0664}, \quad (3.39)$$

где  $S_H$  – начальная концентрация сахара в массовых долях. Начальный засев  $x_H$  брался в количестве 8 % от начальной концентрации сахара.

Рассмотрим конкретный пример культивирования на мелассном растворе пекарских дрожжей при температуре 32 °С,  $x_H = 2,9$  кгАСБ/м<sup>3</sup> (АСБ – абсолютно сухая биомасса),  $S_H = 0,0555$ ,  $q = 92$  л/ч, рН = 4,6. При указанных условиях из уравнений (3.32)–(3.39)  $\gamma = 0,285$  л/ч,  $n = 1,346$ . Подставив имеющиеся данные в уравнение (3.31) и помня, что произведение  $\gamma^n t^{n-1}$  имеет размерность л/ч, получим

$$E_k = \frac{3 \cdot 10^6 t^{0,346}}{3600} \text{ Вт/м}^3.$$

Для наглядности изменение тепловыделения во времени показано на рис. 3.3.

Таким образом, в процессе культивирования скорость тепловыделения возрастает, что связано с увеличением количества биомассы в культиваторе. При культивировании микроорганизмов необходимо обеспечить автоматическое регулирование подачи хладоносителя в теплообменник в целях поддержания требуемой температуры в культиваторе. При управлении технологическим процессом с помощью компьютера понадобится система уравнений (3.29)–(3.39).

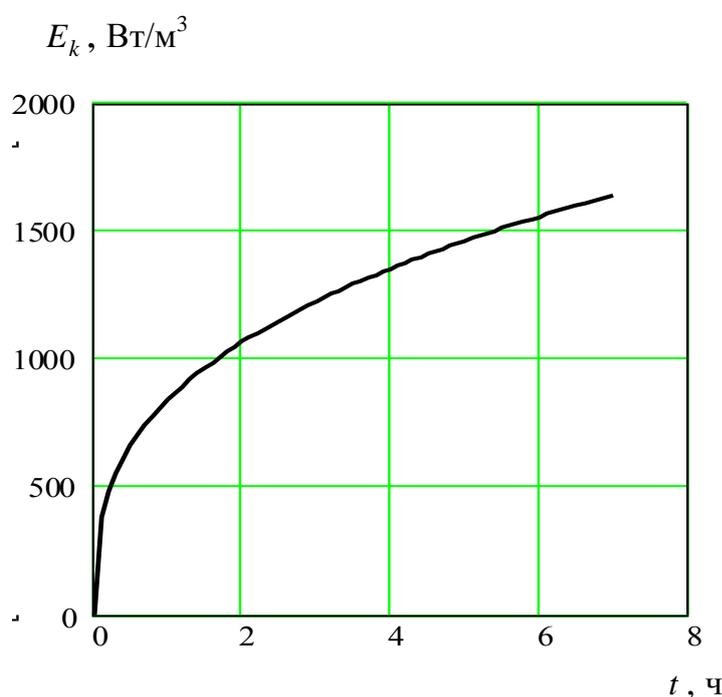


Рис. 3.3. Зависимость изменения удельного количества теплоты в процессе культивирования дрожжей от времени

При определении разности температур по уравнению (3.25) требуется знать количество теплоты, выделившейся при образовании одной клетки. Для этого необходимо определить количество клеток в 1 кг биомассы. Масса одной клетки

$$m_k = \rho_k V_k = \frac{\rho_k \pi d_k^3}{6}.$$

Примем  $\rho_k = 1080 \text{ кг/м}^3$  и  $d_k = 7 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  [20]. При этих условиях масса одной клетки  $m_k = 1,93 \cdot 10^{-13} \text{ кг}$  и в 1 кг биомассы будет содержаться  $z = 5,18 \cdot 10^{12}$  клеток. Так как при приросте 1 кг биомассы выделяется  $4,17 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$  теплоты, количество теплоты, выделившейся при образовании одной клетки, будет равно  $q_{mk} = 4,17 \cdot 10^6 / 5,18 \cdot 10^{12} = 0,805 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/кл}$ . Эту величину необходимо умножить на скорость прироста биомассы. Так как  $1/\gamma = t_u = 3,5 \text{ ч}$  – время удвоения одной клетки, то из уравнения (3.30) следует

$$q_k = q_{mk}\gamma = 1 \cdot 0,285 \cdot 0,805 \cdot 10^{-6} / 3600 = 0,229 \cdot 10^{-11}, \text{ Вт/м}^3.$$

Теперь можно оценить разность температур в клетке и на её поверхности. Рассмотрим первый вариант, когда разность температур максимальна. Из уравнения (3.25) определим разность температур  $\Delta T_k$ . Так как  $R_f = 7 \cdot 10^{-6}$ , то  $\Delta T_k \approx 10^{-23}$ , т. е. температура внутри клетки и на её поверхности, по сути, одинакова. Надо помнить, что все предыдущие выводы сделаны без учета взаимодействия поверхности клетки с окружающей средой.

К ответу на вопрос, насколько температура поверхности клетки отличается от температуры культуральной жидкости, необходимо привлечь уравнение (3.4), в которое входит коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , зависящий от гидродинамических условий в культиваторе. Поскольку мы изучаем в основном аэробное культивирование дрожжей в условиях интенсивной турбулизации среды, то, прежде чем решать задачи по переносу теплоты и массы в таких условиях, необходимо изучить закономерности переноса количества движения в турбулентных потоках. С этими проблемами мы познакомимся в следующих разделах.

### 3.3. Уравнение переноса массы

#### 3.3.1. Предварительные сведения о процессах переноса массы

Уравнения переноса массы аналогичны уравнениям переноса теплоты. Количество переносимой в единицу времени массы извле-

каемого из газовой смеси компонента описывается уравнением, аналогичным уравнению (3.2):

$$G_{\Gamma} = K_m F_{\Gamma\text{ж}} \Delta C, \quad (3.40)$$

где  $K_m$  – поверхностный коэффициент массопередачи, который вычисляется, подобно коэффициенту теплопередачи, по уравнению

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1}{m_p \beta_{\Gamma}} + \frac{1}{\beta_s} + \frac{1}{\beta_{\text{ж}}}, \quad (3.41)$$

здесь  $\beta_{\Gamma}$ ,  $\beta_s$  и  $\beta_{\text{ж}}$  – коэффициенты массообмена (массоотдачи) в газовой фазе, на межфазной поверхности и в жидкой фазе;  $m_p$  – константа фазового равновесия;  $F_{\Gamma\text{ж}}$  – поверхность контакта фаз в системе газ–жидкость;  $\Delta C$  – разность концентраций кислорода на поверхности пузыря и в жидкости.

Для труднорастворимых газов, таких как кислород, диоксид углерода и т. п., произведение  $m_p \beta_{\Gamma}$  значительно превосходит значения  $\beta_s$  и  $\beta_{\text{ж}}$ , поэтому сопротивлением переносу массы в газовой фазе можно пренебречь.

Что касается сопротивления межфазной поверхности, то, согласно имеющимся литературным данным [24], для чистых жидкостей величиной отношения  $1/\beta_s$  можно пренебречь, так как экспериментальные исследования не обнаружили наличие поверхностного сопротивления. Однако наличие ПАВ может повысить межфазное сопротивление. К культуральным средам это имеет самое прямое отношение, так как имеющиеся в них органические кислоты, белковые вещества, химические пеногасители и другие компоненты являются в большинстве случаев поверхностно-активными веществами. К сожалению, экспериментальных данных о влиянии тех или иных ПАВ на скорость растворения кислорода в культуральных средах в литературе обнаружено не было. Скорее всего это связано со сложностью проведения таких исследований. Поэтому в ходе экспериментальных исследований массообмена при растворении кислорода в культуральных средах находят коэффициенты массообмена в жидкой фазе в совокупности с поверхностным сопротивлением, а значение  $K_m$  при-

нимают равным  $\beta_{ж}$ . С учётом последнего условия уравнение (3.41) примет вид

$$G_{\Gamma} = \beta_{ж} F_{\Gammaж} \Delta C. \quad (3.42)$$

Уравнение (3.42) часто записывают в несколько ином виде:

$$G_{\Gamma} = \beta_{ж} a_{\Gammaж} V_p \Delta C, \quad (3.43)$$

где произведение  $\beta_{ж} a_{\Gammaж}$  называется объемным коэффициентом массоотдачи,

$$\beta_V = \beta_{ж} a_{\Gammaж}. \quad (3.44)$$

С учётом уравнения (3.44) равенство (3.43) примет вид

$$G_{\Gamma} = \beta_V V_p \Delta C. \quad (3.45)$$

Расчет  $G_{\Gamma}$  можно произвести либо по уравнению (3.42), либо по уравнению (3.45). В первом случае необходимо иметь уравнение для определения  $\beta_{ж}$  и  $a$ , во втором – только  $\beta_V$ . Второй путь несколько проще, но он не дает возможности проанализировать отдельно влияние на скорость растворения газа каждого из сомножителей.

Движущая сила абсорбции газа рассчитывается по уравнению

$$\Delta C = \frac{\Delta C_{\bar{б}} - \Delta C_{\bar{м}}}{\ln \frac{\Delta C_{\bar{б}}}{\Delta C_{\bar{м}}}}, \quad (3.46)$$

где  $\Delta C_{\bar{б}} = C_{\text{H}_2\text{O}_2}^* - C_{\text{O}_2}$ ;  $\Delta C_{\bar{м}} = C_{\text{кO}_2}^* - C_{\text{O}_2}$ , здесь  $C_{\text{H}_2\text{O}_2}^*$  и  $C_{\text{кO}_2}^*$  – значения равновесных концентраций растворенного в жидкой фазе кислорода при входе в аппарат и на выходе из него.

Рассмотрим конкретный пример аэробного культивирования микроорганизмов в аппарате барботажного типа (рис. 3.4, а), который наиболее широко применяется на большинстве отечественных дрожжевых заводов.

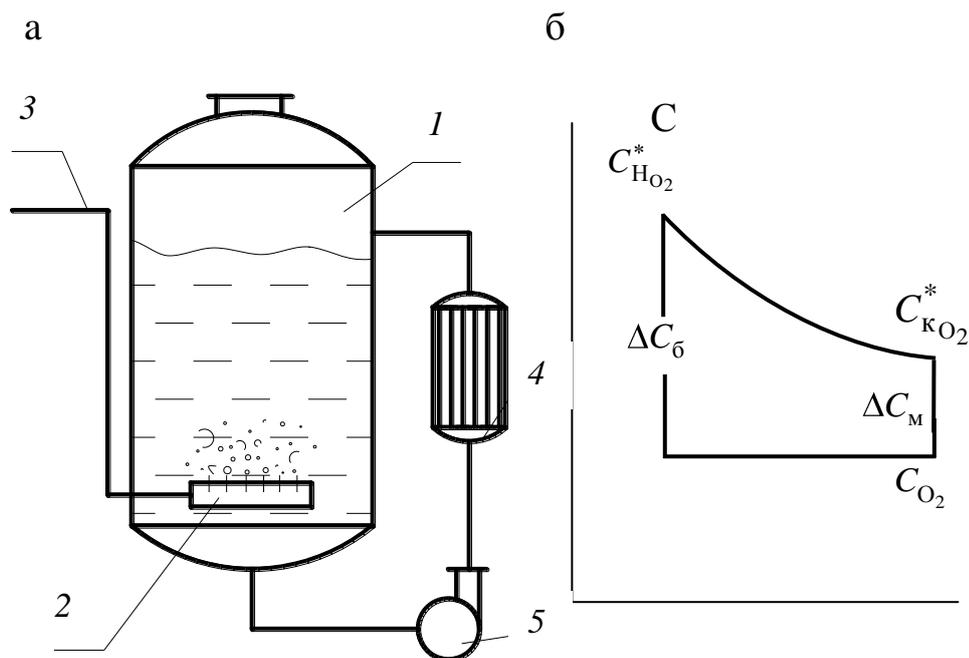


Рис. 3.4. Схема барботажного культиватора:  
 а – схема культиватора с выносным теплообменником;  
 б – схема распределения концентраций кислорода в объёме жидкости

Аппарат состоит из корпуса  $1$  с находящимся внутри него барбатёром  $2$ , в который подается воздух по воздуховоду  $3$ . Биологическое тепло, выделившееся при размножении клеток, отводится либо через рубашку, либо в выносном теплообменнике  $4$  (как это показано на рис. 3.4, а). Циркуляция жидкости через теплообменник осуществляется насосом  $5$ .

Средняя концентрация кислорода в жидкости  $C_{O_2}$  в аппарате идеального перемешивания постоянна по всему объёму. В аппаратах идеального вытеснения она будет меняться от  $C_{H_2O_2}$  до  $C_{KO_2}$ . Если равновесная концентрация тоже постоянна по всему объёму жидкости, то движущая сила процесса абсорбции будет равна простой разности  $\Delta C = C^* - C_{O_2}$ .

Величина равновесной концентрации кислорода в жидкой фазе может быть рассчитана по уравнению [24]

$$C^* = \frac{p_a \rho_{ж} Y_{O_2} M_{г}}{m_p M_{ж}}, \quad (3.47)$$

где  $p_a$  – абсолютное давление в произвольной точке аппарата, Па;  $\rho_{ж}$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $Y_{O_2}$  – массовая доля извлекаемого газа в газовой фазе;  $M_{г}$  и  $M_{ж}$  – молекулярные массы газа и жидкости;  $m_p$  – константа фазового равновесия, зависящая от температуры и не зависящая от давления (при небольших величинах).

В качестве примера в табл. 3.1 приведены значения  $m_p$  для водных растворов кислорода и диоксида углерода при разной температуре.

Таблица 3.1

**Значения константы фазового равновесия  $m_p \cdot 10^{-8}$  Па**

Температура, °С	10	20	30	40
O <sub>2</sub>	33,2	40,5	48,1	55,6
CO <sub>2</sub>	1,06	1,44	1,88	2,36

Абсолютное давление равно сумме атмосферного и избыточного (манометрического) давления, т. е.

$$p = p_a + p_m = p_a + p_0 + \rho_{ж} gH, \quad (3.48)$$

где  $p_a$  и  $p_0$  – давление атмосферное и на свободной поверхности жидкости, Па;  $H$  – расстояние от свободной поверхности до произвольного поперечного сечения аппарата (глубина погружения сечения).

Согласно уравнению (3.48), с уменьшением  $H$  давление  $p$  снижается, а из уравнения (3.47) следует снижение  $C^*$ , что и отражено на рис. 3.4, б.

Строго говоря, уравнение (3.47) справедливо для однородных жидкостей. Расчет  $C^*$  при абсорбции газов растворами затруднен ввиду сложности определения их молекулярной массы  $M_{ж}$ . Определить молекулярную массу любой культуральной среды, представляющей собой смесь растворённых в воде различных веществ, задача непростая. Если говорить конкретно, например, о меласных растворах, то приближённо молекулярную массу раствора можно рассчитать по уравнению

$$M_{\text{ж}} = M_{\text{в}}s_{\text{в}} + M_1s_1 + M_2s_2 + \dots + M_ns_n, \quad (3.49)$$

где  $M_{\text{в}}$  – молекулярная масса воды;  $s_{\text{в}}$  – массовая доля воды в растворе;  $M_1 \dots M_n$  – молекулярные массы компонентов;  $s_1 \dots s_n$  – их концентрации в водном растворе, в массовых долях;  $n$  – количество компонентов веществ в растворе.

Константа фазового равновесия  $m_p$ , как уже было сказано, зависит от температуры и физических свойств газа и жидкости. В справочной литературе приводятся значения  $m_p$  при разной температуре для дистиллированной воды. Между тем наличие в ней солей, сахаров и других компонентов существенно снижает растворимость кислорода.

Из уравнений (3.42) и (3.43) видно, что поток кислорода из воздушного пузыря в культуральную среду (так же как и диоксида углерода в обратном направлении) можно увеличить, увеличив каждый из сомножителей. Оценим возможности влияния каждого из них на скорость абсорбции (десорбции).

**Влияние движущей силы  $\Delta C$ .** При исследовании барботажных аппаратов допускают, что по жидкой фазе они работают в режиме идеального перемешивания, а по газовой – идеального вытеснения. Это значит, что средняя концентрация кислорода, растворённого в культуральной жидкости, постоянна по всему объёму ферментера (см. рис. 3.4, б). Равновесная концентрация  $C_{\text{O}_2}^*$  может по высоте аппарата меняться по тем или иным причинам, о чём уже говорилось ранее.

Возможность варьирования  $C_{\text{O}_2}^*$  в целях интенсификации процесса культивирования за счет изменения температуры весьма ограничена, так как аэробное культивирование ведется при оптимальных значениях температуры, зависящих от вида микроорганизмов. В частности, для дрожжей в зависимости от технологических особенностей культивирования она лежит в пределах (30–35) °С. Снижение температуры приведет к снижению скорости прироста биомассы.

Увеличение давления в аппарате технически возможно, но экономически вряд ли целесообразно, так как это ведет к усложнению конструкции ферментеров, увеличению их металлоемкости и расходу энергии на транспортировку воздуха.

В уравнение (3.47) входит еще один параметр, изменение которого влияет на величину равновесной концентрации, – содержание кислорода в воздухе  $Y_{O_2}$ . Применение чистого кислорода ( $Y_{O_2} = 1$ ) приведёт к увеличению движущей силы процесса. Однако такой метод не нашел применения в промышленном масштабе по ряду причин:

– во-первых, из-за более высокой стоимости кислорода по сравнению с использованием воздуха;

– во-вторых, чистый кислород может оказывать ингибирующее действие на клетки и тем самым снижать скорость роста клеток.

В реальных условиях движущая сила  $\Delta C$  изменяется по высоте аппарата. Из рис. 3.4, б видно, что равновесная концентрация по высоте снижается. Причин две: во-первых, потому, что давление по высоте жидкости падает [согласно уравнению (3.48)]; во-вторых, вследствие абсорбции кислорода жидкостью и десорбции из неё  $CO_2$  падает концентрация  $O_2$  в воздушных пузырьках, что приводит к снижению  $Y_{O_2}$ .

Последнее, что необходимо отметить по поводу движущей силы, – это то, что она совершенно не зависит от гидродинамики.

Из всего сказанного следует вывод: возможности увеличения скорости растворения кислорода за счет увеличения  $\Delta C$  имеются, но весьма ограниченные.

**Влияние коэффициента массоотдачи.** Чтобы ответить на вопрос, в какой степени можно воздействовать на скорость абсорбции, изменяя  $\beta_{ж}$ , необходимо выяснить, от каких факторов он зависит.

Установлено [24], что  $\beta_{ж}$  зависит от некоторых физических свойств жидкости, таких как коэффициент молекулярной диффузии  $D$  и вязкость  $\mu_{ж}$ . Эту связь можно записать в виде пропорциональности

$$\beta_{ж} \sim D^p \mu_{ж}^n.$$

Для жидкостей без каких либо примесей при турбулентном режиме течения  $p$  меняется в пределах от 0,75 до 0,5;  $n$  – от –0,1 до –0,2.

**Влияние поверхностного натяжения.** Влияние поверхностного натяжения на коэффициент массообмена  $\beta_{ж}$  до конца не выяс-

нено. По некоторым данным поверхностное натяжение само по себе не сказывается на величине  $\beta_{\text{ж}}$  [24]. Однако оно может влиять на скорость переноса кислорода из газовой фазы в жидкую в случае изменения диаметра пузырей, так как размеры пузырей зависят от поверхностного натяжения.

Добавление ПАВ также может повлиять на скорость переноса массы, но будет ли влияние ПАВ сказываться через изменение поверхностного натяжения или механизм влияния будет какой-то иной, сказать трудно.

Как уже отмечалось, культуральная среда состоит из множества компонентов, причем во время культивирования ее состав меняется, но в какой мере изменение состава среды будет влиять на коэффициент молекулярной диффузии  $D$  неизвестно. Здесь требуются детальные экспериментальные исследования. При расчетах ферментативного оборудования коэффициент молекулярной диффузии выбирают из справочной литературы, составленной на основе исследований диффузии газов в чистых жидкостях [25].

Не совсем ясным остается ответ на вопрос о влиянии гидродинамики на величину поверхностного коэффициента массоотдачи. Часто  $\beta_{\text{ж}}$  выражают в виде зависимости ее от энергии, подводимой к единице объема среды в единицу времени, т. е.

$$\beta_{\text{ж}} \sim E^{m_1},$$

где  $E$  выражается в виде равенства типа (1.42).

Что касается показателя степени  $m_1$ , то, по данным различных авторов, он меняется от 0 до 0,25. Более того, в некоторых работах  $m_1$  может принимать отрицательное значение. Так, по данным экспериментальных исследований [14] (Akita и Ioshida) по абсорбции газов различными жидкостями в барботажной колонне, может быть получено  $m_1 = -0,1$ . Исследования массообмена сульфитным методом в пластинчатых аппаратах с гофрированной поверхностью дали значение  $m_1 \approx 0$  [9].

Слабая зависимость  $\beta_{\text{ж}}$  от подводимой к среде энергии труднообъяснима. Возможно, здесь имеет место наложение двух противоположно действующих факторов. Скорее всего, коэффициент массоотдачи  $\beta_{\text{ж}}$  растет с увеличением подводимой к жидкости энергии,

но в то же время на нем сказываются размеры газовых пузырьков, диаметр которых обратно пропорционален энергии примерно в той же степени. Следовательно, возможность интенсифицировать процессы растворения газов и их десорбции за счет изменения  $\beta_{\text{ж}}$  невелика.

Таким образом, анализ уравнения (3.42) позволяет сделать следующий вывод: интенсификация процесса аэрации культуральной среды может быть достигнута в основном за счет увеличения поверхности контакта фаз, которая, в свою очередь, зависит от подводимой к среде энергии.

Учитывая важное и определяющее значение влияния величины ПКФ на скорость растворения кислорода, рассмотрим более подробно её зависимость от различных факторов.

**Влияние поверхности контакта фаз.** Увеличение ПКФ за счёт изменения диссипации энергии возможно двумя методами [согласно равенству (3.42)]. Первый метод заключается в увеличении мощности источника энергии  $N$ . Другими словами, необходимо повысить степень турбулизации среды, увеличив, например, расход газа, либо установить в аппарате механическую мешалку. Однако данный путь сопряжен с затратами энергии или усложнением конструкции аппарата.

