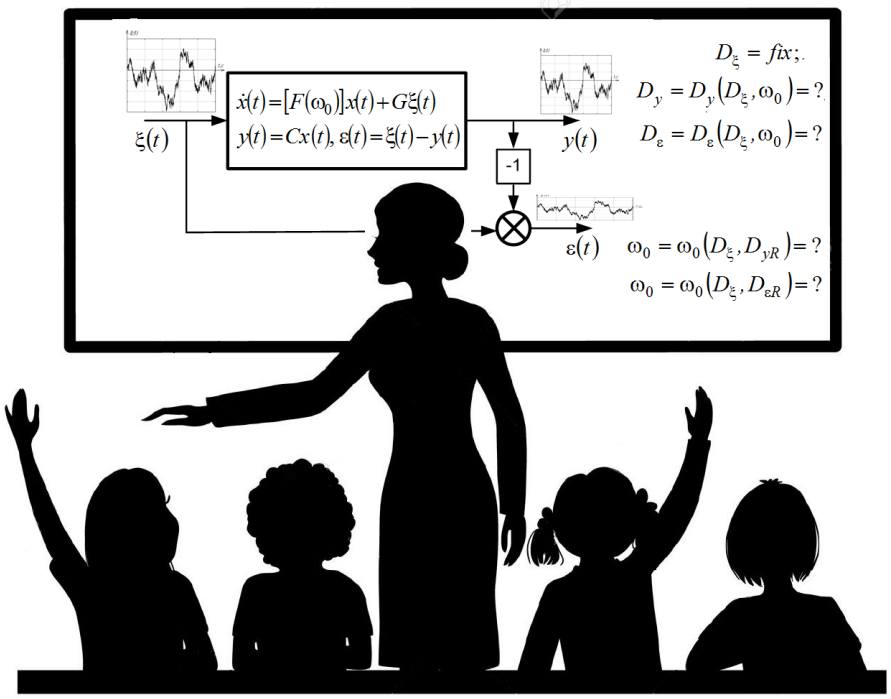
А.В. Ушаков, Н.А. Вундер, М.В. Сержантова,

О.В. Слита

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Учебное пособие для университетов



Санкт-Петербург

2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

А.В. Ушаков, Н.А. Вундер, М.В. Сержантова,

О.В. Слита

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Учебное пособие для университетов

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2016

УДК 517/519:62.50:681.3

Ушаков А.В., Вундер Н.А., Сержантова М.В., Слита О.В. Стохастическая динамика непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенности: Учебное пособие для университетов / Под ред. А. В. Ушакова – СПб.: Университет ИТМО , 2016. 297 с., 23 ил.

Рецензенты: д.т.н., профессор В.Н. Дроздов;
д.т.н., профессор В.Т. Шароватов

В учебном пособии излагаются базовые концепции управления линейными непрерывными и дискретными техническими объектами с параметрическими неопределенностями в условиях стохастических внешних воздействий. В основу аналитических модельных представлений в учебном пособии положен векторно-матричный формализм метода пространства состояний. При исследовании влияния параметрической неопределенности объектов на качество стохастических процессов используется аппарат теории чувствительности. При синтезе систем с заданными значениями дисперсий ошибки и выхода используются возможности метода медианного модального управления. Учебное пособие сориентировано на подготовку магистров по направлению 27.04.03 – «Системный анализ и управление» по программе «Интеллектуальное управление техническими процессами».

Учебное пособие может быть также рекомендовано магистрам направления 27.04.04 «Управление в технических системах» по программе «Цифровое управление в современной технике» и магистрам направления 15.04.09 «Мехатроника и робототехника» по программе «Интеллектуальные технологии в робототехнике».

Учебное пособие может быть полезно аспирантам, обучающихся в аспирантуре по специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)» и молодым специалистам, чья практическая деятельность связана с задачами автоматического управления техническими объектами.

В 2009 году Университет ИТМО стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Утверждено к печати Советом факультета Систем управления и мехатроники, протокол № 2 от 04.10.2016.

©Университет ИТМО, 2016.
© Ушаков А.В., Вундер Н.А.,Сержантова М.В., Слита О.В. 2016.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Contents		10
Предисловие		16
Используемые термины, обозначения и сокращения		19
Введение. Основные проблемы стохастической динамики непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенностей		22
1.	Стохастические события и величины	26
	1.1 Основные характеристики стохастических счетных событий	27
	1.2 Основные характеристики стохастических скалярных величин	28
	1.3 Основные характеристики стохастических векторных величин	37
	Контрольные вопросы	41
2.	Непрерывные стохастические процессы	43
	2.1 Основные характеристики скалярных непрерывных стохастических процессов	43
	2.2 Основные характеристики векторных непрерывных стохастических процессов	45
	Контрольные вопросы	50
3.	Дискретные стохастические процессы	51
	3.1 Основные характеристики скалярных дискретных стохастических процессов	51
	3.2 Основные характеристики векторных дискретных стохастических процессов	53
	Контрольные вопросы	57
4.	Реакция непрерывной стационарной линейной системы на непрерывное стохастическое экзогенное воздействие типа «белый шум»	58
	4.1 Вычисление матриц дисперсий переменных системы. Матричное уравнение Ляпунова	58
	4.2 Вычисление корреляционных матриц векторов состояния и выхода системы	65
	4.3 Вычисление матриц спектральных плотностей векторов состояния и выхода	69
	Контрольные вопросы	73

5. Реакция дискретной стационарной линейной системы на дискретное стохастическое экзогенное воздействие типа дискретный «белый шум» 75

5.1 Вычисление матриц дисперсий переменных системы. Дискретное матричное уравнение Ляпунова 75

5.2 Вычисление корреляционных матриц векторов состояния и выхода системы 80

5.3 Вычисление матриц спектральных плотностей векторов состояния и выхода 82

Контрольные вопросы 84

6. Стохастические непрерывные процессы стационарные в широком смысле типа «окрашенный шум» 86

6.1 Окрашенный стохастический процесс типа «экспоненциально коррелированный» шум. Формирование из «белого шума» с помощью апериодического звена 87

6.2 Окрашенный стохастический процесс типа «нерегулярная качка». Формирование из «белого шума» с помощью. колебательного звена 90

6.3 Сложный окрашенный стохастический процесс мультипликативного типа. Формирование из «белого шума» последовательным соединением апериодического и колебательного звеньев 94

6.4 Сложный окрашенный стохастический процесс аддитивного типа. Формирование из «белого шума» параллельным соединением апериодического и колебательного звеньев 101

Контрольные вопросы 107

7. Реакция стационарной линейной системы на стохастическое экзогенное воздействие стационарное в широком смысле типа «окрашенный шум » 109

7.1 Реакция непрерывной стационарной линейной системы на непрерывное стохастическое экзогенное воздействие стационарное в широком смысле типа «окрашенный шум». 109

7.2 Реакция дискретной стационарной линейной системы на дискретное стохастическое экзогенное воздействие стационарное в широком смысле типа «окрашенный шум». 124

Контрольные вопросы 130

8. Компьютерное моделирование стохастических процессов в линейных стационарных системах 132

8.1 Связь параметров непрерывного и дискретного «белых шумов». Генераторы стохастического экзогенного воздействия типа дискретный «белый шум» в модельной среде Simulink 132

8.2 Алгоритм компьютерного экспериментального исследования в оболочке Simulink линейной стационарной непрерывной системы при «окрашенном» дискретном экзогенном воздействии эквивалентном непрерывному 137

Контрольные вопросы 142

9. Скаляризация характеристик стационарных в широком смысле стохастических непрерывных и дискретных процессов с помощью аппарата минорантных и мажорантных представлений 144

9.1 Сингулярное разложение матриц. Миноранты и мажоранты отображения векторов, принадлежащих сфере, с помощью линейного оператора 144

9.2 Сингулярное разложение матриц дисперсий векторных переменных непрерывных и дискретных систем. Миноранты и мажоранты дисперсий стохастических векторных переменных непрерывной и дискретной системы 152

9.3 Сингулярное разложение корреляционных матриц векторных переменных непрерывных и дискретных систем. Миноранты и мажоранты функций ковариации стохастических векторных переменных непрерывной и дискретной системы 163

9.4. Сингулярное разложение матриц спектральных плотностей векторных переменных непрерывных и дискретных систем. Миноранты и мажоранты функций спектральных плотностей стохастических векторных переменных непрерывной и дискретной системы 171

Контрольные вопросы 179

10. Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей 181

10.1 Передаточные функции непрерывных полиномиальных моделей общего вида, параметризованные характеристической частотой. Общесистемные характеристики 181

10.2 Передаточные функции непрерывных полиномиальных моделей частного вида, параметризованные характеристической частотой 187
10.2.1 Непрерывные полиномиальные модели с биномиальным размещением Ньютона корней полинома знаменателя передаточной функции, параметризованной характеристической частотой 187
10.2.2 Непрерывные полиномиальные модели с круговым размещением Баттерворта корней полинома знаменателя передаточной функции, параметризованной характеристической частотой 188
10.3 Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей общего вида при экзогенном воздействии типа «белый шум» 190
10.4 Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей общего вида при экзогенном воздействии типа окрашенный «экспоненциально коррелированный» шум 192
10.4.1 Полные аналитические представления дисперсий выхода и ошибки, параметризованные характеристической частотой 192
10.4.2 Полные аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой 196
10.4.3 Асимптотические аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой 197
10.5 Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей общего вида при экзогенном воздействии типа окрашенный шум вида «нерегулярная качка» 199
10.5.1 Полные аналитические представления дисперсий выхода и ошибки, параметризованные характеристической частотой 199

10.5.2 Полные аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой 204
10.5.3 Асимптотические аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой 205
Контрольные вопросы 206
11. Синтез непрерывных систем при номинальных параметрах объекта на заданные значения дисперсий их переменных 208
11.1 Две задачи стохастической динамики непрерывных систем: динамика систем с минимальными значениями дисперсией выхода и ошибки слежения 213
11.2 Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» 214
11.3 Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии ошибки слежения за стохастическим экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» 216
11.4 Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка» 217
11.5 Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии ошибки слежения за стохастическим экзогенным воздействием типа «нерегулярная качка» 218
Контрольные вопросы 219
12. Синтез дискретных систем при номинальных параметрах дискретных объектов на заданные значения дисперсий их переменных 222
12.1 Две задачи стохастической динамики дискретных систем: динамика систем с минимальными значениями дисперсией выхода и ошибки слежения 227
12.2 Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом дискретном экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» 228

12.3 Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии ошибки слежения за дискретном стохастическим экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» 230
12.4 Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом дискретном экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка» 231
12.5 Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии ошибки слежения за дискретным стохастическим экзогенным воздействием типа «нерегулярная качка» 233
Контрольные вопросы 234

13. Синтез систем при неопределенных значениях параметров объекта, заданных в интервальной форме, методом медианного управления на заданные значения дисперсий переменных с контролем значения их относительной интервальности 237
13.1 Концепция управляемой относительной параметрической интервальности 238
13.2 Векторно–матричная модель объекта с неопределенностями, заданными в интервальной форме 240
13.3 Алгоритм синтеза медианного управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум 244
13.4 Алгоритм синтеза медианного управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии ошибки слежения за стохастическим экзогенным воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» с контролем величины его относительной интервальности 247
13.5 Алгоритм синтеза медианного управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка» 249

13.6 Алгоритм синтеза медианного модального управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии шибки слежения за стохастическим экзогенным воздействии типа «нерегулярная качка» с контролем величины его относительной интервальности 251
Контрольные вопросы 254

14. Информационное обеспечение задач управления средствами динамических наблюдающих устройств 256
14.1 Наблюдающие устройства Люенбергера при стохастической природе системных переменных 257
14.2 Наблюдающие устройства типа фильтр Калмана при стохастической природе системных переменных 264
Контрольные вопросы 265
Заключение 266
Литература 267
Приложение 1. Развернутое представление полиномов числителей и знаменателей компонентов матрицы дисперсии агрегированного вектора состояний, представленных системой соотношений (10.70) 271
Приложение 2. Элементы интервальных представлений и вычислений 272
Приложение 3. М–файлы 280
Приложение 4. Варианты заданий для РИРМ 282
Из истории кафедры «Систем управления и информатики» 290
Об авторах 296

C O N T E N T S

Contents		10
Preface		16
Terms, notations and abbreviations		19
Introduction. The main problems stochastic dynamics of continuous and discrete systems in conditions of uncertainty		22
1.	Stochastic events and values	26
	1.1 Main characteristics of stochastic countable events	27
	1.2 Main characteristics of stochastic scalars	28
	1.3 Main characteristics of stochastic vector variables	37
	Checking questions	41
2.	Continuous stochastic processes	43
	2.1 The main characteristics of scalar continuous stochastic processes	43
	2.2 The main characteristics of vector continuous stochastic processes	45
	Checking questions	50
3.	Discrete stochastic processes	51
	3.1 The main characteristics of the scalar discrete stochastic processes	51
	3.2 The main characteristics of vector discrete stochastic processes	53
	Checking questions	57
4.	Response of continuous linear stationary systems to continuous stochastic exogenous influence of the type of continuous "white noise"	58
	4.1 The calculation of the matrices of variances of variables of the system. Matrix Lyapunov equation	58
	4.2 The calculation of the correlation matrices of vectors of state and output of the system	65
	4.3 The calculation of the matrices of spectral densities of the vectors of state and output	69
	Checking questions	73
5.	Response of discrete stationary linear system to discrete stochastic exogenous influence of the type of discrete "white noise"	75
	5.1 The calculation of the variance matrices of the system variables. Discrete matrix Lyapunov equation	75

	5.2	The calculation of the correlation matrices of vectors of state and output of the system	80
	5.3	The calculation of the matrices of spectral densities of the vectors of state and output of the system	82
	Checking questions		84
6.	Continuous stochastic processes stationary in the broad sense of a type of «colored noise»		86
	6.1	Painted a stochastic continuous process of type «exponentially correlated» noise. Its formation from «white noise» with help of aperiodic unit	87
	6.2	Painted the stochastic process of the type "irregular pitching". Its formation from «white noise» with help of oscillatory unit	90
	6.3	Complex colored stochastic multiplicative type process. Its formation from «white noise» with help of connected aperiodic and oscillatory units	94
	6.4	Complex colored stochastic additive type process. Its formation from «white noise» with help of parallel connection of aperiodic and oscillatory units	101
	Checking questions		107
7.	Response of stationary linear system to a stochastic exogenous stationary in a broad sense influence of "colored noise " type		109
	7.1	Response of stationary linear continuous system to a stochastic exogenous stationary in a broad sense influence of "colored noise " type	109
	7.2	Response of stationary discrete linear system to a stochastic exogenous stationary in a broad sense influence of "colored noise " type	124
	Checking questions		130
8.	Computer simulation of stochastic processes of linear stationary systems		132
	8.1	The relationships between the parameters of continuous and discrete "white noise". Generators of stochastic exogenous influence of the discrete "white noise" type in the Simulink	132
	8.2	The algorithm of the computer experimental research of linear stationary continuous system with help of "painted" discrete exogenous influence which the equivalent continuous it in the Simulink	137

Checking questions 142

9. Scalarization of stationary in the wide sense stochastic continuous and discrete processes characteristics using the apparatus minorant and majorant presentations 144

9.1 Singular value decomposition of matrices. Minorant and majorant display vectors belonging to the sphere of a linear operator 144

9.2 Singular value decomposition of the matrices of variances of vector variables continuous and discrete systems. Minorant and majorant variances of stochastic vector variables continuous and discrete systems 152

9.3 Singular value decomposition of the correlation matrices of the vector variables of continuous and discrete systems. Minorant and majorant covariance functions of stochastic vector variables continuous and discrete systems 163

9.4. Singular value decomposition of the matrices of spectral densities of vector variables continuous and discrete systems. Minorant and majorant functions, spectral densities of stochastic vector variables continuous and discrete systems 171

Checking questions 179

10. Stochastic characteristics of continuous polynomial models 181

10.1 The general form transfer function of the continuous polynomial models, parameterized by the characteristic frequency. System-wide characteristics 181

10.2 The transfer function of the special cases of continuous polynomial models, parameterized by the characteristic frequency 187

10.2.1 Continuous polynomial model with the Newton binomial location of the roots of the denominator polynomial of the transfer function parameterized by a characteristic frequency 187

10.2.2 Continuous polynomial model with the Butterworth circular location of the roots of denominator polynomial of the transfer function parameterized by a characteristic frequency 188

10.3 Stochastic characteristics of the general form continuous polynomial models for the exogenous influence of the "white noise" type 190

10.4 Stochastic characteristics of the general form continuous polynomial models for the painted exogenous influence of the type «exponentially correlated noise» 192
10.4.1 Full analytical representation of the variances of output and error parameterized characteristic frequency 192
10.4.2 Full analytical representation of the relative variances of output and error parameterized the relative characteristic frequency 196
10.4.3 Asymptotic analytical representation of the relative variances of output and error parameterized the relative characteristic frequency 197
10.5 Stochastic characteristics of the general form continuous polynomial models for the exogenous influence colored noise of type "irregular pitching" 199
10.5.1 Full analytical representation of the variances of output and error parameterized characteristic frequency 199
10.5.2 Full analytical representation of the relative variances of output and error parameterized the relative characteristic frequency 204
10.5.3 Asymptotic analytical representation of the relative variances of output and error parameterized the relative characteristic frequency 205
Checking questions 206
11. Synthesis of continuous systems with nominal parameters of the plant at the required values of their variables variances 208
11.1 Two tasks of stochastic dynamics of continuous systems: dynamics of systems with minimal variances of the output and of error tracking 213
11.2 The algorithm for synthesis of continuous systems at the required value of the variance of output at a stochastic exogenous "exponentially correlated noise" 214
11.3 The algorithm for synthesis of continuous systems at the required value of the variance of tracking error at a stochastic exogenous "exponentially correlated noise" 216
11.4 The algorithm for synthesis of continuous systems at the required value of the variance of output at a stochastic exogenous influence of the type "irregular pitching" 217

11.5 The algorithm for synthesis of continuous systems at the required value of the variance of tracking error at a stochastic exogenous influence of the type "irregular pitching" 218
Checking questions 219

12. Synthesis of discrete systems with nominal parameters of discrete plants at the required values of the variances of their variables 222
12.1 Two tasks of stochastic dynamics of discrete systems: dynamics of systems with minimal variances of the output and error tracking 227
12.2 The algorithm of the control device synthesis, providing discrete system required value of the variance of output at the stochastic discrete exogenous "exponentially correlated noise" 228
12.3 The algorithm of the control device synthesis, providing discrete system required value of the variance of tracking error at the discrete stochastic exogenous "exponentially correlated noise" 230
12.4 The algorithm of the control device synthesis, providing discrete-system required value of the variance of output at the stochastic discrete exogenous "irregular pitching" 231
12.5 The algorithm of the control device synthesis, providing discrete system required value of the variance of tracking error at the discrete stochastic exogenous "irregular pitching" 233
Checking questions 234

13. The synthesis of systems with uncertain parameter values of the plant presented in interval form by the method of median modal control on the required values of the variances of variables with the control values of their relative intervality 237
13.1 The concept of controlled relative parametric intervality 238
13.2 Vector–matrix model of a plant with uncertainties presented in interval form 240
13.3 The algorithm synthesis of the median control, providing the system the required variance value of the output at a stochastic exogenous influence "exponentially correlated noise" 244
13.4 The algorithm of the median control synthesis, providing the system the required variance value of tracking error at a stochastic exogenous influence "exponentially correlated noise" with estimation of the value of its relative intervality 247

13.5 The algorithm synthesis of the median control, providing the system the required variance value of the output at a stochastic exogenous influence of the type "irregular pitching" 249
13.6 The algorithm of the median control synthesis, providing the system the required variance value of tracking error at a stochastic exogenous influence of the type "irregular pitching" with estimation of the value of its relative intervality 251
Checking questions 254

14. Information support of control tasks means dynamic observers 256
14.1 The Luenberger observing devices at the stochastic nature of system variables 257
14.2 The observing devices of the type Kalman filter at the stochastic nature of system variables 264
Checking questions 265
Conclusion 266
References 268
Appendix 1. Full representations of the polynomials of the numerators and denominators of the components of the variance matrix of the aggregated state vector, represented by a system of relations (10.69) 271
Appendix 2. Elements of interval representations and calculations 272
Appendix 3. M–files 280
Appendix 4. Variants of tasks for RIRM 282
On the History of the Department of Control Systems and Informatics 290
About the authors 296

Посвящается семидесятилетию основания ***кафедры систем управления и информатики*** **(*автоматики и телемеханики*** *до 2001 года*)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 2014-ом году совместным решением Европейской Сети Аккредитования Инженерного Образования (European Network for Accreditation of Engineering Education (ENAEE) и Ассоциации Инженерного Образования России (АИОР) образовательная программа «Интелектуальные системы управления техническими процессами (Intelligent Control Systems of Technological Processes)» подготовки магистров в Университете ИТМО направления 27.04.03 «Системный анализ и управление» получила европейскую и национальную аккредитацию.

Принятию такого решения во многом способствовали качественные учебно-методические комплексы (УМК) основных дисциплин программы и их добротная библиографическая поддержка учебными пособиями, подготовленными сотрудниками кафедры СУиИ за последние годы, такими как: Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность.-СПб.:СПбГИТМО(ТУ), 2002; Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А. Математические основы теории систем: элементы теории и практикум / Под ред. А. В. Ушакова. — СПб.: СПбГУИТМО, 2006; Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Информационное обеспечение алгоритмов динамической юстировки больших телескопов / Под ред. А. В. Ушакова. — СПб.: СПбГУИТМО, 2007; Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории управления: элементы метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В.–СПб.: Балт. гос. техн. ун-т «Военмех» им.Н.Ф.Устинова. 2008; Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: СПбГУИТМО,2009; Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Следящий опто-электронный мониторинг деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения / Под ред. А. В. Ушакова.– СПб.: СПбГУИТМО,2009; Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие.– СПб: СПБГУИТМО, 2011.; Ушаков А., Сударчиков С. Следящий мониторинг деформаций устройств пространственного наблюдения: разработка алгоритмов управления.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.;

Дударенко Н., Ушаков А. Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.; Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.; Ушаков А.В. Прикладная теория информации: элементы теории и практикум: учебное пособие /Под ред. А.В.Ушакова. – СПб.: СПбГУИТМО.2012.; Слита О., Никифоров В., Ушаков А. Управление в условиях неопределенности: неадаптивные и адаптвные алгоритмы.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.; Сержантова М., Ушаков. А. Антропокомпоненты в составе сложных динамических систем: // LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.; Лихолетова Е.,Ушаков. А. Коррекция искажений произвольной кратности двоичных кодов // LAP LAMBERT Academic Publishing – 2012.; Ушаков А.В., Быстров П.С., О.С. Нуйя. Сетевые технологии в процессах управления: Учебное пособие для вузов. / Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: НИУ ИТМО, 2012.; Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении: Учебное пособие для вузов.–СПб.: НИУ ИТМО, 2013.; Ушаков А.В., Быстров П.С., Нуйя (Осипцева) О.С. Цифровое дистанционное управление: сетевые технологии и алгоритмы. - Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.; Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений. / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, расширенное и дополненное.– СПб.: НИУ ИТМО , 2014., 15 ил.; Полинова Н.А., Акунов Т.А., Ушаков А.В. Колебательность апериодических систем и смежные проблемы динамики. - Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014; Ушаков А.В., Вундер (Полинова) Н.А. Современная теория управления. Дополнительные главы: Учебное пособие для университетов / Под ред. А. В. Ушакова – СПб.: Университет ИТМО , 2015. 182 с., 43 ил.

Работа авторов Ушакова А.В., Вундер Н.А., Сержантовой М.В., Слиты О.В. Стохастическая динамика непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенности: Учебное пособие для университетов / Под ред. А. В. Ушакова – СПб.: Университет ИТМО, 2016 будет полезным пополнением этой библиографической поддержки. Знакомство с ним и его изучение ждет магистрантов, изучающих предмет «Проектирование регуляторов стохастических систем в условиях неопределенностей.

Авторы выражают особую благодарность рецензентам учебного пособия докторам технических наук, профессору Дроздову Валентину Ниловичу и профессору Шароватову Валерию Тимофеевичу, чьи

советы и пожелания позволили заметно улучшить качество учебного пособия.

При написании учебного пособия использованы материалы диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, выполненной Артемом Юрьевичем Цвентарным под научным руководством профессора А.В. Ушакова и успешно защищенной в 2010 году.

Конструктивную критику по существу содержания учебного пособия следует направлять авторам по: почтовому адресу 197101, Кронверкский пр.49 Университет ИТМО, телефону кафедры СУИ 5954128 и электронным адресам ushakov-AVG@yandex.ru, polinova_nina@mail.ru, 12noch@mail.ru, o-slita@yandex.ru .

Работа поддержана Минобрнауки РФ (проект 14.Z50.31.0031).

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТЕРМИНЫ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

S, X – множество элементов произвольной природы;

$\{X, d\}, X_d$ – метрическое пространство с метрикой $d = d(x, y)$;

$\boldsymbol{A}, A$ – соответственно линейный оператор (ЛО) и матрица ЛО;

X^n – n-мерное линейное пространство над полем F;

R^n – линейное вещественное пространство;

I – единичная матрица, имеющая на главной диагонали элементы равные единице, а внедиагональные элементы равные нулю;

1_V – единичный вектор, состоящий из элементов равных единице

O – нулевой скаляр, вектор, матрица;

A, A^j, A_k – матрица, j-ая строка, k-ый столбец матрицы A;

A^T – матрица, полученная транспонированием матрицы A;

A^* – матрица, сопряженная к матрице A;

A^{-1} – матрица, обратная к матрице A;

A^+ – матрица, псевдообратная к матрице A;

$[A]$ – интервальная матрица, составленная из интервальных скалярных элементов $[A_{ij}]$;

$\Lambda = diag\{\lambda_i, i = \overline{1,n}\}$ – диагональная матрица с элементами λ_i на диагонали и нулевыми внедиагональными;

$row\{\alpha_i, i = \overline{1,n}\}$ – матрица–строка с элементами α_i встроке;

$col\{\alpha_i, i = \overline{1,n}\}$ – матрица–столбец с элементами α_i в столбце;

$\|(\circ)\|$ – норма элемента $(\circ)$;

$\|(\circ)\|_P$ – норма элемента $(\circ)$ с весом P;

$\|(*)\|_p$ – p-ичная норма элемента (*);

$ang\{x, y\}$ – угол между векторами x и y;

$\gamma = arg\{\beta(\gamma)\}$ – значение γ, удовлетворяющее *условию* $\beta(\gamma)$;

$\overset{\Delta}{=}$ – равенство по определению;

$\forall$ – для всех;

$\exists$ – существует;

$\in$ – принадлежит;

$\notin$ – не принадлежит;

$\max\limits_i$ – максимум на множестве элементов с индексом i;

$\bigcup, \bigcap$ – символы объединения и пересечения множеств;

$det(\circ), tr(\circ), rank(\circ)\{rang(\circ)\}$ – соответственно определитель, след, ранг матрицы $(\circ)$;

$exp(\circ)$ – матричная экспонента с матричным аргументом $(\circ)$;

$cond\{(\circ)\} = C\{(\circ)\}$ – число обусловленности матрицы $(\circ)$;
$\dim(\circ)$ – размерность элемента $(\circ)$;
$deg(\circ)$ – степень полинома $(\circ)$;
$Jm(\circ)$– образ $(\circ)$ ЛО;
$Ker(\circ)$ – ядро $(\circ)$ ЛО;
$eig(\circ)=\sigma\{\circ\}$, $\sigma_a\{\circ\}$, $\sigma_\alpha\{\circ\}$ – соответственно алгебраические спектры собственных чисел, коэффициентов характеристического полинома и сингулярных чисел матрицы $\{\circ\}$;
$\otimes$ – символ кронекеровского произведения векторных и матричных компонентов;
$contr\{(A,B)\}$ – предикат наличия свойства управляемости пары матриц (A,B));
$observ\{(A,C)\}$ – предикат наличия свойства наблюдаемости пары матриц (A,C);
$M\{(\circ)\}$– операция вычисления математического ожидания (среднего значения) скалярной, векторной или матричной переменной $(\circ)$;
$D_{(\circ)}$– дисперсия (матрица дисперсий) стохастической скалярной (векторной) переменной $(\circ)$;
$R_{(\circ)}(\tau)$ – корреляционная функция (матрица) скалярной (векторной) стохастической переменной $(\circ)$;
$S_{(\circ)}(\omega)$ – функция (матрица) спектральной плотности скалярной (векторной) стохастической переменной $(\circ)$;
τ_κ – интервал корреляции;
$w(t)$ – непрерывный «белый шум» интенсивности *N*:
$w(k)$ – дискретный «белый шум» дисперсии *V*;
$\xi(t)$ – »окрашенный шум» дисперсии (матрицы дисперсий) D_ξ;
$\vee$ – логическое "или";
& – логическое "и";
$(\circ):\eta$; $(\circ)|\eta$ – предикат наличия характеристического свойства η у элемента $(\circ)$;
$roof\,(*(\nu))$ – положительнозначное покрытие процесса $(*(\nu))$;
SVD – сингулярное разложение матриц;
ВВ – вход–выход;
ВМП – векторно-матричное представление;
ВСВ – вход–состояние–выход;
ИМО(П)– интервальное модельное описание (представление)
МВВ– модель внешнего воздействия;
МВМВ-типа система (по-английски MIMO) –система типа «многомерный вход–многомерный выход»;
ММ– модальная модель;
МПС – метод пространства состояний;

МТЧ–модель траекторной чувствительности;
МУ – модальное управление;
ОВОВ–типа система (по-английски SISO)–система типа «одномерный вход–одномерный выход»;
ОС – обратная связь;
ОУ – объект управления;
ПДМ–полиномиальная динамическая модель;
ПДММ–полиномиальная динамическая модальная модель;
ТО – технический объект;
ФФ – формирующий фильтр.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Прежде, чем формулировать проблемы стохастической динамики непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенностей, необходимо отметить следующее. Любая техническая антропогенная система, то есть система, созданная умом и руками человека, имеет четыре фазы своего существования. Первой фазой является *фаза разработки*, включающая в себя построение математической модели объекта управления и среды его функционирования, аналитический синтез закона управления, построение алгоритмического обеспечения процедур оценки параметров модели объекта и его состояния, моделирование системы с использованием возможностей современных программных оболочек, разработка технической реализации (программной – SOFT и схемотехнической – HARD) всех компонентов процесса управления, разработка конструкции устройства управления и технологического сопровождения его изготовления и испытания макетного образца устройства управления с использованием стендовых испытательных средств. Второй фазой существования технической системы является *фаза изготовления (производства)*, третьей – *фаза эксплуатации*, а четвертой – *фаза утилизации* технической антропогенной системы по причинам выработки эксплуатационного ресурса или функциональной бесполезности.

Алгоритмы управления создаются в фазе разработки, а используются в фазе эксплуатации. Это значит, что математическая постановка задачи (цели) управления должна быть корректно сформулирована, математические модели объекта управления и среды его функционирования – адекватно отражать реальные физические процессы в них, параметры математических моделей объекта и окружающей среды должны быть оценены с допустимой погрешностью, оценка вектора состояния должна сходиться к вектору состояния, сформированный закон управления объектом должен обеспечивать требуемые динамические качества с одновременным обеспечением стабильности потребительских свойств в условиях возможной параметрической неопределенности. При этом канальная среда в прямом канале должна передавать достоверно сигналы управления к регулирующим органам объекта, а в обратном канале – достоверно передавать информацию о доступных непосредственному измерению компонентах вектора состояния и выхода в устройство управления. Все алгоритмы, задействованные в процессе управления,

должны быть вычислительно устойчивыми, матричные компоненты используемых математических модельных представлений должны быть хорошо обусловлены.

Образовательный процесс на кафедре *систем управления и информатики* в настоящий момент построен так, что кафедра готовит своих выпускников исключительно для *фазы разработки устройств управления и прикладной информатики* в технических системах. А эта фаза опирается только на модельные представления. Техническое задание на разработку устройства управления техническим объектом есть словесная (вербальная) модель цели разработки. Справочные данные функциональных компонентов представляют собой номинальные (медианные) параметры их моделей и т.д. Поэтому далее авторы, говоря «объект управления» или «система управления», имеют ввиду их *математические модели*.

Начиная с разговора исполнителя с заказчиком, разработка системы управления объектом введется в условиях большой неопределенности. Как ни странно, но заказчик подчас не может точно сформулировать, что он ждет от разрабатываемой системы управления. Эта стартовая неопределенность обычно разрешается формированием сжатого набора требований к системе в форме: длительности переходного процесса, минимального значения перерегулирования и значения ошибки воспроизведения задающего воздействия, не выходящего за некоторые пределы, в условиях эксплуатации, характеризующихся определенным диапазоном температур и влажности. Требованием, чтобы при построении системы максимально использовались покупные компоненты, а нестандартные компоненты – не требовали в своем изготовлении специальных технологий.

С основными неопределенностями проектировщики обычно встречаются в фазе разработки системы. Сразу следует сказать, что сигнальная неопределенность, в условиях которой приходится функционировать реальным системам, является объективной данностью. Здесь оказываются весьма полезными мнения экспертов. Так в случае разработки систем управления пространственным слежением оказывается справедливой гипотеза о полиномиальном характере представления движения объекта слежения в картинной плоскости, что позволяет использовать усеченные ряды Тейлора при его математическом моделирования. В случае решения задачи стабилизации некоторого объекта на качке оказывается справедливой гипотеза о гармоническом характере движении качающегося основании с конечным числом гармоник в его составе, что позволяет использовать усеченные ряды Фурье при его математическом моделировании. Естественно, что возможна сигнальная среда, которая в себе сочетает элементы полиномиального и колебательного характера. Но все это в целом является случаем конечномерных

воздействий, хорошо моделируемых с помощью автономных систем. В таких ситуациях возможно использовать эффективные методы управления, опирающиеся на возможности обобщенного изодромного управления, иначе называемого управлением с использованием концепции внутренней модели.

Сигнальная неопределенность резко возрастает, когда внешнее воздействие оказывается стохастическим. Стохастическими процессами (сигналами, воздействиями) наполнен окружающий нас физический мир. Стохастическими являются: ветровое воздействие, волнение морской поверхности, пульсация естественных водных потоков, пульсация напряжения и частоты сетевого электропитания, помехи в электрических проводах линий связи, изменение курса валют на мировых финансовых биржах и т.д. По своей математической природе они оказываются бесконечномерными, а потому не могут быть представлены конечномерными моделями. Стохастические процессы требуют внимательного к себе отношения и тщательного изучения. Здесь все не так безнадежно, в последнее время к изучению стохастических процессов был успешно подключен аппарат формализма матричных уравнений Ляпунова. Он используется для построения количественных оценок стохастических процессов и результатов их воздействий на проектируемые системы управления как непрерывного так и дискретного исполнений. При математических описаниях непрерывных и дискретных стохастических процессов как скалярной, так и векторной природы авторы придерживаются концепции корреляционной теории стохастических процессов, основанных на гипотезе достаточности количественных описаний процессов с использованием лишь моментов первого и второго порядка.

Системная неопределенность помимо сигнального компонента имеет еще и параметрический компонент. Параметрическая неопределенность порождается многими причинами. Это и технологический разброс при производстве компонентов системы, изменение параметров под действием физических условий эксплуатации, естественное старение, экстремальные ситуации, которые могут скачкообразно изменить параметры. В общем, система разрабатывается при одних (номинальных, паспортных) значениях параметров, техническая реализация системы наделяет ее компоненты другими значениями параметров, а в фазе эксплуатации параметры компонентов приобретают третьими значения. Параметры системы принято разделять на физические и системные. Физическими параметрами являются: длина, радиус, объем, масса, момент инерции, вязкость среды, жесткость, электрическое сопротивление, электрическая емкость конденсаторов, индуктивность проводных систем и т.д. Системными параметрами являются коэффициенты

полиномов числителя и знаменателя передаточных функций в случае использования моделей «вход–выход», а также элементы матриц входа, состояния и выхода в случае использования моделей «вход–состояние–выход» метода пространства состояний. Так как для разработчика технический объект – это математическая модель технического объекта, то в дальнейшем, говоря о параметрах системы, будем в основном иметь в виду ее системные параметры.

Проблему параметрической неопределенности в учебном пособии предлагается решать следующим образом. При решении задач синтеза используется интервальное представление неопределенных системных параметров, а при решении задач анализа, когда возникает потребность оценить чувствительность показателей качества стохастической системы к неопределенности параметров, используется аппарат функций чувствительности сингулярных чисел матриц, определяющих размеры полуосей эллипсоидных покрытий стохастических процессов.

В основу построения математического инструмента исследования процессов в стохастических системах непрерывной и дискретной версий положен аппарат метода пространства состояний, позволяющий с единых инструментальных позиций исследовать как системы типа «одномерный вход–одномерный выход» (ОВОВ), так и системы типа «многомерный вход–многомерный выход» (МВМВ).

Текст учебного пособия рубрицирован такими понятиями, как: концепция, гипотеза, положение, утверждение, примечание, определение, следствие и т.д.

Авторы желают читателю получить удовольствие от знакомства с учебным пособием. В случае каких-либо неясностей, авторы готовы вступить в общение с читателем с использованием почтовых адресов, которые указаны в предисловии.

1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ СОБЫТИЯ И ВЕЛИЧИНЫ

Знакомство с проблемами стохастической динамики непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенности начнем с полезных определений.

Определение 1.1(О.11). Достоверный (верный), не вызывающий сомнений.

Определение 1.2(О.12).Случайный – непредсказуемый однозначно, нерегулярный в реализации.

Определение 1.3(О.13). Стохастический – синоним понятия случайный. Слово стохастический имеет греческие корни (от греческого στοχαστικός — «умеющий угадывать»).

Определение 1.4(О.14). Среда наблюдения – материальная или виртуальная среда, в которой появляются исследуемые события (явления).

Примечание 1.1(П.11).Среда наблюдения может быть реализована в формах:

- числовой среды
- физической среды
- химической среды
- технической среды
- информационной среды
- финансовой среды
- гуманитарной среды
- филологической среды
- и т.д.

Определение 1.5(О.15).

В зависимости от характера появления исследуемых событий среда наблюдения может быть:

- детерминированной и
- стохастической.

Определение 1.6(О.16). Исследуемые события в стохастической среде наблюдения будем именовать стохастическими объектами.

Определение 1.7(О.17). Вероятность – математическая числовая характеристика $p(*)\in[0,1]$ степени возможного появления стохастического объекта $(*)$ в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз в стохастической среде наблюдения, ситуациях. Категория вероятности лежит в основе численных оценок свойств стохастических объектов и стохастических процессов.

Вероятность достоверного объекта $(*)$ равняется единице $p(*)=1$, вероятность невозможного объекта $(*)$ равняется нулю $p(*)=0$. В этой

связи невозможный и невероятный, а также возможный с вероятностью равной нулю являются синонимами.

Вероятность достоверного объекта равняется единице, вероятность невозможного – нулю. В этой связи невозможный, и невероятный и возможный с вероятностью равной нулю являются синонимами. Синонимами также являются слова случайный, стохастический и вероятностный.

1.1. Основные характеристики стохастических счетных событий

В данном параграфе рассмотрим стохастические счетные события. Изложение материала параграфа построим в рубрицированой форме.

Рассмотрим дискретную стохастическую среду наблюдения, в которой размещены массивом или последовательно появляются стохастические нечисловые объекты любой материальной природы, образующих ансамбль $Z=\left\{z_i : i=\overline{1,n}\right\}$.За время обращения к среде наблюдения зафиксировано совокупное множество объектов (символов) z_i ансамбля $Z=\left\{z_i : i=\overline{1,n}\right\}$ общей мощностью N, составленной из сепаратных мощностей $N\left(z_i\right)$ так, что выполняется равенство

$$N=\sum_{i=1}^{n} N\left(z_i\right). \tag{1.1}$$

Примерами стохастических счетных событий являются: появление орла или решки при подбрасывании монеты; выпадение выигрыша на лотерейный билет; совпадение дней рождения у двух наугад выбранных людей.

Определение 1.8(О.18). Выборочной вероятностью появления в среде наблюдения стохастических объектов z_i будем называть величину $p\left(z_i, N\right)$, определяемую соотношением

$$p\left(z_i, N\right)=\frac{N\left(z_i\right)}{N}. \tag{1.2}$$

Если ансамбль стохастических дискретных объектов стационарный, то его элементы могут быть охарактеризованы фиксированными вероятностями $p\left(z_i\right)$, определяемыми предельными переходами

$$p\left(z_i\right)=\lim_{N\to\infty}\left\{p\left(z_i, N\right)\right\}. \tag{1.3}$$

Примечание 1.2(П.12). Ансамбль стохастических объектов $Z=\left\{z_i : i=\overline{1,n}\right\}$ обладает в силу (1.1) и (1.2) стохастическим свойством

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(z_i, N\right)=\sum_{i=1}^{n} p\left(z_i\right)=1, \qquad (1.4)$$

что делает его стохастически полной «группой событий».

Примечание 1.3(П.13). Основными характеристиками ансамбля дискретных стохастических объектов $Z=\left\{z_i : i=\overline{1,n}\right\}$ нечисловой природы являются: *Функция распределения вероятности* $F\left(Z\right)$, которая задается таблицей, составленной из пар $\left\{z_i, p\left(z_i\right)\right\}$;

1. *Гистограмма* вероятностей стохастических объектов ансамбля, представляющая собой графическое изображение функции распределения $F\left(Z\right)$. В силу нечисловой природы стохастических объектов ансамбля $Z=\left\{z_i : i=\overline{1,n}\right\}$ по оси абсцисс гистограммы откладываются значения индекса объекта;
2. *Энтропия* $H\left(Z\right)$ ансамбля $Z=\left\{z_i : i=\overline{1,n}\right\}$ стохастических объектов нечисловой природы, определяемая выражением

$$H\left(Z\right)=-\sum_{i=1}^{n} p\left(z_i\right)\log_2 p\left(z_i\right).$$

Энтропия нашла широкое использование в теории информации для характеристики источника информации, на выходе которого генерируются стохастические объекты в виде символов, с целью оценки количества информации в среднем на символ источника.

1.2. Основные характеристики стохастических скалярных величин

Рассмотрим теперь среду наблюдения, в которой появляются стохастические объекты *числовой* природы. Это могут быть рост или вес студентов в учебных группах, температура больных в палатах, содержание витамина С в образцах апельсинового сока различных производителей и т.д.

Определение 1.9(О.19). Рассмотрим дискретную стохастическую среду наблюдения, в которой размещены списком или последовательно появляются стохастические числовые объекты $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, принадлежащие множеству вещественных чисел R, образующих ансамбль $X=\left\{x_i \in R; i=\overline{1,n}\right\}$. За время обращения к среде наблюдения

зафиксировано совокупное множество числовых объектов $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ ансамбля $X=\left\{x_i\in R;i=\overline{1,n}\right\}$ общей мощностью N, составленной из сепаратных мощностей $N\left(x_i\right)$ так, что выполняется равенство

$$N=\sum_{i=1}^{n}N\left(x_i\right). \tag{1.5}$$

Тогда выборочной вероятностью появления в среде наблюдения стохастических объектов x_i будем называть величину $p\left(x_i,N\right)$, определяемую соотношением

$$p\left(x_i,N\right)=\frac{N\left(x_i\right)}{N}. \tag{1.6}$$

Если ансамбль стохастических дискретных числовых объектов стационарный в смысле его вероятностных характеристик, то его элементы могут быть охарактеризованы фиксированными вероятностями $p\left(x_i\right)$, определяемыми предельными переходами

$$p\left(x_i\right)=\lim_{N\to\infty}\left\{p\left(x_i,N\right)\right\}. \tag{1.7}$$

Примечание 1.4(П.14). Ансамбль стохастических дискретных числовых объектов $X=\left\{x_i;i=\overline{1,n}\right\}$ обладает в силу (1.5) и (1.6) стохастическим свойством

$$\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i,N\right)=\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i\right)=1, \tag{1.8}$$

что делает его стохастически полной «группой событий».

Примечание 1.5(П.15). Характеристики ансамбля $X=\left\{x_i\in R;i=\overline{1,n}\right\}$ числовых объектов будут совпадать со случаем ансамбля $Z=\left\{z_i:i=\overline{1,n}\right\}$ нечисловых объектов с той разницей, что при построении гистограммы функции распределения вероятностей $p\left(x_i\right)$ числовых объектов $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ по оси абсцисс откладываются значения $x_i;(i=1,n)$.

Определение 1.11(О.11). Стохастическая переменная x, принимающая значения стохастических дискретных числовых объектов $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, может быть охарактеризована численными величинами, именуемыми *моментами* $\mu_l\left(x\right)$ с наиболее употребительными значениями индекса $l=1,2,3.$ Понятие «момент» взято на основе аналогии исследования свойств кривой $F\left(x\right)$

распределения вероятностей с исследованием свойств плоской фигуры в механике. Действительно:

- момент первого порядка $\mu_1(x)$ определяет среднее значение $\overline{x}$ ансамбля X с учетом вероятностей $p(x_i)$ его элементов и именуется *математическим ожиданием* $M(x)=\overline{x}$ дискретной стохастической переменной x (в механике момент первого порядка определяет положение центра масс плоской фигуры);
- момент второго порядка $\mu_2(x)$ определяет среднее значение отклонения стохастической переменной x от ее среднего значения $\overline{x}$, заданное в квадратичной форме, и именуется *дисперсией* $D(x)$ дискретной стохастической числовой переменной x (в механике момент второго порядка определяет момент инерции плоской фигуры относительно оси ординат, проходящей через ее центр масс («тяжести»));
- момент третьего порядка $\mu_3(x)$ определяет среднее значение асимметрии кривой $F(x)$ распределения вероятностей относительно ее среднего значения $\overline{x}$, заданное в кубической форме.

Приведенные моменты дискретной стохастической переменной x вычисляются с помощью формул:

$$\mu_1(x)=\overline{x}=M(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i); \tag{1.13}$$

$$\mu_2(x)=D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\,p(x_i); \tag{1.14}$$

$$\mu_3(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^3\,p(x_i). \tag{1.15}$$

Если в дискретной стохастической среде наблюдения стохастическая переменная x в форме стохастических дискретных числовых объектов $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ ансамбля $X=\left\{x_i\in R; i=\overline{1,n}\right\}$ появляется не единым массивом, а последовательно, формируя множество объектов x_i ансамбля $X=\left\{x_i : i=\overline{1,n}\right\}$ общей мощностью N, то для приведенных выше моментов оказываются справедливыми представления

$$\mu_1(x)=\overline{x}=M(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(k); \tag{1.16}$$

$$\mu_2(x)=D(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x(k)-\overline{x}\right)^2; \tag{1.17}$$

$$\mu_3(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x(k)-\bar{x}\right)^3. \qquad (1.18)$$

Представления (1.16)– (1.18) являются суммарными, и на их основе может быть построена рекуррентная форма представления процесса формирования моментов. Например, для рекуррентного вычисления математического ожидания $\bar{x}$ стохастической числовой переменной x можно записать

$$\bar{x}=\lim_{k\to(N-1)}\left\{\bar{x}(k+1)=\frac{k}{k+1}\bar{x}(k)+\frac{1}{k+1}x(k+1)\right\}. \qquad (1.19)$$

Рассмотрим теперь ситуацию стохастической среды наблюдения, в которой появляются стохастические числовые объекты, принадлежащие сплошному множеству вещественных чисел R или сплошной выборке из него в виде отрезка числовой оси (a,b). В любом случае таких числовых объектов будет бесконечное множество. Первое, что следует констатировать – это то, что вероятность появления отдельно взятого числа, принадлежащего R или (a,b), в силу ее определения в форме (1.10) будет равна нулю. В связи с этим встает проблема сформулировать определение вероятности числового объекта $x\in R$ или $x\in(a,b)$ следующим образом.

Определение 1.11(О.11). Вероятностью $p(x)$, где $x\in R=(-\infty,\infty)$, будем называть вероятность принадлежности интервалу $(-\infty,x]$

$$p(x)=p\left(x\in(-\infty,x]\right). \qquad (1.20)$$

Определение 1.11(О.11). Вероятностью $p(x)$, где $x\in\ x\in(a,b)$, будем называть вероятность принадлежности интервалу $(a,x]$

$$p(x)=p\left(x\in(a,x]\right). \qquad (1.21)$$

Примечание 1.6(П.16). Очевидно, вероятность появления переменной x, принадлежащей сплошным множествам действительных чисел, заданная в формах (1.20) и (1.21), по существу, задает функцию $F(x)$. Эта функция называется функцией распределения вероятности на указанных множествах и обладает следующими свойствами:

1. Значение функции $F(x)$ распределения вероятности переменной x, принадлежащей сплошным множествам действительных чисел, заданной в формах (1.20) и (1.21), принадлежит отрезку $[0,1]$ так, что выполняются неравенства

$$0\le F(x)\le 1. \qquad (1.22)$$

2. Функция распределения $F(x)$ вероятностей – неубывающая функция так, что выполняются неравенства

$$F(x_2)\ge F(x_1),\ x_2\ge x_1 \qquad (1.23)$$

Следствия из свойства 2:

- Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (x_2, x_1), равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$F(x_1 \le x < x_2) = p(x_2) - p(x_1). \quad (1.24)$$

- Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение $\tilde{x}$, равна нулю. Доказательство следствия строится на использовании соотношения (1.24), в котором следует положить $x_1 = x_2 = \tilde{x}$.

3. Если возможные значения непрерывной случайной величины $x \in R = (-\infty, \infty)$, то справедливы следующие предельные оотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad (1.25)$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1. \quad (1.26)$$

4. Если возможные значения непрерывной случайной величины $x \in (a, b)$, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0; \quad (1.27)$$

$$\lim_{x \to b} F(x) = 1. \quad (1.28)$$

Определение 1.12(О.12).Функцию $f(x)$ плотности распределения вероятности определим следующим образом. Очевидно, справедлива цепочка соотношений

$$F(x < x \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Delta x = f(x) \Delta x, \quad (1.29)$$

где $f(x)$ – функция плотности распределения вероятностей. Таким образом, функция плотности распределения вероятности в силу (1.29) определится выражением

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (1.30)$$

Следствие 1.1(Сл.11.12) из определения 1.12.

Вероятность $p(x) = p(x \in (a, x))$ того, что непрерывная случайная величина x примет значение, принадлежащее интервалу (a, x), равна определенному интегралу от функции плотности распределения, взятому в указанных пределах так, что становится справедливой запись

$$p(x \in (a,x)) = \int_a^x f(x)dx. \qquad (1.31)$$

В свою очередь, зная функцию плотности распределения вероятности $f(x)$ для случая значения непрерывной случайной величины $x \in R = (-\infty, \infty)$, можно найти функцию $F(x)$распределения вероятности $p(x) = p(x \in (-\infty, x))$ по формуле

$$p(x \in (-\infty, x)) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \qquad (1.32)$$

Отметим основные свойства функции плотности распределения вероятности:

1. Функция плотности распределения вероятности $f(x)$ - неотрицательная функция

$$f(x) \geq 0; \forall x. \qquad (1.33)$$

2. Функция плотности распределения вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины со значениями из интервала $x \in (a,b)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f(x)dx = 1. \qquad (1.34)$$

3. Функция плотности распределения вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины со значениями из $x \in R = (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (1.35)$$

Определение 1.13(О.13). Стохастическая переменная x, принадлежащая сплошным множествам действительных чисел, заданным в формах $x \in (a,b)$ и $x \in R = (-\infty, \infty)$, может быть охарактеризована числовыми величинами, именуемыми *моментами* $\mu_l(x)$ с наиболее употребительными значениями индекса $l = 1,2,3.$ Понятие «момент» взято на основе аналогии исследования

свойств кривой $f(x)$ плотности распределения вероятностей с исследованием свойств плоской фигуры в механике. Действительно:

- момент первого порядка $\mu_1(x)$ определяет среднее значение $\overline{x}$ и именуется *математическим ожиданием* $M(x)$ сплошной стохастической переменной x (в механике момент первого порядка определяет положение центра масс плоской фигуры);
- момент второго порядка $\mu_2(x)$ определяет среднее значение отклонения стохастической переменной x от ее среднего значения $\overline{x}$, заданное в квадратичной форме, и именуется *дисперсией* $D(x)$ стохастической числовой переменной x (в механике момент второго порядка определяет момент инерции плоской фигуры относительно оси ординат, проходящей через ее центр масс («тяжести»));
- момент третьего порядка $\mu_3(x)$ определяет среднее значение асимметрии кривой $f(x)$ плотности распределения вероятностей относительно ее среднего значения $\overline{x}$, заданное в кубической форме.

Приведенные моменты стохастической переменной x, принадлежащей сплошному множеству действительных чисел, вычисляются с помощью формул:

$$\mu_1(x) = \overline{x} = M(x) = \int_a^b x f(x) dx, \tag{1.36}$$

$$\mu_1(x) = \overline{x} = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{1.37}$$

$$\mu_2(x) = D(x) = M\left\{(x-\overline{x})^2\right\} = \int_a^b (x-\overline{x})^2 f(x) dx, \tag{1.38}$$

$$\mu_2(x) = D(x) = M\left\{(x-\overline{x})^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 f(x) dx, \tag{1.39}$$

$$\mu_3(x) = M\left\{(x-\overline{x})^3\right\} = \int_a^b (x-\overline{x})^3 f(x) dx, \tag{1.40}$$

$$\mu_3(x) = M\left\{(x-\overline{x})^3\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^3 f(x) dx. \tag{1.41}$$

При этом среднеквадратическим отклонением стохастической числовой переменной x от ее среднего значения $\overline{x}$ называется величина $\sigma(x)$, задаваемая выражением

$$\sigma(x) = \{D(x)\}^{1/2}. \tag{1.42}$$

Определение 1.14(О.14). Стохастическая переменная x, принадлежащая сплошным множествам действительных чисел, заданным в формах $x \in (a,b)$ или $x \in R = (-\infty, \infty)$ называется

центрированной, если она характеризуется нулевым средним значением

$$\mu_1(x) = \bar{x} = M(x) = \int_a^b x f(x) dx = 0 \quad , \tag{1.43}$$

$$\mu_1(x) = \bar{x} = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0 . \tag{1.44}$$

Остановимся на примерах функций плотности распределения вероятности стохастических скалярных переменных. Этих функций на настоящий момент предложено огромное множество, конкретная реализация каждой из них определяется конкретным протеканием стохастического физического или вычислительного процесса в указанных средах. Однако из всего множества сконструированных или установленных функций плотности распределения стохастических скалярных переменных выделим наиболее употребительных из них. Ими являются:

– функция плотности равномерного распределения вероятности для случая стохастических скалярных переменных, заданных в форме $x \in (a,b)$;

– функция плотности нормального (гауссовского) распределения вероятности для случая стохастических скалярных переменных, заданных в форме $x \in R = (-\infty, \infty)$.

Определение 1.15(О.15). стохастические скалярные переменные, заданные в форме $x \in (a,b)$, называются равномерно распределенными, если функция $f(x)$ плотности распределения вероятности на интервале (a,b) имеет представление

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ при } x \in (a,b) \\ 0 \quad \text{при } x \notin (a,b) \end{cases}. \tag{1.45}$$

При этом функция $F(x)$ распределения вероятности на числовой оси удовлетворяет условиям

$$F(x) = p(x \le x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a \le x < b \\ 1 \text{ при } x \le b \end{cases} . \tag{1.46}$$

Математическое ожидание и дисперсия стохастической скалярной переменной $x \in (a,b)$ в силу (1.36), (1.38) и (1.45) принимают значения:

$$\mu_1(x) = \bar{x} = M(x) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left. \frac{x^2}{2(b-a)} \right|_a^b = \frac{b+a}{2}; \tag{1.47}$$

$$\mu_2(x) = D(x) = M\left\{(x-\bar{x})^2\right\} = \int_a^b (x-\bar{x})^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{(x-\bar{x})^2}{b-a}dx = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (1.48)$$

Если интервал (a,b) - симметричный, т.е. $(a,b) = (-a,a)$, тогда (1.47) и (1.48) принимают вид

$$\bar{x} = M(x) = \int_{-a}^{a} xf(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{x}{b-a}dx\Big|_{b=a,a=-a} = \int_{-a}^{a} \frac{x}{2a}dx = \frac{x^2}{a}\Big|_{-a}^{a} = a-a = 0; \quad (1.49)$$

при этом среднеквадратическое отклонение $\sigma(x)$ от среднего значения составляет величину

$$\sigma(x) = \{D(x)\}^{1/2} = \left\{\frac{(b-a)^2}{12}\right\}^{1/2} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Таким образом, стохастическая равномерно распределенная скалярная переменная x, заданная на симметричном интервале $(-a,a)$ является центрированной и характеризуется в силу (1.49)
дисперсией

$$D(x) = M\left\{(x)^2\right\} = \int_{-a}^{a} x^2 f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{(x)^2}{2a}dx = \frac{(a)^2}{3},$$

(1.50) и среднеквадратическим отклонением от среднего значения

$$\sigma(x) = \{D(x)\}^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad (1.51)$$

Определение 1.16(О.16). Стохастическая скалярная переменная, заданная в форме $x \in R = (-\infty,\infty)$, называется нормально (или гауссовски) распределенной, если функция $f(x)$ плотности распределения вероятности на числовой оси $R = (-\infty,\infty)$ имеет представление

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (1.52)$$

При этом вероятность того, что стохастическая скалярная переменная $x \in R = (-\infty,\infty)$ лежит между $\bar{x}-\xi$ и $\bar{x}+\xi$ определяется интегралом от функции $f(x)$

$$p(\bar{x}-\xi \le x \le \bar{x}+\xi) = \int_{\bar{x}-\xi}^{\bar{x}+\xi} f(x)dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})\sigma}\int_{-\xi}^{\xi} exp\left\{-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right\}d\nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi/(\sqrt{2})\sigma} exp\left\{-\rho^2\right\}d\rho = erf\left(\xi/(\sqrt{2})\sigma\right). \quad (1.53)$$

В выражении (1.49) последовательно использованы подстановки переменных $\nu = x-\bar{x}$ и $\rho = \nu/(\sqrt{2})\sigma$, функция $erf\left(\xi/(\sqrt{2})\sigma\right)$ именуется интегралом вероятностей и является табличной. В таблице 1.1 приведены значения вероятностей $p(\bar{x}-\xi \le x \le \bar{x}+\xi)$ для четырех значений величины ξ.

Таблица 1.1

ξ	0	σ	2σ	3σ	(∞)
$p(\bar{x}-\xi \le x \le \bar{x}+\xi)$	0	0.683	0.955	0.997	1.0

Из таблицы 1.1 видно, что для нормального распределения плотности вероятности действительных скалярных переменных справедливо так называемое «правило трех сигм». Оно состоит в том, что при $\xi = 3\sigma$ вероятность $p(\bar{x}-\xi \le x \le \bar{x}+\xi)$=0.997, т.е. практически равна единице. Правило «трех сигм» может быть использовано для оценки среднеквадратического отклонения σ от матожидания $\bar{x}$ нормального (гауссовского) распределения стохастической скалярной величины следующим образом:

1. Разместить массив всех значений исследуемой стохастической действительной скалярной величины в таблице;
2. Выбрать максимальное x_M и минимальное x_m значения исследуемой скалярной стохастической величины;
3. Ввести гипотезу нормальности (гауссовости) исследуемой скалярной стохастической величины;
4. Положить справедливыми равенства $x_M = \vec{x} + 3\sigma$ и $x_m = \vec{x} - 3\sigma$ и решить их относительно σ в форме $\sigma = \dfrac{x_M - x_m}{6}$.

Если подобный эксперимент провести со значениями действительной стохастической скалярной переменной, равномерно распределенной в интервале (a,b), оценка среднеквадратичного отклонения σ переменной от математического ожидания $\bar{x} = \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{x_M + x_m}{2}$ определится в форме $\sigma = \dfrac{x_M - x_m}{2\sqrt{3}} = \dfrac{x_M - x_m}{3.4641}$.

1.3. Основные характеристики стохастических векторных величин

Перейдем к изучению векторных стохастических сплошных переменных со скалярными компонентами.

Определение 1.17 (О.17). Вектор $x = [x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n] = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$ вещественного пространства R^n со скалярными стохастическими компонентами $x_i; i = \overline{1,n}$ x, принадлежащими сплошным множествам действительных чисел R, заданными в формах $x_i \in (a,b)$ и $x_i \in R = (-\infty,\infty)$, называется стохастическим (случайным) вектором или стохастической векторной переменной.

Стохастическая векторная переменная $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$ со скалярными стохастическими компонентами $x_i; i = \overline{1,n}$, принадлежащими сплошным множествам действительных чисел,

заданным в формах $x_i \in (a,b)$ и $x_i \in R = (-\infty,\infty)$, может быть охарактеризована числовыми величинами, именуемыми *моментами* $\mu_l(x)$ только со значениями индекса $l = 1$ и $l = 2$. Это связано с тем, что в современной математике не определены такие математические объекты, как степень вектора даже положительная целочисленная. Некоторым аналогом квадрата вектора можно рассматривать кронекеровское произведения вектора на вектор $x \otimes x$, которое представляет собой вектор размерности $dim(x \otimes x) = n \times n = n^2$. Нетрудно видеть, что векторный объект размерности n^2 может быть свернут в матрицу размерности $(n \times n)$. Таким образом, стохастические векторные переменные могут быть моментами первого и второго порядка. Дополнительно надо отметить, что в силу многокомпонентности стохастических векторных переменных существует проблема исследования возможной стохастической связности их компонентов, именуемой *ковариацией*.

Определение 1.18 (О.18). Моментом первого порядка $\mu_1(x)$ векторной стохастической переменной, ее математическим ожиданием $M(x)$ или ,что то же самое, ее средним значением $\bar{x}$ называется вектор, удовлетворяющий цепочке равенств

$$\mu_1(x) = col\{\mu_1(x_i); i = \overline{1,n}\} = M(x) = col\{M(x_i); i = \overline{1,n}\} = \bar{x} = col\{\bar{x}_i; i = \overline{1,n}\}. \quad (1.54)$$

Определение 1.19 (О.19). Центрированной x_C составляющей векторной стохастической переменной $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$ называется стохастический вектор, определяемый выражением

$$x_C = x - \bar{x} = col\{x_{ic} = (x_i - \bar{x}_i); i = \overline{1,n}\}. \quad (1.55)$$

Примечание 1.9(П.19).Векторная стохастическая переменная $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$ называется центрированной, если вектор ее математического ожидания является нулевым так, что выполняется равенство $\bar{x} = col\{\bar{x}_i; i = \overline{1,n}\} = 0$.

Определение 1.21 (О.21). Матрицей Q смешанных моментов второго порядка векторной стохастической переменной $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$ называется матрица математических ожиданий парных произведений $M\{(x_i x_j); i, j = \overline{1,n}\}$ ее скалярных стохастических компонентов

$$Q = row\{col\{M(x_i x_j); i = \overline{1,n}\}; j = \overline{1,n}\} = M\{xx^T\} = \begin{bmatrix} M(x_1^2) & M(x_1 x_2) & \dots & M(x_1 x_n) \\ M(x_2 x_1) & M(x_2^2) & \dots & M(x_{2i} x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M(x_n x_1) & M(x_n x_2) & \dots & M(x_n^2) \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Определение 1.21 (О.21). Матрицей D_x дисперсии (covariance matrix) векторной стохастической переменной $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$

называется матрица математических ожиданий парных произведений $M\{(x_{ic}x_{jc});i,j=\overline{1,n}\}=M\{((x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j));i,j=\overline{1,n}\}$ центрированных составляющих ее скалярных стохастических компонентов

$$D_x=row\{col\{M(x_{ic}x_{jc});i=\overline{1,n}\};j=\overline{1,n}\}=M\{x_c x_c^{\,T}\}=\begin{bmatrix} M(x_{1c}^2) & M(x_{1c}x_{2c}) & \dots & M(x_{1c}x_{nc}) \\ M(x_{2c}x_{1c}) & M(x_{2c}^2) & \dots & M(x_{2c}x_{nc}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M(x_{nc}x_{1c}) & M(x_{nc}x_{2c}) & \dots & M(x_{nc}^2) \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Проведем анализ матрицы дисперсий D_x векторной стохастической переменной $x=col\{x_i;i=\overline{1,n}\}$, который позволяет констатировать:

1. диагональные элементы $(D_x)_{ii}$ матрицы дисперсий D_x являются моментами второго порядка $\mu_2(x_i)$, то есть дисперсией D_{x_i} скалярного компонента x_i векторной стохастической переменной $x=col\{x_i;i=\overline{1,n}\}$ так, что становится справедливой цепочка равенств

$$(D_x)_{ii}=\mu_2(x_i)=D_{x_i},\left(i=\overline{1,n}\right); \quad (1.58)$$

при этом среднеквадратическое отклонение $\sigma(x_i).$ скалярного компонента x_i векторной стохастической переменной $x=col\{x_i;i=\overline{1,n}\}$ от его среднего значения $\bar{x}_i$ определяется в силу соотношения

$$\sigma(x_i).=\{(D_x)_{ii}\}^{1/2}; \quad (1.59)$$

2. внедиагональные элементы $(D_x)_{ij}\left(i\neq j;i,j=\overline{1,n}\right)$ матрицы дисперсий D_x представляют собой количественные меры совместной стохастической ковариации компонентов x_i и x_j векторной стохастической переменной x, что записывается в форме

$$(D_x)_{ij}=cov(x_i,x_j), \quad (1.60)$$

при этом ковариация компонентов x_i и x_j может быть охарактеризована коэффициентом ковариации $r(x_i,x_j)$, задаваемым выражением

$$r(x_i,x_j)=\frac{cov(x_i,x_j)}{\sigma(x_i)\sigma(x_j)}; \quad (1.61)$$

3. внедиагональные элементы $(D_x)_{ij}$ и $(D_x)_{ji}\left(i\neq j;i,j=\overline{1,n}\right)$ матрицы дисперсий D_x равны, поэтому матрица дисперсии D_x оказывается симметричной, и выполняется равенство

$$D_x=(D_x)^T; \quad (1.62)$$

4. если все внедиагональные элементы матрицы дисперсий D_x являются нулевыми

$$(D_x)_{ij}=(D_x)_{ji}=0,\left(i\neq j;i,j=\overline{1,n}\right), \quad (1.63)$$

то матрица дисперсий D_x становится диагональной, а скалярные компоненты x_i и x_j векторной стохастической переменной x

оказываются стохастически независимыми, между ними исчезает какая-либо ковариация;

5. если векторная стохастическая переменная $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ является центрированной, то она может быть охарактеризована стохастической квадратичной нормой, задаваемой соотношениями

$$\|x\| = \left\{M\left(x^T x\right)\right\}^{1/2} = \left\{M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right\}, \qquad (1.64)$$

для которой в силу сравнения (1.64) и матрицы (1.56) дисперсии векторной стохастической переменной $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ можно записать

$$\|x\| = \left\{M\left(x^T x\right)\right\}^{1/2} = \left\{tr\left(D_x\right)\right\}^{1/2}. \qquad (1.65)$$

Примечание 1.9(П.19).

Если векторная стохастическая переменная $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ имеет скалярные компоненты, удовлетворяющие условию $x_i \in (a_i, b_i)$, то функции $f_i(x_i)$ распределения плотности вероятности как правило являются равномерно распределенными так, что они имеют представления

$$f\left(x_i\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_i - a_i} \text{ при } x_i \in (a_i, b_i) \\ 0 \quad \text{при } x_i \notin (a_i, b_i) \end{cases}. \qquad (1.66)$$

Если векторная стохастическая переменная $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ имеет скалярные компоненты, удовлетворяющие условию, то функции $f_i\left(x_i\right)$ распределения плотности вероятности как правило являются нормально (гауссовски) распределенными, векторное агрегирование которых позволяет записать функцию $f(x)$ распределения плотности вероятности векторной стохастической переменной $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ в виде

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(det\left(D_x\right)\right)^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \bar{x}\right)^T D_x^{-1}\left(x - \bar{x}\right)\right\}. \qquad (1.67)$$

Функция распределения $F\left(x\right)$ вероятностей векторной стохастической переменной $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ задается в виде поверхности постоянного значения отклонения вектора x от медианного значения $\bar{x}$ на величину $\left\{\left(x - \bar{x}\right)^T \left(x - \bar{x}\right)\right\}^{1/2} = l\sigma$, именуемой эллипсоидом постоянного правдоподобия, в форме

$$F(x): \left(x - \bar{x}\right)^T \left(D_x\right)^{-1}\left(x - \bar{x}\right) = \left(l\sigma\right)^2. \qquad (1.68)$$

При этом $F(x)$ реализуется как оценка вероятности того, что векторная переменная $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ лежит внутри эллипсоида (1.68) при заданном значении l размера эллипсоида. Эта задача решается интегрированием функции $f\left(x\right)$ распределения плотности вероятности

векторной стохастической переменной (1.67) на поверхности эллипсоида (1.68). Эта задача решена и для размерностей $n = 1,2,3$ векторной переменной $x = col\left\{x_i ; i = \overline{1,n}\right\}$ приведена в таблиц 1.2.

Таблица 1.2

l	0	1	2	3	(∞)
$n = 1$	0	0.683	0.955	0.997	1.0
$n = 2$	0	0.394	0.865	0.989	1.0
$n = 3$	0	0.2	0.739	0.971	1.0

В заключение отметим, что эллипсоид правдоподобия несет богатую информацию о ковариации компонентов векторной стохастической переменной. Так, если:

1.Оси эллипсоида (1.68) совпадают с осями декартовой системы координат, то все компоненты векторной стохастической переменной являются стохастически независимыми, ковариация между ними отсутствует.

2.Все оси эллипсоида (1.68) развернуты относительно осей декартовой системы координат, то все компоненты векторной стохастической переменной не являются независимыми, между ними существует ковариация.

Контрольные вопросы

1. Может ли вероятность быть отрицательным числом?
2. Почему вероятность не может быть отрицательным числом?
3. Может ли вероятность быть больше единицы?
4. Почему вероятность не может быть больше единицы?
5. Что такое гистограмма?
6. Чему равняется сумма значений ординат гистограммы?
7 Чему равняется интеграл от минус бесконечности до плюс бесконечности от кривой функции распределения плотности вероятности скалярной стохастической величины при произвольной ее реализации?
8. Как задается момент произвольного порядка для стохастических дискретных числовых объектов?
9. Как задается момент произвольного порядка для стохастических скалярных величин?
10. Как задается момент произвольного порядка для стохастических векторных величин?
11.Как связаны математическое ожидание и дисперсия скалярной стохастической величины?
12.Какова физическая размерность матожидания некоторой измеряемой физической стохастической величины?

13.Какова физическая размерность дисперсии некоторой измеряемой физической стохастической величины?
14. Почему матрицы дисперсий стохастических векторных величин являются симметричными?
15. О чем свидетельствует тот факт, что матрица дисперсий стохастической векторной величины является диагональной?

2. НЕПРЕРЫВНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Определение 2.1 (О.21). Стохастическим процессом называется стохастическая переменная x, параметризованная временем t, принадлежащим множеству T так, что стохастический процесс задается записью $x(t)$.

Определение 2.2 (О.22). Стохастический процесс $x(t)$ называется непрерывным, если время t принадлежит сплошному множеству $T = \{t : 0 \le t < \infty\}$.

2.1. Основные характеристики скалярных непрерывных стохастических процессов

Определение 2.3 (О.23). Стохастический процесс $x(t)$ называется скалярным, если стохастическая переменная x является скалярной, т.е. удовлетворяет условию $x \in R = (-\infty, \infty)$.

Определение 2.4 (О.24). Стохастический скалярный процесс $x(t)$ называется равномерно распределенным процессом, если стохастическая переменная x удовлетворяет условию $x \in (a,b)$ при этом функция $f(x)$ плотности распределения вероятности задается в форме

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a,b) \\ 0 & \text{при } x \notin (a,b) \end{cases}. \qquad (2.1)$$

Определение 2.5 (О.25). Стохастический скалярный процесс $x(t)$ называется нормально (гауссовски) распределенным процессом, если стохастическая переменная x удовлетворяет условию $x \in R = (-\infty, \infty)$ при этом функция $f(x)$ плотности распределения вероятности задается в форме

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})\sigma} exp\left\{ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\}. \qquad (2.2)$$

Примечание 2.1(П.21).

Стохастический скалярный процесс $x(t)$ как и скалярная стохастическая переменная $x \in R = (-\infty, \infty)$ может быть

охарактеризована системой моментов, наиболее употребительными из которых являются:

$\mu_1\{x(t)\} = M\{x(t)\} = \bar{x}(t)$ – среднее значение (матожидание) процесса $x(t)$;

$\mu_2\{x(t)\} = M\{[x(t) - \bar{x}(t)] \times [x(t) - \bar{x}(t)]\} = D_x(t)$ – дисперсия процесса $x(t)$ относительно его среднего значения (матожидания) $\bar{x}(t)$.

Фактор параметризации непрерывным временем t позволяет охарактеризовать стохастический скалярный процесс $x(t)$ еще двумя характеристиками:

$R_x(t,\tau) = M\{[x(t \pm \tau) - \bar{x}(t \pm \tau)] \times [x(t) - \bar{x}(t)]\}$ – корреляционная функция процесса $x(t)$, характеризующая ковариацию, т.е. стохастическую зависимость отсчетов значения переменной $x(t)$ в момент времени t и в момент $(t \pm \tau)$, сдвинутый вправо или влево на величину τ значения $x(t \pm \tau)$;

$$S_x(t,\omega) = \mathbf{F}\{R_x(t,\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t,\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} R_x(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} R_x(t+\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$ –

функция спектральной плотности непрерывного скалярного стохастического процесса $x(t)$, определяемая как прямое преобразование Фурье $\mathbf{F}\{(*)\}$ от корреляционной функции процесса. Это выражение для функции спектральной плотности именуется в мировой математической литературе формулой Винера–Колмогорова–Хинчина.

Определение 2.6 (О.26). Стохастический скалярный процесс $x(t)$ называется стационарным в широком смысле, если:

математическое ожидание процесса $\bar{x}(t)$ не зависит от времени и является постоянным $(\bar{x}(t) = \bar{x})$,

дисперсия этого процесса $D_x(t)$ не зависит от времени и является постоянной $(D_x(t) = D_x)$,

корреляционная функция этого процесса не зависит от времени t, а зависит только от величины τ $R_x(t,\tau) = R_x(\tau)$,

функция спектральной плотности этого процесса не зависит от времени t, а зависит только от частоты ω

$$S_x(\omega) = \mathbf{F}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} R_x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

2.2. Основные характеристики векторных непрерывных стохастических процессов

Определение 2.7 (О.27). Стохастический процесс $x(t)$ называется векторным, если он сформирован в виде вектора скалярных стохастических процессов $x_i(t); i=\overline{1,n}$ так, что он представим записью $x(t)=col\{x_i(t); i=\overline{1,n}\}$.

Примечание 2.2(П.22). Стохастический векторный процесс $x(t)=col\{x_i(t); i=\overline{1,n}\}$ как и векторная стохастическая переменная $x=col\{x_i; i=\overline{1,n}\}$ может быть охарактеризован:

$\bar{x}(t)=col\{\bar{x}_i(t); i=\overline{1,n}\}-$ вектором средних значений процесса $x(t)$;

$M\{[x(t)-\bar{x}(t)]\times[x(t)-\bar{x}(t)]^T\}=D_x(t)-$матрицей дисперсий процесса $x(t)$ относительно его среднего значения (матожидания) $\bar{x}(t)$;

Матрицей $Q_x(t)$ смешанных моментов второго порядка, которая строится как матрица математических ожиданий парных произведений $M\{(x_i(t)x_j(t)); i,j=\overline{1,n}\}$ скалярных стохастических компонентов векторного процесса

$$Q_x(t)=row\{col\{M(x_i(t)x_j(t)); i=\overline{1,n}\}; j=\overline{1,n}\}=M\{x(t)x^T(t)\}=$$

$$=\begin{bmatrix} M(x_1^2(t)) & M(x_1(t)x_2(t)) & \dots & M(x_1(t)x_n(t)) \\ M(x_2(t)x_1(t)) & M(x_2^2(t)) & \dots & M(x_2(t)x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M(x_nx_1) & M(x_nx_2) & \dots & M(x_n^2) \end{bmatrix}$$

Фактор параметризации временем t позволяет охарактеризовать стохастический векторный процесс $x(t)$ еще двумя матрицами :

$R_x(t,\tau)=M\{[x(t\pm\tau)-\bar{x}(t\pm\tau)]\times[x(t)-\bar{x}(t)]^T\}-$корреляционная матрица стохастического процесса $x(t)$, характеризующая ковариацию, т.е. стохастическую зависимость отсчетов значения переменной $x(t)$ в момент времени t и в момент $(t\pm\tau)$, сдвинутый вправо или влево на величину τ значения $x(t\pm\tau)$;

$$S_x(t,\omega)=\mathbf{F}\{R_x(t,\tau)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(t,\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{0}R_x(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}R_x(t+\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau-$$

матрица спектральных плотностей непрерывного векторного

стохастического процесса $x(t)$, определяемая как прямое преобразование Фурье $\mathbf{F}\{(*)\}$ от корреляционной матрицы процесса.

Определение 2.8 (О.28). Стохастический векторный процесс $x(t) = col\{x_i(t); i = \overline{1,n}\}$ называется стационарным в широком смысле, если:

вектор $\bar{x}(t) = col\{\bar{x}_i(t); i = \overline{1,n}\}$ – средних значений процесса $x(t)$ является стационарным так, что выполняется равенство $\bar{x}(t) = col\{\bar{x}_i(t); i = \overline{1,n}\} = col\{\bar{x}_i; i = \overline{1,n}\} = \bar{x}$;

матрица $M\{[x(t) - \bar{x}(t)] \times [x(t) - \bar{x}(t)]^T\} = D_x(t)$ – дисперсий процесса $x(t)$ относительно его среднего значения (матожидания) $\bar{x}(t)$ является стационарной так, что выполняется равенство

$M\{[x(t) - \bar{x}(t)] \times [x(t) - \bar{x}(t)]^T\} = M\{[x(t) - \bar{x}] \times [x(t) - \bar{x}]^T\} = D_x$;

матрица $Q_x(t)$ смешанных моментов второго порядка, которая строится как матрица математических ожиданий парных произведений $M\{(x_i(t)x_j(t)); i, j = \overline{1,n}\}$ скалярных стохастических компонентов векторного процесса

$$Q_x(t) = row\{col\{M(x_i(t)x_j(t)); i = \overline{1,n}\}; j = \overline{1,n}\} = M\{x(t)x^T(t)\} =$$

$$= \begin{bmatrix} M(x_1^2(t)) & M(x_1(t)x_2(t)) & \dots & M(x_1(t)x_n(t)) \\ M(x_2(t)x_1(t)) & M(x_2^2(t)) & \dots & M(x_2(t)x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M(x_n x_1) & M(x_n x_2) & \dots & M(x_n^2) \end{bmatrix}$$

является стационарной так, что выполняется соотношение $Q_x(t) = Q_x$;

корреляционная матрица $R_x(t,\tau) = M\{[x(t \pm \tau) - \bar{x}(t \pm \tau)] \times [x(t) - \bar{x}(t)]^T\}$ стохастического процесса $x(t)$, характеризующая ковариацию, т.е. стохастическую зависимость отсчетов значения переменной $x(t)$ в момент времени t и в момент $(t \pm \tau)$, сдвинутый вправо или влево на величину τ значения $x(t \pm \tau)$ оказывается зависящей только от величины τ так, что выполняется соотношение $R_x(t,\tau) = R_x(\tau) = M\{[x(t \pm \tau) - \bar{x}] \times [x(t) - \bar{x}]^T\}$;

$$S_x(t,\omega) = \mathbf{F}\{R_x(t,\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t,\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{0} R_x(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} R_x(t+\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau -$$

матрица спектральных плотностей непрерывного векторного стохастического процесса $x(t)$, определяемая как прямое

преобразование Фурье $\mathbf{F}\{(*)\}$ от корреляционной матрицы процесса оказывается не зависящей от времени t так, что выполняется соотношение $S_x(t,\omega)=\mathbf{F}\{R_x(t,\tau)\}=\mathbf{F}\{R_x(\tau)\}=S_x(\omega)$;

Примечание 2.3(П.23). Стохастический процесс стационарный в широком смысле обычно обладает эргодическим свойством. Сущность его заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить обо всех его стохастических свойствах так же, как по любому количеству реализаций меньшей длительности. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же, как по ансамблю реализаций, так и по времени. В соответствии с этим свойством математическое ожидание и дисперсия скалярного стохастического процесса $x(t)$ стационарного в широком смысле могут вычисляться с помощью выражений

$$M[x(t)]=\bar{x}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}x(t)dt, \qquad (2.3)$$

$$D_x=M\left\{[x(t)-\bar{x}]^2\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[x(t)-\bar{x}]^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}[x(t)-\bar{x}]^2\,dt. \qquad (2.4)$$

Определение 2.9 (О.29). Стохастический процесс $x(t)$ называется центрированным, если математическое ожидание процесса $\bar{x}$ является нулевым $(\bar{x}=0)$.

Введем в рассмотрение абстрактный физически не реализуемый стохастический непрерывный стохастический процесс стационарный в широком смысле, именуемый «белым шумом» $w(t)$, играющий ключевую роль при формировании реакции непрерывной системы на стохастические внешние воздействия.

Определение 2.10 (О.210). Стохастический процесс $w(t)$, стационарный в широком смысле, характеризующийся:

– нулевым математическим ожиданием

$$M\{w(t)\}=\bar{w}=0, \qquad (2.5)$$

– некоррелированными отсчетами $w(t), w(t+\tau)$ при сколь угодно малом τ, а потому

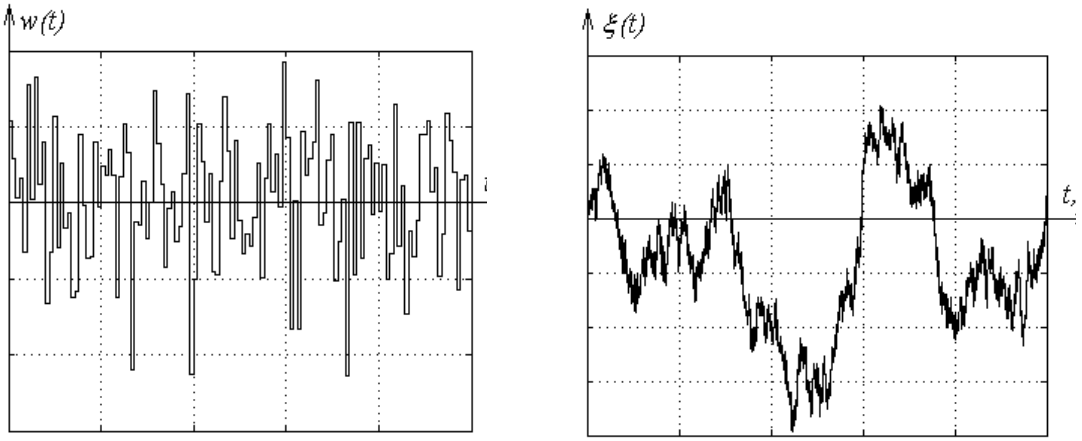
– корреляционной матрицей (функцией) вида

$$R_w(t\pm\tau,t)=N\delta(\tau), \qquad (2.6)$$

где N, $\delta(\tau)-$ соответственно диагональная матрица (функция) интенсивностей и δ–функция Дирака, называется стохастическим процессом типа «белый шум».

Примечание 2.4(П.24). Дадим дополнительную трактовку некоррелированности отсчетов, снимаемых с кривых стохастического процесса типа «белый шум». Напомним, что коррелированность это связность. Простейшим видом связи является линейная зависимость, графически задаваемая отрезком прямой линии, наклоненной к оси времени. Таким образом, если отсчеты приходятся на указанный отрезок прямой, то они оказываются связанными уравнением этой прямой, и следовательно, коррелированными. Если все отсчеты, снятые с любым сколь угодно малым шагом, оказываются не коррелированными, это означает, что наклонных к оси времени отрезков прямых не существует, все фронты кривой такого процесса ортогональны оси времени (см. рисунок 2.1а). Производные от них по времени (т.е. скорость их изменения во времени) оказываются бесконечными, а источник «белого шума» обладает бесконечной мощностью, а такого источника в природе не существует. Поэтому непрерывный «белый шум» является примером не воспроизводимого процесса. Это идеализированная математическая модель.

Следует ожидать что, если в кривых стохастических процессов появляются участки, аппроксимируемые отрезками наклонных прямых линий (см.рисунок 2.1 б) , то процесс оказывается коррелированным, а интервал корреляции определяется математическим ожиданием длин этих отрезков.



а б

Рисунок 2.1

Примечание 2.5(П.25). Выражение (2.6) позволяет сделать два вывода:

1. Стохастический процесс $w(t)$ стационарный в широком смысле типа «белый шум» характеризуется бесконечной дисперсией

$$D_w = R_w(0) = N\delta(0) = N \cdot (\infty) = \infty; \qquad (2.7)$$

2. Стохастический процесс $w(t)$ стационарный в широком смысле типа «белый шум» характеризуется постоянной матрицей (функцией) спектральных плотностей $S_w(\omega) = N$, что устанавливается с использованием интегрального свойства $\delta-$функции на основании цепочки равенств

$$S_w(\omega) = \mathbf{F}\{R_w(\tau) = N\delta(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = N. \qquad (2.8)$$

Таким образом, стационарное в широком смысле стохастическое воздействие $w(t)$ типа «белый шум» оказывается элементом бесконечномерного функционального пространства, как содержащий в своем составе бесконечное число бесконечно близких друг к другу по частоте гармоник амплитуды N.

Определение 2.11 (О.211). Стохастическим процессом стационарным в широком смысле типа «окрашенный шум» $\xi(t)$ называется процесс, наблюдаемый на выходе формирующего фильтра при условии, что на его вход подано стационарное в широком смысле стохастическое воздействие $w(t)$ типа «белый шум» интенсивности N.

В теории и практике исследования непрерывных динамических систем при стохастических экзогенных воздействиях в основном выделяют две модельные версии «окрашенных шумов» $\xi(t)$:

1. «экспоненциально коррелированный шум», который формируется из «белого шума» фильтром, представляющим собой апериодическое звено первого порядка;

2. окрашенный шум типа «нерегулярная качка», который формируется из «белого шума» фильтром, представляющим собой колебательное звено второго порядка.

Контрольные вопросы

1. Что такое скалярный непрерывный стохастический процесс стационарный в широком смысле?
2. Как вычисляется математическое ожидание скалярного непрерывного стохастического процесса?
3. Что такое корреляционная функция скалярного непрерывного стохастического процесса?
4. Как вычисляется функция спектральной плотности скалярного непрерывного стохастического процесса?
5. Что такое скалярный непрерывный стохастический процесс стационарный в широком смысле типа «белый шум»?
6. Чему равняется дисперсия скалярного непрерывного стохастического процесса типа «белый шум»?
7. Как задается корреляционная функция скалярного непрерывного стохастического процесса типа «белый шум»?
8. Чему равняется функция спектральной плотности скалярного непрерывного стохастического процесса типа «белый шум»?
9. Почему скалярный непрерывный стохастический процесс типа «белый шум» является физически невоспроизводимым?
10. Что такое векторный непрерывный стохастический процесс?
11. Как вычисляется математическое ожидание векторного непрерывного стохастического процесса?
12. Что такое матрица дисперсий векторного непрерывного стохастического процесса?
13. Как вычисляется корреляционная матрица векторного непрерывного стохастического процесса?
14. Как вычисляется матрица спектральной плотности векторного непрерывного стохастического процесса?
15. О чем свидетельствует тот факт, что матрица дисперсий векторного непрерывного стохастического процесса является диагональной?

3. ДИСКРЕТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Определение 3.1 (О.31). Стохастический процесс $x(t)$ называется дискретным по времени или просто дискретным, если время t принадлежит счетному множеству $T = \{t = k(\Delta t); k = \overline{0,\infty}\}$.

Примечание 3.1 (П.31). В определении 3.1 Δt – интервал дискретности, с которым осуществляется дискретная по времени выборка из непрерывных процессов $x(t)$, поэтому дискретный стохастический процесс может также задаваться записью $x(k)$, где k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt.

3.1. Основные характеристики скалярных дискретных стохастических процессов

Определение 3.3 (О.33). Стохастический дискретный процесс $x(k)$ называется скалярным, если стохастическая переменная x является скалярной, т.е. удовлетворяет условию $x \in R = (-\infty, \infty)$.

Определение 3.4 (О.34). Стохастический дискретный скалярный процесс $x(k)$ называется равномерно распределенным процессом, если стохастическая переменная x удовлетворяет условию $x \in (a,b)$, при этом функция $f(x)$ плотности распределения вероятности задается в форме

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a,b) \\ 0 & \text{при } x \notin (a,b) \end{cases}. \qquad (3.1)$$

Определение 3.5 (О.35). Стохастический дискретный скалярный процесс $x(k)$ называется нормально (гауссовски) распределенным процессом, если стохастическая переменная x удовлетворяет условию $x \in R = (-\infty, \infty)$, при этом функция $f(x)$ плотности распределения вероятности задается в форме

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}. \qquad (3.2)$$

Примечание 3.2(П.32).

Стохастический дискретный скалярный процесс $x(k)$ как и скалярная стохастическая переменная $x \in R = (-\infty, \infty)$ может быть охарактеризован системой моментов, наиболее употребительными из которых являются:

1. $\mu_1\{x(k)\} = M\{x(k)\} = \bar{x}(k)$ – среднее значение (математическое ожидание) процесса $x(k)$;
2. $\mu_2\{x(k)\} = M\{[x(k) - \bar{x}(k)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]\} = D_x(k)$ – дисперсия процесса $x(k)$ относительно его среднего значения (математического ожидания) $\bar{x}(k)$.

Параметризация дискретным временем k позволяет описать стохастический скалярный процесс $x(k)$ еще двумя характеристиками:

3. $R_x(k,\nu) = M\{[x(k \pm \nu) - \bar{x}(k \pm \nu)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]\}$ – корреляционной функцией процесса $x(k)$, характеризующей ковариацию, т.е. стохастическую зависимость отсчетов значения переменной $x(k)$ в момент времени k и в момент $(k \pm \nu)$, сдвинутого вправо или влево на ν тактов значения $x(k \pm \nu)$;
4. $S_x(k,\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(k \pm \nu) e^{-j\nu\omega\Delta t}$ – функцией спектральной плотности дискретного скалярного стохастического процесса $x(k)$, определяемой как бесконечный ряд Фурье от корреляционной функции процесса.

Определение 3.6 (О.36). Стохастический дискретный скалярный процесс $x(k)$ называется стационарным в широком смысле, если:

- математическое ожидание процесса $\bar{x}(k)$ не зависит от времени k и является постоянным $(\bar{x}(k) = \bar{x})$,

- дисперсия этого процесса $D_x(k)$ не зависит от времени k и является постоянной $(D_x(k) = D_x)$,

- корреляционная функция $R_x(k,\nu) = R_x(\nu)$ этого процесса не зависит от времени k, а зависит только от величины ν,

- функция спектральной плотности этого процесса не зависит от дискретного времени k, а зависит только от частоты ω

$$S_x(k,\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(k \pm \nu) e^{-j\nu\omega\Delta t} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(\nu) e^{-j\nu\omega\Delta t} = S_x(\omega).$$

3.2.Основные характеристики векторных дискретных стохастических процессов

Определение 3.7 (О.37). Стохастический дискретный процесс $x(k)$ называется векторным, если стохастическая переменная x является векторной, т.е. имеет представление $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$ так, что векторный процесс $x(k)$ представляет собой вектор, составленный из дискретных скалярных процессов, что записывается в форме $x(k) = col\{x_i(k); i = \overline{1,n}\}$.

Примечание 3.3(П.33). Стохастический дискретный векторный процесс $x(k) = col\{x_i(k); i = \overline{1,n}\}$ как и векторная стохастическая переменная $x = col\{x_i; i = \overline{1,n}\}$, может быть охарактеризован:

- $\bar{x}(k) = col\{\bar{x}_i(k); i = \overline{1,n}\}$ – вектором средних значений процесса $x(k)$;

- $M\{[x(k) - \bar{x}(k)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]^T\} = D_x(k)$ – матрицей дисперсий процесса $x(k)$ относительно его среднего значения (математического ожидания) $\bar{x}(k)$;

- Матрицей $Q_x(k)$ смешанных моментов второго порядка, которая строится как матрица математических ожиданий парных произведений $M\{(x_i(k)x_j(k)); i, j = \overline{1,n}\}$ скалярных стохастических компонентов векторного процесса

$$Q_x(k) = row\{col\{M(x_i(k)x_j(k)); i = \overline{1,n}\}; j = \overline{1,n}\} = M\{x(k)x^T(k)\} =$$

$$= \begin{bmatrix} M(x_1^2(k)) & M(x_1(k)x_2(k)) & \dots & M(x_1(k)x_n(k)) \\ M(x_2(k)x_1(k)) & M(x_2^2(k)) & \dots & M(x_2(k)x_n(k)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M(x_n(k)x_1(k)) & M(x_n(k)x_2(k)) & \dots & M(x_n^2(k)) \end{bmatrix}$$

В результате параметризации дискретным временем k стохастический дискретный векторный процесс $x(k)$ может быть описан еще двумя матрицами :

- $R_x(k,\nu) = M\{[x(k \pm \nu) - \bar{x}(k \pm \nu)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]^T\}$ – корреляционной матрицей стохастического дискретного процесса $x(k)$, характеризующей ковариацию, т.е. стохастическую зависимость

отсчетов значения переменной $x(k)$ в момент времени k и в момент $(k \pm \nu)$, сдвинутого вправо или влево на величину ν значения $x(k \pm \nu)$;

- $S_x(k,\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(k \pm \nu) e^{-j\nu\omega\Delta t}$ – матрицей спектральных плотностей дискретного векторного стохастического процесса $x(k)$, определяемой как бесконечный ряд Фурье от корреляционной матрицы процесса.

Определение 3.8 (О.38). Стохастический векторный дискретный процесс $x(k) = col\{x_i(k); i = \overline{1,n}\}$ называется стационарным в широком смысле, если:

1. вектор $\bar{x}(k) = col\{\bar{x}_i(k); i = \overline{1,n}\}$ – средних значений процесса $x(k)$ является стационарным так, что выполняется равенство $\bar{x}(k) = col\{\bar{x}_i(k); i = \overline{1,n}\} = col\{\bar{x}_i; i = \overline{1,n}\} = \bar{x}$;
2. матрица $M\{[x(k) - \bar{x}(k)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]^T\} = D_x(k) -$ дисперсий процесса $x(k)$ относительно его среднего значения (математического ожидания) $\bar{x}(k)$ является стационарной так, что выполняется равенство

$$M\{[x(k) - \bar{x}(k)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]^T\} = M\{[x(k) - \bar{x}] \times [x(k) - \bar{x}]^T\} = D_x;$$

3. матрица $Q_x(k)$ смешанных моментов второго порядка, которая строится как матрица математических ожиданий парных произведений $M\{(x_i(k)x_j(k)); i, j = \overline{1,n}\}$ скалярных стохастических компонентов векторного процесса

$$Q_x(k) = row\{col\{M(x_i(k)x_j(k)); i = \overline{1,n}\}; j = \overline{1,n}\} = M\{x(k)x^T(k)\} =$$

$$= \begin{bmatrix} M(x_1^2(k)) & M(x_1(k)x_2(k)) & \dots & M(x_1(k)x_n(k)) \\ M(x_2(k)x_1(k)) & M(x_2^2(k)) & \dots & M(x_2(k)x_n(k)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M(x_n(k)x_1(k)) & M(x_n(k)x_2(k)) & \dots & M(x_n^2(k)) \end{bmatrix}$$

является стационарной так, что выполняется соотношение $Q_x(t) = Q_x$;

4. корреляционная матрица $R_x(k,\nu) = M\{[x(k \pm \nu) - \bar{x}(k \pm \nu)] \times [x(k) - \bar{x}(k)]^T\}$ стохастического процесса $x(k)$, характеризующая ковариацию, т.е. стохастическую зависимость отсчетов значения переменной

$x(k)$ в момент времени k и в момент $(k \pm \nu)$, сдвинутый вправо или влево на величину k значения $x(k \pm \nu)$ оказывается зависящей только от величины ν так, что выполняется соотношение $R_x(k,\nu) = R_x(\nu) = M\left\{[x(k \pm \nu) - \bar{x}] \times [x(k) - \bar{x}]^T\right\}$;

5. $S_x(k,\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(k \pm \nu) e^{-j\nu\omega\Delta t}$ – матрица спектральных плотностей дискретного векторного стохастического процесса $x(k)$, определяемая как бесконечный ряд Фурье от корреляционной матрицы процесса оказывается не зависящей от дискретного времени k так, что выполняется соотношение

$$S_x(k,\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(k \pm \nu) e^{-j\nu\omega\Delta t} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(\nu) e^{-j\nu\omega\Delta t} = S_x(\omega).$$

Определение 3.9 (О.39). Стохастический векторный (скалярный) дискретный процесс $x(k)$ называется центрированным, если математическое ожидание процесса $\bar{x}$ является нулевым $(\bar{x} = 0)$.

Определение 3.10 (О.310). Дискретная по времени выборка $w(k)$ в моменты $t = (\Delta t)k$ из непрерывного «белого шума» $w(t)$, где Δt – интервал дискретности, k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности, называется «дискретным белым шумом», представляющим собой дискретную по времени последовательность стохастических скалярных (векторных) величин.

Примечание 3.4(П.34). Дискретный белый шум, будучи дискретной по времени выборкой из непрерывного белого шума, унаследовал часть свойств непрерывного, но в силу выборочности характеризуется конечной дисперсией (матрицей дисперсий). Таким образом, дискретный белый шум $w(k)$ характеризуется:

- нулевым математическим ожиданием так, что справедлива запись

$$M[w(k)] = 0; \tag{3.3}$$

- конечной дисперсией (матрицей дисперсий)

$$D_w = M\left[w(k)w^T(k)\right] = V; \tag{3.4}$$

- в силу некоррелированности отсчетов $w(k)$ и $w(i)$ (при $k \neq i$) корреляционной функцией (матрицей)

$$R_w(k,i) = M\left[w(k)w^T(i)\right] = V\delta(k,i). \tag{3.5}$$

Операция вычисления математических ожиданий для стохастических дискретных последовательностей осуществляется в силу соотношения

$$\overline{\eta}(k) = M[\eta(k)] = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\eta(i). \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что выражение (3.6) может быть записано в рекуррентной форме. Действительно справедлива цепочка соотношений

$$\overline{\eta}(k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\eta(i) = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k}.\sum_{i=0}^{k-1}\eta(i) + \frac{1}{k+1}\eta(k) = \frac{k}{k+1}\overline{\eta}(k) + \frac{1}{k+1}\eta(k). \tag{3.7}$$

Если стационарный в широком смысле стохастический дискретный процесс обладает эргодическим свойством, то операция вычисления математических ожиданий осуществляется в силу соотношений :

- в суммарной форме

$$\overline{\eta} = M[\eta(k)] = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\eta(i), \tag{3.8}$$

- в рекуррентной форме

$$\overline{\eta} = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{k}{k+1}\overline{\eta}(k) + \frac{1}{k+1}\eta(k)\right\}; \overline{\eta}(0) = \eta(0). \tag{3.9}$$

Матрицей (функцией) спектральных плотностей векторной (скалярной) стохастической переменной $(*)$ стационарной в широком смысле, обладающей матрицей ковариаций $R_{(*)}(\nu)$, называется бесконечный ряд Фурье от матрицы ковариаций, записываемый в виде

$$S_{(*)}(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_{(*)}(\nu)e^{-j\nu\omega\Delta t}. \tag{3.10}$$

Подстановка в (3.10) выражения (3.4) для корреляционной матрицы (функции) дискретного белого шума позволяет записать для него матрицу (функцию) спектральных плотностей в форме

$$S_w(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_w(\nu)e^{-j\nu\omega\Delta t} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V\delta(\nu)e^{-j\nu\omega\Delta t}\Big|_{\delta(\nu)=\begin{cases}1:\nu=0\\0:\nu\neq 0\end{cases}} = V; \forall|\omega| \le \frac{\pi}{\Delta t}. \tag{3.11}$$

Таким образом, дискретный белый шум $w(k)$, как и непрерывный $w(t)$, является бесконечномерным.

Контрольные вопросы

1. Что такое скалярный дискретный стохастический процесс стационарный в широком смысле?
2. Как вычисляется математическое ожидание скалярного дискретного стохастического процесса?
3. Что такое корреляционная функция скалярного дискретного стохастического процесса?
4. Как вычисляется функция спектральной плотности скалярного дискретного стохастического процесса?
5. Что такое скалярный дискретный стохастический процесс стационарный в широком смысле типа «белый шум»?
6. Чему равняется дисперсия скалярного дискретного стохастического процесса типа «белый шум»?
7. Как задается корреляционная функция скалярного дискретнго стохастического процесса типа «белый шум»?
8. Чему равняется функция спектральной плотности скалярного дискретного стохастического процесса типа «белый шум»?
9. Почему скалярный дискретный стохастический процесс типа «белый шум» является физически воспроизводимым?
10. Что такое векторный дискретный стохастический процесс?
11. Как вычисляется математическое ожидание векторного дискретного стохастического процесса?
12. Что такое матрица дисперсий векторного дискретного стохастического процесса?
13. Как вычисляется корреляционная матрица векторного дискретного стохастического процесса?
14. Как вычисляется матрица спектральной плотности векторного дискретного стохастического процесса?
15. О чем свидетельствует тот факт, что матрица дисперсий векторного дискретного стохастического процесса является диагональной?

4. РЕАКЦИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА НЕПРЕРЫВНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЭКЗОГЕННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ТИПА «БЕЛЫЙ ШУМ»

Ставится задача построения алгоритмического обеспечения процедур конструирования матриц дисперсий, корреляционных матриц и матриц спектральных плотностей стохастических переменных непрерывной стационарной системы, возбуждаемой экзогенным стохастическим воздействием стационарным в широком смысле типа «белый шум», с использованием возможностей векторно–матричного формализма метода пространства состояний.

4.1. Вычисление матриц дисперсий переменных системы. Матричное уравнение Ляпунова

Рассмотрим непрерывную стационарную линейную систему

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0) = x(t)|_{t=0}, y(t) = Cx(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \qquad (4.1)$$

в которой $x, g, y, \varepsilon -$ соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $F, G, C -$ соответственно матрицы состояния, входа и выхода; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются вещественнозначными и обладают размерностями $dim(x) = n, dim(g) = dim(y) = dim(\varepsilon) = m; dim(F) = n \times n,$ $dim(G) = n \times m, dim(C) = m \times n.$

Будем полагать, что экзогенное воздействие $g(t)$ приложенное к входу системы (4.1) является стационарным в широком смысле стохастическим воздействием типа «белый шум» так, что позволяет записать $g(t) = w(t)$.. В настоящем параграфе ставится задача исследовать установившиеся стохастические процессы в динамической системе вида (4.1) по векторам состояния, выхода и ошибки на предмет формирования их матриц дисперсий.

Известно, что полное явное решения $x(t) = x(g(t) = w(t), x(0), t)$ системы (4.1) задается в интегральной форме, которая имеет вид

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\lambda)}Gw(\lambda)d\lambda. \qquad (4.2)$$

Решение поставленной задачи начнем с вычисления первого момента – математического ожидания решения (4.2), для которого оказывается справедливой цепочка соотношений

$$M[x(t)] = M\left[e^{Ft}x(0)\right] + M\left[\int_0^t e^{F(t-\lambda)}Gw(\lambda)d\lambda\right] = e^{Ft}M[x(0)] + \int_0^t e^{F(t-\lambda)}GM[w(\lambda)]d\lambda.$$

В силу свойства «белого шума» иметь нулевое математическое

ожидание $M[w(t)] = \bar{w} = 0$ последнее выражение можно записать в форме

$$M[x(t)] = \bar{x}(t) = e^{Ft} M[x(0)] = e^{Ft}\bar{x}(0). \qquad (4.3)$$

На основании соотношений (4.2) и (4.3) для центрированного стохастического процесса по вектору состояния системы (4.1) становится справедливой запись

$$x(t) - \bar{x}(t) = e^{Ft}\left(x(0) - \bar{x}(0)\right) + \int_0^t e^{F(t-\lambda)} G w(\lambda) d\lambda. \qquad (4.4)$$

В свою очередь, для центрированного стохастического процесса по вектору состояния системы (4.1) в транспонированной форме $\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T$ можно записать

$$\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T = \left(x(0) - \bar{x}(0)\right)^T e^{F^T \sigma} + \int_0^\sigma w^T(\mu) G^T e^{F^T(\sigma-\mu)} d\mu\,. \qquad (4.5)$$

Сформируем на векторах $\left(x(t) - \bar{x}(t)\right)$ и $\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T$ матрицу $\left(x(t) - \bar{x}(t)\right)\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T$, для которой на основании (4.4) и (4.5) получим

$$\left(x(t) - \bar{x}(t)\right)\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T = e^{Ft}\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)^T e^{F^T\sigma} +$$

$$+ e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda} G w(\lambda)\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)^T d\lambda\, e^{F^T\sigma} + e^{Ft}\int_0^\sigma \left(x(0) - \bar{x}(0)\right) w^T(\mu) G^T e^{-F^T\mu} d\mu +$$

$$+ e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda} d\lambda \int_0^\sigma e^{F\lambda} G w(\lambda) w^T(\mu) G^T e^{-F^T\mu} d\mu\, e^{F^T\sigma}. \qquad (4.6)$$

Представление (4.6) является базой для формирования матрицы дисперсий $D_x(t)$ вектора $x(t)$ состояния системы (4.1) при экзогенном стохастическом воздействии стационарном в широком смысле типа «белый шум».

Применим к (4.6) оператор вычисления математического ожидания, тогда получим выражение

$$M\left[\left(x(t) - \bar{x}(t)\right)\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T\right] = R_x(t,\sigma) = e^{Ft} M\left[\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)^T\right] e^{F^T\sigma} +$$

$$+ e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda} G M\left[w(\lambda)\left(x(\sigma) - \bar{x}(\sigma)\right)^T\right] d\lambda\, e^{F^T\sigma} +$$

$$+ e^{Ft}\int_0^\sigma M\left[\left(x(0) - \bar{x}(0)\right) w^T(\mu)\right] G^T e^{-F^T\mu} d\mu +$$

$$+ e^{Ft}\int_0^t d\tau \int_0^\sigma e^{-F\lambda} G M\left[w(\lambda) w^T(\mu)\right] G^T e^{-F^T\mu} d\mu e^{F^T\sigma}, \qquad (4.7)$$

в представлении (4.7) $R_x(t,\sigma)$ – корреляционная матрица стохастического процесса по вектору состояния системы (4.1).

Определение матрицы дисперсий векторной стохастической переменной и свойства стационарного в широком смысле «белого шума» $w(t)$ в том числе и его некоррелированность со стохастическим вектором начального состояния $x(0)$ позволяют записать

$$\left.\begin{array}{l} D_x(0)=\mathrm{M}\left[(x(0)-\bar{x}(0))(x(0)-\bar{x}(0))^T\right]=D_{x(0)};\, M\left[w(\lambda)w^T(\mu)\right]=N\delta(\lambda,\mu); \\ M\left[(x(0)-\bar{x}(0))w^T(\mu)\right]=0_{(n\times m)};\, M\left[w(\tau)(x(0)-\bar{x}(0))^T\right]=0_{(m\times n)}. \end{array}\right\}. \quad (4.8)$$

Соотношения (4.8) позволяют выражение (4.7) представить в форме

$$R_x(t,\sigma)=e^{Ft}D_{x(0)}e^{F^T\sigma}+e^{Ft}\int_0^t d\lambda\int_0^\sigma e^{-F\lambda}GN\delta(\lambda,\mu)G^Te^{-F^T\mu}d\mu\, e^{F^T\sigma}=$$

$$=e^{Ft}D_{x(0)}e^{F^T\sigma}+e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda e^{F^T\sigma}. \quad (4.9)$$

Осуществим в (4.8) переход к матрице дисперсии на основании равенства $R_x(t,\sigma)|_{\sigma=t}=D_x(t)$, тогда для нее получим интегральное представление

$$\begin{aligned} D_x(t)&=e^{Ft}D_{x(0)}e^{F^Tt}+e^{Ft}\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda e^{F^Tt}= \\ &=e^{Ft}\left(D_{x(0)}+\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda\right)e^{F^Tt}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Продифференцируем по переменной t левую и правую части соотношения (4.10), в результате получим матричное дифференциальное уравнение для матрицы дисперсий

$$\left.\begin{array}{l} \dot{D}_x(t)=F\underbrace{e^{Ft}\left(D_{x(0)}+\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda\right)e^{F^Tt}}_{D_x(t)}+ \\ +e^{Ft}\left(e^{-Ft}GNG^Te^{-F^Tt}\right)e^{F^Tt}+\underbrace{e^{Ft}\left(D_{x(0)}+\int_0^t e^{-F\lambda}GNG^Te^{-F^T\lambda}d\lambda\right)e^{F^Tt}}_{D_x(t)}F^T= \\ =FD_x(t)+D_x(t)F^T+\left(GNG^T\right),\, D_x(0)=D_{x(0)}. \end{array}\right\} \quad (4.11)$$

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение (4.11) относительно матрицы $D_x(t)$ в установившемся режиме, который

имеет место для случая устойчивой системы (4.1) Для него оказываются справедливыми два предельных соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \dot{D}_x(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} D_x(t) = D_x. \qquad (4.12)$$

Подстановка первого равенства соотношений (4.12) в (4.11) позволяет для установившегося значения D_x матрицы дисперсий вектора состояния исследуемой системы (4.1), к входу которого приложено стохастическое воздействие стационарное в широком смысле типа «белый шум» с матрицей интенсивностей N, записать

$$FD_x + D_x F^T = -GNG^T. \qquad (4.13)$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4.1 (У4.1). Установившееся значение D_x матрицы дисперсий $D_x(t)$ вектора состояния $x(t)$ устойчивой линейной стационарной непрерывной системы (4.1) возбуждаемой экзогенным стохастическим воздействие стационарным в широком смысле типа «белый шум» $w(t)$ с матрицей интенсивностей N, может быть вычислено как решение уравнения Ляпунова (4.13).□■

Перейдем теперь к вычислению матриц дисперсий векторов выхода $y(t)$ и ошибки $\varepsilon(t)$. В соответствии с определением матрицы дисперсии стохастической векторной переменной для дисперсии вектора выхода системы (4.1) можно записать

$$\begin{aligned} D_y &= M\left[(y(t)-\bar{y}(t))(y(t)-\bar{y}(t))^T\right] = M\left[C(x(t)-\bar{x}(t))(x(t)-\bar{x}(t))^T C^T\right] = \\ &= CM\left[(x(t)-\bar{x}(t))(x(t)-\bar{x}(t))^T\right]C^T = CD_xC^T. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Решение задачи формирования матрицы дисперсий для вектора ошибки начнем с формирования его математического ожидания

$$\bar{\varepsilon}(t) = M[\varepsilon(t) = w(t) - y(t)] = M[w(t)] - M[y(t)] = 0 - \bar{y}(t) = -C\bar{x}(t).$$

Для матрицы дисперсий вектора в силу ее определения запишем

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= M\left[(\varepsilon(t)-\bar{\varepsilon}(t))(\varepsilon(t)-\bar{\varepsilon}(t))^T\right] = M\left[(w(t)-y(t)+\bar{y}(t))(w(t)-y(t)+\bar{y}(t))^T\right] = \\ &= \underbrace{M\left[(w(t))(w(t))^T\right]}_{D_w} - \underbrace{M\left[(y(t)-\bar{y}(t))(w(t))^T\right]}_{D_{yw}} - \underbrace{M\left[(w(t))(y(t)-\bar{y}(t))^T\right]}_{D_{wy}} + \\ &+ \underbrace{M\left[(-y(t)+\bar{y}(t))(-y(t)+\bar{y}(t))^T\right]}_{D_y} = D_w + D_y - D_{yw} - D_{wy}\big|_{D_{yw}=0;D_{wy}=0} = \\ &= N\delta[t,t] + D_y = \infty N + D_y = \infty N. \end{aligned}$$

При выводе выражения для матрицы дисперсий вектора ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «белый шум» использован факт некоррелированности белого шума со всеми системными переменными системы (4.1). Таким образом, матрица

дисперсий вектора ошибки при «белом шуме» на входе системы определяется структурой матрицы N интенсивностей, которая обычно задается в диагональной форме, элементы которой умножены на бесконечность. Очевидно дисперсии ошибок сепаратных каналов системы (4.1) будут бесконечно большими. Следует полагать, что ситуация качественно изменится, когда стохастическое экзогенное воздействие будет «окрашенным», что породит корреляцию выхода и стохастического входного воздействия, причем систему можно наделить такими динамическими свойствами, при которых корреляция экзогенного стохастического воздействия и выхода системы может быть приближена к единице, что доставит дисперсии ошибки максимальную близость к нулевому значению.

Пример 4.1(Пр4.1). В качестве первого примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц дисперсии вектора состояния и выхода при экзогенном стохастическом воздействии типа «белый шум» на основе матричного уравнения Ляпунова (4.13), рассмотрим систему первого порядка, представляющую собой апериодическое звено первого порядка, которое используется в качестве фильтра, формирующего на своем выходе окрашенное стохастическое воздействие типа «экспоненциально коррелированный» сигнал. Итак, в качестве системы (4.1) рассмотрим формирующий фильтр (ФФ), описываемый передаточной функцией

$$W_{фф}(s)=\frac{1}{T_a s+1}=\frac{1/(T_a\, s)}{1+1/(T_a\, s)}\Bigg|_{\frac{1}{T_a}=\Omega_a}=\frac{\Omega_a s^{-1}}{1+\Omega_a s^{-1}}$$

и заданный структурной схемой рисунок 4.1.

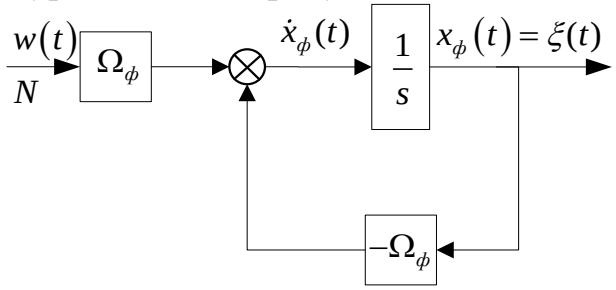


Рисунок 4.1 – Структурное представление ФФ в виде апериодического звена первого порядка

Модельное представление ФФ вида (4.1), записанное в форме

$\dot{x}_ф(t)=F_ф x_ф(t)+G_ф w(t); x_ф(0)=0; \xi(t)=C_ф x_ф(t),,$

в силу структурного представления рисунок 4.1 приобретает вид

$\dot{x}_ф(t)=-\Omega_a x_ф(t)+\Omega_a w(t);\ \ \xi(t)=x_ф(t)$ так, что для матриц ФФ можно записать $F_ф=[-\Omega_a];\ G_ф=[\Omega_a];\ \ C_ф=[1].$

Решение примера. В силу условия $x_{ф}(0)=0$ стохастические переменные ФФ являются центрированными, поэтому матрицы дисперсий его векторов состояния и выхода запишутся в форме

$$D_{x_{ф}} = M\left\{x_{ф}(t)x_{ф}{}^{T}(t)\right\} = M\left\{x_{ф}(t)x_{ф}(t)\right\} = M\left\{x_{ф}(t)^{2}\right\};$$

$$D_{\xi} = C_{ф}D_{x_{ф}}C_{ф}{}^{T} = 1\cdot D_{x_{ф}}\cdot 1 = D_{x_{ф}}.$$

Уравнение Ляпунова (4.13) относительно матрицы дисперсий стохастического вектора состояния применительно к апериодическому ФФ записывается в форме $F_{ф}D_{x_{ф}} + D_{x_{ф}}F_{ф}{}^{T} = -G_{ф}NG_{ф}{}^{T}$, подстановка в которое матриц апериодического звена дает

$$(-\Omega_{a})D_{x_{ф}} + D_{x_{ф}}(-\Omega_{a})^{T} = -\Omega_{a}N\Omega_{a}{}^{T} \Rightarrow D_{x_{ф}} = \frac{N\Omega_{a}}{2} = D_{\xi}. \qquad \blacksquare$$

Оценим физическую размерность интенсивности N «белого шума» $w(t)$, для которой справедливо представление $N = \dfrac{2D_{x_{ф}}}{\Omega_{a}} = 2D_{x_{ф}}\Omega_{a}{}^{-1}$, позволяющее для физической размерности интенсивности «белого шума» записать

$$[N] = \left[2D_{x_{ф}}\right]\left[\Omega_{a}{}^{-1}\right] = \left[(*)^{2}\right]\left[\left(c^{-1}\right)^{-1}\right] = \left[(*)^{2}\right][c] = (*)^{2}c,$$

где $(*)$ имеет смысл:

- метра, миллиметра, микрометра и т.д. для стохастического процесса типа линейных перемещений;
- радиана, градуса, угловой секунды и т.д. для стохастического процесса типа угловых перемещений;
- вольты, милливольты, амперы, миллиамперы и т.д. для электрических стохастических процессов.

В заключение заметим, что дисперсия окрашенного шума $\xi(t)$ на выходе формирующего фильтра – апериодического звена первого порядка тем больше, чем больше его полоса пропускания, определяемая его сопрягающей частотой Ω_{a}.

Пример 4.2(Пр4.2). В качестве второго примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц дисперсии вектора состояния и выхода при экзогенном стохастическом воздействии типа «белый шум» на основе матричного уравнения Ляпунова (4.13), рассмотрим систему второго порядка, представляющую собой колебательное звено, которое используется в качестве фильтра, формирующего на своем выходе окрашенное стохастическое воздействие типа «нерегулярная качка».

Итак, рассмотрим в качестве системы (4.1) ФФ, на выходе которого при $g(t)=w(t)$ формируется окрашенный шум $\xi(t)$ типа «нерегулярная качка», описываемый передаточной функцией

$$W_{\phi\phi}(s)=\frac{1}{T_k{}^2 s^2+2\zeta T_k s+1}=\frac{1/T_k^2\, s^2}{1+2\zeta/T_k\, s+1/T_k^2\, s^2}\Bigg|_{\frac{1}{T_k}=\Omega_k}=\frac{\Omega_k{}^2\,\frac{1}{s^2}}{1+2\zeta\Omega_k\,\frac{1}{s}+\Omega_k{}^2\,\frac{1}{s^2}}$$

и задаваемый структурной схемой рисунок 4.2.

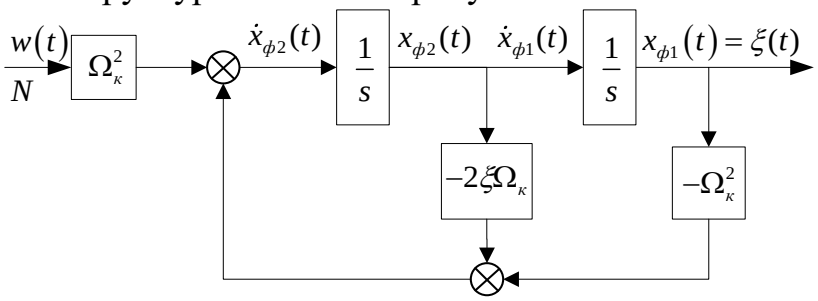


Рисунок 4.2 – Структурное представление ФФ в виде колебательного звена

Модельное представление ФФ вида (4.1), записанное в форме

$$\dot{x}_\phi(t)=F_\phi x_\phi(t)+G_\phi w(t);\ x_\phi(0)=0;\ \xi(t)=C_\phi x_\phi(t),$$

на основании представления рисунок 4.2 характеризуется матрицами

$$F_\phi=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_\kappa^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix};\ G_\phi=\begin{bmatrix}0\\ \Omega_\kappa^2\end{bmatrix};\ C_\phi=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}. \qquad (4.15)$$

Решение примера. В силу условия $x_\phi(0)=0$ стохастические переменные ФФ являются центрированными, поэтому матрица дисперсий его вектора состояния запишется в форме

$$D_{x_\phi}=M\left\{x_\phi(t)x_\phi{}^T(t)\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}x_{\phi1}\\ x_{\phi2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\phi1} & x_{\phi2}\end{bmatrix}\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}x_{\phi1}{}^2 & x_{\phi1}x_{\phi2}\\ x_{\phi2}x_{\phi1} & x_{\phi2}{}^2\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix}D_{x_{\phi11}} & D_{x_{\phi12}}\\ D_{x_{\phi21}} & D_{x_{\phi22}}\end{bmatrix},$$

при этом $D_{x_{\phi12}}=D_{x_{\phi21}}$, поэтому в уравнении Ляпунова $F_\phi D_{x_\phi}+D_{x_\phi}F_\phi{}^T=-G_\phi N G_\phi{}^T$ будем представлять матрицу D_{x_ϕ} в форме

$$D_{x_\phi}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{12} & D_{22}\end{bmatrix},\ \text{где}\ D_{11}=D_{x_{\phi11}};D_{12}=D_{x_{\phi12}};D_{22}=D_{x_{\phi22}}.$$

В результате уравнение Ляпунова (4.13) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_k{}^2 \\ 1 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_k{}^2 \end{bmatrix}N\begin{bmatrix} 0 & \Omega_k{}^2 \end{bmatrix}.$$

Перемножение матриц порождает систему скалярных равенств

$$\begin{cases} D_{12}+D_{12}=0\Rightarrow D_{12}=0; \\ D_{22}+\left(-\Omega_k{}^2\right)D_{11}-\left(2\zeta\Omega_k\right)D_{12}=0\Rightarrow D_{22}=\Omega_k{}^2D_{11}\Rightarrow D_{11}=\dfrac{1}{\Omega_k{}^2}D_{22}=\dfrac{N\Omega_k}{4\zeta}; \\ -\Omega_k{}^2D_{12}-2\zeta\Omega_kD_{22}-\Omega_k{}^2D_{12}-2\zeta\Omega_kD_{22}=-N\Omega_k{}^4\Rightarrow D_{22}=\dfrac{N\Omega_k{}^3}{4\zeta}. \end{cases}$$

В итоге искомая матрица дисперсий D_{x_ϕ} принимает вид

$$D_{x_\phi}=\begin{bmatrix} \dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} & 0 \\ 0 & \dfrac{N\Omega_k{}^3}{4\zeta} \end{bmatrix}=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k{}^2 \end{bmatrix}. \qquad (4.16)$$

Дисперсия D_ξ окрашенного шума типа «нерегулярная качка» определится из соотношения

$$D_\xi=C_\phi D_{x_\phi}C_\phi{}^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} & 0 \\ 0 & \dfrac{N\Omega_k{}^3}{4\zeta} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}. \qquad \blacksquare$$

Следует заметить, что дисперсия окрашенного шума $\xi(t)$ типа «нерегулярная качка» на выходе формирующего фильтра – колебательного звена тем больше, чем больше его полоса пропускания, определяемая его сопрягающей частотой Ω_k, и чем меньше коэффициент затухания ζ. При этом в силу связи коэффициента затухания ζ с показателем колебательности M_{max} колебательного звена соотношением $M_{max}=1/2\zeta$ с уменьшением ζ в реализациях стохастического процесса $\xi(t)$ типа «нерегулярная качка» будет расти доминирование гармонической составляющей частоты Ω_k со случайной амплитудой.

4.2. Вычисление корреляционных матриц векторов состояния и выхода системы

Введем в рассмотрение корреляционные матрицы векторных переменных линейной непрерывной системы (4.1). Тогда, если

ограничиться случаем центрированных стохастических процессов по вектору состояния системы (4.1) корреляционная матрица $R_x(\tau)$ получает представления

$$R_x(\tau) = M\left\{x(t+\tau)x^T(t)\right\}, \tau \geq 0\ , \quad (4.17)$$

$$R_x(\tau) = M\left\{x(t-\tau)x^T(t)\right\}, \tau \leq 0. \quad (4.18)$$

Нетрудно видеть, что для случая $\tau = 0$ оба представления (4.17) и (4.18) приводят к равенству $R_x(0) = D_x$. Корреляционная матрица $R_y(\tau)$ для вектора выхода системы (4.1) получает представления

$$R_y(\tau) = M\left\{y(t+\tau)y^T(t)\right\} = CM\left\{x(t+\tau)x^T(t)\right\}C^T = CR_x(\tau)C^T, \tau \geq 0, \quad (4.19)$$

$$R_y(\tau) = M\left\{y(t-\tau)y^T(t)\right\} = CM\left\{x(t-\tau)x^T(t)\right\}C^T = CR_x(\tau)C^T, \tau \leq 0 \quad .(4.20)$$

Для корреляционной матрицы $R_x(\tau)$ вектора состояния в силу свойств вектора состояния можно записать

$$R_x(\tau) = M\left\{x(t+\tau)x^T(t)\right\} = M\left\{e^{F\tau}x(t)x^T(t)\right\} = e^{F\tau}D_x\ , \tau \geq 0 \quad (4.21)$$

$$R_x(\tau) = M\left\{x(t-\tau)x^T(t)\right\} = M\left\{e^{-F\tau}x(t)x^T(t)\right\} = e^{-F\tau}D_x\ , \tau \leq 0. \quad (4.22)$$

В свою очередь, для корреляционной матрицы вектора выхода $R_y(\tau)$ на основании (4.19) – (4.22) получим представления

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = Ce^{F\tau}D_xC^T, \tau \geq 0, \quad (4.23)$$

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T = Ce^{-F\tau}D_xC^T, \tau \leq 0. \quad (4.24)$$

Несколько слов о пользовательских функциях в теории и практике динамических систем, которые выполняет корреляционная матрица. Если исследуемый стохастический процесс является скалярным, то его корреляционная матрица тоже является скалярной и именуется корреляционной функцией. Основным пользовательским параметром корреляционной функции скалярного процесса является интервал корреляции $\tau_k \leq \arg\max_{\tau}\left\{R_y(\tau) = 0.05R_y(0)\right\}$, представляющий собой отрезок $[0, \tau_к]$ временной оси $|\tau| \geq 0$, за пределами которого корреляционная функция становится близкой к нулю, что свидетельствует о том, что отсчеты, снятые с реализации стохастического процесса с интервалом, превышающим интервал корреляции $\tau_к$, оказываются не коррелируемыми. Информация о некоррелированности отсчетов с реализации стохастического процесса используется для организации цифровой обработки этих процессов. В этой связи основная пользовательская нагрузка ложится на корреляционные матрицы вектора выхода системы, возбуждаемой стохастическим экзогенным воздействием. Поэтому в дальнейшем предметом внимания становятся выражения (4.23), (4.24) для

корреляционной матрицы $R_y(\tau)$ вектора выхода системы. На основании (4.23), (4.24) необходимо констатировать следующие положения:

1. Зависимость корреляционной матрицы от свойств экзогенного стохастического воздействия несет в себе матрица дисперсий D_x вектора состояния системы, которая в случае воздействия типа «белый шум» вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (4.13).

2. Зависимость корреляционной матрицы от динамических свойств непрерывной системы вида (4.1) определяется её фундаментальной матрицей решений $\Phi(\tau)=e^{F\tau}, \tau\geq 0 \left(\Phi(\tau)=e^{-F\tau}, \tau\leq 0\right)$ и матрицей C выхода системы. Причем, если система (4.1) обладает одномерным выходом, то корреляционная матрица выхода становится корреляционной функцией и формируется в силу правила вычисления свободного движения автономной системы

$$\dot{\kappa}(\tau)=F\kappa(\tau);\ \kappa(0)=D_x C^T;\ \eta(\tau)=C\kappa(\tau), \qquad (4.25)$$

так что

$$R_y(\tau)=\eta(\tau)=Ce^{F\tau}D_x C^T,\ \tau\geq 0. \qquad (4.26)$$

Типовая кривая корреляционной функции выхода устойчивой непрерывной системы, матрица состояния которой имеет вещественные собственные значения приведена на рисунке 4.3.

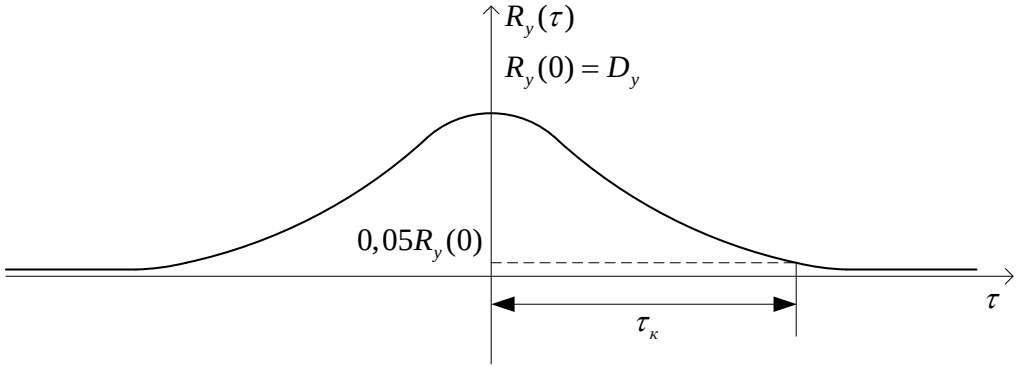


Рисунок 4.3. Пример корреляционной функции выхода системы второго порядка с биномиальным распределением мод ее матрицы состояния

Пример 4.3 (Пр4.3). В качестве первого примера, иллюстрирующего процедуру вычисления корреляционных матриц с использованием соотношений (4.21) и (4.23) рассмотрим систему (4.1) примера 4.1.

Решение примера. Для этого примера матричные компоненты соотношений (4.21) и (4.23) имеют представления $F_ф=[-\Omega_a];\ C_ф=[1];\ D_{x_ф}=\frac{N\Omega_a}{2};\ e^{F_ф t}=e^{-\Omega_a t}$. В итоге корррреляционная

матрица выхода (4.23), вырождающаяся в корреляционную функцию, принимает вид

$$R_y(\tau) = Ce^{F_\phi \tau} D_x C^T = 1 \cdot e^{-\Omega_a \tau} \cdot \frac{N\Omega_a}{2} \cdot 1 = \frac{N\Omega_a}{2} e^{-\Omega_a \tau}. \quad \blacksquare$$

Интервал корреляции, зафиксированный на уровне $R_y(\tau_\kappa) = 0.05 R_y(0)$, составляет величину $\tau_\kappa = 3/\Omega_a$.

Полученные представления и численные оценки, хорошо иллюстрируют название окрашенного шума, сформированного из экзогенного воздействия типа «белый шум» с помощью апериодического звена первого порядка, «экспоненциально коррелированный» сигнал (шум).

Пример 4.4 (Пр4.4). В качестве второго примера, иллюстрирующего процедуру вычисления корреляционных матриц с использованием соотношений (4.21) и (4.23) рассмотрим систему (4.1) примера 4.2.

Решение примера. Для этого примера матричные компоненты соотношений (4.19) и (4.21) имеют представления

$$F_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}; \quad C_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D_{x_\phi} = \frac{N\Omega_k}{4\zeta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_k{}^2 \end{bmatrix};$$

$$e^{F_\phi t} = exp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} t \right\} = e^{-\zeta\Omega_k t} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t & \frac{1}{\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t \\ -\frac{\Omega_k}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t & cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)t \end{bmatrix}$$

В итоге корреляционная матрица выхода (4.23), вырождающаяся в корреляционную функцию, принимает вид

$$R_y(\tau)=Ce^{F_\phi\tau}D_xC^T=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\times e^{-\zeta\Omega_k\tau}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau & \dfrac{1}{\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau \\ -\dfrac{\Omega_k}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau & \cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau-\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau\end{bmatrix}\times$$

$$\times\left(\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega_k{}^2\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}e^{-\zeta\Omega_k\tau}\left\{\cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau\right\}.$$

■

Интервал корреляции, зафиксированный на уровне $R_y(\tau_\kappa)=0.05R_y(0)$, существенным образом зависит от параметров колебательного звена: сопрягающей частоты Ω_k и коэффициента затухания ζ. Экспресс оценка $\tilde{\tau}_k$ интервала корреляции может быть вычислена в силу соотношения $\tilde{\tau}_k \geq 3/\zeta\Omega_k$.

4.3. Вычисление матриц спектральных плотностей векторов состояния и выхода

Рассмотрим теперь проблемы, связанные с конструированием матриц спектральных плотностей переменных системы (4.1).Следует напомнить, что матрица $S_{(*)}(\omega)$ спектральных плотностей мощности в широком смысле стационарной стохастической векторной переменной $(*)(t)$ в силу теоремы Винера–Колмогорова-Хинчина вычисляется как прямое преобразование Фурье корреляционной матрицы этой векторной стохастической переменной. Таким образом, для матрицы $S_{(*)}(\omega)$ спектральных плотностей мощности в широком смысле стационарной стохастической векторной переменной $(*)(t)$ оказывается справедливым представление

$$S_{(*)}(\omega)=F\left\{R_{(*)}(\tau)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}R_{(*)}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \qquad (4.27)$$

Так как корреляционная матрица $R_{(*)}(\tau)$ имеет различные представления для положительных и отрицательных значений аргумента τ, то вычисление матрица $S_{(*)}(\omega)$ осуществляется с помощью формулы

$$S_{(*)}(\omega)=\int_{-\infty}^{0}R_{(*)}(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}R_{(*)}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \qquad (4.28)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 4.2 (У4.2). Для динамической системы вида (4.1) при стохастическом экзогенном воздействии стационарном в широком смысле типа «белый шум» $w(t)$ матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей мощности вектора состояния $x(t)$ и $S_y(\omega)$ вектора выхода $y(t)$ могут быть заданы выражениями

$$S_x(\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \tag{4.29}$$

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T. \tag{4.30}$$

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении (4.28), где переменная $(*)(t)$ принимает смысл $x(t)$ и $y(t)$. Тогда при вычислении матрицы $S_x(\omega)$ спектральных плотностей мощности вектора состояния $x(t)$ с учетом представлений (4.21), (4.22) для корреляционной матрицы вектора состояния можно

$$R_x(-\tau) = e^{-F\tau} D_x, \tau \le 0; R_x(\tau) = e^{F\tau} D_x, \tau \ge 0, \tag{4.31}$$

что приводит к цепочке соотношений

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{-F\tau} D_x e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{F\tau} D_x e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{-(F+j\omega I)\tau} D_x d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{(F-j\omega I)\tau} D_x d\tau =$$

$$= -(F + j\omega I)^{-1}(I - 0)D_x + (F - j\omega I)^{-1}(0 - I)D_x = -\left\{(F + j\omega I)^{-1} + (F - j\omega I)^{-1}\right\} D_x.$$

В полученном выражении неявно присутствующую единичную матрицу слева от матрицы D_x представим в эквивалентной форме

$$I = [*] \cdot [*]^{-1} = \left(F^2 + \omega^2 I\right)\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} = (F + j\omega I)(F - j\omega I)\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} =$$

$$= (F - j\omega I)(F + j\omega I)\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1}.$$

.

Предложенное представление единичной матрицы позволяет для матрицы $S_x(\omega)$ спектральной плотности мощности вектора состояния $x(t)$ *записать цепочку соотношений*

$$S_x(\omega) = -\left\{(F + j\omega I)^{-1} + (F - j\omega I)^{-1}\right\} D_x = -\left\{(F + j\omega I)^{-1} + (F - j\omega I)^{-1}\right\} I D_x =$$

$$= -\left\{(F + j\omega I)^{-1} + (F - j\omega I)^{-1}\right\}(F + j\omega I)(F - j\omega I)\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_x = \quad ,$$

$$= -\left\{(F - j\omega I) + (F + j\omega I)\right\}\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_x = -2F\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_x$$

позволяющих в итоге записать

$$S_x(\omega) = -2F\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_x. \tag{4.32}$$

В свою очередь в силу (4.23), (4.24) и (4.32) оказываются справедливыми соотношения

$$R_y(\tau) = CR_x(\tau)C^T S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T,$$

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF\left(F^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_x C^T. \quad \blacksquare(4.33)$$

Если возникает необходимость вычислить матрицу $S_\varepsilon(\omega)$спектральных плотностей вектора ошибки $\varepsilon(t)$, то следует иметь в виду, что для случая экзогенного стохастического воздействия стационарного в широком смысле типа «белый шум» корреляционная матрица стохастического векторного процесса по ошибке совпадает с корреляционной матрицей белого шума и имеет вид $R_\varepsilon(\tau) = R_w(\tau) = N\delta(\tau)$.. В этом случае матрица $S_\varepsilon(\omega)$ принимает вид

$$S_\varepsilon(\omega) = S_w(\omega) = \mathbf{F}\{R_\varepsilon(\tau) = R_w(\tau) = N\delta(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = Ne^{-j\omega 0} = N.$$

Пример 4.5 (Пр4.5). В качестве первого примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц спектральных плотностей с использованием соотношений (4.32) и (4.33) рассмотрим систему (4.1) примера 4.1.

Решение примера. Для этого примера матричные компоненты соотношений (4.32) и (4.33) имеют представления $F_\phi = [-\Omega_a]; C_\phi = [1]; D_{x_\phi} = \dfrac{N\Omega_a}{2}$. В итоге матрица $S_x(\omega)$ спектральной плотности вектора состояния (4.32) вырождается в функцию и принимает
вид

$$S_x(\omega) = -2F_\phi\left(F_\phi^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_{x_\phi} = (-2)(-\Omega_a)\left(\Omega_a^2 + \omega^2\right)^{-1} \frac{N\Omega_a}{2} = \frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2 + \omega^2}.$$

В свою очередь функция $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода на основании (4.33) получает представление

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = 1 \cdot \frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2 + \omega^2} \cdot 1 = \frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2 + \omega^2} = \frac{N}{T_a^2\omega^2 + 1} = \left|\Phi_\phi(j\omega)\right|^2 N. \quad \blacksquare$$

Пример 4.6 (Пр4.6). В качестве второго примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц спектральных плотностей рассмотрим систему (4.1) примера 4.2. Для этого примера матричные компоненты соотношений (4.32) и (4.33) имеют представления (4.15) и (4.16).

Решение примера. Используя (4.32), получим

$$S_x(\omega)=-2F\left(F^2+\omega^2 I\right)^{-1}D_x=-2\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}\times\right.$$

$$\left.\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega^2 & 0\\ 0 & \omega^2\end{bmatrix}\right)^{-1}\times\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega_k^2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ \Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\omega^2-\Omega_k^2 & -2\zeta\Omega_k^3\\ 2\zeta\Omega_k^3 & \omega^2-\Omega_k{}^2+4\zeta^2\Omega_k^2\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega_k^2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\frac{1}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ \Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\omega^2-\Omega_k^2+4\zeta^2\Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k^3\\ -2\zeta\Omega_k^3 & \omega^2-\Omega_k^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \Omega_k^2\end{bmatrix}=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\frac{1}{\left(\omega^2-\Omega_k{}^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ \Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\omega^2-\Omega_k{}^2+4\zeta^2\Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k^5\\ -2\zeta\Omega_k^3 & \left(\omega^2-\Omega_{\mathrm{k}}^2\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_k}{2\zeta}\times\frac{1}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\times\begin{bmatrix}2\zeta\Omega_k^3 & -\left(\omega^2-\Omega_{\mathrm{k}}^2\right)\\ \left(\omega^2-\Omega_{\mathrm{k}}^2\right)\Omega_k^2 & 2\zeta\Omega_k\left(\omega^2-\left(1-\zeta^4\right)\Omega_{\mathrm{k}}^2\right)\end{bmatrix}.$$

В свою очередь используя (4.33) для матрицы-функции спектральной функции будем иметь

$$S_y(\omega)=CS_x(\omega)C^T\Big|_{C=[1\quad 0]}=\frac{N\Omega_k^4}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}=\left|\Phi_\phi(j\omega)\right|^2 N.\blacksquare(4.34)$$

Дадим комментарий полученному результату (4.34). Функция спектральной плотности стохастического выхода, порожденного «белым шумом» на его входе, будет:

1.с ростом частоты ω изменяться от значения $S_y(\omega)\big|_{\omega=0}=N$ до значения $S_y(\omega)\big|_{\omega=\infty}=0$;

2.на частоте $\omega=\Omega_k$ принимать максимальное значение

$$S_y(\omega)\big|_{\omega=\Omega_k}=\frac{N}{4\zeta^2}=\frac{N}{(2\zeta)^2}=N(M_{max})^2,$$

равное произведению интенсивности «белого шума» на квадрат показателя колебательности колебательного звена.

Ко всему сказанному в этом параграфе необходимо отметить, что, если функция (матрица) $S_{(*)}(\omega)$ спектральной плотности стохастической переменной $(*(t))$ есть прямое преобразование Фурье от корреляционной функции, то корреляционная функция есть обратное преобразование от функции спектральной плотности, то есть выполняется соотношение

$$R_{(*)}(\tau) = F^{-1}\{S_{(*)}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{(*)}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (4.34)$$

Если в выражении (4.34) в левой и правой частях осуществить предельный переход по τ к нулю $(\tau \to 0)$, то получим полезное соотношение

$$R_{(*)}(0) = D_{(*)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{(*)}(\omega)d\omega. \qquad (4.35)$$

Таким образом, на основании соотношения (4.35) следует констатировать, что с точностью до мультипликативного члена $1/(2\pi)$ площадь под графиком функции $S_{(*)}(\omega)$ спектральной плотности стохастической переменной $(*(t))$ равна ее дисперсии $D_{(*(t))}$.

Контрольные вопросы

1. За счет какого свойства дельта–функции Дирака получается представление матрицы дисперсии вектора состояния системы, возбуждаемой белым шумом, в форме интеграла?
2. Каким образом осуществляется переход от интегрального представления матрицы дисперсий вектора состояния системы к дифференциальному?
3. При каком свойстве матрицы состояния системы существует установившееся решение матричного дифференциального уравнения относительно матрицы дисперсий вектора состояния системы?
4. Как вычисляется матрица дисперсий вектора выхода системы при векторном белом шуме на входе?
5. Чему равна матрица дисперсий вектора ошибки системы при белом шуме на входе?
6. Как вычислить матрицу дисперсий вектора состояния системы при возмущении ее белым шумом по *j*–му входу?
7. Как вычислить матрицу дисперсий по вектору выхода системы при возмущении ее белым шумом по *j*–му входу?
8. Как вычислить дисперсию *l*–го компонента вектора выхода при возмущении системы белым шумом по *j*–му входу?
9. Как вычисляется корреляционная матрица вектора состояния системы при векторном белом шуме на входе?
10. Как вычисляется корреляционная матрица вектора выхода при векторном белом шуме на входе?
11. Как вычислить корреляционную функцию *l*–го компонента вектора выхода при возмущении системы белым шумом по *j*–му входу?
12. Как вычисляется матрица спектральной плотности вектора состояния системы при векторном белом шуме на входе?

13. Как вычисляется матрица спектральной плотности вектора выхода при векторном белом шуме на входе?
14. Как вычислить функцию спектральной плотности *l*–го компонента вектора выхода при возмущении системы белым шумом по *j*–му входу?
15. Как вычислить функцию спектральной плотности *l*–го компонента вектора выхода при возмущении системы белым шумом по *j*–му входу в случае представления системы с помощью передаточной функции?

5. РЕАКЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ДИСКРЕТНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЭКЗОГЕННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ТИПА ДИСКРЕТНЫЙ «БЕЛЫЙ ШУМ»

Ставится задача построения алгоритмического обеспечения процедур конструирования матриц дисперсий, корреляционных матриц и матриц спектральных плотностей стохастических переменных дискретной стационарной системы, возбуждаемой экзогенным стохастическим воздействием стационарным в широком смысле типа дискретный «белый шум», с использованием возможностей векторно–матричного формализма метода пространства состояний.

5.1. Вычисление матриц дисперсий переменных системы. Дискретное матричное уравнение Ляпунова

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}g(k),x(0)=x(k)\}_{k=0},y(k)=\overline{C}x(k),\varepsilon(k)=g(k)-y(k), \quad (5.1)$$

в которой $x,g,y,\varepsilon-$соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $\overline{F},\overline{G},\overline{C}-$соответственно матрицы состояния, входа и выхода; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются веществennозначными и обладают размерностями $dim(x)=n,dim(g)=dim(y)=dim(\varepsilon)=m;dim(F)=n\times n,$ $dim(G)=n\times m,dim(C)=m\times n.$

Будем полагать, что экзогенное воздействие $g(k)$ приложенное к входу системы (5.1) является стационарным в широком смысле стохастическим воздействием типа дискретный «белый шум» так, что можно записать $g(k)=w(k).$. В настоящем параграфе ставится задача исследовать установившиеся стохастические процессы в динамической системе вида (5.1) по векторам состояния, выхода и ошибки на предмет формирования их матриц дисперсий. Проблему вычисления показателей реакции дискретной динамической системы вида (5.1) на дискретное экзогенное стационарное в широком смысле стохастическое воздействие будем решать, опираясь на результаты решения подобной задачи для непрерывного случая, которые изложим в конспективной форме.

Решение поставленной задачи для дискретной системы несколько отличается от случая непрерывной, для которой потребовался переход

от дифференциальной формы (4.1) задания непрерывной системы к интегральной форме (4.2), представляющей явное решение вида $x(t)=x(g(t)=w(t),x(0),t)$. Для дискретных систем такая необходимость отпадает, потому что рекуррентная запись (5.1) является явным решением для двух смежных дискретных моментов времени.

Сформулируем основные результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 5.1(У5.1). Рассмотрим векторные дискретные процессы по состоянию и выходу, являющиеся решением линейного стохастического векторно-матричного рекуррентного уравнения (5.1) при $g(k)=w(k)$, где $w(k)$ – стационарная в широком смысле дискретная последовательность векторных *стохастических величин*, именуемая *дискретным "белым шумом"*, *характеризующаяся* нулевым средним значением (математическим ожиданием)

$$M[w(k)]=\overline{w}[k]=\overline{w}=0; \tag{5.2}$$

некоррелированностью отсчетов $w(k)$ и $w(i)$ так, что выполняется соотношение

$$R_w(k,i)=M\left[w(k)w^T(i)\right]=V\delta(k,i),$$

где $\delta(k,i)$ – символ Кронекера, принимающий значение «1» при $k=i$ и значение «0» при $k\neq i$, и следовательно матрицей дисперсий

$$D_w=M\left[w(k)w^T(k)\right]=V\ ; \tag{5.3}$$

при $x(0)$ – векторе начального состояния процесса (5.1) таком, что

$$M[x(0)]=\overline{x}(0),D_x(0)=M\left[(x(0)-\overline{x}(0))(x(0)-\overline{x}(0))^T\right]=D_{x(0)}. \tag{5.4}$$

Тогда математическое ожидание $\overline{x}(k)=M[x(k)]$ и матрица дисперсий

$$D_x(k)=M\left[(x(k)-\overline{x}(k))(x(k)-\overline{x}(k))^T\right] \tag{5.5}$$

вектора $x(k)$ удовлетворяет соотношениям

$$\overline{x}(k)=\overline{F}^k\overline{x}(0), \tag{5.6}$$

$$D_x(k+1)=\overline{F}D_x(k)\overline{F}^T+\overline{G}V\overline{G}^T,D_x(0)=D_{x(0)}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Сначала докажем справедливость (5.6), для чего к свободной составляющей движения системы (5.1) $x(k)=\overline{F}^kx(0)$ применим оператор вычисления математического ожидания. В результате получим $M[x(k)]=\overline{F}^kM[x(0)]\Rightarrow\overline{x}(k)=\overline{F}^k\overline{x}(0)$, имеющего

эквивалентное рекуррентное представление в форме $\bar{x}(k+1)=\bar{F}\bar{x}(k)$. Для доказательства справедливости (5.7) сначала на основании (5.1)) составим выражения

$$\left.\begin{array}{l} x(k+1)-\bar{x}(k+1)=\bar{F}\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)+\bar{G}w(k), x(0)-\bar{x}(0); \\ \left(x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right)^T=\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)^T\bar{F}^T+w(k)^T\bar{G}^T, \left(x(0)-\bar{x}(0)\right)^T. \end{array}\right\} \quad (5.8)$$

Сформируем теперь мультипликативную конструкцию $\left(x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right)\cdot\left(x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right)^T$, для которой при $g(k)=w(k)$, на основании (5.1), (5.8) получим

$$\begin{array}{l} \left(x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right)\cdot\left(x(k+1)-\bar{x}(k+1)\right)^T=\bar{F}\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)\cdot\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)^T\bar{F}^T+ \\ +\bar{G}w(k)\cdot\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)^T\bar{F}^T+\bar{F}\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)\cdot w(k)^T\bar{G}^T+\bar{G}w(k)w(k)^T\bar{G}^T. \end{array} \quad (5.9)$$

Применим к выражению (5.9) оператор вычисления математического ожидания, тогда получим с учетом (5.3),(5.5) и некоррелированности стохастических векторов $w(k)$ и $\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)$, записываемой в формах $M\left[w(k)\cdot\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)^T\right]=0_{(m\times n)}$ и $M\left[\left(x(k)-\bar{x}(k)\right)\cdot w(k)^T\right]=0_{(n\times m)}$, получим соотношение (5.7). ■

Примечание 5.1 (П5.1). Рассмотрим матричное рекуррентное уравнение (5.7) относительно $D_x(k)$ матрицы дисперсии вектора состояния системы (5.1) в установившемся режиме для случая, когда матрица $\bar{F}$ системы имеет все собственные значения в единичном круге. Для него оказываются справедливыми предельные соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} D_x(k+1)=\lim\limits_{k\to\infty} D_x(k)=D_x$,

при этом рекуррентное матричное уравнение (5.7) вырождается в алгебраическое матричное уравнение

$$D_x-\bar{F}D_x\bar{F}^T=\bar{G}V\bar{G}^T, \quad (5.10)$$

именуемое дискретным матричным уравнением Ляпунова.

Решим теперь задачу вычисления математического ожидания и матрицы дисперсий стохастических векторов выхода и ошибки системы (5.1).Для матожидания вектора выхода в силу его определения запишем

$$\bar{y}(k)=M\left[y(k)=\bar{C}x(k)\right]=\bar{C}M\left[x(k)\right]=\bar{C}\bar{x}(k).$$

В свою очередь для матожидания вектора ошибки получим

$$\bar{\varepsilon}(k)=M\left[\varepsilon(k)=w(k)-y(k)\right]=M\left[w(k)\right]+M\left[-y(k)\right]=0-\bar{y}(k)=-\bar{y}(k).$$

С учетом (5.6) можно записать цепочку равенств для стохастических векторов выхода и ошибки системы (5.1)

$$\bar{y}(k)=\overline{C}\bar{x}(k)=\overline{C}\overline{F}^{k}\bar{x}(0),\ \bar{\varepsilon}(k)=-\bar{y}(k)=-\overline{C}\overline{F}^{k}\bar{x}(0).$$

Нетрудно видеть, что центрированном стохастическом экзогенном воздействии, коим является дискретный «белый шум», основным причинным фактором появления среднего значения векторов состояния, выхода и ошибки является матожидание вектора начального состояния системы (5.1). Если дискретная система (5.1) устойчива, то средние значения стохастических векторов состояния, выхода и ошибки с течением времени становятся нулевыми так, что установившиеся значения векторов состояния, выхода и ошибки при рассмотрении установившихся значений их дисперсий можно считать нулевыми. Тогда для дисперсий выхода и ошибки с учетом некоррелируемости дискретного «белого шума» и выхода системы (5.1) будем иметь

$$D_y=M\left[y(k)y^T(k)\right]=M\left[\overline{C}x(k)x^T(k)\overline{C}^T\right]=\overline{C}M\left[x(k)x^T(k)\right]\overline{C}^T=\overline{C}D_x\overline{C}^T;$$

$$D_\varepsilon=M\left[\varepsilon(k)\varepsilon^T(k)\right]=M\left[(w(k)-y(k))(w(k)-y(k))^T\right]=\underbrace{M\left[(w(k))(w(k))^T\right]}_{V}+$$

$$+\underbrace{M\left[(w(k))(-y(k))^T(k)\right]}_{-D_{wy}}+\underbrace{M\left[(-y(k))(w(k))^T(k)\right]}_{-D_{yw}}+\underbrace{M\left[(-y(k))(-y(k))^T(k)\right]}_{D_y}=$$

$$=V+D_y-D_{wy}-D_{yw}\big|_{D_{wy}=0;D_{yw}=0}=V+D_y.$$

Как и в случае непрерывной системы (4.1) матрица дисперсий вектора ошибки при экзогенном стохастическом воздействии типа «белый шум»:

1.равна сумме матриц дисперсии экзогенного воздействия и выхода системы (5.1);

2.может быть уменьшена по норме, только в случае коррелированности вектора выхода и вектора экзогенного воздействия, что может быть достигнуто только в случае окрашенного стохастического экзогенного воздействия и специальных динамических показателей8 системы (5.1).

Пример 5.1(Пр5.1). В качестве примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц дисперсии вектора состояния и выхода системы (5.1) при экзогенном стохастическом воздействии типа дискретный «белый шум» на основе дискретного матричного уравнения Ляпунова (5.10), рассмотрим дискретную систему,

образованную последовательным соединением: квантователя, осуществляющего с интервалом Δt дискретную выборку $w(k)$ из непрерывного «белового шума» $w(t)$, фиксатора и непрерывного объекта с передаточной функцией

$$W_{\phi\phi}(s)=\frac{1}{T_a s+1}=\frac{1/T_a\, s}{1+1/T_a\, s}\Bigg|_{\frac{1}{T_a}=\Omega_a}=\frac{\Omega_a s}{1+\Omega_a s}.$$

При этом векторно-матричное описание непрерывного объекта $\dot{x}_\phi(t)=F_\phi x_\phi(t)+G_\phi w(t); x_\phi(0)=0;\ \xi(t)=C_\phi x_\phi(t)$ характеризуется матрицами $F_\phi=[-\Omega_a];\ G_\phi=[\Omega_a];\ C_\phi=[1]$. Дискретное представление $x_\phi(k+1)=\overline{F}_\phi x_\phi(k)+\overline{G}_\phi w(k), x_\phi(0)=0, y_\phi(k)=\overline{C}_\phi x_\phi(k), \varepsilon_\phi(k)=w(k)-y_\phi(k),$ (5.1) приведенной системы характеризуется матрицами

$\overline{F}_\phi=e^{F_\phi\Delta t}=e^{-\Omega_a\Delta t}, \overline{G}_\phi=\left(\overline{F}_\phi-I\right)F_\phi^{-1}G_\phi=\left(e^{-\Omega_a\Delta t}-1\right)(-\Omega_a)^{-1}\Omega_a=\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right),$
$\overline{C}_\phi=C_\phi=1.$

Решение примера. Дискретное матричное уравнение (5.10) $D_x-\overline{F}D_x\overline{F}^T=\overline{G}V\overline{G}^T$ для рассматриваемого примера принимает вид $D_x-e^{-\Omega_a\Delta t}D_x e^{-\Omega_a\Delta t}=\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)V\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)$, откуда для матрицы дисперсий D_x размерности (1×1) получаем

$$D_x=\frac{\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)^2}{1-e^{-2\Omega_a\Delta t}}V=\frac{\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}{\left(1+e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}V.$$

Для матриц дисперсий выхода и ошибки получим

$$D_y=C_\phi D_x C_\phi^{\mathrm{T}}=1\cdot D_x\cdot1=D_x=\frac{\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}{\left(1+e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}V,\ D_\varepsilon=V+D_y=\frac{2V}{\left(1+e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}.\quad\blacksquare$$

В заключение заметим, что дисперсия дискретного окрашенного шума $\xi(k)=y(k)$ на выходе дискретного формирующего фильтра – «дискретного апериодического» звена первого порядка тем больше, чем больше его полоса пропускания, определяемая его сопрягающей частотой Ω_a, и интервал дискретности Δt.