Второй метод заключается в уменьшении рабочего объема  $V_p$  при  $N = \text{const}$ . Реализовать на практике этот метод можно следующим образом. В небольшом объеме аэрируется среда, а затем она поступает в емкость-накопитель биомассы, в которой либо вообще отсутствует аэрация, либо она имеется, но слабая. Что касается метода диспергирования газа в жидкости, то она не обязательно должна быть барботажной. Можно применить, например, струйное диспергирование. При этом ПКФ будет в несколько раз больше, чем при барботаже [9].

Чтобы выяснить степень влияния УПКФ на скорость растворения кислорода, необходимо установить, от чего она зависит. Согласно уравнению (2.91), величина УПКФ определяется размерами пузырей и истинным объемным газосодержанием. Газосодержание зависит от приведенных скоростей газа и жидкости. Размеры пузырей определяются величиной энергии, введенной в объём жидкой фазы. Оба параметра зависят от физических свойств жидкости, в мень-

шей степени – от газа и рассчитываются по эмпирическим уравнениям, полученным на основе экспериментальных данных.

Указанные обстоятельства определяют использование для расчёта УПКФ уравнений двух видов. В одном случае УПКФ связывают с размерами пузырей, в другом – непосредственно выражают через диссипацию энергии  $E$  в виде зависимости

$$a_{\text{ГЖ}} = cE^{m_2}. \quad (3.50)$$

Значения  $c$  и  $m_2$  находят из уравнения (3.50) после предварительного определения  $a_{\text{ГЖ}}$  экспериментальными методами.

### 3.3.2. Молекулярный перенос массы

Перенос массы происходит аналогично переносу теплоты. Уравнение переноса молекулярной диффузии будет иметь вид

$$j = -D \frac{\partial C}{\partial n}, \quad (3.51)$$

где  $j$  – удельный массовый поток (отношение потока массы к массообменной поверхности), размерность его зависит от выбора размерности концентрации  $C$ ;  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии, характеризует скорость молекулярного переноса массы вещества,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Молекулярная диффузия наблюдается как в твёрдых телах, так и в покоящихся и движущихся жидкостях. Примером переноса массы в твердом теле может служить распространение диоксида углерода в сырах при их созревании, в хлебопечении при брожении теста, если условно принять его в покоящемся состоянии твёрдым телом. Молекулярный перенос массы в движущихся жидкостях или многофазных потоках наблюдается в пристеночных (приповерхностных) слоях, где градиенты концентраций максимальны.

Рассмотрим, к примеру, перенос кислорода от воздушного пузырька в клетку. Проследим движение молекул кислорода от пузырька к клетке и диоксида углерода в обратном направлении. Обычно при абсорбции газов на поверхности пузыря концентрации компонентов газовой фазы принимают равными их равновесным значениям, соот-

ветствующим данной температуре и давлению в аппарате. На рис 3.5 концентрация кислорода у поверхности пузыря равна  $C_{O_2}^*$ .

В пределах диффузионного слоя  $\delta_{\Pi}$  концентрация кислорода снижается до среднего его значения в культуральной среде  $\bar{C}_{O_2}$ . В аппаратах идеального перемешивания  $\bar{C}_{O_2} = \text{const}$  по объёму жидкости, в аппаратах идеального вытеснения – она переменна. Численная величина средней концентрации будет определяться скоростью потребления кислорода клетками и не должна быть меньше критического значения, определяемого уравнением [21]

$$C_{\text{кр}O_2} = 0,1 C_{O_2}^* .$$

В слое  $\delta_{\text{к}}$  концентрация кислорода меняется от  $\bar{C}_{O_2}$  до его концентрации у поверхности клетки  $C_{\text{к}O_2}$ . Каково её численное значение, сказать трудно. Но поскольку клетки постоянно потребляют кислород, то в первом приближении можно принять  $C_{\text{к}O_2} = 0$ .

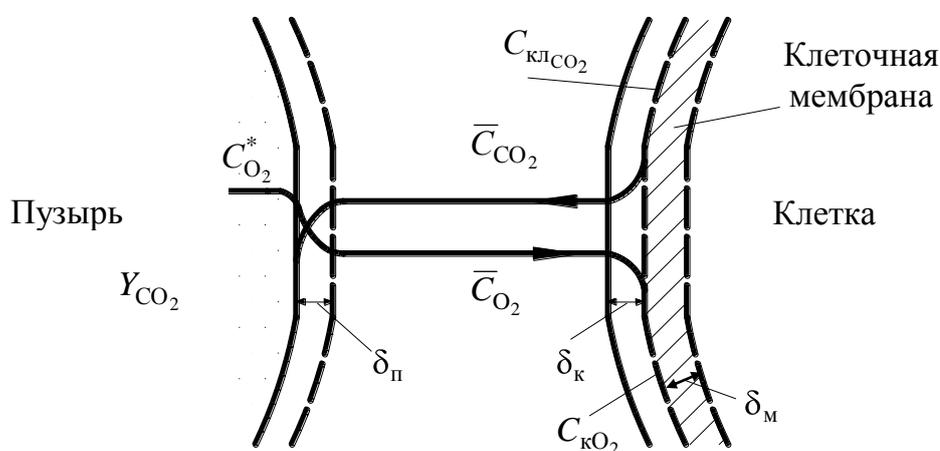


Рис. 3.5. Схема распределения концентраций кислорода и диоксида углерода между клеткой и пузырьком

На скорость транспортирования кислорода из газового пузыря в клетку будет влиять сопротивление клеточной мембраны. Однако влияние клеточной мембраны не зависит от внешних условий и является свойством только самой клетки. Процессы переноса массы через

клеточную мембрану ещё мало исследованы. Они занимают особое место в изучении развития клеток и в данном курсе подробно не рассматриваются. Существует несколько интересных моделей транспорта субстрата через клеточную оболочку. При желании с ними можно познакомиться в работах [19–21].

Уравнение (3.51) выражает закон молекулярной диффузии Фика. Знак минус в нём означает распространение массы в направлении снижения концентрации.

Обратим внимание на идентичность уравнений (1.7), (3.9) и (3.51), характеризующих молекулярный перенос импульса, теплоты и массы соответственно. Позже мы установим эту аналогию и при конвективном переносе указанных субстанций.

В общем виде перенос массы описывается дифференциальным уравнением, вид которого аналогичен уравнению (3.6):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + r_i. \quad (3.52)$$

В векторной форме уравнение (3.52) примет вид

$$\frac{dC}{dt} + (\vec{u}, \text{grad } C) = D \nabla^2 C + r_i. \quad (3.53)$$

В уравнении (3.53) первое слагаемое левой части определяет перенос массы за счёт изменения концентрации во времени и характеризует нестационарность процесса, второе – конвективный перенос массы. Первое слагаемое правой части характеризует перенос массы молекулярной диффузией, второе – учитывает наличие в среде источника изменения. Например, при аэробном культивировании микроорганизмов происходит выделение диоксида углерода в культуральную среду в процессе размножения клеток. Концентрация вещества может измениться и в результате протекания химических реакций.

При отсутствии движения жидкости ( $\vec{u} = 0$ ) равенство (3.52) переходит в уравнение нестационарной молекулярной диффузии:

$$\frac{dC}{dt} = D \nabla^2 C + r_i. \quad (3.54)$$

В стационарных условиях производная  $dC/dt = 0$  и уравнение примет вид

$$D\nabla^2 C + r_i = 0. \quad (3.55)$$

При отсутствии внутренних источников массы уравнение (3.55) принимает вид

$$\nabla^2 C_i = 0. \quad (3.56)$$

Рассмотрим наиболее простые задачи стационарного и нестационарного массообмена между произвольной поверхностью и средой, решения которых основаны на уравнении (3.56).

### 3.3.3. Стационарный массообмен

**Плёночная модель.** Первая задача решается на основе так называемой плёночной модели, суть которой заключается в том, что у поверхности образуется неподвижная плёнка (слой) жидкости толщиной  $\delta$ . За пределами плёнки среда может двигаться ламинарно или турбулентно, в данном случае это не имеет значения. В этом неподвижном слое происходит изменение концентрации целевого компонента от  $C = C_{\text{гр}}$  на границе раздела фаз до  $C = \bar{C}$  за его пределами (см. рис. 3.1 или 3.5).

Для одномерной задачи уравнение (3.56) примет вид  $\partial^2 C / \partial x^2 = 0$ . Начало координаты  $x$  находится на границе поверхности и неподвижной плёнки. Проинтегрируем данное равенство дважды. В результате получим уравнение, которое линейно описывает профиль концентрации в неподвижном слое:

$$C = Ax + B. \quad (3.57)$$

Постоянные интегрирования находят на основании граничных условий: при  $C_{x=0} = C_{\text{гр}}$   $C_{x=\delta} = \bar{C}$ . Из уравнения (3.57) и граничных условий следует  $C_{\text{гр}} = A \cdot 0 + B$  и  $\bar{C} = A\delta + B$ . Из полученных равенств находим константы:  $B = C_{\text{гр}}$  и  $A = (\bar{C} - C_{\text{гр}}) / \delta$ . Из равенства (3.57) с учётом постоянных следует

$$C = C_{\text{гр}} - \frac{(C_{\text{гр}} - \bar{C})x}{\delta}. \quad (3.58)$$

Совместное решение уравнений (3.51) и (3.58) даёт выражение для определения массового потока молекулярной диффузией через неподвижную плёнку:

$$j = -D \frac{dC}{dx} \Big|_{x=0} = D \frac{C_{\text{гр}} - \bar{C}}{\delta}. \quad (3.59)$$

Следует обратить внимание на то, что в уравнении (3.59), полученном на основе плёночной модели, массовый поток пропорционален коэффициенту молекулярной диффузии в первой степени. Входящая в уравнение (3.59) толщина плёнки определяется экспериментально. Однако эксперименты не подтвердили прямую пропорциональность зависимости величины потока массы от коэффициента молекулярной диффузии, т. е. плёночная модель, согласно которой происходит резкий переход от неподвижного слоя к движущейся жидкости, не отражает реальную картину гидродинамической обстановки в аппарате. Другая модель, более точно учитывающая влияние условий гидродинамики на перенос массы, – модель обновления поверхности.

### 3.3.4. Нестационарный массообмен

**Модель обновления поверхности.** Данная модель предполагает наличие турбулентного ядра в потоке жидкости (перенос массы в турбулентной среде будет рассмотрен позднее), здесь же предстоит рассмотреть суть модели обновления. Предполагается, что определённые объёмы жидкости турбулентными пульсациями из ядра могут переноситься к поверхности раздела фаз и находиться некоторое время около поверхности в неподвижном состоянии. Затем этот объём жидкости уходит от поверхности в турбулентное ядро, а его место у поверхности занимает следующий объём.

Принято считать, что на поверхности раздела фаз концентрация целевого компонента  $C_{\text{гр}} = \text{const}$ , а в подошедшем к поверхности объёме жидкости она равна концентрации в турбулентном ядре потока  $\bar{C}$ . Таким образом, перенос массы от поверхности контакта фаз

происходит периодически в неподвижную жидкость за счёт молекулярной диффузии, т. е. имеет место нестационарная диффузия, скорость которой, при отсутствии внутренних источников массы, может быть определена из уравнения (3.56). Для одномерной задачи запишем

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \quad C_{t=0} = \bar{C}, \quad C_{x=0} = C_{\text{гр}}, \quad C_{x=\infty} = \bar{C}. \quad (3.60)$$

Интегрирование уравнения (3.60) в конечном итоге позволяет получить уравнение для вычисления удельного диффузионного потока:

$$j = -D \frac{dC}{dx} \Big|_{x=0} = (C_{\text{гр}} - \bar{C}) \sqrt{\frac{D}{\pi \tau}}. \quad (3.61)$$

Согласно уравнению (3.61), массовый поток пропорционален коэффициенту молекулярной диффузии в степени 0,5. Полученное уравнение в большей степени удовлетворяет экспериментальным данным, чем уравнение (3.59). С более подробным выводом уравнения (3.61) можно познакомиться в работе [17, с. 354].

### 3.4. Аналогия между процессами переноса

Сравнивая уравнения переносов субстанций, обратим внимание на их сходство, называемое аналогией. Для наглядности запишем уравнения (1.32), (3.7) и (3.53) рядом:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \text{ grad } \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p;$$

$$\frac{dT}{dt} + (\vec{u}, \text{ grad } T) = a \nabla^2 T + \frac{q_r}{\rho c_p};$$

$$\frac{dC}{dt} + (\vec{u}, \text{ grad } C) = D \nabla^2 C + r_i.$$

Первые слагаемые левых частей всех равенств характеризуют нестационарность процессов переноса, вторые – конвективные про-

цессы переноса субстанций, связанные с перемещением элементов жидкости в пространстве. Первые слагаемые правых частей равенств характеризуют молекулярный перенос субстанций. Отсутствие в уравнениях (3.7) и (3.53) слагаемых, характеризующих в уравнении (1.32) силы массовые и давления, объясняется отсутствием влияния последних на распределение температур и концентраций в рассматриваемых нами средах. Входящие в уравнения (3.7) и (3.53) слагаемые, которые определяют в потоке жидкости величину внутренних источников теплоты и массы, непосредственно не входят в уравнение (1.32), однако они опосредованно будут влиять на физические свойства среды и скорость её движения.

Из всего сказанного следует важный вывод: при решении задач, связанных с переносом теплоты и массы, необходимо знать закон распределения скоростей в потоке. Кроме того, требуются уравнения, описывающие зависимость среды от её состава и температуры.

В дальнейшем мы воспользуемся методом аналогии при решении некоторых задач переноса теплоты и массы и определим границы его применимости, так как полной аналогии между переносом количества движения и переносом теплоты и массы, конечно, нет.

### Критерии подобия теплообменных и массообменных процессов

Подобие процессов переноса теплоты и массы заключается в подобии температурных и концентрационных полей. Для получения критериев подобия не будем приводить уравнения (3.7) и (3.53) к безразмерному виду, а воспользуемся упрощённой методикой отношений переноса тепла и массы конвекцией к молекулярному переносу этих субстанций.

**Тепловые критерии подобия.** Аналогично действиям, выполненным при получении критерия Рейнольдса, из уравнения (3.7) можно записать пропорциональность между конвективным и молекулярным переносом теплоты:

$$u \frac{T}{L} \approx a \frac{T}{L^2}.$$

Отношение левой части пропорциональности к правой даёт критерий

$$\frac{uL}{a} = \text{Pe}, \quad (3.62)$$

называемый критерием Пекле. Он аналогичен критерию Рейнольдса и характеризует отношение скоростей переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью.

Деление или произведение критериев даёт другой критерий. Так, от деления критерия Пекле на критерий Рейнольдса получается критерий Прандтля, определяющий подобие скоростных и температурных полей:

$$\frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{v}{a} = \mu \frac{c_p}{\lambda} = \text{Pr}. \quad (3.63)$$

При моделировании тепловых процессов важную роль играет критерий, характеризующий соотношение скоростей переноса теплоты в пристенном слое теплоотдачей и теплопроводностью. Представим уравнение (3.4) в виде пропорциональности

$$\alpha \Delta T \approx \lambda \frac{\Delta T}{L}.$$

Деление правой части пропорциональности на левую часть даёт безразмерный критерий подобия

$$\frac{\alpha L}{\lambda} = \text{Nu}, \quad (3.64)$$

называемый критерием Нуссельта.

Пока ограничимся полученными критериями теплового подобия. В дальнейшем при изучении различных случаев теплообмена расширим их перечень.

**Диффузионные критерии подобия.** Критерии подобия массообменных процессов получают аналогично тепловым с заменой в последних теплового коэффициента молекулярного переноса на коэффициент диффузии. В таком случае диффузионные критерии подо-

будут иметь следующий вид (диффузионные критерии Пекле, Прандтля и Нуссельта):

$$Pe_D = \frac{uL}{D}; \quad (3.65)$$

$$Pr_D = \frac{\nu}{D}; \quad (3.66)$$

$$Nu_D = \frac{\beta_m L}{D}, \quad (3.67)$$

где  $\beta_m$  – коэффициент массоотдачи (массообмена), характеризующий скорость переноса массы в диффузионных пристеночных слоях, его размерность – квадратный метр в секунду ( $m^2/c$ ).

## 4. КОНВЕКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ И МАССЫ

Процессы переноса теплоты и массы при ламинарном режиме течения описываются уравнениями (3.7) и (3.53). С подробными решениями таких задач можно ознакомиться в работах [16, 17, 26]. Поэтому здесь мы не будем их рассматривать, отметим лишь, что температура по сечению ламинарного потока изменяется по линейному закону.

Чаще приходится иметь дело с процессами переноса в турбулентных потоках; решение задач переноса теплоты и массы в турбулентном режиме течения представляет для нас значительно больший интерес, к тому же они более сложны.

Существует три подхода к решению подобных задач: эмпирический, аналитический и полуэмпирический. Рассмотрим кратко каждый из них.

### 4.1. Эмпирический метод решения задач тепло- и массообмена

Эмпирический метод базируется на экспериментальных данных, теории подобия и размерностей. Результатом экспериментальных исследований являются, как правило, критериальные уравнения, которые по виду входящих в них критериев могут существенно различаться.

При исследовании теплообмена критериальные уравнения для расчета коэффициентов теплоотдачи (без изменения агрегатного состояния жидкости) обычно приводятся к виду

$$\text{Nu} = A \text{Re}^m \text{Pr}^n \left( \frac{\mu}{\mu_{\text{ст}}} \right)^q \Gamma^p. \quad (4.1)$$

Коэффициент  $A$  и показатели степени  $m$  и  $n$  в общем случае переменны и зависят от конструкции аппарата, пределов изменения критериев  $\text{Re}$  и  $\text{Pr}$  во время экспериментов, степени турбулентности среды. Безразмерный параметр  $\Gamma$  характеризует влияние на теплообмен геометрических размеров аппаратов, отношение коэффициентов вязкости (или чисел Прандтля) и направление теплового потока.

Критериальные уравнения массообмена по форме напоминают уравнение (4.1), однако существенно различаются по виду входящих в них критериев. В неявном виде уравнение массообмена выглядит следующим образом:

$$\text{Nu}_D = f(\text{Re}; \text{Pr}_D; \text{Fr}; \text{Ga}; \text{Bo}). \quad (4.2)$$

Явный вид уравнений у разных авторов представлен по-разному и отличается по количеству критериев. Все зависит от конструкции аппаратов и гидродинамической обстановки в них. Выбор характерных размеров зависит от конкретно решаемых задач. Рассмотрим некоторые из них.

#### 4.1.1. Теплообмен при движении однофазных жидкостей

**Теплообмен при течении в трубах.** Одно из наиболее ранних уравнений вида (4.1) было предложено Нуссельтом:

$$\text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4}.$$

Позднее Михеев уточнил уравнение Нуссельта, введя в него множитель, учитывающий направление теплового потока, после чего оно приняло вид

$$\text{Nu} = 0,021 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,43} \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_{\text{ст}}} \right)^{0,25}. \quad (4.3)$$

**Теплообмен при течении в спиральном змеевике.** Для расчета  $\alpha$  можно воспользоваться уравнением [8, с. 128]

$$\alpha_{\text{зм}} = \alpha \left( 1 + 3,54 \frac{d_{\text{тр}}}{D_{\text{зм}}} \right), \quad (4.4)$$

где  $\alpha$  рассчитывается по уравнению (4.3);  $d_{\text{тр}}$  – внутренний диаметр трубы змеевика;  $D_{\text{зм}}$  – диаметр витка змеевика.

**Теплообмен в аппарате с мешалкой.** При теплообмене через рубашку в уравнении (4.1)  $A = 0,36$ ,  $m = 0,67$ ,  $n = 0,33$ ,  $q = 0,14$ ,  $p = 1$ ; при теплообмене между перемешиваемой средой и наружной по-

верхностью змеевика  $A = 0,83$ ,  $m = 0,62$ ,  $n = 0,33$ ,  $q = 0,14$ ,  $p = 1$ .

В аппаратах с мешалками  $Re = \frac{nd_M^2}{\nu}$ ;  $\Gamma = \frac{d_M}{D_a}$ , где  $d_M$  – диаметр мешалки;

$D_a$  – диаметр аппарата;  $n$  – число оборотов мешалки. Для пропеллерных и лопастных мешалок  $\Gamma = 2,5 \div 4$  [8, с. 134], физические свойства жидкости выбираются при средней температуре.

**Теплообмен при течении жидкостей в пластинчатых аппаратах.** Значения коэффициента  $A$  и показателей степеней  $m$  и  $n$  в уравнении (4.1) зависят от типа пластин, формы гофр и пределов изменения критериев Рейнольдса и Прандтля;  $q = 0,14$ ;  $p = 0$  [27, с. 143–154].

Для наиболее распространенных типов пластин значения  $A$ ,  $m$  и  $n$  приведены в прил. 5.

#### 4.1.2. Теплообмен при движении газожидкостных потоков

**Теплообмен между стенкой теплообменного аппарата и газожидкостным потоком.** При расчете коэффициентов теплообмена при движении газожидкостных потоков также пользуются уравнениями типа (4.1), однако критерий Рейнольдса различные авторы выражают по-разному. Некоторые авторы [9, с. 108] при обработке опытных данных по теплообмену между стенкой аппарата и газожидкостной смесью в качестве гидродинамического подобия используют критерий Рейнольдса для смеси:

$$Re_{см} = \frac{w_{ж}d}{\nu_{ж}} + \frac{w_{г}d}{\nu_{г}}. \quad (4.5)$$

Примером такого подхода для получения критериальных уравнений может служить уравнение

$$Nu = A Re_{см}^m Pr^{0,43} \left( \frac{Pr}{Pr_{ст}} \right)^{0,14}. \quad (4.6)$$

Значения коэффициента  $A$  и показателей степени  $m$  и  $n$  зависят от структуры газожидкостного потока и даются в табличной форме [9].

В уравнении

$$\text{Nu} = A \text{Re}_{\text{см}}^{0,55} \text{Pr}^{0,33} \left( \frac{\mu_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ст}}} \right)^{0,14} \left( \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{0,17} \quad (4.7)$$

критерий Рейнольдса представлен в ином виде:  $\text{Re}_{\text{см}} = \text{Re}_{\text{ж}} \left( 1 - \varphi_{\text{Г}} \right)$ .

В уравнении (4.7) коэффициент  $A$  зависит от направления движения. Для восходящего потока  $A = 0,43$ ; для нисходящего потока  $A = 0,47$ . Последнее означает, что скорость переноса теплоты в нисходящих трубах выше, чем в восходящих. Подтверждение этому можно найти также в работах [9, 10]. Введение в критериальные уравнения критерия Рейнольдса для систем газ–жидкость, как уже говорилось в разд. 2, трудно объяснить.