5.2.Вычисление корреляционных матриц векторов состояния и выхода системы

По аналогии с непрерывным случаем введем в рассмотрение корреляционные матрицы векторных переменных линейной дискретной системы (5.1). Тогда, если ограничиться случаем центрированных стохастических процессов по вектору состояния системы (5.1) корреляционная матрица $R_x(\tau)$ получает представления

$$R_x(\nu)=M\left\{x(k+\nu)x^T(k)\right\},\nu\geq 0\ , \tag{5.11}$$

$$R_x(\nu)=M\left\{x(k-\nu)x^T(k)\right\},\nu\leq 0\ . \tag{5.12}$$

Нетрудно видеть, что для случая $\nu=0$ оба представления (5.11) и (5.12) приводят к равенству $R_x(0)=D_x$. Корреляционная матрица $R_y(\nu)$ для вектора состояния системы (5.1) получает представления

$$R_x(\nu)=M\left\{x(k+\nu)x^T(t)\right\}=M\left\{\overline{F}^{\nu}x(k)x^T(k)\right\}=\overline{F}^{\nu}D_x\ ,\nu\geq 0 \tag{5.13}$$

$$R_x(\nu)=M\left\{x(k-\nu)x^T(t)\right\}=M\left\{\overline{F}^{-\nu}x(k)x^T(k)\right\}=\overline{F}^{-\nu}D_x\ ,\nu\leq 0 \tag{5.14}$$

В свою очередь, для корреляционной матрицы вектора выхода $R_y(\nu)$ на основании (5.11) – (5.14) получим представления

$$R_y(\nu)=\overline{C}R_x(\nu)\overline{C}^T=\overline{C}\overline{F}^{\nu}D_x\overline{C}^T\ ,\nu\geq 0\,, \tag{5.15}$$

$$R_y(\nu)=\overline{C}R_x(\nu)\overline{C}^T=\overline{C}\overline{F}^{-\nu}D_x\overline{C}^T\ ,\nu\leq 0\,. \tag{5.16}$$

Несколько слов о пользовательских функциях в теории и практике динамических систем, которые выполняет корреляционная матрица. Если исследуемый стохастический процесс является скалярным, то его корреляционная матрица тоже является скалярной и именуется корреляционной функцией. Основным пользовательским параметром корреляционной функции скалярного процесса является интервал корреляции $\nu_к\leq\arg\max\limits_{\nu}\left\{R_y(\nu)=0.05R_y(0)\right\}$, представляющий собой отрезок $[0,\nu_к]$ временной дискретной оси $\nu\geq 0$, за пределами которого корреляционная функция становится близкой к нулю, что свидетельствует о том, что отсчеты, снятые с реализации стохастического дискретного процесса с интервалом, превышающим интервал корреляции $\nu_к$, оказываются не коррелируемыми. Информация о некоррелированности отсчетов с реализации дискретного стохастического процесса используется для организации дополнительной цифровой обработки этих процессов. В этой связи основная пользовательская нагрузка ложится на корреляционные матрицы вектора выхода дискретной системы, возбуждаемой

дискретным стохастическим экзогенным воздействием. Поэтому в дальнейшем предметом внимания становятся выражения (5.15), (5.16) для корреляционной матрицы $R_y(\nu)$ вектора выхода системы. На основании (5.15), (5.16) необходимо констатировать следующие положения:

1. Зависимость корреляционной матрицы от свойств экзогенного стохастического воздействия несет в себе матрица дисперсий D_x вектора состояния системы, которая в случае воздействия типа дискретный «белый шум» вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (5.10).

2. Зависимость корреляционной матрицы от динамических свойств дискретной системы вида (5.1) определяется её фундаментальной матрицей решений $\overline{\Phi}(\tau)=\overline{F}^{\nu}, \nu\geq 0 \left(\overline{\Phi}(\nu)=\overline{F}^{\nu}, \nu\leq 0\right)$ и матрицей $\overline{C}$ выхода системы. Причем, если система (5.1) обладает одномерным выходом, то корреляционная матрица выхода становится корреляционной функцией и формируется в силу правила вычисления свободного движения автономной системы

$$\kappa(\nu+1)=\overline{F}\kappa(\nu);\ \kappa(0)=D_x\overline{C}^T;\ \eta(\nu)=\overline{C}\kappa(\nu), \qquad (5.17)$$

так что

$$R_y(\nu)=\eta(\nu)=\overline{C}\overline{F}^{\nu}D_x\overline{C}^T, \nu\geq 0. \qquad (5.18)$$

Пример 5.2 (Пр5.2). В качестве примера, иллюстрирующего процедуру вычисления корреляционных матриц с использованием соотношений (5.13) и (5.15) рассмотрим систему (5.1) примера 5.1.

Решение примера. Для этого примера матричные компоненты соотношений (5.13) и (5.15) имеют представления $\overline{F}_{\phi}=e^{F_{\phi}\Delta t}=e^{-\Omega_a\Delta t}, \overline{G}_{\phi}=\left(\overline{F}_{\phi}-I\right)F_{\phi}^{-1}G_{\phi}=\left(e^{-\Omega_a\Delta t}-1\right)\left(-\Omega_a\right)^{-1}\Omega_a=\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right),$ $\overline{C}_{\phi}=C_{\phi}=1, D_x=\dfrac{\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}{\left(1+e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}V$. В итоге корреляционная матрица (функция) выхода (5.15) при $\nu\geq 0$, вырождающаяся в корреляционную функцию, принимает вид

$$R_y(\nu)=\overline{C}_{\phi}\overline{F}_{\phi}^{\nu}D_x\overline{C}_{\phi}^T=1\cdot\left(e^{-\Omega_a\Delta t}\right)^{\nu}\cdot\frac{\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}{\left(1+e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}V\cdot 1=\frac{\left(1-e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}{\left(1+e^{-\Omega_a\Delta t}\right)}V\cdot\left(e^{-\Omega_a\Delta t}\right)^{\nu}$$

■

Интервал корреляции, зафиксированный на уровне $\nu_\kappa \le \arg\max_{\nu}\{R_y(\nu) = 0.05R_y(0)\}$, составляет величину $\nu_\kappa = 3/(\Omega_a \Delta t)$.

Полученные представления и численные оценки, хорошо иллюстрируют название окрашенного шума, сформированного из экзогенного воздействия типа дискретный «белый шум» с помощью дискретной модели апериодического звена первого порядка, дискретный «экспоненциально коррелированный» сигнал (шум).

5.3. Вычисление матриц спектральных плотностей векторов состояния и выхода

Рассмотрим теперь проблемы, связанные с конструированием матриц спектральных плотностей переменных системы (5.1). Сначала дадим определение матрицы спектральных плотностей векторной переменной $(*)$ дискретной системы вида (5.1).

Определение 5.1 (О5.1). Матрицей $\bar{S}_{(*)}(\omega)$ спектральных плотностей векторной стохастической переменной $(*)$, обладающей матрицей ковариаций $\bar{R}_{(*)}(\nu)$ называется бесконечный ряд Фурье от матрицы ковариаций, записываемый в виде

$$\bar{S}_{(*)}(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \bar{R}_{(*)}(\nu) e^{-j\omega\Delta t\nu} \qquad (5.19)$$

Применительно к векторным переменным дискретной системы (5.1) введенное определение матрицы спектральных плотностей с учетом соотношений (5.13) и (5.14) позволяет записать

$$\bar{S}_x(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \bar{R}_x(\nu) e^{-j\omega\Delta t\nu},\ \bar{S}_y(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \bar{R}_y(\nu) e^{-j\omega\Delta t\nu} = \bar{C}\bar{S}_x(\omega)\bar{C}^T. \qquad (5.20)$$

Для целей получения компактного представления матриц спектральных плотностей (5.20) сформулируем и докажем утверждение.

Утверждение 5.2(У5.2). Матрицы спектральных плотностей векторных переменных x состояния и y дискретной системы вида (5.1) представимы в форме

$$\bar{S}_x(\omega) = 2\left(I - \bar{F}\cos(\omega\Delta t)\right)\left(I - 2\bar{F}\cos(\omega\Delta t) + \bar{F}^2\right)^{-1}\bar{D}_x, \qquad (5.21)$$

$$\bar{S}_y(\omega)=\bar{C}\bar{S}_x(\omega)\bar{C}^T=2\bar{C}\left(I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)\right)\left(I-2\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+\bar{F}^2\right)^{-1}\bar{D}_x\bar{C}^T. \quad \square(5.22)$$

Доказательство. Представим матрицу спектральных плотностей $\bar{S}_x(\omega)$, задаваемую с помощью (5.20), в форме цепочки матричных равенств

$$\begin{aligned}\bar{S}_x(\omega)&=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\bar{R}_x(\nu)e^{-j\omega\Delta t\nu}=\sum_{\nu=-\infty}^{0}\bar{F}^{-\nu}\bar{D}_x e^{-j\omega\Delta t\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{F}^{\nu}\bar{D}_x e^{-j\omega\Delta t\nu}=\\&=\sum_{\nu=-\infty}^{0}\left(\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)^{-\nu}\bar{D}_x+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)^{\nu}\bar{D}_x.\end{aligned} \quad (5.23)$$

В выражениях (5.23) содержатся члены суммы матричной геометрической прогрессии соответственно с показателями $\bar{F}e^{j\omega\Delta t}$ и $\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}$, для которых оказываются справедливыми представления геометрических прогрессий в виде свернутых сумм

$$\sum_{\nu=-\infty}^{0}\left(\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)^{-\nu}=\left(\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)^{\infty}+\ldots+\left(\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)^{2}+\left(\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)+I=\left(I-\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)^{-1}, \quad (5.24)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)^{\nu}=I+\left(\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)+\left(\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)^{2}+\ldots+,\left(\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)^{\infty}=\left(I-\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)^{-1}, \quad (5.25)$$

с учетом (5.23), (5.24) и (5.25) для матрицы $\bar{S}_x(\omega)$ спектральной плотности процессов по состоянию можно записать

$$\begin{aligned}\bar{S}_x(\omega)&=\left\{\left(I-\bar{F}e^{j\omega\Delta t}\right)^{-1}+\left(I-\bar{F}e^{-j\omega\Delta t}\right)^{-1}\right\}\bar{D}_x=\\&=\left\{\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)-j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]^{-1}+\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]^{-1}\right\}\bar{D}_x.\end{aligned} \quad (5.26)$$

Запишем единичную матрицу, неявно присутствующую в выражении (5.26) непосредственно слева от матрицы $\bar{D}_x$ в форме

$$\begin{aligned}I&=\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)-j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]\times\\&\times\left\{\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)-j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]\right\}^{-1}=\\&=\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)-j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]\left[I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+j\bar{F}\sin(\omega\Delta t)\right]\times\\&\times\left\{I-2\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+\bar{F}^2\right\}^{-1}.\end{aligned}$$

Подстановка полученного представления единичной матрицы I в (5.26) дает

$$\begin{aligned}\bar{S}_x(\omega)&=2\left(I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I-2\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+\bar{F}^2\right\}^{-1}\bar{D}_x,\\\bar{S}_y(\omega)&=2\bar{C}\left(I-\bar{F}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I-2\bar{F}\cos(\omega\Delta t)+\bar{F}^2\right\}^{-1}\bar{D}_x\bar{C}^T.\end{aligned} \quad \blacksquare(5.27)$$

Примечание 5.2 (П5.2). В выражениях для матриц спектральных плотностей $\overline{S}_x(\omega)$, $\overline{S}_y(\omega)$, в формах (5.27) соответственно для ω следует иметь в виду ограничение $-\pi(\Delta t)^{-1} \le \omega \le \pi(\Delta t)^{-1}$.

Пример 5.3 (Пр5.3). В качестве примера, иллюстрирующего процедуру вычисления матриц $\overline{S}_x(\omega)$, $\overline{S}_y(\omega)$, спектральных плотностей с использованием соотношений (5.27) рассмотрим систему (5.1) примеров 5.1 и 5.2.

Решение примера. Для этого примера матричные компоненты соотношений (5.13) и (5.15) имеют представления

$$\overline{F}_\phi = e^{F_\phi \Delta t} = e^{-\Omega_a \Delta t}, \overline{G}_\phi = \left(\overline{F}_\phi - I\right) F_\phi^{-1} G_\phi = \left(e^{-\Omega_a \Delta t} - 1\right)\left(-\Omega_a\right)^{-1}\Omega_a = \left(1 - e^{-\Omega_a \Delta t}\right),$$

$$\overline{C}_\phi = C_\phi = 1, D_x = \frac{\left(1 - e^{-\Omega_a \Delta t}\right)}{\left(1 + e^{-\Omega_a \Delta t}\right)} V.$$

Тогда в силу (5.27) для матриц (функций) спектральных плотностей $\overline{S}_x(\omega)$, $\overline{S}_y(\omega)$ будем иметь:

$$\overline{S}_x(\omega) = 2\left(I - \overline{F}_\phi \cos(\omega \Delta t)\right)\left\{I - 2\overline{F}_\phi \cos(\omega \Delta t) + \overline{F}_\phi{}^2\right\}^{-1} \overline{D}_x = 2\left(1 - e^{-\Omega_a \Delta t}\cos(\omega \Delta t)\right) \times$$

$$\times \left\{1 - 2\cos(\omega \Delta t) e^{-\Omega_a \Delta t} + e^{-2\Omega_a \Delta t}\right\}^{-1} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\Omega_a \Delta t}\right)}{\left(1 + e^{-\Omega_a \Delta t}\right)} V =$$

$$= \frac{2V\left(1 - e^{-\Omega_a \Delta t}\right)\left(1 - e^{-\Omega_a \Delta t}\cos(\omega \Delta t)\right)}{\left(1 + e^{-\Omega_a \Delta t}\right)\left(1 - 2\cos(\omega \Delta t) e^{-\Omega_a \Delta t} + e^{-2\Omega_a \Delta t}\right)};$$

$$\overline{S}_y(\omega) = 1 \cdot \overline{S}_x(\omega) \cdot 1 = \overline{S}_x(\omega).$$

Контрольные вопросы

1. Как формируется рекуррентное матричное уравнение относительно матрицы дисперсий вектора состояния дискретной системы, возбуждаемой дискретным векторным белым шумом?
2. При каком свойстве матрицы состояния системы существует установившееся решение матричного рекуррентного уравнения относительно матрицы дисперсий вектора состояния дискретной системы?
3. Как вычисляется матрица дисперсий вектора выхода дискретной системы при дискретном векторном белом шуме на входе?
4. Как вычисляется матрица дисперсий вектора ошибки дискретной системы при векторном дискретном белом шуме на входе?

5. Как вычислить матрицу дисперсий вектора состояния дискретной системы при возмущении ее дискретным белым шумом по *j*–му входу?
6. Как вычислить матрицу дисперсий по вектору выхода дискретной системы при возмущении ее дискретным белым шумом по *j*–му входу?
7. Как вычислить дисперсию *l*–го компонента вектора выхода при возмущении дискретной системы дискретным белым шумом по *j*–му входу?
8. Как вычисляется корреляционная матрица вектора состояния дискретной системы при векторном дискретном белом шуме на входе?
9. Как вычисляется корреляционная матрица вектора выхода дискретной системы при векторном дискретном белом шуме на входе?
10. Как вычислить корреляционную функцию *l*–го компонента вектора выхода при возмущении дискретной системы дискретным белым шумом по *j*–му входу?
11. Как вычисляется матрица спектральной плотности вектора состояния дискретной системы при векторном дискретном белом шуме на входе?
12. Как вычисляется матрица спектральной плотности вектора выхода дискретной при векторном дискретном белом шуме на входе?
13. Как вычислить функцию спектральной плотности *l*–го компонента вектора выхода при возмущении дискретной системы дискретным белым шумом по *j*–му входу?
14. Как вычислить функцию спектральной плотности *l*–го компонента вектора выхода при возмущении дискретной системы дискретным белым шумом по *j*–му входу в случае представления системы с помощью передаточной функции?
15. В каком диапазоне частот справедливо использовать матрицы и функции спектральной плотности, полученные в в. 11 – 14?

6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ СТАЦИОНАРНЫЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ ТИПА «ОКРАШЕННЫЙ ШУМ»

В предыдущих разделах рассматривались стохастические процессы в системах, порождаемые экзогенным воздействием в виде абстрактного физически не реализуемого непрерывного стохастического процесса стационарного в широком смысле, именуемого «белым шумом» $w(t)$, играющего ключевую роль при аналитическом формировании реакции непрерывной системы на стохастические внешние воздействия. Основными свойствами этого процесса являются некоррелированность отсчетов при любом по времени шаге и бесконечная дисперсия, порождающие в совокупности корреляционную функцию (матрицу) этого сигнала в виде дельта-функции (матрицы) Дирака.

В настоящем разделе рассматриваются стохастические воздействия (сигналы), которые являются физически реализуемыми и которые характеризуются коррелированностью отсчетов. Такие стохастические воздействия $\xi(t)$ стационарные в широком смысле называются воздействиями типа «окрашенный шум». Окрашенными шумами моделируются многие стохастические процессы в природе и технике. Происхождение термина «окрашенный шум» таково. Воздействие типа «окрашенный шум» математически формируется из «белого шума», который подается на вход специальной динамической линейной системы, именуемой формирующим фильтром (ФФ) так, что на выходе его наблюдается стохастический сигнал типа «окрашенный шум», функция спектральной плотности которого получена из функции спектральной плотности «белого шума» путем «окрашивания» ее квадратичной амплитудной частотной характеристикой $\left|W_{\text{ф}}(j\omega)\right|^2$ отношения «вход-–выход» ФФ. Так как функция спектральной плотности «белого шума» имеет вид $S_w(\omega)=N$, то функция спектральной плотности окрашенного шума $\xi(t)$ получает окрашенное представление $S_{\xi}(\omega)=N\cdot\left|W_{\text{ф}}(j\omega)\right|^2$.

В разделе рассматриваются наиболее употребительные формирующие фильтры, даются аналитические представления

дисперсии сформированных на выходах ФФ окрашенных шумов, аналитические выражения для их корреляционных функций и функций спектральной плотности. В перечисленных аналитических представлениях используется единственная характеристика «белого шума» – его интенсивность N.

6.1. Окрашенный стохастический процесс типа «экспоненциально коррелированный» шум. Формирование из «белого шума» с помощью апериодического звена

Наиболее характерными примерами окрашенных стохастических процессов типа «экспоненциально коррелированный» шум являются пульсирующая составляющая ветрового напора, помехи в электронных цепях и т.д. Решение задач, вынесенных в заголовок параграфа, осуществим, используя решения примеров Пр4.1, Пр4.3 и Пр4.5. Постановку задачи формирования окрашенного шума типа «экспоненциально коррелированного» стохастического сигнала осуществим на основе аппарата вход-выход описания непрерывных систем с использования передаточных функций. Тогда получим

$$\xi(s) = W_{ф}(s)w(s) = \left.\frac{1}{T_a s + 1}\right|_{T_a=\Omega_a^{-1}} w(s) = \frac{\Omega_a}{s+\Omega_a} w(s), \qquad (6.1)$$

где $\xi(s), w(s)$ – соответственно лапласовы образы окрашенного $\xi(t)$ и белого $w(t)$ шумов, T_a, Ω_a – соответственно постоянная времени и сопрягающая частота ФФ.

Модельное представление ФФ (6.1) позволяет сформировать векторно–матричное описание (ВМО) формирующего фильтра

$$\dot{x}_{ф}(t) = F_{ф}x_{ф}(t) + G_{ф}w(t); x_{ф}(0) = 0;\ \xi(t) = C_{ф}x_{ф}(t)\ . \qquad (6.2)$$

Тогда в силу правила перехода от передаточной функции к ВМО представление (6.2) приобретает вид

$\dot{x}_{ф}(t) = -\Omega_a x_{ф}(t) + \Omega_a w(t);\ \xi(t) = x_{ф}(t)$ так, что для матриц ФФ можно записать $F_{ф} = [-\Omega_a];\ G_{ф} = [\Omega_a];\ C_{ф} = [1]$. Решение матричного уравнения Ляпунова относительно матрицы дисперсий $D_{x_{ф}}$ вектора

$x_ф$ состояния ФФ $F_ф D_{x_ф} + D_{x_ф} F_ф^T = -G_ф N G_ф^T$, принимающее вид $(-\Omega_a) D_{x_ф} + D_{x_ф} (-\Omega_a)^T = -\Omega_a N \Omega_a^T$, имеет решение

$D_{x_ф} = \frac{N\Omega_a}{2}$.Для дисперсии D_ξ окрашенного шума $\xi(t)$ экспоненциально коррелированного типа, являющегося выходом ФФ, получаем

$$D_\xi = C_ф D_{x_ф} C_ф^T = 1 \cdot D_{x_ф} \cdot 1 = D_{x_ф} = \frac{N\Omega_a}{2}. \quad (6.3)$$

Вычислим теперь $R_\xi(\tau)$ корреляционную функцию окрашенного шума $\xi(t)$ экспоненциально коррелированного типа. Тогда следуя соотношению (4.23) и решению примера 4.3, запишем

$$R_\xi(\tau) = C_ф e^{F_ф \tau} D_x C_ф^T = 1 \cdot e^{-\Omega_a \tau} \cdot \frac{N\Omega_a}{2} \cdot 1 = \frac{N\Omega_a}{2} e^{-\Omega_a \tau}. \quad (6.4)$$

Вычисли теперь $S_\xi(\omega)$ функцию спектральной плотности окрашенного шума $\xi(t)$ экспоненциально коррелированного типа. Тогда следуя соотношению (4.33) и решению примера 4.5, запишем

$$S_{x_ф}(\omega) = -2F_ф \left(F_ф^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_{x_ф} = (-2)(-\Omega_a)\left(\Omega_a^2 + \omega^2\right)^{-1} \frac{N\Omega_a}{2} = \frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2 + \omega^2},$$

$$S_\xi(\omega) = C S_{x_ф}(\omega) C^T = 1 \cdot \frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2 + \omega^2} \cdot 1 = \frac{N}{T_a^2 \omega^2 + 1} = \left|\Phi_ф(j\omega)\right|^2 N. \quad (6.5)$$

Пример 6.1 (Пр6.1). В качестве примера, иллюстрирующего процедуры вычисления основных стохастических характеристик стохастического процесса типа «окрашенный шум», рассмотрим сигнал $\xi(t)$, формируемый фильтром (6.1) с параметром $\Omega_a = 2c^{-1}$. В результате будем иметь:

Дисперсию $D_\xi = \left.\frac{N\Omega_a}{2}\right|_{\Omega_a=2} = N;$

Корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\frac{N\Omega_a}{2}e^{-\Omega_a\tau}=D_\xi e^{-2\tau}=Ne^{-2\tau}$;

Функцию спектральной плотности $S_\xi(\omega)=\frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2+\omega^2}=\frac{4N}{4+\omega^2}$.

На рисунке 6.1.а приведена реализация стохастического процесса $\xi(t)$ типа «экспоненциально коррелированного» шума, причем генератор «белого шума» настроен так, чтобы обеспечением равенства $N=1(*)^2 c$ дисперсия $\xi(t)$ была равна единице $D_\xi=1(*)^2$. Выполнение этого условия легко проверяется по правилу 3σ, примененному к реализации процесса $\xi(t)$ рисунок 6.1.а. Там же на рисунке 6.1б приведена кривая корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$, полученная в силу соотношения $R_\xi(\tau)=Ce^{F_\phi\tau}z(0), z(0)=D_x C^T$, из которой хорошо видно, что интервал корреляции процесса составляет величина $\tau_к=3\Omega_a^{-1}=1.5c.$Кривая рисунок 6.1б хорошо иллюстрирует название приведенного на рисунке 6.1а стохастического процесса типа «экспоненциально коррелированный» шум.

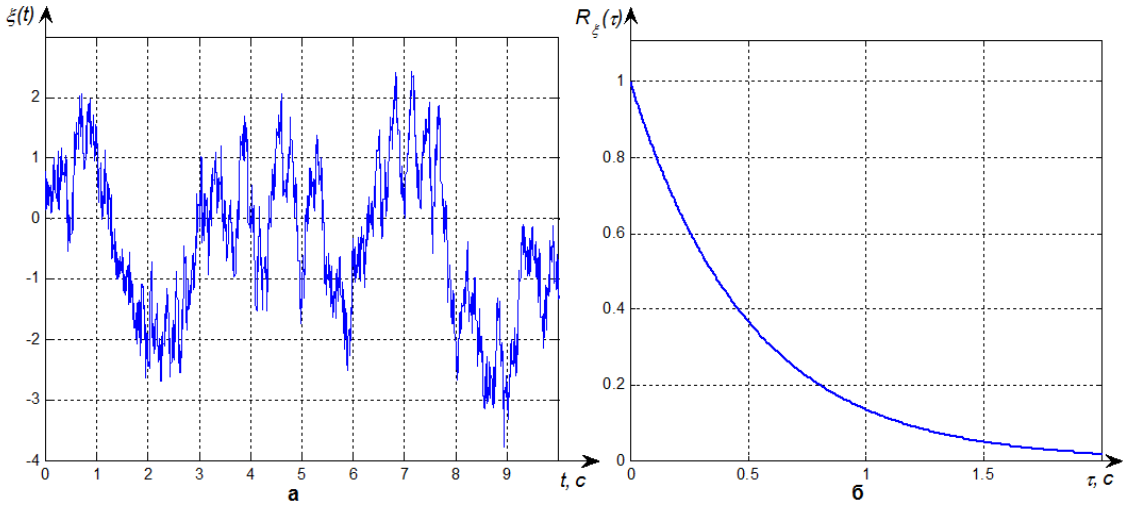


Рисунок 6.1. Реализация экспоненциально коррелированного стохастического процесса «а)», корреляционная функция этого процесса «б)»

На рисунке 6.2 приведена кривая функции спектральной плотности $S_\xi(\omega)=4/\left(4+\omega^2\right)$ экспоненциально коррелированного стохастического процесса.

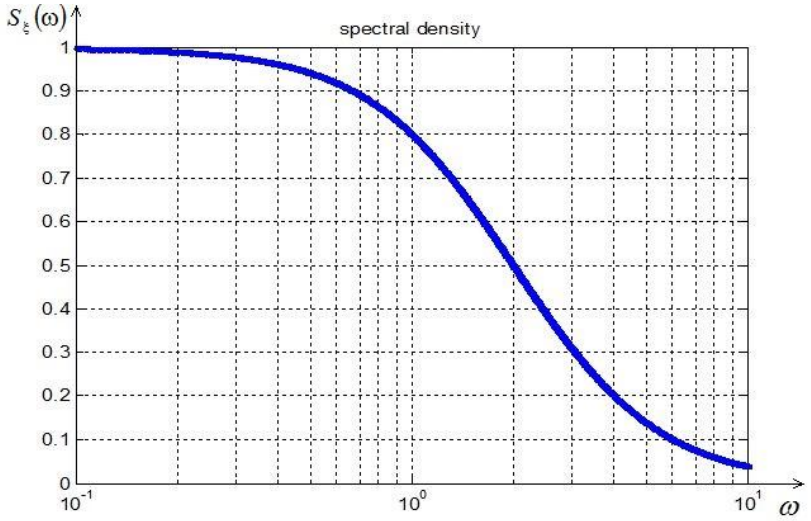


Рисунок 6.2. Кривая функции спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ экспоненциально коррелированного стохастического процесса

6.2.Окрашенный стохастический процесс типа «нерегулярная качка». Формирование из белого шума с помощью колебательного звена

Наиболее характерными примерами окрашенных стохастических процессов типа «нерегулярная качка» являются волнение водной поверхности, суточные колебания напряжения и частоты в энергосетях и т.д. Решение задач, вынесенных в заголовок параграфа, осуществим, используя положения раздела 2 и решения примеров Пр4.2, Пр4.4 и Пр4.6. Постановку задачи формирования окрашенного стохастического процесса типа «нерегулярная качка» осуществим на основе аппарата вход-выход описания непрерывных систем с использования передаточных функций. Тогда получим

$$\xi(s)=W_\phi(s)w(s)=\left.\frac{1}{T_k{}^2s^2+2\zeta T_k s+1}\right|_{T_\kappa=\Omega_\kappa^{-1}} w(s)=\frac{\Omega_\kappa^2}{s^2+2\zeta\Omega_k s+\Omega_\kappa^2}w(s) \quad (6.6)$$

где $\xi(s),w(s)-$соответственно лапласовы образы окрашенного $\xi(t)$ и белого $w(t)$ шумов; $T_\kappa,\Omega_\kappa,\zeta-$соответственно постоянная времени, сопрягающая частота и коэффициент демпфирования ФФ.

Модельное представление ФФ (6.6) позволяет сформировать векторно–матричное описание (ВМО) формирующего фильтра

$$\dot{x}_{\phi}(t)=F_{\phi}x_{\phi}(t)+G_{\phi}w(t);\ x_{\phi}(0)=0;\ \xi(t)=C_{\phi}x_{\phi}(t)\ , \qquad (6.7)$$

которое в силу представления (6.6) передаточной функции позволяет для матричных компонентов (6.7) записать

$$F_{\phi}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix};\ G_{\phi}=\begin{bmatrix}0\\ \Omega_k{}^2\end{bmatrix};\ C_{\phi}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}. \qquad (6.8)$$

На основании результатов раздела 4, то для основных стохастических характеристик окрашенного стохастического процесса типа «нерегулярная качка» получим: дисперсию $D_{\xi}=\dfrac{N\Omega_k}{4\zeta}$ (6.9), корреляционную функцию

$$R_{\xi}(\tau)=Ce^{F_{\phi}\tau}D_xC^T=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}e^{-\zeta\Omega_k\tau}\left\{\cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau\right\}, \qquad (6.10)$$

функцию спектральной плотности

$$S_{\xi}(\omega)=CS_x(\omega)C^T\Big|_{C=[1\quad 0]}=\frac{N\Omega_k^4}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}=\left|\Phi_{\phi}(j\omega)\right|^2N. \qquad (6.11)$$

Следует сказать, что при моделировании окрашенного стохастического процесса типа «нерегулярная качка» ключевым параметром является коэффициент затухания ζ. При малых его значениях, а следовательно при больших значениях показателя колебательности $M_{max}=1/(2\zeta)$, в кривых процесса $\xi(t)$ начинает четко просматриваться гармоническая составляющая с круговой частотой $\Omega_к$.

Пример 6.2 (Пр6.2). В качестве примера, иллюстрирующего процедуры вычисления основных стохастических характеристик стохастического процесса типа «нерегулярная качка», рассмотрим сигнал $\xi(t)$, формируемый фильтром (6.6) с параметрами $\Omega_к=5c^{-1},\zeta=0.1\ (M_{max}=5)$. В результате будем иметь:

Дисперсию $D_{\xi}=\dfrac{N\Omega_k}{4\zeta}\Big|_{\Omega_к=5c^{-1},\zeta=0.1}=\dfrac{5N}{4\cdot 0.1}=12.5N;$

Корреляционную функцию

$$R_\xi(\tau)=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}e^{-\zeta\Omega_k\tau}\left\{\cos\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\Omega_k\sqrt{1-\zeta^2}\right)\tau\right\}\Bigg|_{\Omega_к=5c^{-1},\,\zeta=0.1}=$$

$$=12.5Ne^{-0.5\tau}\left\{\cos\left(5\sqrt{0.99}\right)\tau+\left(0.1/\sqrt{0.99}\right)\sin\left(5\sqrt{0.99}\right)\tau\right\};$$

Функцию спектральной плотности

$$S_\xi(\omega)=\frac{N\Omega_k^4}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}=\frac{625N}{\left(\omega^2-25\right)^2+\omega^2}.$$

На рисунке 6.3.а приведена реализация стохастического процесса $\xi(t)$ типа «нерегулярная качка», причем генератор «белого шума» настроен так, чтобы обеспечением равенства $N=1(*)^2c$ дисперсия $\xi(t)$ была равна значению $D_\xi=12.5(*)^2$. Выполнение этого условия легко проверяется по правилу 3σ, примененному к реализации процесса $\xi(t)$ рисунок 6.3.а. Там же на рисунке 6.3б приведена кривая корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$, полученная в силу соотношения $R_\xi(\tau)=Ce^{F_\phi\tau}\eta(0),\ \eta(0)=D_xC^T$, из которой хорошо видно, что интервал корреляции процесса, оцениваемый на уровне $\tau_к=\max_\tau\left\{\left|R_\xi\right|=0.05R_\xi(0)\right\}$ составляет величина $\tau_к=3(\zeta\Omega)_a^{-1}=6c.$

Кривая рисунок 6.3а хорошо иллюстрирует название исследуемого стохастического процесса типа «нерегулярная качка».

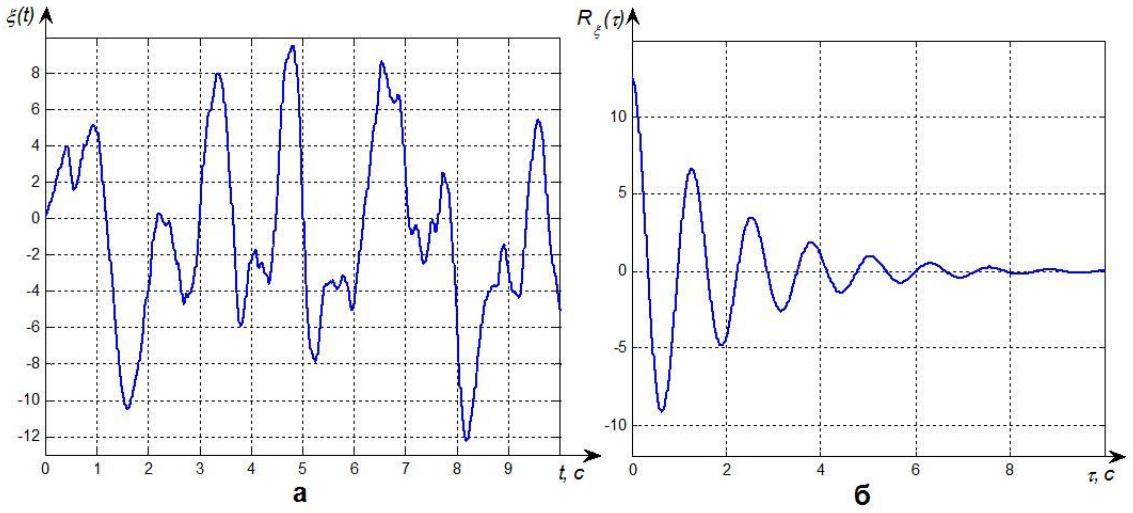


Рисунок 6.3. Реализация стохастического процесса типа «нерегулярная качка» «а)», корреляционная функция этого процесса «б)»

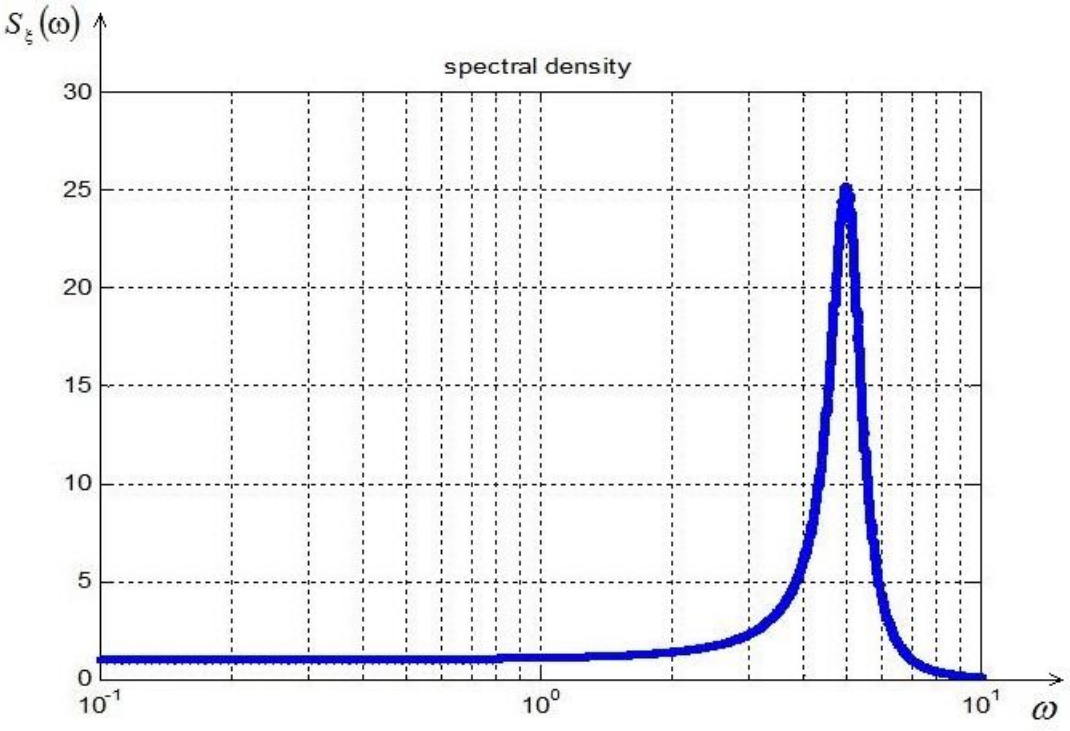


Рисунок 6.4. Кривая функции спектральной плотности стохастического процесса типа «нерегулярная качка»

В заключение следует сказать, что с уменьшением коэффициента демпфирования ζ будет расти значение дисперсии D_ξ процесса, увеличиваться всплеск кривой $S_y(\omega)$ спектральной плотности и явственнее проявляться гармоническая составляющая в процессе $\xi(t)$.

6.3. Сложный окрашенный стохастический процесс мультипликативного типа. Формирование из «белого шума» последовательным соединением апериодического и колебательного звеньев

Наиболее характерными примерами сложных окрашенных стохастических процессов мультипликативного типа являются движение слабо демпфированных конструкций под воздействием ветрового напора, дрожание принятого светового луча от астрономического объекта при прохождении его через приземные слои атмосферы и т.д. Решение задачи формирования сложного окрашенного стохастического процесса мультипликативного типа как и в предыдущих параграфах раздела начнем на основе аппарата вход-выход описания непрерывных систем с использованием передаточных функций (ПФ). Тогда получим

$$\xi(s)=W_{\phi}(s)w(s)=\frac{1}{T_a s+1}\Big|_{T_a=\Omega_a^{-1}}\times\frac{1}{T_k{}^2 s^2+2\zeta T_k s+1}\Big|_{T_{\kappa}=\Omega_{\kappa}^{-1}} w(s)= \\ =\frac{\Omega_a}{s+\Omega_a}\times\frac{\Omega_{\kappa}^2}{s^2+2\zeta\Omega_k s+\Omega_{\kappa}^2}w(s), \tag{6.12}$$

где $\xi(s), w(s)-$ соответственно лапласовы образы окрашенного $\xi(t)$ и белого $w(t)$ шумов; $T_a, T_{\kappa}, \Omega_a, \Omega_{\kappa}, \zeta-$ соответственно постоянные времени, сопрягающие частота и коэффициент демпфирования апериодической и колебательной частей ФФ. Модельное представление ФФ (6.12) позволяет сформировать векторно–матричное описание (ВМО) формирующего фильтра

$$\dot{x}_{\phi}(t)=F_{\phi}x_{\phi}(t)+G_{\phi}w(t);\ x_{\phi}(0)=0;\ \xi(t)=C_{\phi}x_{\phi}(t), \tag{6.13}$$

которое в силу представления (6.12) передаточной функции и правил перехода от ПФ к модели «вход–состояние–выход» даст для матричных компонентов (6.13)

$F_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k & \Omega_k{}^2 \\ 0 & 0 & -\Omega_{\mathbf{a}} \end{bmatrix}; G_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{\mathbf{a}} \end{bmatrix}; \; C_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Теперь решим матричное уравнение Ляпунова $F_\phi D_{x_\phi} + D_{x_\phi} F_\phi{}^T = -G_\phi N G_\phi{}^T$, в которое матрица D_{x_ϕ} подставляется в виде

$$D_{x_\phi} = M\left\{x_\phi(t) x_\phi{}^T(t)\right\} = M\left\{\begin{bmatrix} x_{\phi\mathbf{1}}^2 & x_{\phi 1}x_{\phi 2} & x_{\phi 1}x_{\phi 3} \\ x_{\phi 2}x_{\phi 1} & x_{\phi\mathbf{2}}^2 & x_{\phi 2}x_{\phi 3} \\ x_{\phi 3}x_{\phi 1} & x_{\phi 3}x_{\phi 2} & x_{\phi\mathbf{3}}^2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = D.$$

Так как матрица дисперсий симметричная, то выполняются равенства $D_{ij} = D_{ji}\ \left(i, j = \overline{1,n}\right)$, что в свою очередь позволяет уравнение Ляпунова для матрицы $D_{x_\phi} = D$ записать

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k & \Omega_k{}^2 \\ 0 & 0 & -\Omega_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_k{}^2 & 0 \\ 1 & -2\zeta\Omega_k & 0 \\ 0 & \Omega_k{}^2 & -\Omega_a \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_a \end{bmatrix}[N]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_a \end{bmatrix}.$$

Поэлементное умножение матриц порождает систему скалярных равенств

$$
\left.
\begin{aligned}
&D_{12}+D_{12}=0\Rightarrow D_{12}=0;\\
&D_{22}-\Omega_к^2 D_{11}+\Omega_k{}^2 D_{13}=0;\Rightarrow D_{11}=\frac{N\Omega_a}{2}\frac{\Omega_к^2+\Omega_к^2\Omega_a/2\zeta}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2};\\
&D_{23}-\Omega_a D_{13}=0;\Rightarrow D_{23}=\Omega_a D_{13};\Rightarrow D_{23}=\frac{N\Omega_a}{2}\frac{\Omega_к^2\Omega_a}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2};\\
&-2\zeta\Omega_k D_{22}+\Omega_k{}^2 D_{23}=0;\Rightarrow D_{22}=\frac{N\Omega_a}{2}\frac{\Omega_к^3\Omega_a/2\zeta}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2};\\
&-\Omega_k{}^2 D_{13}-2\zeta\Omega_k D_{23}+\Omega_k{}^2 D_{33}-\Omega_a D_{23}=0;\Rightarrow D_{13}=\frac{N\Omega_a}{2}\frac{\Omega_к^2}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2};\\
&-\Omega_a D_{33}-\Omega_a D_{33}=-N\Omega_{\mathbf{a}}^{\mathbf{2}};\Rightarrow D_{33}=\frac{N\Omega_a}{2}.
\end{aligned}
\right\}
$$

В итоге искомая матрица дисперсий $D_{x_ф}=D$ принимает вид

$$
D_{x_ф}=\frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix}
\dfrac{\Omega_к^2+\Omega_к^2\Omega_a/2\zeta}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2} & 0 & \dfrac{\Omega_к^2}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2}\\
0 & \dfrac{\Omega_к^3\Omega_a/2\zeta}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2} & \dfrac{\Omega_к^2\Omega_a}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2}\\
\dfrac{\Omega_к^2}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2} & \dfrac{\Omega_к^2\Omega_a}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2} & 1
\end{bmatrix}. \quad (6.14)
$$

В свою очередь для дисперсии D_ξ окрашенного процесса $\xi(t)$получим

$$
D_\xi=C_ф D_{x_ф} C_ф^T=\frac{N\Omega_a}{2}\times\frac{\Omega_к^2+\Omega_к^2\Omega_a/2\zeta}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2}. \quad (6.15)
$$

Отметим, что первый сомножитель в выражении (6.15) для дисперсии D_ξ представляет собой дисперсию стохастического процесса, на выходе апериодического компонента сложного ФФ.

Явное аналитическое представление корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ формировать не будем в силу громоздкости аналитического представления матричной экспоненты $e^{F_ф\tau}$. Ограничимся ее представлением в виде

$$R_\xi(\tau)=C_\phi e^{F_\phi\tau}D_{x_\phi}C_\phi^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}e^{F_\phi\tau}\begin{bmatrix}\frac{N\Omega_a}{2}\times\frac{\Omega_\kappa^2+\Omega_\kappa^2\Omega_a/2\zeta}{\Omega_\kappa^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2}\\ 0\\ \frac{N\Omega_a}{2}\times\frac{\Omega_\kappa^2}{\Omega_\kappa^2+2\zeta\Omega_k\Omega_a+\Omega_a^2}\end{bmatrix}.(6.16)$$

При построении кривой корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ окрашенного «сложным фильтром» стохастического процесса $\xi(t)$ в среде Simulink пакета Matlab ее будем формировать как свободное решение системы (6.13),записываемое в форме $\xi(t)=C_\phi\, exp(F_\phi\tau)\eta(0);\ \eta(0)=D_{x_\phi}C_\phi^T$.

Функция $S_\xi(\omega)$спектральной плотности стохастического процесса $\xi(t)$, «окрашенного сложным фильтром», которая в соответствии с (4.33) определяется выражением $S_\xi(\omega)=-2C_\phi F_\phi\left(F_\phi^2+\omega^2 I\right)^{-1}D_{x_\phi}C_\phi^T$, в силу последовательной природы сложного фильтра и с учетом (6.5) и (6.11) получает представление

$$S_\xi(\omega)=N\cdot\left|\Phi_a(j\omega)\right|^2\cdot\left|\Phi_\kappa(j\omega)\right|^2=N\cdot\frac{\Omega_a^2}{\Omega_a^2+\omega^2}\cdot\frac{\Omega_k^4}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}.(6.17)$$

Пример 6.3 (Пр6.3). В качестве примера, иллюстрирующего процедуры вычисления основных стохастических характеристик стохастического процесса $\xi(t)$, формируемого из «белого шума» $w(t)$интенсивности N с помощью сложного ФФ мультипликативного типа, возьмем фильтр, построенный на структурных компонентах, рассмотренных в примерах Пр6.1 и Пр6.2. Тогда для передаточной функции $W_\phi(s)$ представления (6.12) ФФ будем иметь

$$W_\phi(s)==(2/(s+2))\cdot\left(25/\left(s^2+s+25\right)\right).$$

Матричные компоненты ВСВ представления сложного фильтра последовательного типа имеем

$$F_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; G_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \; C_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дисперсия окрашенного шума в силу (6.15) принимает значение

$$D_\xi = \frac{N\Omega_a}{2} \times \frac{\Omega_\kappa^2 + \Omega_\kappa^2 \Omega_a / 2\zeta}{\Omega_\kappa^2 + 2\zeta\Omega_k\Omega_a + \Omega_a^2} = N \frac{25 + 25 \cdot 2/0.2}{25 + 0.2 \cdot 5 \cdot 2 + 4} = \frac{275}{31} N = 8.87N(*)^2.$$

Корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ сложного окрашенного шума в силу (6.16) определяется выражением

$$R_\xi(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} exp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \tau \right\} \times \begin{bmatrix} 8.87N \\ 0 \\ 0.805N \end{bmatrix}.$$ Функция $S_\xi(\omega)$ спектральной плотности сложного окрашенного процесса $\xi(t)$, вычисляемая с помощью (6.17), получает представление

$$S_\xi(\omega) = N \cdot \frac{4}{4 + \omega^2} \cdot \frac{625}{\left(\omega^2 - 25\right)^2 + \omega^2}.$$

На рисунке 6.5.а приведена реализация сложного стохастического процесса $\xi(t)$ мультипликативного типа, причем генератор «белого шума» настроен так, чтобы обеспечением равенства $N = 1(*)^2 c$ дисперсия $\xi(t)$ была равна значению $D_\xi = 8.87(*)^2$. Выполнение этого условия легко проверяется по правилу 3σ, примененному к реализации процесса $\xi(t)$ рисунок 6.5.а. Там же на рисунке 6.5б приведена кривая корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$, полученная в силу соотношения $R_\xi(\tau) = Ce^{F_\phi \tau} \eta(0), \; \eta(0) = D_x C^T$, из которой хорошо видно, что интервал корреляции процесса, оцениваемый на уровне $\tau_\kappa = \max_\tau \left\{ R_\xi \right| = 0.05 R_\xi(0) \}$ составляет величина $\tau_\kappa = 9c.$ На рисунке 6.6 приведена кривая функции $S_\xi(\omega)$ спектральной плотности сложного окрашенного последовательным соединением апериодического и колебательного звеньев стохастического процесса $\xi(t)$. На рисунке 6.7 для сравнения приведена кривая функции $S_\xi(\omega)$ спектральной плотности для случая ФФ с параметрами

$\Omega_a = 0.5c^{-1}, \Omega_к = 5c^{-1}, \zeta = 0.025.$ Сопрягающие частоты апериодического и колебательного звеньев разведены так, что они разнятся в десять раз, при этом сопрягающая частота колебательного звена оставлена прежней, но коэффициент демпфирования уменьшен в четыре раза. Как следствия изменения параметров увеличился провал в кривой функции $S_\xi(\omega)$ спектральной плотности и увеличился ее всплеск на частоте сопряжения (резонансной частоте) колебательного звена. При этом, если для этого случая вычислить дисперсию по формуле (6.15), то она составит величину $D_\xi = 2.709N(*)^2$. Она уменьшилась более чем в три раза, и это полностью соответствует уменьшению площади под графиком функции $S_\xi(\omega)$ спектральной плотности.

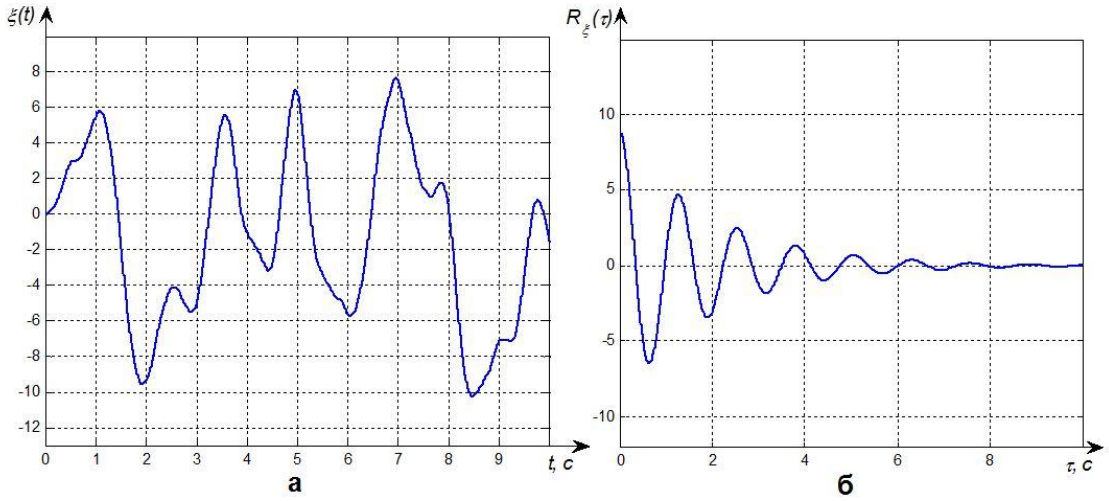


Рисунок 6.5. Реализация сложного стохастического процесса мультипликативного типа «а)», корреляционная функция этого процесса «б)»

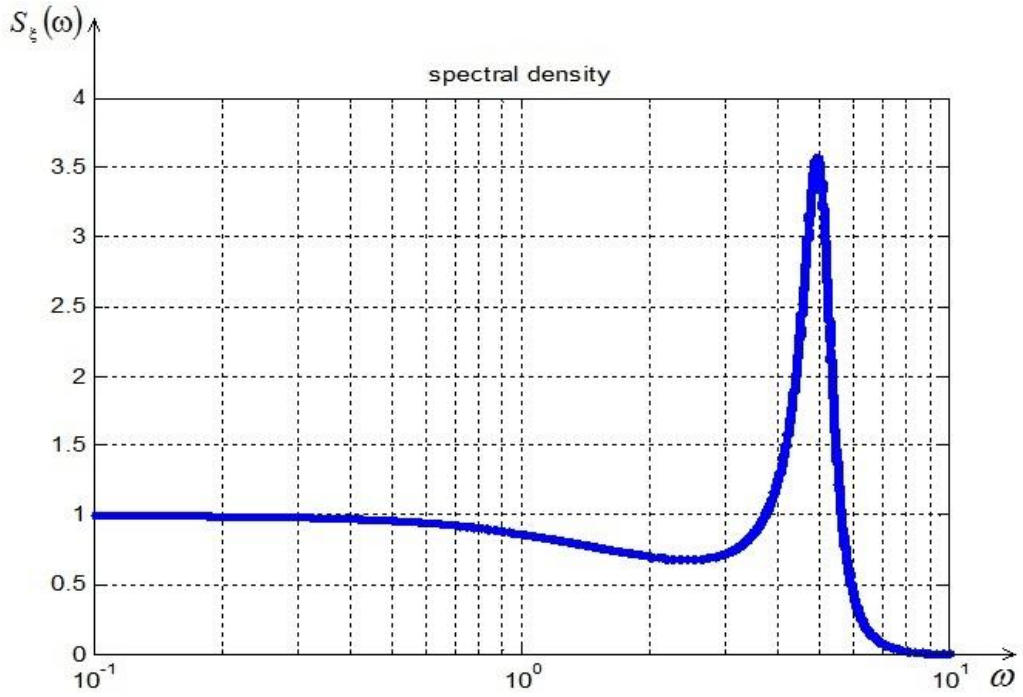


Рисунок 6.6. Кривая функции спектральной плотности сложного стохастического процесса мультипликативного типа с параметрами ФФ: $\Omega_{\mathbf{a}} = 2c^{-1}, \Omega_{\mathbf{к}} = 5c^{-1}, \zeta = 0.1$

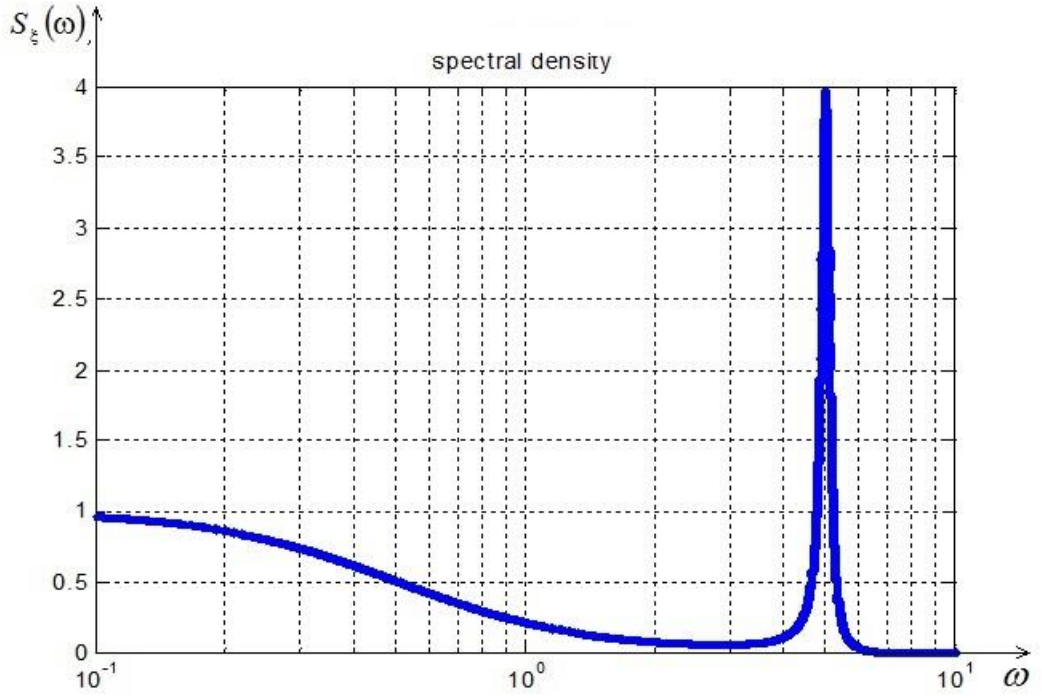


Рисунок 6.7. Кривая функции спектральной плотности сложного стохастического процесса мультипликативного типа с параметрами ФФ: $\Omega_{\mathbf{a}} = 0.5c^{-1}, \Omega_{\mathbf{к}} = 5c^{-1}, \zeta = 0.025$

6.4.Сложный окрашенный стохастический процесс аддитивного типа. Формирование из «белого шума» параллельным соединением апериодического и колебательного звеньев

Наиболее характерными примерами сложных окрашенных стохастических процессов аддитивного типа являются движение пространственных конструкций под воздействием качки и ветрового напора. Решение задачи формирования сложного окрашенного стохастического процесса аддитивного типа как и в предыдущих параграфах раздела начнем на основе аппарата вход-выход описания непрерывных систем с использованием передаточных функций (ПФ). Тогда получим

$$\xi(s)=W_{ф}(s)w(s)=\left\{\left.\frac{1}{T_a s+1}\right|_{T_a=\Omega_a^{-1}}+\left.\frac{1}{{T_k}^2 s^2+2\zeta T_k s+1}\right|_{T_к=\Omega_к^{-1}}\right\}w(s)= \\ =\left\{\frac{\Omega_a}{s+\Omega_a}+\frac{\Omega_к^2}{s^2+2\zeta\Omega_k s+\Omega_к^2}\right\}w(s), \tag{6.18}$$

где $\xi(s),w(s)-$соответственно лапласовы образы окрашенного $\xi(t)$ и белого $w(t)$ шумов; $T_a,T_к,\Omega_a,\Omega_к,\zeta-$соответственно постоянные времени, сопрягающие частота и коэффициент демпфирования апериодической и колебательной частей ФФ. Модельное представление ФФ (6.17) позволяет сформировать векторно–матричное описание (ВМО) формирующего фильтра

$$\dot{x}_{ф}(t)=F_{ф}x_{ф}(t)+G_{ф}w(t);\ x_{ф}(0)=0;\ \xi(t)=C_{ф}x_{ф}(t)\ , \tag{6.19}$$

которое в силу представления (6.18) передаточной функции и правил перехода от ПФ к модели «вход–состояние–выход» даст для матричных компонентов (6.13)

$F_{ф}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\Omega_к^2 & -2\zeta\Omega_k & 0\\ 0 & 0 & -\Omega_{\mathbf{a}}\end{bmatrix};\ G_{ф}=\begin{bmatrix}0\\ \Omega_к^2\\ \Omega_{\mathbf{a}}\end{bmatrix};\ C_{ф}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Теперь решим матричное уравнение Ляпунова $F_{ф}D_{x_ф}+D_{x_ф}{F_{ф}}^T=-G_{ф}N{G_{ф}}^T$, в которое матрица $D_{x_ф}$ подставляется в виде

$$D_{x_\phi} = M\left\{x_\phi(t)x_\phi{}^T(t)\right\} = M\left\{\begin{bmatrix} x_{\phi 1}^2 & x_{\phi 1}x_{\phi 2} & x_{\phi 1}x_{\phi 3} \\ x_{\phi 2}x_{\phi 1} & x_{\phi \mathbf{2}}^2 & x_{\phi 2}x_{\phi 3} \\ x_{\phi 3}x_{\phi 1} & x_{\phi 3}x_{\phi 2} & x_{\phi \mathbf{3}}^2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = D.$$

Так как матрица дисперсий симметричная, то выполняются равенства $D_{ij} = D_{ji}\ \left(i, j = \overline{1,n}\right)$, что в свою очередь позволяет уравнение Ляпунова для матрицы $D_{x_\phi} = D$ записать

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\Omega_\kappa^2 & -2\zeta\Omega_k & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_\kappa^2 & 0 \\ 1 & -2\zeta\Omega_k & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_a \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_\kappa^2 \\ \Omega_a \end{bmatrix}[N]\begin{bmatrix} 0 & \Omega_\kappa^2 & \Omega_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N\Omega_\kappa^4 & -N\Omega_\kappa^2\Omega_a \\ 0 & -N\Omega_\kappa^2\Omega_a & -N\Omega_a^2 \end{bmatrix}$$

Поэлементное умножение матриц порождает систему скалярных равенств

$$\left.\begin{aligned} &D_{12} + D_{12} = 0 \Rightarrow D_{12} = 0; \\ &D_{22} - \Omega_\kappa^2 D_{11} = 0; \Rightarrow D_{11} = \frac{N\Omega_\kappa}{4\zeta}; \\ &D_{23} - \Omega_a D_{13} = 0; \Rightarrow D_{23} = \Omega_a D_{13}; \Rightarrow D_{23} = 0; \\ &-4\zeta\Omega_k D_{22} = -N\Omega_\kappa^4; \Rightarrow D_{22} = \frac{N\Omega_\kappa^3}{4\zeta}; \\ &-\Omega_k{}^2 D_{13} - 2\zeta\Omega_k D_{23} - \Omega_a D_{23} = 0; \Rightarrow D_{13} = 0; \\ &-\Omega_a D_{33} - \Omega_a D_{33} = -N\Omega_a^{\mathbf{2}}; \Rightarrow D_{33} = \frac{N\Omega_a}{2}. \end{aligned}\right\}$$

В итоге искомая матрица дисперсий D_{x_ϕ} принимает вид

$$D_{x_\phi} = \begin{bmatrix} \frac{N\Omega_к}{4\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N\Omega_к^3}{4\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N\Omega_a}{2} \end{bmatrix}. \qquad (6.20)$$

В свою очередь для дисперсии D_ξ окрашенного процесса $\xi(t)$получим

$$D_\xi = C_\phi D_{x_\phi} C_\phi^T = \frac{N\Omega_a}{2} + \frac{N\Omega_к}{4\zeta}. \qquad (6.21)$$

Отметим, что первый член в выражении (6.21) для дисперсии D_ξ представляет собой дисперсию стохастического процесса, на выходе апериодического компонента сложного ФФ аддитивного типа, а второй–дисперсию на выходе колебательного компонента ФФ. Матрица. Матрица D_{x_ϕ} дисперсий вектора состояний ФФ диагональная, следовательно, ковариация между всеми компонентами вектора состояний фильтра отсутствует.

Явное аналитическое представление корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ формировать не будем в силу громоздкости аналитического представления матричной экспоненты $e^{F_\phi \tau}$. Ограничимся ее представлением в виде

$$R_\xi(\tau) = C_\phi e^{F_\phi \tau} D_{x_\phi} C_\phi^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{F_\phi \tau} \begin{bmatrix} \frac{N\Omega_к}{4\zeta} \\ 0 \\ \frac{N\Omega_a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} exp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_к^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} \tau \right\} & 0_{(2\times 1)} \\ 0_{(1\times 2)} & exp\{-\Omega_a \tau\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{N\Omega_к}{4\zeta} \\ 0 \\ \frac{N\Omega_a}{2} \end{bmatrix} = . \qquad (6.22)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} exp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_к^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} \tau \right\} \begin{bmatrix} \frac{N\Omega_к}{4\zeta} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{N\Omega_a}{2} exp\{-\Omega_a \tau\} =$$

$$= \frac{N\Omega_k}{4\zeta} e^{-\zeta\Omega_k \tau} \left\{ cos\left(\Omega_k \sqrt{1-\zeta^2} \right)\tau + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\Omega_k \sqrt{1-\zeta^2} \right)\tau \right\} + \frac{N\Omega_a}{2} exp\{-\Omega_a \tau\} =$$

$$= R_{\xi a}(\tau) + R_{\xi к}(\tau).$$

Таким образом, корреляционная функция сложного окрашенного стохастического процесса аддитивного типа является суммой корреляционных функций стохастических процессов, наблюдаемых на выходах апериодической и колебательной частей сложного формирующего фильтра. При построении кривой корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ окрашенного «сложным фильтром» стохастического процесса $\xi(t)$ в среде Simulink пакета Matlab ее будем формировать как свободное решение системы (6.19), записываемое в форме $\xi(t) = C_ф \, exp(F_ф \tau)\eta(0); \; \eta(0) = D_{x_ф} C_ф^T$.

Функция $S_\xi(\omega)$спектральной плотности стохастического процесса $\xi(t)$, «окрашенного сложным фильтром», которая в соответствии с (4.33) определяется выражением $S_\xi(\omega) = -2C_ф F_ф \left(F_ф^2 + \omega^2 I\right)^{-1} D_{x_ф} C_ф^T$, в силу параллельной природы сложного фильтра, а также с учетом (6.22), на основании (6.5) и (6.11) получает представление

$$S_\xi(\omega) = N\left|\Phi_a(j\omega)\right|^2 + N\left|\Phi_к(j\omega)\right|^2 = \frac{N\Omega_a^2}{\Omega_a^2 + \omega^2} + \frac{N\Omega_k^4}{\left(\omega^2 - \Omega_k^2\right)^2 + 4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2} \text{..(6.23)}$$

Пример 6.4 (Пр6.4). В качестве примера, иллюстрирующего процедуры вычисления основных стохастических характеристик стохастического процесса $\xi(t)$, формируемого из «белого шума» $w(t)$интенсивности N с помощью сложного ФФ аддитивного типа, возьмем фильтр, построенный на структурных компонентах, рассмотренных в примерах Пр6.1 и Пр6.2. Тогда для передаточной функции $W_ф(s)$ представления (6.18) ФФ будем иметь

$$W_{\phi}(s)==(2/(s+2))+\left(25/\left(s^2+s+25\right)\right).$$

Матричные компоненты ВСВ представления сложного фильтра аддитивного типа имеем

$$F_{\phi}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -25 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix};\ G_{\phi}=\begin{bmatrix}0\\ 25\\ 2\end{bmatrix};\ C_{\phi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Дисперсия окрашенного шума в силу (6.21) принимает значение

$$D_{\xi}=\frac{N\Omega_a}{2}+\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\zeta}=\frac{2}{2}N+\frac{5}{4\cdot 0.1}N=13.5N(*)^2.$$ Корреляционная функция $R_{\xi}(\tau)$сложного окрашенного шума в силу (6.22) определяется выражением

$$R_{\xi}(\tau)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}exp\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -25 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\tau\right\}\times\begin{bmatrix}12.5N\\ 0\\ N\end{bmatrix}.$$ Функция $S_{\xi}(\omega)$ спектральной плотности сложного окрашенного процесса $\xi(t)$, вычисляемая с помощью (6.23), получает представление $S_{\xi}(\omega)=\frac{4N}{4+\omega^2}+\frac{625}{\left(\omega^2-25\right)^2+\omega^2}$.

На рисунке 6.8.а приведена реализация сложного стохастического процесса $\xi(t)$ аддитивного типа, причем генератор «белого шума» настроен так, чтобы обеспечением равенства $N=1(*)^2 c$ дисперсия $\xi(t)$ была равна значению $D_{\xi}=13.5(*)^2$. Выполнение этого условия легко проверяется по правилу 3σ, примененному к реализации процесса $\xi(t)$ рисунок 6.8.а. Там же на рисунке 6.8б приведена кривая корреляционной функции $R_{\xi}(\tau)$ процесса $\xi(t)$, полученная в силу соотношения $R_{\xi}(\tau)=Ce^{F_{\phi}\tau}\eta(0),\ \eta(0)=D_x C^T$, из которой хорошо видно, что интервал корреляции процесса, оцениваемый на уровне $\tau_{\kappa}=\max_{\tau}\left\{R_{\xi}\right|=0.05R_{\xi}(0)\}$ составляет величина $\tau_{\kappa}=6c.$На рисунке 6.9 приведены аддитивные компоненты функции $S_{\xi}(\omega)$ спектральной

плотности сложного окрашенного параллельным соединением апериодического и колебательного звеньев стохастического процесса $\xi(t)$, при этом на рисунке 6.9 «а)» приведена кривая функции спектральной плотности процесса на выходе апериодического звена, а на рисунке 6.9 «б)» – кривая функции спектральной плотности процесса на выходе колебательного звена.

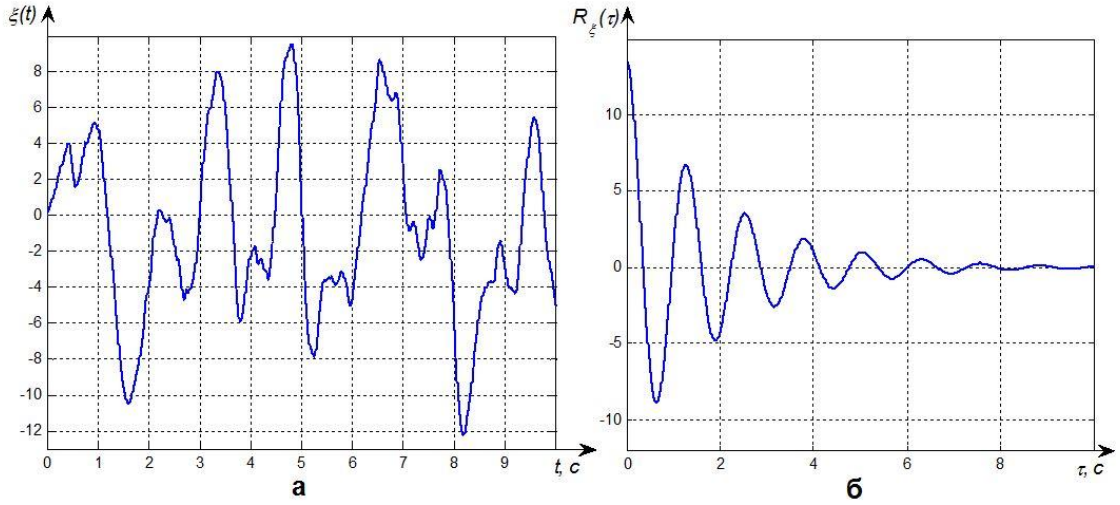


Рисунок 6.8. Реализация сложного стохастического процесса аддитивного типа «а)», корреляционная функция этого процесса «б)»

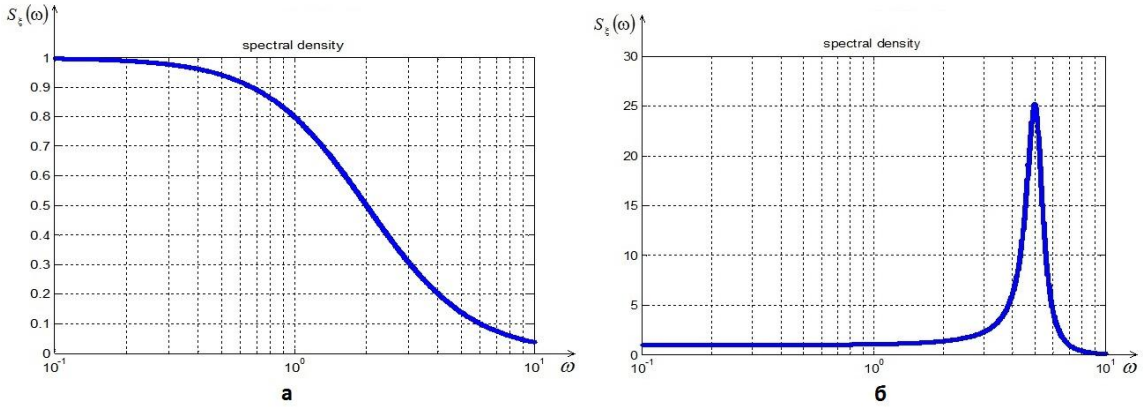


Рисунок 6.9. Составляющие кривой функции спектральной плотности сложного стохастического процесса аддитивного типа: «а)»–экспоненциально коррелированного типа с параметром $\Omega_a = 2c^{-1}$,«б)»–типа нерегулярная качка с параметрами $\Omega_к = 5c^{-1}, \zeta = 0.1.$

Контрольные вопросы

1.Почему стохастический непрерывный процесс, сформированный из «белого шума» с помощью формирующего фильтра (ФФ), называется «окрашенный»?

2.Что окрашивается при формировании «окрашенного шума»?

3.Почему «окрашенный шум», сформированный из «белого шума» с помощью ФФ в виде апериодического звена первого порядка называется «экспоненциально коррелированным»?

4.Как аналитически задается функция спектральной плотности экспоненциально коррелированного «окрашенного шума»?

5.Как аналитически задается корреляционная функция экспоненциально коррелированного «окрашенного шума»?

6.Как аналитически задается передаточная функция ФФ, с помощью которого из «белого шума» формируется окрашенный типа «нерегулярная качка»?

7. Как аналитически задается функция спектральной плотности окрашенного шума типа «нерегулярная качка»?

8.Что происходит с дисперсией окрашенного шума типа «нерегулярная качка» с уменьшением коэффициента демпфирования его ФФ?

9. Что происходит с дисперсией окрашенного шума типа «нерегулярная качка» с увеличением сопрягающей его ФФ?

10. Как аналитически задается корреляционная функция окрашенного шума типа «нерегулярная качка»?

11. Как аналитически задается функция спектральной плотности сложного окрашенного стохастического процесса мультипликативного типа?

12.Почему матрица дисперсий сложного окрашенного стохастического процесса аддитивного типа имеет диагональный вид?

13.Почему матрица дисперсий сложного окрашенного стохастического процесса мультипликативного типа не имеет диагонального вида?

14.Как будет выглядеть кривая функции спектральной плотности сложного окрашенного стохастического процесса мультипликативного типа при сопрягающей частоте апериодической части ФФ существенно меньше сопрягающей частоты колебательной части ФФ?

15.Что произойдет с кривой функции спектральной плотности сложного окрашенного стохастического процесса мультипликативного типа при изменении сопрягающей частоты апериодической части ФФ от значения в 10 раз меньшей сопрягающей частоты колебательной части ФФ до значения в 10 раз большей нее?

7. РЕАКЦИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЭКЗОГЕННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ СТАЦИОНАРНОЕ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ ТИПА «ОКРАШЕННЫЙ ШУМ »

Основной задачей этого раздела является намерение проложить путь к матричному уравнению Ляпунова, которое для случая экзогенного стохастического воздействия стационарного в широком смысле типа «белый шум», позволило элегантно вычислять матрицу дисперсий вектора состояния системы, возбуждаемой этим экзогенным стохастическим воздействием, с тем, чтобы также элегантно вычислять матрицу дисперсий вектора состояния системы при возбуждении ее «окрашенным шумом». Как показано ранее, наличие матрицы дисперсии вектора состояния исследуемой системы позволяет достаточно просто вычислить корреляционную матрицу и матрицу спектральной плотности по всем переменным системы. Задача решается как для случая непрерывных, так и для случая дискретных систем.

7.1. Реакция непрерывной стационарной линейной системы на непрерывное стохастическое экзогенное воздействие стационарное в широком смысле типа «окрашенный шум»

Рассматривается линейная непрерывная система

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t);\ x(0) = 0; y(t) = Cx(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \qquad (7.1)$$

в которой векторные и матричные компоненты имеют тот же смысл и размерности, что и в предыдущих разделах. Система возбуждается экзогенным стохастическим воздействием $g(t) = \xi(t)$ стационарным в широком смысле, формируемым с помощью формирующего фильтра (ФФ), имеющего представление

$$\dot{x}_{\phi}(t) = F_{\phi} x_{\phi}(t) + G_{\phi} w(t);\ \ x_{\phi}(0) = 0;\ \xi(t) = C_{\phi} x_{\phi}(t), \qquad (7.2)$$

где векторные и матричные компоненты имеют тот же смысл и размерности, что и ранее. На основании (7.1) и (7.2) построим агрегированную систему, которая будет возбуждаться экзогенным стохастическим воздействием $w(t)$ стационарным в широком смысле типа «белый шум» с матрицей интенсивностей N. Сформируем вектор $\tilde{x}(t)$ состояния агрегированной системы $\tilde{x}(t) = \left[x^T(t) \quad x_{\phi}(t)^T\right]^T$.

Тогда используя описания (7.1) и (7.2), для вектора $\tilde{x}(t)$ получим

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\dot{x}}(t)&=\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_{\phi}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Fx(t)+G\xi(t)\\ 0x(t)+F_{\phi}x_{\phi}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G_{\phi}w(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Fx(t)+GC_{\phi}x_{\phi}(t)\\ 0x(t)+F_{\phi}x_{\phi}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G_{\phi}w(t)\end{bmatrix}=\\ &=\begin{bmatrix}F & GC_{\phi}\\ 0 & F_{\phi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_{\phi}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G_{\phi}\end{bmatrix}w(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}w(t)\end{aligned}\right\},\quad (7.3)$$

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\tilde{C}_{x}\tilde{x}(t);\ x_{\phi}(t)=\tilde{C}_{x_{\phi}}\tilde{x}(t);\ y(t)=Cx(t)=\tilde{C}\tilde{x}(t);\ \xi(t)=\tilde{C}_{\Phi}\tilde{x}_{\Phi}(t);\\ &\varepsilon(t)=\xi(t)-y(t)=\tilde{C}_{\varepsilon}\tilde{x}(t);\end{aligned}\right\},\quad (7.4)$$

где

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}F & GC_{\phi}\\ 0 & F_{\phi}\end{bmatrix};\ \tilde{G}=\begin{bmatrix}0\\ G_{\phi}\end{bmatrix};\ \tilde{C}_{x}=\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix};\ \tilde{C}_{x_{\phi}}=\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix};\ \tilde{C}_{\Phi}=\begin{bmatrix}0 & C_{\Phi}\end{bmatrix};\ \tilde{C}_{\varepsilon}=\begin{bmatrix}-C & C_{\Phi}\end{bmatrix}.$$

Очевидно, для агрегированной системы (7.3)–(7.4), возбуждаемой «белым шумом» $w(t)$, оказывается справедливым использование матричного уравнения Ляпунова относительно $\tilde{D}_{x}$ матрицы дисперсий стохастического вектора $\tilde{x}(t)$ этой системы, которое записывается

$$\tilde{F}\tilde{D}_{x}+\tilde{D}_{x}\tilde{F}^{T}=-\tilde{G}N\tilde{G}^{T}.\quad (7.5)$$

Для матрицы $\tilde{D}_{x}$ дисперсий можно записать цепочку соотношений

$$\left.\begin{aligned}\tilde{D}_{x}&=M\left\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^{T}(t)\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}x(t)\\ x_{\phi}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{T}(t) & x_{\phi}{}^{T}(t)\end{bmatrix}\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}x(t)x^{T}(t) & x(t)x_{\phi}{}^{T}(t)\\ x(t)_{\phi}x^{T}(t) & x_{\phi}(t)x_{\phi}{}^{T}(t)\end{bmatrix}\right\}=\\ &=\begin{bmatrix}D_{x} & D_{xx_{\phi}}\\ D_{x_{\phi}x} & D_{x_{\phi}}\end{bmatrix},\end{aligned}\right.\quad (7.6)$$

в которых $D_{x_{\phi}x}=D^{T}{}_{xx_{\phi}}$. Если решить матричное уравнение Ляпунова (7.5) относительно матрицы $\tilde{D}_{x}$ дисперсий стохастического вектора $\tilde{x}(t)$ состояния агрегированной системы (7.3)–(7.4), то для матриц дисперсий переменных исходных систем (7.1) и (7.2) можно записать

$$D_{x}=\tilde{C}_{x}\tilde{D}_{x}\tilde{C}_{x}{}^{T},D_{y}=\tilde{C}\tilde{D}_{x}\tilde{C}^{T},D_{\varepsilon}=\tilde{C}_{\varepsilon}\tilde{D}_{x}\tilde{C}_{\varepsilon}{}^{T},D_{x_{\phi}}=\tilde{C}_{x_{\phi}}\tilde{D}_{x}\tilde{C}_{x_{\phi}}{}^{T},D_{\xi}=\tilde{C}_{\phi}\tilde{D}_{x}\tilde{C}_{\phi}{}^{T}.\quad (7.7)$$

Разобьем уравнение Ляпунова относительно матрицы $\tilde{D}_x$ дисперсии агрегированного вектора состояния $\tilde{x}(t)$ на компоненты, записав его в форме

$$\begin{bmatrix} F & GC_\phi \\ 0 & F_\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D^T{}_{xx_\phi} & D_{x_\phi} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D^T{}_{xx_\phi} & D_{x_\phi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F^T & 0 \\ C_\phi{}^T G^T & F_\phi{}^T \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 \\ G_\Phi \end{bmatrix}[N]\begin{bmatrix} 0 & G_\Phi{}^T \end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\Phi N G_\Phi{}^T \end{bmatrix}$$

Покомпонентное перемножение матриц дает систему матричных уравнений Ляпунова, записанных в однородной форме

$$FD_x + GC_\phi D^T{}_{xx_\phi} + D_x F^T + D_{xx_\phi} C_\phi{}^T G^T = 0$$

$$FD_{xx_\phi} + GC_\phi D_{x_\phi} + D_{xx_\phi} F_\phi{}^T = 0$$

$$F_\phi D_{x_\phi} + D_{x_\phi} F_\phi{}^T = -G_\Phi N G_\Phi{}^T$$

Перепишем уравнения Ляпунова в неоднородной форме в порядке вычисления матриц дисперсий, образующих $\tilde{D}_x$

$$\left.\begin{aligned} &F_\phi D_{x_\phi} + D_{x_\phi} F_\phi{}^T = -G_\Phi N G_\Phi{}^T \Rightarrow D_{x_\phi} \\ &FD_{xx_\phi} + D_{xx_\phi} F_\phi{}^T = -GC_\phi D_{x_\phi} \Rightarrow D_{xx_\phi} = D^T_{x_\phi x} \\ &FD_x + D_x F^T = -D_{xx_\phi} C_\phi{}^T G^T - GC_\phi D^T{}_{xx_\phi} \Rightarrow D_x \end{aligned}\right\}. \qquad (7.8)$$

Если решить систему матричных уравнений Ляпунова (7.8), то для матриц дисперсий переменных исходных систем (7.1) и (7.2) можно записать

$$\left.\begin{aligned} &D_y = CD_x C^T, \\ &D_\xi = C_\phi D_{x_\phi} C_\phi^T, D_\varepsilon = \tilde{C}_\varepsilon \tilde{D}_x \tilde{C}_\varepsilon{}^T = \begin{bmatrix} -C & C_\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D^T{}_{xx_\phi} & D_{x_\phi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -C^T \\ C^T{}_\phi \end{bmatrix}= \\ &=\begin{bmatrix} -C & C_\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -D_x C^T + D_{xx_\phi} C^T{}_\phi \\ -D_{xx_\phi} C^T + D_{x_\phi} C^T{}_\phi \end{bmatrix} = CD_x C^T - CD_{xx_\phi} C_\phi{}^T - C_\phi D^T{}_{xx_\phi} C^T + \\ &+ C_\phi D_{x_\phi} C_\phi{}^T = D_\xi + D_y - CD_{xx_\phi} C_\phi{}^T - C_\phi D^T{}_{xx_\phi} C^T. \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Таким образом, поставленная задача вычисления матриц дисперсий переменных системы (7.1) при экзогенном «окрашенном» стохастическом воздействии решена в двух формах. Первая форма представлена системой матричных соотношений (7.5) и (7.7), которая характеризуется высокой размерностью матричных компонентов матричного уравнения Ляпунова (7.5). Вторая форма представлена система матричных соотношений (7.8) и (7.9), она характеризуется необходимостью решения системы из трех матричных уравнений Ляпунова существенно меньших по размерности уравнения Ляпунова (7.5). В связи со сказанным предпочтение следует отдать второй форме решения задачи формирования дисперсий переменных системы (7.1) при стохастическом экзогенном воздействии «окрашенного» типа.

Следует заметить, что в случае численного решения задачи, когда необходимость в получении аналитических представлений матриц дисперсий отсутствует, можно воспользоваться функцией «*lyap*(*)» в пакете Matlab.

Вычисление корреляционных матриц (функций) по состоянию и выходу при переходе от «белого шума» к «окрашенному» не претерпевают изменений в аналитических представлениях и осуществляются в полном соответствии с выражениями (4.21)–(4.24), но применительно к агрегированной системе (7.3), (7.4) в форме

$$R_x(\tau)=M\left\{x(t+\tau)x^T(t)\right\}=M\left\{\tilde{C}_x\tilde{x}(t+\tau)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}_x^T\right\}=M\left\{\tilde{C}_x e^{\tilde{F}\tau}\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}_x^T\right\}=$$
$$=\tilde{C}_x e^{\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}_x^T\ ,\tau\geq 0 \qquad (7.10)$$

$$R_x(\tau)=M\left\{x(t-\tau)x^T(t)\right\}=M\left\{\tilde{C}_x\tilde{x}(t-\tau)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}_x^T\right\}=M\left\{\tilde{C}_x e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}_x^T\right\}=$$
$$=\tilde{C}_x e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}_x^T\ ,\tau\leq 0 \qquad (7.11)$$
$$R_y(\tau)=M\left\{y(t+\tau)y^T(t)\right\}=M\left\{\tilde{C}\tilde{x}(t+\tau)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}^T\right\}=M\left\{\tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}^T\right\}=$$
$$=\tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}^T\ ,\tau\geq 0 \qquad (7.12)$$
$$R_y(\tau)=M\left\{y(t-\tau)y^T(t)\right\}=M\left\{\tilde{C}\tilde{x}(t-\tau)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}^T\right\}=M\left\{\tilde{C}e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\tilde{C}^T\right\}=$$
$$=\tilde{C}e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}^T\ ,\tau\leq 0 \qquad (7.13)$$

Такова же ситуация и с матрицами (функциями) спектральных плотностей вектора состояния и выхода, они вычисляются в полном

соответствии с выражениями (4.29)–(4.30), но применительно к агрегированной системе (7.3), (7.4) в форме

$$S_x(\omega) = -2\tilde{C}_x\tilde{F}(\tilde{F}^2 + \omega^2 I)^{-1}\tilde{D}_x\tilde{C}_x^T, \tag{7.14}$$

$$S_y(\omega) = -2\tilde{C}\tilde{F}(\tilde{F}^2 + \omega^2 I)^{-1}\tilde{D}_x\tilde{C}^T. \tag{7.15}$$

Теперь для закрепления материала рассмотрим несколько наиболее характерных примеров.

В качестве **первого примера** рассмотрим систему первого порядка, возбуждаемую окрашенным стохастическим входным воздействием $\xi(t)$ типа «экспоненциально коррелированного» шума. Тогда будем иметь пару систему (7.1) и ФФ (7.2):

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + G\xi(t);\ x(0) = 0;\ y(t) = Cx(t);\ \varepsilon(t) = \xi(t) - y(t),$$

$$F = [-\nu];\ G = [\nu];\ C = [1].$$

$$\dot{x}_\phi(t) = F_\phi x_\phi(t) + G_\phi w(t);\ x_\phi(0) = 0;\ \xi(t) = C_\phi x_\phi(t)$$

$$F_\phi = [-\Omega_a];\ G_\phi = [\Omega_a];\ C_\phi = [1].$$

Требуется сформировать: D_ξ, $D_x, D_y, D_\varepsilon, R_y(\tau)$, $S_y(\omega)$

Решаем задачу на основании системы матричных уравнений (7.8).

Решение уравнения $F_\phi D_{x_\phi} + D_{x_\phi} F_\phi^T = -G_\Phi N G_\Phi^T$ дает

$$-\Omega_a D_{x_\phi} + D_{x_\phi}(-\Omega_a) = -\Omega_a N \Omega_a \Rightarrow D_{x_\phi} = \frac{N\Omega_a}{2}, D_\xi = C_\phi D_{x_\phi} C_\phi^T = \frac{N\Omega_a}{2}.$$

Решение уравнения $FD_{xx_\phi} + D_{xx_\phi} F_\phi^T = -GC_\phi D_{x_\phi}$, где $D_{xx_\phi} = M\{xx_\phi^T\}$,

дает $-\nu D_{xx_\phi} + D_{xx_\phi}(-\Omega_{\mathbf{a}}) = -\nu \cdot 1 \cdot \dfrac{N\Omega_a}{2} \Rightarrow D_{xx_\phi} = \dfrac{N\Omega_a \nu}{2(\nu + \Omega_a)}$;

Решение матричного уравнения $FD_x + D_x F^T = -D_{xx_\phi} C_\phi^T G^T - GC_\phi D^T{}_{xx_\phi}$

дает

$$-\nu D_x + D_x(-\nu) = -\frac{N\Omega_a \nu}{2(\nu + \Omega_a)} 1 \cdot \nu - \nu \cdot 1 \frac{N\Omega_a \nu}{2(\nu + \Omega_a)} \Rightarrow D_x = \frac{N\Omega_a}{2} \cdot \frac{\nu}{(\nu + \Omega_a)},$$

откуда для дисперсий D_y выхода $y(t)$ и D_ε ошибки $\varepsilon(t)$ будем иметь в силу (7.9)

$$\left.\begin{aligned} D_y &= CD_xC^T = 1\cdot\frac{N\Omega_a}{2}\cdot\frac{\nu}{(\nu+\Omega_a)}\cdot 1 = \frac{N\Omega_a}{2}\cdot\frac{\nu}{(\nu+\Omega_a)};\\ D_\varepsilon &= D_\xi + D_y - CD_{xx_\phi}C_\phi^T - C_\phi D_{xx_\phi}^T C^T = \frac{N\Omega_a}{2} + \frac{N\Omega_a\nu}{2(\nu+\Omega_a)} - \\ &- \left\{1\cdot\frac{N\Omega_a\nu}{2(\nu+\Omega_a)}\cdot 1 + 1\cdot\frac{N\Omega_a\nu}{2(\nu+\Omega_a)}\cdot 1\right\} = \frac{N\Omega_a}{2} - \frac{N\Omega_a\nu}{2(\nu+\Omega_a)} = \frac{N\Omega_a}{2}\left\{\frac{\Omega_a}{(\nu+\Omega_a)}\right\} \end{aligned}\right\}. \quad (7.16)$$

Из полученных выражений следует, что с уменьшением параметра ν системы (7.1) дисперсия ее выхода уменьшается, а дисперсия ошибки растет. При увеличении параметра ν системы (7.1) дисперсия ее выхода растет, а дисперсия ошибки уменьшается.

Вычисление корреляционной функции $R_y(\tau)$ и функции $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода $y(t)$ осуществим в силу (7.12) и (7.15) и начнем с функции спектральной плотности $S_y(\omega)$. Напомним, что рассматриваемая агрегированная система (7.3),(7.4) представляет собой последовательное соединение ФФ (7.2) с передаточной функцией $W_\phi(s) = \dfrac{\Omega_a}{s+\Omega_a}$, формирующего окрашенное стохастическое воздействие $\xi(t)$, и системы с передаточной функцией «вход–выход» $\Phi(s) = \dfrac{\nu}{s+\nu}$. Тогда функция спектральной плотности $S_y(\omega)$ выхода такой последовательной цепочки определится выражением

$$S_y(\omega) = N\cdot\left|W_\phi(j\omega)\right|^2\cdot\left|\Phi(j\omega)\right|^2 = N\cdot\frac{\Omega_a^2}{\omega^2+\Omega_a^2}\cdot\frac{\nu^2}{\omega^2+\nu^2}. \quad (7.17)$$

Вычислим теперь эту же функцию спектральной плотности с помощью формулы (7.15), тогда получим

$$S_y(\omega)=-2\tilde{C}\tilde{F}(\tilde{F}^2+\omega^2 I)^{-1}\tilde{D}_x\tilde{C}^T=-2\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\nu & \nu\\ 0 & -\Omega_a\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}-\nu & \nu\\ 0 & -\Omega_a\end{bmatrix}^2+\omega^2 I\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a} & \dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a}\\ \dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a} & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{N\Omega_a\nu^2}{(\nu+\Omega_a)(\omega^2+\Omega_a^2)(\omega^2+\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\omega^2+\Omega_a^2 & \nu(\nu+\Omega_a)\\ 0 & \omega^2+\nu^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=N\cdot\frac{\Omega_a^2}{\omega^2+\Omega_a^2}\cdot\frac{\nu^2}{\omega^2+\nu^2}.$$

Вычисление корреляционной функции $R_y(\tau)$ осуществляем с помощью (7.12) так, что $R_y(\tau)$ формируется в силу соотношения

$$R_y(\tau)=\tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\eta(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}exp\left\{\begin{bmatrix}-\nu & \nu\\ 0 & -\Omega_a\end{bmatrix}t\right\}\eta(0);$$

где

$$\eta(0)=\left\{\frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a} & \dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a}\\ \dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a} & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a}\\ \dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a}\end{bmatrix};$$

$$R_y(\tau)=\frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\nu\tau} & \dfrac{\nu}{\Omega_a-\nu}\left(e^{-\nu\tau}-e^{-\Omega_a\tau}\right)\\ 0 & e^{-\Omega_a\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a}\\ \dfrac{\nu}{\nu+\Omega_a}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_a}{2}\cdot\frac{\nu}{\Omega_a^2-\nu^2}\left[\Omega_a e^{-\nu\tau}-\nu e^{-\Omega_a\tau}\right]:$$

$$R_y(\tau)\Big|_{\Omega_a\to\nu}=\lim_{\Omega_a\to\nu}\left\{\frac{N\Omega_a}{2}\cdot\frac{\nu}{\Omega_a^2-\nu^2}\left[\Omega_a e^{-\nu\tau}-\nu e^{-\Omega_a\tau}\right]\right\}=\frac{N\Omega_a}{2}e^{-\nu\tau}.$$

В качестве **второго примера** рассмотрим систему первого порядка, возбуждаемую окрашенным стохастическим входным воздействием $\xi(t)$ типа «нерегулярная качка». Тогда будем иметь систему (7.1) и ФФ (7.2):

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + G\xi(t);\ x(0) = 0;\ y(t) = Cx(t);\ \varepsilon(t) = \xi(t) - y(t),$$

$$F = [-v];\ G = [v];\ C = [1].$$

$$\dot{x}_\phi(t) = F_\phi x_\phi(t) + G_\phi w(t);\ \ x_\phi(0) = 0;\ \xi(t) = C_\phi x_\phi(t)$$

где $F_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k{}^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}; G_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_k{}^2 \end{bmatrix};\ C_\phi = [1 \quad 0].$

Требуется найти $D_\xi,\ D_x, D_y, D_\varepsilon, R_y(\tau),\ S_y(\omega)$.

Решение уравнения $F_\phi D_{x_\phi} + D_{x_\phi} F_\phi{}^T = -G_\Phi N G_\Phi{}^T$ дает

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_\kappa^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{x_{\phi 11}} & D_{x_{\phi 12}} \\ D_{x_{\phi 12}} & D_{x_{\phi 22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{x_{\phi 11}} & D_{x_{\phi 12}} \\ D_{x_{\phi 12}} & D_{x_{\phi 22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_\kappa^2 \\ 1 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} 0 & \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Если воспользоваться решением примера 4.2, то получим

$$D_{x_\phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} & 0 \\ 0 & \dfrac{N\Omega_\kappa^3}{4\zeta} \end{bmatrix} = \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix}. \qquad (7.18)$$

Решение уравнения $FD_{xx_\phi} + D_{xx_\phi} F_\phi{}^T = -GC_\phi D_{x_\phi}$, где $D_{xx_\phi} = M\left\{xx_\phi^T\right\}$

дает $D_{xx_\phi} = \dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} \cdot \dfrac{v}{\Omega_\kappa^2 + 2\zeta\Omega_k v + v^2}\left[(v + 2\zeta\Omega_k) \quad -\Omega_\kappa^2\right].$

В свою очередь решение матричного уравнения $FD_x + D_x F^T = -D_{xx_\phi} C_\phi^T G^T - GC_\phi D^T{}_{xx_\phi}$ дает для D_x

$D_x = \dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} \cdot \dfrac{v(v + 2\zeta\Omega_k)}{\Omega_\kappa^2 + 2\zeta\Omega_k v + v^2}$, что позволяет записать для дисперсии выхода

$$D_y = CD_x C^T = 1 \cdot D_x \cdot 1 = \frac{N\Omega_k}{4\zeta} \cdot \frac{v(v + 2\zeta\Omega_k)}{\Omega_\kappa^2 + 2\zeta\Omega_k v + v^2};$$

и дисперсии ошибки

$$D_\varepsilon = D_\xi + D_y - CD_{xx_\phi}C_\phi^T - C_\phi D_{xx_\phi}^T C^T = \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\left(1 - \frac{\nu(\nu + 2\zeta\Omega_k)}{\Omega_к^2 + 2\zeta\Omega_k\nu + \nu^2}\right) =$$

$$= \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\left(\frac{\Omega_к^2}{\Omega_к^2 + 2\zeta\Omega_k\nu + \nu^2}\right).$$

Из полученных выражений для дисперсий выхода и ошибки следует, что с уменьшением параметра ν системы (7.1) дисперсия ее выхода уменьшается, а дисперсия ошибки растет. При увеличении параметра ν системы (7.1) дисперсия ее выхода растет, а дисперсия ошибки уменьшается.

Для функции спектральной плотности $S_y(\omega)$ выхода последовательной цепочки определится выражением

$$S_y(\omega) = N \cdot \left|W_\phi(j\omega)\right|^2 \cdot \left|\Phi(j\omega)\right|^2 = N \cdot \frac{\Omega_k^4}{\left(\omega^2 - \Omega_k^2\right)^2 + 4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2} \cdot \frac{\nu^2}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (7.19)$$

Вычисление корреляционной функции $R_y(\tau)$ надо осуществлять с помощью выражения (7.12) так, что $R_y(\tau)$ формируется в силу представления

$$R_y(\tau)=\tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\eta(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}exp\left\{\begin{bmatrix}-\nu & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -\Omega_к^2 & -2\zeta\Omega_к\end{bmatrix}t\right\}\eta(0),$$

$$\eta(0)=\left\{\frac{N\Omega_к}{4\zeta}\right\}\begin{bmatrix}\frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2} & \frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2} & \frac{-\nu\Omega_к^2}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2}\\ \frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2} & 1 & 0\\ \frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2} & 0 & \Omega_к^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{N\Omega_к}{4\zeta}\begin{bmatrix}\frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2}\\ \frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2}\\ \frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2}\end{bmatrix}; \qquad (7.20)$$

$$R_y(\tau)=\frac{N\Omega_к}{4\zeta}\frac{\nu(\nu+2\zeta\Omega_к)}{\Omega_к^2+2\zeta\Omega_k\nu+\nu^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}exp\left\{\begin{bmatrix}-\nu & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -\Omega_к^2 & -2\zeta\Omega_к\end{bmatrix}t\right\}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

В качестве **третьего примера** рассмотрим систему второго порядка, возбуждаемую окрашенным стохастическим входным воздействием $\xi(t)$ типа «экспоненциально коррелируемый шум». Тогда будем иметь систему (7.1) и ФФ (7.2):

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+G\xi(t);\ x(0)=0;\ y(t)=Cx(t);\ \varepsilon(t)=\xi(t)-y(t),$$

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\nu_2 & -\nu_1\end{bmatrix};\ G=\begin{bmatrix}0\\ \nu_2\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

$$\dot{x}_ф(t)=F_ф x_ф(t)+G_ф w(t);\ \ x_ф(0)=0;\ \xi(t)=C_ф x_ф(t)$$

где $F_ф=[-\Omega_a];\ G_ф=[\Omega_a];\ \ C_ф=[1].$

Требуется найти D_ξ, D_x, D_y, D_ε, $R_y(\tau)$, $S_y(\omega)$.

Решаем задачу на основании системы матричных уравнений (7.8).

Решение уравнения $F_ф D_{x_ф}+D_{x_ф}F_ф^{\ T}=-G_Ф N G_Ф^{\ T}$ дает

$$-\Omega_a D_{x_\phi} + D_{x_\phi}(-\Omega_a) = -\Omega_a N\Omega_a \Rightarrow D_{x_\phi} = \frac{N\Omega_a}{2}, D_\xi = C_\phi D_{x_\phi} C_\phi^T = \frac{N\Omega_a}{2}.$$

Решение уравнения $FD_{xx_\phi} + D_{xx_\phi} F_\phi{}^T = -GC_\phi D_{x_\phi}$, где $D_{xx_\phi} = M\{xx_\phi^T\}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{xx_\phi 1} \\ D_{xx_\phi 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx_\phi 1} \\ D_{xx_\phi 2} \end{bmatrix}[-\Omega_a] = -\begin{bmatrix} 0 \\ \nu_2 \end{bmatrix}\frac{N\Omega_a}{2}$$

дает $D_{xx_\phi 2} - \Omega_a D_{xx_\phi 1} = 0, -\nu_2 D_{xx_\phi 1} - \nu_1 D_{xx_\phi 2} - \Omega_a D_{xx_\phi 2} = -\frac{N\Omega_a}{2}\nu_2;$

$$D_{xx_\phi} = \frac{N\Omega_a}{2}\frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}\begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_a \end{bmatrix}.$$

Решение матричного уравнения $FD_x + D_x F^T = -D_{xx_\phi} C_\phi^T G^T - GC_\phi D^T{}_{xx_\phi}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{x11} & D_{x12} \\ D_{x12} & D_{x22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{x11} & D_{x12} \\ D_{x12} & D_{x22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\nu_2 \\ 1 & -\nu_1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{N\Omega_a}{2}\frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_a \end{bmatrix}\cdot 1 \cdot [0 \quad \nu_2] + \begin{bmatrix} 0 \\ \nu_2 \end{bmatrix}[1 \quad \Omega_a]\right\}, ,$$

$$D_x = \frac{N\Omega_a}{2}\frac{1}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}\begin{bmatrix} \nu_2(1 + \Omega_a/\nu_1) & 0 \\ 0 & \Omega_a\nu_2^2/\nu_1 \end{bmatrix}.$$

Откуда для дисперсий D_y выхода $y(t)$и D_ε ошибки $\varepsilon(t)$ будем иметь в силу (7.9)

$$\left.\begin{aligned} D_y &= CD_x C^T = [1 \quad 0]D_x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{N\Omega_a}{2}\frac{\nu_2(1+\Omega_a/\nu_1)}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}, \\ D_\varepsilon &= D_\xi + D_y - CD_{xx_\phi} C_\phi^T - C_\phi D_{xx_\phi}^T C^T = \frac{N\Omega_a}{2} + \frac{N\Omega_a}{2}\frac{\nu_2(1+\Omega_a/\nu_1)}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} - \\ &- \frac{N\Omega_a}{2}\frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}\left\{[1 \quad 0]\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_a \end{bmatrix}\cdot 1 + 1\cdot[1 \quad \Omega_a]\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \frac{N\Omega_a}{2}\frac{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2(\Omega_a/\nu_1)}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

Из полученных выражений для дисперсий выхода и ошибки следует, что с уменьшением параметров ν_1, ν_2 системы (7.1) дисперсия

ее выхода уменьшается, а дисперсия ошибки растет. При увеличении параметров ν_1, ν_2 системы (7.1) дисперсия ее выхода растет, а дисперсия ошибки уменьшается.

Для функции спектральной плотности $S_y(\omega)$ выхода последовательной цепочки из ФФ и системы (7.1) определится выражением

$$S_y(\omega) = N \cdot \left|W_{\phi}(j\omega)\right|^2 \cdot \left|\Phi(j\omega)\right|^2 = N \cdot \frac{\Omega_a^2}{\omega^2 + \Omega_a^2} \cdot \frac{\nu_2^2}{\left(\omega^2 - \nu_2\right)^2 + \nu_1^2\omega^2} \cdot \qquad (7.22)$$

.

Вычисление корреляционной функции $R_y(\tau)$ надо осуществлять с помощью выражения (7.12) так, что $R_y(\tau)$ формируется в силу представления

$$R_y(\tau) = \tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\eta(0) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} exp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\nu_2 & -\nu_1 & \nu_2 \\ 0 & 0 & -\Omega_a \end{bmatrix} t\right\}\eta(0),$$

$$\eta(0) = \left\{\frac{N\Omega_a}{2}\right\}\begin{bmatrix} \frac{\nu_2(1+\Omega_a/\nu_1)}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} & 0 & \frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} \\ 0 & \frac{\Omega_a\nu_2^2/\nu_1}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} & \frac{\nu_2\Omega_a}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} \\ \frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} & \frac{\nu_2\Omega_a}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \left\{\frac{N\Omega_a}{2}\right\} \cdot \frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2}\begin{bmatrix}1+\Omega_a/\nu_1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}, \qquad (7.23)$$

$$R_y(\tau) = \left\{\frac{N\Omega_a}{2}\right\} \cdot \frac{\nu_2}{\Omega_a^2 + \nu_1\Omega_a + \nu_2} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} exp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\nu_2 & -\nu_1 & \nu_2 \\ 0 & 0 & -\Omega_a \end{bmatrix} t\right\}\begin{bmatrix}1+\Omega_a/\nu_1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}.$$

В качестве **четвертого примера** рассмотрим систему второго порядка, возбуждаемую окрашенным стохастическим входным воздействием $\xi(t)$ типа «нерегулярная качка». Тогда будем иметь систему (7.1) и ФФ (7.2):

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + G\xi(t);\ x(0) = 0;\ y(t) = Cx(t);\ \varepsilon(t) = \xi(t) - y(t),$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix};\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu_2 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\dot{x}_\phi(t) = F_\phi x_\phi(t) + G_\phi w(t);\ x_\phi(0) = 0;\ \xi(t) = C_\phi x_\phi(t)$$

где $F_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_k^{\,2} & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix};\ G_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_k^{\,2} \end{bmatrix};\ C_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Требуется найти D_ξ, $D_x, D_y, D_\varepsilon, R_y(\tau),\ S_y(\omega)$.

Решаем задачу на основании системы матричных уравнений (7.8).

Решение уравнения $F_\phi D_{x_\phi} + D_{x_\phi} F_\phi^{\,T} = -G_\Phi N G_\Phi^{\,T}$ дает

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_\kappa^2 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x_{\phi 11}} & D_{x_{\phi 12}} \\ D_{x_{\phi 12}} & D_{x_{\phi 22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{x_{\phi 11}} & D_{x_{\phi 12}} \\ D_{x_{\phi 12}} & D_{x_{\phi 22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_\kappa^2 \\ 1 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} 0 & \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Если воспользоваться решением **второго примера** этого раздела, то получим

$$D_{x_\phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{N\Omega_k}{4\zeta} & 0 \\ 0 & \dfrac{N\Omega_\kappa^3}{4\zeta} \end{bmatrix} = \frac{N\Omega_k}{4\zeta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix}, D_\xi = C_\phi D_{x_\phi} C_\phi^T = \frac{N\Omega_k}{4\zeta}. \qquad (7.24)$$

Решение уравнения $FD_{xx_\phi} + D_{xx_\phi} F_\phi^{\,T} = -GC_\phi D_{x_\phi}$, где $D_{xx_\phi} = M\{xx_\phi^T\}$,

дает

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -v_2 & -v_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{xx_\phi 11} & D_{xx_\phi 12} \\ D_{xx_\phi 21} & D_{xx_\phi 22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_{xx_\phi 11} & D_{xx_\phi 12} \\ D_{xx_\phi 21} & D_{xx_\phi 22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_\kappa^2 \\ 1 & -2\zeta\Omega_k \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_\kappa^2 \end{bmatrix}=-\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} D_{xx_\phi 12} &= -\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{v_2\Omega_\kappa^2\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right)}{\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k v_2+v_1\Omega_\kappa^2\right)}; \\ D_{xx_\phi 21} &= -D_{xx_\phi 12}; \\ D_{xx_\phi 11} &= \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{v_2\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)+2\zeta\Omega_k v_2\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right)}{\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k v_2+v_1\Omega_\kappa^2\right)}; \\ D_{xx_\phi 22} &= \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{v_2\Omega_\kappa^2\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)}{\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k v_2+v_1\Omega_\kappa^2\right)} \end{aligned}\right\}; \qquad (7.25)$$

При этом матрица $D_{xx_\phi}=M\left\{xx_\phi^T\right\}$ принимает вид

$$D_{xx_\phi}=\frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{v_2}{\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k v_2+v_1\Omega_\kappa^2\right)}\times$$
$$\times\begin{bmatrix} \left(v_2-\Omega_\kappa^2\right)+2\zeta\Omega_k\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right) & -\Omega_\kappa^2\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right) \\ \Omega_\kappa^2\left(v_1+2\zeta\Omega_k\right) & \Omega_\kappa^2\left(v_2-\Omega_\kappa^2\right) \end{bmatrix}. \qquad (7.26)$$

Решение матричного уравнения $FD_x+D_xF^T=-D_{xx_\phi}C_\phi^TG^T-GC_\phi D^T{}_{xx_\phi}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{x11} & D_{x12} \\ D_{x21} & D_{x22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_{x11} & D_{x12} \\ D_{x21} & D_{x22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\nu_2 \\ 1 & -\nu_1 \end{bmatrix}\Bigg|_{D_{x21}=D_{x12}} =$$

$$= -D_{xx_\phi}\begin{bmatrix} 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \nu_2 & 0 \end{bmatrix}D^T{}_{xx_\phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu_2 D_{xx_\phi 11} \\ -\nu_2 D_{xx_\phi 11} & -2\nu_2 D_{xx_\phi 21} \end{bmatrix};$$

$$D_x = \begin{bmatrix} D_{xx_\phi 11}+D_{xx_\phi 21}/\nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 D_{xx_\phi 21}/\nu_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{\nu_2}{\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k\nu_2+\nu_1\Omega_\kappa^2\right)}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k+\Omega_\kappa^2/\nu_1\right) & 0 \\ 0 & \nu_2\Omega_\kappa^2\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)/\nu_1 \end{bmatrix}. \qquad (7.27)$$

Откуда для дисперсий D_y выхода $y(t)$ и D_ε ошибки $\varepsilon(t)$ будем иметь в силу (7.9)

$$\left.\begin{aligned} D_y &= CD_xC^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}D_x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{\nu_2\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)+\nu_2\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k+\Omega_\kappa^2/\nu_1\right)}{\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k\nu_2+\nu_1\Omega_\kappa^2\right)}, \\ D_\varepsilon &= D_\xi + D_y - CD_{xx_\phi}C_\phi^T - C_\phi D_{xx_\phi}^T C^T = \frac{N\Omega_k}{4\zeta}\cdot\frac{\Omega_\kappa^2\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(\nu_1+\nu_2/\nu_1\right)}{\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k\nu_2+\nu_1\Omega_\kappa^2\right)} \end{aligned}\right\}. \qquad (7.28)$$

Из полученных выражений для дисперсий выхода и ошибки следует, что с уменьшением параметров ν_1, ν_2 системы (7.1) дисперсия ее выхода уменьшается, а дисперсия ошибки растет. При увеличении параметров ν_1, ν_2 системы (7.1) дисперсия ее выхода растет, а дисперсия ошибки уменьшается.

Для функции спектральной плотности $S_y(\omega)$ выхода последовательной цепочки из ФФ и системы (7.1) определится выражением

$$S_y(\omega) = N\cdot\left|W_\phi(j\omega)\right|^2\cdot\left|\Phi(j\omega)\right|^2 = N\cdot\frac{\Omega_k^4}{\left(\omega^2-\Omega_k^2\right)^2+4\zeta^2\Omega_k^2\omega^2}\cdot\frac{\nu_2^2}{\left(\omega^2-\nu_2\right)^2+\nu_1^2\omega^2}. \qquad (7.29)$$

.

Вычисление корреляционной функции $R_y(\tau)$ надо осуществлять с помощью выражения (7.12) так, что $R_y(\tau)$ формируется в силу представления

$$R_y(\tau)=\tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\eta(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}exp\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\nu_2 & -\nu_1 & \nu_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\Omega_\kappa^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}t\right\}\eta(0),$$

$$\eta(0)=\left\{\frac{N\Omega_\kappa}{4\zeta}\right\}\cdot\frac{\nu_2}{\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k\nu_2+\nu_1\Omega_\kappa^2\right)}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k+\Omega_\kappa^2/\nu_1\right) & * & * & *\\ 0 & * & * & *\\ \left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)+2\zeta\Omega_k\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right) & * & * & *\\ -\Omega_\kappa^2\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right) & * & * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=$$

$$R_y(\tau)=\left\{\frac{N\Omega_\kappa}{4\zeta}\right\}\cdot\frac{\nu_2}{\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)^2+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k\nu_2+\nu_1\Omega_\kappa^2\right)}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times$$

$$\times exp\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\nu_2 & -\nu_1 & \nu_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\Omega_\kappa^2 & -2\zeta\Omega_k\end{bmatrix}t\right\}\begin{bmatrix}\left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)+\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\left(2\zeta\Omega_k+\Omega_\kappa^2/\nu_1\right)\\ 0\\ \left(\nu_2-\Omega_\kappa^2\right)+2\zeta\Omega_k\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\\ -\Omega_\kappa^2\left(\nu_1+2\zeta\Omega_k\right)\end{bmatrix}\Bigg\}.(7.30)$$

7.2. **Реакция дискретной стационарной линейной системы на дискретное стохастическое экзогенное воздействие стационарное в широком смысле типа «окрашенный шум»**

Рассматривается стационарная линейная дискретная система

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}g(k);\ x(0)=0;\ y(k)=\overline{C}x(k);\varepsilon(k)=g(k)-y(k),\quad(7.31)$$

в которой векторные и матричные компоненты имеют тот же смысл и размерности, что и в предыдущих разделах. Система возбуждается экзогенным стохастическим воздействием $g(k)=\xi(k)$ стационарным в широком смысле дискретным «окрашенным шумом», формируемым с помощью дискретного формирующего фильтра (ДФФ), имеющего представление

$$x_\phi(k+1)=\overline{F}_\phi x_\phi(k)+\overline{G}_\phi w(k);\ \ x_\phi(0)=0;\ \xi(k)=\overline{C}_\phi x_\phi(k),\qquad(7.32)$$

где векторные и матричные компоненты имеют тот же смысл и размерности, что и ранее. На основании (7.31) и (7.32) построим агрегированную дискретную систему, которая будет возбуждаться дискретным экзогенным стохастическим воздействием $w(k)$ стационарным в широком смысле типа дискретный «белый шум» с матрицей дисперсий V. Сформируем вектор $\tilde{x}(k)$ состояния

агрегированной системы $\tilde{x}(k)=\left[x^T(k) \quad x_\phi(k)^T\right]^T$. Тогда используя описания (7.1) и (7.2), для вектора $\tilde{x}(t)$ получим

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}(k+1)=\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_\phi(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{F}x(k)+\bar{G}\xi(k) \\ 0x(k)+\bar{F}_\phi x_\phi(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_\phi w(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{F}x(k)+\bar{G}\bar{C}_\phi x_\phi(k) \\ 0x(k)+\bar{F}_\phi x_\phi(k)\end{bmatrix}+ \\ +\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_\phi w(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{F} & \bar{G}\bar{C}_\phi \\ 0 & \bar{F}_\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\phi(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_\phi\end{bmatrix}w(k)=\tilde{\bar{F}}\tilde{x}(k)+\tilde{\bar{G}}w(k)\end{aligned}\right\}, \quad (7.33)$$

$$\left.\begin{aligned}x(k)=\tilde{\bar{C}}_x\tilde{x}k;\, x_\phi(k)=\tilde{\bar{C}}_{x_\phi}\tilde{x}(k);\, y(k)=\bar{C}x(k)=\tilde{\bar{C}}\tilde{x}(k);\, \xi(k)=\tilde{\bar{C}}_\Phi\tilde{x}_\Phi(k); \\ \varepsilon(k)=\xi(k)-y(k)=\bar{C}_\varepsilon\tilde{x}(k);\end{aligned}\right\}, \quad (7.34)$$

где

$$\tilde{\bar{F}}=\begin{bmatrix} \bar{F} & \bar{G}\bar{C}_\phi \\ 0 & \bar{F}_\phi\end{bmatrix};\ \tilde{\bar{G}}=\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_\phi\end{bmatrix};\ \tilde{\bar{C}}_x=\begin{bmatrix} I & 0\end{bmatrix};\ \tilde{\bar{C}}_{x_\phi}=\begin{bmatrix} 0 & I\end{bmatrix};$$

$$\tilde{\bar{C}}=\begin{bmatrix} \bar{C} & 0\end{bmatrix};\ \tilde{\bar{C}}_\Phi=\begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_\Phi\end{bmatrix};\ \tilde{\bar{C}}_\varepsilon=\begin{bmatrix} -\bar{C} & \bar{C}_\Phi\end{bmatrix}.$$

Очевидно, для дискретной агрегированной системы (7.33)–(7.34), возбуждаемой дискретным «белым шумом» $w(л)$, оказывается справедливым использование матричного уравнения Ляпунова относительно $\tilde{D}_x$ матрицы дисперсий стохастического вектора $\tilde{x}(t)$ этой системы, которое записывается

$$\tilde{D}_x-\tilde{\bar{F}}\tilde{D}_x\tilde{\bar{F}}^T=\tilde{\bar{G}}V\tilde{\bar{G}}^T \ . \quad (7.35)$$

Для матрицы $\tilde{D}_x$ дисперсий можно записать цепочку соотношений

$$\tilde{D}_x=M\left\{\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)\right\}=M\left\{\begin{bmatrix} x(k) \\ x_\phi(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^T(k) & x_\phi{}^T(k)\end{bmatrix}\right\}=M\left\{\begin{bmatrix} x(k)x^T(k) & x(k)x_\phi{}^T(k) \\ x(k)_\phi x^T(k) & x_\phi(t)x_\phi{}^T(k)\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D_{x_\phi x} & D_{x_\phi}\end{bmatrix}, \quad (7.36)$$

в которых $D_{x_\phi x}=D^T{}_{xx_\phi}$. Если решить матричное уравнение Ляпунова (7.35) относительно матрицы $\tilde{D}_x$ дисперсий стохастического вектора $\tilde{x}(k)$ состояния агрегированной системы (7.33)–(7.34), то для матриц дисперсий переменных исходных систем (7.31) и (7.32) можно записать

$$D_x = \tilde{\bar{C}}_x \tilde{D}_x \tilde{\bar{C}}_x{}^T, D_y = \tilde{\bar{C}} \tilde{D}_x \tilde{\bar{C}}^T, D_\varepsilon = \tilde{\bar{C}}_\varepsilon \tilde{D}_x \tilde{\bar{C}}_\varepsilon{}^T, D_{x_\phi} = \tilde{\bar{C}}_{x_\phi} \tilde{D}_x \tilde{\bar{C}}_{x_\phi}{}^T, D_\xi = \tilde{\bar{C}}_\phi \tilde{D}_x \tilde{\bar{C}}_\phi{}^T. \quad (7.37)$$

Разобьем уравнение Ляпунова относительно матрицы $\tilde{D}_x$ дисперсии агрегированного вектора состояния $\tilde{x}(k)$ на компоненты, записав его в форме

$$\begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D_{xx_\phi}^T & D_{x_\phi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{F} & \bar{G}\bar{C}_\phi \\ 0 & \bar{F}_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D_{xx_\phi}^T & D_{x_\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}^T & 0 \\ \bar{C}_\phi^T \bar{G}^T & \bar{F}_\phi^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{G}_\Phi \end{bmatrix} [V] \begin{bmatrix} 0 & \bar{G}_\phi^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{G}_\Phi V G_\phi^T \end{bmatrix}$$

Покомпонентное перемножение матриц дает систему матричных уравнений Ляпунова, записанных в однородной форме

$$D_x - \bar{F} D_x \bar{F}^T - \bar{G}\bar{C}_\phi D_{xx_\phi}^T \bar{F}^T - \bar{F} D_{xx_\phi} \bar{C}_\phi^T \bar{G}^T - \bar{G}\bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{C}_\phi^T \bar{G}^T = 0$$

$$D_{xx_\phi} - \bar{F} D_{xx_\phi} \bar{F}_\phi{}^T - \bar{G}\bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{F}_\phi{}^T = 0$$

$$D_{x_\phi} - \bar{F}_\phi D_{x_\phi} \bar{F}_\phi{}^T = \bar{G}_\Phi V \bar{G}_\phi^T$$

Перепишем уравнения Ляпунова в неоднородной форме в порядке вычисления матриц дисперсий, образующих $\tilde{D}_x$

$$\left.\begin{aligned} & D_{x_\phi} - \bar{F}_\phi D_{x_\phi} F_\phi{}^T = \bar{G}_\Phi V \bar{G}_\phi^T \Rightarrow D_{x_\phi} \\ & D_{xx_\phi} - \bar{F} D_{xx_\phi} \bar{F}_\phi{}^T = \bar{G}\bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{F}_\phi{}^T \Rightarrow D_{xx_\phi} = D_{x_\phi x}^T \\ & D_x - \bar{F} D_x \bar{F}^T = \bar{G}\bar{C}_\phi D_{xx_\phi}^T \bar{F}^T + \bar{F} D_{xx_\phi} \bar{C}_\phi^T \bar{G}^T + \bar{G}\bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{C}_\phi^T \bar{G}^T \Rightarrow D_x \end{aligned}\right\} \quad (7.38)$$

Если решить систему матричных уравнений Ляпунова (7.38), то для матриц дисперсий переменных исходных дискретных систем (7.31) и (7.32) можно записать

$$D_y = \bar{C} D_x \bar{C}^T,$$

$$D_\xi = \bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{C}_\phi^T, D_\varepsilon = \tilde{\bar{C}}_\varepsilon \tilde{D}_x \tilde{\bar{C}}_\varepsilon^T = \begin{bmatrix} -\bar{C} & \bar{C}_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x & D_{xx_\phi} \\ D_{xx_\phi}^T & D_{x_\phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{C}^T \\ \bar{C}_\phi^T \end{bmatrix} =$$

$$\left.\begin{aligned}&=\left[-\overline{C}\quad \overline{C}_{\phi}\right]\cdot\begin{bmatrix}-D_x\overline{C}^T+D_{xx_{\phi}}\overline{C}_{\phi}^T\\ -D_{xx_{\phi}}\overline{C}^T+D_{x_{\phi}}\overline{C}_{\phi}^T\end{bmatrix}=\overline{C}D_x\overline{C}^T-\overline{C}D_{xx_{\phi}}\overline{C}_{\phi}^T-\overline{C}_{\phi}D_{xx_{\phi}}^T\overline{C}^T+\\ &+\overline{C}_{\phi}D_{x_{\phi}}\overline{C}_{\phi}^T=D_{\xi}+D_y-\overline{C}D_{xx_{\phi}}\overline{C}_{\phi}^T-\overline{C}_{\phi}D_{xx_{\phi}}^T\overline{C}^T.\end{aligned}\right\} \qquad (7.39)$$

Таким образом, поставленная задача вычисления матриц дисперсий переменных системы (7.31) при экзогенном «окрашенном» стохастическом воздействии решена в двух формах. Первая форма представлена системой матричных соотношений (7.35) и (7.37), которая характеризуется высокой размерностью матричных компонентов матричного уравнения Ляпунова (7.35). Вторая форма представлена система матричных соотношений (7.38) и (7.39), она характеризуется необходимостью решения системы из трех матричных уравнений Ляпунова существенно меньших по размерности уравнения Ляпунова (7.35). В связи со сказанным предпочтение следует отдать второй форме решения задачи формирования дисперсий переменных системы (7.31) при стохастическом экзогенном воздействии «окрашенного» типа. Следует заметить, что в случае численного решения задачи, когда необходимость в получении аналитических представлений матриц дисперсий отсутствует, можно воспользоваться функцией «*dlyap*(*)» в пакете Matlab.

Вычисление корреляционных матриц (функций) по состоянию и выходу при переходе от «белого шума» к «окрашенному» не претерпевают изменений в аналитических представлениях и осуществляются в полном соответствии с выражениями (5.13)–(5.16) но применительно к агрегированной системе (7.33), (7.34) в форме

$$R_x(\nu)=M\left\{x(k+\nu)x^T(k)\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}_x\tilde{x}(k+\nu)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}_x^T\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}_x\widetilde{\overline{F}}^{\nu}\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}_x^T\right\}=$$
$$=\widetilde{\overline{C}}_x\widetilde{\overline{F}}^{\nu}\tilde{D}_x\widetilde{\overline{C}}_x^T\ ,\nu\geq 0 \qquad (7.40)$$

$$R_x(\nu)=M\left\{x(k-\nu)x^T(k)\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}_x\tilde{x}(k-\nu)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}_x^T\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}_x\widetilde{\overline{F}}^{-\nu}\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}_x^T\right\}=$$
$$=\widetilde{\overline{C}}_x\widetilde{\overline{F}}^{-\nu}\tilde{D}_x\widetilde{\overline{C}}_x^T\ ,\nu\leq 0 \qquad (7.41)$$

$$R_y(\nu)=M\left\{y(k+\nu)y^T(k)\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}\tilde{x}(k+\nu)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}^T\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}\widetilde{\overline{F}}^{\nu}\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\widetilde{\overline{C}}^T\right\}=$$
$$=\widetilde{\overline{C}}\widetilde{\overline{F}}^{\nu}\tilde{D}_x\widetilde{\overline{C}}^T\ ,\nu\geq 0 \qquad (7.42)$$

$$R_y(\nu)=M\left\{y(k-\nu)y^T(k)\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}\tilde{x}(k-\nu)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}^T\right\}=M\left\{\widetilde{\overline{C}}\widetilde{\overline{F}}^{-\nu}\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)\widetilde{\overline{C}}^T\right\}=$$
$$=\widetilde{\overline{C}}\widetilde{\overline{F}}^{-\nu}\tilde{D}_x\widetilde{\overline{C}}^T\ ,\nu\leq 0 \qquad (7.43)$$

Такова же ситуация и с матрицами (функциями) спектральных плотностей вектора состояния и выхода, они вычисляются в полном соответствии с выражениями (5.26)–(5.27), но применительно к агрегированной системе (7.33), (7.34) в форме

$$\begin{aligned}\tilde{S}_x(\omega) &= 2\left(I - \tilde{\bar{F}}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I - 2\tilde{\bar{F}}\cos(\omega\Delta t) + \bar{F}^2\right\}^{-1}\tilde{D}_x,\\ S_y(\omega) &= 2\tilde{\bar{C}}\left(I - \tilde{\bar{F}}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I - 2\tilde{\bar{F}}\cos(\omega\Delta t) + \tilde{\bar{F}}^2\right\}^{-1}\tilde{D}_x\tilde{\bar{C}}^T.\end{aligned} \quad \blacksquare(7.44)$$

Примечание 7.1 (П7.1). В выражениях для матриц спектральных плотностей $\tilde{S}_x(\omega)$, $S_y(\omega)$, в формах (7.44) соответственно для ω следует иметь в виду ограничение $-\pi(\Delta t)^{-1} \le \omega \le \pi(\Delta t)^{-1}$.

Теперь для закрепления материала рассмотрим несколько наиболее характерных примеров.

В качестве **примера** рассмотрим систему первого порядка, возбуждаемую окрашенным дискретным стохастическим входным воздействием $\xi(k)$ типа «экспоненциально коррелированного» шума. Тогда будем иметь пару система (7.31) и ФФ (7.32):

$$x(k+1) = \bar{F}x(k) + \bar{G}g(k);\ x(0) = 0;\ y(k) = \bar{C}x(k);\ \varepsilon(k) = g(k) - y(k),$$

где $\bar{F} = \bar{\nu}, \bar{G} = (1-\bar{\nu}), \bar{C} = 1, \bar{\nu} = e^{-\nu\Delta t}$;

$$x_\phi(k+1) = \bar{F}_\phi x_\phi(k) + \bar{G}_\phi w(k);\ \ x_\phi(0) = 0;\ \xi(k) = \bar{C}_\phi x_\phi(k),$$

где $\bar{F}_\phi = \bar{\Omega}_a, \bar{G}_\phi = (1-\bar{\Omega}), \bar{C}_\phi = 1, \bar{\Omega}_a = e^{-\Omega_a\Delta t}$.

Требуется найти D_ξ, $D_x, D_y, D_\varepsilon, R_y(\nu)$, $S_y(\omega)$.

Решаем задачу на основании системы матричных уравнений (7.38).

Решение уравнения $D_{x_\phi} - \bar{F}_\phi D_{x_\phi} F_\phi^T = \bar{G}_\Phi V \bar{G}_\phi^T$ дает

$$D_{x_\phi} - \bar{\Omega}_a D_{x_\phi}\bar{\Omega}_a = (1-\bar{\Omega}_a)V(1-\bar{\Omega}_a) \Rightarrow D_{x_\phi} = \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)}V.$$

Решение уравнения $D_{xx_\phi} - \bar{F}D_{xx_\phi}\bar{F}_\phi^T = \bar{G}\bar{C}_\phi D_{x_\phi}\bar{F}_\phi^T$ где $D_{xx_\phi} = M\left\{xx_\phi^T\right\}$ дает

$$D_{xx_\phi} - \bar{v} D_{xx_\phi} \bar{\Omega}_a = (1-\bar{v}) \cdot 1 \cdot \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} V \bar{\Omega}_a \Rightarrow D_{xx_\phi} = V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \frac{(1-\bar{v})\bar{\Omega}_a}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)}. \quad (7.45)$$

Решение уравнения $D_x - \bar{F} D_x \bar{F}^T = \bar{G}\bar{C}_\phi D^T_{xx_\phi} \bar{F}^T + \bar{F} D_{xx_\phi} \bar{C}^T_\phi \bar{G}^T + \bar{G}\bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{C}^T_\phi \bar{G}^T$

$$\begin{aligned} &D_x - \bar{v} D_x \bar{v} = 2(1-\bar{v}) V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \frac{(1-\bar{v})\bar{\Omega}_a}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)} \bar{v} + (1-\bar{v})^2 V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)}; \\ &D_x = V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \frac{(1-\bar{v})}{(1+\bar{v})} \frac{(1+\bar{\Omega}_a \bar{v})}{(1-\bar{\Omega}_a \bar{v})}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Откуда для дисперсий D_y выхода $y(t)$ и D_ε ошибки $\varepsilon(t)$ будем иметь в силу (7.39)

$$\left.\begin{aligned} &D_y = \bar{C} D_x \bar{C}^T = 1 \cdot D_x \cdot 1 = V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \frac{(1-\bar{v})}{(1+\bar{v})} \frac{(1+\bar{v}\bar{\Omega}_a)}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)}; \\ &D_\xi = \bar{C}_\phi D_{x_\phi} \bar{C}^T_\phi = 1 \cdot D_{x_\phi} \cdot 1 = V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)}; D_\varepsilon = D_\xi + D_y - \bar{C} D_{xx_\phi} \bar{C}^T_\phi - \\ &- \bar{C}_\phi D^T_{xx_\phi} \bar{C}^T = V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \left\{ 1 + \frac{(1-\bar{v})}{(1+\bar{v})} \frac{(1+\bar{v}\bar{\Omega}_a)}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)} - 2 \frac{(1-\bar{v})\bar{\Omega}_a}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)} \right\} = \\ &= 2V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{v})(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)}. \end{aligned}\right\} \quad (7.47)$$

Вычисление корреляционной функции $R_y(\nu)$ надо осуществлять с помощью выражения (7.42) так, что $R_y(\nu)$ формируется в силу представления

$$\left.\begin{aligned} &R_y(\nu) = \tilde{\bar{C}} \tilde{\bar{F}}^\nu \tilde{D}_x \tilde{C}^T = V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} & 1-\bar{v} \\ 0 & \bar{\Omega}_a \end{bmatrix}^\nu \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{(1-\bar{v})}{(1+\bar{v})} \dfrac{(1+\bar{\Omega}_a \bar{v})}{(1-\bar{\Omega}_a \bar{v})} & \bullet \\ \dfrac{(1-\bar{v})\bar{\Omega}_a}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)} & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= V \frac{(1-\bar{\Omega}_a)}{(1+\bar{\Omega}_a)} \cdot \frac{(1-\bar{v})}{(1-\bar{v}\bar{\Omega}_a)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v} & 1-\bar{v} \\ 0 & \bar{\Omega}_a \end{bmatrix}^\nu \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{(1+\bar{\Omega}_a \bar{v})}{(1+\bar{v})} \\ \bar{\Omega}_a \end{bmatrix} \cdot \end{aligned}\right\} \quad (7.48)$$

Вычисление функции $\bar{S}_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы выполним с использованием (7.44)

$$S_y(\omega) = 2\tilde{\tilde{C}}\left(I - \tilde{\tilde{F}}\cos(\omega\Delta t)\right)\cdot\left\{I - 2\tilde{\tilde{F}}\cos(\omega\Delta t) + \tilde{\tilde{F}}^2\right\}^{-1}\tilde{D}_x\tilde{\tilde{C}}^T =$$

$$= 2V\frac{(1-\overline{\Omega}_a)}{(1+\overline{\Omega}_a)}\cdot\frac{(1-\bar{v})}{(1-\bar{v}\overline{\Omega}_a)}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-\bar{v}\cos(\omega\Delta t) & (\bar{v}-1)\cos(\omega\Delta t)\\ 0 & 1-\overline{\Omega}_a\cos(\omega\Delta t)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1-2\bar{v}\cos(\omega\Delta t)+\bar{v}^2 & (1-\bar{v})(\bar{v}+\overline{\Omega}_a)-2(1-\bar{v})\cos(\omega\Delta t)\\ 0 & 1-2\overline{\Omega}_a\cos(\omega\Delta t)+\overline{\Omega}_a^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(1+\overline{\Omega}_a\bar{v})\\ (1+\bar{v})\\ \overline{\Omega}_a\end{bmatrix}.\blacksquare \quad (7.49)$$

Контрольные вопросы

1.Уравнение Ляпунова для вычисления матрицы дисперсий вектора состояние непрерывной системы получено для случая ее возбуждения непрерывным «белым шумом» каким способом достигается возможность его использования для тех же целей для случая возбуждения системы «окрашенным шумом»?

2.Сколько существует способов вычисления матрицы дисперсий вектора состояний непрерывной системы с использованием матричного уравнения Ляпунова при ее возбуждении «окрашенным шумом»?

3.Как вычисляется корреляционная матрицы вектора выхода непрерывной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом»?

4. Как вычисляется матрицы спектральной плотности вектора выхода непрерывной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом»?

5.Как вычисляется матрица дисперсий вектора ошибки непрерывной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом»?

6.Как выглядит аналитическое условие достижения нулевой матрицы дисперсии вектора ошибки непрерывной системы, возбуждаемой «окрашенным шумом»?

7.Как вычисляется функция спектральной плотности выхода непрерывной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом» в случае задания системы и формирующего фильтра с помощью передаточных функций?

8. Как вычислить дисперсию выхода непрерывной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом» по его функции спектральной плотности?

9.Уравнение Ляпунова для вычисления матрицы дисперсий вектора состояние дискретной системы получено для случая ее возбуждения дискретным «белым шумом», каким способом достигается возможность его использования для тех же целей для случая возбуждения системы «окрашенным шумом»?

10.Сколько существует способов вычисления матрицы дисперсий вектора состояний дискретной системы с использованием матричного уравнения Ляпунова при ее возбуждении дискретным «окрашенным шумом»?

11.Как вычисляется корреляционная матрицы вектора выхода дискретной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом»?

12.Как вычисляется матрицы спектральной плотности вектора выхода дискретной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом»?

13.Как вычисляется матрица дисперсий вектора ошибки дискретной системы при возбуждении ее «окрашенным шумом»?

14.Как выглядит аналитическое условие достижения нулевой матрицы дисперсии вектора ошибки дискретной системы, возбуждаемой «окрашенным шумом»?

15.Для какого диапазона частот справедливы представления (7.44) для матриц и функций $\tilde{S}_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ спектральных плотностей векторов состояния и выхода дискретной системы, возбуждаемой дискретным «окрашенным шумом»?

8. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Известно, что компьютерное исследование спроектированных непрерывных систем с целью оценки их показателей качества при конечномерных экзогенных воздействиях не встречает аппаратных трудностей, потому что источники непрерывных конечномерных экзогенных воздействий воспроизводимы в модельных компьютерных средах. Ситуация заметно меняется, когда встает задача исследования непрерывных систем при бесконечномерных воздействиях типа $\delta-$функция Дирака $\delta(t)$ или стохастическом непрерывном «белом шуме» $w(t)$, которые являются физически невоспроизводимыми даже в модельных компьютерных средах. Причиной тому является то, что $\delta-$функция Дирака $\delta(t)$ обладает бесконечной амплитудой, а непрерывный «белый шум» $w(t)$ обладает бесконечной дисперсией. Во втором случае выход из положения находится использованием дискретного «белого шума» $w(k)=w(t=k(\Delta t))$, который характеризуется дисперсией, равной конечной величине *V*. В этом случае приходится переходить к дискретным представлениям и формирующих фильтров и исследуемой системы в соответствии заменой непрерывного времени t на дискретное k в силу правила $t=k(\Delta t)$. При переходе от системного непрерывного представления к дискретному встают проблемы установления связи значения V дисперсии дискретного «белого шума» $w(k)$ с интенсивностью N непрерывного «белого шума» $w(t)$, а также установления эквивалентности дискретных и непрерывных стохастических процессов.

8.1 Связь параметров непрерывного и дискретного «белых шумов». Генераторы стохастического экзогенного воздействия типа дискретный «белый шум» в модельной среде Simulink

Решение проблем, вынесенных в заголовок параграфа, начнем с формулировки и доказательства утверждений.

Утверждение 8.1 (У8.1). Пусть непрерывный формирующий фильтр (ФФ) с фиксированными параметрами, возбуждаемый по входу стационарным в широком смысле стохастическим непрерывным воздействием $w(t)$ типа «белый шум» с нулевым средним значением $(M[w(t)]=0)$ и интенсивностью (матрицей интенсивности) *N*, формирующий на своем выходе стохастический стационарный в широком смысле процесс $\xi(t)$ типа «окрашенный шум» с дисперсией (матрицей дисперсий) D_ξ, имеет векторно-матричное описание вида (6.2)

$$\dot{x}_{\phi}(t) = F_{\phi} x_{\phi}(t) + G_{\phi} w(t)\ ; x_{\phi}(0) = 0\ ; \xi(t) = C_{\phi} z_{\phi}(t), \qquad (8.1)$$

для векторных компонентов которого справедливы соотношения

$$M[w(t)] = 0; M\left[w(t,\tau) w^{T}(t)\right] = N\,\delta(t,\tau); M\left[w(t) x_{\phi}^{T}(t)\right] = 0; M\left[x_{\phi}(t) w^{T}(t)\right] = 0, \qquad (8.2)$$

$$D_{x_{\phi}}(t) = M\left[x_{\phi}(t) x_{\phi}^{T}(t)\right];\ M\left[\xi(t)\xi^{T}(t)\right] = D_{\xi}(t); D_{\xi}(t) = C_{\phi} D_{x_{\phi}}(t) C_{\phi}^{T} \quad . \qquad (8.3)$$

Тогда для матрицы дисперсий $D_{x_{\phi}}(t)$ вектора состояния $x_{\phi}(t)$ как функция времени оказывается справедливым в силу (4.10) интегральное представление

$$D_{x_{\phi}}(t) = \int_{0}^{t} exp\left(F_{\phi}(t-\tau)\right) G_{\phi} N G_{\phi}^{T}\ exp\left(F_{\phi}^{T}(t-\tau)\right) d\tau, \qquad (8.4)$$

которое имеет дифференциальный матричный аналог вида (4.11)

$$\dot{D}_{x_{\phi}}(t) = F_{\phi} D_{x_{\phi}}(t) + D_{x_{\phi}}(t) F_{\phi}^{T} + G_{\phi} N G_{\phi}^{T};\ D_{x_{\phi}}(t)\Big|_{t=0} = D_{x_{\phi}}(0) = 0. \qquad (8.5)$$

При этом в случае гурвицевости матрицы F_{ϕ} решение матричного уравнения (8.5) имеет установившееся значение $D_{x_{\phi}}$, вычисляемое как решение алгебраического матричного уравнения типа уравнения Ляпунова вида (4.13)

$$F_{\Phi} D_{x_{\phi}} + D_{x_{\phi}} F_{\Phi}^{T} = -G_{\phi} N G_{\phi}^{T}. \qquad (8.6)$$

Доказательство утверждения приведено в разделе 4. ■

Теперь перейдем к дискретному случаю. Пусть из процессов непрерывного по переменным $x_{\phi}(t)$ и $\xi_{\phi}(t)$ формирующего фильтра (8.1) осуществляется дискретная по времени $t = k(\Delta t)$ с интервалом дискретности Δt выборка, так что сформированные дискретные стохастические процессы $x_{\phi}(k)$ и $\xi(k)$ получают векторно–матричное рекуррентное представление

$$x_{\phi}(k+1) = F_{\phi} x_{\phi}(k) + G_{\phi} w(k)\ ; x_{\phi}(0) = 0\ ; \xi(k) = C_{\phi} x_{\phi}(k), \qquad (8.7)$$

удовлетворяющее соотношению

$$\overline{F}_{\phi} = exp\left(F_{\phi}\Delta t\right),\ \overline{G}_{\phi} = F_{\phi}^{-1}\left(exp\left(F_{\phi}\Delta t\right) - I\right) G_{\phi},\ \overline{C}_{\phi} = C_{\phi}. \qquad (8.8)$$

Для векторных компонентов (8.7) справедливы соотношения

$$M[w(k)] = 0; M\left[w(k) w^{T}(k)\right] = V; M\left[w(k) x_{\phi}^{T}(k)\right] = 0; M\left[x_{\phi}(k) w^{T}(k)\right] = 0,$$

$$M\left[x_{\phi}(k) x_{\phi}^{T}(k)\right] = D_{x_{\phi}}(k);\ M\left[\xi(k)\xi^{T}(k)\right] = D_{\xi}(k); D_{\xi}(k) = \overline{C}_{\phi} D_{x_{\phi}}(k) \overline{C}_{\phi}^{T} \quad ,$$

где V – дисперсия (матрица дисперсий) дискретного «белого шума» $w(\kappa)$.

Определение 8.1 (О8.1). Два стохастических «окрашенных» процесса стационарных в широком смысле $\xi(t)$ и $\xi(k)$, один из которых $\xi(t)$ непрерывный и сформирован из непрерывного «белого шума»

$w(t)$ с помощью непрерывного формирующего фильтра (8.1), а второй из которых $\xi(k)$ дискретный и сформирован из дискретного «белого шума» $w(k)$ с помощью дискретного формирующего фильтра (8.7) с матричными компонентами, связанными с матричными компонентами непрерывного ФФ соотношениями (8.8), будем называть эквивалентными, если оказываются совпадающими моменты этих процессов всех порядков.

Примечание 8.1(П8.1). В связи с тем, что для векторных стохастических переменных моменты выше второго порядка не определены эквивалентировать стохастические переменные будем по первым двум моментам, то есть использовать эквивалентность в смысле равенства первых двух моментов.

Поставим и решим задачу: при каком значении дисперсии (матрицы дисперсий) V дискретного «белого шума» $w(k)$ стохастические процессы $\xi(t)$ и $\xi(k)$ стационарные в широком смысле оказываются эквивалентными в смысле первых двух моментом?

Решение задачи сформулируем с помощью утверждения.

Утверждение 8.2 (У8.2). Для того чтобы стохастические процессы $\xi(t)$ и $\xi(k)$, формируемые соответственно ФФ (8.1) и (8.7) были эквивалентными в смысле первых двух моментом необходимо, чтобы дисперсия (матрица дисперсий) V дискретного «белого шума» $\xi(k)$ удовлетворяла соотношению

$$V=\left(\overline{G}_{\phi}^{T}\overline{G}_{\phi}\right)^{-1}\overline{G}_{\phi}^{T}\ D_{x_{\phi}}(\Delta t)\,\overline{G}_{\phi}\left(\overline{G}_{\phi}^{T}\overline{G}_{\phi}\right)^{-1},\ \text{где}\ D_{x_{\phi}}(\Delta t)=D_{x_{\phi}}(t)\Big|_{t=\Delta t}. \quad (8.9)$$

Доказательство. Для доказательства сформируем аналитическое представление матрицы дисперсий $D_{x_{\phi}}(k+1)=M\left[x_{\phi}(k+1)x_{\phi}^{T}(k+1)\right]$. С этой целью на основании (8.7) сформируем представление для вектора – строки $x_{\phi}^{T}(k+1)$, которое записывается в форме

$$x_{\phi}^{T}(k+1)=\quad x_{\phi}^{T}(k)\,\overline{F}_{\phi}^{T}+w^{T}(k)\,\overline{G}_{\phi}^{T},\ z_{\phi}^{T}(0)=0;\xi_{\phi}^{T}(k)=z_{\phi}^{T}(k)\overline{C}_{\phi}^{T}. \quad (8.10)$$

Соотношение (8.10) позволяет для матрицы $D_{x_{\phi}}(k+1)$ записать

$$D_{x_{\phi}}(k+1)=M\left[x_{\phi}(k+1)x_{\phi}^{T}(k+1)\right]=M\left[\overline{F}_{\phi}x_{\phi}(k)x_{\phi}^{T}(k)\overline{F}_{\phi}^{T}\right]+M\left[\overline{G}_{\phi}w(k)w^{T}(k)\overline{G}_{\phi}^{T}\right]+$$

$$+M\left[\overline{F}_{\phi}x_{\phi}(k)w^{T}(k)\overline{G}_{\phi}^{T}\right]+M\left[\overline{G}_{\phi}w(k)x_{\phi}^{T}(k)\overline{F}_{\phi}^{T}\right]=\overline{F}_{\phi}D_{x_{\phi}}(k)\overline{F}_{\phi}^{T}+\overline{G}_{\phi}V\overline{G}_{\phi}^{T},D_{x_{\phi}}(0)=0.$$

Положим в рекуррентном соотношении для матриц дисперсий

$$D_{x_{\phi}}(k+1)=\overline{F}_{\phi}D_{x_{\phi}}(k)\overline{F}_{\phi}^{T}+\overline{G}_{\phi}V\overline{G}_{\phi}^{T}$$

$$k=0,\ D_{x_{\phi}}(0)=0,$$

тогда получим

$$D_{x_{\phi}}(1)=\overline{F}_{\phi}D_{x_{\phi}}(0)\overline{F}_{\phi}^{T}+\overline{G}_{\phi}V\overline{G}_{\phi}^{T}=\overline{G}_{\phi}V\overline{G}_{\phi}^{T},$$

где $D_{x_\phi}(1) = D_{x_\phi}(1\Delta t) = D_{x_\phi}(\Delta t)$.

Умножим матричное соотношение $D_{x_\phi}(\Delta t) = \overline{G}_\phi V \overline{G}_\phi^T$ слева на $\overline{G}_\phi^T$, а справа на $\overline{G}_\phi$, и разрешим полученное матричное равенство $\overline{G}_\phi^T D_{x_\phi}(\Delta t)\overline{G}_\phi = \overline{G}_\phi^T \overline{G}_\phi V \overline{G}_\phi^T \overline{G}_\phi$ относительно искомой дисперсии (матрицы дисперсий) V, что в итоге приводит к (8.9). ■

Примечание 8.2 (П8.2). Нетрудно видеть, что матрица дисперсий $D_{x_\phi}(\Delta t)$ может быть вычислена с помощью (8.4), если положить $t = \Delta t$, что даст для нее представление

$$D_{x_\phi}(\Delta t) = e^{F_\phi \Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-F_\phi \tau} G_\phi N G_\phi^T e^{-F_\phi^T \tau} d\tau\, e^{F_\phi^T \Delta t}. \qquad (8.11)$$

Воспользуемся положениями доказанных утверждений, для формирования параметров скалярного эквивалентного дискретного «белого шума» $w(k)$ на основе интенсивности N скалярного непрерывного «белого шума» и эффективной полосы Ω_a пропускания непрерывного ФФ, формирующего на своем выходе окрашенный стохастический процесс $\xi(t)$ типа «экспоненциально коррелированный шум»и интервала дискретности Δt.

Решение задачи для случая ФФ, на выходе которого формируется окрашенный стохастический процесс $\xi(t)$ типа «экспоненциально коррелированный шум» принимает вид:

1. Представление матричных компонентов исходного непрерывного ФФ в виде

$F_\phi = [-\Omega_a]$; $G_\phi = [\Omega_a]$; $C_\phi = [1]$. (8.12)

2. Представление матричных компонентов дискретного ФФ при заданном Δt с помощью (8.8) в виде

$\overline{F}_\phi = \exp(-\Omega_a \Delta t)$; $\overline{G}_\phi = 1 - \exp(-\Omega_a \Delta t)$; $C_\phi = [1]$, (8.13)

3. Вычисление значения дисперсии $D_{x_\phi}(\Delta t)$ с помощью (8.4),(8.11)

$$D_{x_\phi}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} exp(-\Omega_a(\Delta t - \tau))\Omega_a N \Omega_a\, exp(-\Omega_a(\Delta t - \tau))d\tau =$$

$$= N\Omega_a^2\, exp(-2\Omega_a \Delta t)\int_0^{\Delta t} exp(2\Omega_a \tau)d\tau = \frac{N\Omega_a}{2}(1 - exp(-2\Omega_a \Delta t)). \qquad (8.14)$$

4. Вычисление значения дисперсии V дискретного «белого шума» с помощью соотношений (8.9) и (8.14), которое для случая ФФ, формирующего окрашенный стохастический процесс типа «экспоненциально коррелированный шум», принимает вид

$$V = \frac{N\Omega_a}{2}\frac{(1+exp(-\Omega_a\Delta t))}{(1-exp(-\Omega_a\Delta t))}. \qquad (8.15)$$

Из последнего выражения нетрудно видеть, что при $\Delta t \to 0$ значение V стремится к бесконечности, т. е. скалярный дискретный «белый шум» по своим свойствам приближается к непрерывному.

В таблице 8.1 приведены значения дисперсии V (8.15) в функции от длительности интервала дискретности Δt при параметрах непрерывного ФФ $N = 10(*)^2 c, \Omega_a = 5c^{-1}$.

Таблица 8.1

$\Delta t\, c$	0.001	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$V(*)^2$	9999	5000	2500	1667	1250	1000	500	250	168	125	100

Обнаружилось выполнение равенства: $N = V \cdot \Delta t\ (*)^2 c$ (8.16)

Таким образом, дисперсия V дискретного «белого шума» $w(k)$ на входе дискретного ФФ существенно зависит от интервала дискретности, к этому обстоятельству надо быть очень внимательным при дискретном моделировании непрерывных систем: если в процессе эксперимента возникает необходимость изменить интервал дискретности, то следует пересчитать все матрицы дискретного представления непрерывной системы и ФФ, а также дисперсию V.

При моделировании скалярного стохастического дискретного процесса типа «белый шум» с дисперсией V в программной оболочке MATLAB с помощью генераторов случайных чисел возникает задача определения коэффициента нормирования $k_н$, доставляющего требуемое значение дисперсии V моделируемому дискретному ФФ.

При решении данной задачи можно ограничиться случаями двух наиболее распространённых генераторов случайных чисел: с равномерным и нормальным распределениями формируемых случайных чисел. Если выход генератора случайных чисел обозначить $\zeta_{ген}$, то базовое выражение для вычисления коэффициента $k_н$, примет вид

$$k_н^2 D_{\zeta ген} = V, \qquad (8.17)$$

где $D_{\zeta ген}$ — дисперсия дискретного белого шума на выходе генератора случайных чисел.

Для случая использования генератора (Uniform Random Number в модельной оболочке Simulink пакета Matlab) равномерно распределенных случайных чисел в интервале [–a , a] $k_н$ вычисляется в силу соотношения

$$k_н = \left(\frac{V}{D_{\zeta ген}}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{a} V^{1/2}. \qquad (8.18)$$

При использовании генератора (Random Number в модельной оболочке Simulink пакета Matlab) нормально распределенных случайных чисел с параметром $\sigma_{\text{ген}} = \left(\mathrm{D}_{\zeta\text{ген}} = var\,iance\right)^{1/2}$ значение коэффициента $k_н$, определяется выражением

$$k_н = \frac{1}{\sigma_{\text{ген}}} V^{1/2}. \tag{8.19}$$

При моделировании экспоненциально коррелированного окрашенного воздействия выход генератора *равномерно распределенных чисел* должен быть связан со входом дискретного ФФ через линейный блок с коэффициентом передачи

$$k_н = \frac{\sqrt{3}}{a}\left(\frac{N\Omega_{\text{ф}}}{2}\cdot\frac{1+\exp\left(-\Omega_{\text{ф}}\Delta t\right)}{1-\exp\left(-\Omega_{\text{ф}}\Delta t\right)}\right)^{1/2}; \tag{8.20}$$

для случая генератора *нормально распределенных случайных чисел* этот коэффициент приобретает значение

$$k_н = \frac{1}{\sigma_{ген}}\left(\frac{N\Omega_{\text{ф}}}{2}\cdot\frac{1+\exp\left(-\Omega_{\text{ф}}\Delta t\right)}{1-\exp\left(-\Omega_{\text{ф}}\Delta t\right)}\right)^{1/2}. \tag{8.21}$$

8.2. **Алгоритм компьютерного экспериментального исследования в оболочке Simulink линейной стационарной непрерывной системы при «окрашенном» дискретном экзогенном воздействии эквивалентном непрерывному**

Рассматривается спроектированная непрерывная система типа «одномерный вход–одномерный выход» (ОВОВ), передаточная функция (ПФ) «вход–выход» которой имеет вид

$$\Phi\left(s,\omega_0\right) = \frac{y(s)}{g(s)} = \frac{v_n\omega_0^n}{s^n + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i\omega_0^i s^{n-i}}, \tag{8.22}$$

в которой v_i – коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции, задающие характер локализации корней этого полинома на комплексной плоскости $\left(i=\overline{1,n}\right)$, ω_0 – характеристическая частота, задающая размер локализации, выбором характеристической частоты ω_0 назначаются на основе компромисса всех требуемых показателей системы.

Векторно–матричное представление системы (8.22) имеет вид (4.1)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0) = x(t)\big|_{t=0}, y(t) = Cx(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \tag{8.23}$$

в которой x, g, y, ε – соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; F, G, C – соответственно матрицы

состояния, входа и выхода; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются вещественнозначными и обладают размерностями $dim(x)=n, dim(g)=dim(y)=dim(\varepsilon)=m; dim(F)=n\times n,$ $dim(G)=n\times m, dim(C)=m\times n.$ В рассматриваемой системе (8.23)– типа $n=2,\ m=1,\ g(t)=\xi(t)$ – экспоненциально коррелированное окрашенное стохастическое экзогенное воздействие. Система (8.22),(8.23) спроектирована на следующие технические требования:

1.Дисперсия стохастического экзогенного воздействия $\xi(t)$: $D_\xi = 10(*)^2$;

2. Стохастического воздействия $\xi(t)$ формируется ФФ с : $\Omega_a = 2c^{-1}$;

3.Дисперсия D_ε ошибки слежения за $\xi(t)$: $D_\varepsilon \le 1(*)^2$;

4.Перерегулирование переходной характеристики нулевое: $\sigma = 0\%$.

В результате передаточная функция (8.22) имеет характеристическую частоту $\omega_0 = 50c^{-1}$, полином знаменателя с распределением корней Ньютона так, что ПФ (8.22) получает представление

$$\Phi(s,\omega_0)=\frac{2500}{s^2+100s+2500}\ , \qquad (8.24)$$

позволяющее матрицы модели (8.23) системы записать в форме

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2500 & -100\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}0\\ 2500\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}. \qquad (8.25)$$

Ставится задача комплексного компьютерного моделирования системы (8.24), (8.25) в дискретной среде оболочки Simulink пакета Matlab на предмет оценки соответствия показателей качества спроектированной системы техническим требования.

Формирование дискретной среды моделирования осуществим в соответствии с алгоритмом:

1.Выбрать интервал дискретности Δt в соответствии с теоремой Котельникова–Шеннона–Найквиста из условия $\Delta t \le \pi/(\Delta\omega)$, где $\Delta\omega$– полоса пропускания системы с распределением Ньютона корней полинома знаменателя ПФ на уровне $|\Phi(j\omega,\omega_0)|$, задаваемая в форме

$\Delta\omega = \min\limits_{\omega}\{|\Phi(j\omega,\omega_0)| \le 0.05\} = 5\cdot\omega_0 = 250c^{-1}$, что позволяет выбрать

$\Delta t = 0.002c \le \pi/(\Delta\omega) = \pi/\left(250c^{-1}\right) = 0.01256c$.

2.С помощью процедуры «c2d» пакета Matlab в форме $[\overline{F},\overline{G}] = \text{c2d}(F,G,\Delta t), \overline{C}=C$ построить дискретный аналог системы (8.23) $x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}\xi(k), y(k)=\overline{C}x(k); \varepsilon(k)=\xi(k)-y(k)$ с матричными компонентами

$$\overline{F}=\begin{bmatrix}0.9953 & 0.0018\\ -4.5242 & 0.8144\end{bmatrix}, \overline{G}=\begin{bmatrix}0.0047\\ 4.5242\end{bmatrix}, \overline{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

3.Оценить значения N интенсивности невоспроизводимого непрерывного белого шума $w(t)$ в силу соотношения

$$N = arg\left\{ D_\xi = \frac{N\Omega_a}{2} \Rightarrow 10 = \frac{N2}{2} \right\} = 10(*)^2 c.$$

4.Оценить значения V дисперсии дискретного «белого шума» $w(k)$ в силу соотношения $V = arg\{N = V \cdot (\Delta t) \Rightarrow 10 = V \cdot 0.002\} = 5000(*)^2$.

5. С помощью процедуры «c2d» пакета Matlab в форме $\left[\overline{F}_\phi, \overline{G}_\phi\right] = \text{c2d}(F_\phi, G_\phi, \Delta t), \overline{C} = C$, где $F_\phi = [-\Omega_a] = [-2], G_\phi = [\Omega_a] = [2]$ построить дискретный аналог формирующего фильтра $x_\phi(k+1) = \overline{F}_\phi x_\phi(k) + \overline{G}_\phi w(k), \xi(k) = \overline{C}_\phi x(k)$c матричными компонентами $\overline{F}_\phi = [0.996], \overline{G}_\phi = [0.004], \overline{C}_\phi = [1].$

6.В качестве дискретного генератора белого шума $w(k)$ в библиотеке функциональных компонентов модельной оболочки Simulink на вкладке «Sources» выбрать генератор случайных чисел с нормальным распределением «Random Number», придав его параметрам значения: Mean=0, Variance=5000, Sample time=0.002.