Во всех приведенных уравнениях вызывает сомнение зависимость  $\alpha$  от физических свойств газа. Эти сомнения высказывают и некоторые авторы [9, 10], которые, используя в экспериментах кроме воздуха водород и азот, не обнаружили различия во влиянии их физических свойств на коэффициент теплоотдачи. Эти данные подтверждают предположение о том, что газовая фаза является только источником турбулентных возмущений.

#### ***Теплообмен между клеткой и газожидкостной смесью.***

В данной задаче клетка рассматривается в виде твердого тела, находящегося либо в однофазной жидкости, либо в газожидкостной смеси. Сразу следует оговориться, что экспериментальные исследования в этой области, по сути, отсутствуют. Имеются лишь данные по теплообмену между твердыми частицами и однофазной жидкостью [4, 7]. Значение коэффициента теплообмена между клеткой и газожидкостной смесью можно оценить, используя уравнения, полученные полуэмпирическим методом. Эти вопросы будут рассмотрены ниже.

***Массообмен между газом и жидкостью.*** Явный вид критериального уравнения (4.2) зависит от конструкции аппарата, условий проведения экспериментов, пределов изменения входящих в них критериев. Так, например, Akita и Ioshida дают уравнение массоотдачи в барботажных аппаратах в следующем виде:

$$\text{Nu}_D = 0,5 \text{Bo}^{0,375} \text{Ga}^{0,25} \text{Pr}_D^{0,5}, \quad (4.8)$$

где  $Nu_D = \frac{\beta_{\text{ж}} d_{\text{п}}}{D}$  – диффузионный критерий Нуссельта (Шервуда),  
здесь  $d_{\text{п}}$  – диаметр пузыря,  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии;  
 $Bo = \frac{g d_{\text{п}}^2 \rho_{\text{ж}}}{\sigma}$  – критерий Бонда;  $Ga = \frac{g d_{\text{п}}^3}{\nu_{\text{ж}}^2}$  – критерий Галилея;  
 $Pr_D = \frac{\nu_{\text{ж}}}{D}$  – диффузионный критерий Прандтля (Стентона).

#### ***Массообмен между клеткой и газожидкостной смесью.***

Данных по массообмену между клеткой и газожидкостной смесью ещё меньше, чем по теплообмену. В литературе встречаются лишь данные по массообмену между жидкостью и твёрдыми частицами, размер которых на несколько десятичных порядков больше размеров клетки. Так, в работе [28, с. 159] приводятся результаты экспериментальных исследований по растворению гранул мочевины в водно-глицериновых растворах (с целью имитации культуральной среды) в аппаратах с мешалками, с аэрацией и без неё. Установлено, что при одинаковых числах оборотов мешалки коэффициент массообмена между твердой частицей и жидкостью  $\beta_{\text{к}}$  при аэрации выше, чем при перемешивании без аэрации. Кроме того, установлено, что  $\beta_{\text{к}} \sim Re_{\text{ц}} = \left( d_{\text{м}} / \nu \right)^{0,65}$ . Эти опыты показывают, что интенсивность массообмена между твёрдой частицей и жидкостью зависит от гидродинамических условий. К сожалению, задача по установлению зависимости  $\beta_{\text{к}}$  от гидродинамических параметров до конца не решена и уравнение для расчета  $\beta_{\text{к}}$  в условиях аэрации не получено.

Заканчивая анализ критериальных уравнений, полученных эмпирическим методом, можно сделать следующие выводы:

- они достаточно просты по форме, однако пригодны только для использования в расчетах аппаратов, работающих в условиях, близких к эксперименту;
- они не раскрывают полностью физической сути процессов, протекающих в аппаратах.

## **4.2. Аналитический и полуэмпирический методы**

***Аналитический*** метод основан на решении дифференциальных уравнений турбулентного переноса импульса, теплоты и массы.

Пренебрегая в уравнении переноса импульса массовой силой, запишем уравнения переноса, для краткости изложения, только в проекции на координатную ось  $x$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} - \overline{\rho u'_x u'_x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \overline{\rho u'_x u'_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \overline{\rho u'_x u'_z} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{1}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho c_p \overline{u'_x T'} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \overline{u'_y T'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho c_p \overline{u'_z T'} \right) \right]; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \overline{u'_x c'} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} - \overline{u'_y c'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} - \overline{u'_z c'} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\bar{u}_x$ ,  $\bar{u}_y$  и  $\bar{u}_z$  – проекции вектора осреднённой локальной скорости на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ ;  $T$  – температура;  $C$  – концентрация.

К системе уравнений (4.9)–(4.11) добавляют уравнение сплошности потока (1.5а).

Решение системы уравнений (4.9)–(4.11) в представленном виде невозможно в силу двух основных причин: во-первых, их нелинейности, а во-вторых, отсутствия необходимых данных для определения пульсационных составляющих скорости  $u'$ , температуры  $T'$  и концентрации  $c'$ . Поэтому данные уравнения служат основой полуэмпирических решений.

**Полуэмпирические методы** основаны, прежде всего, на четко представленной физической модели процесса. К математическому

описанию физической модели имеются различные подходы. Одни авторы используют для этой цели систему уравнений переноса импульса, теплоты и массы вида (4.9)–(4.11), как это делается в работе [10]. Другие прибегают к уравнениям ламинарного пограничного слоя с распространением полученных решений на турбулентные течения с помощью модели крупномасштабных турбулентных вихрей (пульсаций) [7].

Мы воспользуемся первым вариантом, применив метод аналогии между переносом импульса, теплоты и массы, который успешно использован многими исследователями при решении задач тепло- и массообмена в турбулентных потоках [9, 10].

Следует отметить, что ряд известных ученых относятся к методу аналогии критически, считая его несовершенным, а порой даже ошибочным [13, 26]. О причинах расхождения во мнениях между учеными будет сказано несколько позднее.

Рассмотрим полуэмпирический метод подробнее. Для упрощения решения задачи перейдем от пространственной модели к плоской. Так как  $u_y = u_z = 0$  и из уравнения сплошности  $\partial u_x / \partial x = 0$ , то уравнения (4.9)–(4.11) примут следующий вид:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{\rho u'_x u'_y} \right); \quad (4.12)$$

$$\bar{u}_x \rho c_p \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{d}{dy} \left( \lambda \frac{d\bar{T}}{dy} - \rho c_p \overline{u'_y T'} \right); \quad (4.13)$$

$$\bar{u}_x \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dy} \left( D \frac{d\bar{c}}{dy} - \overline{u'_y c'} \right). \quad (4.14)$$

Выражения в скобках уравнений (4.12)–(4.14) – это полное касательное напряжение (удельный поток количества движения)  $\tau$ , полный удельный тепловой поток  $q$  и полный удельный поток массы  $m$ , т. е.

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{\rho u'_x u'_y}; \quad (4.15)$$

$$q = \lambda \frac{d\bar{T}}{dy} - \rho c_p \overline{u_y T'}; \quad (4.16)$$

$$m = D \frac{d\bar{c}}{dy} - \overline{u_y C'}. \quad (4.17)$$

Решение уравнений (4.15)–(4.17) сводится, по сути, к поиску зависимости пульсационных составляющих от параметров турбулентного потока. Не вдаваясь в подробности выводов (при желании ознакомиться с ними можно в работах [6, 18]), остановимся на главном.

Пульсации скорости выражаются уравнениями (2.72). Аналогично пульсациям скорости можно выразить пульсации температуры и массы:

$$T' = k_{2T} l_t \frac{d\bar{T}}{dy}; \quad C' = k_{2m} l_t \frac{d\bar{c}}{dy}. \quad (4.18)$$

С учетом равенств (4.18) турбулентные составляющие переноса импульса, теплоты и массы будут равны:

$$\tau_t = -\rho \overline{u_x u_y'} = -l^2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2; \quad (4.19)$$

$$q_t = -\overline{u_y T'} = -\rho c_p l_T^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{d\bar{T}}{dy}; \quad (4.20)$$

$$m_t = -\overline{u_x C'} = -l_c^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{d\bar{c}}{dy}, \quad (4.21)$$

где  $l = l_t \sqrt{k_1 k_2}$ ,  $l_T = l_t \sqrt{k_2 k_{2T}}$  и  $l_c = l_t \sqrt{k_2 k_{2m}}$  называются длиной пути перемешивания, соответственно, для переноса импульса, теплоты и массы.

Значения  $l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \varepsilon$ ,  $l_T^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \varepsilon_T$  и  $l_c^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \varepsilon_m$  названы коэффициентами турбулентного обмена и являются аналогами кинематического коэффициента вязкости, температуропроводности и диффузии. Различия между молекулярными и турбулентными значениями коэффициентов заключаются в том, что первые являются физическими константами, не зависящими от гидродинамики, а вторые определяются только гидродинамическими условиями. Подставив в уравнения (4.19)–(4.21) значения  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_T$  и  $\varepsilon_m$ , получим:

$$\tau_t = -\rho\varepsilon \frac{d\bar{u}_x}{dy}; \quad (4.22)$$

$$q_t = -\rho c_p \varepsilon_T \frac{d\bar{T}}{dy}; \quad (4.23)$$

$$m_t = -\varepsilon_m \frac{d\bar{c}}{dy}. \quad (4.24)$$

После подстановки значений  $\tau_t$ ,  $q_t$  и  $q_m$  в уравнения (4.19)–(4.21) имеем

$$\tau = \rho\nu\left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \frac{d\bar{u}_x}{dy}; \quad (4.25)$$

$$q_t = \rho c_p a \left(1 + \frac{\varepsilon_T}{a}\right) \frac{d\bar{T}}{dy}; \quad (4.26)$$

$$m = D \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{D}\right) \frac{d\bar{c}}{dy}. \quad (4.27)$$

Дальнейшие преобразования уравнений (4.25)–(4.27) связаны с приведением их к безразмерному виду с использованием универсальных координат:

– безразмерной скорости

$$\varphi = \frac{\bar{u}_x}{u_*}; \quad (4.28)$$

– безразмерной координаты

$$\eta = \frac{u_* y}{\nu}. \quad (4.29)$$

Безразмерную разность температур и концентраций выражают в виде равенств

$$\psi = \frac{u_* \Delta T \rho c_p}{q}; \quad (4.30)$$

$$\psi_m = \frac{u_* \Delta c}{m}. \quad (4.31)$$

С учётом того, что отношения  $q/\Delta T = \alpha$  и  $m/\Delta c = \beta_{ж}$ , уравнения (4.30) и (4.31) можно привести к следующему виду:

$$\psi = \frac{u_* c_p \rho}{\alpha}. \quad (4.32)$$

$$\psi_m = \frac{u_*}{\beta_{ж}}, \quad (4.33)$$

где  $\alpha$  – локальное значение теплоотдачи в произвольной точке теплопередающей поверхности;  $\beta_{ж}$  – локальное значение коэффициента массоотдачи.

Используя безразмерные универсальные координаты, приведем уравнения (4.25)–(4.27) к такому виду:

$$1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \frac{d\varphi}{d\eta}; \quad (4.34)$$

$$1 = \left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \frac{d\psi}{d\eta}; \quad (4.35)$$

$$1 = \left(\frac{1}{Pr_D} + \frac{1}{Pr_{tD}} \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \frac{d\psi_m}{d\eta}, \quad (4.36)$$

где  $Pr_t = \varepsilon / \varepsilon_T$  и  $Pr_{tD} = \varepsilon / \varepsilon_m$  называются турбулентными тепловыми и диффузионными числами Прандтля.

Интегрируя уравнения (4.35) и (4.36), найдем законы распределения температур или концентраций по сечению потока у твердой поверхности:

$$\psi = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \frac{\varepsilon}{\nu}(\eta)}; \quad (4.37)$$

$$\psi_m = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\frac{1}{Pr_D} + \frac{1}{Pr_{tD}} \frac{\varepsilon}{\nu}(\eta)}. \quad (4.38)$$

**Теплообмен и массообмен между газовой и жидкостной фазами.** До сих пор мы имели дело с процессами тепло- и массообмена между твёрдой стенкой и движущейся около неё жидкостью. В пищевой и микробиологической технологии часто приходится иметь дело с процессами абсорбции и десорбции газов. В качестве примеров приведём насыщение напитков диоксидом углерода, растворение кислорода в культуральной жидкости, отвод из культуральной среды летучих продуктов метаболизма в процессе аэробного культивирования микроорганизмов и т. п.

При теплообмене и массообмене между газом и жидкостью безразмерная разность температур и концентраций может быть определена на основе модели колеблющейся поверхности контакта фаз, суть которой изложена в подразд. 2.6.5. Согласно этой модели, процесс переноса массы и теплоты из одной фазы в другую происходит в условиях колебания поверхности пузырей под действием турбулентных пульсаций, функция  $\varepsilon/\nu(\eta)$  выражается зависимостью

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \bar{f} + f\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right). \quad (4.39)$$

С учётом равенства (4.39) уравнение (4.38), к примеру, можно представить в следующем виде:

$$\psi_m = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\bar{f} + \frac{1}{Pr_D} + \frac{1}{Pr_{tD}} \frac{\varepsilon}{\nu}(\eta)}. \quad (4.40)$$

Решение интегралов (4.37), (4.38) и (4.40) требует раскрытия неявного вида функции  $\varepsilon/\nu(\eta)$ , описывающей изменение турбулентных пульсаций у твердой стенки, знание величины турбулентного числа Прандтля и также значения параметра межфазной турбулентности  $\bar{f}$ . Задача, связанная с нахождением параметра  $\bar{f}$ , будет решена в подразд. 5.3.3. Сейчас же рассмотрим основные закономерности распределения турбулентных пульсаций в турбулентных потоках.

### 4.3. Краткие сведения о законах распределения турбулентных пульсаций

Двухслойная модель Прандтля и полученные на ее основе уравнения позволяют с достаточной для инженерной практики точностью рассчитать потери энергии по длине трубопровода. Однако эта модель непригодна для решения иных задач переноса теплоты и массы при турбулентных режимах движения жидкости. Причина заключается в том, что при турбулентном режиме сопротивление переносу импульса сосредоточено в пограничном с поверхностью гидродинамическом слое, в котором течение жидкости принято считать ламинарным. Сопротивление переносу теплоты и массы сосредоточено в тепловом диффузионном пристенном слое. Связь между тепловым и гидродинамическим пристенными слоями устанавливается зависимостями

$$\delta_T = \delta Pr^{-m}; \quad (4.41)$$

$$\delta_D = \delta Pr_D^{-m}, \quad (4.41a)$$

где  $\delta_T$ ,  $\delta_D$  и  $\delta$  – толщина теплового, диффузионного и гидродинамического пристенных слоев;  $m$  – показатель степени, в общем случае величина переменная.

Из уравнений (4.41) и (4.41a) видно, что тепловой и диффузионный слои тоньше гидродинамического. Поэтому малейшая их тур-

булизация приводит к значительной интенсификации процессов переноса теплоты и массы. И чем выше число Прандтля, тем сильнее влияние турбулентных пульсаций на скорость переноса теплоты.

Согласно двухслойной модели, турбулентные пульсации становятся равными нулю при  $\eta_\delta = 11,5$  [см. уравнение (2.82)]. Однако разграничение потока на две зоны (с разным характером движения жидкости) не отвечает реальной картине турбулентного переноса импульса. Эксперименты показали, что функция  $\varphi(\eta)$  изменяется по сечению потока плавно.

Карман [10], стремясь устранить недостатки модели Прандтля, ввел промежуточный слой, предложив тем самым трехслойную модель турбулентного течения, согласно которой распределение турбулентной вязкости по сечению потока описывается системой трёх уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\nu} &= 0 \text{ при } \eta < 5; \\ \frac{\varepsilon}{\nu} &= \frac{\eta}{5} - 1 \text{ при } 5 \leq \eta \leq 30; \\ \frac{\varepsilon}{\nu} &= \frac{\eta}{2,5} - 1 \text{ при } \eta > 30. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Решение задач теплообмена и массообмена на основе уравнений (4.42) показало хорошую сходимость экспериментальных коэффициентов теплоотдачи со значениями, полученными теоретическим путем, до значений чисел  $Pr \leq 10$ , при  $Pr = 1$ . При  $Pr > 10$  ошибка становится слишком велика, чтобы рекомендовать модель Кармана к использованию в инженерных расчётах. Причем с увеличением числа Прандтля ошибка возрастает.

Несоответствие между опытными и теоретическими значениями  $\alpha$  кроется в несовершенстве модели Кармана. Карман так же, как и Прандтль, считал, что у стенки существует слой жидкости, в котором турбулентные пульсации отсутствуют и  $\varepsilon/\nu = 0$ . Чтобы устранить противоречие между экспериментом и теорией, было высказано предположение, что турбулентные пульсации проникают в пристеночный слой и становятся равными нулю только на поверхности стенки [10, 12, 13, 29].

Установлено, что основное сопротивление переносу теплоты и массы сосредоточено в тонком тепловом (диффузионном) пристеночном слое. Согласно равенствам (4.41) и (4.41a), при  $Pr \gg 1$  толщина теплового (диффузионного) слоя значительно меньше гидродинамического, вследствие чего даже малейшая турбулизация теплового (диффузионного) слоя приводит к резкой интенсификации процессов переноса. Чтобы исправить недостатки модели Кармана, был предложен её видоизменённый вариант, согласно которому турбулентные пульсации затухают у твердой стенки по закону четвертой степени [12, 13, 29, 30]:

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = 0,124\eta^4 \quad \text{при } \eta < 6;$$

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{5} - 1 \quad \text{при } 6 \leq \eta \leq 30; \quad (4.42a)$$

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{2,5} - 1 \quad \text{при } \eta > 30.$$

Дальнейшие исследования в области тепло- и массообмена шли в направлении уточнения закона затухания турбулентных пульсаций в пристеночных слоях.

Исследования в области тепло- и массообмена показали, что изменение турбулентных пульсаций вблизи стенки описывается степенной зависимостью

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = c\eta^b. \quad (4.43)$$

По поводу численного значения показателя степени  $b$  мнения авторов разделились. Одни из них придерживались так называемого закона четвертой степени, другие – третьей. Доказательство того или иного закона с помощью измерения профиля скорости в пристенных слоях сопряжено со значительными техническими трудностями. Поэтому обоснование своих выводов авторы строили, как правило, на основе исследований по теплообмену и массообмену.

При обработке экспериментальных данных получают, как уже говорилось ранее, критериальные уравнения вида (4.1) и (4.2). Во многих случаях в равенствах (4.41) и (4.41a) показатель степени  $m$

равен 0,33. Согласно полуэмпирической теории турбулентного переноса, показатель степени  $b$  в уравнении (4.43) связан с показателем  $m$  в уравнениях (4.41) и (4.41a) зависимостью  $m=1/b$ , и мы получим кубический закон затухания турбулентной вязкости в пристенном слое.

Следует иметь в виду, что степень достоверности подобных заключений выше у тех авторов, которые проводили исследования с более высокими числами  $Pr$ . Однако проведение опытов по теплообмену при  $Pr \gg 1$  и развитом турбулентном режиме – задача достаточно сложная, так как большие числа  $Pr$  имеют жидкости, обладающие высокой вязкостью. Добиться высокой степени турбулизации в таких средах – задача непростая.

Обычно при экспериментальных исследованиях теплообмена в турбулентных потоках числа  $Pr$  достигают не более 200–300. Поэтому доказательство того или иного закона опытами по теплообмену не всегда выглядит убедительным.

Большой достоверностью обладают выводы, сделанные на основе опытов по исследованию массообмена. Поскольку коэффициенты молекулярной диффузии могут быть в десятки раз ниже коэффициентов температуропроводности, диффузионные числа  $Pr_D = \nu/D$  превосходят значение  $Pr$  примерно во столько же раз. Поэтому доказательства справедливости того или иного закона, основанные на опытах по массообмену, более достоверны.

В этой связи необходимо обратить внимание на работы Кишиневского и его последователей [31], проводивших исследования массообмена в турбулентных потоках электрохимическим методом. Ими было показано, что закон четвертой степени в большей мере соответствует опытными данным.

Исследования по массообмену, выполненные в системах газ–жидкость, также показывают возможность применения закона четвертой степени при обработке опытных данных. Следует отметить, что закон четвертой степени отнюдь не исключает зависимости  $Nu \sim Pr^{0,33}$ . Он лишь предопределяет условие, что при  $Pr \rightarrow \infty$   $n \rightarrow 0,25$  и в определенном диапазоне изменения  $\eta$  и  $Pr$  показатель степени  $n$  может быть равным 0,33.

Из всего сказанного следует вывод: показатель степени  $n$  есть величина переменная, зависящая от физических свойств жидкости и степени турбулизации среды.

Для описания распределения турбулентных пульсаций у твердой стенки предложено большое количество разнообразных математических моделей. Некоторые из них представлены в прил. 6. Их можно разделить на два вида. Одни описывают изменение функции  $\varepsilon/\nu(\eta)$  послойно, другие – непрерывно.

Уравнения, непрерывно описывающие изменения турбулентных пульсаций, не имеют резких переломов функции  $\varepsilon/\nu(\eta)$  и в большей мере отражают реальную картину турбулентного потока. Однако они более сложны, и нельзя сказать, что более точны, поэтому многослойные модели при решении задач тепло- и массообмена используют чаще.

Предпочтение отдается системе уравнений № 2 в прил. 6. Ее недостатком является отсутствие сходимости функции  $\varepsilon/\nu(\eta)$  в граничных точках. И хотя указанный недостаток почти не сказывается на точности решаемых задач, все же делаются попытки подобрать для промежуточного слоя такие уравнения, которые бы позволили устранить неточности имеющихся зависимостей; в то же время профиль скорости, рассчитанный по ним, удовлетворял бы экспериментальным данным.

В качестве примера приведем систему уравнений, используемую автором работы [9], в которой затухание турбулентных пульсаций в промежуточном слое подчиняется закону второй степени.

Заканчивая анализ уравнений, описывающих изменение турбулентных пульсаций в пристеночных слоях, отметим, что при полуэмпирическом решении задач теплообмена выбор того или иного закона не оказывает существенного влияния на величины коэффициентов теплоотдачи.

#### 4.4. Турбулентные числа Прандтля

При решении интегралов (4.37) и (4.38), кроме выбора закона затухания турбулентных пульсаций, возникает еще одна немаловажная проблема – определение турбулентных чисел Прандтля  $Pr_t (Pr_{tD})$ .