7. В библиотеке функциональных компонентов модельной оболочки Simulink на вкладке «Discrete» выбрать два блока представления дискретных систем в векторно–матричной форме «Discrete State-Space», в один из которых вписать матрицы дискретного представления ФФ, а в другой матрицы дискретного представления исследуемой системы, в обоих блоках положить Sample time=0.002.

8. В библиотеке функциональных компонентов модельной оболочки Simulink на вкладке «Commonly Used Blocks» выбрать четыре блока «Scope» для визуализации стохастических процессов и блок «Sum» для формирования сигнала ошибки в системе

9.Выбранные в библиотеке функциональных компонентов модельной оболочки Simulink блоки соединить по схеме рис.8.1.

10.Зафиксировать кривые реализаций стохастических процессов: дискретного «белого шума» $w(k)$ рис.8.2, дискретного «окрашенного шума» $\xi(k)$ рис.8.3 на выходе ФФ-входе исследуемой системы, выхода $y(k)$ рис.8.4 и ошибки $\varepsilon(k) = \xi(k) - y(k)$рис.8.5.

11.Обработать полученные реализации с целью оценки значения среднеквадратического отклонения $\sigma_{(*)}$ и дисперсии $D_{(*)} = \sigma^2_{(*)}$ от медианного значения исследуемого процесса, воспользовавшись правилом «3σ», справедливым для нормально распределенных стохастических процессов, путем фиксации $2\Delta_{(*)}$ ширины «окна», ограничивающего процесс сверху и снизу и вычисления $\sigma_{(*)}$ в силу соотношения $\sigma_{(*)} = 2\Delta_{(*)}/6$,что дает на основании:

реализации рис.8.2: $\sigma_w = \frac{426}{6} = 71 \Rightarrow D_w = \sigma_w^2 = 5041;$

реализации рис.8.3: $\sigma_\xi = \frac{18.6}{6} = 3.1 \Rightarrow D_\xi = \sigma_\xi^2 = 9.61;$

реализации рис.8.4: $\sigma_y = \frac{17.6}{6} = 2.933 \Rightarrow D_y = \sigma_y^2 = 8.602;$

реализации рис.8.5: $\sigma_\varepsilon = \frac{7.2}{6} = 1.2 \Rightarrow D_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 = 1.44.$

12.Необходимо увеличить характеристическую частоту ω_0.

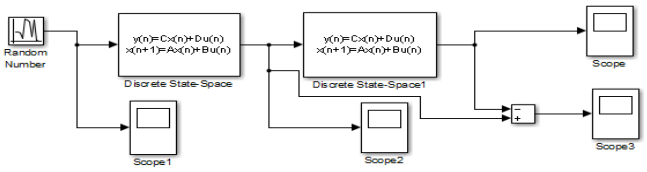


Рис.8.1

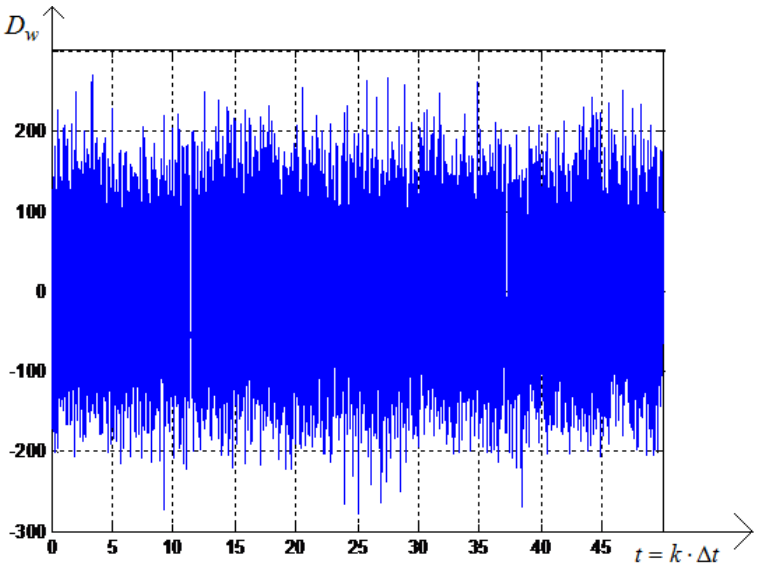


рис.8.2

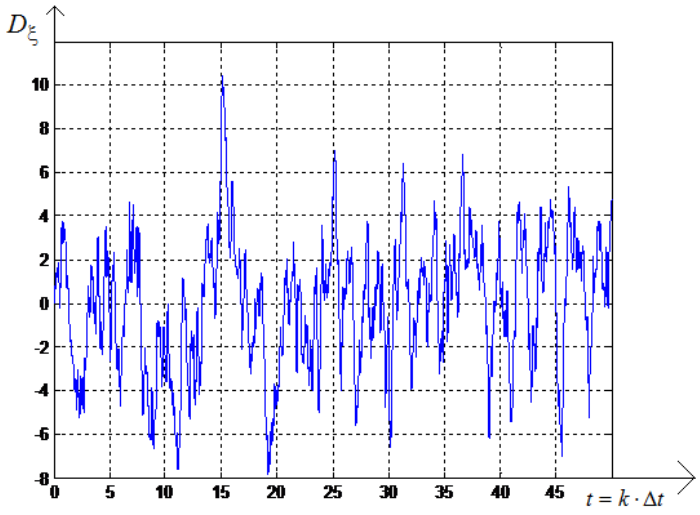


Рис.8.3

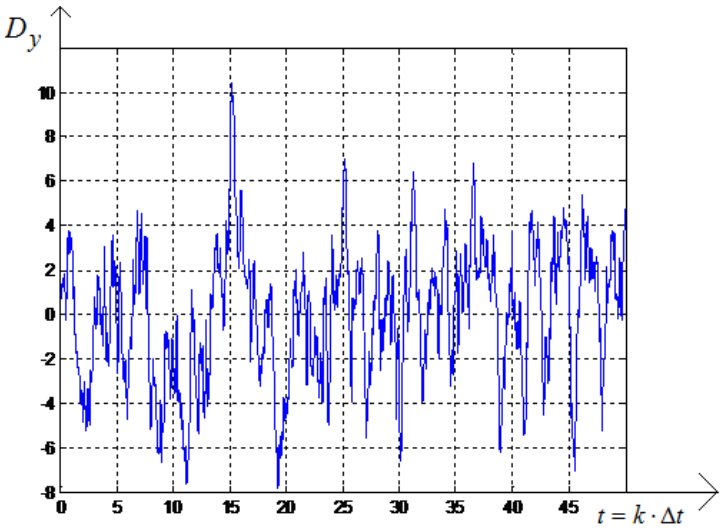


Рис.8.4

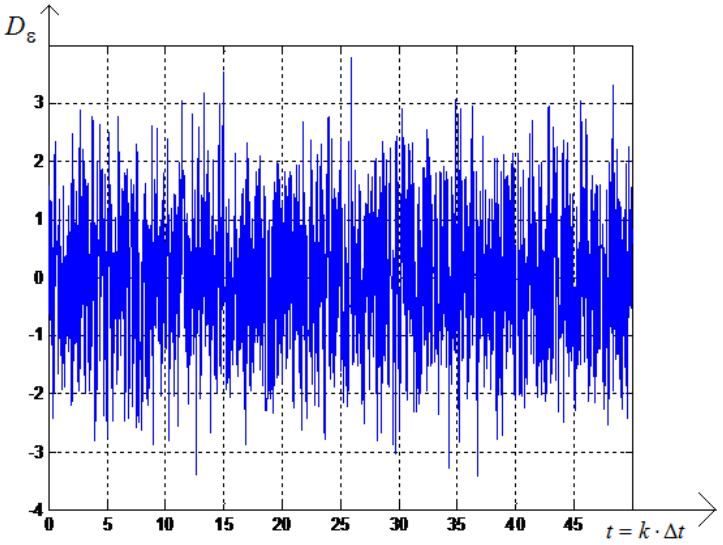


Рис.8.5

Контрольные вопросы

1.Почему исследование непрервыных систем возбуждаемых непрерывным «белым шумом» невозможно в существующих компьютерных модельных средах?
2.Как осуществляется переход от непрерывной системы к ее дискретному представлению при задании непрерывной системы в векторно-матричной форме метода пространства состояний?
3.Как осуществляется переход от непрерывной системы к ее дискретному представлению в форме передаточной функции при задании непрерывной системы также с помощью передаточной функции?
4.Зависят ли параметры дискретного представления ннепрерывной системы от интервала дискретности?
5.Как аналитически формируется значение интенсивности непрерывного «белого шума»?
6.Как аналитически можно сформировать значение интенсивности непрерывного «белого шума», располагая дисперсией «экспоненциально коррелированного» окрашенного шума?
7. Как аналитически можно сформировать значение интенсивности непрерывного «белого шума», располагая дисперсией окрашенного шума типа «нерегулярная качка»?
8.Как формируется дисперсия генератора дискретного «белого шума» на основании интенсивности непрерывного «белого шума» и интервала дискретности?
9.Изменится ли дисперсия на выходе генератора дискретного «белого шума», настроенного при одном интервале дискретности, в случае перехода к новому интервалу дискретности при фиксированной величине интенсивности непрерывного «белого шума»?
10.Как следует воспользоваться правилом «трех сигм» для оценки дисперсии исследуемого дискретного стохастического процесса?
11.Можно ли использовать правила «трех сигм» для обработке исследуемого дискретного процесса в случае использования в модельной среде генератора Uniform Random Number?
12.Каким правилом надо воспользоваться при обработке дискретного стохастического процесса в исследуемой системе, порожденного равномерно распределенным дискретным «белым шумом», с целью оценки дисперсии этого процесса?
13.Исследуется экспериментально модель системы (8.24), обработка реализации стохастического процесса ошибки которой дала значения большее, чем требуется, что нужно сделать с характеристической частотой модели (8.24), чтобы снизить дисперсию ошибки до нужного значения?

14. Исследуется экспериментально модель системы (8.24), обработка реализации стохастического процесса выхода которой дала значения большее, чем требуется, что нужно сделать с характеристической частотой модели (8.24), чтобы снизить дисперсию выхода до нужного значения?

15.Существует ли такое значение характеристической частоты модели (8.24) системы, при которой дисперсии ошибки и выхода одновременно были существенно ниже дисперсии окрашенного шума на ее входе?

9. СКАЛЯРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНЫХ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА МИНОРАНТНЫХ И МАЖОРАНТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Системы «одномерный вход – одномерный выход» (ОВОВ), которые доминируют в современной практике управления техническими объектами, приобщили специалистов по методам прикладного управления к скалярным визуализированным представлениям исследуемых процессов, их характеристик и пользовательских показателей. Это хорошо проиллюстрировано в предыдущих разделах пособий на примере реализций непрерывных и дискретных стохастических процессов, кривых спектральных плотностей и корреляционных функций. Ситуация существенно изменяется, когда специалистам по методам прикладного управления приходится иметь дело с векторными стохастическими процессами. Невольно возникает потребность в скаляризации векторных процессов. Скаляризация векторных процессов состоит в переходе от вектора к оценке размера вектора. Оценка размера вектора как индивидуального математического объекта осуществляется с использованием векторных норм. Если вектор получен в результате процедуры отображения одного пространства в другое с помощью линейного оператора (ЛО), то его размер может быть определен с помощью векторной нормы или с использованием сингулярного разложения матрицы ЛО. В случае использования аппарата векторных норм формируемая оценка размера вектора оказывается оценкой «сверху», т.е. его мажорантной оценкой. В случае использования сингулярного разложения матриц ЛО оценка размера вектора осуществляется и «снизу» и «сверху», т.е. в форме минорантной и мажорантной оценок размера вектора.

9.1. Сингулярное разложение матриц. Миноранты и мажоранты отображения векторов, принадлежащих сфере, с помощью линейного оператора

Сингулярное разложение матриц прочно вошло в практику специалистов по вычислительным процедурам и теории управления. Круг задач решаемых с помощью сингулярного разложения достаточно широк. В проблемно-ориентированном виде интерес представляет возможность использования сингулярного разложения для скаляризации векторных процессов, т.е. для построения оценок размера вектора.

Определение 9.1 (О.91) Сингулярным разложением $n \times n$ квадратной матрицы N, называется представление ее в форме

$$N = U\Sigma V^T, \tag{9.1}$$

где U – ортогональная $n \times n$ матрица, столбцы $U_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ которой образуют левый сингулярный базис так, что выполняются соотношения

$$U_i^T \times U_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow UU^T = U^T U = I; \tag{9.2}$$

V – ортогональная $n \times n$ матрица, столбцы $V_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ которой образуют правый сингулярный базис так, что выполняются соотношения вида

$$V_i^T \times V_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow VV^T = V^T V = I. \tag{9.3}$$

Σ диагональная матрица размерности $n \times n$ с сингулярными числами $\alpha_i > 0$ на главной диагонали, так что она принимает вид

$\Sigma = diag\{\alpha_i : i = \overline{1,n}\}.$ □

Утверждение 9.1 (У.91). Оказываются справедливыми следующие положения:

1. Столбцы U_i матрицы U являются собственными векторами матрицы NN^T так, что выполняется векторно–матричное соотношение

$$NN^T U_i = \mu_i U_i; i = \overline{1,n}; \tag{9.4}$$

где μ_i – собственное значение матрицы NN^T, вычисляемое в силу решения характеристического уравнения

$$det\left(\mu I - NN^T\right) = 0; \tag{9.5}$$

2. Столбцы V_j матрицы V являются собственными векторами матрицы $N^T N$ так, что выполняется векторно–матричное соотношение

$$N^T N V_j = \mu_j V_j; j = \overline{1,n}; \tag{9.6}$$

где μ_j – собственное значение матрицы $N^T N$, вычисляемое в силу решения характеристического уравнения

$$det\left(\mu I - N^T N\right) = 0; \tag{9.7}$$

3. Сингулярные числа α_i матрицы N вычисляются в силу соотношения

$$\alpha_i = \left|\mu_i^{1/2}\right|, i = \overline{1,n}. \tag{9.8}$$ □

Доказательство положения 1 утверждения 9.1 опирается на представление матрицы NN^T с использованием сингулярного

разложения (9.2) и свойства (9.3) матрицы V правого сингулярного базиса, в результате чего получим цепочку матричных соотношений

$$NN^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma I\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T. \quad (9.9)$$

Умножение крайних матричных элементов цепочки (9.9) на матрицу U справа с использованием ее свойства (9.2) приводит к матричному соотношению

$$NN^T U = U\Sigma^2. \quad (9.10)$$

Запишем (9.10) в матрично-векторной форме для чего правую матрицу U левой части и правую матрицу Σ^2 правой части представим в столбовых формах так, что соотношение примет вид

$$NN^T\left[U_1, U_2, ..., U_i, ...U_n\right] = U\left[\Sigma_1^2, \Sigma_2^2, ..., \Sigma_i^2, ...\Sigma_n^2\right]. \quad (9.11)$$

Выделим в левой и правой частях i-е столбцы U_i и Σ_{i}^2, для которых в силу (9.11) получим

$$NN^T U_i = U\Sigma_i^2 \,:\, i = \overline{1,n}. \quad (9.12)$$

Если учесть, что Σ_{i}^2 есть i–й столбец диагональной матрицы Σ^2, то он имеет вид $\Sigma_i^2 = \left[0_{1\times(\mathrm{i}-1)}\alpha_i^2 0_{1\times(n-i)}\right]^T$, подстановка которого в (9.12) приводит в силу соотношения (9.8) $\mu_i = \alpha_i^2$ к выражению (9.4) для вычисления собственного вектора U_i матрицы NN^T. Как следствие векторно-матричное соотношение для вычисления собственного вектора порождает характеристическое уравнение (9.5) для вычисления собственного значения

$$\mu_i = \alpha_i^2. \quad (9.13)$$

Для доказательства положения 2 утверждения 9.1 сформируем матрицу $N^{\mathrm{T}}N$ по той же схеме, что и формирование матрицы NN^T, воспользовавшись сингулярным разложением (9.1) и свойством (9.2) матрицы U левого сингулярного базиса, получим цепочку матричных соотношений

$$N^T N = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T. \quad (9.14)$$

Если теперь осуществить выкладки по схеме (9.10)–(9.12) применительно к (9.14) с точностью до замены матрицы U на матрицу V, а столбца U_{i} на столбец V_j с учетом представления $\Sigma_j^2 = \left[0_{1\times(i-1)}\,\alpha_j^2\,0_{1\times(n-i)}\right]^T$,то получим соотношение (9.6) для вычисления собственного вектора V_{j} матрицы $N^T N$, в котором $\mu_j = \alpha_j^2$. Как следствие векторно-матричное соотношение для вычисления

собственного вектора порождает характеристическое уравнение (9.7) для вычисления собственного значения

$$\mu_j = \alpha_j^2 . \qquad (9.15)$$

Доказательство положения 3 в форме (9.8) содержится в (9.13) и (9.15). ■

Примечание 9.1 (П.91) Доказательство утверждения 9.1 содержит положение, в соответствии с которым алгебраические спектры собственных значений матриц NN^T и $N^T N$ совпадают, т.е. выполняется равенство $\sigma\left(NN^T\right)=\sigma\left(N^T N\right)$, если матрица N квадратная. Если матрица N прямоугольная, то совпадают ненулевые собственные значения матриц NN^T и $N^T N$. ■

Остановимся на свойствах сингулярных чисел матрицы N.

Свойство 9.1 (Св.91) Сингулярные числа матрицы N не отрицательны так, что выполняется неравенство $\alpha_i > 0; i = \overline{1,n}$, при этом спектр $\sigma_\alpha(N) = \left\{\alpha_i; i = \overline{1,n}\right\}$ сингулярных чисел в основных программных оболочках формируется так, что $\alpha_1 = \max_i \left\{\alpha_i; i = \overline{1,n}\right\}$, $\alpha_n = \min_i \left\{\alpha_i; i = \overline{1,n}\right\}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \alpha_n$.

Свойство 9.2 (Св.92) Матрицы $N^T N$ и NN^T в силу соотношений (9.4) и (9.6) подобны так, что их характеристические полиномы совпадают

$$det\left(\mu I - NN^T\right) = det\left(\mu I - N^T N\right), \qquad (9.16)$$

а также совпадают остальные матричные инварианты этих матриц.

Свойство 9.3 (Св.93) Это свойство изложим в форме утверждения.

Утверждение 9.2 (У.92). Умножения матрицы N на ортогональную матрицу R справа так, что $\tilde{N} = NR$, и на ортогональную матрицу Q слева так, что $\tilde{\tilde{N}} = QN$, порождают матрицы, которые обладают тем же спектром сингулярных чисел, что и матрица N, так что выполняются условия

$$\sigma_\alpha\left\{\tilde{N}\right\} = \sigma_\alpha\left\{NR\right\} = \sigma_\alpha\left\{N\right\}; \quad \sigma_\alpha\left\{\tilde{\tilde{N}}\right\} = \sigma_\alpha\left\{QN\right\} = \sigma_\alpha\left\{N\right\}. \qquad \square(9.17)$$

Доказательство строится на использовании соотношения (9.12), факте ортогональности матриц $R = \arg\left\{RR^T = R^T R = I\right\}$ и $Q = \arg\left\{QQ^T = Q^T Q = I\right\}$ и доказательстве совпадения

характеристических полиномов матриц $\tilde{N}\tilde{N}^T$, $\tilde{\tilde{N}}^T\tilde{\tilde{N}}$ и $NN^T, N^T N$. Действительно,

$$det\left(\tilde{\mu}\, I - \tilde{N}\tilde{N}^T\right) = det\left(\tilde{\mu}\, I - NRR^T N^T\right) = det\left(\tilde{\mu}\, I - NN^T\right) \tag{9.18}$$

$$det\left(\tilde{\tilde{\mu}}\, I - \tilde{\tilde{N}}^T\tilde{\tilde{N}}\right) = det\left(\tilde{\tilde{\mu}}\, I - N^T Q^T QN\right) = det\left(\tilde{\tilde{\mu}}\, I - N^T N\right) \tag{9.19}$$

что влечет за собой цепочку равенств $\tilde{\mu}_i = \tilde{\tilde{\mu}}_i = \mu_i; i = \overline{1,n}$ и как следствие (9.17). ■

Свойство 9.4 (Св.94) Если матрица N диагональная $N = diag\left\{\lambda_i;\, i = \overline{1,n}\right\}$, то $\alpha_i = |\lambda_i|$, следовательно $\Sigma = diag\left\{\alpha_i = |\lambda_i|\right\}$.

Свойство 9.5 (Св.95) Это свойство изложим в форме утверждения.

Утверждение 9.3 (У.93). Если матрица N симметричная $N = N^T$, и характеризуется спектром собственных значений $\sigma\{N\} = \left\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\right\}$, то сингулярные числа α_i этой матрицы, удовлетворяют условию $\alpha_i = |\lambda_i|$, а следовательно $\Sigma = diag\left\{\alpha_i = |\lambda_i|\right\}$. □

Доказательство. Сформируем характеристический полином для матрицы NN^T, для которого в силу симметрии матрицы N оказывается справедливой цепочка равенств $det\left(\mu I - NN^T\right) = det\left(\mu I - N^2\right) = det\left(\mu I - f(N)\right)$. Матричная функция от матрицы $f(N) = N^2$ по свойству алгебраического спектра собственных значений матричной функции от матрицы имеет своими элементами функции от элементов алгебраического спектра исходной матрицы N, так что $\lambda_i\left(f(N) = N^2 = NN^T\right) = f(\lambda_i(N)) = \lambda_i^2$. Откуда следует равенство $\alpha_i = |\lambda_i|$. ■

Свойство 9.6 (Св.96) Это свойство также сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 9.4 (У.94). Сингулярное разложение $N^{-1} = U\left(N^{-1}\right)\sum\left(N^{-1}\right)V^T\left(N^{-1}\right)$ матрицы N^{-1} обратной N имеет своими сингулярными числами $\alpha_i\left(N^{-1}\right)$, числа обратные сингулярным числам $\alpha_i(N)$ матрицы N, при этом выполняется равенство

$$\alpha_i\left(N^{-1}\right) = \alpha_{n-i+1}^{-1}(N), i = \overline{1,n}, \tag{9.20}$$

левым сингулярным базисом $U\left(N^{-1}\right)$ является правый сингулярный базис матрицы N, так что выполняется равенство $U\left(N^{-1}\right) = V(N)$, а

правым сингулярным базисом $V\left(N^{-1}\right)$ левый сингулярный базис матрицы N, так что выполняется равенство $V\left(N^{-1}\right)=U(N)$. □

Доказательство. Согласно (9.1) матрица N представима сингулярным разложением $N=U(N)\Sigma(N)V^T(N)$. Применим к этому выражению процедуру обращения, тогда получим

$$N^{-1}=\left\{U(N)\Sigma(N)V^T(N)\right\}^{-1}=\left\{V^T(N)\right\}^{-1}\Sigma^{-1}(N)\left\{U(N)\right\}^{-1}. \quad (9.21)$$

В силу примечания 9.1 оказывается справедливым равенство

$$\left\{V^T(N)\right\}^{-1}=\left\{V^{-1}(N)\right\}^{-1}=V(N),\ \ \left\{U(N)\right\}^{-1}=U^T(N) \quad (9.22)$$

Подстановка (9.21) в (9.20) дает

$$N^{-1}=U\left(N^{-1}\right)\Sigma\left(N^{-1}\right)V^T\left(N^{-1}\right)=V(N)\Sigma^{-1}(N)U^T(N). \quad \blacksquare(9.23)$$

Свойство 9.7 (Св.97) И это свойство сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 9.5 (У.95) Спектральная норма $\|N\|_\lambda=\|N\|_2$ матрицы совпадает с максимальным сингулярным числом матрицы N, так что выполняется равенство

$$\|N\|_\lambda=\|N\|_2=\alpha_1(N) \quad \square(9.24)$$

Доказательство утверждения строится на определении спектральной нормы матрицы N в соответствии с которым

$$\|N\|_\lambda=\|N\|_2=\max_{\chi}\|N\chi\|/\|\chi\|. \quad (9.25)$$

Если в (9.24) положить, что $\chi\in S_\chi:\|\chi\|=c_\chi=const$ (здесь S_χ – n–мерная сфера), то выполняется равенство

$$\max_{\chi\in S_\chi}\|N\chi\|=\alpha_1(N)\|\chi\| \quad (9.26)$$

Подстановка (9.26) в (9.25) приводит к выполнению соотношения (9.24). ■

Свойство 9.8 (Св.98) Это свойство сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 9.6 (У.96) Спектральная норма $\left\|N^{-1}\right\|_\lambda=\left\|N^{-1}\right\|_2$ матрицы N^{-1} обратной матрице N определяется величиной обратной минимальному сингулярному числу $\alpha_n(N)$ матрицы N так, что выполняется равенство

$$\left\|N^{-1}\right\|_\lambda=\left\|N^{-1}\right\|_2=\alpha_n^{-1}(N) \quad \square(9.27)$$

Доказательство утверждения строится на определении спектральной нормы матрицы N^{-1} в соответствии с которым

$$\left\|N^{-1}\right\|_{\lambda}=\left\|N^{-1}\right\|_{2}=\max_{\eta}\left\|N^{-1}\eta\right\|/\left\|\eta\right\|. \qquad (9.28)$$

Если в (9.28) положить, что $\eta\in S_{\eta}:\left\|\eta\right\|=c_{\eta}=const$, то выполняется равенство

$$\max_{\eta\in S_{\eta}}\left\|N^{-1}\eta\right\|=\alpha_{1}\left(N^{-1}\right)\left\|\eta\right\|. \qquad (9.29)$$

Если воспользоваться выражением (9.20), то (9.29) можно записать в форме

$$\max_{\eta\in S_{\eta}}\left\|N^{-1}\eta\right\|=\alpha_{1}\left(N^{-1}\right)\left\|\eta\right\|=\alpha_{n}^{-1}\left(N\right)\left\|\eta\right\|. \qquad (9.30)$$

Подстановка (9.30) в (9.28) приводит к выполнению соотношения (9.27). ■

Перейдем к геометрической интерпретации содержания сингулярного разложения, для чего сформулируем утверждение

Утверждение 9.7 (У.97) Матрица N действует на элемент $V_{j}\left(j=\overline{1,n}\right)$ правого сингулярного базиса так, что он отображается в линейную оболочку, натянутую на элемент $U_{j}\left(j=\overline{1,n}\right)$ левого сингулярного базиса матрицы N, при этом выполняется векторно – матричное равенство

$$NV_{j}=\alpha_{j}U_{j}\,;\left(j=\overline{1,n}\right). \qquad \square(9.31)$$

Доказательство утверждения строится на сингулярном разложении (9.1) матрицы N, которое следует умножить справа на матрицу V правого сингулярного базиса, в результате чего получим матричное выражение

$$NV=U\Sigma. \qquad (9.32)$$

Запишем правые матрицы левой и правой частей матричного соотношения (9.32) в столбцовых формах, тогда получим

$$N\left[V_{1},V_{2},...,V_{j},...V_{m}\right]=U\left[\Sigma_{1},\Sigma_{2},...,\Sigma_{j},...\Sigma_{m}\right]. \qquad (9.33)$$

Выделим в левой и правой частях выражения (9.33) $j-$ е столбцы, тогда получим

$$NV_{j}=U\Sigma_{j}\,;\left(j=\overline{1,m}\right). \qquad (9.34)$$

С учетом вида столбца $\Sigma_{j}=\left[0_{1\times(i-1)}\alpha_{j}0_{1\times(m-i)}\right]^{\mathrm{T}}$ и матрицы U соотношение (9.34) сводится к (9.31). ■

Рассмотрим линейное отображение общего вида

$$\eta=N\chi. \qquad (9.35)$$

отображающее единичную сферу $S_\chi : \|\chi\| = 1$ в эллипсоид, максимальная полуось которого, совпадает с вектором $\eta = \alpha_1 U_1$, а минимальная – с вектором $\eta = \alpha_n U_n$. Действительно, разложим вектор χ по элементам правого сингулярного базиса, записав его в форме

$$\chi = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j V_j ; \gamma_j = arg\left\{ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^2 = 1 \right\}. \qquad (9.36)$$

Тогда подстановка (9.36) в (9.35) с учетом (9.5) приводит к результату

$$\eta = N\chi = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j N V_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_j U_j \Rightarrow \begin{cases} \eta = \alpha_1 U_1 \text{ при } \chi = V_1 \\ \eta = \alpha_n U_n \text{ при } \chi = V_n \end{cases}. \qquad (9.37)$$

Геометрическая интерпретация соотношения (9.37) приведена на рисунке 9.1.

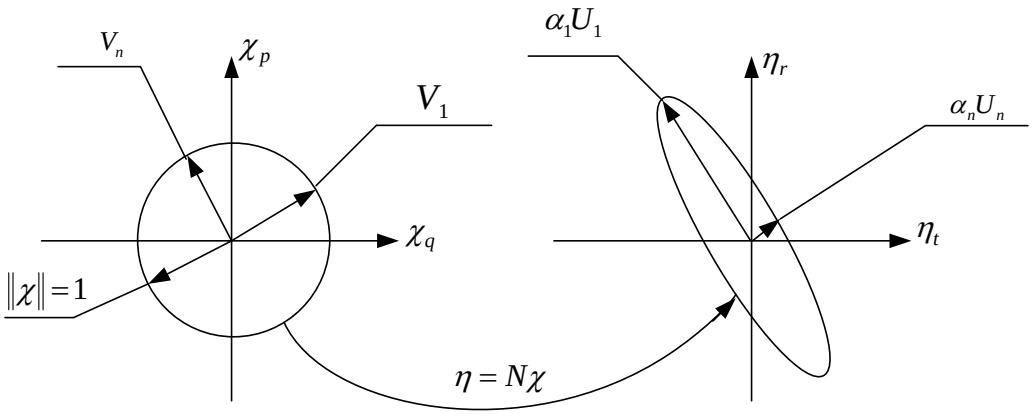


Рисунок 9.1. Геометрическая интерпретация выражения (9.37)

Положения, изложенные в параграфе 9.1, а также геометрическая интерпретация сингулярного разложения в форме рис.9.1 позволяют записать для нормы $\|\eta\| = \|N\chi\|$ систему неравенств

$$\alpha_n \|\chi\| \le \|\eta\| \le \alpha_1 \|\chi\|. \qquad (9.38)$$

Соотношение (9.38) можно представить в относительной форме

$$\alpha_n \le \|\eta\| / \|\chi\| \le \alpha_1. \qquad (9.39)$$

Выражения (9.38) и (9.39) представляют собой алгоритмическую основу для скаляризации векторных представлений с помощью сингулярного разложения матриц, которое порождает миноранту и мажоранту векторного представления, задаваемые соответственно левыми и правыми частями соотношений (9.38) и (9.39). Очевидно,

что если векторное представление задает векторный процесс, параметризованный временем t, так, что (9.35) записывается в форме

$$\eta(t) = N(t)\chi(0); \chi(0) = \chi(t)\big|_{t=0}, \qquad (9.40)$$

то соотношения (9.38), (9.39) принимают вид

$$\alpha_n(t)\|\chi(0)\| \le \|\eta(t)\| \le \alpha_1(t)\|\chi(0)\|, \ \alpha_n(t) \le \|\eta(t)\| / \|\chi(0)\| \le \alpha_1(t), \qquad (9.41)$$

где $\alpha_n(t)$, $\alpha_1(t)$, являясь соответственно минимальным и максимальным сингулярными числами матрицы $N(t)$ для $\forall t$, порождают динамические миноранту и мажоранту динамического процесса $\eta(t)$.

Завершим рассмотрение свойств сингулярного разложения матриц полезным для последующих параграфов примечанием.

Примечание 9.2 (П.92). Произвольная матрица N порождает линейную алгебраическую систему (ЛАС) вида (9.35), записываемую в форме (9.31).

В заключение заметим, что в англоязычной литературе сингулярное разложение матриц именуется SVD–процедурой. Во всех версиях пакета MATLAB существует функция SVD(N), которая выводит матричные компоненты факторизации (9.1).

9.2. Сингулярное разложение матриц дисперсий векторных переменных непрерывных и дискретных систем. Миноранты и мажоранты дисперсий стохастических векторных переменных непрерывной и дискретной системы

Рассматривается стационарная линейная непрерывная система типа «многомерный вход–многомерный выход» (MBMB), возбуждаемая стохастическим векторным воздействием, вида (4.2) и (7.2)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(0) = x(t)|_{t=0} = 0, \ y(t) = Cx(t); \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \qquad (9.42)$$

в которой x, g, y, ε – соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; F, G, C – соответственно матрицы состояния, входа и выхода; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются веществennозначными и обладают размерностями $dim(x) = n, dim(g) = dim(y) = dim(\varepsilon) = m; dim(F) = n \times n,$ $dim(G) = n \times m, dim(C) = m \times n.$ В случае, когда внешнее стохастическое воздействие представляет собой «белый шум» в (9.42) будем полагать выполнение равенства $g(t) = w(t)$, в случае, когда внешнее стохастическое воздействие представляет собой «окрашенный шум»,

то в (9.42) будем полагать выполнение равенства $g(t)=\xi(t)$. Большей математической общностью обладает ситуация «белого шума», поэтому проблему, вынесенную в заголовок параграфа, будем решать, полагая $g(t)=w(t)$, потому что в случае $g(t)=\xi(t)$ система (9.42) агрегированием с формирующим фильтром вида (7.2) приводится к виду

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}w(t),\tilde{x}(0)=\tilde{x}(t)|_{t=0}=0,\ y(t)=\tilde{C}\tilde{x}(t);\\ \varepsilon(t)=\xi(t)-y(t)=\tilde{C}_{\varepsilon}\tilde{x}(t)\end{array}\right\}. \qquad (9.43)$$

В системах МВМВ–типа вида (9.42), (9.43), характеризующихся $m-$мерными стохастическими процессами внешнего воздействия, выхода и ошибки возможны следующие постановки задач исследования дисперсий регулируемых переменных выхода и ошибки системы.

В случае $g(t)=w(t)$ исследованию подвергается система МВМВ–типа вида (9.42). В этом случае, как показано ранее дисперсия вектора ошибки является бесконечной и исследуется только дисперсия D_y вектора $y(t)$ выхода системы (9.42).При этом могут быть поставлены задачи:

Задача 9.1.2: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.42), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(t)$ с $l-$м входом системы $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы G входа вычленяется столбец G_l, а из матрицы C выхода вычленяется строка C^j так, что система (9.42) принимает вид

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+G_l w(t),x(0)=x(t)|_{t=0}=0,\ y_j(t)=C^j x(t)\ . \qquad (9.44)$$

При этом искомая дисперсия D_{yj} является скалярной и вычисляется с помощью матричных соотношений

$$FD_x+D_xF^T=-G_lN_lG_l^T,\ D_{yj}=C^jD_x\left(C^j\right)^T. \qquad (9.45)$$

Задача 9.2.2: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(t)$ системы (9.42) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы C выхода вычленяется строка C^j так, что система (9.42) для этой задачи принимает вид

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+Gw(t), x(0)=x(t)|_{t=0}=0,\ y_j(t)=C^j x(t)\ . \qquad (9.46)$$

При этом искомая дисперсия D_{yj} является скалярной и вычисляется с помощью матричных соотношений

$$FD_x+D_xF^T=-GNG^T,\ D_{yj}=C^jD_x\left(C^j\right)^T. \qquad (9.47)$$

Задача 9.3.2: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.42) при возбуждении системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы G входа вычленяется столбец G_l, так, что система (9.42) принимает вид

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+G_lw(t), x(0)=x(t)|_{t=0}=0,\ y(t)=Cx(t)\ . \qquad (9.48)$$

При этом искомая матрица дисперсий D_y вектора выхода вычисляется с помощью матричных соотношений

$$FD_x+D_xF^T=-G_lN_lG_l^T,\ D_y=CD_x(C)^T. \qquad (9.49)$$

Задача 9.4.2: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.42) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.42) которая сохраняется в первозданном виде. При этом искомая матрица дисперсий D_y вектора выхода вычисляется с помощью матричных соотношений

$$FD_x+D_xF^T=-GNG^T,\ D_y=CD_x(C)^T. \qquad (9.50)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.3.2 и 9.4.2 требуется применения к полученным в них матрицам дисперсии выхода процедуры сингулярного разложения матрицы дисперсий D_y вектора выхода. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m(D_y)=D_m(\|y\|)\le D(\|y\|)\le D_M(\|y\|)=\alpha_M(D_y), \qquad (9.51)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_y)=\sigma_m(\|y\|)\le D^{1/2}(\|y\|)=\sigma(\|y\|)\le\sigma_M(\|y\|)=\alpha_M^{1/2}(D_y). \qquad (9.52)$$

В неравенствах (9.51), (9.52) $\alpha_m(D_y),\alpha_M(D_y),$ $D(\|y\|),D_m(\|y\|),D_M(\|y\|)-$соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы дисперсии D_y вектора выхода системы

(9.42),именуемые минорантой и мажорантой дисперсии вектора выхода, дисперсия нормы вектора выхода, минимальное и максимальное значения дисперсии нормы вектора выхода; $\sigma(\|y\|),\sigma_m(\|y\|),\sigma_M(\|y\|)-$ соответственно среднеквадратические значения отклонения нормы стохастического вектора выхода системы от его математического ожидания, минимальное и максимальное среднеквадратические значения отклонения нормы стохастического вектора выхода системы от его математического ожидания, именуемые минорантой и мажорантой среднеквадратического отклонения стохастического вектора выхода.

В случае $g(t)=\xi(t)$ исследованию подвергается непрерывная система МВМВ–типа вида (9.43). В этом случае, как показано ранее дисперсия вектора ошибки становится конечной и потому исследуется как дисперсия D_y вектора $y(t)$ выхода системы, так и дисперсия D_ε вектора ошибки $\varepsilon(t)=\xi(t)-y(t)$ системы, возбуждаемой стохастическим воздействием типа «окрашенный шум. При этом факт агрегирования системы (9.42) с формирующим фильтром вида (7.2) приводит к тому, что агрегированная система (9.43) возбуждается «белым шумом», а потому задачи, перечисленные выше для случая внешнего стохастического воздействия типа «белый шум» $w(t)$, сохраняют свою формулировку, не смотря на то, что входы исследуемой системы (9.42) возбуждаются «окрашенным шумом» $\xi(t)$. Задачи дополнительно содержат возможность исследования дисперсии ошибки слежения.

Задача 9.5.2: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.43), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(t)$ и $j-$й элемент вектора ошибки системы $\varepsilon_j(t)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{G}$ входа вычленяется столбец $\tilde{G}_l$, а из матриц $\tilde{C},\tilde{C}_\varepsilon$ выхода и ошибки вычленяются строки $\tilde{C}^j$ и $\tilde{C}_\varepsilon^j$ так, что система (9.43) принимает вид

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}_l w(t), y_j(t)=\tilde{C}^j\tilde{x}(t), \varepsilon_j(t)=\tilde{C}_\varepsilon^j\tilde{x}(t)\ . \qquad (9.53)$$

При этом искомые дисперсии D_{yj} и $D_{\varepsilon j}$ являются скалярными и вычисляются с помощью матричных соотношений

$$\tilde{F}\tilde{D}_x+\tilde{D}_x\tilde{F}^T=-\tilde{G}_l N_l\tilde{G}_l^T\ , D_{yj}=\tilde{C}^j\tilde{D}_x\left(\tilde{C}^j\right)^T, D_{\varepsilon j}=\tilde{C}_\varepsilon^j\tilde{D}_x\left(\tilde{C}_\varepsilon^j\right)^T. \qquad (9.54)$$

Задача 9.6.2: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(t)$ и $j-$го элемента вектора ошибки $\varepsilon_j(t)$ системы (9.43) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.43), в которой из матриц $\tilde{C},\tilde{C}_\varepsilon$ выхода и ошибки вычленяются строки $\tilde{C}^j$ и $\tilde{C}_\varepsilon^j$ так, что система (9.43) для этой задачи принимает вид

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}w(t),y_j(t)=\tilde{C}^j\tilde{x}(t),\varepsilon_j(t)=\tilde{C}_\varepsilon^j\tilde{x}(t). \quad (9.55)$$

При этом искомые дисперсии D_{yj} и $D_{\varepsilon j}$ являются скалярными и вычисляется с помощью матричных соотношений

$$\tilde{F}\tilde{D}_x+\tilde{D}_x\tilde{F}^T=-\tilde{G}N\tilde{G}^T,\ D_{yj}=\tilde{C}^j\tilde{D}_x\left(\tilde{C}^j\right)^T,D_{\varepsilon j}=\tilde{C}_\varepsilon^j\tilde{D}_x\left(\tilde{C}_\varepsilon^j\right)^T. \quad (9.56)$$

Задача 9.7.2: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.43) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{G}$ входа вычленяется столбец $\tilde{G}_l$, так, что система (9.43) принимает вид

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}_l w(t),y(t)=\tilde{C}\tilde{x}(t),\varepsilon(t)=\tilde{C}_\varepsilon\tilde{x}(t). \quad . \quad (9.57)$$

При этом искомые матрицы дисперсий D_y вектора выхода и D_ε вектора ошибки вычисляется с помощью матричных соотношений

$$\tilde{F}\tilde{D}_x+\tilde{D}_x\tilde{F}^T=-\tilde{G}_l N_l\tilde{G}_l^T,\ D_y=\tilde{C}\tilde{D}_x\left(\tilde{C}\right)^T,\ D_\varepsilon=\tilde{C}_\varepsilon\tilde{D}_x\left(\tilde{C}_\varepsilon\right)^T. \quad (9.58)$$

Задача 9.8.2: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.43) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$.. Задача решается для системы (9.43) которая сохраняется в первозданном виде. При этом искомые матрицы дисперсий D_y вектора выхода и D_ε вектора ошибки вычисляется с помощью матричных соотношений

$$\tilde{F}\tilde{D}_x+\tilde{D}_x\tilde{F}^T=-\tilde{G}N\tilde{G}^T,\ D_y=\tilde{C}\tilde{D}_x\left(\tilde{C}\right)^T,\ D_\varepsilon=\tilde{C}_\varepsilon\tilde{D}_x\left(\tilde{C}_\varepsilon\right)^T. \quad (9.59)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.7.2 и 9.8.2 требуется применения к полученным в них матрицам дисперсии выхода и ошибки процедуры сингулярного

разложения матрицы дисперсий D_y вектора выхода и матрицы дисперсий D_ε вектора ошибки. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m(D_y) = D_m(\|y\|) \le D(\|y\|) \le D_M(\|y\|) = \alpha_M(D_y), \quad (9.60)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_y) = \sigma_m(\|y\|) \le D^{1/2}(\|y\|) = \sigma(\|y\|) \le \sigma_M(\|y\|) = \alpha_M^{1/2}(D_y). \quad (9.61)$$

$$\alpha_m(D_\varepsilon) = D_m(\|\varepsilon\|) \le D(\|\varepsilon\|) \le D_M(\|\varepsilon\|) = \alpha_M(D_\varepsilon), \quad (9.62)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_\varepsilon) = \sigma_m(\|\alpha\|) \le D^{1/2}(\|\varepsilon\|) = \sigma(\|\varepsilon\|) \le \sigma_M(\|\varepsilon\|) = \alpha_M^{1/2}(D_\varepsilon). \quad (9.63)$$

В неравенствах (9.60)–(9.63) $\alpha_m(D_y), \alpha_M(D_y)$, $\alpha_m(D_\varepsilon), \alpha_M(D_\varepsilon)$, $D(\|y\|), D_m(\|y\|), D_M(\|y\|), D(\|\varepsilon\|), D_m(\|\varepsilon\|), D_M(\|\varepsilon\|)$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы дисперсий D_y вектора выхода и матрицы дисперсий D_ε вектора ошибки системы (9.43), именуемые минорантой и мажорантой дисперсий стохастических векторов выхода и ошибки, дисперсия нормы вектора выхода, минимальное и максимальное значения дисперсий нормы вектора выхода и вектора ошибки; $\sigma(\|y\|), \sigma_m(\|y\|), \sigma_M(\|y\|)$, $\sigma(\|\varepsilon\|), \sigma_m(\|\varepsilon\|), \sigma_M(\|\varepsilon\|)$ – соответственно среднеквадратические значения отклонения норм стохастических векторов выхода и ошибки системы от его математического ожидания, минимальное и максимальное среднеквадратические значения отклонения норм стохастических векторов выхода и ошибки системы от его математического ожидания, именуемые минорантой и мажорантой среднеквадратических отклонений стохастических векторов выхода и ошибки.

Рассмотрим теперь проблему скаляризации векторных стохастических процессов в дискретных по времени системах. Спецификой дискретных систем, возбуждаемых дискретным «белым шумом» $w(k)$ является то, что дискретный «белый шум» обладает конечной дисперсией V, что позволяет формировать матрицы дисперсий как вектора выхода так и вектора ошибки. Переход к случаю возбуждения входов дискретной системы окрашенным шумом $\xi(k)$ как и в непрерывном случае приводит к необходимости формирования агрегированной системы «формирующий фильтр–исследуемая дискретная система» с последующим формированием матриц дисперсии выхода и ошибки исследуемой дискретной системы.

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему вида (5.2)

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}g(k),x(0)=x(k)\}_{k=0}=0,y(k)=\overline{C}x(k),\varepsilon(k)=g(k)-y(k), \quad (9.64)$$

в которой $x,g,y,\varepsilon-$соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $\overline{F},\overline{G},\overline{C}-$соответственно матрицы состояния, входа и выхода; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются веществennозначными и обладают размерностями $dim(x)=n,dim(g)=dim(y)=dim(\varepsilon)=m;dim(F)=n\times n,$ $dim(G)=n\times m,dim(C)=m\times n.$Внешнее воздействие $g(k)$ является стационарным дискретным белым шумом $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий V.Матрицы дисперсий выхода $y(k)=\overline{C}x(k)$ и ошибки $\varepsilon(k)=g(k)-y(k)$ дискретной системы вычисляются в силу соотношений

$$D_x-\overline{F}D_x\overline{F}^T=\overline{G}V\overline{G}^T,\ D_y=\overline{C}D_x\overline{C}^T,\ D_\varepsilon=I\cdot V+D_y. \quad (9.65)$$

Из соотношений (9.65) видно, что при дискретном «белом шуме» на входе системы (9.64) матрица дисперсий вектора ошибки вычислимая, но не минимизируемая системными средствами дискретной системы (9.64). Как и в случае непрерывной системы выделим четыре задачи скаляризации стохастических вектором выходным переменных дискретной системы (9.64).

Задача 9.9.2: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.64), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(k)$ и $j-$й элемент вектора ошибки системы $\varepsilon_j(k)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.64), в которой из матрицы $\overline{G}$ входа вычленяется столбец $\overline{G}_l$, а из матриц $\overline{C}$ выхода и единичной матрицы I вычленяются строки $\overline{C}^j$ и I^j так, что система (9.64) принимает вид

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}_l w(k),y_j(k)=\overline{C}^j x(k),\varepsilon_j(k)=I^j w(k)-\overline{C}^j x(k). \quad (9.66)$$

При этом искомые дисперсии D_{yj} и $D_{\varepsilon j}$ являются скалярными и вычисляются с помощью матричных соотношений

$$D_x-\overline{F}D_x\overline{F}^T=\overline{G}_l V\overline{G}_l^T,\ D_y=\overline{C}^j D_x\left(\overline{C}^j\right)^T,\ D_\varepsilon=I^j\cdot V\left(I^j\right)^T+D_y. \quad (9.67)$$

Задача 9.10.2: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(k)$ и $j-$го элемента вектора ошибки $\varepsilon_j(k)$ системы (9.64) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается

для системы (9.64), в которой из матриц $\overline{C}$ выхода и единичной матрицы I вычленяются строки $\overline{C}^j$ и I^j так, что система (9.64) принимает вид

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}w(k), y_j(k)=\overline{C}^j x(k), \varepsilon_j(k)=I^j w(k)-\overline{C}^j x(k). \quad (9.68)$$

При этом искомые дисперсии D_{yj} и $D_{\varepsilon j}$ являются скалярными и вычисляются с помощью матричных соотношений

$$D_x-\overline{F}D_x\overline{F}^T=\overline{G}_l V\overline{G}_l^T,\ D_{yj}=\overline{C}^j D_x\left(\overline{C}^j\right)^T,\ D_\varepsilon=I^j\cdot V\left(I^j\right)^T+D_{yj}. \quad (9.69)$$

Задача 9.11.2: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.64) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.64), в которой из матрицы $\overline{G}$ входа вычленяется столбец $\overline{G}_l$, так, что система (9.64) принимает вид

$$x(k+1)=\overline{F}x(k)+\overline{G}_l w(k), y(k)=\overline{C}x(k), \varepsilon(k)=w(k)-\overline{C}x(k). \quad (9.70)$$

При этом искомые матрицы дисперсий D_y вектора выхода и D_ε вектора ошибки вычисляется с помощью матричных соотношений

$$D_x-\overline{F}D_x\overline{F}^T=\overline{G}_l V\overline{G}_l^T,\ D_y=\overline{C}D_x\left(\overline{C}\right)^T,\ D_\varepsilon=I^j\cdot V\left(I^j\right)^T+D_y. \quad (9.71)$$

Задача 9.12.2: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.64) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l; l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.64) которая сохраняется в первозданном виде. При этом искомые матрицы дисперсий D_y вектора выхода и D_ε вектора ошибки вычисляется с помощью матричных соотношений

$$D_x-\overline{F}D_x\overline{F}^T=\overline{G}V\overline{G}^T,\ D_y=\overline{C}D_x\left(\overline{C}\right)^T,\ D_\varepsilon=V+D_y. \quad (9.72)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.11.2 и 9.12.2 требуется применения к полученным в них матрицам дисперсии выхода и ошибки процедуры сингулярного разложения матрицы дисперсий D_y вектора выхода и матрицы дисперсий D_ε вектора ошибки. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(D_y\right)=D_m\left(\|y\|\right)\le D\left(\|y\|\right)\le D_M\left(\|y\|\right)=\alpha_M\left(D_y\right), \quad (9.73)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_y)=\sigma_m(\|y\|)\le D^{1/2}(\|y\|)=\sigma(\|y\|)\le\sigma_M(\|y\|)=\alpha_M^{1/2}(D_y). \quad (9.74)$$

$$\alpha_m(D_\varepsilon)=D_m(\|\varepsilon\|)\le D(\|\varepsilon\|)\le D_M(\|\varepsilon\|)=\alpha_M(D_\varepsilon), \quad (9.75)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_\varepsilon)=\sigma_m(\|\alpha\|)\le D^{1/2}(\|\varepsilon\|)=\sigma(\|\varepsilon\|)\le\sigma_M(\|\varepsilon\|)=\alpha_M^{1/2}(D_\varepsilon). \quad (9.76)$$

В неравенствах (9.73)–(9.76) $\alpha_m(D_y),\alpha_M(D_y)$, $\alpha_m(D_\varepsilon),\alpha_M(D_\varepsilon)$, $D(\|y\|),D_m(\|y\|),D_M(\|y\|),D(\|\varepsilon\|),D_m(\|\varepsilon\|),D_M(\|\varepsilon\|)$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы дисперсий D_y вектора выхода и матрицы дисперсий D_ε вектора ошибки системы (9.64), именуемые минорантой и мажорантой дисперсии стохастических векторов выхода и ошибки, дисперсия нормы вектора выхода, минимальное и максимальное значения дисперсий нормы вектора выхода и вектора ошибки; $\sigma(\|y\|),\sigma_m(\|y\|),\sigma_M(\|y\|)$, $\sigma(\|\varepsilon\|),\sigma_m(\|\varepsilon\|),\sigma_M(\|\varepsilon\|)$ – соответственно среднеквадратические значения отклонения норм стохастических векторов выхода и ошибки системы от его математического ожидания, минимальное и максимальное среднеквадратические значения отклонения норм стохастических векторов выхода и ошибки системы от его математического ожидания, именуемые минорантой и мажорантой среднеквадратических отклонений стохастических векторов выхода и ошибки.

Обратимся к исследованию дискретной системы МВМВ–типа вида (9.64) для случая $g(k)=\xi(k)$. В этом случае, как показано ранее, дисперсия вектора ошибки становится вычислимой и минимизируемой, а потому исследуется как дисперсия D_y вектора $y(k)$ выхода системы, так и дисперсия D_ε вектора ошибки $\varepsilon(k)=\xi(k)-y(k)$ системы, возбуждаемой стохастическим воздействием типа «окрашенный шум». При этом факт агрегирования системы (9.64) с формирующим фильтром вида (7.32) приводит к тому, что агрегированная система

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\tilde{x}}(k+1)=\tilde{\tilde{F}}\tilde{\tilde{x}}(k)+\tilde{\tilde{G}}w(k),\tilde{\tilde{x}}(0)=\tilde{\tilde{x}}(k)|_{k=0}=0,\ y(k)=\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}}(k);\\ \varepsilon(k)=\xi(k)-y(k)=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon\tilde{\tilde{x}}(k)\end{array}\right\}. \quad (9.77)$$

возбуждается «белым шумом», а потому задачи, перечисленные выше для случая внешнего стохастического воздействия типа «белый шум» $w(k)$, сохраняют свою постановку и актуальность, не смотря на то, что входы исследуемой системы (9.64) возбуждаются «окрашенным

шумом» $\xi(k)$. В результате, как и ранее, выделим четыре задачи скаляризации векторных стохастических процессов системы (9.77).

Задача 9.13.2: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.77), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(k)$ и $j-$й элемент вектора ошибки системы $\varepsilon_j(k)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.77), в которой из матрицы $\tilde{\tilde{G}}$ входа вычленяется столбец $\tilde{\tilde{G}}_l$, а из матриц $\tilde{\tilde{C}}$ выхода и $\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon$ ошибки вычленяются строки $\tilde{\tilde{C}}^j$ и $\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j$ так, что система (9.77) принимает вид

$$x(k+1)=\tilde{\tilde{F}}x(k)+\tilde{\tilde{G}}_l w(k), y_j(k)=\tilde{\tilde{C}}^j x(k), \varepsilon_j(k)=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j x(k)\ . \qquad (9.78)$$

При этом искомые дисперсии D_{yj} и $D_{\varepsilon j}$ являются скалярными и вычисляются с помощью матричных соотношений

$$\tilde{D}_x-\tilde{\tilde{F}}\tilde{D}_x\tilde{\tilde{F}}^T=\tilde{\tilde{G}}_l V\tilde{\tilde{G}}_l^T,\ D_y=\tilde{\tilde{C}}^j\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}^j\right)^T,\ D_\varepsilon=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j\right)^T. \qquad (9.79)$$

Задача 9.14.2: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(k)$ и $j-$го элемента вектора ошибки $\varepsilon_j(k)$ системы (9.77) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l; l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.77), в которой из матриц $\tilde{\tilde{C}}$ выхода и $\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon$ ошибки вычленяются строки $\tilde{\tilde{C}}^j$ и $\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j$ так, что система (9.77) принимает вид

$$x(k+1)=\tilde{\tilde{F}}x(k)+\tilde{\tilde{G}}w(k), y_j(k)=\tilde{\tilde{C}}^j x(k), \varepsilon_j(k)=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j x(k)\ . \qquad (9.78)$$

При этом искомые дисперсии D_{yj} и $D_{\varepsilon j}$ являются скалярными и вычисляются с помощью матричных соотношений

$$\tilde{D}_x-\tilde{\tilde{F}}\tilde{D}_x\tilde{\tilde{F}}^T=\tilde{\tilde{G}}V\tilde{\tilde{G}}^T,\ D_y=\tilde{\tilde{C}}^j\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}^j\right)^T,\ D_\varepsilon=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^j\right)^T. \qquad (9.79)$$

Задача 9.15.2: Исследование $y(k)$ стохастического вектора выхода и $\varepsilon(k)$стохастического вектора ошибки системы (9.77) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.77), в которой из матрицы $\tilde{\tilde{G}}$ входа вычленяется столбец $\tilde{\tilde{G}}_l$, так, что система (9.77) принимает вид

$$x(k+1)=\tilde{\tilde{F}}x(k)+\tilde{\tilde{G}}_l w(k), y(k)=\tilde{\tilde{C}}x(k), \varepsilon(k)=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon x(k)\ . \qquad (9.80)$$

При этом искомые дисперсии D_y и D_ε вычисляются с помощью матричных соотношений

$$\tilde{D}_x - \tilde{\bar{F}}\tilde{D}_x\tilde{\bar{F}}^T = \tilde{\bar{G}}_l V \tilde{\bar{G}}_l^T,\ D_y = \tilde{\bar{C}}\tilde{D}_x\left(\tilde{\bar{C}}\right)^T,\ D_\varepsilon = \tilde{\bar{C}}_\varepsilon\tilde{D}_x\left(\tilde{\bar{C}}_\varepsilon\right)^T. \quad (9.81)$$

Задача 9.16.2: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода и $\varepsilon(k)$стохастического вектора ошибки системы (9.77) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(k) = w(k)$ с матрицей дисперсий $V = diag\left(V_l; l = \overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.77) которая сохраняется в первозданном виде. При этом искомые матрицы дисперсий D_y вектора выхода и D_ε вектора ошибки вычисляется с помощью матричных соотношений

$$\tilde{D}_x - \tilde{\bar{F}}\tilde{D}_x\tilde{\bar{F}}^T = \tilde{\bar{G}}V\tilde{\bar{G}}^T,\ D_y = \tilde{\bar{C}}\tilde{D}_x\left(\tilde{\bar{C}}\right)^T,\ D_\varepsilon = \tilde{\bar{C}}_\varepsilon\tilde{D}_x\left(\tilde{\bar{C}}_\varepsilon\right). \quad (9.82)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.15.2 и 9.16.2 требуется применения к полученным в них матрицам дисперсии выхода и ошибки процедуры сингулярного разложения матрицы дисперсий D_y вектора выхода и матрицы дисперсий D_ε вектора ошибки. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m(D_y) = D_m(\|y\|) \le D(\|y\|) \le D_M(\|y\|) = \alpha_M(D_y), \quad (9.83)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_y) = \sigma_m(\|y\|) \le D^{1/2}(\|y\|) = \sigma(\|y\|) \le \sigma_M(\|y\|) = \alpha_M^{1/2}(D_y). \quad (9.84)$$

$$\alpha_m(D_\varepsilon) = D_m(\|\varepsilon\|) \le D(\|\varepsilon\|) \le D_M(\|\varepsilon\|) = \alpha_M(D_\varepsilon), \quad (9.85)$$

$$\alpha_m^{1/2}(D_\varepsilon) = \sigma_m(\|\alpha\|) \le D^{1/2}(\|\varepsilon\|) = \sigma(\|\varepsilon\|) \le \sigma_M(\|\varepsilon\|) = \alpha_M^{1/2}(D_\varepsilon). \quad (9.86)$$

В неравенствах (9.83)–(9.86) $\alpha_m(D_y), \alpha_M(D_y)$, $\alpha_m(D_\varepsilon), \alpha_M(D_\varepsilon)$, $D(\|y\|), D_m(\|y\|), D_M(\|y\|), D(\|\varepsilon\|), D_m(\|\varepsilon\|), D_M(\|\varepsilon\|)$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы дисперсий D_y вектора выхода и матрицы дисперсий D_ε вектора ошибки системы (9.77), именуемые минорантой и мажорантой дисперсий стохастических векторов выхода и ошибки, дисперсия нормы вектора выхода, минимальное и максимальное значения дисперсий нормы вектора выхода и вектора ошибки; $\sigma(\|y\|), \sigma_m(\|y\|), \sigma_M(\|y\|)$, $\sigma(\|\varepsilon\|), \sigma_m(\|\varepsilon\|), \sigma_M(\|\varepsilon\|)$ – соответственно среднеквадратические значения отклонения норм стохастических векторов выхода и ошибки системы от его математического ожидания, минимальное и максимальное

среднеквадратические значения отклонения норм стохастических векторов выхода и ошибки системы от его математического ожидания, именуемые минорантой и мажорантой среднеквадратических отклонений стохастических векторов выхода и ошибки.

9.3. **Сингулярное разложение корреляционных матриц векторных переменных непрерывных и дискретных систем. Миноранты и мажоранты функций ковариации стохастических векторных переменных непрерывной и дискретной системы**

Рассмотрение проблемы, вынесенной в заголовок параграфа начнем с непрерывной стационарной системы МВМВ-типа (9.42) возбуждаемой внешним стохастическим векторным воздействием типа «белый шум» $w(t)$ с матрицей интенсивности $N = diag\left(N_l; l = \overline{1,m}\right)$. Скаляризация корреляционных матриц будет проводиться по схеме скаляризации матриц дисперсий, реализованной в предыдущем параграфе применительно только к корреляционным матрицам стохастического процесса по выходу. Итак в случае $g(t) = w(t)$ могут быть поставлены задачи:

Задача 9.1.3: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.42), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(t)$ с $l-$м входом системы $g_l(t) = w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы G входа вычленяется столбец G_l, а из матрицы C выхода вычленяется строка C^j так, что система (9.42) принимает вид (9.44), при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.45), что для корреляционной функции выхода системы (9.42) в силу (4.23), (4.24) позволяет записать

$$\left.\begin{aligned} R_{y_j}(\tau) &= C_j e^{F\tau} D_x C_j^T, \tau \geq 0 \\ R_{y_j}(\tau) &= C_j e^{-F\tau} D_x C_j^T, \tau \leq 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.87)$$

Задача 9.2.3: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(t)$ системы (9.42) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t) = w(t)$ с матрицей интенсивности $N = diag\left(N_l; l = \overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы C выхода вычленяется строка C^j так, что система (9.42) для этой задачи принимает вид (9.46), при этом матрица D_x дисперсии вектора

состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.47), что для корреляционной функции выхода системы (9.42) в силу (4.23), (4.24) позволяет записать

$$\left.\begin{aligned} R_{y_j}(\tau) &= C_j e^{F\tau} D_x C_j^T, \tau \geq 0 \\ R_{y_j}(\tau) &= C_j e^{-F\tau} D_x C_j^T, \tau \leq 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.88)$$

Задача 9.3.3: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.42) при возбуждении системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(t) = w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы G входа вычленяется столбец G_l, так, что система (9.42) принимает вид (9.48), при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.49), что для корреляционной функции выхода системы (9.42) в силу (4.23), (4.24) позволяет записать

$$\left.\begin{aligned} R_y(\tau) &= Ce^{F\tau} D_x C^T, \tau \geq 0 \\ R_y(\tau) &= Ce^{-F\tau} D_x C^T, \tau \leq 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.89)$$

Задача 9.4.3: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.42) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t) = w(t)$ с матрицей интенсивности $N = diag\left(N_l; l = \overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.42) которая сохраняется в первозданном виде, при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.50), что для корреляционной функции выхода системы (9.42) в силу (4.23), (4.24) позволяет записать

$$\left.\begin{aligned} R_y(\tau) &= Ce^{F\tau} D_x C^T, \tau \geq 0 \\ R_y(\tau) &= Ce^{-F\tau} D_x C^T, \tau \leq 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.89)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.3.3 и 9.4.3 требуется применения к полученным в них корреляционным матрицам выхода процедуры сингулярного разложения корреляционной матрицы $R_y(\tau)$ вектора выхода. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(R_y(\tau)\right) = R_m\left(\|y\|\right) \leq R\left(\|y\|\right) \leq R_M\left(\|y\|\right) = \alpha_M\left(R_y(\tau)\right), \qquad (9.90)$$

В неравенствах (9.90), $\alpha_m(R_y(\tau)),\alpha_M(R_y(\tau))$, соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа корреляционной матрицы $R_y(\tau)$ вектора выхода системы (9.42) $\forall\tau$, именуемые минорантой и мажорантой корреляционной функции стохастического вектора выхода системы.

В случае $g(t)=\xi(t)$ исследованию подвергается непрерывная система MBMB–типа вида (9.43), для чего используется агрегирование системы (9.42) с формирующим фильтром вида (7.2), так что агрегированная система (9.43) возбуждается «белым шумом», а потому задачи 9.1.3–9.4.3., рассмотренные выше для случая внешнего стохастического воздействия типа «белый шум» $w(t)$, сохраняют свою формулировку, не смотря на то, что входы исследуемой системы (9.42) возбуждаются «окрашенным шумом» $\xi(t)$.

Задача 9.5.3: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.43), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(t)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{G}$ входа вычленяется столбец $\tilde{G}_l$, а из матрицы $\tilde{C}$ выхода вычленяются строка $\tilde{C}^j$ так, что система (9.43) принимает вид (9.53). При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения матричного уравнения Ляпунова (9.54). Искомые корреляционные матрицы являются скалярными корреляционными функциями и в силу (7.12). (7.13) находятся с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} R_{y_j}(\tau)&=\tilde{C}_j e^{\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}_j^T,\ \tau\ge 0\\ R_{y_j}(\tau)&=\tilde{C}_j e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}_j^T,\ \tau\le 0\end{aligned}\right\}. \qquad (9.91)$$

Задача 9.6.3: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(t)$ системы (9.43) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{C}$ выхода вычленяется строка $\tilde{C}^j$ так, что система (9.43) для этой задачи принимает вид (9.55). При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения матричного уравнения Ляпунова (9.56). Искомые корреляционные

матрицы являются скалярными корреляционными функциями и в силу (7.12). (7.13) находятся с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} R_{y_j}(\tau) &= \tilde{C}_j e^{\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}_j^T,\ \tau \ge 0 \\ R_{y_j}(\tau) &= \tilde{C}_j e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}_j^T,\ \tau \le 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.92)$$

Задача 9.7.3: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.43) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{G}$ входа вычленяется столбец $\tilde{G}_l$, так, что система (9.43) принимает вид (9.57). При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения матричного уравнения Ляпунова (9.56). Искомые корреляционные матрицы в силу (7.12). (7.13) находятся с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} R_y(\tau) &= \tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}^T,\ \tau \ge 0 \\ R_y(\tau) &= \tilde{C}e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}^T,\ \tau \le 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.93)$$

Задача 9.8.3: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.43) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$.. Задача решается для системы (9.43) которая сохраняется в первозданном виде. При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения матричного уравнения Ляпунова (9.59). Искомые корреляционные матрицы в силу (7.12). (7.13) находятся с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} R_y(\tau) &= \tilde{C}e^{\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}^T,\ \tau \ge 0 \\ R_y(\tau) &= \tilde{C}e^{-\tilde{F}\tau}\tilde{D}_x\tilde{C}^T,\ \tau \le 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.94)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.7.3 и 9.8.3 требуется применения к полученным в них корреляционным матрицам выхода процедуры сингулярного разложения матрицы дисперсий. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(R_y(\tau)\right)=R_m\left(\|y\|\right)\le R\left(\|y\|\right)\le R_M\left(\|y\|\right)=\alpha_M\left(R_y(\tau)\right), \qquad (9.95)$$

В неравенствах (9.95), $\alpha_m(R_y(\tau)),\alpha_M(R_y(\tau))$, соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа корреляционной матрицы $R_y(\tau)$ вектора выхода системы (9.43) $\forall\tau$, именуемые минорантой и мажорантой корреляционной функции стохастического вектора выхода системы.

Рассмотрим теперь проблему скаляризации векторных стохастических процессов в дискретных по времени системах. Спецификой дискретных систем, возбуждаемых дискретным «белым шумом» $w(k)$ является то, что дискретный «белый шум» обладает конечной дисперсией V. Переход к случаю возбуждения входов дискретной системы окрашенным шумом $\xi(k)$ как и в непрерывном случае приводит к необходимости формирования агрегированной системы «формирующий фильтр–исследуемая дискретная система» с последующим формированием матрицы дисперсии вектора состояния агрегированной системы. Заявленные рассмотрения начнем с линейной стационарной дискретной системы вида (9.64), внешнее стохастическое воздействие $g(k)$ которой является стационарное воздействие типа дискретный «белый шум» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\{V_l;l=\overline{1,m}\}$. Матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.65), что в силу (5.15), (5.16) позволяет записать

$$\left.\begin{aligned} R_y(\nu)&=\overline{C}\overline{F}^{\nu}D_x\overline{C}^T,\nu\geq 0\\ R_y(\nu)&=\overline{C}\overline{F}^{-\nu}D_x\overline{C}^T,\nu\leq 0\end{aligned}\right\}. \qquad (9.96)$$

Как и в случае непрерывной системы выделим четыре задачи скаляризации стохастических вектором выходным переменных дискретной системы (9.64).

Задача 9.9.3: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.64), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(k)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.64), в которой из матрицы $\overline{G}$ входа вычленяется столбец $\overline{G}_l$, а из матриц $\overline{C}$ выхода вычленяются строки $\overline{C}^j$ так, что система (9.64) принимает вид (9.66), при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в

силу (9.96) позволяет записать для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной системы

$$\left.\begin{array}{l} R_y(\nu)=\overline{C}^{\,j}\overline{F}^{\nu}D_x\left(\overline{C}^{\,j}\right)^T,\nu\geq 0 \\ R_y(\nu)=\overline{C}^{\,j}\overline{F}^{-\nu}D_x\left(\overline{C}^{\,j}\right)^T,\nu\leq 0 \end{array}\right\}, \qquad (9.97)$$

которая является корреляционной функцией.

Задача 9.10.3: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(k)$ системы (9.64) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.64), в которой из матриц $\overline{C}$ выхода вычленяется строка $\overline{C}^{\,j}$ так, что система (9.64) принимает вид (9.68), при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в силу (9.96) позволяет записать для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной системы

$$\left.\begin{array}{l} R_y(\nu)=\overline{C}^{\,j}\overline{F}^{\nu}D_x\left(\overline{C}^{\,j}\right)^T,\nu\geq 0 \\ R_y(\nu)=\overline{C}^{\,j}\overline{F}^{-\nu}D_x\left(\overline{C}^{\,j}\right)^T,\nu\leq 0 \end{array}\right\}, \qquad (9.98)$$

которая является корреляционной функцией.

Задача 9.11.3: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.64) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.64), в которой из матрицы $\overline{G}$ входа вычленяется столбец $\overline{G}_l$, так, что система (9.64) принимает вид (9.70), при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в силу (9.96) позволяет записать для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной системы

$$\left.\begin{array}{l} R_y(\nu)=\overline{C}\overline{F}^{\nu}D_x\left(\overline{C}\right)^T,\nu\geq 0 \\ R_y(\nu)=\overline{C}\overline{F}^{-\nu}D_x\left(\overline{C}\right)^T,\nu\leq 0 \end{array}\right\}. \qquad (9.99)$$

Задача 9.12.3: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.64) при возбуждении всех входов системы векторным

«белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$.. Задача решается для системы (9.64) которая сохраняется в первозданном виде, при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в силу (9.96) позволяет записать для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной системы

$$\left.\begin{array}{l} R_y(\nu)=\overline{C}\overline{F}^{\nu}D_x\left(\overline{C}\right)^T,\ \nu\geq 0 \\ R_y(\nu)=\overline{C}\overline{F}^{-\nu}D_x\left(\overline{C}\right)^T,\ \nu\leq 0 \end{array}\right\}. \qquad (9.100)$$

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.11.3 и 9.12.3 требуется применения к полученным в них корреляционным матрицам $R_y(\nu)$ стохастического вектора выхода процедуры сингулярного разложения корреляционной матрицы $R_y(\nu)$ стохастического вектора выхода. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(R_y(\nu)\right)=R_{y_m}\left(\|y\|\right)\leq R_y\left(\|y\|\right)\leq R_{y_M}\left(\|y\|\right)=\alpha_M\left(R_y(\nu)\right). \qquad (9.101)$$

В неравенствах (9.101) $\alpha_m\left(R_y(\nu)\right),\alpha_M\left(R_y(\nu)\right)$–соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа корреляционной матрицы $R_y(\nu)$ стохастического вектора выхода дискретной системы (9.64) именуемые минорантой и мажорантой корреляционной функции стохастического вектора выхода.

Обратимся к исследованию дискретной система МВМВ–типа вида (9.64) для случая $g(k)=\xi(k)$ окрашенным дискретным внешним воздействием. В этом случае с тем, чтобы сохранить возможность использования дискретного матричного уравнения Ляпунова для вычисления матрицы дисперсий вектора состояния исследуемой системы приходится агрегировать дискретную систему (9.64) с формирующим фильтром вида (7.32). Это агрегирование приводит к дискретной системе (9.77), возбуждаемой дискретным белым шумом $w(k)$. В этой связи задачи, перечисленные выше для случая внешнего стохастического воздействия типа «белый шум» $w(k)$, сохраняют свою постановку и актуальность, не смотря на то, что входы исследуемой системы (9.64) возбуждаются «окрашенным шумом» $\xi(k)$. В результате, как и ранее, выделим четыре задачи скаляризации векторных стохастических процессов системы (9.77).

Задача 9.13.3: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.77), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(k)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.77), в которой из матрицы $\tilde{\tilde{G}}$ входа вычленяется столбец $\tilde{\tilde{G}}_l$, а из матрицы $\tilde{\tilde{C}}$ выхода вычленяется строка $\tilde{\tilde{C}}^j$ так, что система (9.77) принимает вид (9.78), при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.79).В этом случае на основе соотношений (7.42) и (7.43) для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной системы (9.77) можно записать

$$\left.\begin{aligned} R_y(\nu)&=\tilde{\tilde{C}}^j\tilde{\tilde{F}}^{\nu}\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}^j\right)^T,\ \nu\geq 0,\\ R_y(\nu)&=\tilde{\tilde{C}}^j\tilde{\tilde{F}}^{-\nu}\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}^j\right)^T,\ \nu\leq 0\end{aligned}\right\}. \qquad (9.102)$$

Задача 9.14.3: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(k)$ системы (9.77) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.77), в которой из матриц $\tilde{\tilde{C}}$ выхода вычленяется строка $\tilde{\tilde{C}}^j$ так, что система (9.77) принимает вид (9.78), при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.79).В этом случае на основе соотношений (7.42) и (7.43) для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной оказывается справедливым представление (9.102).

Задача 9.15.3: Исследования $y(k)$ стохастического вектора системы (9.77) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.77), в которой из матрицы $\tilde{\tilde{G}}$ входа вычленяется столбец $\tilde{\tilde{G}}_l$, так, что система (9.77) принимает вид (9.80), при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.81). В этом случае на основе соотношений (7.42) и (7.43) для корреляционной матрицы

стохастического вектора выхода дискретной системы (9.77) можно записать

$$\left.\begin{aligned} R_y(\nu)&=\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{F}}^{\nu}\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}\right)^T,\ \nu\geq 0,\\ R_y(\nu)&=\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{F}}^{-\nu}\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}\right)^T,\ \nu\leq 0\end{aligned}\right\}. \qquad (9.103)$$

Задача 9.16.3: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.77) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.77) которая сохраняется в первозданном виде, при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.82).В этом случае на основе соотношений (7.42) и (7.43) для корреляционной матрицы стохастического вектора выхода дискретной системы (9.77) оказываются справедливыми представления (9.103).

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации результатов задач 9.15.3 и 9.16.3 требуется применения к полученным в них корреляционным матрицам выхода $R_y(\nu)$ процедуры сингулярного разложения к этим матрицам. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(R_y(\nu)\right)=R_{y_m}(\nu)\leq R(\|y\|,\nu)\leq R_{y_M}(\nu)=\alpha_M\left(R_y(\nu)\right). \qquad (9.104)$$

В неравенствах (9.104) $\alpha_m\left(R_y(\nu)\right),\alpha_M\left(R_y(\nu)\right)-$ соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа корреляционной матрицы $R_y(\nu)$ вектора выхода, именуемые минорантой и мажорантой корреляционной функции стохастического вектора выхода.

9.4. Сингулярное разложение матриц спектральных плотностей векторных переменных непрерывных и дискретных систем. Миноранты и мажоранты функций спектральных плотностей стохастических векторных переменных непрерывной и дискретной системы

Рассмотрение проблемы, вынесенной в заголовок параграфа, начнем с непрерывной стационарной системы МВМВ-типа (9.42) возбуждаемой внешним стохастическим векторным воздействием типа «белый шум» $w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Скаляризация матриц спектральных плотностей стохастического

вектора выхода будем проводить по схеме скаляризации корреляционных матриц вектора выхода, реализованной в предыдущем параграфе. Итак в случае $g(t)=w(t)$ могут быть поставлены задачи:

Задача 9.1.4: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.42), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(t)$ с $l-$м входом системы $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы G входа вычленяется столбец G_l, а из матрицы C выхода вычленяется строка C^j так, что система (9.42) принимает вид (9.44), при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.45), что для функции $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы (9.42) в силу (4.30) позволяет записать

$$S_y(\omega)=-2C^jF(F^2+\omega^2I)^{-1}D_x\left(C^j\right)^T. \qquad (9.105)$$

Задача 9.2.4: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(t)$ системы (9.42) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы C выхода вычленяется строка C^j так, что система (9.42) для этой задачи принимает вид (9.46), при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.47), что для вычисления функции $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы (9.42) позволяет использовать формулу (9.105).

Задача 9.3.4: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.42) при возбуждении системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.42), в которой из матрицы G входа вычленяется столбец G_l, так, что система (9.42) принимает вид (9.48), при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.49), что для матрицы $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы (9.42) в силу (4.30) позволяет записать

$$S_y(\omega)=-2CF(F^2+\omega^2I)^{-1}D_xC^T. \qquad (9.106)$$

Задача 9.4.4: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.42) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t)=w(t)$ с матрицей интенсивности $N=diag\left(N_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.42) которая сохраняется в первозданном виде, при этом матрица D_x дисперсии вектора состояния системы вычисляется с помощью матричного уравнения Ляпунова (9.50), что для формирования матрицы $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы (9.42) использовать формулу (9.106).

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.3.4 и 9.4.4 требуется применения к полученным в них матрицам спектральных плотностей выхода процедуры сингулярного разложения матриц спектральных плотностей $S_y(\omega)$ вектора выхода. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(S_y(\omega)\right)=S_{y_m}\left(\|y\|,\omega\right)\le S_y\left(\|y\|,\omega\right)\le S_{y_M}\left(\|y\|,\omega\right)=\alpha_M\left(S_y(\omega)\right). \qquad (9.107)$$

В неравенствах (9.107), $\alpha_m\left(S_y(\omega)\right),\alpha_M\left(S_y(\omega)\right)$, соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы спектральной плотности $S_y(\omega)$ вектора выхода системы (9.42) $\forall\omega$, именуемые минорантой и мажорантой функции спектральной плотности стохастического вектора выхода системы.