Решение задачи тепло- и массообмена в турбулентных потоках на основе аналогии между переносом импульса и теплоты (массы) предполагает равенство коэффициентов турбулентного обмена:  $\varepsilon = \varepsilon_t = \varepsilon_D$ , т. е.  $Pr_t = Pr_{tD} = 1$ . Вокруг этого условия развернулась

не менее жаркая дискуссия, чем при выборе явного вида функции  $\varepsilon/\nu(\eta)$ .

Остановимся кратко на работах, связанных с исследованиями по нахождению турбулентных чисел Прандтля, и выясним, насколько обоснованно применение аналогии при решении задач тепло- и массообмена в турбулентных средах.

Пожалуй, наиболее полные сведения собраны и систематизированы в работе S. Sideman и W. Pinczewski [32], согласно которой численные значения  $Pr_t$  лежат в пределах от 0,1 до 2,5. Правда, данные различных авторов, приведённые в этой работе, в основном относятся к жидким металлам и газам, у которых  $Pr \leq 1$ . Что касается жидкостей, то здесь следует обратить внимание на результаты исследований Говена и Смитта, установивших, что для жидкостей с числами  $Pr = 5,7 \div 143$   $Pr_t = 0,8 \div 0,9$ .

С.С. Кутателадзе с сотрудниками [4], изучая влияние полимерных добавок на гидравлические потери и теплообмен, определили значения  $Pr_t$  по изменению профиля температур по сечению турбулентного потока. В результате было установлено, что по мере удаления от стенки  $Pr_t$  снижается от 1,6 до 0,9.

Несомненный интерес представляют работы Р.З. Адинберга, Дильмана и М. Jusclie [9], в которых приводятся уравнения для расчёта  $Pr_t$ .

В первом случае турбулентное число Прандтля зависит только от числа  $Pr$ :

$$Pr_t = Pr \left( 2^{\frac{1}{Pr}} - 1 \right); \quad (4.44)$$

во втором случае – не только от  $Pr$ , но и от критерия Рейнольдса:

$$Pr_t = 0,9 + \frac{182,4}{Pr Re^{0,888}}. \quad (4.45)$$

На основании уравнения (4.44) при изменении  $Pr$  от 1 до  $\infty$   $Pr_t$  меняется от 1 до 0,69. Согласно уравнению (4.45), при  $Pr = 1$  и  $Re = 2300$   $Pr_t = 1,1$ . С увеличением  $Pr$  и  $Re$  турбулентное число Прандтля  $Pr_t$  в пределе стремится к 0,9.

Анализ представленных работ показывает близость результатов различных авторов и позволяет сделать вывод о том, что значения  $Pr_t$  близки к единице, поэтому нет никаких оснований отвергать аналогию, как и метод решения задач тепло- и массообмена. Хотя следует признать, что полной аналогии, конечно, нет. Но этот недостаток компенсируется тем, что решения задач на основе аналогии носят полуэмпирический характер и требуют эмпирического определения коэффициентов пропорциональностей, которые и нивелируют допущенные упрощения.

Таким образом, учитывая всё сказанное выше, мы имеем полное право при решении различных задач тепло- и массообмена принять турбулентное число Прандтля равным единице.

До сих пор разговор шёл о тепло- и массообмене между твёрдой стенкой и движущимся вдоль неё турбулентным потоком. При тепло- и массообмене между турбулентной средой и находящимися в ней газовыми пузырьками или каплями жидкости их поверхность может деформироваться под действием турбулентных пульсаций и являться дополнительным источником турбулентности, характеризующим параметром межфазной турбулентности  $\bar{f}$  в уравнении (4.40). В дальнейшем будем рассматривать в основном газожидкостные потоки, основные понятия и определения которых даны в подразд. 2.6.

## 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА НА ОСНОВЕ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ПЕРЕНОСОМ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И ТЕПЛОТЫ И МАССЫ

Решение рассматриваемых задач будет сводиться к получению уравнений для расчёта коэффициентов тепло- и массообмена на основе уравнений (4.37), (4.38), (4.40).

При расчёте тепло- и массообменных аппаратов используют средние значения коэффициентов переноса. Они могут быть получены из уравнений (4.32) и (4.33). После их преобразования получим

$$\bar{\alpha} = \frac{u_* \lambda \rho \text{Pr}}{\mu \bar{\Psi}}; \quad (5.1)$$

$$\bar{\beta} = \frac{u_* D \rho \text{Pr}_D}{\mu \bar{\Psi}_m}. \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) можно представить в привычном безразмерном виде, выбрав предварительно характерный (определяющий) размер.

В случае теплообмена между теплопередающей поверхностью теплообменных элементов и омывающей её средой в качестве характерного размера выбирают диаметр аппарата  $d_a$ . Уравнение (5.1) можно записать в безразмерном виде:

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d_a}{\lambda} = 2 \eta_m \frac{\text{Pr}}{\bar{\Psi}}, \quad (5.3)$$

где  $\eta_m$  – безразмерный максимальный масштаб турбулентности, пропорциональный радиусу аппарата, т. е.

$$\eta_m = \frac{u_* d_a \rho}{2\mu}. \quad (5.4)$$

При изучении тепло- и массообмена между дисперсной и сплошной фазами за характерный размер рекомендуется принимать линейное значение масштаба турбулентности элемента дисперсной

фазы  $L_t$ . Каждый автор по-своему подходит к выбору характерного размера. Одни авторы чаще всего прибегают к наиболее простому варианту, принимая за характерный линейный размер масштаба турбулентности усреднённое значение диаметра дисперсной фазы  $d_d$ . В этом случае уравнение для вычисления безразмерного максимального масштаба турбулентности будет выглядеть аналогично уравнению (5.4):

$$\eta_{mc} = \frac{u_* d_d \rho_d}{2\mu_d}. \quad (5.5)$$

Другие авторы для расчёта характерного размера предлагают пользоваться уравнениями, в которые, кроме размера дисперсной фазы, входят еще и гидродинамические параметры. Для определения характерного размера дисперсной фазы в системе газ–жидкость в литературе встречаются уравнения вида (2.125). В таком случае максимальный масштаб турбулентности при исследовании тепло- и массообмена между культуральной средой и элементами дисперсной фазы в безразмерном виде можно выразить зависимостью

$$\eta_{md} = \frac{u_* d_d (1 - \varphi_d)}{\nu \beta \varphi_d}, \quad (5.6)$$

где  $d_d$  – размер дисперсной фазы;  $\varphi_d$  – объёмная доля дисперсной фазы.

В случае массообмена между газом и жидкостью  $d_d = d_p$ ,  $\varphi_d = \varphi_r$ . При тепло- и массообмене между клеткой и жидкостью  $d_d = d_k$ ,  $\varphi_d = \varphi_k$ . Различие в выборе характерного размера объясняется различием гидродинамических условий взаимодействия между дисперсной и сплошной фазами.

Ранее уже говорилось, что поверхность пузырей может деформироваться (колебаться) под действием турбулентных пульсаций. Причём линейный масштаб турбулентных пульсаций, деформирующей поверхность, будет тем больше, чем больше расстояние между пузырями. С увеличением газосодержания расстояние между пузырями уменьшается, в связи с чем снижается и вероятность деформации поверхности. Можно сказать, что отношение  $(1 - \varphi_r) / \varphi_r$  в равен-

стве (5.6) характеризует условия стесненности пузырей в турбулентной среде.

С клетками дело обстоит несколько иначе. Во-первых, поверхность клетки, в отличие от пузыря, не испытывает деформаций. Во-вторых, объёмная доля клеток  $\varphi_k$  в культиваторах намного меньше газосодержания. Поэтому условия стесненности не сказываются на скорости теплообмена и массообмена между клеткой и культуральной жидкостью.

С учётом предыдущих рассуждений запишем уравнения для определения тепловых и диффузионных критериев Нуссельта:

– при обмене между пузырьём и жидкостью

$$\text{Nu}_\Pi = \frac{\alpha_{ГЖ} d_\Pi (1 - \varphi_\Gamma)}{\lambda_T \varphi_\Gamma} = \eta_{m\Pi} \frac{\text{Pr}}{\bar{\Psi}_m}; \quad (5.7)$$

$$\text{Nu}_{D\Pi} = \frac{\beta_{ГЖ} d_\Pi (1 - \varphi_\Gamma)}{D \varphi_\Gamma} = \eta_{m\Pi} \frac{\text{Pr}_D}{\bar{\Psi}_m}; \quad (5.8)$$

– при обмене между клеткой и средой

$$\text{Nu}_k = \frac{\alpha_{КЖ} d_k}{\lambda_T} = 2\eta_{mk} \frac{\text{Pr}}{\bar{\Psi}}; \quad (5.9)$$

$$\text{Nu}_{Dk} = \frac{\beta_{КЖ} d_k}{D} = 2\eta_{mk} \frac{\text{Pr}_D}{\bar{\Psi}_m}. \quad (5.10)$$

Максимальный масштаб турбулентности для пузырей рассчитываем по уравнению (5.6), для клеток – по уравнению

$$\eta_{mk} = \frac{u_* d_k \rho}{2\mu}. \quad (5.11)$$

Средние безразмерные разности температур и концентраций  $\bar{\Psi}$  и  $\bar{\Psi}_m$  можно вычислить как средние интегральные величины:

$$\bar{\psi} = \frac{\int_0^{\eta_m} \psi(\eta) d\eta}{\eta_m}; \quad (5.12)$$

$$\bar{\psi}_m = \frac{\int_0^{\eta_m} \psi(\eta) d\eta}{\eta_m}. \quad (5.13)$$

Подынтегральные функции  $\psi(\eta)$  и  $\psi_m(\eta)$  находим из решения интегралов (4.37) или (4.38), в зависимости от условий теплообмена или массообмена, совместно с системой уравнений (4.42) (или любыми другими, взятыми из прил. 6). Для трёхслойной модели турбулентного потока решение интегралов (5.12) и (5.13) выразится суммой трёх интегралов.

В случае теплообмена решение будет иметь вид

$$\psi = \int_0^6 \frac{d\eta}{\frac{1}{\text{Pr}} + (0,124\eta)^4} + \int_6^{30} \frac{d\eta}{\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\eta}{5} - 1} + \int_{30}^{\eta} \frac{d\eta}{\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\eta}{2,5} - 1}. \quad (5.14)$$

Подставив значение  $\psi$  из уравнения (5.14) в уравнение (5.12), найдём среднюю величину безразмерной разности температур:

$$\bar{\psi} = \frac{\text{Pr}}{\eta_m} \left( \int_0^{\eta_m} \left( \int_0^6 \frac{d\eta}{1 + \text{Pr} (0,124\eta)^4} + \int_6^{30} \frac{d\eta}{1 + \text{Pr} (0,2\eta - 1)} + \int_{30}^{\eta} \frac{d\eta}{1 + \text{Pr} (0,4\eta - 1)} \right) d\eta \right). \quad (5.15)$$

Аналогичным образом можно найти среднее значение безразмерной концентрации  $\bar{\psi}_m$  из уравнения (5.13), заменив  $\text{Pr}$  на  $\text{Pr}_D$ .

Чтобы определить коэффициенты теплоотдачи из уравнения (5.3), необходимо предварительно рассчитать  $\eta_m$  по уравнению (5.4) и найти значение  $\bar{\psi}$  по уравнению (5.15). Для упрощения решения задачи функцию  $\text{Pr}/\bar{\psi} = f(\eta_m, \text{Pr})$  в уравнении (5.3) аппроксимируют зависимостью вида

$$\frac{\text{Pr}}{\bar{\psi}} = C \eta_m^n \text{Pr}^m. \quad (5.16)$$

Подставив зависимость (5.16) в уравнение (5.3), получим

$$\text{Nu} = A \eta_m^{1+n} \text{Pr}^m. \quad (5.17)$$

Уравнения (5.16) и (5.17) пригодны для расчёта коэффициентов теплообмена при движении как однофазных, так и многофазных потоков в любых аппаратах, так как они получены на основе общих положений полуэмпирической теории турбулентного переноса.

Попытаемся решить ряд конкретных задач, связанных с конвективным переносом теплоты в различных теплообменных аппаратах, с помощью математической модели, полученной на основе аналогии.

## 5.1. Теплообмен между потоком однофазной жидкости и гладкой теплопередающей поверхностью

### 5.1.1. Теплообмен в каналах с различной формой поперечного сечения

**Теплообмен в трубах с круглым поперечным сечением.** Решение задачи конвективного теплообмена между турбулентным потоком жидкости и теплопередающей поверхностью трубчатых теплообменников на основе аналогии между переносом импульса и теплоты, наиболее простое.

Обработка экспериментальных данных по теплообмену при движении в трубах однофазных [9, 10] и многофазных потоков позволила установить численные значения коэффициентов пропорциональности и показателей степеней в уравнениях (5.16) и (5.17).

В пределах изменения  $\eta_m$  от 100 до 2000 и  $\text{Pr}$  от 4 до 300 можно принять  $C = 0,09$ ;  $n = -0,05$ ;  $m = 0,33$ .

После подстановки значений  $C$ ,  $n$  и  $m$  в уравнение (5.17) получим

$$\text{Nu} = 0,18 \eta_m^{0,95} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.18)$$

Основным источником турбулентности в трубах является стенка, а величина турбулентных пульсаций будет определяться касательными напряжениями на стенке, которые рассчитываются по уравнению

$$\tau = \lambda \frac{\rho w^2}{8}. \quad (5.19)$$

Значение динамической скорости найдём из уравнения (2.68) путём подстановки в него уравнения (5.19):

$$u_* = w \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (5.20)$$

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  рассчитывается по известным в гидравлике формулам. Считая трубы гидравлически гладкими, запишем

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}. \quad (5.21)$$

Подставляя значение  $\lambda$  из формулы (5.21) в равенство (5.20), получим

$$u_* = w \frac{0,2}{\text{Re}^{0,125}}. \quad (5.22)$$

Из уравнений (5.4) и (5.22) следует

$$\eta_m = 0,1 \text{Re}^{0,875}. \quad (5.23)$$

Таким образом, мы установили связь между максимальным масштабом турбулентности и критерием  $\text{Re}$ . Если принять за границу перехода от турбулентного режима течения к ламинарному значение  $\text{Re}_{\text{кр}} = 2300$ , то из уравнения (5.23) получим граничное значение

$$\eta_{m_{\text{кр}}} = 87. \quad (5.24)$$

Критическое значение максимального масштаба турбулентности  $\eta_{m_{\text{кр}}}$  может служить оценкой отношения сил инерции, обуслов-

ленных турбулентными пульсациями, и сил вязкости не только в однофазных потоках, но и многофазных. Только при  $\eta_{m_{кр}} < 87$  говорить следует не о ламинарном течении, а о вязкостно-турбулентном, в котором силы вязкости играют первостепенную роль в формировании профиля скорости по сечению потока.

В дальнейшем будем полагать, что в многофазных потоках изменение турбулентных пульсаций подчиняется тем же законам, что и в однофазных.

После подстановки уравнения (5.23) в уравнение (5.18) получим

$$Nu = 0,0208Re^{0,83} Pr^{0,33} . \quad (5.25)$$

Уравнение (5.25) по виду схоже с уравнением Михеева (4.3). Примерно такого же вида уравнения можно найти в работе [8]. Строго говоря, показатель степени при  $Pr$  величина переменная и зависит от того, в каких пределах изменения  $Pr$  и  $\eta_m$  аппроксимируется функция  $Pr/\bar{\psi} = f(Pr, \eta_m)$  уравнением вида (5.16).

Следует обратить внимание на отсутствие в уравнении (5.25) параметра, учитывающего направление теплового потока, как это сделано в уравнении (4.3) и др. Это связано с тем, что выбор или расчёт физических свойств жидкостей производится при температуре стенки. Кроме того, при турбулентном режиме движения среды, с чем мы и будем в дальнейшем иметь дело, отношение средней вязкости к вязкости у стенки близко к единице и ею можно пренебречь

### 5.1.2. Теплообмен при движении жидкостей в гофрированных каналах пластинчатых аппаратов

Данная задача несколько сложнее предыдущей. Однако она представляет несомненный интерес, так как пластинчатые аппараты широко распространены в различных отраслях микробиологической и пищевой промышленности. Их расчеты сводятся к определению поверхности теплообмена и гидравлических сопротивлений, для чего используются эмпирические уравнения, позволяющие рассчитать коэффициенты теплообмена  $\alpha$  и гидравлического сопротивления  $\lambda_y$ . Множество типов пластин предопределило и соответствующее количество эмпирических зависимостей для расчета  $\alpha$  и  $\lambda_y$ .

Наиболее полные сведения по таким зависимостям можно найти в работе [27], изданной более тридцати лет тому назад. Однако к настоящему времени различными фирмами выпущены теплообменники, сконструированные из пластин с иными формами гофр, но каких-либо сведений об уравнениях, необходимых для их расчетов, в литературе нет.

Провести экспериментальные исследования по теплообмену для получения необходимых зависимостей непосредственно на предприятиях, эксплуатирующих такие аппараты, практически невозможно, но измерить гидравлическое сопротивление вполне доступно. В связи с указанными обстоятельствами представляет интерес вывод уравнения, которое позволяло бы рассчитывать коэффициенты  $\alpha$  в каналах с любыми формами гофр, или, по крайней мере, для пластин сетчато-поточного типа в «елку», наиболее часто встречающихся на пищевых предприятиях, имея для этого лишь данные по исследованию гидродинамики.

Следует сказать, что сама по себе эта идея не нова. Подобные решения можно найти в работах [4, 30], однако непосредственно об уравнениях, пригодных для расчета пластинчатых аппаратов, в них речь не идет.

В своем решении будем опираться на работу [30], в которой обобщены результаты исследований по теплообмену в аппаратах, различающихся по конструкции и принципам действия. Решение задачи основано на уравнении (5.3).

Уравнение (5.3) приводится, применительно к пластинчатым аппаратам, к следующему виду:

$$\text{Nu} = 4\eta_m \frac{\text{Pr}}{\bar{\psi}(\eta)}.$$

Приведя данное уравнение к виду (5.19), запишем

$$\text{Nu} = 0,36\eta_m^{0,95} \text{Pr}^{0,33}, \quad (5.26)$$

где  $\text{Nu} = \bar{\alpha}d_3 / \lambda$  – критерий Нуссельта, здесь  $d_3 = 2\delta$  – эквивалентный диаметр канала.

Безразмерное расстояние от стенки до оси канала (максимальный масштаб турбулентности)

$$\eta_m = \frac{u_* \delta \rho_{\text{ж}}}{2\mu}, \quad (5.27)$$

где  $\delta$  – зазор между пластинами.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложностью определения касательного напряжения на стенке и, следовательно, динамической скорости. Эта сложность связана с тем, что в гофрированных каналах два источника турбулентности – стенка и гофры. Определить отдельно вклад каждого из них в потери энергии, которые возникают при движении жидкостей в их каналах, пока не представляется возможным. Поэтому при расчёте гидравлических потерь вычисляют так называемые условные касательные напряжения по уравнению (5.19) с заменой в нём значения  $\lambda$  на  $\lambda_y$ .

В подобных случаях динамическую скорость целесообразнее выражать не через касательное напряжение, а через среднее значение диссипации энергии (удельную мощность).

Согласно уравнению энергии (1.41), диссипация энергии происходит в основном в пристенном слое, где градиенты скоростей максимальны, и описывается уравнением

$$E_0 = \mu \dot{\gamma}^2, \quad (5.28)$$

где  $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига.

С другой стороны, касательные напряжения на стенке связаны со скоростью сдвига зависимостью

$$\tau_0 = \mu \dot{\gamma}. \quad (5.29)$$

Из совместного решения уравнений (5.28) и (5.29) следует

$$\tau_0 = (\mu E_0)^{0,5}. \quad (5.30)$$

Приняв допущение Прандтля о постоянстве касательных напряжений, после подстановки  $\tau_0$  в уравнение (2.82) получим известную зависимость

$$u_* = \left( \frac{\mu E_0}{\rho_{\text{ж}}^2} \right)^{0,25}. \quad (5.31)$$

Допустим, с определенной степенью достоверности, что турбулентность в гофрированных каналах изотропна. В таком случае, согласно работе А.Н. Колмогорова, величину  $E_0$  можно выразить через среднее значение диссипации энергии  $E$  в виде равенства

$$E_0 = \chi^4 E = \chi^4 \frac{N}{V_{\text{ж}}}, \quad (5.32)$$

где  $N$  – мощность источника турбулентности;  $V_{\text{ж}}$  – объём жидкости в аппарате.

Подставив выражение (5.32) в уравнение (5.31), запишем

$$u_* = \chi \left( \frac{\mu E}{\rho_{\text{ж}}^2} \right)^{0,25}, \quad (5.33)$$

или

$$u_* = \chi \left( \frac{\mu N}{\rho_{\text{ж}}^2 V_{\text{ж}}} \right)^{0,25}. \quad (5.34)$$

Мощность источника турбулентности  $N$  (мощность потока) при движении жидкости в межпластинном зазоре найдем по уравнению

$$N = \Delta p Q = \lambda_y f \frac{l}{d_3} \frac{\rho_{\text{ж}} w^3}{2}, \quad (5.35)$$

где  $l$  и  $f$  – длина канала и площадь его поперечного сечения.

Так как объём жидкости в канале  $V_{\text{ж}} = f l$ , то из уравнений (5.34) и (5.35) следует

$$u_* = \chi \left( \frac{\lambda_y w^3 \nu}{2d_3} \right)^{0,25}. \quad (5.36)$$

В окончательном виде уравнение для расчёта коэффициентов теплоотдачи в пластинчатых аппаратах, с пластинами сетчатопоточного типа с пересекающимися гофрами «в ёлку», примет вид

$$\bar{\alpha} = 0,36 \left( \frac{\rho_{\text{ж}} u_* d_{\text{э}}}{\mu} \right)^{0,95} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.37)$$

Таким образом, чтобы рассчитать  $\bar{\alpha}$  по уравнению (5.37), необходимо знать значения коэффициентов  $\chi$  и  $\lambda_y$  в равенстве (5.36). Их можно определить, имея опытные данные по теплообмену и гидравлическим сопротивлениям или эмпирические уравнения для их расчета для того или иного типа пластин. Значения  $\lambda_y$ , взятые из работы [27] для пластин сетчато-поточного типа с пересекающимися гофрами «в ёлку»: ПР 03, ПР 05, ПР 05М и «Розенблат» – приведены в прил. 5. Пластины подобных типов наиболее часто применяются в современных пластинчатых теплообменниках.