В случае $g(t)=\xi(t)$ исследованию подвергается непрерывная система МВМВ–типа вида (9.43), для чего используется агрегирование системы (9.42) с формирующим фильтром вида (7.2), так что агрегированная система (9.43) возбуждается «белым шумом», а потому задачи 9.1.4–9.4.4., рассмотренные выше для случая внешнего стохастического воздействия типа «белый шум» $w(t)$, сохраняют свою формулировку, не смотря на то, что входы исследуемой системы (9.42) возбуждаются «окрашенным шумом» $\xi(t)$.

Задача 9.5.4: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.43), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(t)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(t)=w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{G}$ входа вычленяется столбец $\tilde{G}_l$, а из матрицы $\tilde{C}$ выхода вычленяются строка

$\tilde{C}^j$ так, что система (9.43) принимает вид (9.53).При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находится из решения матричного уравнения Ляпунова (9.54), что для функции $S_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы (9.43) в силу (7.15) позволяет записать

$$S_y(\omega) = -2\tilde{C}_j\tilde{F}(\tilde{F}^2 + \omega^2 I)^{-1}\tilde{D}_x\tilde{C}_j^T. \qquad (9.108)$$

Задача 9.6.4: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(t)$ системы (9.43) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(t) = w(t)$ с матрицей интенсивности $N = diag\left(N_l; l = \overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{C}$ выхода вычленяется строка $\tilde{C}^j$ так, что система (9.43) для этой задачи принимает вид (9.55). При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения матричного уравнения Ляпунова (9.56). Искомые матрицы спектральной плотности $S_y(\omega)$ являются скалярными функциями спектральной плотности находятся с помощью соотношения (9.108).

Задача 9.7.4: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.43) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(t) = w(t)$ интенсивности N_l. Задача решается для системы (9.43), в которой из матрицы $\tilde{G}$ входа вычленяется столбец $\tilde{G}_l$, так, что система (9.43) принимает вид (9.57). При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения матричного уравнения Ляпунова (9.56). Искомая матрица $S_y(\omega)$в силу (7.15) и (7.13) находятся с помощью соотношения

$$S_y(\omega) = -2\tilde{C}\tilde{F}(\tilde{F}^2 + \omega^2 I)^{-1}\tilde{D}_x\tilde{C}^T. \qquad (9.109)$$

Задача 9.8.4: Исследования $y(t)$ стохастического вектора выхода системы (9.43) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(t) = w(t)$ с матрицей интенсивности $N = diag\left(N_l; l = \overline{1,m}\right)$.. Задача решается для системы (9.43) которая сохраняется в первозданном виде. При этом матрица дисперсии $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы находятся из решения

матричного уравнения Ляпунова (9.59). Искомая матрица $S_y(\omega)$ в силу (7.15) находятся с помощью соотношения (9.109).

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.7.4 и 9.8.4 требуется применения к полученным в них матрицам спектральных плотностей выхода процедуры сингулярного разложения матриц спектральных плотностей $S_y(\omega)$ вектора выхода. В результате получим систему неравенств типа (9.38), записываемые в форме (9.107), в которых $\alpha_m(S_y(\omega)), \alpha_M(S_y(\omega))$, соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы спектральной плотности $S_y(\omega)$ вектора выхода системы (9.43) $\forall\omega$, именуемые минорантой и мажорантой функции спектральной плотности стохастического вектора выхода системы.

Рассмотрим теперь проблему скаляризации векторных стохастических процессов в дискретных по времени системах. Спецификой дискретных систем, возбуждаемых дискретным «белым шумом» $w(k)$ является то, что дискретный «белый шум» обладает конечной дисперсией V. Переход к случаю возбуждения входов дискретной системы окрашенным шумом $\xi(k)$ как и в непрерывном случае приводит к необходимости формирования агрегированной системы «формирующий фильтр–исследуемая дискретная система» с последующим формированием матрицы дисперсии вектора состояния агрегированной системы. Заявленные рассмотрения начнем с линейной стационарной дискретной системы вида (9.64), внешнее стохастическое воздействие $g(k)$ которой является стационарное воздействие типа дискретный «белый шум» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\{V_l; l=\overline{1,m}\}$. Матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.65).

Как и в случае непрерывной системы выделим четыре задачи скаляризации матриц $\overline{S}_y(\omega)$ спектральных плотностей стохастических векторов выходных переменных дискретной системы (9.64).

Задача 9.9.4: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.64), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(k)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.64), в которой из матрицы $\overline{G}$ входа вычленяется

столбец $\overline{G}_l$, а из матриц $\overline{C}$ выхода вычленяются строки $\overline{C}^j$ так, что система (9.64) принимает вид (9.66), при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в силу (5.27) позволяет записать для матрицы $\overline{S}_y(\omega)$ стохастического вектора выхода дискретной системы

$$\overline{S}_y(\omega)=2\overline{C}^j\left(I-\overline{F}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I-2\overline{F}\cos(\omega\Delta t)+\overline{F}^2\right\}^{-1}\overline{D}_x\left(\overline{C}^j\right)^T, \qquad (9.110)$$

которая является скалярной функцией спектральной плотности выхода дискретной системы.

Задача 9.10.4: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(k)$ системы (9.64) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.64), в которой из матриц $\overline{C}$ выхода вычленяется строка $\overline{C}^j$ так, что система (9.64) принимает вид (9.68), при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что позволяет для вычисления функции $\overline{S}_y(\omega)$ спектральной плотности выхода системы использовать соотношение (9.110).

Задача 9.11.4: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.64) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.64), в которой из матрицы $\overline{G}$ входа вычленяется столбец $\overline{G}_l$, так, что система (9.64) принимает вид (9.70), при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в силу (5.27) позволяет записать для матрицы $\overline{S}_y(\omega)$ спектральной плотности вектора выхода дискретной системы

$$\overline{S}_y(\omega)=2\overline{C}\left(I-\overline{F}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I-2\overline{F}\cos(\omega\Delta t)+\overline{F}^2\right\}^{-1}\overline{D}_x\left(\overline{C}\right)^T. \qquad (9.111)$$

Задача 9.12.4: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.64) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий

$V = diag\left(V_l; l = \overline{1,m}\right)$.. Задача решается для системы (9.64) которая сохраняется в первозданном виде, при этом матрица D_x дисперсий стохастического вектора состояния $x(k)$ дискретной системы (9.64) вычисляются с помощью дискретного уравнения Ляпунова (9.67), что в силу (5.27) позволяет для вычисления матрицы $\bar{S}_y(\omega)$ стохастического вектора выхода дискретной системы использовать соотношение (9.111).

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации векторных результатов задач 9.11.4 и 9.12.4 требуется применения к полученным в них матрицам $\bar{S}_y(\omega)$ спектральных плотностей выхода процедуры сингулярного разложения. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(\bar{S}_y(\omega)\right) = \bar{S}_{y_m}\left(\|y\|,\omega\right) \le \bar{S}_y\left(\|y\|,\omega\right) \le \bar{S}_{y_M}\left(\|y\|,\omega\right) = \alpha_M\left(\bar{S}_y(\omega)\right). \qquad (9.112)$$

В неравенствах (9.112), $\alpha_m\left(\bar{S}_y(\omega)\right), \alpha_M\left(\bar{S}_y(\omega)\right)$, соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы спектральной плотности $\bar{S}_y(\omega)$ вектора выхода дискретной системы (9.64) $\forall\omega$, именуемые минорантой и мажорантой функции спектральной плотности стохастического вектора выхода системы.

Обратимся к исследованию дискретной система МВМВ–типа вида (9.64) для случая $g(k) = \xi(k)$– окрашенное дискретное внешнее воздействие. В этом случае с тем, чтобы сохранить возможность использования дискретного матричного уравнения Ляпунова для вычисления матрицы дисперсий вектора состояния исследуемой системы приходится агрегировать дискретную систему (9.64) с формирующим фильтром вида (7.32). Это агрегирование приводит к дискретной системе (9.77), возбуждаемой дискретным белым шумом $w(k)$. В этой связи задачи, перечисленные выше для случая внешнего стохастического воздействия типа «белый шум» $w(k)$, сохраняют свою постановку и актуальность, не смотря на то, что входы исследуемой системы (9.64) возбуждаются «окрашенным шумом» $\xi(k)$. В результате, как и ранее, выделим четыре задачи скаляризации векторных стохастических процессов системы (9.77).

Задача 9.13.4: Исследования $(j,l)-$сепаратного канала системы (9.77), соединяющего $j-$й выход системы $y_j(k)$ с $l-$м входом агрегированной системы $g_l(k) = w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается

для системы (9.77), в которой из матрицы $\tilde{\tilde{G}}$ входа вычленяется столбец $\tilde{\tilde{G}}_l$, а из матрицы $\tilde{\tilde{C}}$ выхода вычленяется строка $\tilde{\tilde{C}}^j$ так, что система (9.77) принимает вид (9.78), при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.79). В этом случае на основании соотношения (7.44) для матрицы спектральной плотности стохастического вектора выхода дискретной системы (9.77) можно записать

$$\bar{S}_y(\omega)=2\tilde{\tilde{C}}^j\left(I-\tilde{\tilde{F}}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I-2\tilde{\tilde{F}}\cos(\omega\Delta t)+\tilde{\tilde{F}}^2\right\}^{-1}\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}^j\right)^T. \qquad (9.113)$$

Задача 9.14.4: Исследования $(j)-$го сепаратного выхода $y_j(k)$ системы (9.77) при возбуждении всех входов агрегированной системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$. Задача решается для системы (9.77), в которой из матриц $\tilde{\tilde{C}}$ выхода вычленяется строка $\tilde{\tilde{C}}^j$ так, что система (9.77) принимает вид (9.78), при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.79). В этом случае на основе соотношений (7.44) для матрицы $\bar{S}_y(\omega)$ спектральной плотности стохастического вектора выхода дискретной оказывается справедливым представление (9.113).

Задача 9.15.4: Исследования $y(k)$ стохастического вектора системы (9.77) при возбуждении агрегированной системы по $l-$му входу стохастическим воздействием типа «белый шум» $g_l(k)=w(k)$ дисперсии V_l. Задача решается для системы (9.77), в которой из матрицы $\tilde{\tilde{G}}$ входа вычленяется столбец $\tilde{\tilde{G}}_l$, так, что система (9.77) принимает вид (9.80), при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.81). В этом случае на основе соотношений (7.44) для матрицы $\bar{S}_y(\omega)$ спектральной плотности стохастического вектора выхода дискретной системы оказывается справедливым представление

$$\bar{S}_y(\omega)=2\tilde{\tilde{C}}\left(I-\tilde{\tilde{F}}\cos(\omega\Delta t)\right)\left\{I-2\tilde{\tilde{F}}\cos(\omega\Delta t)+\tilde{\tilde{F}}^2\right\}^{-1}\tilde{D}_x\left(\tilde{\tilde{C}}\right)^T. \qquad (9.114)$$

Задача 9.16.4: Исследования $y(k)$ стохастического вектора выхода системы (9.77) при возбуждении всех входов системы векторным «белым шумом» $g(k)=w(k)$ с матрицей дисперсий $V=diag\left(V_l;l=\overline{1,m}\right)$.. Задача решается для системы (9.77) которая сохраняется в первозданном виде, при этом матрица дисперсий $\tilde{D}_x$ вектора состояния агрегированной системы вычисляются с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова (9.82). В этом случае на основе соотношений (7.44) для матрицы $\bar{S}_y(\omega)$ спектральной плотности стохастического вектора выхода дискретной системы оказывается справедливым представление (9.114).

Нетрудно видеть, что для целей скаляризации результатов задач 9.15.4 и 9.16.4 требуется применения к полученным в них матрицам $\bar{S}_y(\omega)$ спектральной плотности выхода процедуры сингулярного разложения этих матриц. В результате получим системы неравенств типа (9.38), записываемые в формах

$$\alpha_m\left(\bar{S}_y(\omega)\right)=\bar{S}_{y_m}\left(\|y\|,\omega\right)\le\bar{S}_y\left(\|y\|,\omega\right)\le\bar{S}_{y_M}\left(\|y\|,\omega\right)=\alpha_M\left(\bar{S}_y(\omega)\right). \qquad (9.115)$$

В неравенствах (9.115), $\alpha_m\left(\bar{S}_y(\omega)\right),\alpha_M\left(\bar{S}_y(\omega)\right)$, соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы спектральной плотности $\bar{S}_y(\omega)$ вектора выхода дискретной системы (9.77) $\forall\omega$, именуемые минорантой и мажорантой функции спектральной плотности стохастического вектора выхода системы.

Контрольные вопросы

1.В чем суть сингулярного разложения матриц?

2.Что такое миноранта и мажоранта векторного процесса?

3.Как произвольная матрица порождает линейную алгебраическую задачу?

4.В каких задачах возникает необходимость в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных непрерывной системы при формировании минорант и мажорант их дисперсий?

5.В каких задачах возникает необходимость в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных непрерывной системы при формировании минорант и мажорант корреляционных функций?

6.В каких задачах возникает необходимость в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных непрерывной системы при формировании минорант и мажорант функций спектральной плотности?

7.В каких задачах возникает необходимость в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных дискретной системы при формировании минорант и мажорант их дисперсий?

8.В каких задачах возникает необходимость в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных дискретной системы при формировании минорант и мажорант корреляционных функций?

9. В каких задачах возникает необходимость в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных дискретной системы при формировании минорант и мажорант функций спектральной плотности?

10.В каких задачах не возникает необходимости в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных непрерывной системы при формировании значений их дисперсий?

11.В каких задачах не возникает необходимости в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных непрерывной системы при формировании корреляционных функций?

12.В каких задачах не возникает необходимости в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных непрерывной системы при формировании функций спектральной плотности?

13.В каких задачах не возникает необходимости в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных дискретной системы при формировании значений их дисперсий?

14.В каких задачах не возникает необходимости в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных дискретной системы при формировании корреляционных функций?

15. В каких задачах не возникает необходимости в использовании процедуры скаляризации стохастических векторных переменных дискретной системы при формировании минорант и мажорант функций спектральной плотности?

10. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Данный раздел учебного пособия качественно отличается от всех предыдущих. Все предыдущие разделы были сориентированы на задачи анализа процессов в непрерывных и дискретных системах по векторам состояния, выхода и ошибки при стохастических экзогенных воздействиях. Настоящий раздел сориентирован на задачи синтеза, который невозможен без банка моделей с назначаемыми показателями качества стохастических процессов по состоянию, выходу и ошибке. Банк моделей должен обеспечить возможность синтеза непрерывных и дискретных систем с заданными значениями дисперсий ошибки или выхода с использованием возможностей модального управления или последовательных компенсаторов, а также аналитически оценивать корреляционную функцию и функцию спектральной плотности выхода проектируемой системы. Банк моделей опирается на аппарат полиномиальных модельных представлений.

10.1. Передаточные функции непрерывных полиномиальных моделей общего вида, параметризованных характеристической частотой

Рассмотрим непрерывную стационарную линейную систему, которая в задаче синтеза должна выполнять функцию эталонной модели,

$$\dot{z}(t)=\Gamma z(t)+Eg(t), z(0)=z(t)|_{t=0}, \eta(t)=Hz(t); \varepsilon(t)=g(t)-\eta(t), \qquad (10.1)$$

в которой $z, g, \eta, \varepsilon -$ соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $\Gamma, E, H -$ соответственно матрицы состояния, входа и выхода; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются вещественнозначными и обладают размерностями $dim(z)=n, dim(g)=dim(\eta)=dim(\varepsilon)=m; dim(\Gamma)=n\times n,$

$dim(E)=n\times m, dim(H)=m\times n.$

Если у системы (10.1) $m>1$, то система (10.1) является системой типа «многомерный вход–многомерный выход» (МИМО–типа), в случае, когда $m=1$, система (10.1) становится системой типа «одномерный вход–одномерный выход» (ОВОВ–типа).

Будем полагать, что экзогенное воздействие $g(t)$, приложенное к входу системы (10.1), является стационарным в широком смысле стохастическим воздействием, которое в зависимости от задачи является или «белым шумом», что позволяет записать $g(t) = w(t)$, или «окрашенным шумом», что позволяет записать $g(t) = \xi(t)$.

Опишем систему (10.1) передаточной матрицей «вход–выход»(ВВ), для которой можно записать

$$\Phi(s) = arg\{\eta(s) = \Phi(s)g(s)\} = H(sI - \Gamma)^{-1}E = diag\{\Phi_j(s); j = \overline{1,m}\}, \quad (10.2)$$

где $\eta(s), g(s)$ – лапласовы образы переменных $\eta(t), g(t)$. Форма (10.2) представления передаточной матрицы эталонной модели (10.1) проектируемой системы МИМО–типа отражает желание разработчика не только наделить сепаратные каналы проектируемой системы требуемыми показателями качества, но и обеспечить их независимость (несвязанность). Такая постановка задачи разработки системы МИМО-типа делает достаточным рассмотрение передаточной функции $\Phi_j(s)$ *j*–го сепаратного канала системы, связывающего *j*–й выход $\eta_j(t)$ с *j*–м входом $g_j(t)$. В дальнейшем индекс j в передаточной функции сепаратного канала, представляющего собой систему ОВОВ–типа, опустим.

Зададим передаточную функцию системы ОВОВ–типа в параметризованной характеристической частотой ω_0 в форме

$$\Phi(s,\omega_0) = \frac{\nu_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \omega_0^i s^{n-i}} = \frac{\nu_n \omega_0^n}{D(s,\omega_0)}, \quad (10.3)$$

где ν_i – определяют характер размещения корней $D(s,\omega_0)$ полинома знаменателя (ПЗ) $\Phi(s,\omega_0)$, ω_0 – определяет размер этого размещения. Поставим задачу анализа общесистемных свойств системы с передаточной функцией (10.3). Сделаем это в форме утверждений.

Утверждение 10.1 (У10.1). Характер размещения корней ПЗ передаточной функции (10.3) совпадает с характером размещения корней ПЗ передаточной функции

$$\Phi(s)=\frac{v_n}{s^n+\sum_{i=1}^{n}v_i s^{n-i}}=\frac{v_n}{D(s)}. \qquad \square(10.4)$$

Доказательство. Разделим числитель и знаменатель передаточной функции (10.3) на ω_0^n, тогда получим

$$\Phi(\bar{s})=\frac{v_n}{\bar{s}^n+\sum_{i=1}^{n}v_i \bar{s}^{n-i}}, \qquad (10.5)$$

где $\bar{s}=s/\omega_0$. ■

Примечание 10.1(П10.1). Доказанное утверждение делает справедливым положение о том, что корни $s_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ полинома $D(s)$ и корни $s_i(\omega_0)\left(i=\overline{1,n}\right)$ полинома $D(s,\omega_0)$ связаны соотношением $s_i(\omega_0)=\omega_0\bar{s}_i\ \left(i=\overline{1,n}\right).$

Утверждение 10.2 (У10.2). Добротность D_1 по скорости системы с передаточной функцией ВВ (10.3) определяется выражением

$$D_1=(v_n\omega_0)/v_{n-1}. \qquad \square(10.6)$$

Доказательство. Добротность по скорости является характеристикой системы в установившемся в кинетическом режиме при входном воздействии $g(t)=\dot{g}_0 t$, изменяющемся с постоянной скоростью $\dot{g}_0$. Содержательно добротность по скорости задается выражением

$$D_1=\dot{g}_0/\varepsilon_y, \qquad (10.7)$$

где ε_y – значение установившейся ошибки, определяемое как $\varepsilon_y=\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)$.

В соответствии с теоремой о конечном значении оригинала можно записать цепочку соотношений

$$\varepsilon_y = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} s\Phi_\varepsilon(s,\omega_0)g(s), \qquad (10.8)$$

где $\varepsilon(s)$ – лапласов образ ошибки $\varepsilon(t)$, $\Phi_\varepsilon(s,\omega_0)$ – передаточная функция (ПФ) системы по ошибке, вычисляемая с помощью соотношений

$$\Phi_\varepsilon(s,\omega_0) = \frac{\varepsilon(s)}{g(s)} = 1-\Phi(s,\omega_0) = \frac{s^n + \nu_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1}\omega_0^{n-1}s}{s^n + \nu_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1}\omega_0^{n-1}s \;+ \nu_n\omega_0^n}. \qquad (10.9)$$

Для входного воздействия $g(t) = \dot{g}_0 t$ его лапласов образ $g(s)$ задается выражением

$$g(s) = \dot{g}_0 / s^2. \qquad (10.10)$$

Если в выражение (10.8) подставить (10.9) и (10.10) и совершить предельный переход $s \to 0$, то получим

$\varepsilon_y = \dot{g}_0 \dfrac{\nu_{n-1}}{\nu_n\omega_0}$, что с использованием (10.7) приводит к (10.6). ■

Утверждение 10.3 (У10.3). Оценка $\hat{\omega}_c$ частоты среза ω_c системы с передаточной функцией ВВ (10.3) определяется выражением

$$\hat{\omega}_c = \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}}\omega_0. \qquad \square(10.11)$$

Доказательство. Частота среза ω_c удовлетворяет соотношению

$$\omega_c = arg\left(\left| W(j\omega) \right|_{\omega=\omega_c} = 1 \right), \qquad (10.12)$$

где передаточная функция $W(s)$ прямой ветви системы с ПФ ВВ (10.3) определяется выражением

$$W(s) = \frac{\eta(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{\nu_n\omega_0^n}{s^n + \nu_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1}\omega_0^{n-1}s}. \qquad (10.13)$$

В силу определения частоты среза (10.12) оказывается справедливой цепочка равенств, доказывающая справедливость соотношения (10.11),

$$|W(j\omega)| = \left| \frac{\nu_n \omega_0^n}{s^n + \nu_1 \omega_0 s^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1} \omega_0^{n-1} s} \right|_{s=j\omega} \Bigg|_{\omega=\omega_c} \cong \frac{\nu_n \omega_0}{\nu_{n-1} \hat{\omega}_c} = 1. \qquad \blacksquare(10.14)$$

Утверждение 10.4 (У10.4). Оценка $\hat{\Delta}_y\omega$ полосы пропускания $\Delta_y\omega = arg\left(\left| \Phi(s,\omega_0) \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega \geq \Delta_y\omega} \leq \delta_y << 1 \right)$ системы с передаточной функцией ВВ (10.3) определяется выражением

$$\hat{\Delta}_y\omega = (\nu_n)^{1/n} \omega_0 / (\delta_y)^{1/n}. \qquad \square(10.15)$$

Доказательство. Рассмотрим определение полосы пропускания $\Delta_y\omega$, задаваемое соотношением

$$\Delta_y\omega = arg\left(\left| \Phi(s,\omega_0) \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega \geq \Delta_y\omega} \leq \delta_y << 1 \right) =$$

$$= arg\left(\left| \frac{\nu_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \omega_0^i s^{n-i}} \right|_{s=j\omega;\ \omega\to\infty} = \frac{\nu_n \omega_0^n}{\omega^n} \leq \delta_y \right) = (\nu_n)^{1/n} \omega_0 / (\delta_y)^{1/n}. \qquad \blacksquare(10.16)$$

Утверждение 10.5 (У10.5). Оценка $\hat{\Delta}_\varepsilon\omega$ полосы пропускания $\Delta_\varepsilon\omega = arg\left(\left| \Phi_\varepsilon(s,\omega_0) \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega \leq \Delta_\varepsilon\omega} \leq \delta_\varepsilon << 1 \right)$ системы с передаточной функцией ВВ (10.3) на уровне δ_ε относительной частотной ошибки определяется выражением

$$\hat{\Delta}_\varepsilon\omega = \delta_\varepsilon \frac{\nu_n \omega_0}{\nu_{n-1}}. \qquad \square(10.17)$$

Доказательство. Рассмотрим определение полосы пропускания $\Delta_\varepsilon\omega$, задаваемое соотношением

$$\Delta_\varepsilon\omega = arg\left(\left|\Phi_\varepsilon(s,\omega_0)\right|_{s=j\omega}\Big|_{\omega\le\Delta_\varepsilon\omega} \le \delta_\varepsilon << 1\right) =$$

$$= arg\left(\left|\frac{s^n + \nu_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1}\omega_0^{n-1}s}{s^n + \nu_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1}\omega_0^{n-1}s \;+ \nu_n\omega_0^n}\right|_{s=j\omega;\ \omega\to 0} = \frac{\nu_{n-1}\omega}{\nu_n\omega_0} \le \delta_\varepsilon\right) = \delta_\varepsilon\frac{\nu_n\omega_0}{\nu_{n-1}}\Bigg\}.\blacksquare \quad (10.18)$$

Утверждение 10.5 (У10.5). Запас $\Delta\varphi$ устойчивости по фазе системы с передаточной функцией ВВ (10.3) в силу положений утверждения 10.1 не зависит от характеристической частоты ω_0, а потому определяется в силу (10.4) цепочкой соотношений

$$\Delta\varphi = \pi + arg\left\{W(s)\big|_{s=j\omega_c}\right\} = \frac{\pi}{2} + arg\left\{\frac{\nu_n}{s^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\nu_i s^{n-1-i}}\Bigg|_{s=j\frac{\nu_n}{\nu_{n-1}}}\right\}. \qquad (10.19)$$

В (10.19) на основании (10.4) использовано представление

$$W(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{\nu_n}{\left(s^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\nu_i s^{n-1-i}\right)s}. \qquad \square$$

Доказательство утверждения 10.5 строится на подстановке в выражение для оценки частоты среза (10.11) значения ω_0=1. ■

Утверждение 10.6 (У10.6). Длительность переходного процесса $t_\text{п} = t_\text{п}(\omega_0)$ системы с передаточной функцией ВВ (10.3) удовлетворяет соотношению

$$t_\text{п} = t_\text{п}(\omega_0) = t_\text{п}(\omega_0 = 1)/\omega_0, \qquad (10.20)$$

где $t_\text{п}(\omega_0 = 1)$ время переходного процесса системы с передаточной функцией ВВ (10.4). □

Доказательство. Справедливость утверждения 10.6 следует из примечания 10.1. ■

10.2. Передаточные функции непрерывных полиномиальных моделей частного вида, параметризованные характеристической частотой

Рассматриваются общесистемные характеристики систем с передаточными функциями ВВ вида (10.4), коэффициенты $v_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ которых задают структуры $s_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ корней ПЗ $D\left(s,\omega_0\right)$ с биномиальным размещением Ньютона и круговым размещением Баттерворта.

10.2.1. Непрерывные полиномиальные модели с биномиальным размещением Ньютона корней полинома знаменателя передаточной функции, параметризованной характеристической частотой

Непрерывные полиномиальные модели с биномиальным размещением Ньютона корней полинома $D\left(s,\omega_0\right)$, параметризованного характеристической частотой, задаются передаточной функцией «вход–выход»

$$\Phi\left(s,\omega_0\right)=\frac{v_n\omega_0^n}{s^n+\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\omega_0^i s^{n-i}}=\frac{v_n\omega_0^n}{D\left(s,\omega_0\right)}. \qquad (10.21)$$

Корни полинома $D\left(s,\omega_0\right)$ с биномиальным размещением Ньютона вычисляются в силу соотношения

$$s_i=\omega_0\ \left(i=\overline{1,n}\right), \qquad (10.22)$$

коэффициенты v_i полинома $D\left(s,\omega_0\right)$ вычисляются в силу соотношений

$$v_i=C_n^i\omega_0^i\left(i=\overline{1,n}\right), \qquad (10.23)$$

где C_n^i - число сочетаний из *n* по *i*.

В таблице 10.1 приведены общесистемные характеристики системы (10.21) с размещением Ньютона корней полинома знаменателя $D\left(s,\omega_0\right)$

Таблица 10.1

Порядок n	Аналитическое представление полиномов Ньютона $D(s,\omega_0)$	σ, %	$t_\sigma\omega_0$	$t_П\omega_0$	$\frac{D}{\omega_0}$	$\Delta\varphi°$	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$			
								M≥0.707	M≥0.05	|1-M|≤0.05	δ≤0.05
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	$\{s+\omega_0\}$	0	-	3	1	90	1	1	20	0.32	0.05
2.	$\{s^2+2\omega_0 s+\omega_0^2\}$	0	-	4.8	0.5	76.3	0.5	0.65	4.47	0.25	0.025
3.	$\begin{Bmatrix} s^3+3\omega_0 s^2+ \\ +3\omega_0^2 s+\omega_0^3 \end{Bmatrix}$	0	-	6	0.333	71.25	0.333	0.5	2.714	0.17	0.017

Таблица 10.1 содержит стандартный набор показателей качества процессов в системах, описываемых (10.21), параметризованных характеристической частотой ω_0. В графе 3 указана величина перерегулирования , в графе 4 – время достижения выброса, в графе 5 – время переходного процесса, в графе 6 – добротность по скорости, в графе 7 – запас устойчивости по фазе, в графе 8 – частота среза, в графах 9-12 указаны полосы пропускания системы.

10.2.2. Непрерывные полиномиальные модели с круговым размещением Баттерворта корней полинома знаменателя передаточной функции, параметризованной характеристической частотой

Непрерывные полиномиальные модели с круговым размещением Баттерворта корней полинома $D(s,\omega_0)$, параметризованного характеристической частотой, задаются передаточной функцией «вход–выход»

$$\Phi(s,\omega_0)=\frac{\nu_n\omega_0^n}{s^n+\sum_{i=1}^{n}\nu_i\omega_0^i s^{n-i}}=\frac{\nu_n\omega_0^n}{D(s,\omega_0)}. \qquad (10.24)$$

Корни полинома $D(s,\omega_0)$ с круговым размещением Баттерворта вычисляются в силу соотношений

$$s_i = \omega_0 \exp\left(j\frac{n+2i-1}{2n}\pi \right) = \omega_0\left(\cos\left(\frac{n+2i-1}{2n}\pi \right) + j\sin\left(\frac{n+2i-1}{2n}\pi \right) \right) \left(i = \overline{1,n}\right) \quad (10.25)$$

при этом нумерация корней осуществляется против часовой стрелки от вещественной оси в правой полуплоскости комплексной плоскости, коэффициенты $D(s,\omega_0)$ задаются в форме

$$v_1 = \frac{1}{\sin(\pi/2n)}\omega_0,\ v_i = \frac{v_{i-1}\cos((i-1)\pi/2n)}{\sin(i\pi/2n)}\omega_0^i,\ \left(i = \overline{1,n-1}\right),\ v_n = \omega_0^n. \quad (10.26)$$

В таблице 10.2 приведены общесистемные характеристики системы (10.24) с размещением Баттерворта корней полинома знаменателя $D(s,\omega_0)$. Таблица 10.2 содержит стандартный набор показателей качества процессов в системах, описываемых (10.24), параметризованных характеристической частотой ω_0. В графе 3 указана величина перерегулирования, в графе 4 – время достижения выброса, в графе 5 – время переходного процесса, в графе 6 – добротность по скорости, в графе 7 – запас устойчивости по фазе, в графе 8 – частота среза, в графах 9-12 указаны полосы пропускания системы.

Таблица 10.2

Порядок n	Аналитическое представление полиномов Баттерворта $D(s,\omega_0)$	σ, %	$t_\sigma\omega_0$	$t_П\omega_0$	$\frac{D}{\omega_0}$	$\Delta\varphi°$	$\frac{\omega_c}{\omega_0}$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$			
								M≥0.707	M≥0.05	|1-M|≤0.05	δ≤0.05
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1.	$\{s+\omega_0\}$		-	3	1	90	1	1	20	0.32	0.05
2.	$\{s^2+1.414\omega_0 s+\omega_0^2\}$	5	3.8	4.5	0.7	65.5	0.7	1	4.47	0.52	0.035
3.	$\left\{\begin{matrix} s^3+2\omega_0 s^2+ \\ +2\omega_0^2 s+\omega_0^3 \end{matrix}\right\}$	9	4.95	6.25	0.5	60.5	0.5	1	2.714	0.62	0.025

10.3. Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей общего вида при экзогенном воздействии типа «белый шум»

Решение задач, вынесенных в заголовок параграфа, начнем с вычисления матриц дисперсии вектора состояния и дисперсии выхода. Тогда для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка** получим представление передаточной функции (10.3)

$$\Phi(s,\omega_0)=\frac{v\omega_0}{s+v\omega_0}. \tag{10.27}$$

Соответствующая (10.27) векторно–матричная запись (10.1) характеризуется матричными компонентами

$$\Gamma=\left[-v\omega_0\right],\ E=\left[v\omega_0\right],\ H=\left[1\right]. \tag{10.28}$$

Подстановка матриц (10.28) в матричное уравнение Ляпунова (4.13) в результате его решения дает для дисперсий стохастических переменных системы с передаточной функцией (10.27)

$$D_z=\left[\frac{Nv\omega_0}{2}\right],\ D_\eta=HD_xH^T=\left[\frac{Nv\omega_0}{2}\right]. \tag{10.29}$$

Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка** получим представление передаточной функции (10.3)

$$\Phi(s,\omega_0)=\frac{v_2\omega_0^2}{s^2+v_1\omega_0 s+v_2\omega_0^2}. \tag{10.30}$$

Соответствующая (10.30) векторно–матричная запись (10.1) характеризуется матричными компонентами

$$\Gamma=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -v_2\omega_0^2 & -v_1\omega_0\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}0\\ v_2\omega_0^2\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}. \tag{10.31}$$

Подстановка матриц (10.31) в матричное уравнение Ляпунова (4.13) в результате его решения дает для дисперсий стохастических переменных системы с передаточной функцией (10.30)

$$D_z=\frac{Nv_2\omega_0}{2v_1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & v_2\omega_0^2\end{bmatrix},\ D_\eta=HD_zH^T=\left[\frac{Nv_2\omega_0}{2v_1}\right]. \tag{10.32}$$

Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка** получим представление передаточной функции (10.3)

$$\Phi(s,\omega_0)=\frac{\nu_3\omega_0^3}{s^3+\nu_1\omega_0 s^2+\nu_2\omega_0^2 s+\nu_3\omega_0^3}. \qquad (10.33)$$

Соответствующая (10.33) векторно–матричная запись (10.1) характеризуется матричными компонентами

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\nu_3\omega_0^3 & -\nu_2\omega_0^2 & -\nu_1\omega_0 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_3\omega_0^3 \end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (10.34)$$

Подстановка матриц (10.34) в матричное уравнение Ляпунова (4.13) в результате его решения дает для дисперсий стохастических переменных системы с передаточной функцией (10.33)

$$D_z=\frac{N\omega_0}{2(\nu_1\nu_2-\nu_3)}\begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & -\nu_3\omega_0^2 \\ 0 & \nu_3\omega_0^2 & 0 \\ -\nu_3\omega_0^2 & 0 & \nu_2\nu_3^2\omega_0^4 \end{bmatrix},\ D_\eta=\begin{bmatrix}\frac{N\omega_0\nu_1}{2(\nu_1\nu_2-\nu_3)}\end{bmatrix}. \qquad (10.35)$$

Следует заметить, что для непрерывной полиномиальной модели общего вида третьего порядка в представлениях матрицы дисперсии D_z стохастического вектора состояния и дисперсии выхода D_η наличествует в знаменателях компонентов условие устойчивости Гурвица для системы третьего порядка. Таким образом, с приближением к границе устойчивости системы дисперсии стохастических переменных растут.

Корреляционные функции $R_\eta(\tau)$ и функции $S_\eta(\omega)$ спектральных плотностей выходов рассмотренных непрерывных полиномиальных моделей общего вида при воздействии на их вход стохастическим стационарным в широком смысле непрерывным «белым шумом» $w(t)$ интенсивности *N* вычисляются с помощью выражений (4.23) и (4.30)

$$R_\eta(\tau)=He^{\Gamma\tau}D_zH^T,\ \tau\ge 0,\quad S_\eta(\omega)=-2H\Gamma(\Gamma^2+\omega^2 I)^{-1}D_zH^T. \qquad (10.36)$$

10.4.Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей общего вида при экзогенном воздействии типа окрашенный «экспоненциально коррелированный» шум

Рассматривается непрерывные полиномиальные модели общего вида (10.1),(10.3), имеющие в зависимости от размерности представления матричных компонентов (10.28), (10.31) и (10.34). Система возбуждается экзогенным стохастическим воздействием $g(t)=\xi(t)$ стационарным в широком смысле окрашенным шумом, формируемым с помощью формирующего фильтра (ФФ), имеющего в силу (7.2) представление

$$\dot{x}_{\phi}(t)=F_{\phi}x_{\phi}(t)+G_{\phi}w(t);\ \ x_{\phi}(0)=0;\ \xi(t)=C_{\phi}x_{\phi}(t), \tag{10.37}$$

матричные компоненты которого для случая «экспоненциально коррелированного» шума имеют реализацию

$$F_{\phi}=[-\Omega_a];\ G_{\phi}=[\Omega_a];\ \ C_{\phi}=[1]. \tag{10.38}$$

Как указывалось в разделе 7 с тем, чтобы можно было пользоваться уравнением Ляпунова вида (4.13), необходимо построить агрегированную систему, которая будет возбуждаться экзогенным стохастическим воздействием $w(t)$ стационарным в широком смысле типа «белый шум» с матрицей интенсивностей N. Для этого формируется вектор $\tilde{z}(t)$ состояния агрегированной системы $\tilde{z}(t)=\left[z^T(t)\quad x_{\phi}(t)^T\right]^T$. Требуется сформировать: $\tilde{D}_z, D_{\xi}, D_z, D_{\eta}, D_{\varepsilon}, R_{\eta}(\tau),\ S_{\eta}(\omega)$.

10.4.1. Полные аналитические представления дисперсий выхода и ошибки, параметризованные характеристической частотой

Тогда для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка** с передаточной функцией (10.3) в форме (10.27) векторно–матричная запись (10.1) характеризуется матричными компонентами (10.28). При этом агрегированная система

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\tilde{z}}(t)=\tilde{\Gamma}\tilde{z}(t)+\tilde{E}w(t);\ \xi(t)=\tilde{H}_{\xi}\tilde{z}(t);\ z(t)=\tilde{H}_z\tilde{z}(t);\\&\eta(t)=\tilde{H}_{\eta}\tilde{z}(t);\ \varepsilon(t)=\tilde{H}_{\varepsilon}\tilde{z}(t),\end{aligned}\right\} \tag{10.39}$$

где $\left.\begin{array}{l}\tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix}\Gamma & EC_\phi\\ 0 & F_\phi\end{bmatrix},\ \tilde{E}=\begin{bmatrix}0\\ G_\phi\end{bmatrix},\ \tilde{H}_\xi=\begin{bmatrix}0 & C_\phi\end{bmatrix},\ \tilde{H}_z=\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix},\\ \tilde{H}_\eta=\begin{bmatrix}H & 0\end{bmatrix},\ \tilde{H}_\varepsilon=\begin{bmatrix}-H & C_\phi\end{bmatrix}.\end{array}\right\}$ (10.40)

При этом для рассматриваемого случая перечисленные матрицы принимают вид

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix}-\nu\omega_0 & \nu\omega_0\\ 0 & -\Omega_a\end{bmatrix},\ \tilde{E}=\begin{bmatrix}0\\ \Omega_a\end{bmatrix},\ \tilde{H}_\xi=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\ \tilde{H}_z=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\\ \tilde{H}_\eta=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{H}_\varepsilon=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\end{array}\right\}. \quad (10.41)$$

Решение уравнения Ляпунова вида (4.13), которое для рассматриваемого класса задач записывается в форме

$$\tilde{\Gamma}\tilde{D}_z+\tilde{D}_z\tilde{\Gamma}^T=-\tilde{E}N\tilde{E}^T, \quad (10.42)$$

с учетом представления (10.41) матричных компонентов (10.42), дает

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{D}_z=\dfrac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\nu\omega_0}{\nu\omega_0+\Omega_a} & \dfrac{\nu\omega_0}{\nu\omega_0+\Omega_a}\\ \dfrac{\nu\omega_0}{\nu\omega_0+\Omega_a} & 1\end{bmatrix},\ D_\xi=\dfrac{N\Omega_a}{2},\ D_z=\dfrac{N\Omega_a}{2}\cdot\dfrac{\nu\omega_0}{\nu\omega_0+\Omega_a},\\ D_\eta=\dfrac{N\Omega_a}{2}\cdot\dfrac{\nu\omega_0}{\nu\omega_0+\Omega_a},\ D_\varepsilon=\tilde{D}_{z_{11}}+\tilde{D}_{z_{22}}-2\tilde{D}_{z_{12}}=\\ =\dfrac{N\Omega_a}{2}\cdot\left(1-\dfrac{\nu\omega_0}{\nu\omega_0+\Omega_a}\right)=\dfrac{N\Omega_a}{2}\cdot\dfrac{\Omega_a}{\nu\omega_0+\Omega_a}.\end{array}\right\} \quad (10.43)$$

Матричные компоненты агрегированной системы (10.39) для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка** с передаточной функцией (10.3) в форме (10.30) принимают вид

$$\tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\nu_2\omega_0^2 & -\nu_1\omega_0 & \nu_2\omega_0^2\\ 0 & 0 & -\Omega_a\end{bmatrix},\ \tilde{E}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \Omega_a\end{bmatrix},\ \tilde{H}_\xi=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \tilde{H}_z=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad (10.44)$$

$$\tilde{H}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10.45)$$

Решение матричного уравнения Ляпунова (10.42) с учетом представлений (10.44) и (10.45) дает

$$\left.\begin{aligned} \tilde{D}_z &= \frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\nu_2\omega_0^2 + \nu_2\omega_0\Omega_a/\nu_1}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} & 0 & \dfrac{\nu_2\omega_0^2}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} \\ 0 & \dfrac{\nu_2^2\omega_0^3\Omega_a/\nu_1}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} & \dfrac{\nu_2\omega_0^2\Omega_a}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} \\ \dfrac{\nu_2\omega_0^2}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} & \dfrac{\nu_2\omega_0^2\Omega_a}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} & 1 \end{bmatrix} \\ D_\xi &= \frac{N\Omega_a}{2},\ D_z = \frac{N\Omega_a}{2}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{\nu_2\omega_0^2 + \omega_0\Omega_a/\nu_1}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\nu_2^2\omega_0^3\Omega_a/\nu_1}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2} \end{bmatrix}, \\ D_\eta &= \frac{N\Omega_a}{2}\cdot\frac{\nu_2\omega_0^2 + \nu_2\,\omega_0\Omega_a/\nu_1}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2},\ D_\varepsilon = \tilde{D}_{z_{11}} + \tilde{D}_{z_{33}} - 2\tilde{D}_{z_{13}} = \\ &= \frac{N\Omega_a}{2}\cdot\frac{\nu_2\omega_0\Omega_a/\nu_1 + \nu_1\omega_0 + \Omega_a}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_a + \Omega_a^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.46)$$

Матричные компоненты агрегированной системы (10.39) для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка** с передаточной функцией (10.3) в форме (10.33) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu_3\omega_0^3 & -\nu_2\omega_0^2 & -\nu_1\omega_0 & \nu_3\omega_0^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_a \end{bmatrix},\ \tilde{E}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_a \end{bmatrix},\ \tilde{H}_\xi=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \\
&\tilde{H}_z=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\tilde{H}_\eta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{H}_\varepsilon=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \qquad (10.47)$$

Решение матричного уравнения Ляпунова (10.42) с учетом представлений (10.47) дает

$$\tilde{D}_z=\frac{N\Omega_a}{2}\begin{bmatrix} \tilde{D}_{z11} & 0 & \tilde{D}_{z13} & \tilde{D}_{z14} \\ 0 & \tilde{D}_{z22} & 0 & \tilde{D}_{z24} \\ \tilde{D}_{z31} & 0 & \tilde{D}_{z33} & \tilde{D}_{z34} \\ \tilde{D}_{z41} & \tilde{D}_{z42} & \tilde{D}_{z43} & 1 \end{bmatrix},$$

где $\tilde{D}_{z11}=\dfrac{(\nu_3-\nu_2\nu_1)\nu_3\omega_0^3+\nu_3\nu_1\omega_0\Omega_a^2+\nu_3(\nu_1\omega_0)^2\Omega_a}{(\nu_3-\nu_2\nu_1)Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)}$,

$\tilde{D}_{z13}=\dfrac{\nu_3^2\omega_0^3\Omega_a^2+\nu_3^2\nu_1\omega_0^4\Omega_a}{(\nu_3-\nu_2\nu_1)Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)}$, $\tilde{D}_{z14}=\dfrac{\nu_3\omega_0^3}{Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)}$,

$\tilde{D}_{z22}=\dfrac{\nu_3^2\omega_0^3\Omega_a^2+\nu_3^2\nu_1\omega_0^4\Omega_a}{(\nu_2\nu_1-\nu_3)Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)}$, $\tilde{D}_{z24}=\dfrac{\nu_3\omega_0^3\Omega_a}{Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)}$, $\tilde{D}_{z31}=\tilde{D}_{z13}$,

$\tilde{D}_{z33}=\dfrac{(\nu_3-\nu_2\nu_1)\left(\nu_3\omega_0^3\right)^2\Omega_a+\left(\nu_3^2\nu_1\omega_0^4\Omega_a+\nu_3^2\omega_0^3\Omega_a^2\right)\nu_2\omega_0^2}{(\nu_2\nu_1-\nu_3)Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)}$,

$\tilde{D}_{z41}=\tilde{D}_{z14}$, $\tilde{D}_{z42}=\tilde{D}_{z24}$, $\tilde{D}_{z43}=\tilde{D}_{z34}$,

$Q_{a3}(\omega_0,\Omega_a)=\nu_3\omega_0^3+\nu_2\omega_0^2\Omega_a+\nu_1\omega_0\Omega_a^2+\Omega_a^3$;

$$
\left.
\begin{aligned}
&D_\xi = \frac{N\Omega_a}{2},\ D_z = \frac{N\Omega_a}{2}\cdot\begin{bmatrix} \tilde{D}_{z11} & 0 & \tilde{D}_{z13} \\ 0 & \tilde{D}_{z22} & 0 \\ \tilde{D}_{z31} & 0 & \tilde{D}_{z33} \end{bmatrix};\\
&D_\eta = \frac{N\Omega_a}{2}\,\frac{(\nu_3-\nu_2\nu_1)\nu_3\omega_0^3+\nu_3\nu_1\omega_0\Omega_a^2+\nu_3(\nu_1\omega_0)^2\Omega_a}{(\nu_3-\nu_2\nu_1)\left(\nu_3\omega_0^3+\nu_2\omega_0^2\Omega_a+\nu_1\omega_0\Omega_a^2+\Omega_a^3\right)};\\
&D_\varepsilon = \tilde{D}_{z_{11}}+\tilde{D}_{z_{44}}-2\tilde{D}_{z_{14}} =\\
&=\frac{N\Omega_a}{2}\,\frac{(\nu_3-\nu_2\nu_1)\Omega_a^3+(2\nu_3-\nu_2\nu_1)\nu_1\omega_0\Omega_a^2+\left(\nu_3\nu_1^2+\nu_3\nu_2-\nu_1\nu_2^2\right)\omega_0^2\Omega_a}{(\nu_3-\nu_2\nu_1)\left(\nu_3\omega_0^3+\nu_2\omega_0^2\Omega_a+\nu_1\omega_0\Omega_a^2+\Omega_a^3\right)}
\end{aligned}
\right\}.(10.48)
$$

Корреляционные функции $R_\eta(\tau)$ и функции $S_\eta(\omega)$ спектральных плотностей выходов рассмотренных непрерывных полиномиальных моделей общего вида при воздействии на их вход стохастическим стационарным в широком смысле непрерывным окрашенным «экспоненциально коррелированным» шумом $\xi(t)$ вычисляются с помощью выражений вида (7.12) и (7.15)

$$
R_\eta(\tau)=\tilde{H}e^{\tilde{\Gamma}\tau}\tilde{D}_z\tilde{H}^T,\ \tau\ge 0,\quad S_\eta(\omega)=-2\tilde{H}\tilde{\Gamma}(\tilde{\Gamma}^2+\omega^2 I)^{-1}\tilde{D}_z\tilde{H}^T. \qquad (10.49)
$$

10.4.2. Полные аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой

Формирование полных аналитических представлений относительных дисперсий выхода и ошибки ПМ, параметризованных относительной характеристической частотой опирается на использовании:

– $\overline{D}_\eta = D_\eta / D_\xi$ – относительной дисперсии выхода ПДМ,

– $\overline{D}_\varepsilon = D_\varepsilon / D_\xi$ – относительной дисперсии ошибки ПДМ,

– $\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_a$ – относительной характеристической частоты.

Переход от полных аналитических представлений дисперсий выхода и ошибки ПМ, полученных в предыдущем параграфе, осуществляется с помощью двух процедур:

– деления левой и правой частей на дисперсию D_ξ выхода формирующего фильтра окрашенного стохастического воздействия типа «экспоненциально коррелированный» шум,

– деления числителей и знаменателей правых частей на Ω_a^n.

В результате этих процедур получим:

1.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка**

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu\overline{\omega}_0}{\nu\overline{\omega}_0 + 1};\ \overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{\nu\overline{\omega}_0 + 1}; \tag{10.50}$$

2.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка**

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_2\overline{\omega}_0^2 + \nu_2\,\overline{\omega}_0/\nu_1}{\nu_2\overline{\omega}_0^2 + \nu_1\overline{\omega}_0 + 1}\ ;\ \overline{D}_\varepsilon = \frac{\nu_2\overline{\omega}_0/\nu_1 + \nu_1\overline{\omega}_0 + 1}{\nu_2\overline{\omega}_0^2 + \nu_1\overline{\omega}_0 + 1}; \tag{10.51}$$

3. Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка**

$$\left.\begin{aligned}
\overline{D}_\eta &= \frac{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)\nu_3\overline{\omega}_0^3 + \nu_3\nu_1^2\overline{\omega}_0^2 + \nu_3\nu_1\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)\left(\nu_3\overline{\omega}_0^3 + \nu_2\overline{\omega}_0^2 + \nu_1\overline{\omega}_0 + 1\right)};\\
\overline{D}_\varepsilon &= \frac{(\nu_3 - \nu_2\nu_1) + (2\nu_3 - \nu_2\nu_1)\nu_1\overline{\omega}_0 + \left(\nu_3\nu_1^2 + \nu_3\nu_2 - \nu_1\nu_2^2\right)\overline{\omega}_0^2}{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)\left(\nu_3\overline{\omega}_0^3 + \nu_2\overline{\omega}_0^2 + \nu_1\overline{\omega}_0 + 1\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.52}$$

10.4.3. Асимптотические аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой

Переход от полных аналитических представлений относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованных относительной характеристической частотой, к асимптотическим аналитическим представлениям относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованных относительной характеристической частотой, осуществляются с помощью двух предельных переходов:

1. $\overline{\omega}_0 \to 0\ \&\ \overline{\omega}_0 \neq 0$;

2. $\overline{\omega}_0 \to \infty\ \&\ \overline{\omega}_0 \neq \infty$.

В результате этих переходов получим:

1.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка:**

при $\overline{\omega}_0 \to 0\ \&\ \overline{\omega}_0 \neq 0$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu\overline{\omega}_0}{1};\ \overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{\nu\overline{\omega}_0 + 1}; \qquad (10.53)$$

при $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu}{\nu + 1/\overline{\omega}_0};\ \overline{D}_\varepsilon = \frac{1/\overline{\omega}_0}{\nu + 1/\overline{\omega}_0} \qquad (10.54)$$

2.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка:**

при $\overline{\omega}_0 \to 0$ & $\overline{\omega}_0 \neq 0$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_2\,\overline{\omega}_0/\nu_1}{\nu_1\overline{\omega}_0 + 1};\ \overline{D}_\varepsilon = \frac{(\nu_2/\nu_1 + \nu_1)\overline{\omega}_0 + 1}{\nu_1\overline{\omega}_0 + 1}; \qquad (10.55)$$

при $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_2 + \nu_2/\nu_1\overline{\omega}_0}{\nu_2 + \nu_1/\overline{\omega}_0};\ \overline{D}_\varepsilon = \frac{(\nu_2/\nu_1 + \nu_1)/\overline{\omega}_0}{\nu_2 + \nu_1/\overline{\omega}_0}; \qquad (10.56)$$

3. Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка:**

при $\overline{\omega}_0 \to 0$ & $\overline{\omega}_0 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}_\eta &= \frac{\nu_3\nu_1\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)(\nu_1\overline{\omega}_0 + 1)};\\ \overline{D}_\varepsilon &= \frac{(\nu_3 - \nu_2\nu_1) + (2\nu_3 - \nu_2\nu_1)\nu_1\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)(\nu_1\overline{\omega}_0 + 1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.57)$$

при $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}_\eta &= \frac{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)\nu_3 + \nu_3\nu_1^2/\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)};\\ \overline{D}_\varepsilon &= \frac{(\nu_3\nu_1^2 + \nu_3\nu_2 - \nu_1\nu_2^2)/\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_2\nu_1)(\nu_3 + \nu_2/\overline{\omega}_0)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.58)$$

10.5. Стохастические характеристики непрерывных полиномиальных моделей общего вида при экзогенном воздействии типа окрашенный шум вида «нерегулярная качка»

Рассматривается непрерывные полиномиальные модели общего вида (10.1), (10.3), имеющие в зависимости от размерности представления матричных компонентов (10.28), (10.31) и (10.34). Система возбуждается экзогенным стохастическим воздействием $g(t)=\xi(t)$ стационарным в широком смысле окрашенным шумом, формируемым с помощью формирующего фильтра (ФФ), имеющего в силу (7.2) представление

$$\dot{x}_{\phi}(t)=F_{\phi}x_{\phi}(t)+G_{\phi}w(t);\;\; x_{\phi}(0)=0;\; \xi(t)=C_{\phi}x_{\phi}(t), \qquad (10.59)$$

матричные компоненты которого для случая стохастического воздействия типа «нерегулярная качка» имеют реализацию

$$F_{\phi}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{\kappa}^2 & -2\varsigma\Omega_{\kappa} \end{bmatrix};\; G_{\phi}=\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_{\kappa}^2 \end{bmatrix};\;\; C_{\phi}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.. \qquad (10.60)$$

Как указывалось в разделе 7 с тем, чтобы можно было пользоваться уравнением Ляпунова вида (4.13), необходимо построить агрегированную систему, которая будет возбуждаться экзогенным стохастическим воздействием $w(t)$ стационарным в широком смысле типа «белый шум» с матрицей интенсивностей N. Для этого формируется вектор $\tilde{z}(t)$ состояния агрегированной системы $\tilde{z}(t)=\begin{bmatrix} z^T(t) & x_{\phi}(t)^T \end{bmatrix}^T$. Требуется сформировать: $\tilde{D}_z, D_{\xi}, D_z, D_{\eta}, D_{\varepsilon}, R_{\eta}(\tau),\; S_{\eta}(\omega)$.

10.5.1.Полные аналитические представления дисперсий выхода и ошибки, параметризованные характеристической частотой

Тогда для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка** с передаточной функцией (10.3) в форме (10.27) векторно–матричная запись (10.1) характеризуется матричными компонентами (10.28). При этом агрегированная система

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\tilde{z}}(t)=\tilde{\Gamma}\tilde{z}(t)+\tilde{E}w(t);\; \xi(t)=\tilde{H}_{\xi}\tilde{z}(t); z(t)=\tilde{H}_z\tilde{z}(t); \\ &\eta(t)=\tilde{H}_{\eta}\tilde{z}(t); \varepsilon(t)=\tilde{H}_{\varepsilon}\tilde{z}(t), \end{aligned}\right\} \qquad (10.61)$$

$$\text{где } \left.\begin{array}{l} \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma & EC_\phi \\ 0 & F_\phi \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_\phi \end{bmatrix}, \tilde{H}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & C_\phi \end{bmatrix}, \tilde{H}_z = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{H}_\eta = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -H & C_\phi \end{bmatrix}. \end{array}\right\}. \qquad (10.62)$$

При этом для рассматриваемого случая перечисленные матрицы принимают вид

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\nu\omega_0 & \nu\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\Omega_к^2 & -2\varsigma\Omega_к \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_к^2 \end{bmatrix}, \tilde{H}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{H}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}\right\}. \qquad (10.63)$$

Решение уравнения Ляпунова вида (4.13), которое для рассматриваемого класса задач записывается в форме

$$\tilde{\Gamma}\tilde{D}_z + \tilde{D}_z\tilde{\Gamma}^T = -\tilde{E}N\tilde{E}^T, \qquad (10.64)$$

с учетом представления (10.63) матричных компонентом (10.62) дает

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{D}_z = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{z_{11}} & \tilde{D}_{z_{12}} & \tilde{D}_{z_{13}} \\ \tilde{D}_{z_{21}} & \dfrac{N\Omega_к}{4\varsigma} & 0 \\ \tilde{D}_{z_{31}} & 0 & \dfrac{N\Omega_к^3}{4\varsigma} \end{bmatrix}, \text{ где } \tilde{D}_{z_{11}} = D_z = D_\eta = \dfrac{N\Omega_к}{4\varsigma} \cdot \dfrac{\nu\omega_0\left(\nu\omega_0 + 2\varsigma\Omega_к\right)}{\left(\nu\omega_0\right)^2 + 2\varsigma\Omega_к\nu\omega_0 + \Omega_к^2}, \\ \tilde{D}_{z_{12}} = \tilde{D}_{z_{21}} = \tilde{D}_{z_{11}}, \tilde{D}_{z_{13}} = \tilde{D}_{z_{31}} = -\dfrac{N\Omega_к}{4\varsigma} \cdot \dfrac{\Omega_к^2\nu\omega_0}{\left(\nu\omega_0\right)^2 + 2\varsigma\Omega_к\nu\omega_0 + \Omega_к^2}, D_\xi = \dfrac{N\Omega_к}{4\varsigma}, \\ D_\varepsilon = \tilde{D}_{z_{11}} + \tilde{D}_{z_{22}} - 2\tilde{D}_{z_{12}} = \dfrac{N\Omega_к}{4\varsigma} \cdot \dfrac{\Omega_к^2}{\left(\nu\omega_0\right)^2 + 2\varsigma\Omega_к\nu\omega_0 + \Omega_к^2}. \end{array}\right\} \qquad (10.65)$$

Матричные компоненты агрегированной системы (10.61) для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка** с

передаточной функцией (10.3) в форме (10.30) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2\omega_0^2 & -v_1\omega_0 & v_2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\Omega_{\text{к}}^2 & -2\varsigma\Omega_{\kappa} \end{bmatrix}, \tilde{E}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_{\text{к}}^2 \end{bmatrix}, \tilde{H}_{\xi}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
&\tilde{H}_{\eta}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_{\varepsilon}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (10.66)$$

Решение матричного уравнения Ляпунова (10.64) с учетом представлений (10.66) дает

$$\tilde{D}_z=\begin{bmatrix} \tilde{D}_{z_{11}} & 0 & \tilde{D}_{z_{13}} & \tilde{D}_{z_{14}} \\ 0 & \tilde{D}_{z_{22}} & \tilde{D}_{z_{23}} & \tilde{D}_{z_{24}} \\ \tilde{D}_{z_{31}} & \tilde{D}_{z_{32}} & \dfrac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma} & 0 \\ \tilde{D}_{z_{41}} & \tilde{D}_{z_{42}} & 0 & \dfrac{N\Omega_{\kappa}^3}{4\varsigma} \end{bmatrix} \text{ где}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{D}_{z_{11}}=D_{\eta}=\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma}\cdot\frac{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+(2\varsigma\Omega_{\kappa})^2v_2\omega_0^2+\left(2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_2/v_1\right)\omega_0}{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+\left(v_1^2+2v_2\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\Omega_{\kappa}^2\omega_0^2+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_1\omega_0+\Omega_{\kappa}^4}, \\
&\tilde{D}_{z_{12}}=\tilde{D}_{z_{21}}=0, \\
&\tilde{D}_{z_{13}}=\tilde{D}_{z_{31}}=\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma}\cdot\frac{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+\Omega_{\kappa}^2v_2\left((2\varsigma)^2-1\right)\omega_0^2}{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+\left(v_1^2+2v_2\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\Omega_{\kappa}^2\omega_0^2+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_1\omega_0+\Omega_{\kappa}^4}, \\
&\tilde{D}_{z_{14}}=\tilde{D}_{z_{41}}=-\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma}\cdot\frac{\Omega_{\kappa}^2v_1v_2\omega_0^3+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_2\omega_0^2}{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+\left(v_1^2+2v_2\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\Omega_{\kappa}^2\omega_0^2+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_1\omega_0+\Omega_{\kappa}^4}, \\
&\tilde{D}_{z_{22}}=\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma}\cdot\frac{\Omega_{\kappa}^2v_2^2\omega_0^4+\left(2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_2^2/v_1\right)\omega_0^3}{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+\left(v_1^2+2v_2\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\Omega_{\kappa}^2\omega_0^2+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_1\omega_0+\Omega_{\kappa}^4}, \\
&\tilde{D}_{z_{23}}=\tilde{D}_{z_{32}}=\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma}\cdot\frac{\Omega_{\kappa}^2v_1v_2\omega_0^3+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_2\omega_0^2}{v_2^2\omega_0^4+2\varsigma\Omega_{\kappa}v_1v_2\omega_0^3+\left(v_1^2+2v_2\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\Omega_{\kappa}^2\omega_0^2+2\varsigma\Omega_{\kappa}^3v_1\omega_0+\Omega_{\kappa}^4}, \\
&\tilde{D}_{z_{33}}=D_{\xi}=\frac{N\Omega_{\kappa}}{4\varsigma},\ \tilde{D}_{z_{34}}=\tilde{D}_{z_{43}}=0,
\end{aligned}\right\} \quad (10.67)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{D}_{z_{24}} = \tilde{D}_{z_{42}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{\Omega_к^2 v_2^2\omega_0^4 - \Omega_к^4 v_2\omega_0^2}{v_2^2\omega_0^4 + 2\varsigma\Omega_к v_1 v_2\omega_0^3 + \left(v_1^2 + 2v_2\left(2\varsigma^2 - 1\right)\right)\Omega_к^2\omega_0^2 + 2\varsigma\Omega_к^3 v_1\omega_0 + \Omega_к^4},\\
&\tilde{D}_{z_{44}} = \frac{N\Omega_к^3}{4\varsigma},\\
&D_\varepsilon = \tilde{D}_{z_{11}} - \tilde{D}_{z_{13}} - \tilde{D}_{z_{31}} + \tilde{D}_{z_{33}} = \tilde{D}_{z_{11}} - 2\tilde{D}_{z_{13}} + \tilde{D}_{z_{33}} =\\
&\quad = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{v_1^2\Omega_к^2\omega_0^2 + 2\varsigma\Omega_к^3\left(v_1 + v_2/v_1\right)\omega_0 + \Omega_к^4}{v_2^2\omega_0^4 + 2\varsigma\Omega_к v_1 v_2\omega_0^3 + \left(v_1^2 + 2v_2\left(2\varsigma^2 - 1\right)\right)\Omega_к^2\omega_0^2 + 2\varsigma\Omega_к^3 v_1\omega_0 + \Omega_к^4}.
\end{aligned}\right\} \quad (10.68)$$

Матрицы агрегированной системы (10.61) для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка** имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -v_3\omega_0^3 & -v_2\omega_0^2 & -v_1\omega_0 & v_3\omega_0^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_к^2 & -2\varsigma\Omega_к \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \Omega_к^2 \end{bmatrix}, \tilde{H}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\\
&\tilde{H}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \quad (10.69)$$

Решение матричного уравнения Ляпунова (10.64) с учетом представлений (10.69) дает

$$\tilde{D}_z = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{z_{11}} & 0 & \tilde{D}_{z_{13}} & \tilde{D}_{z_{14}} & \tilde{D}_{z_{15}} \\ 0 & \tilde{D}_{z_{22}} & 0 & \tilde{D}_{z_{24}} & \tilde{D}_{z_{25}} \\ \tilde{D}_{z_{31}} & 0 & \tilde{D}_{z_{33}} & \tilde{D}_{z_{34}} & \tilde{D}_{z_{35}} \\ \tilde{D}_{z_{41}} & \tilde{D}_{z_{42}} & \tilde{D}_{z_{43}} & \tilde{D}_{z_{44}} & 0 \\ \tilde{D}_{z_{51}} & \tilde{D}_{z_{52}} & \tilde{D}_{z_{53}} & 0 & \tilde{D}_{z_{55}} \end{bmatrix}$$ где

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{D}_{z_{11}} = D_\eta = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{11}(\omega_0,\Omega_к)}{(\nu_1\nu_2-\nu_3)Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_\eta(\omega_0,\Omega_к)}{(\nu_1\nu_2-\nu_3)Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\\
&\tilde{D}_{z_{12}} = \tilde{D}_{z_{21}} = 0,\ \tilde{D}_{z_{13}} = \tilde{D}_{z_{31}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{13}(\omega_0,\Omega_к)}{(\nu_1\nu_2-\nu_3)Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\\
&\tilde{D}_{z_{14}} = \tilde{D}_{z_{41}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{14}(\omega_0,\Omega_к)}{Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\tilde{D}_{z_{15}} = \tilde{D}_{z_{51}} = -\frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{15}(\omega_0,\Omega_к)}{Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\\
&\tilde{D}_{z_{22}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{22}(\omega_0,\Omega_к)}{(\nu_1\nu_2-\nu_3)Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\tilde{D}_{z_{23}} = \tilde{D}_{z_{32}} = 0,\\
&\tilde{D}_{z_{24}} = \tilde{D}_{z_{42}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{24}(\omega_0,\Omega_к)}{Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\tilde{D}_{z_{33}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{33}(\omega_0,\Omega_к)}{(\nu_1\nu_2-\nu_3)Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)}\\
&\tilde{D}_{z_{34}} = \tilde{D}_{z_{43}} = -\frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{34}(\omega_0,\Omega_к)}{Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\tilde{D}_{z_{35}} = \tilde{D}_{z_{53}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_{35}(\omega_0,\Omega_к)}{Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)},\\
&\tilde{D}_{z_{44}} = D_\xi = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma},\tilde{D}_{z_{45}} = \tilde{D}_{z_{54}} = 0,\tilde{D}_{z_{55}} = \frac{N\Omega_к^3}{4\varsigma},\\
&D_\varepsilon = D_\eta + D_\xi - 2\tilde{D}_{z_{14}} = \frac{N\Omega_к}{4\varsigma}\cdot\frac{P_\varepsilon(\omega_0,\Omega_к)}{(\nu_1\nu_2-\nu_3)Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к)}
\end{aligned}\right\} \quad (10.70)$$

Представление полиномов $Q_{к3}(\omega_0,\Omega_к), P_\eta(\omega_0,\Omega_к), P_\varepsilon(\omega_0,\Omega_к),$

$P_{13}(\omega_0,\Omega_к), P_{14}(\omega_0,\Omega_к), P_{15}(\omega_0,\Omega_к), P_{22}(\omega_0,\Omega_к), P_{24}(\omega_0,\Omega_к), P_{25}(\omega_0,\Omega_к),$
$P_{33}(\omega_0,\Omega_к), P_{34}(\omega_0,\Omega_к), P_{35}(\omega_0,\Omega_к), P_{45}(\omega_0,\Omega_к)$ в силу их громоздкости в основном тексте пособия не приводятся, они размещены в Приложении1.

Корреляционные функции $R_\eta(\tau)$ и функции $S_\eta(\omega)$ спектральных плотностей выходов рассмотренных непрерывных полиномиальных моделей общего вида при воздействии на их вход стохастическим стационарным в широком смысле непрерывным окрашенным шумом

$\xi(t)$ вида «нерегулярная качка» вычисляются с помощью выражений вида (10.48).

10.5.2. Полные аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой

Формирование полных аналитических представлений относительных дисперсий выхода и ошибки ПМ, параметризованных относительной характеристической частотой как и в параграфе 10.4.2 опирается на использовании представлений:

– $\overline{D}_\eta = D_\eta / D_\xi$ – относительной дисперсии выхода ПДМ,

– $\overline{D}_\varepsilon = D_\varepsilon / D_\xi$ – относительной дисперсии ошибки ПДМ,

– $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_к$ – относительной характеристической частоты.

Переход от полных аналитических представлений дисперсий выхода и ошибки ПМ, полученных в предыдущем параграфе, осуществляется с помощью двух процедур:

– деления левой и правой частей на дисперсию D_ξ выхода формирующего фильтра окрашенного стохастического воздействия типа «нерегулярная качка»,

– деления числителей и знаменателей правых частей на $\Omega_к^n$.

В результате этих процедур получим:

1.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка**

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu\overline{\omega}_0\left(\nu\overline{\omega}_0 + 2\varsigma\right)}{\left(\nu\overline{\omega}_0\right)^2 + 2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1}, \overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{\left(\nu\overline{\omega}_0\right)^2 + 2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1}. \tag{10.71}$$

2.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка**

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}_\eta &= \frac{\nu_2^2\overline{\omega}_0^4 + 2\varsigma\nu_1\nu_2\overline{\omega}_0^3 + (2\varsigma)^2\nu_2\overline{\omega}_0^2 + (2\varsigma\nu_2/\nu_1)\overline{\omega}_0}{\nu_2^2\overline{\omega}_0^4 + 2\varsigma\nu_1\nu_2\overline{\omega}_0^3 + \left(\nu_1^2 + 2\nu_2\left(2\varsigma^2 - 1\right)\right)\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1}, \\ \overline{D}_\varepsilon &= \frac{\nu_1^2\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\left(\nu_1 + \nu_2/\nu_1\right)\overline{\omega}_0 + 1}{\nu_2^2\overline{\omega}_0^4 + 2\varsigma\nu_1\nu_2\overline{\omega}_0^3 + \left(\nu_1^2 + 2\nu_2\left(2\varsigma^2 - 1\right)\right)\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1} \end{aligned}\right\} \tag{10.72}$$

3. Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка** в силу громоздкости представлений относительных дисперсий $\overline{D}_\eta$, $\overline{D}_\varepsilon$ в основном тексте пособия не приводятся, они размещены в приложении 1.

10.5.3. Асимптотические аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой

Переход от полных аналитических представлений относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованных относительной характеристической частотой, к асимптотическим аналитическим представлениям относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованных относительной характеристической частотой, осуществляются как и в параграфе 10.4.3 с помощью двух предельных переходов:

1. $\overline{\omega}_0 \to 0$ & $\overline{\omega}_0 \neq 0$;

2. $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$.

В результате этих переходов получим:

1.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **первого порядка:**

при $\overline{\omega}_0 \to 0$ & $\overline{\omega}_0 \neq 0$

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1}, \overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1};$$

(10.73)

при $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu^2}{\nu^2 + 2\varsigma\nu/\overline{\omega}_0}; \overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{(\nu\overline{\omega}_0)^2}; \qquad (10.74)$$

2.Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **второго порядка:**

при $\overline{\omega}_0 \to 0$ & $\overline{\omega}_0 \neq 0$

$$\overline{D}_\eta = \frac{(2\varsigma\nu_2/\nu_1)\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1}, \overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1}, \qquad (10.75)$$

при $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 + 2\varsigma\nu_1\nu_2/\overline{\omega}_0}, \overline{D}_\varepsilon = \frac{\nu_1^2/\overline{\omega}_0^2}{\nu_2^2 + 2\varsigma\nu_1\nu_2/\overline{\omega}_0}. \qquad (10.76)$$

3. Для непрерывной полиномиальной модели общего вида **третьего порядка:**

при $\overline{\omega}_0 \to 0$ & $\overline{\omega}_0 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned}\overline{D}_{\eta} &= \frac{2\varsigma\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0}{(\nu_2\nu_1-\nu_3)(2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0+1)};\\ \overline{D}_{\varepsilon} &= \frac{2\varsigma\nu_1^2\nu_2\overline{\omega}_0+(\nu_2\nu_1-\nu_3)}{(\nu_2\nu_1-\nu_3)(2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0+1)}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.77)$$

при $\overline{\omega}_0 \to \infty$ & $\overline{\omega}_0 \neq \infty$

$$\left.\begin{aligned}\overline{D}_{\eta} &= \frac{\nu_3^2+2\varsigma\nu_2\nu_3/\overline{\omega}_0+4\varsigma^2\nu_1\nu_2/\overline{\omega}_0^2}{\nu_3^2+2\varsigma\nu_2\nu_3/\overline{\omega}_0+\left(\nu_2^2+2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\right)/\overline{\omega}_0^2};\\ \overline{D}_{\varepsilon} &= \frac{\nu_2^2/\overline{\omega}_0^2}{\nu_3^2+2\varsigma\nu_2\nu_3/\overline{\omega}_0+\left(\nu_2^2+2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\right)/\overline{\omega}_0^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.78)$$

Контрольные вопросы

1.Как аналитически задаются такие показатели ПДМ, описываемой передаточной функцией (10.3), как: добротность по скорости, частота среза, полоса пропускания по выходу на уровне величины δ_y, полосы пропускания по ошибке на уровне величины δ_ε и запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$?

2.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «белый шум»?

3.Как выглядят асимптотические аналитические представления дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «белый шум»?

4.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум?

5.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий ошибки ПДМ (10.3), параметризованные характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум?

6.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные относительной

характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум?

7.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий ошибки ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум?

8.Как выглядят асимптотические аналитические представления относительных дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум?

9.Как выглядят асимптотические аналитические представления относительных дисперсий ошибки ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум?

10..Как выглядят полные аналитические представления дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «нерегулярная качка»?

11.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий ошибки ПДМ (10.3), параметризованные характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «нерегулярная качка»?

12.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «нерегулярная качка»?

13.Как выглядят полные аналитические представления дисперсий ошибки ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «нерегулярная качка»?

14.Как выглядят асимптотические аналитические представления относительных дисперсий выхода ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «нерегулярная качка»?

15.Как выглядят асимптотические аналитические представления относительных дисперсий ошибки ПДМ (10.3), параметризованные относительной характеристической частотой, при стохастическом воздействии типа «нерегулярная качка»?

11. СИНТЕЗ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ ПРИ НОМИНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ОБЪЕКТА НА ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИСПЕРСИЙ ИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Напомним, что проектируемая система представляет собой функциональное объединение исходного технического объекта (объекта управления) и устройства управления (устройства формирования сигнала управления (УФСУ), регулятора (Р)), поэтому понятие «синтез системы» следует понимать как «синтез устройства управления (УУ)» техническим объектом (ТО). В настоящем пособии рассматривается задача синтеза УУ, реализуемая в двух вариантах:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

Оба варианта синтеза УУ опирается на концепцию полиномиальной динамической модели (ПДМ), обладающей желаемыми динамическими показателями качества процессов в переходном и установившемся режимах, выполняющей функцию эталонной модели. В случае использования первого варианта синтеза УУ ПДМ задается с использованием векторно-матричного формализма метода пространства состояний в форме (10.1)

$$\dot{z}(t)=\Gamma(\omega_0)z(t)+E(\omega_0)g(t), z(0)=z(t)|_{t=0}, \eta(t)=Hz(t); \varepsilon(t)=g(t)-\eta(t), \quad (11.1)$$

в которой z, g, η, ε – соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $\Gamma(\omega_0), E(\omega_0), H$ – соответственно матрицы состояния, входа и выхода, причем матрицы состояния и входа параметризованы характеристической частотой ω_0; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются вещественнозначными и обладают размерностями $\dim(z)=n, \dim(g)=\dim(\eta)=\dim(\varepsilon)=m; dim(\Gamma(\omega_0))=n\times n,$ $dim(E(\omega_0))=n\times m, dim(H)=m\times n.$ Если у системы (11.1) $m>1$, то система (11.1) является системой типа «многомерный вход–многомерный выход» (МВМВ–типа), в случае, когда $m=1$, система (11.1) становится системой типа «одномерный вход–одномерный выход» (ОВОВ–типа). При этом тройка матриц $\{E(\omega_0), \Gamma(\omega_0), H\}$ должна удовлетворять условию

$$\Phi(s,\omega_0)|_{s=0}=\left\{H(sI-\Gamma(\omega_0))^{-1}E(\omega_0)\right\}|_{s=0}=H(-\Gamma(\omega_0))^{-1}E(\omega_0)=I, \quad (11.2)$$

обеспечивающему равенство выхода и входа при неподвижном положении системы.

В случае использования первого варианта синтеза УУ проектируемая система (ПС) принимает вид

$$\dot{x}(t) = F(\omega_0)x(t) + G(\omega_0)g(t),\ x(0) = x(t)|_{t=0},\ y(t) = Cx(t);\ \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \quad (11.3)$$

получаемый объединением исходного ТО

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x(t)|_{t=0},\ y(t) = Cx(t); \quad (11.4)$$

и УУ, формирующего сигнал управления в соответствии с алгоритмом

$$u(t) = K_g(\omega_0)g(t) - K(\omega_0)x(t), \quad (11.5)$$

так что оказываются справедливыми матричные соотношения

$$F(\omega_0) = A - BK(\omega_0),\ G(\omega_0) = BK_g(\omega_0).. \quad (11.6)$$

В соотношениях (11.3)–(11.5) x, g, y, ε – соответственно вектора состояния ТО и ПС, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $F(\omega_0)$ и $A, G(\omega_0)$ и B, C, $K(\omega_0)$ и $K_g(\omega_0)$ – соответственно матрицы состояния ПС и ТО, входа ПС и управления ТО, выхода ТО и ПС, отрицательной обратной связи по состоянию и прямой связи по экзогенному воздействию; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются вещественнозначными и обладают размерностями

$$\dim(x) = \dim(z) = n, \dim(g) = \dim(y) = \dim(\varepsilon) = m, \dim(u) = r; dim(F(\omega_0)) =$$
$$= \dim(A) = n \times n,\ dim(G(\omega_0)) = n \times m,\ \dim(B) = n \times r, dim(K(\omega_0)) = r \times n,$$
$$= \dim(K_g(\omega_0)) = m \times r.$$

С тем, чтобы система (11.3) обладала динамическими показателями системы (11.1) необходимо выполнения неособого векторного подобия для любого момента времени

$$x(t) = Mz(t), z(t) = M^{-1}x(t),\ \forall t. \quad (11.7)$$

Дифференцирование (11.7) по времени дает соотношения

$$\dot{x}(t) = M\dot{z}(t), \dot{z}(t) = M^{-1}\dot{x}(t),\ \forall t. \quad (11.8)$$

Тогда умножение на матрицу неособого подобия M слева уравнения (11.1) и использование соотношений подобия (11.7) порождает векторно–матричные равенства

$$M\dot{z}(t) = \dot{x}(t) = M\Gamma(\omega_0)M^{-1}x(t) + ME(\omega_0)g(t),\ \eta(t) = HM^{-1}x(t). \quad (11.9)$$

Сравнение (11.9) и (11.3) с учетом равенства $\eta(t) = y(t)$ приводит к системе матричных соотношений

$$F(\omega_0) = M\Gamma(\omega_0)M^{-1},\ G(\omega_0) = ME(\omega_0),\ C = HM^{-1}. \quad (11.10)$$

В свою очередь, (11.6) и (11.10) позволяют записать

$$A - BK(\omega_0) = M\Gamma(\omega_0)M^{-1}, \quad (11.11)$$

что порождает пару матричных уравнений

$$M\Gamma(\omega_0) - AM = -BH, \quad (11.12)$$

$$H = K(\omega_0)M\,. \qquad (11.13)$$

Матричное выражение (11.12) является матричным уравнением Сильвестра относительно матрицы M отношения подобия (11.7). Матричное уравнение (11.13) при вычисленной из решения уравнения Сильвестра (11.12) матрицы M и заданной матрице H, удовлетворяющей условиям $H = \arg\{observ(\Gamma(\omega_0), H)\,\&\,\dim(H) = \dim(B^T)\}$, позволяет вычислить матрицу отрицательной обратной связи по вектору состояния ТО с помощью соотношения

$$K(\omega_0) = HM^{-1}. \qquad (11.14)$$

Матрица $K_g(\omega_0)$ прямых связей по экзогенному воздействию в (11.5) может быть вычислена с помощью соотношений

$$K_g(\omega_0) = (B^T B)^{-1} B^T G(\omega_0) = (B^T B)^{-1} B^T ME(\omega_0), \qquad (11.15)$$

или

$$\left.\begin{aligned} K_g(\omega_0) &= \arg\{\Phi(s,\omega_0)|_{s=0} = \{C(sI - F(\omega_0))^{-1} G(\omega_0)\}|_{s=0} = I\} = \\ &= \arg\{C(-F(\omega_0))^{-1} BK_g(\omega_0) = CM(-\Gamma(\omega_0))^{-1} M^{-1} BK_g(\omega_0) = I\} = \\ &= \{CM(-\Gamma(\omega_0))^{-1} M^{-1} B\}^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Вернемся к соотношению (11.5). Нетрудно видеть два его недостатка:

- оно использует физически неизмеримое экзогенное воздействие $g(t)$,
- оно не обеспечивает замыкания системы по выходу с единичной отрицательной обратной связью.

Отмеченными недостатками не обладает алгоритм формирования сигнала управления на основании (11.5), записанный в форме

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= K_g(\omega_0)g(t) - K(\omega_0)x(t) = K_g(\omega_0)g(t) - K_y(\omega_0)y(t) - K_x(\omega_0)x(t) = \\ &= K_\varepsilon(\omega_0)\varepsilon(t) - K_x(\omega_0)x(t). \end{aligned}\right\} \qquad (11.17)$$

В (11.17)

$$K_\varepsilon(\omega_0) = K_y(\omega_0) = K_g(\omega_0),\ K_x(\omega_0) = K(\omega_0) - K_g(\omega_0)C. \qquad (11.18)$$

В случае использования второго варианта синтеза УУ отношение «вход–выход» проектируемой системы, должно задаваться передаточной функцией (ПФ) ПДМ вида (11.2), записываемой в форме

$$\Phi(s,\omega_0) = \frac{y(s)}{g(s)} = \frac{\nu_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \omega_0^i s^{n-i}}. \qquad (11.19)$$

Как указывалось ранее, в (11.19) коэффициенты $v_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ полинома знаменателя передаточной функции определяют характер размещения его корней на комплексной плоскости, а характеристическая частота ω_0 определяет размер этого размещения. Если передаточная функция (11.19) реализуется с помощи структуры, прямая ветвь которой с передаточной функцией $W(s,\omega_0)$ охвачена единичной отрицательной обратной связью по выходу, то для передаточной функции прямой ветви проектируемой системы можно записать

$$W(s,\omega_0)=\frac{y(s)}{\varepsilon(s)=g(s)-y(s)}=\frac{\Phi(s,\omega_0)}{1-\Phi(s,\omega_0)}=\frac{v_n\omega_0^n}{s^n+\sum_{i=1}^{n-1}v_i\omega_0^i s^{n-i}}. \qquad (11.20)$$

Выражение (11.20) является алгебраической основой для аналитического конструирования последовательного компенсатора. Действительно, если сформировать передаточную функцию $W_{TO}(s)$ «вход–выход» управляемого технического объекта (11.4) в силу соотношения

$$W_{TO}(s)=C(sI-A)^{-1}B, \qquad (11.21)$$

то передаточную функцию (11.20) можно реализовать последовательным соединением последовательного компенсатора (ПК) с передаточной функцией $W_{ПК}(s,\omega_0)$ и технического объекта так, что оказывается справедливой запись

$$W(s,\omega_0)=W_{ПК}(s,\omega_0)W_{TO}(s). \qquad (11.22)$$

В итоге для передаточной функции ПК получаем

$$W_{ПК}(s,\omega_0)=W(s,\omega_0)/W_{TO}(s). \qquad (11.23)$$

Теперь поставим естественный вопрос: «Чем отличается процедура синтеза непрерывных систем при конечномерных экзогенных воздействиях от процедуры синтеза при стохастических воздействиях?». Ответ дадим на основе сравнения приводимых ниже алгоритмов синтеза проектируемых систем.

Алгоритм 11.1(А11.1) синтеза непрерывных систем при конечномерных экзогенных воздействиях:

1.Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения неравенств

$$t_{П}\le t_{ПR},\sigma\le\sigma_R,D_1\ge D_{1R},\delta\le\delta_R, \qquad (11.24)$$

где $t_{ПR}$, σ_R, D_{1R}, δ_R - соответственно требуемые значения длительности переходного процесса и его перерегулирование, добротности по скорости и величины относительной частотной ошибки при гармоническом внешнем воздействии.

2.Задать модель технического объекта в одной из форм (11.4) и (11.21), при этом этапе самым информативным показателем объекта является его размерность «n».

3.В зависимости от требований к величине перерегулирования σ_{R} выбрать ПДМ (11.1), (11.19) размерности ТО с необходимым размещением собственных значений матрицы состояния (11.1) или корней полинома знаменателя (11.19).

4.Определить значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D(\omega_0) \ge D_{\text{R}}\right), \omega_0 = \arg\left(\delta(\omega_0) \le \delta_{\text{R}}\right)\right\}. \quad (11.25)$$

5.Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

Алгоритм 11.2(А11.2) синтеза непрерывных систем при стохастических экзогенных воздействиях:

1.Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения одного из двух наборов неравенств

$$\left.\begin{array}{l} t_{\text{П}} \le t_{\text{ПR}}, \sigma \le \sigma_{\text{R}}, D_{\varepsilon} \le D_{\varepsilon\text{R}}, \\ t_{\text{П}} \le t_{\text{ПR}}, \sigma \le \sigma_{\text{R}}, D_{y} \le D_{y\text{R}} \end{array}\right\} \quad (11.26)$$

где $t_{\text{ПR}}$, $\sigma_{\text{R}}, D_{\varepsilon\text{R}}, D_{y\text{R}}$,–соответственно требуемые значения длительности переходного процесса и его перерегулирование, дисперсии ошибки и выхода при стохастическом экзогенном воздействии.

2.Задать модель технического объекта в одной из форм (11.4) и (11.21), при этом этапе самым информативным показателем объекта является его размерность «n».

3.В зависимости от требований к величине перерегулирования σ_{R} выбрать ПДМ (11.1), (11.19) размерности ТО с необходимым размещением собственных значений матрицы состояния (11.1) или корней полинома знаменателя (11.19).

4.Определить значение характеристической частоты ω_0 из одного из условий в зависимости от постановки задачи

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_{\varepsilon}(\omega_0) \le D\varepsilon_{\text{R}}\right)\right\}, \\ \omega_0 = \min\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_{y}(\omega_0) \le D_{y_{\text{R}}}\right)\right\} \end{array}\right\}. \quad (11.27)$$

5.Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

Нетрудно видеть, что ключевым моментом как в алгоритме А11.1, так и в А11.2 является вычисление характеристической частоты ω_0 ПДМ. На этом в основном будет сосредоточено основное внимание в задачах, рассматриваемых ниже.

11.1. Две задачи стохастической динамики непрерывных систем: динамика систем с минимальными значениями дисперсией выхода и ошибки слежения

Рассматривается задача формирования системы (11.3)

$$\dot{x}(t)=F(\omega_0)x(t)+G(\omega_0)g(t), x(0)=x(t)|_{t=0}, y(t)=Cx(t); \varepsilon(t)=g(t)-y(t), \quad (11.28)$$

в которой $g(t)-$центрированное стохастическое воздействия из числа тех, что описаны в пособии ранее, $x(0)=x(t)|_{t=0}=0$ так, что все переменные в системе (11.28) являются центрированными стохастическими в общем случае векторными. При синтезе системы (11.28) основными пользовательскими характеристиками являются:

– $D_y(\omega_0)=M\{y(t)y^T(t)\}-$дисперсия (матрица дисперсий) выхода;

– $D_\varepsilon(\omega_0)=M\{\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\}-$дисперсия (матрица дисперсий) ошибки воспроизведения стохастического экзогенного воздействия.

Дополнительными характеристиками системы (11.28) являются :

– $R_y(\tau,\omega_0)=M\{y(t+\tau)y^T(t)\}-$корреляционная функция (матрица) выхода системы;

– $S_y(\omega,\omega_0)=F\{R_y(\tau,\omega_0)\}-$функция (матрица) спектральной плотности выхода системы, являющаяся прямым преобразованием Фурье корреляционной функции (матрицы) выхода.

Для оценки точностных показателей при стохастическом экзогенном воздействии используются дисперсии (матрицы дисперсий) выхода и ошибки, а также значения среднеквадратических отклонений $\sigma_y(\omega_0),\sigma_\varepsilon(\omega_0)$ соответственно выхода и ошибки, связанных с дисперсиями этих переменных соотношениями $\sigma_y(\omega_0)=(D_y(\omega_0))^{1/2}, \sigma_\varepsilon(\omega_0)=(D_\varepsilon(\omega_0))^{1/2}$. Корреляционная функция (матрица) выхода используется для оценки интервала корреляции стохастической переменной выхода для формирования алгоритма

дополнительной цифровой фильтрации выхода. Функция (матрица) спектральной плотности выхода используется для анализа частотных свойств системы. Все перечисленные характеристики системы (11.28) параметризованы характеристической частотой ω_0, что свидетельствует о том, что при изменении характеристической частоты претерпевают изменения и перечисленные выше характеристики системы.

Выделим две системные ситуации в теории и практике непрерывных систем, функционирующих в условиях стохастических экзогенных воздействий.

Первая системная ситуация характеризуется тем, что стохастическое экзогенное воздействие $g(t)$ является полезным сигналом, который должен быть воспроизведен с минимальной ошибкой, т.е. с минимальной дисперсией ошибки $D_\varepsilon(\omega_0)$. Вторая системная ситуация характеризуется тем, что стохастическое экзогенное воздействие $g(t)$ является помехой и его влияние на выход системы должен быть минимальным, т.е. минимальной должна быть дисперсия $D_y(\omega_0)$ выхода системы. Как одна так и другая системная ситуации разрешается аргументированным выбором характеристической частоты ω_0. При этом все алгоритмы, конструируемые в настоящем разделе, опираются на результаты раздела 10 пособия, представленные в виде асимптотических аналитических представлений относительных дисперсий выхода и ошибки как функций относительной характеристической частоты. Содержательно алгоритмы будут представлять собой расширение алгоритма А11.2 с учетом двух отмеченных выше возможных постановок синтеза систем при стохастическом воздействии.

11.2. Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения непрерывной системе на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие $g(t)$ является помехой, а заданное значение дисперсии выхода следует понимать как малое значение. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 11.3(А11.3) синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 11.2 с тем условием, что надо использовать только второе условие положения (11.26).
2.Выполнить п.2 алгоритма 11.2.
3.Выполнить п.3 алгоритма 11.2.
4.Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ стохастического экзогенного воздействия типа «экспоненциально коррелированный шум» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде апериодического звена первого порядка.
5.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «экспоненциально коррелированный шум» значение сопрягающей частоты Ω_a ФФ.
6.Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{\text{yR}} = D_{\text{yR}} / D_\xi$.
7.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a$.
8.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_y = \overline{D}_y(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\text{yR}}$ (10.53), (10.55) и (10.57) для соответствующей размерности исходного ТО, полагая равенство дисперсий выхода проектируемой системы и формируемой ПДМ $D_y = D_\eta \to \overline{D}_y = \overline{D}_\eta$,

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu \overline{\omega}_0}{1} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_2 \, \overline{\omega}_0 / \nu_1}{\nu_1 \overline{\omega}_0 + 1} \quad \text{при } n = 2,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_1 \nu_3 \overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_1 \nu_2)(\nu_1 \overline{\omega}_0 + 1)} \quad \text{при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.
9.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a) = \overline{\omega}_0 \Omega_a$.
10. Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = min\{\omega_0 = arg(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}), \omega_0 = arg(D_y(\omega_0) \le D_{y_{\text{R}}})\}.$$

11. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

11.3. Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии ошибки слежения за стохастическим экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения непрерывной системе на заданное значение дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие $g(t)$ является полезным сигналом, воспроизведение которого должно осуществляться с малой дисперсией ошибки слежения. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 11.4 (А11.4) синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии ошибки слежения при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 11.2 с тем условием, что надо использовать только первое условие положения (11.26).

2.Выполнить п.2 алгоритма 11.2.

3.Выполнить п.3 алгоритма 11.2.

4.Выполнить п.4 алгоритма 11.3.

5.Выполнить п.5 алгоритма 11.3.

6.Оценить требуемое значение относительной дисперсии ошибки слежения $\overline{D}_{\varepsilon \mathrm{R}} = D_{\varepsilon \mathrm{R}} / D_{\xi}$.

7. Выполнить п.7 алгоритма 11.3.

8.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_{\varepsilon} = \overline{D}_{\varepsilon}(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\varepsilon \mathrm{R}}$ (10.54), (10.56) и (10.58) для соответствующей размерности исходного ТО

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{1/\overline{\omega}_0}{\nu + 1/\overline{\omega}_0} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{(\nu_2/\nu_1 + \nu_1)/\overline{\omega}_0}{\nu_2 + \nu_1/\overline{\omega}_0} \text{ при } n = 2,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{\left(\nu_3\nu_1^2 + \nu_3\nu_2 - \nu_1\nu_2^2\right)/\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_1\nu_2)(\nu_3 + \nu_2/\overline{\omega}_0)} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

9.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_a) = \overline{\omega}_0\Omega_a$.

10.Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}), \omega_0 = \arg(D_{\varepsilon}(\omega_0) \le D_{\varepsilon \mathrm{R}})\right\}.$$

11. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

– в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
– в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

11.4. Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения непрерывной системе на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие $g(t)$ является помехой, а заданное значение дисперсии выхода следует понимать как малое значение. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 11.5(А11.5) синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 11.2 с тем условием, что надо использовать только второе условие положения (11.26).

2.Выполнить п.2 алгоритма 11.2.

3.Выполнить п.3 алгоритма 11.2.

4.Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ дисперсии стохастического экзогенного воздействия типа «нерегулярная качка» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде колебательного звена .

5.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «нерегулярная качка» значения коэффициента демпфирования ς и сопрягающей частоты $\Omega_к$ ФФ.

6.Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{\text{yR}} = D_{\text{yR}} / D_\xi$.

7.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_к$.

8.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_y = \overline{D}_y(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\text{yR}}$ (10.73), (10.75) и (10.77) для соответствующей размерности исходного ТО, полагая равенство дисперсий выхода проектируемой системы и формируемой ПДМ $D_y = D_\eta \to \overline{D}_y = \overline{D}_\eta$,

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{(2\varsigma\nu_2/\nu_1)\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1} \text{ при } n = 2,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0}{(\nu_1\nu_2 - \nu_3)(2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1)} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

9.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_a) = \overline{\omega}_0\Omega_a$.

10.Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = min\{\omega_0 = arg(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}), \omega_0 = arg(D_y(\omega_0) \le D_{y_{\text{R}}})\}.$$

11. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

11.5. Алгоритм синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии ошибки слежения за стохастическим экзогенным воздействием типа «нерегулярная качка»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения непрерывной системе на заданное значение дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие $g(t)$ является полезным сигналом, воспроизведение которого должно осуществляться с малой дисперсией ошибки слежения. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 11.6 (А11.6) синтеза непрерывной системы на заданное значение дисперсии ошибки слежения при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 11.2 с тем условием, что надо использовать только первое условие положения (11.26).

2.Выполнить п.2 алгоритма 11.2.

3.Выполнить п.3 алгоритма 11.2.

4.Выполнить п.4 алгоритма 11.5.

5.Выполнить п.5 алгоритма 11.5.

6.Оценить требуемое значение относительной дисперсии ошибки слежения $\overline{D}_{\varepsilon \mathrm{R}} = D_{\varepsilon \mathrm{R}} / D_{\xi}$.

7.Выполнить п.7 алгоритма 11.5.

8.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_{\varepsilon} = \overline{D}_{\varepsilon}(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\varepsilon \mathrm{R}}$ (10.74), (10.76) и (10.78) для соответствующей размерности исходного ТО

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{1}{(\nu \overline{\omega}_0)^2} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{\nu_1^2 / \overline{\omega}_0^2}{\nu_2^2 + 2\varsigma \nu_1 \nu_2 / \overline{\omega}_0} \text{ при } n = 2,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{\nu_2^2 / \overline{\omega}_0^2}{\nu_3^2 + 2\varsigma \nu_2 \nu_3 / \overline{\omega}_0 + \left(\nu_2^2 + 2\left(2\varsigma^2 - 1\right)\nu_1 \nu_3\right) / \overline{\omega}_0^2} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

9.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg\left(\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a\right) = \overline{\omega}_0 \Omega_a$.

10.Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\mathrm{п}}(\omega_0) \le t_{\Pi \mathrm{R}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_{\varepsilon}(\omega_0) \le D_{\varepsilon \mathrm{R}}\right)\right\}.$$

11. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

Контрольные вопросы

1.В чем суть двух задач стохастической динамики непрерывных систем?

2.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «белый шум»?

3.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «белый шум»?

4.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
5.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
6.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
7.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
8.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
9.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
10.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
11.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
12.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
13.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?

14.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
15.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?

12. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПРИ НОМИНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИСПЕРСИЙ ИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Решение проблемы, вынесенной в заголовок раздела, опирается на концепцию дискретной системы как системы цифрового управления непрерывным техническим объектом (НТО). Единство модельного представления цифрового и непрерывного компонентов системы в этом случае достигается рассмотрением процессов в них в моменты времени $t = k(\Delta t)$, где $\Delta t -$ интервал дискретности, $k = 0,1,...\infty -$ дискретное время, выраженное числом интервалов дискретности. Модельное представление дискретного технического объекта (ДТО) принимает вид

$$x(k+1) = \overline{A}x(k) + \overline{B}u(k),\ x(0) = x(k)|_{k=0(k\Delta t=0)},\ y(k) = \overline{C}x(k). \qquad (12.1)$$

В свою очередь НТО имеет векторно-матричное описание

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x(t)|_{t=0}, y(t) = Cx(t). \qquad (12.2)$$

В случае, если сигнал $u(k)$ цифрового управления НТО выводится из устройства его формирования без задержки, то векторно–матричные компоненты представлений (12.1) и (12.2) удовлетворяют условиям:

$$\dim(x(k)) = \dim(x(t)) = n,\ \dim(u(k)) = \dim(u(t)) = r,\ \dim(y(k)) = \dim(y(t)) = m,$$
$$\dim(\overline{A}) = \dim(A) = n \times n,\ \dim(\overline{B}) = \dim(B) = n \times r,\ \dim(\overline{C}) = \dim(C) = m \times n,$$
$$\overline{A} = \exp(A\Delta t),\ \overline{B} = (\overline{A} - I)A^{-1}B,\ \overline{C} = C. \qquad (12.3)$$

Нетрудно видеть, что в полном соответствии со случаем НТО управление ДТО может быть организовано в двух вариантах:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ДТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

Оба варианта синтеза устройства цифрового управления (УЦУ) опирается на концепцию полиномиальной динамической модели (ПДМ), обладающей желаемыми динамическими показателями качества процессов в переходном и установившемся режимах, выполняющей функцию эталонной модели. В случае использования первого варианта синтеза УЦУ ПДМ по аналогии с непрерывным случаем задается с использованием векторно-матричного формализма метода пространства состояний в форме

$$z(k+1) = \overline{\Gamma}(\omega_0)z(k) + \overline{E}(\omega_0)g(k), z(0) = z(k)|_{k=0}, \eta(k) = \overline{H}z(k); \varepsilon(k) = g(k) - \eta(k), \qquad (12.4)$$

в которой $z, g, \eta, \varepsilon -$ соответственно вектора состояния, экзогенного воздействия, выхода и ошибки; $\overline{\Gamma}(\omega_0), \overline{E}(\omega_0), \overline{H} -$ соответственно матрицы состояния, входа и выхода, причем матрицы состояния и входа параметризованы характеристической частотой ω_0; перечисленные выше векторные и матричные компоненты являются вещественнозначными и обладают размерностями $\dim(z) = n, \dim(g) = \dim(\eta) = \dim(\varepsilon) = m; dim(\overline{\Gamma}(\omega_0)) = n \times n,$ $dim(\overline{E}(\omega_0)) = n \times m, dim(\overline{H}) = m \times n.$ В дальнейшем основное внимание будет уделено случаю $r = 1, m = 1.$

Нетрудно видеть, что для формирования дискретных полиномиальных моделей (12.4) можно воспользоваться банком непрерывных ПДМ вида (11.1) путем использования соотношений вида (12.3)

$$\overline{\Gamma}(\omega_0) = \exp(\Gamma(\omega_0)\Delta t),\ \overline{E}(\omega_0) = (\overline{\Gamma}(\omega_0) - I)(\Gamma(\omega_0))^{-1} E(\omega_0),\ \overline{H} = H, \quad (12.5)$$

где $\Gamma(\omega_0), E(\omega_0), H -$ матричные компоненты непрерывной ПДМ (11.1).

Необходимо отметить системную специфику дискретных систем, которая состоит в том, что:

1.длительность $t_{П}$ переходного процесса даже при достижении нулевых значений собственных чисел матрицы состояния дискретной системы удовлетворяет оценочному неравенству

$$t_{П} \geq n \cdot (\Delta t), \quad (12.6)$$

что объясняется тем, что при нулевых собственных числах матрицы состояния дискретной системы эта матрица получает свойство нильпотентности с индексом равным размерности системы n;

2.свобода назначения характеристической частоты ω_0 при формировании дискретной ПДМ ограничивается условиями теоремы Котельникова – Шеннона, которые в сочетании с оценкой (10.15) полосы пропускания непрерывной ПДМ, для ω_0 дают величину

$$\omega_0 \leq \frac{\pi}{\Delta t}\left(\delta_y / v_n\right)^{1/n}, \quad (12.7)$$

где обычно $\delta_y = 0.05$, $v_n = 1$ для наиболее используемых полиномов знаменателя передаточной функции непрерывной ПДМ с размещением корней Ньютона и Баттерворта так, что (12.7) принимает вид

$$\omega_0 \leq \frac{\pi}{\Delta t}(0.05)^{1/n}. \quad (12.8)$$

Следует сказать, что тройка матриц $\{\overline{E}(\omega_0), \overline{\Gamma}(\omega_0), \overline{H}\}$ должна удовлетворять условию

$$\overline{\Phi}(z, \omega_0)\big|_{z=1} = \left\{\overline{H}(zI - \overline{\Gamma}(\omega_0))^{-1}\overline{E}(\omega_0)\right\}\Big|_{z=1} = \overline{H}(I - \overline{\Gamma}(\omega_0))^{-1}\overline{E}(\omega_0) = I, \quad (12.9)$$

обеспечивающему равенство выхода и входа при неподвижном положении системы.

В случае использования первого варианта синтеза УЦУ проектируемая дискретная система (ПДС) принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} x(k+1)=\overline{F}(\omega_0)x(k)+\overline{G}(\omega_0)g(k),\ x(0)=x(k)\big|_{k=0},\\ y(k)=\overline{C}x(k),\varepsilon(k)=g(k)-y(k), \end{array}\right\} \quad (12.10)$$

получаемая объединением исходного ДТО (12.1) и УЦУ, формирующего сигнал цифрового управления в соответствии с алгоритмом

$$u(k)=\overline{K}_g(\omega_0)g(k)-\overline{K}(\omega_0)x(k), \quad (12.11)$$

так что оказываются справедливыми матричные соотношения

$$\overline{F}(\omega_0)=\overline{A}-\overline{B}\overline{K}(\omega_0),\overline{G}(\omega_0)=\overline{B}\overline{K}_g(\omega_0). \quad (12.12)$$

Матрица $\overline{K}(\omega_0)$обратной связи по состоянию ДТО вычисляется с помощью соотношения

$$\overline{K}(\omega_0)=\overline{H}\overline{M}^{-1}, \quad (12.13)$$

где матрица $\overline{M}$ подобия векторов состояния ПДМ (12.4) и ПДС (12.10) ищется из решения матричного уравнения Сильвестра

$$\overline{M}\overline{\Gamma}(\omega_0)-\overline{A}\overline{M}=-\overline{B}\overline{H}. \quad (12.14)$$

Матрица прямых связей $\overline{K}_g(\omega_0)$ находится из условия типа (12.9) равенства входа и выхода системы (12.10)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{K}_g(\omega_0)=\arg\left\{\overline{\Phi}(z,\omega_0)\big|_{z=1}=\left\{\overline{C}\left(zI-\overline{F}(\omega_0)\right)^{-1}\overline{G}(\omega_0)\right\}\Big|_{z=1}=I\right\}=\\ =\arg\left\{\overline{C}\left(I-\overline{F}(\omega_0)\right)^{-1}\overline{B}\overline{K}_g(\omega_0)=\overline{C}\overline{M}\left(I-\overline{\Gamma}(\omega_0)\right)^{-1}\overline{M}^{-1}\overline{B}\overline{K}_g(\omega_0)=I\right\}=\\ =\left\{\overline{C}\overline{M}\left(I-\overline{\Gamma}(\omega_0)\right)^{-1}\overline{M}^{-1}\overline{B}\right\}^{-1}. \end{array}\right\} \quad (12.15)$$

Вернемся к соотношению (12.11). Нетрудно видеть два его недостатка:

- оно использует физически неизмеримое экзогенное воздействие $g(k)$,
- оно не обеспечивает замыкания системы по выходу с единичной отрицательной обратной связью.

Отмеченными недостатками не обладает алгоритм формирования сигнала управления на основании (12.11), записанный в форме

$$\left.\begin{array}{l} u(k)=\overline{K}_g(\omega_0)g(k)-\overline{K}(\omega_0)x(k)=\overline{K}_g(\omega_0)g(k)-\overline{K}_y(\omega_0)y(k)-\overline{K}_x(\omega_0)x(k)=\\ =\overline{K}_\varepsilon(\omega_0)\varepsilon(k)-\overline{K}_x(\omega_0)x(k). \end{array}\right\} \quad (12.16)$$

В (12.16)

$$\overline{K}_\varepsilon(\omega_0)=\overline{K}_y(\omega_0)=\overline{K}_g(\omega_0),\ \overline{K}_x(\omega_0)=\overline{K}(\omega_0)-\overline{K}_g(\omega_0)\overline{C}. \quad (12.17)$$

В случае использования второго варианта синтеза УЦУ отношение «вход–выход» проектируемой дискретной системы, должно задаваться передаточной функцией (ПФ) ПДМ вида

$$\overline{\Phi}(z,\omega_0)=\frac{\eta(z)}{g(z)}=\overline{H}\left(zI-\overline{\Gamma}(\omega_0)\right)^{-1}\overline{E}(\omega_0)=\frac{y(z)}{g(z)}. \qquad (12.18)$$

Если передаточная функция (12.18) реализуется при помощи структуры, прямая ветвь которой с передаточной функцией $\overline{W}(z,\omega_0)$ охвачена единичной отрицательной обратной связью по выходу, то для передаточной функции прямой ветви проектируемой системы можно записать

$$\overline{W}(z,\omega_0)=\frac{y(z)}{\varepsilon(z)=g(z)-y(z)}=\frac{\overline{\Phi}(z,\omega_0)}{1-\overline{\Phi}(z,\omega_0)}. \qquad (12.19)$$

Выражение (12.19) является алгоритмической основой для аналитического конструирования последовательного компенсатора. Действительно, если сформировать передаточную функцию $\overline{W}_{ДТО}(z)$ «вход–выход» управляемого дискретного технического объекта (12.1) в силу соотношения

$$\overline{W}_{ДТО}(z)=\overline{C}\left(zI-\overline{A}\right)^{-1}\overline{B}, \qquad (12.20)$$

то передаточную функцию (12.19) можно реализовать последовательным соединением дискретного последовательного компенсатора (ДПК) с передаточной функцией $\overline{W}_{ДПК}(z,\omega_0)$ и дискретного технического объекта так, что оказывается справедливой запись

$$\overline{W}(z,\omega_0)=\overline{W}_{ДПК}(z,\omega_0)\overline{W}_{ДТО}(z). \qquad (12.21)$$

В итоге для передаточной функции ДПК получаем

$$\overline{W}_{ДПК}(z,\omega_0)=\overline{W}(z,\omega_0)/\overline{W}_{ДТО}(z). \qquad (12.22)$$

Подведем первые итоги сформированных выше концепций синтеза дискретных систем при номинальных параметрах дискретных объектов на заданные значения показателей в переходном режиме и дисперсий их переменных в установившемся режиме в форме алгоритма общего характера с учетом результатов раздела 11.

Алгоритм 12.1(А12.1) синтеза дискретных систем при стохастических экзогенных воздействиях:

1. Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения одного из двух наборов неравенств

$$\left.\begin{array}{l} t_{\text{П}}\le t_{\text{ПR}},\sigma\le\sigma_{\text{R}},D_{\varepsilon}\le D_{\varepsilon\text{R}}, \\ t_{\text{П}}\le t_{\text{ПR}},\sigma\le\sigma_{\text{R}},D_{y}\le D_{y\text{R}} \end{array}\right\} \qquad (12.23)$$

где $t_{\text{ПR}}$, $\sigma_{\text{R}}, D_{\varepsilon\text{R}}, D_{y\text{R}}$,–соответственно требуемые значения длительности переходного процесса и его перерегулирование,

дисперсии ошибки и выхода при стохастическом экзогенном воздействии.

2.Задать модель непрерывного технического объекта (12.2), управление которым осуществляется технической средой «формирователь цифрового сигнала управления – цифроаналоговый преобразователь», на этом этапе самым информативным показателем НТО является его размерность «n».

3.Получить у разработчиков технической среды «формирователь цифрового сигнала управления – цифроаналоговый преобразователь» предварительное значение интервала дискретности Δt.

4.В зависимости от требований к величине перерегулирования σ_{R} выбрать непрерывную ПДМ с размещением собственных чисел ее матрицы состояния Ньютона или Баттерворта.

5. Определить значение характеристической частоты ω_0 непрерывной ПДМ из одного из условий в зависимости от постановки задачи

$$\left.\begin{array}{l}\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_{\varepsilon}(\omega_0) \le D_{\varepsilon_R}\right)\right\}, \\ \omega_0 = \min\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_{y}(\omega_0) \le D_{y_{\mathrm{R}}}\right)\right\}\end{array}\right\}. \quad (12.24)$$

6.Осуществить проверку пары системных параметров «$\Delta t - \omega_0$» на удовлетворение условиям (12.6)–(12.8), в случае удовлетворение перейти к п.7 алгоритма, в противном случае – к п.3 с целью уменьшения интервала дискретности.

7.С помощью (12.3) сформировать модельное представление (12.1) ДТО.

8.С помощью (12.5) сформировать модельное представление (12.4) дискретной полиномиальной модели желаемого поведения проектируемой дискретной системы (12.10).

9. Осуществить синтез УЦУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или по ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде дискретного последовательного компенсатора (ДПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ДПК.

Нетрудно видеть, что ключевым моментом алгоритма А12.1, является вычисление характеристической частоты ω_0 непрерывной ПДМ. На этом в основном будет сосредоточено основное внимание в задачах, рассматриваемых ниже.

12.1. Две задачи стохастической динамики дискретных систем: динамика систем с минимальными значениями дисперсией выхода и ошибки слежения

Рассматривается задача формирования системы (12.10)

$$x(k+1)=\bar{F}(\omega_0)x(k)+\bar{G}(\omega_0)g(k), x(0)=x(k)|_{k=0}, y(k)=\bar{C}x(k); \varepsilon(k)=g(k)-y(k), \quad (12.25)$$

в которой $g(k)-$ центрированное стохастическое воздействия из числа тех, что описаны в пособии ранее, $x(0)=x(k)|_{k=0}=0$ так, что все переменные в системе (12.25) являются центрированными стохастическими в общем случае векторными. При синтезе системы (12.25) основными пользовательскими характеристиками являются:

– $D_y(\omega_0)=M\{y(k)y^T(k)\}-$ дисперсия (матрица дисперсий) выхода;

– $D_\varepsilon(\omega_0)=M\{\varepsilon(k)\varepsilon^T(k)\}-$ дисперсия (матрица дисперсий) ошибки воспроизведения стохастического экзогенного воздействия. Дополнительными характеристиками системы (12.25) являются :

– $R_y(\nu,\omega_0)=M\{y(k+\nu)y^T(k)\}-$ корреляционная функция (матрица) выхода системы;

– $S_y(\omega,\omega_0)=F\{R_y(\nu,\omega_0)\}-$функция (матрица) спектральной плотности выхода системы, являющаяся бесконечным рядом Фурье корреляционной функции (матрицы) выхода.

Для оценки точностных показателей при стохастическом экзогенном воздействии используются дисперсии (матрицы дисперсий) выхода и ошибки, а также значения среднеквадратических отклонений $\sigma_y(\omega_0),\sigma_\varepsilon(\omega_0)$ соответственно выхода и ошибки, связанных с дисперсиями этих переменных соотношениями $\sigma_y(\omega_0)=(D_y(\omega_0))^{1/2}, \sigma_\varepsilon(\omega_0)=(D_\varepsilon(\omega_0))^{1/2}$. Корреляционная функция (матрица) выхода используется для оценки интервала корреляции стохастической переменной выхода для формирования алгоритма дополнительной цифровой фильтрации выхода. Функция (матрица) спектральной плотности выхода используется для анализа частотных свойств системы. Все перечисленные характеристики системы (12.25) параметризованы характеристической частотой ω_0, что свидетельствует о том, что при изменении характеристической частоты претерпевают изменения и перечисленные выше характеристики системы.

Выделим две системные ситуации в теории и практике дискретных систем, функционирующих в условиях стохастических экзогенных воздействий.

Первая системная ситуация характеризуется тем, что стохастическое экзогенное воздействие $g(k)$ является полезным сигналом, который должен быть воспроизведен с минимальной

ошибкой, т.е. с минимальной дисперсией ошибки $D_\varepsilon(\omega_0)$. Вторая системная ситуация характеризуется тем, что стохастическое экзогенное воздействие $g(k)$ является помехой и его влияние на выход системы должно быть минимальным, т.е. минимальной должна быть дисперсия $D_y(\omega_0)$ выхода системы. Как одна так и другая системная ситуации разрешаются аргументированным выбором характеристической частоты ω_0. При этом все алгоритмы, конструируемые в настоящем разделе, опираются на результаты раздела 10 пособия, представленные в виде асимптотических аналитических представлений относительных дисперсий выхода и ошибки как функций относительной характеристической частоты. Содержательно алгоритмы будут представлять собой расширение алгоритма А12.1 с учетом двух отмеченных выше возможных постановок задачи синтеза систем при стохастическом воздействии.

12.2. Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом дискретном экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения дискретной системе заданное значение дисперсии выхода при дискретном стохастическом экзогенном воздействии $g(k)$ эквивалентном в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «экспоненциально коррелированный шум» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие $g(k)$ является помехой, а заданное значение дисперсии выхода следует понимать как малое значение. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 12.2(А12.2) синтеза дискретной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии эквивалентном в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «экспоненциально коррелированный шум»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 12.1 с тем условием, что надо использовать только второе условие положения (12.23).

2.Выполнить п.2 алгоритма 12.1.

3.Выполнить п.3 алгоритма 12.1.

4.Выполнить п.4 алгоритма 12.1.

5.Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ дисперсии стохастического экзогенного воздействия типа «экспоненциально коррелированный

шум» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде апериодического звена первого порядка.

6.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «экспоненциально коррелированный шум» значение сопрягающей частоты Ω_a ФФ.

7.Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{\text{yR}} = D_{\text{yR}} / D_{\xi}$.

8.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a$.

9.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_y = \overline{D}_y(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\text{yR}}$ (10.53), (10.55) и (10.57) для соответствующей размерности исходного ТО, полагая равенство дисперсий выхода проектируемой системы и формируемой непрерывной ПДМ $D_y = D_{\eta} \to \overline{D}_y = \overline{D}_{\eta}$,

$$\overline{D}_{\eta} = \frac{\nu\overline{\omega}_0}{1} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_{\eta} = \frac{\nu_2\,\overline{\omega}_0/\nu_1}{\nu_1\overline{\omega}_0 + 1} \quad \text{при } n = 2,$$

$$\overline{D}_{\eta} = \frac{\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0}{(\nu_3 - \nu_1\nu_2)(\nu_1\overline{\omega}_0 + 1)} \quad \text{при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

10.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_a) = \overline{\omega}_0\Omega_a$.

11. Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = min\{\omega_0 = arg(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}), \omega_0 = arg(D_y(\omega_0) \le D_{y_{\text{R}}})\}.$$

12.Выполнить п.6 алгоритма 12.1.

13.Выполнить п.7 алгоритма 12.1.

14.Выполнить п.8 алгоритма 12.2.

15. Осуществить синтез УЦУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде дискретного последовательного компенсатора (ДПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ДПК.

12.3. Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии ошибки слежения за дискретным стохастическим экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения дискретной системе заданное значение дисперсии ошибки при дискретном стохастическом экзогенном воздействии $g(k)$ эквивалентном в широком смысле непрерывному экзогенному воздействию $g(t)$ типа «экспоненциально коррелированный шум» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие является полезным сигналом, воспроизведение которого должно осуществляться с малой дисперсией ошибки слежения. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 12.3(А12.3) синтеза дискретной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии эквивалентном в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «экспоненциально коррелированный шум»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 12.1 с тем условием, что надо использовать только первое условие положения (12.23).

2.Выполнить п.2 алгоритма 12.1.

3.Выполнить п.3 алгоритма 12.1.

4.Выполнить п.4 алгоритма 12.1.

5.Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ дисперсии стохастического экзогенного воздействия типа «экспоненциально коррелированный шум» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде апериодического звена первого порядка.

6.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «экспоненциально коррелированный шум» значение сопрягающей частоты Ω_a ФФ.

7.Оценить требуемое значение относительной дисперсии ошибки воспроизведения экзогенного воздействия $\overline{D}_{\varepsilon\mathrm{R}} = D_{\varepsilon\mathrm{R}} / D_\xi$.

8.Ввести в рассмотрение параметр – относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a$.

9.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_\varepsilon = \overline{D}_\varepsilon(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\varepsilon\mathrm{R}}$ (10.54), (10.56) и (10.58) для соответствующей размерности исходного ТО

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{1/\overline{\omega}_0}{\nu + 1/\overline{\omega}_0} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon}=\frac{\left(\nu_2/\nu_1+\nu_1\right)/\overline{\omega}_0}{\nu_2+\nu_1/\overline{\omega}_0}\ \text{при}\ n=2,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon}=\frac{\left(\nu_3\nu_1^2+\nu_3\nu_2-\nu_1\nu_2^2\right)/\overline{\omega}_0}{\left(\nu_3-\nu_1\nu_2\right)\left(\nu_3+\nu_2/\overline{\omega}_0\right)}\ \text{при}\ n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

10.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0=arg\left(\overline{\omega}_0=\omega_0/\Omega_a\right)=\overline{\omega}_0\Omega_a$.

11. Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0=\max\left\{\omega_0=\arg\left(t_{\text{п}}\left(\omega_0\right)\le t_{\Pi\text{R}}\right),\omega_0=\arg\left(D_{\varepsilon}\left(\omega_0\right)\le D_{\varepsilon\text{R}}\right)\right\}.$$

12.Выполнить п.6 алгоритма 12.1.

13.Выполнить п.7 алгоритма 12.1.

14.Выполнить п.8 алгоритма 12.1.

15. Осуществить синтез УЦУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде дискретного последовательного компенсатора (ДПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ДПК.

12.4. Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом дискретном экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения дискретной системе заданное значение дисперсии выхода при дискретном стохастическом экзогенном воздействии $g(k)$ эквивалентном в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «нерегулярная качка» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие $g(k)$ является помехой, а заданное значение дисперсии выхода следует понимать как малое значение. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 12.4(А12.4) синтеза дискретной системы на заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии эквивалентном в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «нерегулярная качка»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 12.1 с тем условием, что надо использовать только второе условие положения (12.23).

2.Выполнить п.2 алгоритма 12.1.
3.Выполнить п.3 алгоритма 12.1.
4.Выполнить п.4 алгоритма 12.1.
5.Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ дисперсии стохастического экзогенного воздействия типа «нерегулярная качка» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде апериодического звена первого порядка.
6.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «нерегулярная качка» значения коэффициента демпфирования ς и сопрягающей частоты $\Omega_к$ ФФ.
7.Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{\text{yR}} = D_{\text{yR}} / D_\xi$.
8.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_к$.
9.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_y = \overline{D}_y(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\text{yR}}$ (10.73), (10.75) и (10.77) для соответствующей размерности исходного ТО, полагая равенство дисперсий выхода проектируемой системы и формируемой ПДМ $D_y = D_\eta \to \overline{D}_y = \overline{D}_\eta$,

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{(2\varsigma\nu_2/\nu_1)\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1} \text{ при } n = 2,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0}{(\nu_1\nu_2 - \nu_3)(2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1)} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.
10.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = \arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_к) = \overline{\omega}_0\Omega_к$.
11. Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = min\{\omega_0 = arg(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}), \omega_0 = arg(D_y(\omega_0) \le D_{y_{\text{R}}})\}.$$

12.Выполнить п.6 алгоритма 12.1.
13.Выполнить п.7 алгоритма 12.1.
14.Выполнить п.8 алгоритма 12.1.
15. Осуществить синтез УЦУ в одном из вариантов:

– в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;

– в виде дискретного последовательного компенсатора (ДПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ДПК.

12.5. Алгоритм синтеза устройства управления, обеспечивающего дискретной системе заданное значение дисперсии ошибки слежения за дискретным стохастическим экзогенным воздействием типа «нерегулярная качка»

Проблема, вынесенная в заголовок параграфа, дает понять, что задача обеспечения дискретной системе заданное значение дисперсии ошибки при дискретном стохастическом экзогенном воздействии $g(k)$ эквивалентном в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «нерегулярная качка» решается для системной ситуации, когда стохастическое экзогенное воздействие является полезным сигналом, воспроизведение которого должно осуществляться с малой дисперсией ошибки слежения. Для решения задачи предлагается

Алгоритм 12.5(А12.5) синтеза дискретной системы на заданное значение дисперсии ошибки воспроизведения стохастического экзогенного воздействия эквивалентного в широком смысле непрерывному стохастическому экзогенному воздействию $g(t)$ типа «нерегулярная качка»:

1.Выполнить п.1 алгоритма 12.1 с тем условием, что надо использовать только первое условие положения (12.23).

2.Выполнить п.2 алгоритма 12.1.

3.Выполнить п.3 алгоритма 12.1.

4.Выполнить п.4 алгоритма 12.1.

5.Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ дисперсии стохастического экзогенного воздействия типа «нерегулярная качка» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде апериодического звена первого порядка.

6.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «нерегулярная качка» значения коэффициента демпфирования ς и сопрягающей частоты $\Omega_к$ ФФ.

7.Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{\text{yR}} = D_{\text{yR}} / D_\xi$.

8.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_к$.

9.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_\varepsilon = \overline{D}_\varepsilon(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\varepsilon\text{R}}$ (10.74), (10.76) и (10.78) для соответствующей размерности исходного ТО

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{1}{(\nu\overline{\omega}_0)^2} \quad \text{при } n=1,$$

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{\nu_1^2/\overline{\omega}_0^2}{\nu_2^2 + 2\varsigma\nu_1\nu_2/\overline{\omega}_0} \text{ при } n=2,$$

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{\nu_2^2/\overline{\omega}_0^2}{\nu_3^2 + 2\varsigma\nu_2\nu_3/\overline{\omega}_0 + \left(\nu_2^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\right)/\overline{\omega}_0^2} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

10.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = \arg\left(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_к\right) = \overline{\omega}_0\Omega_к$.

11.Определить окончательное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_\varepsilon(\omega_0) \le D_{\varepsilon\text{R}}\right)\right\}.$$

12.Выполнить п.6 алгоритма 12.1.

13.Выполнить п.7 алгоритма 12.1.

14.Выполнить п.8 алгоритма 12.1.

15. Осуществить синтез УЦУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде дискретного последовательного компенсатора (ДПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ДПК.

Контрольные вопросы

1.В чем суть двух задач стохастической динамики дискретных систем?

2.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «белый шум»?

3.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «белый шум»?

4.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?

5.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
6.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
7.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
8.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
9.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
10.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
11.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
12.Как сформировать матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
13.Как сконструировать последовательный компенсатор в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
14.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?

15.Как сформировать матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза дискретной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?

13. СИНТЕЗ СИСТЕМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА, ЗАДАННЫХ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ФОРМЕ, МЕТОДОМ МЕДИАННОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИСПЕРСИЙ ПЕРЕМЕННЫХ С КОНТРОЛЕМ ЗНАЧЕНИЯ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ

Проблема, вынесенная в название раздела, порождена необходимостью создания робастных систем, функционирующих в условиях экзогенных стохастических воздействий стационарных в широком смысле, со стабильными показателями в форме дисперсий системных переменных в условиях неопределенности параметров технического объекта. Известно, что реальные системы функционируют в условиях неопределенности значений параметров их функциональных компонентов. Действительно, в процессе аналитического синтеза таких систем используются паспортные значения параметров функциональных компонентов, информация о которых обычно берется из справочников и интернета, при их технической реализации с использованием конкретных функциональных компонентов их параметры приобретают новые значения, потому что реальные параметры конкретного компонента отличаются от паспортных. В процессе эксплуатации систем под действием возмущающих факторов внешней среды (температура, влажность, вибрации, радиация и т.д.) параметры функциональных компонентов принимают новые значения. Таким образом, возникает проблема параметрической неопределенности. Малую чувствительность основных показателей системы к этой параметрической неопределенности принято называть робастностью. В учебном пособии принята интервальная форма представления неопределенности параметров, когда физические и системные параметры задаются парой чисел, определяющих границы возможного изменения конкретного параметра функционального компонента. Обнаружилось, что интервальное число может быть представлено не только в форме пары чисел, но и форме трех чисел, одно из которых является медианным значением параметра, а два других задают центрированную интервальность относительно медианного значения. Если создать механизм изменения медианной составляющей, то появляется возможность изменения относительной интервальности интервального числа. Этот прием изменения в сторону уменьшения относительной интервальности матричных компонентов системы использован авторами для решения поставленной задачи обеспечение робастности проектируемых систем с использованием концепции управляемой относительной интервальности. Материал раздела сориентирован на случай непрерывных систем управления.

13.1. Концепция управляемой относительной параметрической интервальности

Интервальным числом называется пара чисел $(\underline{\alpha},\overline{\alpha})$, задающих его левое $\underline{\alpha}$ и правое $\overline{\alpha}$ граничные (угловые) значения, записываемое в форме $[\alpha]=[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$. Это каноническое представление интервального числа можно дополнить его представлением, использующим три компонента и записываемым в форме

$$[\alpha]=[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]=\alpha_0+[\Delta\alpha]=\alpha_0+[\Delta\underline{\alpha},\Delta\overline{\alpha}], \quad (13.1)$$

где α_0 – медианное значение интервального числа $[\alpha]$, $[\Delta\alpha]$ – центрированная относительно α_0 интервальная составляющая интервального числа, $\Delta\underline{\alpha},\Delta\overline{\alpha}$ – соответственно левое и правое граничные значения интервальной составляющей интервального числа. Компоненты трехэлементного представления интервального числа удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha_0=0.5[\underline{\alpha}+\overline{\alpha}],\ \underline{\Delta\alpha}=\underline{\alpha}-\alpha_0,\ \overline{\Delta\alpha}=\overline{\alpha}-\alpha_0,\ \overline{\Delta\alpha}=-\underline{\Delta\alpha}\ . \quad (13.2)$$

В соотношениях (13.2) α_0, $\underline{\alpha},\overline{\alpha},\Delta\underline{\alpha},\Delta\overline{\alpha}$ не являются интервальными числами, эти числа фиксированные на определенный временной промежуток функционирования системы. Соотношение (13.2) позволяет ввести в рассмотрение понятие оценки $\delta_I\alpha$ относительной интервальности интервального числа $[\alpha]$, задаваемой с учетом (13.2) в форме

$$\delta_I\alpha=\frac{|[\Delta\alpha]|}{|\alpha_0|}=\frac{\overline{\Delta\alpha}}{|\alpha_0|}=\frac{-\underline{\Delta\alpha}}{|\alpha_0|}=\frac{|\overline{\alpha}-\underline{\alpha}|}{|\overline{\alpha}+\underline{\alpha}|}. \quad (13.3)$$

Введенная оценка относительной интервальности интервального числа позволяет представить интервальное число в ещё одной форме

$$[\alpha]=\alpha_0+[\underline{\Delta\alpha},\overline{\Delta\alpha}]=\alpha_0\{1+(\mp\delta_I([\alpha]))sgn(\alpha_0)\}\ , \quad (13.4)$$

что позволяет осуществлять интервализацию фиксированного числа в относительной форме.

Примечание 13.1 (П13.1). Фиксированное число α представимо в форме интервального числа так, что оно записывается следующим образом $\alpha=[\alpha,\alpha]=\alpha_0+[\Delta\alpha]$, где $\alpha_0=\alpha,[\Delta\alpha]=[0,0]=0.$

С помощью выражения (13.4) можно управлять относительной интервальностью интервального числа путем изменения его медианной составляющей. Очевидно, управление медианной составляющей может быть осуществлено в мультипликативной или аддитивной формах. Действительно, пусть числа β и γ таковы, что выполняется условие

$$\tilde{\alpha}_0=\alpha_0\beta,\tilde{\tilde{\alpha}}_0=\alpha_0+\gamma:|\tilde{\alpha}_0|>|\alpha_0|,|\tilde{\tilde{\alpha}}_0|>|\alpha_0| \quad (13.5)$$

По существу введением мультипликативного компонента β или аддитивного компонента γ осуществлено конструирование новых

интервальных чисел $[\tilde{\alpha}]=\tilde{\alpha}_0+[\Delta\alpha],[\tilde{\tilde{\alpha}}]=\tilde{\tilde{\alpha}}_0+[\Delta\alpha]$, обладающих меньшим значением оценки относительной интервальности так, что выполняется неравенство

$$\delta_I\tilde{\alpha}=\frac{|[\Delta\alpha]|}{|\tilde{\alpha}_0|}<\delta_I\alpha=\frac{|[\Delta\alpha]|}{|\alpha_0|},\delta_I\tilde{\tilde{\alpha}}=\frac{|[\Delta\alpha]|}{|\tilde{\tilde{\alpha}}_0|}<\delta_I\alpha=\frac{|[\Delta\alpha]|}{|\alpha_0|}. \quad (13.6)$$

Очевидно, аналогичным образом может быть введено понятие интервальной матрицы $[N]$, которая состоит из интервальных скалярных компонентов $[N_{ij}]$, записываемая в форме

$$[N]=row\{col([N_{ij}];\ i=\overline{1,n});\ j=\overline{1,m}\} \quad (13.7)$$

Интервальная матрица $[N]$ по аналогии с (13.1) может быть представлена цепочкой равенств

$$[N]=[\underline{N},\overline{N}]=N_0+[\Delta N]=N_0+[\Delta\underline{N},\Delta N], \quad (13.8)$$

где N_0 – медианная составляющая интервальной матрицы $[N]$, $\underline{N},\overline{N}$ – соответственно матрицы, составленные из левых и правых граничных значений скалярных компонентов матрицы, $[\Delta N]$ – центрированная относительно N_0 интервальная составляющая интервальной матрицы $[N]$, $\underline{\Delta N},\overline{\Delta N}$ – соответственно левое и правое граничные составляющие интервальные матрицы $[N]$. По аналогии с (13.2) оказываются справедливыми соотношения

$$N_0=0.5[\underline{N}+\overline{N}],\ \underline{\Delta N}=\underline{N}-N_0,\ \overline{\Delta N}=\overline{N}-N_0,\ \overline{\Delta N}=-\underline{\Delta N}. \quad (13.9)$$

Здесь важно отметить, что квадратная матрица имеет три важных скалярных показателя: норма, след и детерминант. Наиболее предпочтительными в вычислительном плане являются норма и след квадратной матрицы. Тогда по аналогии с (13.3) для интервальной матрицы может быть введено понятие оценки относительной интервальности нормы интервальной матрицы, задаваемой в форме

$$\delta_I N=\frac{\|[\Delta N]\|}{\|N_0\|}=\frac{\overline{\|\Delta N\|}}{\|N_0\|}=\frac{\|-\underline{\Delta N}\|}{\|N_0\|}, \quad (13.10)$$

а также оценки относительной интервальности следа $[tr([N])]$ интервальной матрицы

$$[tr([N])]=\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i([N])]=\sum_{i=1}^{n}[N_{ii}]=tr(N_0)+[tr([\Delta N])]$$

в форме

$$\delta_I tr(N)=\frac{|[tr([\Delta N])]|}{|tr(N_0)|}. \quad (13.11)$$

С помощью выражений (13.10), (13.11) можно, как и в скалярном случае, управлять относительной интервальностью нормы и следа интервальной матрицы $[N]$ путем изменения ее медианной

составляющей N_0. Очевидно, управление медианной составляющей может быть осуществлено в мультипликативной или аддитивной форме. Действительно, пусть матрицы Ψ и Π таковы, что выполняется условие

$$\tilde{N}_0 = N_0\Psi, \tilde{\tilde{N}}_0 = N_0 + \Pi : \left\|\tilde{N}_0\right\| > \left\|N_0\right\|, \left\|\tilde{\tilde{N}}_0\right\| > \left\|N_0\right\|. \quad (13.12)$$

По существу введением мультипликативного матричного компонента Ψ или аддитивного матричного компонента Π осуществлено конструирование новых интервальных матриц $\tilde{N} = \tilde{N}_0 + [\Delta N]$ и $\tilde{\tilde{N}} = \tilde{\tilde{N}}_0 + [\Delta N]$, обладающих меньшими значениями оценок их относительной интервальности так, что выполняется неравенства

$$\left.\begin{array}{l} \delta_I \tilde{N} = \dfrac{\left\|[\Delta N]\right\|}{\left\|\tilde{N}_0\right\|} < \delta_I N = \dfrac{\left\|[\Delta N]\right\|}{\left\|N_0\right\|}; \delta_I \tilde{\tilde{N}} = \dfrac{\left\|[\Delta N]\right\|}{\left\|\tilde{N}_0\right\|} < \delta_I N = \dfrac{\left\|[\Delta N]\right\|}{\left\|N_0\right\|} \\ \delta_I tr\left(\tilde{N}\right) = \dfrac{\left|tr\left([\Delta N]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{N}_0\right)\right|} < \delta_I tr(N); \delta_I tr\left(\tilde{\tilde{N}}\right) = \dfrac{\left|tr\left([\Delta N]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{N}}_0\right)\right|} < \delta_I tr(N) \end{array}\right\}. \quad (13.13)$$

Соотношения (13.12), (13.13) являются алгоритмической основой обеспечения робастности систем управления в случае, когда параметрическая неопределенность его компонентов представлена в интервальной форме. При этом синтез робастных систем использует аддитивную форму модификации медианных составляющих системных матриц, причем модификация медианной составляющей интервальной матрицы состояния системы осуществляется мультипликативной композицией, составленной из матрицы управления и матрицы обратной связи по вектору состояния технического объекта.

13.2. Векторно–матричная модель объекта с неопределенностями, заданными в интервальной форме

Проблему, вынесенную в заголовок параграфа, начнем решать со случая, когда интервальной является только матрица состояния непрерывного технического объекта так, что модель (11.4) НТО получает представление

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t), \quad (13.14)$$

где $[A] = \mathrm{row}\left\{\mathrm{col}\left([A_{ij}]\right); i, j = \overline{1,n}\right\}$ – интервальная матрица состояния НТО, построенная на интервальных скалярных элементах, которая может быть записана в форме

$$[A] = \mathrm{row}\left\{\mathrm{col}\left([A_{ij}]\right); i, j = \overline{1,n}\right\} = \mathrm{row}\left\{\mathrm{col}\left(A_{0ij} + [\Delta A_{ij}]\right); i, j = \overline{1,n}\right\} = A_0 + [\Delta A].$$

Медианная версия модели НТО получает представление

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t). \qquad (13.15)$$

Приведенное представления интервальной матрицы $[A]$ позволяет для неё ввести по схеме (13.10), (13.11) оценки относительной интервальности по ее норме и следу

$$\delta_I([A]) = \frac{\|\Delta A\|}{\|A_0\|},\ \delta_I tr([A]) = \frac{|tr([\Delta A])|}{|tr(A_0)|}. \qquad (13.16)$$

Прежде, чем создавать алгоритмическую базу синтеза робастных непрерывных систем в смысле требуемых малых значений оценок относительных интервальностей дисперсий (матриц дисперсий) ошибки и выхода (векторов ошибки и выхода) следует сказать, что, если задача синтеза УУ решается в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления, то в этом случае непрерывная проектируемая система (НПС) принимает вид

$$\dot{x}(t) = [F(\omega_0)]x(t) + G(\omega_0)g(t),\ x(0) = 0,\ y(t) = Cx(t);\ \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \qquad (13.17)$$

получаемый модели (13.14) исходного НТО и УУ, формирующего сигнал управления в соответствии с алгоритмом (11.5)

$$u(t) = K_g(\omega_0)g(t) - K(\omega_0)x(t), \qquad (13.18)$$

так что оказываются справедливыми матричные соотношения

$$\left.\begin{array}{l} [F(\omega_0)] = [A] - BK(\omega_0) = A_0 - BK(\omega_0) + [\Delta A] = F_0(\omega_0) + [\Delta F], \\ G(\omega_0) = BK_g(\omega_0). \end{array}\right\}. \qquad (13.19)$$

В (13.19) $F_0(\omega_0) = A_0 - BK(\omega_0)$, $[\Delta F] = [\Delta A]$. Для оценки относительной интервальности по норме и следу матрицы состояния проектируемой системы можно записать

$$\left.\begin{array}{l} \delta_I([F(\omega_0)]) = \dfrac{\|[\Delta F]\|}{\|F(\omega_0)\|} = \dfrac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 - BK(\omega_0)\|}. \\ \delta_I tr([F(\omega_0)]) = \dfrac{|tr([\Delta F])|}{|tr(F(\omega_0))|} = \dfrac{|tr([\Delta A])|}{|tr(A_0 - BK(\omega_0))|}. \end{array}\right\} \qquad (13.20)$$

Из (13.20) видно, что значение относительной интервальности по норме и следу матрицы состояния проектируемой системы оказалось «управляемым» путем изменения матрицы отрицательной обратной связи по состоянию НТО, что в свою очередь делается изменением характеристической частоты системы ω_0.

В случае, когда интервальными являются матрицы состояния и управления непрерывного технического объекта так, что модель (11.4) НТО получает представление

$$\dot{x}(t)=[A]x(t)+[B]u(t);\ y(t)=Cx(t), \tag{13.21}$$

где $[B]=\mathrm{row}\left\{\mathrm{col}([B_{il}]);\ i=\overline{1,n};l=\overline{1,r};\right\}=\mathrm{row}\left\{\mathrm{col}\left(B_{0il}+[\Delta B_{il}]\right)\right\}=B_0+[\Delta B]$.

Система (13.21) сводится к виду (13.14) путем включением на входе системы (на каждом сепаратном входе при $r>1$) (13.21) буферной системы (БФ) минимальной размерности $n_б$ при этом достаточно выполнения $n_б=1$, имеющей представление

$$\dot{x}_б(t)=A_б x_б(t)+B_б\tilde{\tilde{u}}(t);\ u(t)=C_б x_б(t). \tag{13.22}$$

Следует сказать, что буферная система (13.22) является виртуальной, она физически не вводится на входе НТО (13.21). Алгоритм, реализуемой системой (13.22), является составной частью алгоритма управления. Объединение (13.21) и (13.22) дает модель агрегированного НТО (АНТО) – «БФ–НТО» вида

$$\dot{\tilde{\tilde{x}}}(t)=\left[\tilde{\tilde{A}}\right]\tilde{\tilde{x}}(t)+\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{u}}(t);\ y(t)=\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}}(t), \tag{13.23}$$

где $\tilde{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}x\\ x_б\end{bmatrix},\left[\tilde{\tilde{A}}\right]=\begin{bmatrix}[A] & [B]C_б\\ 0 & A_б\end{bmatrix},\tilde{\tilde{B}}=\begin{bmatrix}0\\ B_б\end{bmatrix},\tilde{\tilde{C}}=\begin{bmatrix}C & C_б\end{bmatrix}$.

Медианная версия АНТО (13.23) записывается аналогично (13.15)

$$\dot{\tilde{\tilde{x}}}(t)=\tilde{\tilde{A}}_0\tilde{\tilde{x}}(t)+\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{u}}(t);\ y(t)=\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}}(t). \tag{13.24}$$

Управление АНТО осуществляется сигналом, формируемым по аналогии с (13.18) в силу соотношения

$$\tilde{\tilde{u}}(t)=\tilde{\tilde{K}}_g(\omega_0)g(t)-\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\tilde{\tilde{x}}(t). \tag{13.25}$$

Объединение (13.23) и (13.25) дает агрегированную проектируемую систему (АПС)

$$\dot{\tilde{\tilde{x}}}(t)=\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\tilde{\tilde{x}}(t)+\tilde{\tilde{G}}(\omega_0)g(t),\tilde{\tilde{x}}(0)=0,y(t)=\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}}(t);\varepsilon(t)=g(t)-y(t), \tag{13.26}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]&=\left[\tilde{\tilde{A}}\right]-\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)=\tilde{\tilde{A}}_0-\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)+\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]=\tilde{\tilde{F}}_0(\omega_0)+\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right],\\ \tilde{\tilde{G}}(\omega_0)&=\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}_g(\omega_0).\end{aligned}\right\} \tag{13.27}$$

В рассматриваемом случае для оценки относительной интервальности по норме и следу матрицы состояния АПС можно записать

$$\left.\begin{aligned}\delta_I\left(\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\right)&=\frac{\left\|\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right]\right\|}{\left\|\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right\|}=\frac{\left\|\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]\right\|}{\left\|\tilde{\tilde{A}}_0-\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\right\|}.\\ \delta_I tr\left(\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\right)&=\frac{\left|tr\left(\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right)\right|}=\frac{\left|tr\left(\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{A}}_0-\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\right)\right|}.\end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

Из (13.28) видно, что значение относительной интервальности по норме и следу матрицы состояния агрегированной проектируемой системы оказалось «управляемым» путем изменения матрицы отрицательной обратной связи по состоянию НТО, что в свою очередь делается изменением характеристической частоты системы ω_0.

Теперь отойдем от опосредованных показателей робастности в виде оценок относительной интервальности нормы и следа матрицы состояния проектируемой системы с целью формирования алгоритма вычисления оценок относительных интервальности интервальных матриц дисперсий системных переменных. Очевидно, для интервальной матрицы $\lfloor D_{(*)} \rfloor = D_{(*)0} + (\lfloor \Delta D_{(*)} \rfloor)$ дисперсии переменной $(*)$ можно ввести оценку её относительной интервальности в форме

$$\delta_I D_{(*)} = \frac{\left\| \left[\Delta D_{(*)} \right] \right\|}{\left\| D_{(*)0} \right\|}, \qquad (13.29)$$

где в решаемой задаче $(*)$ принимает смысл переменных x, y, ε.

Для иллюстрации вычислительной процедуры формирования оценки (13.29), ограничимся случаем, когда в (13.29) символ $(*)$ принимает смысл переменной x. Более того, ограничимся предположением, что внешнее воздействие $g(t)$ в системе (13.17) является стохастическим воздействием типа «белый шум», так что выполняется условие $g(t) = w(t)$. При оговорённых условиях уравнение Ляпунова с интервальными матричными компонентами принимает вид $[F][D_x] + [D_x]\left[F^T\right] = -GNG^T$. Использование канонического представления интервальных матричных компонентов приводит к матричному уравнению

$$\left[\underline{F}, \overline{F}\right]\left[\underline{D_x}, \overline{D_x}\right] + \left[\underline{D_x}, \overline{D_x}\right]\left[\underline{F^T}, \overline{F^T}\right] = -GNG^T. \qquad (13.30)$$

Матричное уравнение (13.30) преобразуется в систему из двух матричных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}\,\overline{D_x} + \overline{D_x}\,\overline{F^T} &= -GNG^T \\ \underline{F}\,\underline{D_x} + \underline{D_x}\,\underline{F^T} &= -GNG^T \end{aligned}\right\}, \qquad (13.31)$$

решив которую относительно $\overline{D_x}$ и $\underline{D_x}$ соответственно, сформируем интервальную матрицу $[D_x] = \left[\underline{D_x}, \overline{D_x}\right] = D_{x0} + \left[\underline{\Delta D_x}, \overline{\Delta D_x}\right]$. Полученное соотношение позволяет вычислить оценку относительной интервальности интервальной матрицы D_x дисперсии вектора состояния, задаваемую в форме

$$\delta_I D_x = \frac{\left\|\left[\Delta D_x\right]\right\|}{\left\|D_{x0}\right\|}. \qquad (13.32)$$

Вычисление оценки относительной интервальности матрицы D_y дисперсии вектора выхода спроектированной непрерывной системы осуществляется в силу соотношений

$$\delta_I D_y = \frac{\left\|\left[\Delta D_y\right]\right\|}{\left\|D_{y0}\right\|} = \frac{\left\|\left[C\Delta D_x C^T\right]\right\|}{\left\|CD_{x0}C^T\right\|}. \qquad (13.33)$$

Дисперсия ошибки при экзогенном воздействии типа белый шум бесконечна, а потому формирование оценки относительной интервальности дисперсии ошибки утрачивает смысл.

В случае экзогенного стохастического воздействия $g(t) = \xi(t)$ типа окрашенный шум приведенная выше схема формирования оценок относительной интервальности дисперсий векторов состояния, выхода и ошибки должна применяться к агрегированной системе, построенной на объединении проектируемой системы и формирующего фильтра (см. раздел 7). Тогда следуя (7.5)–(7.7) раздела 7, можно в результате записать

$$\delta_I D_y = \frac{\left\|\left[\Delta D_y\right]\right\|}{\left\|D_{y0}\right\|} = \frac{\left\|\left[\tilde{C}\Delta\tilde{D}_x\tilde{C}^T\right]\right\|}{\left\|\tilde{C}\tilde{D}_{x0}\tilde{C}^T\right\|}, \qquad (13.34)$$

$$\delta_I D_\varepsilon = \frac{\left\|\left[\Delta D_\varepsilon\right]\right\|}{\left\|D_{\varepsilon 0}\right\|} = \frac{\left\|\left[\tilde{C}_\varepsilon\Delta\tilde{D}_x\tilde{C}_\varepsilon^T\right]\right\|}{\left\|\tilde{C}_\varepsilon\tilde{D}_{x0}\tilde{C}_\varepsilon^T\right\|}. \qquad (13.35)$$

Соотношения (13.34), (13.35) являются основными для оценки достигнутой в процессе синтеза робастности спроектированной системы в смысле малой чувствительности дисперсий выхода и ошибки в зависимости постановки задачи и типа окрашенного шума.

13.3. Алгоритм синтеза медианного управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум

Прежде, чем формировать алгоритм, упомянутый в заголовке параграфа, следует сказать, что он принципиально не отличается от алгоритма 11.3 с той разницей, что в исходные данные будет введена модель НТО вида (13.14) с интервальной матрицей состояния или (13.21) с последующим приведением к виду (13.14), а в процедурную часть будут включены пункт формирования медианной модели НТО и пункт контроля медианного и угловых значений дисперсии выхода на

предмет удовлетворения требованию обеспечения желаемого значения дисперсии выхода. Таким образом, контроль как таковой робастности дисперсии выхода в форме достигнутого значения оценки относительной интервальности дисперсии выхода не осуществляется, потому что реализация управления относительной интервальностью дисперсии достигается увеличением характеристической частоты в то время, как малое значение дисперсии выхода обеспечивается уменьшением характеристической частоты.

Алгоритм 13.1 (А13.1) синтеза медианного управления НТО с интервальными параметрами, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум»:

1. Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения наборов неравенств в интервальной форме

$$\left.\begin{array}{l} t_{\Pi 0} \le t_{\Pi R}, \sigma_0 \le \sigma_R, \\ \left[D_y\right] = D_{y0} + \left[\Delta D_y\right] \le D_{yR} \end{array}\right\} \qquad (13.36)$$

где $t_{\Pi R}$, σ_R, D_{yR},–соответственно требуемые значения длительности переходного процесса, его перерегулирование и дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии.

2.Задать интервальную модель НТО в одной из форм (13.14) или (13.21) при этом для НТО (13.21) осуществить переход к представлению (13.23).

3.На основании (13.14) или (13.23) построить медианное представление НТО в формах (13.15) или (13.24), на этом этапе самым информативным показателем медианного объекта является его размерность «n» в случае представления (13.15) и «n+1» в случае представления (13.24).

4. В зависимости от требований к величине перерегулирования σ_R выбрать ПДМ (11.1), размерности медианного НТО с необходимым размещением собственных значений матрицы состояния (11.1) соответственно размерности «n» или «n+1».

5. Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ стохастического экзогенного воздействия типа «экспоненциально коррелированный шум» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде апериодического звена первого порядка.

6.Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «экспоненциально коррелированный шум» значение сопрягающей частоты Ω_a ФФ.

7. Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{yR} = D_{yR} / D_\xi$.

8. Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a$.

9. С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_y = \overline{D}_y(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{y\mathrm{R}}$ (10.53), (10.55) и (10.57) для соответствующей размерности исходного медианного НТО, полагая равенство медианных дисперсий выхода проектируемой системы и формируемой ПДМ $D_{y0} = D_\eta \to \overline{D}_{y0} = \overline{D}_\eta$,

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu\overline{\omega}_0}{1} \quad \text{при } n=1,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_2\,\overline{\omega}_0/\nu_1}{\nu_1\overline{\omega}_0+1} \quad \text{при } n=2,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0}{(\nu_3-\nu_1\nu_2)(\nu_1\overline{\omega}_0+1)} \quad \text{при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

10.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_a) = \overline{\omega}_0\Omega_a$.

11. Определить промежуточное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \min\left\{\omega_0 = \arg(t_{\text{п}0}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}), \omega_0 = \arg(D_{y0}(\omega_0) \le D_{y_{\mathrm{R}}})\right\}.$$

12. Осуществить синтез УУ в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения) в форме (13.18) для медианного НТО (13.15) и в форме (13.25) для медианного НТО (13.24), алгоритмически, поддерживаемый средствами метода медианного модального управления.

13.Сформировать интервальное представление спроектированной системы в форме (13.17) для интервального НТО (13.14) или в форме (13.26) для интервального НТО (13.23).

14.Решить уравнение Ляпунова (7.5) с интервальными матричными компонентами $\left[\widetilde{\overline{F}}(\omega_0)\right]\left[\widetilde{\overline{D}}_x\right] + \left[\widetilde{\overline{D}}_x\right]\left[\left(\widetilde{\overline{F}}(\omega_0)\right)\right]^T = -\widetilde{\overline{G}}N\widetilde{\overline{G}}^T$, распадающееся по аналогии с (13.31) на два уравнения Ляпунова для граничных реализаций матричных компонентов

$$\left.\begin{aligned} \underline{\widetilde{F}}(\omega_0)\cdot\underline{\widetilde{D}}_x + \underline{\widetilde{D}}_x\cdot\left(\underline{\widetilde{F}}(\omega_0)\right)^T &= -\widetilde{\underline{G}}N\widetilde{\underline{G}}^T \\ \overline{\widetilde{F}}(\omega_0)\cdot\overline{\widetilde{D}}_x + \overline{\widetilde{D}}_x\cdot\left(\overline{\widetilde{F}}(\omega_0)\right)^T &= -\widetilde{\overline{G}}N\widetilde{\overline{G}}^T \end{aligned}\right\}. \qquad (13.37)$$

Вычислить граничные дисперсии выхода в форме

$\underline{D}_y = \widetilde{C}\underline{\widetilde{D}}_x\widetilde{C}^T$, $\overline{D}_y = \widetilde{C}\overline{\widetilde{D}}_x\widetilde{C}^T$.

15.Проверить выполнение условия $\overline{D}_y = \tilde{C}\overline{\tilde{D}}_x\tilde{C}^T \le D_{yR}$, в случае его выполнения перейти к п.16 алгоритма, в противном случае к п.11 с тем, чтобы уменьшить значение характеристической частоты ω_0.

16. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или по ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ПК.

13.4.Алгоритм синтеза медианного управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии ошибки слежения за стохастическим экзогенным воздействии типа «экспоненциально коррелированный шум» с контролем величины его относительной интервальности

Задача, заявленная в заголовке параграфа решается с помощью алгоритма 13.2.

Алгоритм 13.2 (А13.2)

1.Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения неравенств

$$\left.\begin{array}{l} t_{\Pi 0} \le t_{\Pi R}, \sigma_0 \le \sigma_R, \\ D_{\varepsilon 0} \le D_{\varepsilon R} \\ \delta_I D_\varepsilon \le \delta_I D_{\varepsilon R} \end{array}\right\} \qquad (13.38)$$

где $t_{\Pi R}$, $\sigma_R, D_{\varepsilon R}, \delta_I D_{\varepsilon R}$,–соответственно требуемые значения длительности переходного процесса, его перерегулирование, медианного значения дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии и значение оценки относительной интервальности дисперсии ошибки.

2.Выполнить п.п.2–6 алгоритма 13.1.

3.Оценить требуемое значение относительной дисперсии ошибки $\overline{D}_{\varepsilon R} = D_{\varepsilon R} / D_\xi$.

4.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_a$.

5.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_\varepsilon = \overline{D}_\varepsilon(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\varepsilon R}$ (10.54), (10.56) и (10.58) для соответствующей размерности исходного НТО

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{1/\overline{\omega}_0}{\nu + 1/\overline{\omega}_0} \quad \text{при } n=1,$$

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{\left(\nu_2/\nu_1 + \nu_1\right)/\overline{\omega}_0}{\nu_2 + \nu_1/\overline{\omega}_0} \text{ при } n=2,$$

$$\overline{D}_\varepsilon = \frac{\left(\nu_3\nu_1^2 + \nu_3\nu_2 - \nu_1\nu_2^2\right)/\overline{\omega}_0}{\left(\nu_3 - \nu_1\nu_2\right)\left(\nu_3 + \nu_2/\overline{\omega}_0\right)} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

6. Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = arg\left(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_a\right) = \overline{\omega}_0\Omega_a$.

7. Определить первое промежуточное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\text{п}}(\omega_0) \le t_{\text{ПR}}\right), \omega_0 = \arg\left(D_\varepsilon(\omega_0) \le D_{\varepsilon\text{R}}\right)\right\}. \qquad (13.39)$$

8. Осуществить синтез УУ в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) НТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения) в форме (13.18) для медианного НТО (13.15) и в форме (13.25) для медианного НТО (13.24), алгоритмически, поддерживаемый средствами метода медианного модального управления при первом промежуточном значении характеристической частоты ω_0 (13.39).

9.Оценить выполнимость неравенств для оценок относительной интервальности нормы и следа матриц состояния спроектированных в п.8 систем в формах

$$\left.\begin{aligned} \delta_I\left(\left[F(\omega_0)\right]\right) &= \frac{\left\|\left[\Delta F\right]\right\|}{\left\|F(\omega_0)\right\|} = \frac{\left\|\left[\Delta A\right]\right\|}{\left\|A_0 - BK(\omega_0)\right\|} \le \delta_I D_\varepsilon. \\ \delta_I tr\left(\left[F(\omega_0)\right]\right) &= \frac{\left|tr\left(\left[\Delta F\right]\right)\right|}{\left|tr\left(F(\omega_0)\right)\right|} = \frac{\left|tr\left(\left[\Delta A\right]\right)\right|}{\left|tr\left(A_0 - BK(\omega_0)\right)\right|} \le \delta_I D_\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (13.40)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_I\left(\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\right) &= \frac{\left\|\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right]\right\|}{\left\|\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right\|} = \frac{\left\|\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]\right\|}{\left\|\tilde{\tilde{A}}_0 - \tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\right\|} \le \delta_I D_\varepsilon. \\ \delta_I tr\left(\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\right) &= \frac{\left|tr\left(\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right)\right|} = \frac{\left|tr\left(\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{A}}_0 - \tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\right)\right|} \le \delta_I D_\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (13.41)$$

Если неравенства (13.40), (13.41) выполняются, то значение характеристической частоты (13.39) принять в качестве второго промежуточного и перейти к п.10 алгоритма, в противном случае перейти к п.7 с тем, чтобы нарастить значение характеристической частоты.