Опытные значения критерия Нуссельта рассчитывались по уравнению типа

$$\text{Nu}_0 = A_2 \text{Re}^{m_2} \text{Pr}^{0,43}; \quad (5.38)$$

коэффициенты гидравлического сопротивления – по уравнению

$$\lambda_y = \frac{B}{\text{Re}^{0,25}}, \quad (5.39)$$

где значения  $A_2$ ,  $B$  и  $m_2$  зависят от типа пластин и приведены в [27].

Поиск значений коэффициента  $\chi$  осуществлялся в пределах изменения  $\text{Pr}$  от 2 до 50 и  $\eta_m$  от 80 до 1000. В результате обработки опытных данных было установлено, что в уравнении (5.36) коэффициент  $\chi = 1,8$ .

Отклонение опытных значений  $\bar{\alpha}$  от вычисленных по уравнению (5.38) для указанных типов пластин не превышает  $\pm 14\%$ . Можно предположить, такая же точность будет и при расчете теплообменников, собранных из других пластин сетчато-поточного типа с пересекающимися гофрами. Однако следует иметь в виду, чтобы воспользоваться уравнением (5.37), необходимо предварительно провести гидравлические испытания теплообменника в целях определения коэффициента  $\lambda_y$  в равенстве (5.36).

Выполненные решения позволяют сделать заключение о том, что эмпирические уравнения являются частными случаями уравнений, полученных полуэмпирическим способом на основе аналогии между переносом импульса и теплоты.

Решив сравнительно простые задачи, перейдем к решению более сложных задач теплообмена при аэробном культивировании микроорганизмов в аппаратах различных конструкций.

## **5.2. Теплообмен между газожидкостной смесью и теплопередающей поверхностью**

В данном подразделе рассматриваются решения нескольких задач, связанных с определением коэффициентов теплообмена, в аппаратах, наиболее часто применяемых для нагрева или охлаждения газожидкостных смесей в микробиологической и других отраслях пищевой промышленности. Отвод теплоты от культуральной среды в них осуществляется с помощью тепловой рубашки, встроенных или выносных теплообменных устройств.

Наиболее простой вариант представляет решение задачи теплообмена между стенкой аппарата и газожидкостной смесью в барботажных культиваторах колонного типа.

### **5.2.1. Культиваторы колонного типа с тепловой рубашкой**

Пустотельные аппараты подобного типа широко используются в различных отраслях микробиологической промышленности, в частности для культивирования дрожжей, производства лимонной кислоты и т. п. Особенностью культиваторов колонного типа является отсутствие принудительной циркуляции жидкости через аппарат. Однако даже если такое и имеет место, например в установках непрерывного культивирования микроорганизмов, приведенная скорость жидкой фазы в них бывает настолько мала, что она не оказывает заметного влияния на скорость переноса импульса. Иными словами, источником турбулентности будет являться только движение газа относительно культуральной среды, т. е. приведенная скорость газа. Это, конечно, не означает полного отсутствия циркуляции жидкости внутри аппарата, но скорость её будет определяться всё той же при-

ведённой скоростью газа и может быть рассчитана по уравнению, предложенному автором работы [33]:

$$w_{\text{ж}} \approx 4(v_{\text{г}} g d_{\text{п}})^{1/3}. \quad (5.40)$$

Вклад касательных напряжений, обусловленных движением жидкости вдоль теплопередающей поверхности, в развитие турбулентности, как показывают расчёты, настолько мал по сравнению с долей, приходящейся на движение газа относительно жидкой фазы, что им можно пренебречь.

Влияние на скорость циркуляции вязкости культуральной среды учитывается её влиянием на размер пузырей. Согласно работе [7], диаметр пузырей и динамическая вязкость связаны пропорциональностью  $d_{\text{п}} \sim \mu^{0,25}$ . В таком случае  $w_{\text{ж}} \sim \mu^{0,083}$ , т. е. влияние вязкости на скорость циркуляции невелика.

При решении рассматриваемой задачи будем считать, что воздух барботируется через культуральную жидкость, представляющую собой суспензию, в которой твёрдой фазой являются клетки микроорганизмов, а жидкой (в большинстве случаев) – водные растворы различных питательных веществ и продуктов метаболизма. Физические свойства таких суспензий берутся либо из таблиц справочной литературы, либо рассчитываются по имеющимся в литературе формулам [34].

Для решения интеграла (5.15) необходимо найти значение динамической скорости. Использование для этой цели уравнения (2.68) представляет определенную сложность, так как источниками турбулентности служат относительная скорость фаз и стенка. Влиянием стенки в данной задаче можно пренебречь, потому что касательные напряжения, обусловленные скоростью циркуляции суспензии, невелики. Вследствие чего воспользуемся тем же приёмом, что и в предыдущей задаче.

Входящую в уравнение (5.34) величину  $N$  найдем, исходя из следующих соображений. Мощность источника турбулентности будет определяться сопротивлением газожидкостного слоя высотой  $H_{\text{гж}}$  при движении газовой фазы относительно жидкой фазы. Так как в данном случае приведённая скорость жидкости  $w_{\text{ж}} = 0$ , то мощность источника турбулентности будет определяться только приведённой скоростью газа и может быть выражена зависимостью

$$N = \rho_{\text{ГЖ}} g H_{\text{ГЖ}} Q_{\text{Г}} = \rho_{\text{ГЖ}} g H_{\text{ГЖ}} w_{\text{Г}} S_{\text{а}}, \quad (5.41)$$

где  $H_{\text{ГЖ}}$  – высота газожидкостного слоя в культиваторе;  $w_{\text{Г}}$  – приведённая скорость газа;  $S_{\text{а}}$  – площадь поперечного сечения аппарата.

Полагая, что диссипация энергии происходит в основном в объёме жидкой фазы  $V_{\text{ж}} = S_{\text{а}} H_{\text{ГЖ}} (1 - \varphi_{\text{Г}})$ , то при условии, что  $\rho_{\text{ж}} \gg \rho_{\text{Г}}$ , из уравнений (2.89), (5.33) и (5.41) следует

$$E = \chi^4 \rho_{\text{ж}} g w_{\text{Г}}. \quad (5.42)$$

Исследования по теплообмену между стенкой аппарата и газожидкостной смесью [10] показали, что в уравнение (5.42) необходимо ввести поправку, умножив его правую часть на величину  $(1 - \varphi_{\text{Г}})^2$ . Введение поправки было обусловлено некоторым отсутствием сходимости экспериментальных данных с результатами расчётов по уравнениям, полученным полуэмпирическим методом. Объяснялось это тем, что в аппаратах, в которых отношение  $d_{\text{п}} / d_{\text{а}} \ll 1$ , пузырьки газа, находящиеся у стенки, играют роль демпферов, гася турбулентные пульсации и затрудняя их проникновение в пристеночный слой жидкости.

Как показали дальнейшие исследования теплообмена в плоских щелевых каналах, необходимость в поправке отпадает, так как зазор между пластинами и размеры пузырей соизмеримы. На этих вопросах мы остановимся несколько позднее.

С учетом поправок уравнение (5.42) для барботажных аппаратов колонного типа примет вид

$$E = \chi^4 \rho_{\text{ж}} g w_{\text{Г}} (1 - \varphi_{\text{Г}})^2. \quad (5.43)$$

Динамическую скорость находим из уравнений (5.31) и (5.32) подстановкой в них уравнения (5.43):

$$u_* = \chi^4 \sqrt[4]{\rho_{\text{ж}} g w_{\text{Г}} (1 - \varphi_{\text{Г}})^2}. \quad (5.44)$$

Подставляя равенство (5.44) в уравнение (5.4), получим выражение для максимального масштаба турбулентности в аппаратах колонного типа:

$$\eta_m = \chi \frac{d_a^4 \sqrt[4]{v_{ж} g w_{г} (1 - \phi_{г})^2}}{v_{ж}}. \quad (5.45)$$

На основе исследований теплообмена было установлено, что в аппаратах колонного типа коэффициент  $\chi = 2,2$ . Из уравнений (5.18), (5.41) и (5.45) следует уравнение для расчёта коэффициента теплообмена между газожидкостной смесью и стенкой культиватора с рубашкой:

$$\bar{\alpha} = 0,186 \frac{\lambda_{г}}{d_a} \left( \frac{2,2 d_a^4 \sqrt[4]{v_{ж} g w_{г} (1 - \phi_{г})^2}}{v_{ж}} \right)^{0,95} Pr^{0,33}. \quad (5.46)$$

Для расчета газосодержания в барботажных культиваторах колонного типа можно рекомендовать уравнения В.В. Консетова (2.94) и (2.95), полученные аналитически и наиболее полно учитывающие влияние на величину  $\phi_{г}$  физических свойств жидкости и газа, а также размеров аппарата.

Анализ уравнения (5.46) позволяет сделать вывод о том, что интенсифицировать процесс теплообмена в аппаратах колонного типа можно только за счёт увеличения приведённой скорости газа. Однако возможности такой интенсификации весьма ограничены.

При культивировании микроорганизмов в барботажных культиваторах колонного типа приведённая скорость газа сравнительно невелика. Так, например, на товарной стадии культивирования хлебопекарных дрожжей удельный расход воздуха через дрожжерастительный аппарат поддерживается на уровне 60–70 м<sup>3</sup>/(ч·м<sup>3</sup>). При таких условиях приведенная скорость не превышает 0,2 м/с.

Увеличение скорости выше указанного значения приводит к появлению сильных пульсаций в жидкости, которые вызывают вибрации корпуса аппарата и подводных трубопроводов, способные привести к серьезным авариям. Кроме того, при высоких скоростях движения воздуха возможен его проскок и степень использования кислорода падает, т. е. расход энергии на транспортировку газа становится нерациональным.

Для интенсификации процессов, протекающих в культиваторах, иногда применяют различные перемешивающие устройства. Од-

нако такой путь значительно усложняет конструкцию аппаратов, поэтому используется при крайней необходимости.

### 5.2.2. Теплообмен между газожидкостным потоком и теплопередающей поверхностью теплообменников

Рассматриваемый процесс теплообмена имеет место при течи газожидкостных потоков в теплообменниках с различной конфигурацией теплопередающей поверхности, например в теплообменниках кожухотрубных и пластинчатых, типа труба в трубе, в змеевиках и т. п. Общим для них является то обстоятельство, что источником турбулентности служат стенка (касательные напряжения на стенке) и относительное движение фаз. При наличии двух источников турбулентности полная диссипация энергии  $E$  представляется в виде суммы [10]

$$E = E_0 + E_1, \quad (5.47)$$

где диссипация энергии  $E_0$  и  $E_1$  обусловлена касательными напряжениями на стенке и относительным движением фаз.

Величину  $E_0$  находят из уравнения (5.30). Следует заметить, что  $\tau_0$  в данном случае представляет собой касательное напряжение в жидком пристеночном слое, возникающее при движении газожидкостного потока и зависящее от относительной скорости.

Значение  $E_1$  можно найти из уравнения (5.43), заменив в нём приведённую скорость газа на относительную.

**Теплообмен в трубах.** С учётом предыдущих замечаний в каналах, для которых справедливо условие  $d_{\text{п}} / d_{\text{а}} \ll 1$ , полная диссипация энергии в уравнении (5.47) примет вид

$$E = \frac{\tau_{\text{ГЖ}}^2}{\mu_{\text{ж}}} + \chi^4 \rho_{\text{ж}} g w_{\text{от}} \varphi_{\text{Г}} (1 - \varphi_{\text{Г}})^2. \quad (5.48)$$

Уравнение для определения динамической скорости выразится равенством

$$u_* = 4 \sqrt{\left( \frac{\tau_{\text{ГЖ}}}{\rho_{\text{ж}}} \right)^2 + \chi^4 v_{\text{ж}} g w_{\text{от}} \varphi_{\text{Г}} (1 - \varphi_{\text{Г}})^2}. \quad (5.49)$$

Уравнение теплообмена в аппаратах подобного типа получается путём подстановки уравнения (5.49) в равенство (5.18). В итоге получим выражение для расчёта коэффициента теплоотдачи в следующем виде:

$$\bar{\alpha} = 0,186 \frac{\lambda_{\Gamma}}{d_a} \left[ \frac{d_a^4 \sqrt[4]{\left(\frac{\tau_{\Gamma\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}\right)^2 + \chi^4 v_{\text{ж}} g w_{\text{от}} \varphi_{\Gamma} (1 - \varphi_{\Gamma})^2}}{2v_{\text{ж}}} \right]^{0,95} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.50)$$

Эксперименты по теплообмену в вертикальных трубах показали, что в уравнении (5.50) для восходящих газожидкостных потоков  $\chi = 1,9$ ; для нисходящих –  $\chi = 2,2$ .

Для вычисления истинного объемного газосодержания в трубах при восходящих потоках можно рекомендовать уравнение (2.96); при нисходящих течениях – эмпирическую формулу (2.97).

В заключение следует обратить внимание на одну интересную особенность уравнения (5.50), согласно которому при движении газожидкостных потоков функция  $\alpha(w_{\text{ж}})$  при определенном значении  $w_{\text{ж}}$  и  $w_{\Gamma} = \text{const}$  имеет минимум, т. е. коэффициент теплоотдачи может в определённых условиях снижаться с увеличением приведённой скорости жидкой фазы при постоянной скорости газа. Особенно этот эффект заметен при малых приведённых скоростях газа и изменении скорости жидкости от 0 до 1 м/с.

Объяснение этому, казалось бы, противоречащему здравому смыслу факту может дать анализ уравнения (5.49). При увеличении скорости жидкости изменяются оба слагаемых подкоренного выражения уравнения (5.49). Первое слагаемое увеличивается, а второе – снижается за счёт снижения газосодержания и относительной скорости. Причём снижение численного значения второго слагаемого происходит быстрее, чем рост первого, вследствие чего снижается динамическая скорость, а следовательно, и коэффициент теплоотдачи.

**Теплообмен в плоских щелевых каналах.** В отличие от аппаратов колонного типа и трубчатых теплообменников в пластинчатых аппаратах с любой формой теплопередающей поверхности зазор между пластинами и размеры пузырей соизмеримы, вводить поп-

равку  $(1 - \varphi_{\Gamma})^2$  в уравнения (5.48) и (5.49) нет необходимости. Поэтому для плоских каналов они примут несколько иной вид:

$$E = \frac{\tau_{\Gamma\text{ж}}^2}{\mu_{\text{ж}}} + \chi^4 \rho_{\text{ж}} g w_{\text{от}} \varphi_{\Gamma}; \quad (5.51)$$

$$u_* = 4 \sqrt[4]{\left(\frac{\tau_{\Gamma\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}\right)^2 + \chi^4 v_{\text{ж}} g w_{\text{от}} \varphi_{\Gamma}}. \quad (5.52)$$

Другой особенностью плоских каналов «бесконечной ширины», для которых соблюдается равенство  $d_{\text{э}} \approx 2\delta$ , является отсутствие зависимости коэффициента  $\chi$  от направления движения потока. Для них в любом случае  $\chi = 1,5$ .

Изменение в определении динамической скорости повлечёт за собой изменение уравнения (5.50), которое с учётом равенства (5.26) примет вид

$$\bar{\alpha} = 0,36 \frac{\lambda_{\Gamma}}{d_{\text{э}}} \left[ \frac{d_{\text{э}}^4 \sqrt[4]{\left(\frac{\tau_{\Gamma\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}\right)^2 + \chi^4 v_{\text{ж}} g w_{\text{от}} \varphi_{\Gamma}}}{4v_{\text{ж}}} \right]^{0,95} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.53)$$

В щелевых каналах газосодержание несколько выше, чем в трубах, и рассчитывается по уравнениям (2.98). Объяснить это можно тем, что в узких каналах сказываются пристеночные эффекты, тормозящие движение газа относительно жидкости, на основании чего происходит его задержка и, как следствие, увеличение газосодержания.

Во всех случаях относительная скорость фаз рассчитывается по уравнению (2.87). Входящее в уравнения (5.48)–(5.50), (5.51) и (5.52) касательное напряжение  $\tau_{\Gamma\text{ж}}$  можно рассчитать по уравнению, приведённому в работе [10]:

$$\tau_{гж} = \frac{\tau_{ж}}{(1 - \varphi_{г})^{1,75}} \left[ 1 + \frac{\chi^4 \mu_{ж} g w_{от} \varphi_{г} (1 - \varphi_{г})^{5,5} \rho_{ж}}{\tau_{ж}^2} \right]^{0,21}. \quad (5.54)$$

Для маловязких жидкостей ( $\mu_{ж} < 20 \cdot 10^{-3}$  Па·с) выражением в квадратных скобках пренебрегают и уравнение (5.54) упрощается до вида

$$\tau_{гж} = \frac{\tau_{ж}}{(1 - \varphi_{г})^{1,75}}. \quad (5.55)$$

Касательные напряжения при течении однофазной жидкости  $\tau_{ж}$  находят по известной формуле (5.19). Коэффициент гидравлического трения вычисляют по формуле (5.21).

Следует отметить, что в пластинчатых аппаратах с гофрированной теплопередающей поверхностью процессы переноса имеют свои особенности, поэтому будут рассмотрены отдельно.

**Теплообмен при движении газожидкостных смесей в гофрированных каналах пластинчатых аппаратов.** Пластинчатые аппараты для термообработки газожидкостных смесей используются сравнительно редко. В качестве примера можно привести насыщение различного рода напитков диоксидом углерода в процессе их охлаждения в пластинчатом аппарате. В микробиологической промышленности эти вопросы могут возникнуть при использовании пластинчатого аппарата в газлифтном циркуляционном контуре

При решении задачи теплообмена в пластинчатых аппаратах с гофрированными пластинами приходится сталкиваться с теми же проблемами, что и при термообработке однофазных сред. К тому же прибавляется ещё и относительное движение фаз. Однако, как показали исследования по теплообмену, в канале с турбулизирующей вставкой в виде объёмной сетки ввод газа в поток не приводит к существенной интенсификации теплообмена.

По гидравлическим характеристикам канал с объёмной сеткой оказался аналогичен каналу с пластинами с пересекающимися гофрами «в ёлку», поэтому можно предположить, что эффект малого влияния относительной скорости на скорость переноса теплоты будет наблюдаться в любых гофрированных каналах сетчато-поточного типа. Причиной этого является то, что основным источником турбулентности служат гофры и добавление дополнительного возмущаю-

щего фактора – относительного движения фаз не оказывает заметного влияния на интенсивность тепло- и массообменных процессов. В связи с указанными обстоятельствами в уравнении (5.47) вторым слагаемым можно пренебречь, а диссипацию энергии, обусловленную взаимодействием гофра с потоком, найдём из уравнения (5.32).

Мощность источника турбулентности будет определяться скоростью газожидкостной смеси и выразится зависимостью

$$N = \Delta p_{\text{ГЖ}} Q_{\text{см}} = \Delta p_{\text{ГЖ}} f (w_{\text{Г}} + w_{\text{Ж}}), \quad (5.56)$$

где  $\Delta p_{\text{ГЖ}}$  – потери давления газожидкостной смеси в канале;  $Q_{\text{см}}$  – объёмный расход газожидкостной смеси;  $f$  – площадь поперечного сечения канала.

После подстановки уравнения (5.56) в (5.32) запишем

$$E = \chi^4 \frac{\Delta p_{\text{ГЖ}} (w_{\text{Г}} + w_{\text{Ж}})}{l_{\text{к}} (1 - \phi_{\text{Г}})}. \quad (5.57)$$

Из уравнений (5.57) и (5.34) следует

$$u_* = \chi^4 \sqrt{\frac{\Delta p_{\text{ГЖ}} (w_{\text{Г}} + w_{\text{Ж}}) v_{\text{Ж}}}{\rho_{\text{Ж}} l_{\text{к}} (1 - \phi_{\text{Г}})}}. \quad (5.58)$$

Для расчёта потерь давления  $\Delta p_{\text{ГЖ}}$  можно порекомендовать уравнение вида

$$\Delta p_{\text{ГЖ}} = \frac{\Delta p_{\text{Ж}}}{(1 - \phi_{\text{Г}})^n}. \quad (5.59)$$

Показатель степени  $n$  определялся экспериментально. Он зависит от направления движения смеси: при восходящем течении  $n = 1,52$ ; при нисходящем –  $n = 2,19$ .

Потери давления при течении однофазной жидкости вычислим по уравнению (2.31а), газосодержание – (2.99) и (2.99а).

Уравнение для вычисления коэффициентов теплоотдачи в гофрированных каналах получим из равенств (5.26) и (5.58):

$$\bar{\alpha} = 0,36 \frac{\lambda_{\Gamma}}{d_{\text{э}}} \left[ \frac{d_{\text{э}} \chi^4 \sqrt{\frac{\Delta p_{\Gamma\text{ж}} (w_{\Gamma} + w_{\text{ж}}) v_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}} l_{\text{к}} (1 - \varphi_{\Gamma})}}}{4v_{\text{ж}}} \right]^{0,95} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.60)$$

### 5.3. Теплообмен и массообмен между клеткой и культуральной жидкостью

#### 5.3.1. Теплообмен

Поставленная задача имеет скорее академический интерес, чем прикладной, так как на практике процесс теплообмена между клетками и культуральной жидкостью не лимитирует отвод биологической теплоты от жидкости к хладоносителю. Основное сопротивление теплообмену сосредоточено в пристеночных слоях теплообменных элементов. Решение этих задач было рассмотрено в предыдущих разделах. Однако попытка решения задачи теплообмена между клеткой и культуральной средой на основе полуэмпирической теории турбулентного переноса позволит либо подтвердить её правомерность к решению поставленной задачи, либо опровергнуть.

Сразу же надо оговориться, что вопросы теплообмена между средой и клеткой экспериментально не изучены, о чём уже упоминалось ранее. Имеются лишь данные по теплообмену между жидкой средой и твёрдыми частицами [4, 7, 28], размеры которых значительно больше размеров клетки. В указанных работах для расчета коэффициентов теплообмена приводятся критериальные уравнения вида

$$\text{Nu}_{\text{к}} = 2 + C \text{Re}^n \text{Pr}^m, \quad (5.61)$$

согласно которым при  $\text{Re} \rightarrow 0$   $\text{Nu}_{\text{к}} \rightarrow 2$ .

В работах [7, 26] приведены численные значения показателей степени и коэффициента пропорциональности:  $C = 0,6$ ;  $n = 0,5$ ;  $m = 0,33$ . При использовании уравнения (5.61) возникают трудности с определением критерия Рейнольдса, в котором за характерную скорость принята скорость движения жидкости относительно твёрдой

частицы. В работе [7] приводится уравнение, которое связывает относительную скорость, а следовательно, и интенсивность теплообмена с вводимой в объём жидкости энергией.

Авторы работы [26] в качестве характерной скорости рекомендуют принять скорость осаждения в жидкости одиночной частицы, рассчитанную по уравнению Стокса и умноженную на поправочный коэффициент. Искусственность такого подхода к решению поставленной задачи очевидна. Для одиночной частицы, оседающей в жидкости, возможно, это и оправдано.

Следует учесть, что при проведении экспериментов для нахождения коэффициентов пропорциональности и показателей степени в работах [4, 7, 26] имелась возможность определять размеры частиц непосредственным измерением. Необходимо также помнить, что в указанных работах размеры частиц значительно больше размеров клетки, поэтому применять уравнение (5.61) для расчёта коэффициентов теплообмена между клетками и окружающей их средой следует с большой осторожностью.

В связи с указанными обстоятельствами представляет интерес полуэмпирический метод решения поставленной задачи, который уже был использован для определения коэффициентов теплоотдачи в аппаратах различных конструкций в предыдущих разделах. Необходимо только учесть, что из-за отсутствия экспериментальных данных по тепло- и массообмену между клеткой и средой предлагаемый метод полуэмпирического решения задачи по нахождению коэффициентов переноса будет носить лишь оценочный характер. Однако он позволит провести сравнительный анализ полуэмпирического решения с имеющимися в литературе экспериментальными данными по тепло- и массообмену с твердыми частицами более крупных размеров.

В принципе закономерности теплообмена между клеткой и окружающей её жидкостью не должны отличаться от теплообмена между стенкой теплообменника и средой. Разница лишь в том, что при определении максимального масштаба турбулентности в первом случае за характерный размер берется размер клетки, а во втором – диаметр аппарата. Поэтому для определения коэффициентов теплообмена между клетками и культуральной жидкостью можно использовать уравнения (5.9), (5.11) и (5.15).

Малый размер клеток определяет и масштаб турбулентных пульсаций, которые могут проникнуть к поверхности через тепловой слой. Масштаб их должен быть меньше размера клетки, в противном случае клетки под действием пульсаций будут просто перемещаться в пространстве из одной точки в другую и интенсификации процессов обмена между средой и клеткой добиться не удастся.

Рассмотрим еще одну особенность при определении  $\bar{\alpha}$  от поверхности клетки к культуральной среде. При культивировании дрожжей диаметр клеток колеблется в пределах 5–10 мкм. Эти рассуждения касаются и других микроорганизмов. При столь малых размерах клеток максимальный масштаб турбулентности клетки  $\eta_{mk}$ , вычисленный по уравнению (5.11), не превышает шести. В таком случае в уравнении (5.15) исчезают два последних слагаемых и оно принимает следующий вид:

$$\bar{\psi} = \frac{\text{Pr}}{\eta_m} \left( \int_0^{\eta_m} \left( \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{1 + \text{Pr} (0,124 \eta)^4} \right) d\eta \right). \quad (5.62)$$

Выбор уравнения для расчёта динамической скорости зависит, во-первых, от типа культиватора, а во-вторых, от метода культивирования (аэробное оно или анаэробное).

Рассмотрим для примера аэробное культивирование пекарских дрожжей в барботажном культиваторе колонного типа. Жидкой средой, окружающей клетку, будет служить культуральная жидкость, т. е. вода с растворёнными в ней субстратом, солями и продуктами метаболизма.

Для определения динамической скорости следует воспользоваться уравнением (5.44), исключив из него выражение  $(1 - \varphi_r)^2$ , как не имеющее того физического смысла, какой вкладывался в него при решении задачи теплообмена между твёрдой поверхностью и жидкостью.

Результаты расчётов коэффициентов теплообмена между клеткой и культуральной жидкостью и критерия Нуссельта по уравнениям (5.10) и (5.62) представлены на рис. 5.1. Средний диаметр клетки принят равным 7 мкм [20]. Температура культивирования дрожжей принята равной 30 °С. Физические свойства культуральной среды брались из справочной литературы.

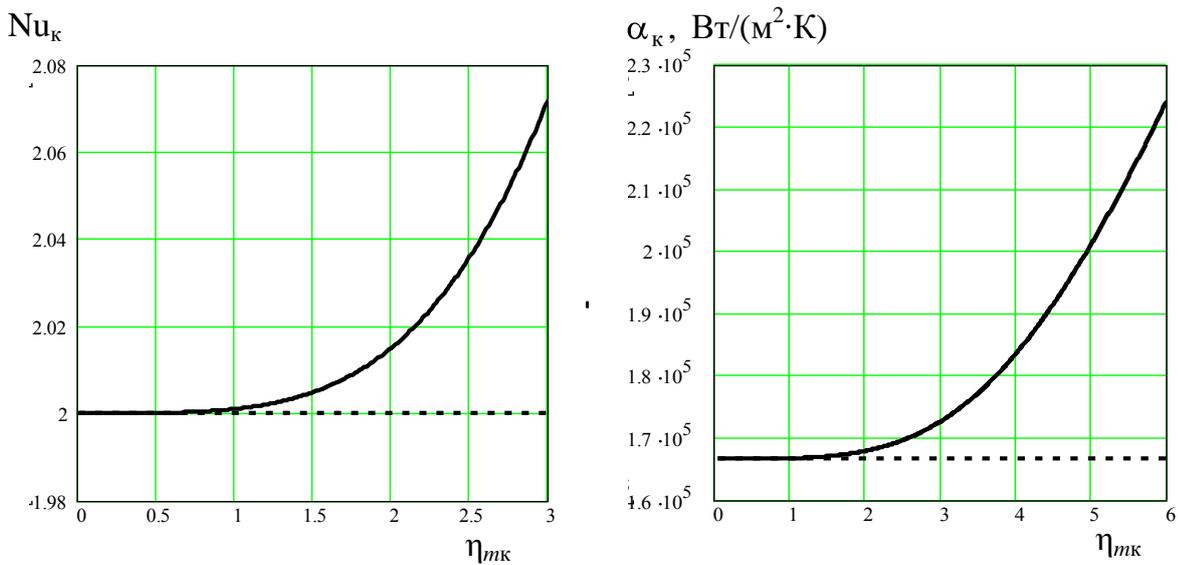


Рис. 5.1. Зависимость  $\alpha_k$  от  $\eta_{mk}$ :  
 — уравнение (5.10); - -  $Nu_k = 2$

Из рис. 5.1 видно, что, во-первых, коэффициенты теплоотдачи изменяются в пределах изменения  $0 \leq \eta_{mk} \leq 6$  незначительно; во-вторых, они на несколько порядков выше, чем коэффициенты теплообмена между стенкой и газожидкостной средой; в-третьих, при  $\eta_{mk} \rightarrow 0$   $\alpha_k$  стремится к постоянной величине, а  $Nu_k \rightarrow 2$ .

Таким образом, можно утверждать, что полуэмпирический метод решения задачи теплообмена между клеткой и культуральной жидкостью не противоречит имеющимся в литературе данным. Характер зависимости  $Nu_k$  от максимального масштаба турбулентности аналогичен уравнению (5.61), полученному эмпирическим методом. Интересно отметить, что в уравнении (5.61) произведение  $\eta_{mk}$  на отношение  $Pr/\bar{\psi}$  при  $\eta_{mk} \rightarrow 0$  стремится к единице.

Вопрос о том, будут ли реальные значения  $\alpha_{kj}$  совпадать с вычисленными по уравнениям (5.10), (5.12) и (5.62), пока остаётся открытым. Для ответа на этот вопрос требуются дополнительные исследования теплообмена между клеткой и газожидкостной средой.

### 5.3.2. Массообмен

Принципиального отличия в решении задачи массообмена между клеткой и жидкостью от задачи теплообмена нет. Коэффициент массообмена между клеткой и жидкостью описывается системой уравнений (5.10), (5.11) и (5.62). Разница будет заключаться лишь в замене тепловых значений  $Nu$ ,  $Pr$  и  $\bar{\psi}$  на диффузионные аналоги. Уравнение (5.61) применительно к процессу массообмена можно представить в несколько изменённом виде:

$$\bar{\psi}_m = \frac{Pr_D}{\eta_m} \left( \int_0^{\eta_m} \left( \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{1 + Pr_D (0,124 \eta)^4} \right) d\eta \right). \quad (5.63)$$

Так же как и в предыдущей задаче, рассмотрим конкретный пример массообмена между дрожжевой клеткой и мелассным раствором в барботажном аппарате колонного типа. В качестве потребляемого клеткой вещества возьмём кислород. Ввиду отсутствия исследований по диффузии кислорода в дрожжевой бражке воспользуемся справочными данными по диффузии кислорода в водных растворах сахарозы. Подобное упрощение состава жидкой среды несколько снижает точность расчётов, однако для оценочных выводов вполне допустимо. Согласно работе [25], коэффициент молекулярной диффузии  $D_{O_2} = 2,75 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ . Плотность и вязкость бражки вычислялись по уравнениям [34] при  $T = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ . При принятых условиях диффузионное число Прандтля  $Pr_D = 436$ . Расчёт динамической скорости и клеточного масштаба турбулентности ничем не отличается от их определения при решении задачи теплообмена в предыдущем разделе.

Зависимость коэффициента массообмена между клеткой и жидкостью  $\beta_{\text{кж}}$  от масштаба  $\eta_{\text{мк}}$  в графическом виде представлена на рис. 5.2. Расчёт коэффициента  $\beta_{\text{кж}}$  производился по уравнению (5.10).

Из рис. 5.1 и 5.2 видна полная аналогия зависимости коэффициентов переноса теплоты и массы от масштаба турбулентности. Удивительного в этом ничего нет, так как уравнения, описывающие их, получены исходя из одних и тех же начальных условий.

К сожалению, подтвердить или опровергнуть выполненные решения опытными данными не представляется возможным по причине отсутствия таковых. Однако сопоставление имеющихся в литературе экспериментальных данных по тепло- и массообмену между жидкой средой и твёрдыми частицами и данных, полученных из уравнений (5.9), (5.10), позволяет сделать вывод, что полуэмпирический метод в целом правильно отражает закономерности переноса теплоты и массы в системе жидкость–клетка–воздух.

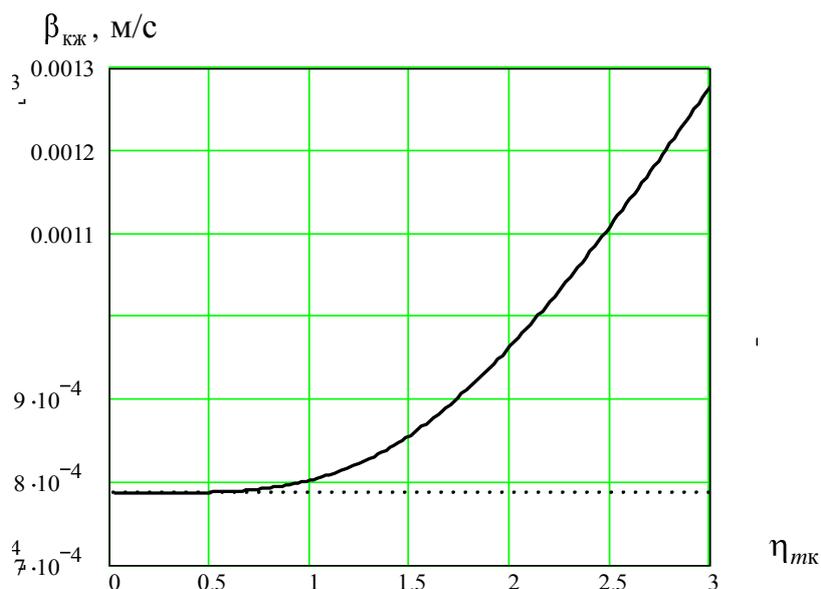


Рис. 5.2. Зависимость  $\beta_{кж}$  от  $\eta_{mk}$  :  
 — уравнение (5.63); .....  $Nu_D = 2$ .

### 5.3.3. Массообмен между газом и жидкостью

Данных по исследованию массообмена между газом и жидкостью, представленных в научной литературе, значительно больше, чем данных по исследованию массообмена между твёрдыми частицами и жидкостью. Причём исследования проводились при разных режимах течения газожидкостных смесей и в широком диапазоне изменения физических свойств жидкостей и газов. Почти все исследования носят сугубо эмпирический характер. С полуэмпирическим решением можно ознакомиться в работах [9, 10].

Мы также попытаемся подойти к решению поставленной задачи с позиций полуэмпирической теории турбулентности. В основу решения положены метод аналогии между переносами импульса

и массы и модель деформируемой поверхности раздела фаз, описание которой дано в предыдущих разделах.

Решение задачи сводится к определению  $\beta_{ж}$  по уравнению (5.2). Согласно модели деформируемой ПКФ, среднее значение безразмерной разности концентраций найдём из уравнения (5.13) с учётом (4.40). В таком случае при использовании трёхслойной модели турбулентного потока уравнение (5.15) примет вид

$$\bar{\Psi}_m = \frac{\text{Pr}_D}{\eta_m} \left( \int_0^{\eta_m} \left( \int_0^6 \frac{d\eta}{1 + \text{Pr}_D (\bar{f}_D + (0,124 \eta)^4)} + \int_6^{30} \frac{d\eta}{1 + \text{Pr}_D (0,2 \eta - 1)} + \int_{30}^{\eta} \frac{d\eta}{1 + \text{Pr}_D (0,4 \eta - 1)} \right) d\eta \right). \quad (5.64)$$

Численные значения параметра межфазной турбулентности  $\bar{f}_D$  можно найти из уравнений (5.2) и (5.64), имея опытные значения  $\beta_{ж}$ . Для этой цели были использованы результаты исследований по абсорбции различных газов в различных жидкостях, опубликованных в работах [14, 15].

На рис. 5.3 представлены результаты экспериментальных данных и данных, рассчитанных по уравнениям (5.2) и (5.64). Рис. 5.3 интересен тем, что, согласно ему,  $\beta_{ж}$  несколько снижается с ростом скорости газа. Это снижение обусловлено тем, что с увеличением  $w_T$  диаметр пузырей уменьшается. Таким образом, получается, что с увеличением подводимой к жидкости извне энергии поверхностный коэффициент массоотдачи снижается. Однако это совсем не означает, что при этом скорость растворения кислорода будет снижаться. Она будет возрастать, но за счет увеличения поверхности контакта фаз.

Обработка экспериментальных данных с помощью уравнения (4.8) позволила установить, что параметр  $\bar{f}$  в уравнении (2.130), определяющий перенос импульса через поверхность контакта фаз, не равен параметру  $f_D$  в уравнении (5.64), определяющему перенос массы через ту же поверхность. Этот факт говорит об отсутствии полной аналогии между переносом импульса и массы.

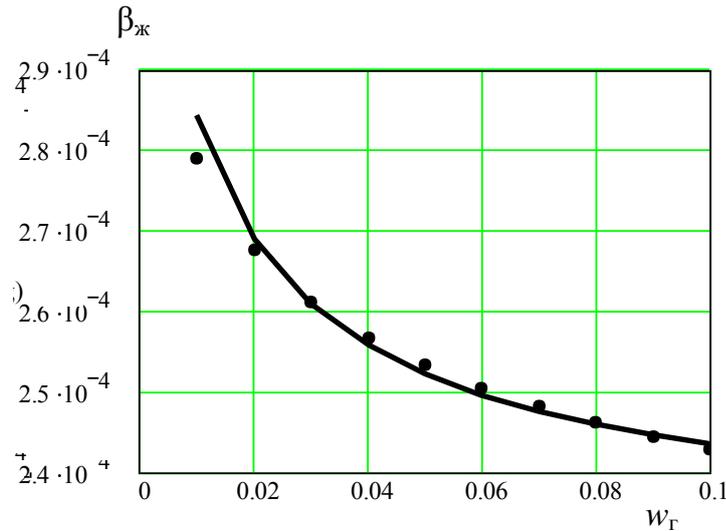


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента массообмена  $\beta_{ж}$  между газом и жидкостью в барботажном аппарате колонного типа от приведённой скорости газа  
Сплошная линия соответствует уравнениям (5.11), (5.64) и (5.66); точки – уравнению (4.8)

Уравнение (2.130) несколько занижает влияние некоторых величин на параметр межфазной турбулентности, характеризующий турбулентный перенос массы. Чтобы устранить эти расхождения, в уравнение (2.130) необходимо ввести поправку

$$\bar{f}_D \sim \frac{d_{\Pi}^{m_1}}{\sigma^{2,3} \nu^{1,38}}. \quad (5.65)$$

Из опытных данных найдено, что показатель степени  $m_1$  может меняться в пределах от 3 до 4. После преобразования уравнения (2.130) и определения коэффициента пропорциональности на основании опытных данных пропорциональность (5.65) примет следующий вид:

$$\bar{f}_D = \frac{k_1 E^{0,4} d_{\Pi}^{3,85} (1 - \varphi_{\Gamma})^{1,34}}{\rho_{ж}^{0,1667} \sigma^{2,3} \nu^{1,3} \varphi_{\Gamma}^{0,73}}. \quad (5.66)$$

Численное значение коэффициента  $k_1$  в уравнении (5.66) определяется экспериментальным путём. После обработки данных по массообмену было установлено, что численное значение коэффици-

ента  $k_1$  равно  $6,87 \cdot 10^{-6}$ . Данная величина получена при условии, что обработка опытных данных производилась в системе СИ. Следует помнить, что коэффициент  $k_1$  имеет размерность, так как он, в отличие от безразмерного коэффициента в уравнении (2.130), получен чисто эмпирически.

Рис. 5.3 наглядно показывает, что с увеличением приведённой скорости газа коэффициент массообмена между жидкостью и газом немного снижается. Такая зависимость обусловлена тем, что с увеличением вводимой в жидкую среду энергии снижается диаметр пузырей. При этом снижаются размеры турбулентных пульсаций, которые могут проникнуть в диффузионный слой и соответствующим образом повлиять на величину  $\beta_{\text{ж}}$ .

Уравнение (5.66) может быть использовано при вычислении коэффициентов массоотдачи в жидкой фазе; при растворении газов в жидкостях, близких по свойствам к воде; в аппаратах колонного типа в пределах изменения приведенной скорости газа от 0,005 до 0,1 м/с.

## **5.4. Гидродинамика и теплообмен в условиях естественной конвекции**

### **5.4.1. Гидродинамика**

Движение жидкости при естественной конвекции обусловлено изменением её плотности с изменением температуры. Такие течения возникают в аппаратах пищевых и микробиологических производств, в которых протекают процессы, сопровождающиеся выделением теплоты тем или иным способом: механическим, химическим и биологическим, например при анаэробном культивировании микроорганизмов, в процессах брожения и т. п.

Рассмотрим для примера вертикальный цилиндрикоконический бродильный аппарат (ЦКТ), представленный на рис. 5.4. Аппарат предназначен для сбраживания пивного сусла. В процессе брожения дрожжи потребляют субстрат, размножаются, выделяя продукты метаболизма, в частности диоксид углерода и теплоту, которую приходится постоянно отводить. Для этой цели аппарат снабжён распределёнными по высоте несколькими теплообменными секциями (рубашками), в которые подаётся хладоноситель. Высота аппарата может

достигать 10 м. При таком уровне жидкости абсолютное давление в нижней части аппарата будет примерно в два раза больше, чем в верхней части.

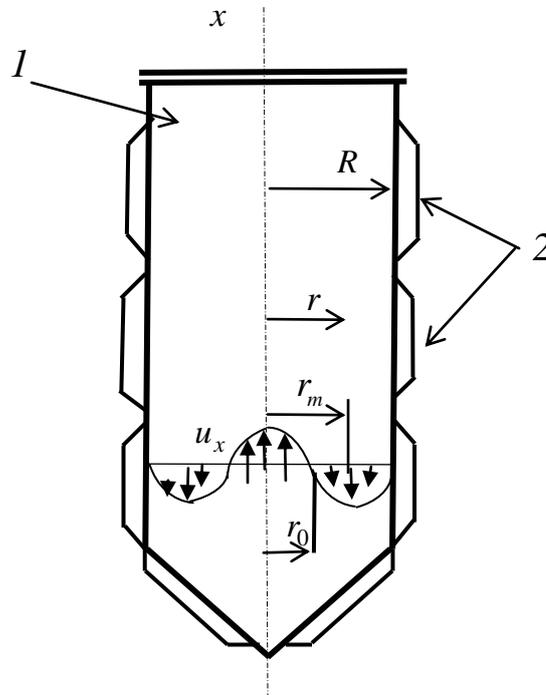


Рис. 5.4. Схема цилиндроконического броидильного аппарата:  
 1 – броидильный аппарат; 2 – теплообменные секции

С увеличением давления количество растворённого в жидкости газа возрастает, следовательно, развитие дрожжей и протекание процесса брожения в целом по высоте аппарата будут различными. В конечном итоге это может отрицательно сказаться на качестве готового пива. Поэтому возникает необходимость в перемешивании среды для выравнивания концентраций продуктов метаболизма дрожжей по высоте аппарата. Причём перемешивание должно быть щадящим, т. е. без возникновения в среде больших касательных напряжений. Обеспечить такие условия при использовании механических мешалок или циркуляции жидкости насосом невозможно. Более разумным будет применение естественной конвекции.

Рассмотрим вариант, когда температура у стенки аппарата ниже, чем в центре. В этом случае у стенки жидкость будет двигаться вниз, а в центре – вверх (см. рис. 5.4). В таком случае на некотором расстоянии  $r = r_0$  от оси  $x$  скорость  $u_x = 0$ .

Регулирование скорости движения по высоте можно осуществлять подачей хладоносителя в теплообменные секции.

Для решения задачи теплообмена между теплопередающей поверхностью и жидкостью необходимо знать распределение скорости движения жидкости по сечению аппарата.

Решение различных задач, связанных с движением жидкости и газов вдоль плоских вертикальных нагретых поверхностей в условиях естественной конвекции, можно найти в работах [16, с. 305; 2, с. 303]. Различие будет заключаться в том, что в нашем случае решение будет производиться в цилиндрических координатах.

В своём решении поставленной задачи будем следовать работе [16, с. 305], приняв движение жидкости в аппарате ламинарным, а распределение температуры – линейным, т. е.

$$T = \bar{T} - \frac{1}{2} \Delta T \left( \frac{r}{R} \right), \quad (5.67)$$

где  $T$  и  $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$  – текущие и средние значения температуры;

$\Delta T = T_1 - T_2$ , здесь  $T_1$  и  $T_2$  – температура в центре и на стенке аппарата соответственно;  $r$  – текущий радиус;  $R$  – радиус аппарата.

Сразу же отметим, что принятие условий ламинарного течения и линейности профиля температуры по живому сечению аппарата вызвано лишь стремлением упростить решение задачи. Следует иметь в виду, что температура в центре аппарата будет определяться мощностью теплового источника, находящегося внутри потоков жидкости. Этим источником являются дрожжевые клетки, более или менее равномерно распределённые в объёме жидкости [см. уравнение (3.27)]. Поэтому температурный профиль в аппарате следовало бы искать из уравнения (3.7). Задача сильно усложнится. Поскольку нас, прежде всего, интересует путь решения поставленной задачи, а именно, влияние физических свойств среды на скорость движения жидкости в аппарате, ограничимся принятыми условиями.

Рассмотрим установившееся движение жидкости вдоль оси  $x$  под действием массовой силы, сил трения и давления. Считая движение жидкости осесимметричным, можно использовать для решения поставленной задачи несколько видоизменённое уравнение (2.22а):

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} + \rho g. \quad (5.68)$$

В уравнении (5.68) плотность жидкости  $\rho$  является функцией температуры и вычисляется по уравнению

$$\rho = \bar{\rho}(1 - \beta(T - \bar{T})), \quad (5.69)$$

где  $\bar{\rho}$  – среднее значение плотности жидкости в аппарате;  $\beta$  – коэффициент объёмного расширения жидкости.

Изменение давления по оси  $x$  происходит в результате изменения гидростатического давления, т. е

$$\frac{dp}{dx} = -\bar{\rho}g.$$

С учётом последнего выражения и равенства (5.69) уравнение (5.68) примет вид

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = -\bar{\rho}g + \bar{\rho}g(1 - \beta(T - \bar{T})). \quad (5.70)$$

Определив из уравнения (5.67) разность температур и подставив её в уравнение (5.70), после несложных преобразований получим

$$d \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{\bar{\rho}g\beta\Delta T}{2R\mu} r^2 dr. \quad (5.71)$$

Представим уравнение (5.71) в следующем виде:

$$d \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = Ar^2 dr, \quad (5.72)$$

где

$$A = \frac{\bar{\rho}g\beta\Delta T}{2R\mu}. \quad (5.73)$$

Для нахождения профиля распределения локальных скоростей движения жидкости по радиусу аппарата необходимо проинтегрировать равенство (5.72) дважды.

После первого интегрирования получим

$$-\left(r \frac{du_x}{dr}\right) = \frac{A}{3} r^3 + C_1. \quad (5.74)$$

Знак минус перед производной означает, что положительному приращению радиуса соответствует отрицательное приращение скорости. Постоянную интегрирования  $C_1$  находим из следующего условия: при  $r = 0$ ,  $u_x = u_m = \text{const}$  производная  $du_x/dr = 0$  и  $C_1 = 0$ .

Второе интегрирование производим при следующем граничном условии:  $r = r_0$ ,  $u_x = 0$ :

$$u_x = -\frac{A}{9} r^3 + C_2. \quad (5.75)$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  находим из условий:  $r = r_0$ ,  $u_x = 0$ ,  $C_2 = Ar_0^3/9$ .

Подставив значение  $C_2$  в уравнение (5.75), получим уравнение, описывающее профиль скорости по сечению аппарата в восходящей части потока:

$$u_{xy} = \frac{A}{9} (r_0^3 - r^3) \quad (5.76)$$

Для нахождения уравнения, описывающего профиль скорости в нисходящей части потока жидкости, произведём двойное интегрирование (5.72). После первого интегрирования получим

$$\left(r \frac{du_x}{dr}\right) = \frac{A}{3} r^3 + C_3. \quad (5.77)$$

Постоянную интегрирования  $C_3$  находим из такого условия: при  $r = r_m$  ( $r_m$  – расстояние от оси аппарата до середины нисходящего потока),  $u_x = u_m$  производная  $du_x/dr = 0$ :

$$C_3 = -\frac{Ar_m^3}{3}.$$

Подставляя значение  $C_3$  в равенство (5.77), запишем

$$\frac{du_x}{dr} = \frac{A}{3}r^2 - \frac{A}{3}\frac{r_m}{r}.$$

После интегрирования данного выражения получим

$$u_x = \frac{A}{9}r^3 - \frac{A}{3}r_m^3 \ln r + C_4. \quad (5.78)$$

Постоянную интегрирования  $C_4$  находим из условия  $r = R$ ,  $u_x = 0$ :

$$C_4 = \frac{Ar_m^3 \ln R}{3} - \frac{AR^3}{9}.$$

Подставив значение  $C_4$  в равенство (5.78), запишем уравнение профиля скоростей в нисходящем потоке:

$$u_{xn} = \frac{A}{9} \left( r^3 - R^3 \right) + \frac{A}{3} r_m^3 \ln \frac{R}{r}. \quad (5.79)$$

Уравнения (5.76) и (5.79) описывают профили локальных скоростей от оси аппарата до стенки. В них требуется найти значения радиусов  $r_0$  и  $r_m$ . Нетрудно доказать, что

$$r_m = \frac{R + r_0}{2}. \quad (5.80)$$

Радиус  $r_0$  можно найти из условия равенства объёмных расходов жидкости в восходящем и нисходящем потоках.

Расход жидкости через любое сечение определяется уравнением (13). После подстановки в него уравнения (5.76) или (5.79) получим уравнения для расчёта объёмного расхода жидкости в восходящем и нисходящем потоках:

$$Q_v = 2\pi \int_0^{r_0} u_{xv} r dr = 2\pi \frac{A}{9} \int_0^{r_0} (6^3 - r^3) r dr; \quad (5.81)$$

$$Q_n = 2\pi \int_{r_0}^R u_{xn} r dr = 2\pi \frac{A}{9} \int_0^{r_0} \left( (6^3 - R^3) + r_m^3 \ln \frac{R}{r} \right) r dr. \quad (5.82)$$

Для определения радиуса  $r_0$  воспользуемся системой MathCad. Для наглядности рассмотрим конкретный пример движения жидкости в условиях естественной конвекции в аппарате радиусом  $R = 1,5$  м при разности температур  $\Delta T = 2,5$  К. Жидкость обладает следующими физическими свойствами:  $\beta = 0,1 \cdot 10^{-3}$  град $^{-1}$ ,  $\rho = 1000$  кг/м $^3$ ,  $\mu = 1,3 \cdot 10^{-3}$  Па·с. В расчётах используем следующую программу:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,0001 \\ \text{Given} \\ 0 &= Q_v - Q_n \\ r_0 &= \text{MinErr} \\ r_0 &= 0,901, \end{aligned}$$

где  $r_0 = 0,0001$  – начальная произвольно заданная величина.

Результаты расчётов, представленные на рис. 5.5 в виде графического изображения профиля скорости по радиусу аппарата, позволяют сделать определённые выводы.

Во-первых, средние значения скоростей движения жидкости в восходящем и нисходящем потоках различны ( $w_B = 3,33$  м/с;  $w_H = 2,076$  м/с), и они настолько высоки, что течение не может быть ламинарным. Ламинарный режим возможен при очень малых значениях  $\Delta T$ .

Во-вторых, при турбулентном режиме движения жидкости, как уже было сказано в подразд. 2.5, профиль скорости по сечению потока отличается от профиля при ламинарном течении. Турбулентные потоки, согласно двухслойной модели Прандтля, делятся на две зоны, в которых профили скоростей описываются системой двух уравнений (2.76). Поэтому температура по сечению потока не может изменяться по линейному закону. Линейно она меняется только в при-

стенном слое. В турбулентном ядре она изменяется мало, так же как и скорость.

В-третьих, при турбулентном режиме движения не будет чёткой границы между восходящим и нисходящим потоками, как это предполагается при ламинарном. Здесь мы имеем дело с так называемой свободной турбулентностью, в условиях которой будет постоянно происходить обмен турбулентными вихрями между противоположно направленными потоками. Желающие более подробно ознакомиться с решением задач процессов переноса при свободной турбулентности могут обратиться к работе [2, с. 673–700].

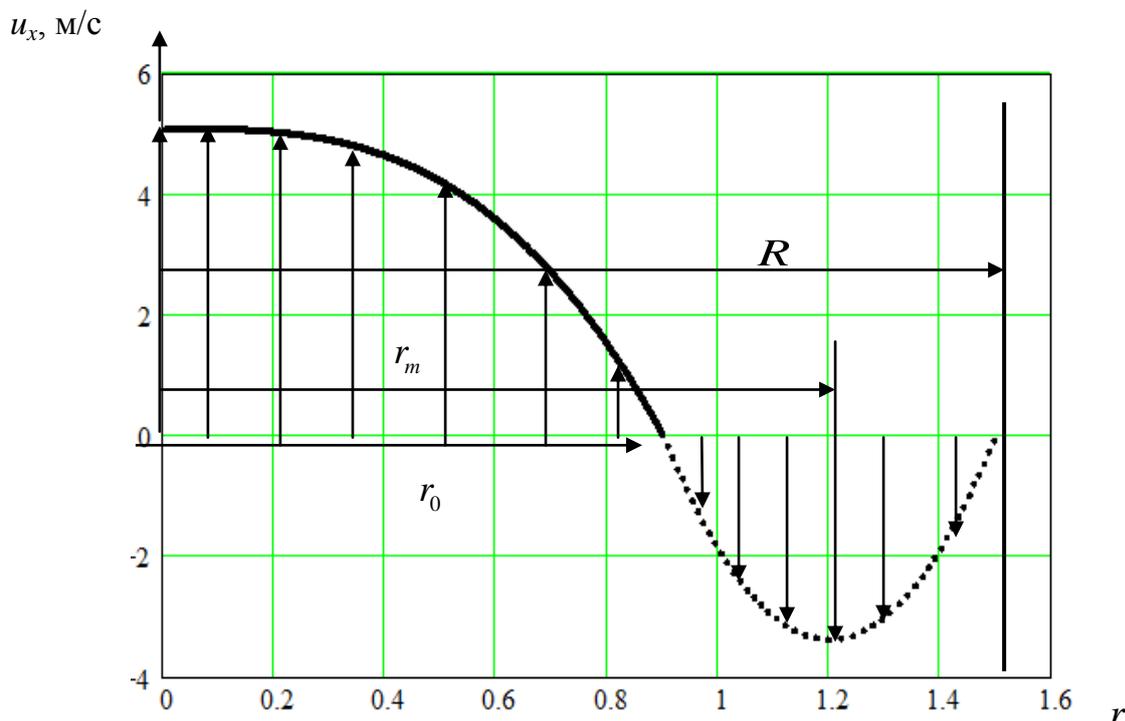


Рис. 5.5. Изменение локальных скоростей по радиусу аппарата  
Линии соответствуют: — уравнению (5.76); ..... уравнению (5.79)

Указанные обстоятельства приводят к тому, что радиус  $r_0$ , устанавливающий границу между потоками, будет постоянно меняться. Найти можно лишь его некое осреднённое значение  $\bar{r}_0$ . Решение задачи по определению радиуса сильно усложняется. Мы не будем пытаться её сейчас решать, а наметим лишь путь решения.

Так же как и при ламинарном режиме движения,  $\bar{r}_0$  находится из условия равенства расходов  $Q_B$  и  $Q_H$ . Однако входящие в уравнения (5.81) и (5.82) значения локальных скоростей  $u_{xv}$  и  $u_{xn}$  следует

находить из уравнений (2.76). Но здесь возникает другая сложность, связанная с определением динамической скорости  $u_*$ . В данном случае можно воспользоваться уравнением (5.33).

Динамическая скорость является мерой интенсивности турбулентных пульсаций [2, стр. 543] и зависит от источника их возникновения. В рассматриваемом нами аппарате источников турбулентности два: касательные напряжения на стенке и относительная скорость движения восходящего и нисходящего потоков. Но интенсивность этих источников (при заданной температуре теплообменной поверхности) определяется разностью температур  $\Delta T$ . Последняя, в свою очередь, зависит от тепловой энергии  $E_k$ , выделяемой дрожжевыми клетками в процессе сбраживания суслу и рассчитываемой либо по уравнению (3.26), либо по (3.27). Для пивных дрожжей численный коэффициент в уравнении (3.27) должен быть иной. Таким образом, аналогично уравнению (5.47), суммарную диссипацию энергии можно выразить равенством

$$E_k = E_o + E_\tau, \quad (5.83)$$

где  $E_\tau$  – диссипация энергии, обусловленная касательным напряжением на стенке аппарата, которое рассчитывается по уравнению (1.41a);  $E_o$  – диссипация энергии, обусловленная относительным движением потоков.

Значение  $E_k$  находят экспериментально. Зная  $E_k$  и  $E_\tau$ , можно определить и  $E$ .

Исходя из указанных соображений, динамическую скорость вычислим по уравнению (5.33), заменив в нём  $E$  на  $E_k$ . В итоге получим

$$u_* = \chi \left( \frac{\mu E_k}{\rho_{\text{ж}}^2} \right)^{0,25}. \quad (5.84)$$

#### 5.4.2. Теплообмен

Аналитическое решение задачи по теплообмену между стенкой аппарата и жидкостью при естественной конвекции значительно затруднено, поэтому в литературе приводятся уравнения для расчёта

коэффициентов теплообмена в условиях естественной конвекции в критериальном виде [16, с. 308]:

$$\text{Nu} = C(\text{Gr Pr})^n, \quad (5.85)$$

где  $C$  и  $n$  – коэффициенты, определяемые экспериментально (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Режим движения	Gr Pr	$C$	$n$
Ламинарный	500	1,18	0,125
Переходный	500–2·10 <sup>7</sup>	0,54	0,25
Турбулентный	Более 2·10 <sup>7</sup>	0,135	0,33

В уравнении (5.85)  $\text{Gr} = g\rho R^2\beta\Delta T / \mu^2$  – критерий Грасгофа. Он связан с критерием Рейнольдса зависимостью

$$\text{Gr} = B \text{Re},$$

где коэффициент  $B$  зависит от формы поперечного сечения канала.

При турбулентном режиме движения коэффициент теплообмена между стенкой аппарата и жидкостью можно определить и по уравнениям (5.4), (5.18) и (5.84), из которых следует, что в условиях естественной конвекции уравнение для расчёта коэффициента теплообмена принимает вид

$$\alpha = 0,18 \frac{\lambda_{\text{T}}}{d_{\text{a}}} \left( \frac{\chi \rho_{\text{ж}} \left( \frac{\mu E_k}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{0,25} d_{\text{a}}}{\mu} \right)^{0,95} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.86)$$

Из уравнений (5.84) и (5.86) наглядно видна связь динамической скорости  $u_*$ , определяющей гидродинамические условия в аппарате, коэффициента теплообмена  $\alpha$  с удельной скоростью прироста биомассы  $\mu$  и со скоростью выделения дрожжевыми клетками теплоты  $E_k$  в условиях естественной конвекции.

Рассмотренную задачу теплообмена между стенкой бродильного аппарата и сбразживаемым пивным суслим при турбулентном движении жидкости в условиях естественной конвекции нельзя считать завершённой. Требуются следующие дополнительные исследования как теоретического, так и экспериментального характера: во-первых, по теплообмену в целях уточнения коэффициента пропорциональности  $\chi$  (в первом приближении его можно принять равным 1.9); во-вторых, по определению величин, входящих в уравнение (5.84). Последние наиболее сложные, так как связаны не только с исследованием гидродинамики, но и с установлением кинетических закономерностей протекания биологических процессов при брожении.

В рассмотренном примере, как нигде, видна взаимосвязь гидродинамических, теплообменных, массообменных и биологических процессов, протекающих в различных аппаратах пищевых и микробиологических производств.

Многие проблемы и задачи, поставленные в данном учебном пособии, предстоит решать Вам – будущим учёным. Пособие в какой-то мере поможет выбрать пути их решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Липатов Н.Н.** Процессы и аппараты пищевой промышленности. – М.: Экономика, 1987. – 272 с.
2. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
3. Реологические основы расчёта оборудования производства жиросодержащих пищевых продуктов / В.А. Арет, Б.Л. Николаев, Г.П. Забровский, Л.К. Николаев. – СПб.: СПГУНиПТ, 2004. – 342 с.
4. **Кутателадзе С.С.** Теплопередача и гидравлическое сопротивление: Справ. пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 366 с.
5. **Кутателадзе С.С., Стырикович М.А.** Гидродинамика газожидкостных систем. – М.: Энергия, 1976. – 296 с.
6. **Прандтль Л.** Гидродинамика. – М.: Иностран. лит., 1951. – 576 с.
7. **Будтов В.П., Консетов В.В.** Тепломассоперенос в полимеризационных процессах. – Л.: Химия, 1983. – 256 с.
8. **Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков В.В.** Примеры и задачи по курсу «Процессы и аппараты химической технологии»: Учеб. пособие для вузов. – М.: Химия, 1981. – 560 с.
9. **Тишин В.Б.** Культивирование микроорганизмов. Кинетика, гидродинамика, тепло- и массообмен. – СПб.: РАПП, 2012. – 180 с.
10. **Соколов В.Н., Доманский И.В.** Газожидкостные реакторы. – Л.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
11. **Араманович И.Г., Левин В.И.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
12. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.И.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 733 с.
13. **Левич В.Г.** Физико-химическая гидродинамика. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 700 с.
14. **Akita K., Ioshida F.** Bubble size, interfacial area, and liquid phase mass transfer coefficient in bubble columns. – Ind. Eng. Chem. Process Des Develop. 1974, v. 13, № 1, p. 84–90.
15. **Akita K., Ioshida F.** Gas holdup and volumetric mass transfer coefficient in bubble columns. – Ind. Eng. Chem. Process Des Develop. 1973, v. 12, № 1, p. 76–80.

16. **Коган В.Б.** Теоретические основы типовых процессов химической технологии. – Л.: Химия, 1977. – 591 с.
17. **Фролов В.Ф.** Лекции по курсу «Процессы и аппараты химической технологии». – СПб.: Химиздат, 2003. – 607 с.
18. Химическая гидродинамика: Справ. пособие / А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов и др. – М.: Бюро Квантум, 1996. – 366 с.
19. **Finean J., Coleman R., Michell R.H.** Membranes and their cellular functions. Blackwell Scientific Publications Oxford London, 1974. – 199 с.
20. **Елинов Н.П.** Основы биотехнологии. – СПб.: Наука, 1995. – 600 с.
21. Промышленная микробиология / З.А. Аркадьева, В.М. Безбородов и др. – М.: Высш. шк., 1989. – 688 с.
22. **Гапонов К.П.** Процессы и аппараты микробиологических производств. – М.: Лег. и пищ. пром-сть, 1981. – 339 с.
23. **Шишацкий Ю.И., Фёдоров В.А., Остриков С.В.** Современные конструкции дрожжерастительных аппаратов и пути повышения эффективности их работы. – М.: ЦНИИ и ГЭИ пищ. пром., 1977. – 20 с.
24. **Рамм В.М.** Абсорбция газов. – М.: Химия, 1976. – 656 с.
25. **Новосёлов А.Г., Тишин В.Б., Дужий А.Б.** Справочник по молекулярной диффузии. Новый справочник химика и технолога. Ч. 2. Процессы и аппараты химических технологий. – СПб.: НПО «Профессионал», 2006. – с. 783–909.
26. **Шервуд Г., Пигфорд Р., Уилки У.** Массопередача. – М.: Химия, 1982. – 696 с.
27. **Барановский Н.В., Коваленко Л.М., Ястребенецкий А.Р.** Пластинчатые и спиральные теплообменники. – М.: Машиностроение, 1973. – 288 с.
28. **Бирюков В.А., Кантере В.М.** Оптимизация периодических процессов микробиологического синтеза. – М.: Наука, 1985. – 292 с.
29. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
30. **Доманский И.В., Соколов В.Н.** Обобщение различных случаев конвективного теплообмена с помощью полуэмпирической теории турбулентного переноса // ТОХТ. 1968. № 5. С. 761–768.

31. **Кишиневский М.Х., Логинов А.В., Корниенко Т.С.** Экспериментальное исследование закономерностей турбулентного переноса в вязком подслое электрохимическим методом. Материалы к 5 Всесоюз. конф. по тепло- и массообмену. – Минск, 1976, I, ч. 1. С. 43–47.

32. **Sideman S, Pinczewski W.** Turbulent heat and mass transfer at interfaces : Transport models and mechanisms. – In: Top. Transfer. Phenom. Bioprocesses, math. treatment mech., New York e. a., 1975. P. 47–271.

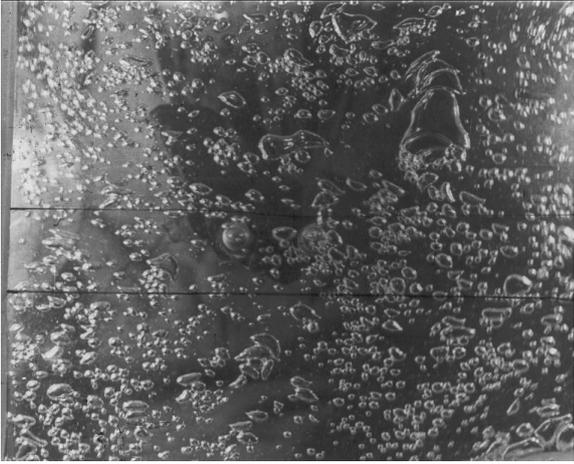
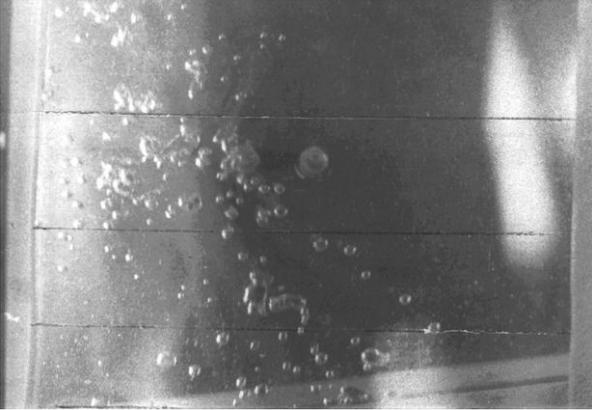
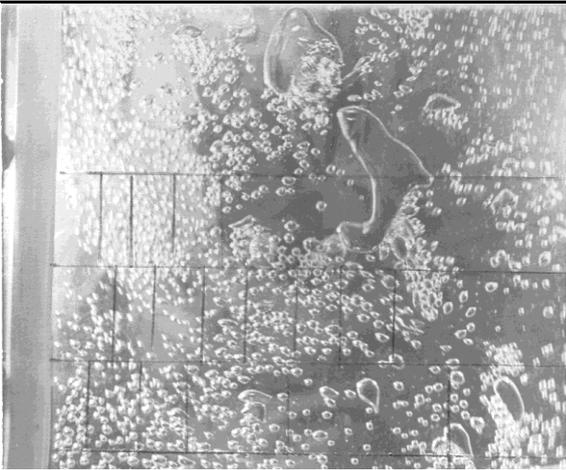
33. **Соколов В.Н., Яблокова М.М.** Аппаратура микробиологической промышленности. – Л.: Машиностроение, 1988. – 278 с.

34. **Шишацкий Ю.И.** Производство хлебопекарных дрожжей: Справ. – М.: Пищ. пром-сть, 1990. – 201 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

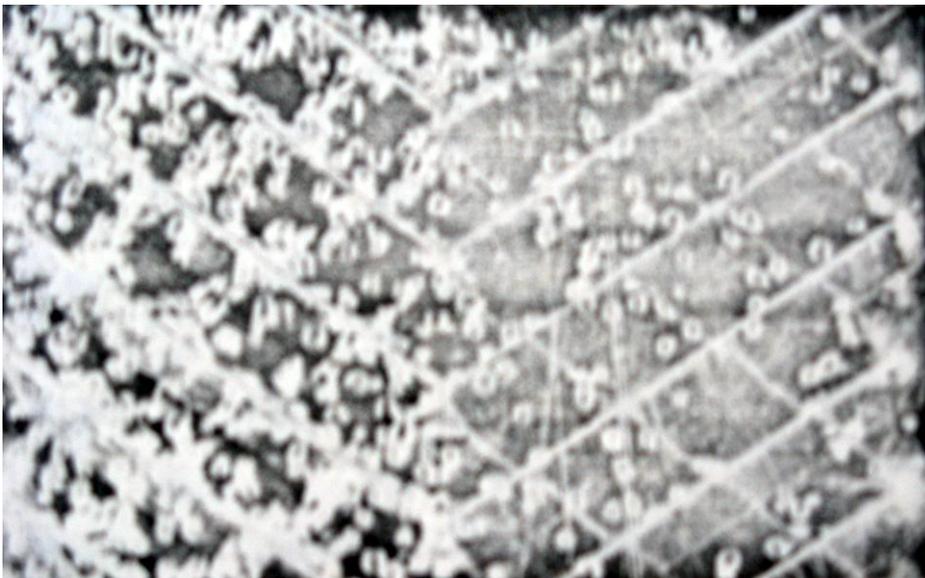
### Структуры газожидкостных потоков в плоских каналах

Нисходящий поток	Восходящий поток
 <p data-bbox="336 1099 555 1189"> <math>w_{\text{ж}} = 0,44 \text{ м/с}</math>  <math>w_{\text{г}} = 0,052 \text{ м/с}</math> </p>	 <p data-bbox="940 1048 1161 1137"> <math>w_{\text{ж}} = 0,44 \text{ м/с}</math>  <math>w_{\text{г}} = 0,026 \text{ м/с}</math> </p>
 <p data-bbox="336 1816 555 1906"> <math>w_{\text{ж}} = 0,574 \text{ м/с}</math>  <math>w_{\text{г}} = 0,052 \text{ м/с}</math> </p>	 <p data-bbox="940 1816 1161 1906"> <math>w_{\text{ж}} = 0,574 \text{ м/с}</math>  <math>w_{\text{г}} = 0,104 \text{ м/с}</math> </p>

**Структуры газожидкостных потоков  
в гофрированных каналах**

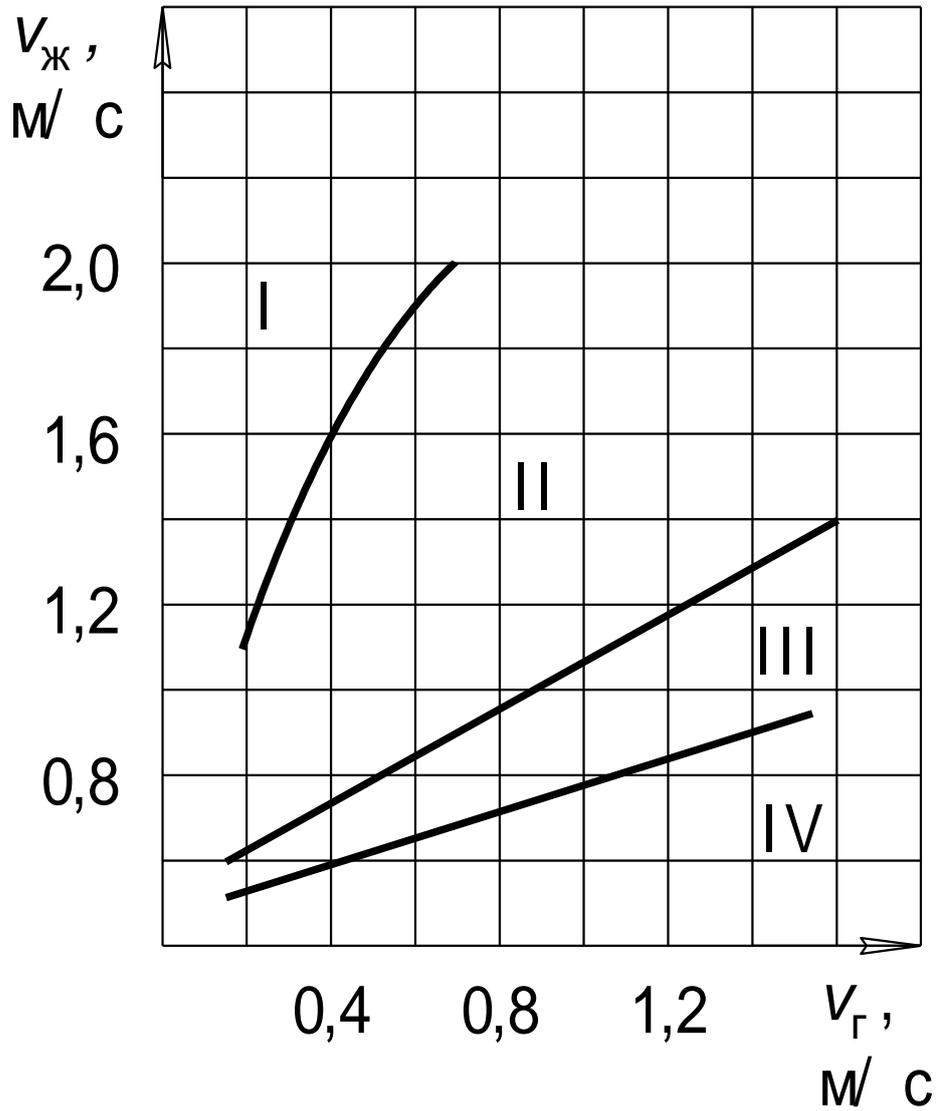


$w_{\Gamma} = 0,06 \text{ м/с}; w_{\text{ж}} = 0,27 \text{ м/с}$



$w_{\Gamma} = 0,06 \text{ м/с}; w_{\text{ж}} = 0,47 \text{ м/с}$

**Карта структур газожидкостных потоков  
в вертикальных трубах при нисходящем течении**



Режимы: I – пузырьковый; II – снарядный; III – переходный;  
IV – стержневой (плёночный)

Карты структур газожидкостных потоков

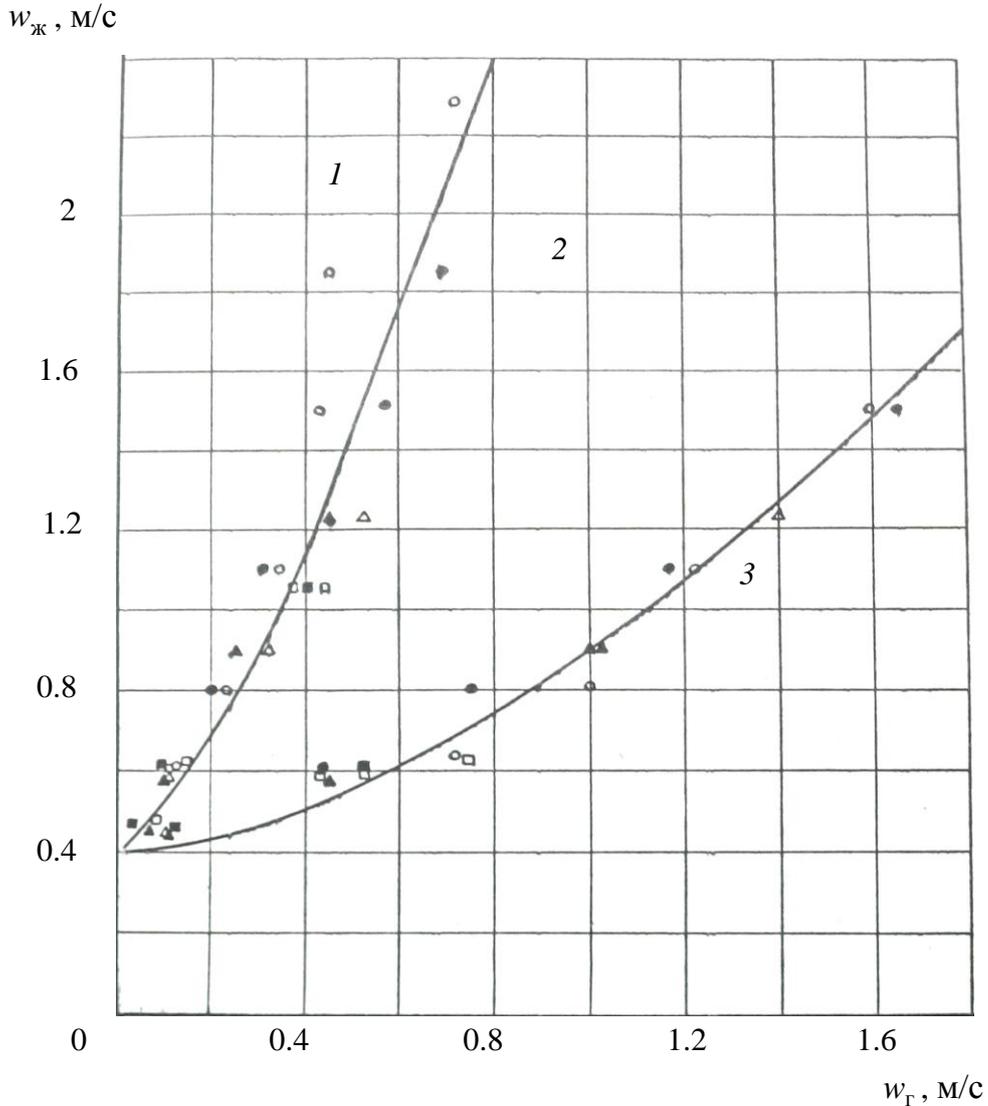


Рис. П.4.1. В плоских каналах  
(поток восходящий и нисходящий):  
режимы: 1 – пузырьковый; 2 – пенный; 3 – плёночный

Уравнения кривых, разделяющих режимы течения:

пузырьковый – при условии  $w_{ж} \geq 2,7w_{г}^{1,35} + 0,4$ ;

плёночный – при условии  $w_{ж} \leq 0,5w_{г}^{1,65} + 0,4$

В диапазоне между этими двумя режимами расположен пенный режим.

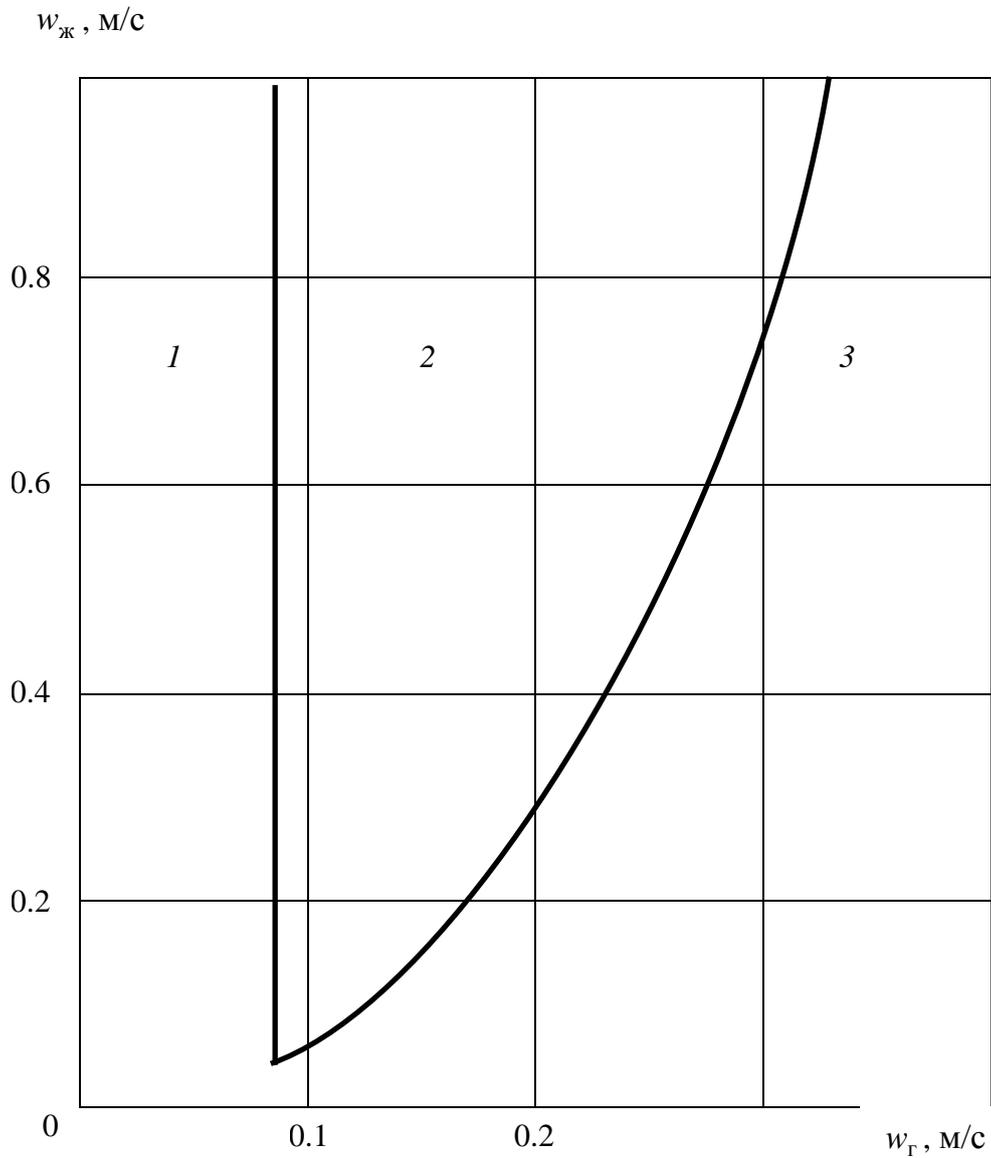


Рис. П.4.2. В гофрированных каналах:  
 режимы: 1 – пузырьковый; 2 – переходный; 3 – пенный  
 Уравнения кривых, разделяющих режимы течения:  
 пузырьковый – при условии  $w_r \leq 0,09$  ;  
 пенный – при условии  $w_r \geq 0,36 w_{\text{ж}}^{0,43}$

В диапазоне между этими двумя режимами расположен переходный.

**Значения условных коэффициентов гидравлического трения  
для пластинчатых аппаратов с различной формой гофр  
(ленточно-поточные пластины)**

Тип пластин	Вид уравнения	Примечания
П <sub>2</sub>	$\lambda_y = 11,2 \cdot Re^{-0,25}$ $\lambda_y = 4 \cdot Re^{-0,25}$	30000 > Re > 10 30000 > Re > 100
П <sub>5</sub>	$\lambda_y = 210 \cdot Re^{-1}$	Re ≤ 100
«Альборн»	$\lambda_y = 4 \cdot Re^{-0,25}$	20000 ≥ Re ≥ 1000
«Парафлоу-APV»	$\lambda_y = 27,2 \cdot Re^{-0,55}$	25000 > Re > 1000
С сетчатой объёмной вставкой	$\lambda_y = 6 \cdot Re^{-0,25}$ $\lambda_y = 0,9$	Re ≤ 1700 Re > 1700

## Приложение 6

### Законы затухания турбулентных пульсаций в пристеночных слоях

Вид функции $\varepsilon/\nu(\eta)$	Границы изменения $\eta$	Закон затухания в вязком слое	Литература
$\frac{\varepsilon}{\nu} = n^2 \varphi \eta \left( -e^{-n^2 \varphi \eta} \right), n = 0,124$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{2,78} - 1$	$0 \leq \eta \leq 26$  $\eta > 26$	Четвертой степени	[32]
$\frac{\varepsilon}{\nu} = (0,124\eta)^4$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{5} - 1$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{2,5} - 1$	$\eta < 6$  $6 \leq \eta \leq 30$  $\eta > 30$	Четвертой степени	[25]
$\frac{\varepsilon}{\nu} = 0,5 \left\{ 1 + 4k^2 \eta^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{A}\right) \right]^2 \right\}^{0,5} - 0,5;$ $k = 0,4; A = 26$	Во всем диапазоне изменения $\eta$	Четвертой степени	[32]
$\frac{\varepsilon}{\nu} = \left( \frac{\eta}{14,5} \right)^3$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{5} - 1$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{2,5} - 1$	$\eta < 5$  $5 \leq \eta \leq 30$  $\eta > 30$	Третьей степени	[32]
$\frac{\varepsilon}{\nu} = 0,1\eta^3$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{5} - 1$ $\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\eta}{2,5} - 1$	$\eta < 10$  $10 \leq \eta \leq 30$  $\eta > 30$	Третьей степени	[9]

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	3
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ</b> .....	15
1.1. Уравнение сохранения массы (неразрывности потока) .....	15
1.2. Уравнение переноса количества движения .....	17
1.2.1. Вязкость .....	17
1.2.2. Силы, действующие в жидкости. Напряжённое состояние жидкости .....	20
1.2.3. Уравнение движения в напряжениях .....	25
1.2.4. Уравнения движения вязкой сплошной среды .....	26
1.3. Уравнение энергии .....	28
<b>2. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ</b> .....	35
2.1. Режимы течения .....	35
2.2. Гидродинамическое подобие .....	35
2.3. Ламинарные течения .....	41
2.3.1. Течение в плоском канале .....	41
2.3.2. Течение в трубе с круглым поперечным сечением .....	44
2.3.3. Течение Куэтта .....	47
2.3.4. Течение жидкости в капиллярах .....	49
2.4. Вискозиметрия жидких продуктов .....	52
2.4.1. Капиллярный вискозиметр .....	52
2.4.2. Ротационные вискозиметры .....	54
2.4.3. Диссипативный метод исследований реологических свойств высоковязких сред .....	57
2.5. Турбулентные течения .....	62
2.6. Гидродинамика газожидкостных потоков .....	68
2.6.1. Основные понятия и определения гидродинамики многофазных потоков .....	69
2.6.2. Поверхность контакта фаз .....	71
2.6.3. Режимы и структуры течения и газосодержание газожидкостных потоков .....	72
2.6.4. Газосодержание газожидкостных потоков .....	77

2.6.5. Определение параметра межфазной турбулентности .....	81
2.6.6. Определение диаметра пузырей .....	89
<b>3. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ И МАССЫ .....</b>	<b>93</b>
3.1. Общие закономерности переноса теплоты .....	94
3.2. Перенос теплоты теплопроводностью .....	97
3.3. Уравнение переноса массы .....	107
3.3.1. Предварительные сведения о процессах переноса массы .....	107
3.3.2. Молекулярный перенос массы .....	116
3.3.3. Стационарный массообмен .....	119
3.3.4. Нестационарный массообмен .....	120
3.4. Аналогия между процессами переноса .....	121
<b>4. КОНВЕКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ И МАССЫ .....</b>	<b>125</b>
4.1. Эмпирический метод решения задач тепло- и массообмена .....	125
4.1.1. Теплообмен при движении однофазных жидкостей .....	126
4.1.2. Теплообмен при движении газожидкостных потоков .....	127
4.2. Аналитический и полуэмпирический методы .....	129
4.3. Краткие сведения о законах распределения турбулентных пульсаций .....	136
4.4. Турбулентные числа Прандтля .....	140
<b>5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОБМЕНА НА ОСНОВЕ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ПЕРЕНОСОМ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И ТЕПЛОТЫ И МАССЫ .....</b>	<b>143</b>
5.1. Теплообмен между потоком однофазной жидкости и гладкой теплопередающей поверхностью .....	147
5.1.1. Теплообмен в каналах с различной формой поперечного сечения .....	147
5.1.2. Теплообмен при движении жидкостей в гофрированных каналах пластинчатых аппаратов .....	149

5.2. Теплообмен между газожидкостной смесью и теплопередающей поверхностью .....	154
5.2.1. Культиваторы колонного типа с тепловой рубашкой .....	154
5.2.2. Теплообмен между газожидкостным потоком и теплопередающей поверхностью теплообменников .....	158
5.3. Теплообмен и массообмен между клеткой и культуральной жидкостью .....	163
5.3.1. Теплообмен .....	163
5.3.2. Массообмен .....	167
5.3.3. Массообмен между газом и жидкостью .....	168
5.4. Гидродинамика и теплообмен в условиях естественной конвекции .....	171
5.4.1. Гидродинамика .....	171
5.4.2. Теплообмен .....	179
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>182</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	<b>185</b>

Тишин Вячеслав Борисович  
Новосёлов Александр Геннадиевич  
Головинская Оксана Владимировна

**ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА  
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ АППАРАТАХ  
ПИЩЕВЫХ И МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОИЗВОДСТВ**

**Учебное пособие**

*Ответственный редактор*  
Т.Г. Смирнова

*Редактор*  
Е.О. Трусова

*Компьютерная верстка*  
Н.Е. Дюба, Н.В. Гуральник

*Дизайн обложки*  
Н.А. Потехина

---

Подписано в печать 29.08.2016. Формат 60×84 1/16  
Усл. печ. л. 11,4. Печ. л. 12,25. Уч.-изд. л.12,0  
Тираж 100 экз. Заказ № С 21

---

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49  
Издательско-информационный комплекс  
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