10.Решить уравнение Ляпунова (7.5) с интервальными матричными компонентами $\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\left[\tilde{\tilde{D}}_x\right]+\left[\tilde{\tilde{D}}_x\right]\left[\left(\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right)\right]^T=-\tilde{\tilde{G}}N\tilde{\tilde{G}}^T$, распадающееся по аналогии с (13.31) на два уравнения Ляпунова для граничных реализаций матричных компонентов

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\cdot\underline{\tilde{\tilde{D}}_x}+\underline{\tilde{\tilde{D}}_x}\cdot\left(\underline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\right)^T=-\tilde{\tilde{G}}N\tilde{\tilde{G}}^T \\ \overline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\cdot\overline{\tilde{\tilde{D}}}_x+\overline{\tilde{\tilde{D}}}_x\cdot\left(\overline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\right)^T=-\tilde{\tilde{G}}N\tilde{\tilde{G}}^T\end{array}\right\}. \qquad (13.42)$$

Вычислить граничные дисперсии ошибки и оценку относительной интервальности дисперсии ошибки в форме

$$\underline{D}_\varepsilon=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon\underline{\tilde{\tilde{D}}}_x\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^T,\ \overline{D}_\varepsilon=\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon\overline{\tilde{\tilde{D}}}_x\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^T,\delta_I D_\varepsilon=\frac{\left|\overline{D}_\varepsilon-\underline{D}_\varepsilon\right|}{\left|\overline{D}_\varepsilon+\underline{D}_\varepsilon\right|}.$$

11.Проверить выполнение условия $\delta_I D_\varepsilon\le\delta_I D_{\varepsilon R}$, в случае его выполнения перейти к п.12 алгоритма, в противном случае к –п.7 с тем, чтобы увеличить значение характеристической частоты ω_0.

12. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или по ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ПК.

13.5. Алгоритм синтеза медианного управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»

Решение задачи, указанной в заголовке параграфа, может быть осуществлено с использование алгоритма 13.3.

Алгоритм 13.3 (А13.3)

1. Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения наборов неравенств в интервальной форме

$$\left.\begin{array}{l}\left[t_\Pi\right]=t_{\Pi 0}+\left[\Delta t_\Pi\right]\le t_{\Pi R},\left[\sigma\right]=\sigma_0+\left[\Delta\sigma\right]\le\sigma_R, \\ \left[D_y\right]=D_{y0}+\left[\Delta D_y\right]\le D_{yR}\end{array}\right\} \qquad (13.43)$$

где $t_{\Pi R}$, σ_R, D_{yR},–соответственно требуемые значения длительности переходного процесса, его перерегулирование и дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии.

2.Задать интервальную модель НТО в одной из форм (13.14) или (13.21) при этом для НТО (13.21) осуществить переход к представлению (13.23).

3.На основании (13.14) или (13.23) построить медианное представление НТО в формах (13.15) или (13.24), на этом этапе самым информативным показателем медианного объекта является его размерность «n» в случае представления (13.15) и «n+1» в случае представления (13.24).

4. В зависимости от требований к величине перерегулирования σ_{R} выбрать ПДМ (11.1), размерности медианного НТО с необходимым размещением собственных значений матрицы состояния (11.1) соответственно размерности «n» или «n+1».

5. Задать значение дисперсии $D_g = D_\xi$ стохастического экзогенного воздействия типа «нерегулярная качка» равного дисперсии выхода формирующего фильтра в виде колебательного звена.

6. Задать или сформировать в результате моделирования стохастического процесса типа «нерегулярная качка» значения коэффициента демпфирования ς и сопрягающей частоты Ω_κ ФФ

7. Оценить требуемое значение относительной дисперсии выхода $\overline{D}_{\mathrm{yR}} = D_{\mathrm{yR}} / D_\xi$.

8. Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_\kappa$.

9.С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_y = \overline{D}_y(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\mathrm{yR}}$ (10.73), (10.75) и (10.77) для соответствующей размерности исходного ТО, полагая равенство дисперсий выхода проектируемой системы и формируемой ПДМ $D_y = D_\eta \to \overline{D}_y = \overline{D}_\eta$,

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu\overline{\omega}_0 + 1} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{(2\varsigma\nu_2/\nu_1)\overline{\omega}_0}{2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1} \text{ при } n = 2,$$

$$\overline{D}_\eta = \frac{2\varsigma\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0}{(\nu_1\nu_2 - \nu_3)(2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1)} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

10.Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = \arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0/\Omega_\kappa) = \overline{\omega}_0\Omega_\kappa$.

11. Определить промежуточное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \min\left\{\omega_0 = \arg(t_{\mathrm{п}0}(\omega_0) \le t_{\mathrm{ПR}}), \omega_0 = \arg(D_{y0}(\omega_0) \le D_{y_{\mathrm{R}}})\right\}.$$

12. Осуществить синтез УУ в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения) в форме (13.18) для медианного НТО (13.15) и в форме (13.25) для медианного НТО (13.24), алгоритмически, поддерживаемый средствами метода медианного модального управления.

13.Сформировать интервальное представление спроектированной системы в форме (13.17) для интервального НТО (13.14) или в форме (13.26) для интервального НТО (13.23).

14.Решить уравнение Ляпунова (7.5) с интервальными матричными компонентами $\left[\tilde{F}(\omega_0)\right]\left[\tilde{D}_x\right]+\left[\tilde{D}_x\right]\left[\left(\tilde{F}(\omega_0)\right)\right]^T=-\tilde{G}N\tilde{G}^T$, распадающееся по аналогии с (13.31) на два уравнения Ляпунова для граничных реализаций матричных компонентов

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\tilde{F}(\omega_0)}\cdot\underline{\tilde{D}_x}+\underline{\tilde{D}_x}\cdot\left(\underline{\tilde{F}(\omega_0)}\right)^T=-\tilde{G}N\tilde{G}^T\\ \overline{\tilde{F}(\omega_0)}\cdot\overline{\tilde{D}}_x+\overline{\tilde{D}}_x\cdot\left(\overline{\tilde{F}(\omega_0)}\right)^T=-\tilde{G}N\tilde{G}^T\end{array}\right\}. \qquad (13.44)$$

Вычислить граничные дисперсии выхода в форме

$\underline{D}_y=\tilde{C}\underline{\tilde{D}}_x\tilde{C}^T$, $\overline{D}_y=\tilde{C}\overline{\tilde{D}}_x\tilde{C}^T$.

15.Проверить выполнение условия $\overline{D}_y=\tilde{C}\overline{\tilde{D}}_x\tilde{C}^T\le D_{yR}$, в случае его выполнения перейти к п.16 алгоритма, в противном случае к п.11 с тем, чтобы уменьшить значение характеристической частоты ω_0.

16. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или по ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ПК.

13.6. Алгоритм синтеза медианного модального управления, обеспечивающего системе заданное значение дисперсии шибки слежения за стохастическим экзогенным воздействии типа «нерегулярная качка» с контролем величины его относительной интервальности

Упомянутая в заголовке параграфа задача может быть решена с помощью алгоритма 13.4.

Алгоритм 13.4 (А13.4)

1.Задать требования к системе в переходном и установившемся режимах в форме выполнения неравенств

$$\left.\begin{array}{l} t_{\Pi 0} \le t_{\Pi R}, \sigma_0 \le \sigma_{\mathrm{R}}, \\ D_{\varepsilon 0} \le D_{\varepsilon \mathrm{R}} \\ \delta_I D_{\varepsilon} \le \delta_I D_{\varepsilon R} \end{array}\right\} \qquad (13.45)$$

где $t_{\Pi R}$, $\sigma_{\mathrm{R}}, D_{\varepsilon \mathrm{R}}, \delta_I D_{\varepsilon R}$,–соответственно требуемые значения длительности переходного процесса, его перерегулирование, медианного значения дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии и значение оценки относительной интервальности дисперсии ошибки.

2.Выполнить п.п.2–8 алгоритма 13.3.

3.Оценить требуемое значение относительной дисперсии ошибки $\overline{D}_{\varepsilon \mathrm{R}} = D_{\varepsilon \mathrm{R}} / D_{\xi}$.

4.Ввести в рассмотрение параметр относительная характеристическая частота в силу соотношения $\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_{\kappa}$.

5. С помощью аналитических асимптотических представлений зависимости $\overline{D}_{\varepsilon} = \overline{D}_{\varepsilon}(\overline{\omega}_0) = \overline{D}_{\varepsilon \mathrm{R}}$ (10.74), (10.76) и (10.78) для соответствующей размерности исходного ТО

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{1}{(\nu \overline{\omega}_0)^2} \quad \text{при } n = 1,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{\nu_1^2 / \overline{\omega}_0^2}{\nu_2^2 + 2\varsigma \nu_1 \nu_2 / \overline{\omega}_0} \text{ при } n = 2,$$

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{\nu_2^2 / \overline{\omega}_0^2}{\nu_3^2 + 2\varsigma \nu_2 \nu_3 / \overline{\omega}_0 + \left(\nu_2^2 + 2\left(2\varsigma^2 - 1\right)\nu_1 \nu_3\right) / \overline{\omega}_0^2} \text{ при } n=3$$

вычислить требуемое значение $\overline{\omega}_0$.

6. Вычислить абсолютное значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = \arg(\overline{\omega}_0 = \omega_0 / \Omega_{\kappa}) = \overline{\omega}_0 \Omega_{\kappa}$.

7. Определить первое промежуточное значение характеристической частоты ω_0 из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 = \arg\left(t_{\mathrm{п}}(\omega_0) \le t_{\Pi R}\right), \omega_0 = \arg\left(D_{\varepsilon}(\omega_0) \le D_{\varepsilon \mathrm{R}}\right)\right\}. \qquad (13.46)$$

8. Осуществить синтез УУ в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) НТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения) в форме (13.18) для медианного НТО (13.15) и в форме (13.25) для медианного НТО (13.24), алгоритмически, поддерживаемый средствами метода медианного модального управления при первом промежуточном значении характеристической частоты ω_0 (13.46).

9.Оценить выполнимость неравенств для оценок относительной интервальности нормы и следа матриц состояния спроектированных в п.8 систем в формах

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_I([F(\omega_0)]) = \frac{\|[\Delta F]\|}{\|F(\omega_0)\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 - BK(\omega_0)\|} \le \delta_I D_\varepsilon. \\
&\delta_I tr([F(\omega_0)]) = \frac{|tr([\Delta F])|}{|tr(F(\omega_0))|} = \frac{|tr([\Delta A])|}{|tr(A_0 - BK(\omega_0))|} \le \delta_I D_\varepsilon.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.47)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_I\left(\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\right) = \frac{\left\|\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right]\right\|}{\left\|\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right\|} = \frac{\left\|\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]\right\|}{\left\|\tilde{\tilde{A}}_0 - \tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\right\|} \le \delta_I D_\varepsilon. \\
&\delta_I tr\left(\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\right) = \frac{\left|tr\left(\left[\Delta\tilde{\tilde{F}}\right]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right)\right|} = \frac{\left|tr\left(\left[\Delta\tilde{\tilde{A}}\right]\right)\right|}{\left|tr\left(\tilde{\tilde{A}}_0 - \tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{K}}(\omega_0)\right)\right|} \le \delta_I D_\varepsilon.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.48)$$

Если неравенства (13.47), (13.48) выполняются, то значение характеристической частоты (13.46) принять в качестве второго промежуточного и перейти к п.10 алгоритма, в противном случае перейти к п.7 с тем, чтобы нарастить значение характеристической частоты.

10.Решить уравнение Ляпунова (7.5) с интервальными матричными компонентами $\left[\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right]\left[\tilde{\tilde{D}}_x\right] + \left[\tilde{\tilde{D}}_x\right]\left[\left(\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)\right)\right]^T = -\tilde{\tilde{G}}N\tilde{\tilde{G}}^T$, распадающееся по аналогии с (13.31) на два уравнения Ляпунова для граничных реализаций матричных компонентов

$$\left.\begin{aligned}
&\underline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\cdot\underline{\tilde{\tilde{D}}_x} + \underline{\tilde{\tilde{D}}_x}\cdot\left(\underline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\right)^T = -\tilde{\tilde{G}}N\tilde{\tilde{G}}^T \\
&\overline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\cdot\overline{\tilde{\tilde{D}}}_x + \overline{\tilde{\tilde{D}}}_x\cdot\left(\overline{\tilde{\tilde{F}}(\omega_0)}\right)^T = -\tilde{\tilde{G}}N\tilde{\tilde{G}}^T
\end{aligned}\right\}. \qquad (13.49)$$

Вычислить граничные дисперсии ошибки и оценку относительной интервальности дисперсии ошибки в форме

$$\underline{D}_\varepsilon = \tilde{\tilde{C}}_\varepsilon\underline{\tilde{\tilde{D}}}_x\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^T,\ \overline{D}_\varepsilon = \tilde{\tilde{C}}_\varepsilon\overline{\tilde{\tilde{D}}}_x\tilde{\tilde{C}}_\varepsilon^T,\ \delta_I D_\varepsilon = \frac{\left|\overline{D}_\varepsilon - \underline{D}_\varepsilon\right|}{\left|\overline{D}_\varepsilon + \underline{D}_\varepsilon\right|}.$$

11.Проверить выполнение условия $\delta_I D_\varepsilon \le \delta_I D_{\varepsilon R}$, в случае его выполнения перейти к п.12 алгоритма, в противном случае к –п.7 с тем, чтобы увеличить значение характеристической частоты ω_0.

12. Осуществить синтез УУ в одном из вариантов:

– в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) ТО и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или по ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемый средствами метода модального управления;

– в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемый средствами аналитического конструирования ПК.

Контрольные вопросы

1. В чем суть концепции управляемой относительной параметрической интервальности?
2.Как решается задача обеспечения минимального значения относительной интервальности дисперсии переменных системы в случае, когда интервальной является только матрица состояния технического объекта?
3. Как решается задача обеспечения минимального значения относительной интервальности дисперсии переменных системы в случае, когда интервальными являются матрицы состояния и управления ТО?
4.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
5.Как сконструировать последовательный компенсатор с медианными параметрами в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
6.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
7.Как сконструировать последовательный компенсатор с медианными параметрами в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
8.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?
9.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «экспоненциально коррелированный» шум»?

10.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
11.Как сконструировать последовательный компенсатор с медианными параметрами в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
12.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по входному воздействию и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
13.Как сконструировать последовательный компенсатор с медианными параметрами в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
14.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии выхода при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?
15.Как сформировать медианные матрицы прямой связи по ошибке и обратной связи по состоянию в задаче синтеза непрерывной системы с минимальным значением дисперсии ошибки при стохастическом экзогенном воздействии типа «нерегулярная качка»?

14. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЮЩИХ УСТРОЙСТВ

В настоящем пособии задача синтеза систем управления в своем решении основывается на концепции подобия и реализуется в двух вариантах:

- в виде комбинации обратных связей по вектору состояния (и выхода) технического объекта (ТО) и прямых связей по экзогенному (задающему) воздействию (или ошибке его воспроизведения), алгоритмически поддерживаемая средствами метода модального управления;
- в виде последовательного компенсатора (ПК), алгоритмически поддерживаемая средствами аналитического конструирования ПК.

Если сравнивать эти два решения по составу информационного обеспечения их практической реализации, то следует сказать, что в случае использования последовательного компенсатора достаточно информации о сигнале ошибки воспроизведения задающего воздействия, которая всегда наличествует. Таким образом каких-либо информационных проблем для реализации устройства управления (УУ) в виде последовательного компенсатора нет, для этого достаточно организации единичной отрицательной обратной связи по выходу технического объекта . Что касается реализации УУ в виде комбинации обратных связей по вектору состояния ТО и прямых связей по задающему воздействию, то синтез УУ осуществлен при гипотезе по умолчанию, что задающее воздействие и состояние ТО измеримы. Реальная неизмеримость задающего воздействия путем декомпозиции обратной связи по вектору состояния на обратную связь по выходу и модифицированная обратную связь по состоянию преодолена использованием прямой связи измеримой ошибки по выходу. Тем не менее, проблема неполной измеримости вектора состояния сохранилась.

Эта проблема составляет основное содержание настоящего раздела, которая решается введением в состав системы специального устройства, именуемого динамическим наблюдателем, который формирует оценку компонентов вектора состояния ТО. Как и в задаче синтеза УУ синтез динамического наблюдателя может быть осуществлен с использованием концепции подобия (наблюдатель Люенбергера) и с использованием концепции оптимальности (фильтр Калмана).

14.1. Наблюдающие устройства Люенбергера при стохастической природе системных переменных

Задача *динамического наблюдения*, которая сначала называлась задачей *асимптотического наблюдения*, в существующем виде сформулирована американским ученым Д. Люенбергером в 1971 году. Следует заметить, что не всегда удается обеспечить асимптотический характер процесса наблюдения в силу неполной измеримости переменных и воздействий, наличия неконтролируемых помех, неучтенные факторы модельного и сигнального характера и т.д. В этой связи представляется более корректным использовать понятие «*динамическое наблюдающее устройство*» (ДНУ) или более коротко «*наблюдатель*».

Дадим определение динамического наблюдающего устройства (ДНУ).

Определение 14.1 (О14.1). Динамическое наблюдающее устройство представляет собой *аппаратную или алгоритмическую среду*, которая реализует функциональное отображение Ψ всех доступных непосредственному измерению: компонентов $g_u(t)$ задающего воздействия $g(t)$, компонентов $\varepsilon_u(t)$ вектора ошибки $\varepsilon(t)$, сигнала управления $u(t)$, компонентов $y_u(t)$ вектора выхода $y(t)$, а возможно и компонентов $x_u(t)$ вектора состояния $x(t)$ в вектор $x_н(t)$ оценки вектора состояния, обладающее асимптотическим свойством, задаваемое записью

$$\Psi:\{g_u(t),\varepsilon_u(t),y_u(t),u(t),x_u(t)\}\Rightarrow x_н(t):\lim_{t\to\infty} x_н(t)=\Pi x(t), \quad (14.1)$$

где Π – матрица в общем случае особого (необратимого) преобразования.

В большинстве практических случаев задача динамического наблюдения решается на парах $\{u(t),y(t)\},\{u(t),\varepsilon(t)\}$, а в случаях, когда задача сводится к автономной версии динамической системы – то на векторах выхода $y(t)$ или ошибки $\varepsilon(t)$.

Поставим задачу формирования наблюдающего устройства, позволяющего восстановить вектор $x(t)$ состояния непрерывного динамического объекта в условиях *отсутствия* помех, имеющего векторно-матричное описание

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),x(0),y(t)=Cx(t) \quad (14.2)$$

где $x\in R^n, u\in R^r, y\in R^m, A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times r}, C\in R^{m\times n}$.

Прежде, чем приступить к решению задачи формирования динамического наблюдающего устройства, рассмотрим одну «*гипотетическую*» ситуацию. Для этого предположим, что $m=n, rangC=n=dim(x)$, тогда при *полной измеримости* вектора $y(t)$

вектор $x(t)$ состояния объекта (14.2) *при полной его неизмеримости* может быть восстановлен в силу соотношения

$$x(t)=C^{-1}y(t),\ \forall t\geq 0. \qquad (14.3)$$

Нетрудно видеть, что такое наблюдающее устройство следует назвать *«статическим»,* так как оно обладает нулевой динамикой.

На основе рассмотренной «гипотетической» ситуации можно сформулировать следующее утверждение без доказательства.

Утверждение 14.1 (У14.1). Для *корректного функционирования* динамического наблюдающего устройства, при котором могут быть восстановлены все n компонентов вектора $x(t)$ состояния объекта, у которого $m\neq n, m<n$, необходимо выполнение условия

$$rang(C)+n_н\geq n=dim(x), \qquad \blacksquare\square(14.4)$$

где $n_н=dim(x_н)$, $x_н-$ вектор состояния динамического наблюдающего устройства.

Примечание 14.2 (ПР.14.2). Ситуация, когда имеет место выполнение неравенства $rang(C)+n_н>n=dim(x)$, используется в случае, когда процесс измерения вектора $y(t)$ динамического объекта сопровождается заметными помехами так, что на ДНУ возлагаются задача *восстановления* вектора состояния объекта с одновременной *фильтрацией* измерений.

Вернемся к соотношению (14.1) для анализа системной нагрузки, возлагаемой на матрицу подобия Π размерности $dim(\Pi)=n_н\times n$. Размерность и вид этой матрицы полностью отражает все многообразие вариантов построения динамических наблюдающих устройств, так:

– если $dim(\Pi)=n_н\times n$ при $n_н=n$ и при этом $\Pi=I$, то динамическое наблюдающее устройство строится *полной размерности* и в *базисе наблюдаемого* технического *объекта*;

– если $dim(\Pi)=n_н\times n$ при $n_н=n$ и при этом $\Pi\neq I$, то динамическое наблюдающее устройство строится *полной размерности* в *базисе, не совпадающем с базисом* наблюдаемого технического *объекта*, чаще всего это какой-либо *канонический базис*;

– если $dim(\Pi)=n_н\times n$ при $n_н<n$, то динамическое наблюдающее устройство строится *неполной размерности* в произвольном базисе, чаще всего это какой-либо *канонический базис*; в этом случае для восстановления всех компонентов вектора состояния объекта используется композиция из измерения вектора выхода и вектора состояния ДНУ, а также матрица, составленная из матриц C и Π.

Динамические наблюдающие устройства полной размерности в базисе исходного объекта строятся на основе следующих *системных соображений*, содержащихся в следующем утверждении.

Утверждение 14.2 (У14.2). Динамическое наблюдающее устройство вектора $x(t)$ состояния непрерывного технического объекта (14.2), реализующее *алгоритм наблюдения*, записываемый в векторно-матричной форме

$$\dot{x}_н(t) = Ax_н(t) + Bu(t) + L(y(t) - Cx_н(t)), \qquad (14.5)$$

где $x_н$ – вектор состояния ДНУ, $dim(x_н) = dim(x) = n$, характеризуется процессом сходимости оценки $x_н(t)$ к оцениваемому вектору $x(t)$ состояния объекта (14.2), определяемым алгебраическим спектром собственных значений матрицы

$$A_н = A - LC. \qquad \square(14.6)$$

Доказательство. Для доказательства справедливости сформулированного утверждения введем в рассмотрение вектор $\theta_н(t)$ *невязки наблюдения*, который для общего случая задачи наблюдения имеет представление

$$\theta_н(t) = \Pi x(t) - x_н(t), \qquad (14.7)$$

а для рассматриваемого случая в силу равенства $\Pi = I$ принимает вид

$$\theta_н(t) = x(t) - x_н(t). \qquad (14.8)$$

Нетрудно видеть, что процесс сходимости $x_н(t)$ к оцениваемому вектору $x(t)$ в форме (14.1) с использованием вектора $\theta_н(t)$ невязки наблюдения принимает вид

$$\lim_{t\to\infty} \theta_н(t) = 0. \qquad (14.9)$$

Построим модель динамики сходимости процесса наблюдения, используя вектор невязки наблюдения (14.8). Дифференцирование по времени (14.8) с последующей подстановкой в результат дифференцирования соотношений (14.2) и (14.5) дает

$$\dot{\theta}_н(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_н(t) = A(x(t) - x_н(t)) + B(u(t) - u(t)) - LC(x(t) - x_н(t)),$$

что записывается в форме

$$\dot{\theta}_н(t) = (A - LC)\theta_н(t) = A_н\theta_н(t), \theta_н(0) = x(0) - x_н(0), \qquad (14.10)$$

откуда для вектора $\theta_н(t)$ невязки наблюдения можно записать

$$\theta_н(t) = e^{A_н t}\theta_н(0), \theta_н(0) = x(0) - x_н(0). \qquad \blacksquare(14.11)$$

Примечание 14.3 (ПР.14.3). Если начальные состояния технического объекта (14.2) и ДНУ (14.5) равны, то в силу (14.11) невязка наблюдения $\theta_н(t) \equiv 0$ и наблюдаемый вектор $x(t)$ и его оценка $x_н(t)$ тождественно совпадают, то есть выполняется соотношение $x(t) = x_н(t), \forall t.$

Введем определение *динамического модального управления*.

Определение 14.2 (О14.2). *Динамическим модальным управлением* будем называть управление вида (11.5), в котором отрицательная обратная связь по вектору $x(t)$ состояния технического объекта заменена на обратную связь по вектору $\hat{x}(t)$ оценки вектора

$x(t)$, формируемому в зависимости от *реализации матрицы* Π в силу соотношений:

1. при $\Pi = I \Rightarrow \hat{x}(t) = \Pi^{-1} x_н(t) = x_н(t);$ (14.12)

2. при $\Pi \neq I, rang(\Pi) = n \Rightarrow \hat{x}(t) = \Pi^{-1} x_н(t);$ (14.13)

3. при $\Pi \neq I, rang\,\Pi = n - m, rang\begin{bmatrix}\Pi\\ C\end{bmatrix} = n \Rightarrow \hat{x}(t) = \begin{bmatrix}\Pi\\ C\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_н(t)\\ y(t)\end{bmatrix};$ (14.14)

Построим теперь алгоритм синтеза динамического модального управления для случая формирования оценки $\hat{x}(t)$ вектора $x(t)$ состояния объекта вида (14.12), формируемой в среде ДНУ (14.5).

Алгоритм 14.1 (А14.1) синтеза динамического модального управления:

1.Сформировать матричные компоненты сигнала управления (11.5);

2. Сформировать динамическое наблюдающее устройство вида (14.5);

3. Назначить желаемую структуру собственных значений матрицы (14.6) $A_н = A - LC$;

4. Вычислить матрицу L, доставляющую матрице $A_н = A - LC$ желаемую структуру мод, для чего в одном из канонических базисов построить матрицу Γ на спектре собственных значений матрицы $A_н$, выбрать произвольную матрицу $H : (\Gamma, H)$ – наблюдаемая пара матриц, $dimH = dimC$, решить матричное уравнение Сильвестра

$$M\Gamma - A^T M = -C^T H \quad (14.15)$$

относительно матрицы M подобия $M\Gamma = A_н^T M$ и получить

$$L^T = HM^{-1} \Rightarrow L = \left(HM^{-1}\right)^T; \quad (14.16)$$

5. На основании алгоритма (11.17) $u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t)$ формирования сигнала *алгебраического* модального управления сформировать алгоритм *динамического* модального управления (ДМУ), осуществив замену $x(t)$ на $\hat{x}(t) = x_н(t) = x(t) - \theta_н(t)$, в результате чего алгоритм ДМУ принимает вид

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x_н(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t) + K_x \theta_н(t); \quad (14.17)$$

6. Осуществить предварительную проверку корректности синтеза ДНУ путем оценки влияния наблюдателя (14.5) на динамические свойства системы с алгоритмом ДНУ (14.17), придающего системе (11.3) $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(t)|_{t=0} = x(0), y(t) = Cx(t)$ вид

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t) + BK_x\theta_н(t), x(t)|_{t=0} = x(0), y(t) = Cx(t), \quad (14.18)$$

на основе составной системы, образованной из (14.18) и модели невязки наблюдения (14.10). Составная система с вектором состояния $\tilde{x} = \left[x^T, \theta_н^T\right]^T$

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}g(t),\ y(t)=\tilde{C}\tilde{x}(t),\ \tilde{x}(0)=\left[x^T(0),\theta_н^T(0)=x^T(0)-x_н^T(0)\right]^T \qquad (14.19)$$

характеризуется матрицами

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}F & BK_x\\ 0 & A_н\end{bmatrix},\tilde{G}=\begin{bmatrix}G\\ 0\end{bmatrix},\ \tilde{C}=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix} \qquad (14.20)$$

и позволяет вынести суждения о том, что:

– собственные значения матрицы F состояния системы с алгебраическим модальным управлением и матрицы $A_н$ состояния ДНУ независимы (разделены);

– наблюдатель не сказывается на переходной характеристики системы в силу условия $x(0)=x_н(0)=0\Rightarrow x(0)-x_н(0)=0$;

– динамика наблюдателя в основном влияет на процессы, порождаемые ненулевым начальным состоянием объекта в силу условия $x(0)\neq 0, x_н(0)=0,\Rightarrow x(0)-x_н(0)\neq 0$;

В случае неудовлетворительных по качеству процессов при ненулевом начальном состоянии динамического объекта вернуться в п.2 алгоритма, иначе перейти к п.7;

7. Осуществить техническую реализацию системы с динамическим наблюдателем, сформированном в базисе объекта управления.

Динамические наблюдающие устройства произвольной размерности и в произвольном базисе строятся на основе следующих *системных соображений*, содержащихся в следующем утверждении.

Утверждение 14.3 (У14.3). Динамическое наблюдающее устройство вектора $x(t)$ состояния непрерывного объекта управления (14.2), реализующее *алгоритм наблюдения*, записываемый в векторно-матричной форме

$$\dot{x}_н(t)=A_н x_н(t)+B_н u(t)+Ly(t),, \qquad (14.21)$$

где $x_н$ – вектор состояния ДНУ, $dimx_н=n_н\le n=dimx$; характеризуется процессом сходимости оценки $x_н(t)$ к оцениваемому вектору $x(t)$ состояния объекта (14.2), определяемым алгебраическим спектром собственных значений матрицы $A_н$, в форме (14.1) $\lim\limits_{t\to\infty} x_н(t)=Пx(t)$, где матрица $П$ преобразования подобия (в общем случае особого) определяется из решения матричного уравнения Сильвестра

$$ПA-A_н П=-LC, \qquad (14.22)$$

при этом матрица $A_н$ задается в одном из канонических базисов, матрица L является произвольной, но такой, что $dimL=dimC^T$, пара матриц $(A_н,L)$ является управляемой, матрица $B_н$ вычисляется в силу соотношения

$$B_н=ПB. \qquad \square(14.23)$$

Доказательство утверждения строится на базе модели динамики вектора невязки наблюдения (14.7), для которого с использованием

модели наблюдаемого объекта (14.2) и ДНУ (14.21) можно записать цепочку векторно-матричных соотношений

$$\dot{\theta}_н(t) = П\dot{x}(t) - \dot{x}_н(t) = ПAx(t) + ПBu(t) - A_н x_н(t) - B_н u(t)$$

$$- Ly(t)|_{x_н(t)=Пx(t)-\theta_н(t),\, y(t)=Cx(t)} = A_н\theta_н(t) + (ПA - A_н П + LC)x(t) + (TB - B_н)u(t).$$

Подстановка в полученное выражение соотношений (14.22) и (14.23) дает для вектора невязки наблюдения

$$\dot{\theta}_н(t) = A_н\theta_н(t), \theta_н(0) = \Pi x(0) - x_н(0), \qquad (14.24)$$

откуда для вектора $\theta_н(t)$ невязки наблюдения можно записать

$$\theta_н(t) = e^{A_н t}\theta_н(0), \theta_н(0) = \Pi x(0) - x_н(0). \qquad \blacksquare(14.25)$$

Примечание 14.4 (ПР.14.4). Прежде, чем конструировать алгоритмы синтеза *динамического модального управления* отметим, что ДНУ в форме (14.21) обслуживает как случай (14.13), так и случай (14.14), но алгоритмы синтеза ДМУ будут различаться.

АЛГОРИТМ 14.2 (А14.2) синтеза динамического модального управления для случая (14.13) формирования оценки вектора состояния объекта

1. Выполнить п.п.1 – 10 алгоритма 14.1;
2. Сформировать динамическое наблюдающее устройство вида (14.21) с матрицей $A_н$ состояния ДНУ в одном из канонических базисов и с заданной структурой собственных значений, определяемой желаемым темпом сходимости оценки к оцениваемому вектору состояния объекта;
3. Назначить матрицу L:

$$L = arg\{observ(A_н, L) \& dimL = dimC^T\} \qquad (14.26);$$

4. Решить матричное уравнение Сильвестра (14.22) относительно матрицы Π, сформировать матрицу входа $B_н$ ДНУ в форме (14.23);
5. На основании алгоритма (11.17) $u(t) = K_\varepsilon\varepsilon(t) - K_x x(t)$ формирования сигнала *алгебраического* модального управления сформировать алгоритм *динамического* модального управления (ДМУ), осуществив замену $x(t)$ на $\hat{x}(t) = П^{-1}x_н(t) = x(t) - П^{-1}\theta_н(t)$, в результате чего алгоритм ДМУ принимает вид

$$u(t) = K_\varepsilon\varepsilon(t) - K_x П^{-1}x_н(t) = K_\varepsilon\varepsilon(t) - K_x x(t) + K_x П^{-1}\theta_н(t); \qquad (14.27)$$

6. Осуществить предварительную проверку корректности синтеза ДНУ путем оценки влияния наблюдателя (14.21) на динамические свойства системы с алгоритмом ДНУ (14.21) в соответствии с п.6 алгоритма 14.1 с точностью до замены $\theta_н(t)$ на $П^{-1}\theta_н(t)$;
7. Осуществить техническую реализацию динамического модального управления с наблюдателем в произвольном базисе.

АЛГОРИТМ 14.3 (А14.3) синтеза динамического модального управления для случая (14.14) формирования оценки вектора состояния объекта

1. Выполнить п.п.1 – 4 алгоритма 14.2;

2. На основании алгоритма (11.17) $u(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_{x}x(t)$ формирования сигнала *алгебраического* модального управления сформировать алгоритм *динамического* модального управления (ДМУ) вида

$$u(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-Dy(t)-Nx_{н}(t), \tag{14.28}$$

в котором матрицы D и N подчинены матричным соотношениям

$$DC+N\Pi=\begin{bmatrix}D & N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ \Pi\end{bmatrix}=K_{x},\ \begin{bmatrix}D & N\end{bmatrix}=K_{x}\begin{bmatrix}C\\ \Pi\end{bmatrix}^{-1}; \tag{14.29}$$

3. Пользуясь (14.28),(14.29) и (14.7) записать динамическое модальное управление в форме

$$u(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_{x}x(t)+N\theta_{н}(t). \tag{14.30}$$

4. Осуществить предварительную проверку корректности синтеза ДНУ путем оценки влияния наблюдателя (14.21) на динамические свойства системы с алгоритмом ДНУ (14.21) в соответствии с п.6 алгоритма 14.1 с точностью до замены $K_{x}\theta_{н}(t)$ на $N\theta_{н}(t)$;

5. Выполнить п.12 алгоритма 15.1.

Теперь поставим задачу формирования наблюдающего устройства, позволяющего восстанавливать вектор $x(t)$ состояния непрерывного динамического объекта в условиях *наличия* помех в измерении вектора выхода. Последнее означает, что во всех аналитических представлениях динамического наблюдающего устройства вектор выхода $y(t)$ следует заменить на аддитивную композицию $y(t)+\xi(t)$, в которой $\xi(t)$– стохастическое воздействие стационарное в широком смысле. В итоге аналитические представления наблюдающего динамического устройства и его динамики по вектору невязки (14.5) и (14.10) примут вид

$$\dot{x}_{н}(t)=Ax_{н}(t)+Bu(t)+L\left(y(t)-Cx_{н}(t)\right)+L\xi(t), \tag{14.31}$$

$$\dot{\theta}_{н}(t)=(A-LC)\theta_{н}(t)+L\xi(t)=A_{н}\theta_{н}(t)+L\xi(t),\theta_{н}(0)., \tag{14.32}$$

Получают новое представления ДНУ и динамика вектора невязки (14.21) и (14.24)

$$\dot{x}_{н}(t)=A_{н}x_{н}(t)+B_{н}u(t)+Ly(t)+L\xi(t), \tag{14.33}$$

$$\dot{\theta}_{н}(t)=A_{н}\theta_{н}(t)+L\xi(t),\theta_{н}(0). \tag{14.34}$$

В свою очередь в выражениях для сигналов управления (14.17) и (14.27) появляется стохастическая составляющая так, что (14.17) и (14.27) принимают вид

$$u(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_{x}x_{н}(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_{x}x(t)+K_{x}\theta_{н}(t)+K_{x}\theta_{н}(t,\xi(t)), \tag{14.35}$$

$$u(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_{x}\Pi^{-1}x_{н}(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_{x}x(t)+K_{x}\Pi^{-1}\theta_{н}(t)+ \\ +K_{x}\Pi^{-1}\theta_{н}(t,\xi(t))\Big\}. \qquad (14.36)$$

Минимизация стохастической составляющей в сигнале управления может быть осуществлена с помощью алгоритмов минимизации дисперсии входа системы, представленные в разделе 11 с той разницей, что тройку матриц (G,F,C) следует заменить на $\left(L,A_{\text{н,}}\left(K_{x}\Pi^{-1}\right)\right)$. Следует ожидать, что при минимизации характеристической частоты ω_0 матрицы $A_{\text{н}}=A_{\text{н}}(\omega_0)$ состояния ДНУ можно добиться желаемого результата.

14.2. Наблюдающие устройства типа фильтр Калмана при стохастической природе системных переменных

По существу фильтр Калмана модельно представляется также как каноническое динамическое наблюдающее устройство в основном в форме соотношения (14.31), для которого справедливо описание динамики вектора невязки наблюдения в форме (14.32)

$$\dot{\theta}_{н}(t)=(A-LC)\theta_{н}(t)+L\xi(t)=A_{н}\theta_{н}(t)+L\xi(t),\theta_{н}(0). \qquad (14.37)$$

Отличие фильтра Калмана от канонического ДНУ состоит в том, что он является оптимальным динамическим наблюдающим устройством, в котором матрица L входа ДНУ по каналу измерения выхода $y(t)$ технического объекта ищется не из соображений наделения матрицы $A_{н}$ желаемой структурой собственных чисел, а из решения минимизационной задачи

$$L=\arg\min_{L}\left(M\left(\theta_{н}^{T}\theta_{н}\right)=tr(D_{\theta})\right) \qquad (14.38)$$

где $D_{\theta}=M\left(\theta_{н}\theta_{н}^{T}\right)$– матрица дисперсий невязки наблюдения, $tr(D_{\theta})$– след этой матрицы, вычисляемый как сумма диагональных элементов.

Поставленная оптимизационная задача при синтезе фильтра Калмана опирается на решение матричного уравнения Риккати. В связи со сказанным для случая $\xi(t)=w(t)$– «белый шум» интенсивности N сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 14.4(У14.4). Решение минимизационной задачи (14.38) достигается в форме

$$L=\arg\min_{L}\left(M\left(\theta_{н}^{T}\theta_{н}\right)=tr(D_{\theta})\right)=D_{\theta}C^{T}N^{-1}, \qquad (14.39)$$

где дисперсия D_{θ} ищется как решение алгебраического матричного уравнения Риккати

$$A_{н}D_{\theta}+D_{\theta}A_{н}^{T}-D_{\theta}C^{T}N^{-1}CD_{\theta}=0. \qquad (14.40)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения 14.4 воспользуемся уравнением Ляпунова для дисперсии невязки

наблюдения, которое для случая, когда известна матрица L, записывается в форме

$$A_н D_\theta + D_\theta A_н^T = -LNL^T . \qquad (14.41)$$

Учтем представление $A_н = A - LC$, что позволяет записать матричное уравнение Ляпунова (14.41) в форме

$$AD_\theta + D_\theta A^T - \left(D_\theta C^T L^T + LCD_\theta\right) + LNL^T = 0 . \qquad (14.42)$$

Подстановка (14.39) в (14.42) приводит к (14.40).

В заключение сообщим, что динамическое наблюдающее устройство в форме фильтра Калмана, в котором матрица входа L задается в форме (14.39), доставляет его матрице состояния $A_н$ структуру собственных чисел с размещением Баттерворта.

В случае, когда $\xi(t)$ является окрашенным шумом, следует поступать по схеме, изложенной в разделе 7 настоящего пособия.

Контрольные вопросы

1.Что такое динамическое наблюдающее устройство?
2.В каком случае наблюдающее устройство становится статическим?
3.Что такое наблюдающее устройство Люенбергера?
4.Как связаны размерность наблюдающего устройства Люенбергера с размерностью вектора выхода?
5.Как выглядит наблюдающее устройство Люенбергера, сформированное в базисе исходного технического объекта?
6.Как выглядит наблюдающее устройство Люенбергера, сформированное в произвольном базисе?
7.Как выглядит закон управления техническим объектом при использовании в составе системы наблюдающего устройства Люенбергера, сформированного в базисе исходного технического объекта?
8.Как выглядит закон управления техническим объектом при использовании в составе системы наблюдающего устройства Люенбергера, сформированного в произвольном базисе?
9.Как сконструировать наблюдающее устройство Люенбергера при наличии стохастических помех в измерении вектора выхода объекта?
10.В чем принципиальное отличие фильтра Калмана от наблюдающего устройства Люенбергера, функционирующего при наличии стохастических помех в измерении вектора выхода объекта?
11.Как сконструировать фильтр Калмана при наличии стохастических помех типа «белый шум» в измерении вектора выхода технического объекта?
12.Как сконструировать фильтр Калмана при наличии стохастических помех типа «окрашенный шум» в измерении вектора выхода технического объекта?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие, написано с одной целью – погрузить с читателя в инструментарий и методологию исследования динамики процессов в непрерывных и дискретных системах при стохастических внешних воздействиях в условиях параметрической неопределенности исходного объекта управления.

Из содержания пособия ясно, что современные методы вычисления матриц дисперсий переменных состояния и выхода при стохастическом воздействии стационарном в широком смысле типа «белый шум» в рамках аппарата пространства состояний как для непрерывных, так и для дискретных систем используют решения матричных уравнений Ляпунова. Более того, в случае стохастического воздействия стационарного в широком смысле типа «окрашенный шум» задача также может быть сведена к решению матричного уравнения Ляпунова, если агрегировать формирующий фильтр, который «белый шум» на его входе преобразует в «окрашенный» на выходе, и исследуемую систему в объединенную. Обнаружилось, что корреляционные функции непрерывных и дискретных систем могут быть вычислены по схеме векторно – матричных процедур вычисления свободного движения непрерывных и дискретных систем для векторов состояния, выхода и ошибки. Более того, в отличие от традиционного частотного подхода для матриц спектральных плотностей в рамках возможностей метода пространства состояний удалось получить их компактные аналитические представления как для случая скалярных стохастических воздействий, так и для случая векторных. Таким образом, пособие содержит описание конструктивного инструмента исследования поведения непрерывных и дискретных систем при стохастических внешних воздействиях.

В пособии показано, что в задачах синтеза непрерывных и дискретных систем при номинальных значениях параметров на заданные значения дисперсий ошибок или выхода можно успешно использовать возможности модального управления, если его дополнить банком полиномиальных динамических моделей с оцененными стохастическими свойствами, полученными при наиболее употребительных окрашенных стохастических внешних воздействиях типа «экспоненциально коррелированного» шума и воздействия типа «нерегулярная качка».

В пособии описано, как решать задачи синтеза систем при неопределенных значениях параметров объекта, заданных в интервальной форме, методом медианного модального управления на заданные значения дисперсий переменных с контролем значения их относительной интервальности.

Предложено алгоритмическое обеспечение вычисления функций параметрической чувствительности сингулярных чисел матриц, формирующих эллипсоидное покрытие стохастических процессов как непрерывной, так и дискретной природы.

Для случая неполной измеримости вектора состояния объекта управления предложено формировать информационное обеспечение задач управления средствами динамических наблюдающих устройств Люенбергера и фильтров Калмана Рассмотрены особенности организации экспериментального исследования спроектированной системы , состоящие в том, что исследование непрерывных систем осуществляются с использованием их дискретных представлений, требующих эквивалентирования непрерывных и дискретных внешних стохастических воздействий по критерию равенства первых двух моментов, что вызвано фактом физической нереализуемости источника непрерывного белого шума при реализуемости дискретного.

В общем, пособие подготовило студентов к общению с огромным миром проблем современного управления в условиях стохастической сигнальной среды и параметрической неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. – СПб: Наука, 2001.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1968.
4. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. / Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2003.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
7. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
9. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
10. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983.
11. Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.
12. Вундер Н.А., Надькина Е.А., Ушаков А.В., Чугина Ю.В. Формирование корреляционных функций линейных непрерывных систем на основе их фундаментальных матриц // Научно – технический вестник ИТМО. 2015. Т. 15. №6. с.1036-1044.
13. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление./ Пер. с англ. под ред. А.Н. Ширяева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.
14. Деч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и z–преобразования. – М.: Наука, 1971.
15. Дорф Р., Бишоп Р.. Современные системы управления. Пер. с англ. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
16. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. /Под ред. Ушакова А.В. – СПб.: СПбГУИТМО. 2008.
17. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Матричный формализм задачи контроля вырождения многоканальных динамических систем при векторном стохастическом воздействии типа окрашенный шум // Международный научно–технический журнал Проблемы управления и информатики НАН Украины. - 2013. - № 3. С.1-11.

18. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, расширенное и дополненное.– СПб.: НИУ ИТМО , 2014. 292 с., 15 ил.
19. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем /Пер.с.англ. М.: Наука, 1970.
20. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. / Под редакцией Д.К. Фаддеева. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
21. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. - М : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 384 **с**
22. Калмыков С.А., Шокин Б.Л., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
23. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. – М: Мир, 1977.
24. Коровьяков А.Н., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Следящий опто-электронный мониторинг деформаций в задаче динамической юстировки устройств пространственного наблюдения / Под ред. А. В. Ушакова.- СПб.: СПбГУИТМО, 2008.
25. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
26. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985.
27. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков; Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
28. Матричные уравнения в исследовании дискретных процессов над бесконечными и конечными полями / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков./ Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1993.
29. Мороз А.И. Курс теории систем. – М.: Высшая школа,1987.
30. Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие.– СПб: СПБГУИТМО, 2011. – 231с.: ил.33.
31. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.
32. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987.
33. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем/ Учебник. Минск: Дизайн ПРО. 2004.
34. Ту Ю.Современная теория управления/ Пер. с англ. М.: Машиностроение,1971.

35. Уонем М. Линейные многомерные системы: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
36. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление// Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. №3. С. 8-16.
37. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях. //Автоматика и телемеханика. 1992. №10. С. 72-82.
38. Ушаков А.В., Цвентарный А.Ю. Модальное управление динамическими объектами типа «одномерный вход–выход» при сложном экзогенном стохастическом воздействии// Изв.вузов. Приборостроение. 2009.Т.52, №11.С.42-47
39. Ушаков А.В., Цвентарный А.Ю. Формирование полиномиальной динамической модели при сложном экзогенном стохастическом воздействии // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. №3. С. 14 – 19.
40. Ушаков А.В. Прикладная теория информации: элементы теории и практикум: учебное пособие /Под ред. А.В.Ушакова. – СПб.: СПбГУИТМО.2012.–326с.
41. В.Н. Фомин, Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов. СПб: СПбГУ, 1996. 306с.
42. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости семейства систем линейных дифференциальных уравнений// Диф. уравн. 1978. Т.14. №11.С. 2086-2088.
43. Харитонов В.Л. Устойчивость вложенных семейств полиномов. // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 170-178.
44. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью// Теория и системы управления. 1997. №3. С. 51–61.
45. H.W. Bode, C.E. Shannon, A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory. Proceeding of Institute Radio Engineers. 1950. V. 38. № 4, p.p.417-425
46. G. Chen, G. Chen, S.-H. Hsu, Linear Stochastic Control Systems. Florida, CRC Press. Inc.1995. 400 p.p.
47. J.H. Davis, Foundation of Deterministic and Stochastic Control. Birkhauser. 2002. 400 p.p.
48. V.N. Fomin, Optimal Filtering. Vol.1. Filtering of stochastic Processes. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 376 p.p.
49. V.N. Fomin, Optimal Filtering. Vol.2. Spatio-Temporal Felds. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999. 373 p.p.
50. Van Loan C.F. Introduction to Scientific Computing, A Matrix-Vector Approach Using MATLAB, Prentice Hall, 2000.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Развернутое представление полиномов числителей и знаменателей компонентов матрицы дисперсии агрегированного вектора состояний, представленных системой соотношений (10.69)

$$\left.\begin{aligned} Q_{\kappa 3}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = {} & \nu_3^2\omega_0^6 + 2\varsigma\nu_2\nu_3\Omega_\kappa\omega_0^5 + \left(\nu_2^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\right)\Omega_\kappa^2\omega_0^4 + \\ & + \left(2\varsigma\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 4\varsigma\nu_3\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\Omega_\kappa^3\omega_0^3 + \left(\nu_1^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_2\right)\Omega_\kappa^4\omega_0^2 + \\ & + 2\varsigma\nu_1\Omega_\kappa^5\omega_0 + \Omega_\kappa^6; \end{aligned}\right\} \quad (П1.1)$$

$$\begin{aligned} P_{11}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = P_\eta(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = {} & \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_3^2\omega_0^6 + 2\varsigma\nu_2\nu_3\Omega_\kappa\omega_0^5 + 4\varsigma^2\nu_1\nu_3\Omega_\kappa^2\omega_0^4\right) + \\ & + \left(2\varsigma\left(4\varsigma^2-1\right)\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 2\varsigma\nu_1^3\right)\nu_3\Omega_\kappa^3\omega_0^3 + 4\varsigma^2\nu_1^2\nu_3\Omega_\kappa^4\omega_0^2 + 2\varsigma\nu_1\nu_3\Omega_\kappa^5\omega_0; \end{aligned} \quad (П1.2)$$

$$P_{13}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = -\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\nu_3^2\Omega_\kappa^2\omega_0^6 - 2\varsigma\nu_1^2\nu_3^2\Omega_\kappa^3\omega_0^5 - 4\varsigma^2\nu_1\nu_3^2\Omega_\kappa^4\omega_0^4 - 2\varsigma\nu_3^2\Omega_\kappa^5\omega_0^3; \quad (П1.3)$$

$$P_{14}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = \nu_3^2\omega_0^6 + 2\varsigma\nu_2\nu_3\Omega_\kappa\omega_0^5 + \left(4\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\Omega_\kappa^2\omega_0^4 + 2\varsigma\left(4\varsigma^2-1\right)\nu_3\Omega_\kappa^3\omega_0^3; \quad (П1.4)$$

$$P_{15}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = \nu_2\nu_3\Omega_\kappa^2\omega_0^5 + 2\varsigma\nu_1\nu_3\Omega_\kappa^3\omega_0^4 + \left(4\varsigma^2-1\right)\nu_3\Omega_\kappa^4\omega_0^3; \quad (П1.5)$$

$$P_{22}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\nu_3^2\Omega_\kappa^2\omega_0^6 + 2\varsigma\nu_1^2\nu_3^2\Omega_\kappa^3\omega_0^5 + 4\varsigma^2\nu_1\nu_3^2\Omega_\kappa^4\omega_0^4 + 2\varsigma\nu_3^2\Omega_\kappa^5\omega_0^3; \quad (П1.6)$$

$$P_{24}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = \nu_2\nu_3\Omega_\kappa^2\omega_0^5 + 2\varsigma\nu_1\nu_3\Omega_\kappa^3\omega_0^4 + \left(4\varsigma^2-1\right)\nu_3\Omega_\kappa^4\omega_0^3; \quad (П1.7)$$

$$\left.\begin{aligned} P_{33}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = {} & \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\nu_2\nu_3^2\Omega_\kappa^2\omega_0^8 + 2\varsigma\nu_1^2\nu_2\nu_3^2\Omega_\kappa^3\omega_0^7 + 4\varsigma^2\nu_1\nu_2\nu_3^2\Omega_\kappa^4\omega_0^6 + \\ & + 2\varsigma\nu_2\nu_3^2\Omega_\kappa^5\omega_0^5 - \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_2\nu_3^2\Omega_\kappa^2\omega_0^8 + 2\varsigma\nu_1\nu_3^2\Omega_\kappa^3\omega_0^7 + \left(4\varsigma^2-1\right)\nu_3^2\Omega_\kappa^4\omega_0^6\right); \\ P_{34}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = {} & \nu_3^2\Omega_\kappa^2\omega_0^6 - \nu_1\nu_3\Omega_\kappa^4\omega_0^4 - 2\varsigma\nu_3\Omega_\kappa^5\omega_0^3; \end{aligned}\right\} \quad (П1.8)$$

$$P_{35}(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = 2\varsigma\nu_3^2\Omega_\kappa^3\omega_0^6 + \nu_2\nu_3\Omega_\kappa^4\omega_0^5 - \nu_3\Omega_\kappa^6\omega_0^3; \quad (П1.9)$$

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(\omega_{0,}\Omega_\kappa) = {} & \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\nu_2^2\Omega_\kappa^2\omega_0^4 + \left(2\varsigma\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)^2 - 2\varsigma\nu_3\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 2\varsigma\nu_1^3\nu_3\right)\cdot \\ & \cdot\Omega_\kappa^3\omega_0^3 + \left(\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_1^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_2\right) + 4\varsigma^2\nu_1^2\nu_3\right)\Omega_\kappa^4\omega_0^2 + \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\Omega_\kappa^6. \end{aligned} \quad (П1.10)$$

Полные аналитические представления относительных дисперсий выхода и ошибки, параметризованные относительной характеристической частотой, для непрерывной полиномиальной модели общего вида третьего порядка и стохастического окрашенного воздействия типа «нерегулярная качка»

$$\begin{aligned} \overline{D}_\eta(\overline{\omega}_0) = {} & \frac{\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_3^2\overline{\omega}_0^6 + 2\varsigma\nu_2\nu_3\overline{\omega}_0^5 + 4\varsigma^2\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0^4\right) + }{\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_3^2\overline{\omega}_0^6 + 2\varsigma\nu_2\nu_3\overline{\omega}_0^5 + \left(\nu_2^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\right)\overline{\omega}_0^4 + \right.} \to \\ \to {} & \frac{\left. + \left(2\varsigma\left(4\varsigma^2-1\right)\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 2\varsigma\nu_1^3\right)\nu_3\overline{\omega}_0^3 + 4\varsigma^2\nu_1^2\nu_3\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\nu_1\nu_3\overline{\omega}_0\right.}{\left. + \left(2\varsigma\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 4\varsigma\nu_3\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\overline{\omega}_0^3 + \left(\nu_1^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_2\right)\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1\right)}; \end{aligned} \quad (П1.11)$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_\varepsilon(\overline{\omega}_0) = {} & \frac{\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\nu_2^2\overline{\omega}_0^4 + \left(2\varsigma\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)^2 - 2\varsigma\nu_3\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 2\varsigma\nu_1^3\nu_3\right)\overline{\omega}_0^3 + }{\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_3^2\overline{\omega}_0^6 + 2\varsigma\nu_2\nu_3\overline{\omega}_0^5 + \left(\nu_2^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_1\nu_3\right)\overline{\omega}_0^4 + \right.} \to \\ \to {} & \frac{\left. + \left(\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\left(\nu_1^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_2 + 4\varsigma^2\nu_1^2\nu_3\right)\right)\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\nu_1^2\nu_2\overline{\omega}_0 + \left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right)\right.}{\left. + \left(2\varsigma\left(\nu_1\nu_2-\nu_3\right) + 4\varsigma\nu_3\left(2\varsigma^2-1\right)\right)\overline{\omega}_0^3 + \left(\nu_1^2 + 2\left(2\varsigma^2-1\right)\nu_2\right)\overline{\omega}_0^2 + 2\varsigma\nu_1\overline{\omega}_0 + 1\right)}. \end{aligned} \quad (П1.12)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Элементы интервальных представлений и вычислений

Определение П2.1. Пусть числа $\underline{\rho}, \overline{\rho}$ такие, что $\underline{\rho}, \overline{\rho} \in R$, $\underline{\rho} \le \overline{\rho}$, и при этом задают вещественное число ρ в параметризованной относительным параметром $q \in [0,1]$ форме

$$\rho(q) = (1-q)\underline{\rho} + q\overline{p}. \qquad (П2.1)$$

Тогда вещественное интервальное число $[\rho]$ образуется экстремальными реализациями этого числа

$$\underline{\rho} = \min_q \{\rho(q); q \in [0,1]\}, \overline{\rho} = \max_q \{\rho(q); q \in [0,1]\} \qquad (П2.2)$$

так, что оно может быть записано в форме

$$[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}] \qquad (П2.3)$$

Определение П2.2. Интервальным комплексным числом $[\gamma = \rho + j\delta]$ называется комплексное число, у которого интервальными являются вещественные и мнимые части так, что становится справедливым представление

$$[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta], \qquad (П2.4)$$

где $[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}]$, $[\delta] = [\underline{\delta}, \overline{\delta}]$.

Определение П2.3. Интервальным вектором $[x]$ размерности *n* называется вектор с интервальными компонентами $[x_i] = [\underline{x_i}, \overline{x_i}]$ так, что становится справедливой запись

$$[x] = col\{[x_i]; i = \overline{1,n}\} \qquad (П2.5)$$

Определение П2.4. Интервальной $(n \times m)$ – матрицей $[A]$ называется матрица, составленная из интервальных скалярных компонентов

$$[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}], [A] = row\{col([A_{ij}]; i = \overline{1,n}) j = \overline{1,m}\} \qquad (П2.6)$$

при этом справедливым оказывается представление

$$[A] = [\underline{A}, \overline{A}], \qquad (П2.7)$$

где $[\underline{A}] = row\{col([\underline{A}_{ij}]; i = \overline{1,n}) j = \overline{1,m}\}, \qquad (П2.8)$

$$[\overline{A}] = row\{col([\overline{A}_{ij}]; i = \overline{1,n}) j = \overline{1,m}\}. \qquad (П2.9)$$

Определение П2.5. Произведением

$$[a] \cdot [b] = [c] \qquad (П2.10)$$

интервальных чисел $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[c] = [\underline{c}, \overline{c}]$, граничные значения которого $\underline{c}$ и $\overline{c}$ вычисляются в силу

$$\underline{c} = min\left\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right\}, \quad (П2.11)$$

$$\overline{c} = max\left\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right\}. \quad (П2.12)$$

Определение П2.6. Суммой

$$[a]+[b]=[d] \quad (П2.13)$$

интервальных чисел $[a]=\left[\underline{a}, \overline{a}\right]$ и $[b]=\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ называется интервальное число $[d]=\left[\underline{d}, \overline{d}\right]$, граничные значения которого $\underline{d}$ и $\overline{d}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{d} = min\left\{\underline{a}+\underline{b}, \underline{a}+\overline{b}, \overline{a}+\underline{b}, \overline{a}+\overline{b}\right\} = \underline{a}+\underline{b}, \quad (П2.14)$$

$$\overline{d} = max\left\{\underline{a}+\underline{b}, \underline{a}+\overline{b}, \overline{a}+\underline{b}, \overline{a}+\overline{b}\right\} = \overline{a}+\overline{b}. \quad (П2.15)$$

Определение П2.7. Частным от деления

$$\frac{[a]}{[b]}=[f] \quad (П2.16)$$

интервальных чисел $[a]=\left[\underline{a}, \overline{a}\right]$ и $[b]=\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ называется интервальное число $[f]=\left[\underline{f}, \overline{f}\right]$, граничные значения которого $\underline{f}$ и $\overline{f}$ вычисляются в силу выражений

$$\underline{f} = min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}, \ \overline{f} = max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}. \quad (П2.17)$$

Определение П2.8. Разностью

$$[a]-[b]=[d] \quad (П2.18)$$

интервальных чисел $[a]=\left[\underline{a}, \overline{a}\right]$ и $[b]=\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ называется интервальное число $[h]=\left[\underline{h}, \overline{h}\right]$, граничные значения которого $\underline{h}$ и $\overline{h}$ определяются с помощью выражений

$$\underline{h} = min\left\{\underline{a}-\underline{b}, \underline{a}-\overline{b}, \overline{a}-\underline{b}, \overline{a}-\overline{b}\right\}, \quad (П2.19)$$

$$\underline{h} = max\left\{\underline{a}-\underline{b}, \underline{a}-\overline{b}, \overline{a}-\underline{b}, \overline{a}-\overline{b}\right\}. \quad (П2.20)$$

Определение П2.9. Фиксированное число g имеет интервальное представление $[g]=\left[\underline{g}, \overline{g}\right]$, которое характеризуется выполнением равенства

$$\underline{g} = \overline{g}. \quad (П2.21)$$

Утверждение П2.1. Частное от деления интервального числа $[a]=\left[\underline{a}, \overline{a}\right]$ на самое себя является интервальное число $\left[1_a\right]=\left[\underline{1}_a, \overline{1}_a\right]$

$$\frac{[a]}{[a]}=\left[1_a\right], \quad (П2.22)$$

граничные значения которого $\underline{1}_a$ и $\overline{1}_a$ в силу (П2.17) вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{1}_a = min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}}, \frac{\underline{a}}{\underline{a}}, \frac{\overline{a}}{\underline{a}}, \frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\}, \quad (П2.23)$$

$$\bar{1}_a = max\left\{\frac{\underline{a}}{\underline{\underline{a}}}, \frac{\underline{a}}{\underline{\bar{a}}}, \frac{\bar{a}}{\underline{\bar{a}}}, \frac{\bar{a}}{\underline{\underline{a}}}\right\}. \qquad (П2.24)$$

Утверждение П2.2. Разностью интервальных чисел $[a]=[\underline{a}, \bar{a}]$ и $[a]=[\underline{a}, \bar{a}]$

$$[a]-[a]=[0_a] \qquad (П2.25)$$

является интервальное число $[0_a]=[\underline{0}_a, \bar{0}_a]$, граничные значения которого $\underline{0}_a$, $\bar{0}_a$ в силу (П2.14), (П2.15) задаются соотношениями

$$\underline{0}_a = min\{\underline{a}-\underline{a}, \underline{a}-\bar{a}, \bar{a}-\underline{a}, \bar{a}-\bar{a}\}, \qquad (П2.26)$$

$$\underline{0}_a = max\{\underline{a}-\underline{a}, \underline{a}-\bar{a}, \bar{a}-\underline{a}, \bar{a}-\bar{a}\}. \qquad (П2.27)$$

Определение П2.10. Медианой $mid\ [a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a}, \bar{a}]$ называется фиксированное число a_0, задаваемое соотношением

$$mid[a]=a_0=0.5(\bar{a}+\underline{a}). \qquad (П2.28)$$

Определение П2.11. Интервальным компонентом $wid\ [a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a}, \bar{a}]$ называется интервальное число $[\Delta a]=[\underline{\Delta a}, \overline{\Delta a}]$, граничные значения которого $\underline{\Delta a}$ и $\overline{\Delta a}$ задаются с помощью соотношений

$$\underline{\Delta a}=\underline{a}-a_0,\ \overline{\Delta a}=\bar{a}-a_0, \qquad (П2.29)$$

Утверждение П2.3. Интервальное число $[a]=[\underline{a}, \bar{a}]$ в силу (П2.28), (П2.29), а также (П2.14), (П2.15), (П2.21) представимо в виде аддитивной композиции

$$[a]=a_0+[\Delta a], \qquad (П2.30)$$

Определение П2.12. Медианой $mid[a]$ интервальной $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A}, \bar{A}]$, называется матрица A_0 с фиксированными скалярными компонентами A_{0ij}

$$A_0 = row\{col(A_{0ij}; i=\overline{1,n});\ j=\overline{1,m}\} \qquad (П2.31)$$

где элементы A_{0ij} матрицы A_0 задаются соотношением

$$A_{0ij} = mid\{[A_{ij}]=[\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}]\}=0.5(\underline{A}_{ij}+\bar{A}_{ij}). \qquad (П2.32)$$

Определение П2.13. Интервальным матричным компонентом $wid[A]$ интервальной матрицы $[A]=[\underline{A}, \bar{A}]$ называется интервальная матрица $[\Delta A]=[\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$, граничные реализации которой $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ задаются соотношениями

$$[\underline{\Delta A}]=\underline{A}-A_0=col\{row([\underline{\Delta A}_{ij}]=\underline{A}_{ij}-A_{0ij}; i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\}, \qquad (П2.33)$$

$$[\overline{\Delta A}]=\bar{A}-A_0=col\{row([\overline{\Delta A}_{ij}]=\bar{A}_{ij}-A_{0ij}; i=\overline{1,n})\ j=\overline{1,m}\} \qquad (П2.34)$$

Утверждение П2.4. Интервальная $(n\times m)$ – матрица $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ в силу (П2.31), (П2.33), (П2.34), а также (П2.32), (П2.9) представима в аддитивной форме

$$[A]=A_0+[\Delta A], \qquad (П2.35)$$

где $A_0=mid[A],[\Delta A]=wid[A]$.

Определение П2.14. Произведением интервальных $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ и $(m\times k)$ – матрицы $[B]=[\underline{B},\overline{B}]$

$$[A]\times[B]=[C] \qquad (П2.36)$$

называется интервальная $(n\times k)$ – матрица $[C]=[\underline{C},\overline{C}]$ с интервальными скалярными элементами $[C_{il}]=[\underline{C_{il}},\overline{C_{il}}]$, вычисляемыми в силу соотношений

$$[C_{il}]=\sum_{j=i}^{m}[A_{ij}][B_{ij}];\ i=\overline{1,n};\ l=\overline{1,k}, \qquad (П2.37)$$

где произведение $[A_{ij}][B_{ij}]$ интервальных чисел определяется в соответствии с (П2.10), (П2.11), (П2.12) а суммирование этих произведений осуществляется в соответствии с (П2.13), (П2.14), (П.15).

Определение П2.П2. Угловой реализацией $(A_c)_\upsilon$ $(n\times m)$ - интервальной матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]=A_0+[\Delta A]$, получаемой в результате υ-й выборки $\upsilon=\overline{1,2^{nm}}$ из множества мощностью, равной (nm) пар $\{\underline{A}_{ij},\overline{A}_{ij}\},\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ граничных значений интервальных скалярных компонентов $[A_{ij}]$ матрицы $[A]$, называется матрица

$$(A_c)_\upsilon=row\{col((A_{cij})_\upsilon\in\{\underline{A}_{ij},A_{ij}\},i=\overline{1,n}\};\ j=\overline{1,m}\} \qquad (П2.38)$$

с фиксированными на этой реализации компонентами.

Утверждение П2.5. Пусть $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$ интервальный матричный компонент матрицы $[A]$, определенной в силу факторизации в форме (П2.35), тогда интервальные компоненты $[\Delta A_{ij}]=[\underline{\Delta A}_{ij},\Delta\overline{A}_{ij}],\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ обладают тем свойством, что

$$|\underline{\Delta A}_{ij}|=|\overline{\Delta A}_{ij}|,\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}, \qquad (П2.39)$$

которое выполняется в силу (П2.31), (П2.32).

Утверждение П2.6. Угловые реализации $(\Delta A_c)_\upsilon$ и $(\Delta A_c)_\mu$ $(n\times m)$-интервальной матрицы $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$ с граничными компонентами $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ (П2.33), (П2.34), полученных в результате υ-й и μ-й выборок $\upsilon,\mu=\overline{1,2^{mn}}$ в силу (П2.38) и свойства (П2.39) обладают равными матричными нормами так, что выполняется равенство

$$\|(\Delta A_c)_\upsilon\|=\|(\Delta A_c)_\mu\|;\upsilon,\mu=\overline{1,2^{mn}}. \qquad (П2.40)$$

Определение П2.16. Интервальным полиномом $[D(z)]$ степени n называется полином, коэффициенты которого являются интервальными числами так, что он принимает вид

$$[D(z)]=[a_0]z^n+[a_1]z^{n-1}+[a_2]z^{n-2}+...+[a_{n-1}]z+[a_n] \quad (П2.41)$$

где $[a_i]=[\underline{a}_i,\overline{a}_i];i=\overline{0,n}$

Определение П2.17. Интервальным характеристическим полиномом ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной $(n\times n)$ - матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ называется интервальный полином степени n, получаемый в силу определения характеристического полинома $(n\times n)$ - квадратной матрицы

$$\det(\lambda I-[A])=[a_0]\lambda^n+[a_1]\lambda^{n-1}+...+[a_{n-1}]\lambda+[a_n] \quad (П2.42)$$

так, что $[D(\lambda)]=\det(\lambda I-[A])$.

При формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[A]$ системы необходимо отметить проблему объема вычислений. Очевидно, если размерность матрицы $[A]$ составляет $(n\times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(A)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[A]$ составляет $2^{n\times n}$, минимальная мощность этого множества составляет 2^n, что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как *диагональное и фробениусово*. Однако независимо от базиса мощность множества $\{(A)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксировано на уровне 2^p, где p – число исходных интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров. Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий *рост ширины* $wid\,[a_\ell]$ *системных интервальных параметров* $[a_\ell]$. *Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности* $[a_\ell]-[a_\ell]$ *и частного от деления* $[a_\ell]/[a_\ell]$. Очевидно, в силу параметризованных представлений $a_\ell(q)-a_\ell(q)=0$ и $[a_\ell]/[a_\ell]=1$ в том числе и при $q=0$ и $q=1$. Таким образом без нарушения существа интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением $[a_\ell]-[a_\ell]=0,[a_\ell]/[a_\ell]=1$.

Приведем несколько способов вычисления коэффициентов ИХП интервальной $(n\times n)$ матрицы [*A*].

Способ 1. Способ основан на обобщенной теореме Ф. Виета. Пусть спектр собственных значений интервальной матрицы [*A*]

$$\sigma\{[A]\}=\left\{[\lambda_i]=[\underline{\lambda}_i,\overline{\lambda}_i]:\det(\lambda I-[A])=0;i=\overline{1,n}\right\} \quad (П2.43)$$

известен, тогда ИХП (П.42) представим в форме

$$[D(\lambda)]=[a_0]\lambda^n+[a_1]\lambda^{n-1}+...+[a_{n-1}]\lambda+[a_n]=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-[\lambda_i]), \qquad (П2.44)$$

где $[a_0]=[1,1]=1$

Обобщенная теорема Виета устанавливает связь собственных значений $[\lambda_i]$ с коэффициентами $[a_i]; i=\overline{1,n}$ в форме

$$[a_1]=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_1=-tr[A], \qquad (П2.45)$$

$$[a_2]=\sum_{\substack{i1=1\\i2=2\\i3=3}}^{n}[\lambda_{i1}][\lambda_{i2}], \qquad (П2.46)$$

$$[a_3]=-\sum_{\substack{i1=1\\i2=2\\i3=3\\i1<i2<i3}}^{n}[\lambda_{i1}][\lambda_{i2}][\lambda_{i3}]; \qquad (П2.47)$$

$$[a_{n-1}]=(-1)^{n-1}\sum_{\substack{i1=1\\i2=2\\\vdots\\i(n-1)=n-1\\i1<i2<\cdots<i(m-1)}}^{n}[\lambda_{i1}][\lambda_{i2}]\cdots[\lambda_{im-1}]; \qquad (П2.48)$$

$$[a_n]=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}[\lambda_i]. \qquad (П2.49)$$

Способ 2. Способ Г. Крамера главных миноров:

$$[a_1]=-tR[A]=-\left[\sum_{i=1}^{n}\underline{A}_{ij},\sum_{i=1}^{n}\overline{A_{ij}}\right], \qquad (П2.50)$$

$$[a_k]=(-1)^k\sum_{i=1}^{k}[M_{ii}], \qquad (П2.51)$$

где $[M_{ii}]$ алгебраическое дополнение (ii)–го элемента [A_{ii}] матрицы [A];

$$[a_n]=(-1)^n det[A]. \qquad (П2.52)$$

Способ 3. Способ У.Ж.Ж. Леверье:

$$[a_k]=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[a_{i-1}]tr\left[A^{k-i+1}\right]; k=\overline{1,n}; [a_0]=1 \qquad (П2.53)$$

Способ 4. Способ Д.К. Фаддеева:

$$[a_k]=-\frac{1}{k}tr\{[A][H_{k-1}]\}; k=\overline{1,n}, \qquad (П2.54)$$

где

$$[H_k]=[A][H_{k-1}]+[a_k]I; [H_0=I] \qquad (П2.55)$$

В силу выше изложенного (П2.32), (П2.33), (П2.34) допустимо следующее определение

Определение П2.18. Интервальный матричный компонент $[(*)]$

$$[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)] = (*)_0 + [\underline{\Delta}(*), \overline{\Delta}(*)], \qquad (П2.56)$$

может быть охарактеризован показателем абсолютной интервальности,

$$\Delta_I(*) \stackrel{\Delta}{=} \| [\Delta(*)] \|. \qquad (П2.57)$$

Нетрудно видеть, что в силу структуры интервального матричного компонента $[\Delta(*)]$ Фробениусова, а также индуцированные с индексами p=1 и p=∞ нормы всех угловых реализаций этого компонента оказываются фиксированными так, что становится справедливым равенство

$$\Delta_I(*) \stackrel{\Delta}{=} \| [\Delta(*)] \| = \| \underline{\Delta}(*) \| = \| \overline{\Delta}(*) \|. \qquad (П2.58)$$

Это же положение оказывается справедливым для индуцированной нормы с индексом p=2 (спектральной нормы) в силу справедливости соотношения $\|(\circ)\|_2 \le \{\|(\circ)\|_1 \|(\circ)\|_\infty\}^{1/2}$ для ее оценки через нормы с индексами p=1 и p=∞.

Определение П2.19. Интервальный матричный компонент $[(*)]$ представленный в форме (П2.56) может быть охарактеризован показателем $\delta_I(*)$ относительной интервальности задаваемым соотношением

$$\delta_I(*) = \frac{\Delta_I(*)}{\| (*)_0 \|}. \qquad (П2.59)$$

Последние два определения по существу содержат доказательства следующего утверждения

Утверждение П2.7. *Оценки абсолютной и относительной интервальности* интервальных компонентов исходного интервального объекта (числа, вектора, матрицы) *не являются интервальными числами*.■

В необходимо отметить, что формализм правил интервальной арифметики в процессе приведенных выше преобразований математических выражений содержащих интервальные числа, векторы и матрицы, может наблюдаться заметный рост нормы интервальной части интервального компонента. Этот рост в основном определяется операциями вычитания и деления скалярного интервального элемента соответственного *самого из себя* и *самого на себя*, не приводящими соответственно к нулевому и единичному результатам. В этой связи будет полезна информация о росте относительной интервальности результатов простейших операций над интервальными числами, приведенная в таблице П2.1.

Таблица П2.1.

$\delta_I[(\#)]\%$	0	5	10	15	20	25	30	50
$\delta_I[(*)]^{-1}\%$	0	5	10	15	20	25	30	50
$\delta_I\{[(\circ)][(\bullet)]\}\%$	0	5	19.8	29.33	38.46	47.05	55.04	80
$\delta_I\{[(\bullet)][(*)]^{-1}\}\%$	0	10.25	21	32.25	44.4	56.25	69	125
$\delta_I\{[(\circ)][(\bullet)][(*)]^{-1}\}\%$	0	15.78	33.3	52.76	61.32	98.49	125.1	262.5

Тем не менее, параметризованная параметром q форма (П2.2) интервального скалярного элемента при любых значениях q в перечисленных выше операциях *дает нулевой и единичный результаты*, в том числе и при граничных значениях q=0 и q=1. В этой связи при построении интервальных модельных представлений авторы использовали *модифицированную версию интервальных вычислений* в которых сделаны допущения о справедливости выполнения равенств $[a]-[a]=0$ и $\frac{[a]}{[a]}=1$, что не нарушает существа интервальных вычислений

Особо следует заметить проблемы объема вычислений при формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[F]$системы. Если размерность матрицы $[F]$ составляет $(n\times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[F]$ составляет $2^{n\times n}$, минимальная мощность этого множества составляет 2^n, что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы как диагональное и фробениусово. Независимо от базиса представления мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне 2^p, где p – число исходных интервальных физических параметров. Таким образом, целесообразно интервальные вычисления производить не на угловых системных реализациях с накопленной интервальностью, а на угловых реализациях исходных физических параметров

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

М-файл вычисления дисперсий, построения функции спектральной плотности и корреляционной функции стохастической выходной переменной

```
clear all;
% Ввод параметров
F=input('Матрица состояния системы управления=[?]');
G=input('Матрица входа системы управления=[?]');
C=input('Матрица выхода системы управления=[?]');
flag=input('Введите 1, если Формирующий фильтр -
апериодический; введите 2, если - колебательный=?');
if flag==1
    Oma=input('Полоса пропускания апериодического
фильтра=?');
    v1=Oma;
    Ff=[-v1]; Gf=[v1]; Cf=[1];
end
if flag==2
    Omk=input('Резонансная частота колебательного фильтра
=?');
    dz=input('Показатель затухания=?');
    v1=2*dz*Omk; v2=(Omk)^2;
    Ff=[0 1;-v2 -v1]; Gf=[0; v2]; Cf=[1 0];

end
N=input('Интенсивность белого шума=?');

n=size(F);
nf=size(Ff);
nfv=size(Gf);

% формирование матриц агрегированной системы
Fa=[F G*Cf; zeros(nf(1,1),n(1,2)) Ff];
Ga=[zeros(n(1,1),nfv(1,2));Gf];
Cx=[eye(size(F)) zeros(n(1,1),nf(1,2))];
Cy=[C zeros(1,nf(1,2))];
Ce=[-C Cf];

% Вычисление дисперсии
Dxa=lyap(Fa,Ga*N*Ga');
Dx=Cx*Dxa*Cx'
Dy=Cy*Dxa*Cy'
De=Ce*Dxa*Ce'

%Вычисление функции спектральной плотности
i=1;
dw=0.002;
limit1=10^(-3);
limit2=10^(2);
for w=limit1:dw:limit2
Sy(i)=-2*Cy*Fa*inv(Fa^2+w^2*eye(size(Fa)))*Dxa*Cy';
```

```
omegai(i)=w;
i=i+1;
end;

%Вычисление корреляционной функции
i=1;
tn=-20;
tk=20;
dt=0.01;
for t=tn:dt:tk
    if t<0   R(i)=Cy*expm(-Fa*t)*Dxa*Cy';
    else R(i)=Cy*expm(Fa*t)*Dxa*Cy';
    end
    ti(i)=t;
    i=i+1;
end

%Вывод графиков функции спектральной плотности и
корреляционной функции
figure(1);loglog(omegai,Sy,'linew',2); grid;title('Функция
спектральной плотности [loglog]');
xlabel('\omega,рад/с');
ylabel('S_y','rotation',0);

figure(2);semilogx(omegai,Sy,'linew',2);grid;
title('Функция спектральной плотности');
xlabel('\omega,рад/с');
ylabel('S_y','rotation',0);

figure(3); plot(ti,R,'linew',2); grid;
title('Корреляционная функция');
xlabel('\tau,с');
ylabel('R(\tau)','rotation',0);
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Варианты заданий расчетно-исследовательской работы магистранта (РИРМ) по курсу «ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ»

ЗАДАНИЕ

Постановка задачи РИРМ

(облегченная версия: РИРМ_ОВ)

Методом медианного модального управления спроектировать регулятор, реализующий закон управления (ЗУ)

$$u(t) = K_g g(t) - K_x x(t) \qquad (П4.1)$$

непрерывным объектом управления (ОУ) с интервальными параметрами, описываемым передаточной функцией

$$W(s,[q]) = \frac{K(1+[q_1])}{(T_1(1+[q_2])s+1)s} \qquad (П4.2)$$

где интервальные параметры

$$[q_j] = q_{j0} + [\Delta q_j] = q_{j0} + [\underline{\Delta q_j}, \overline{\Delta q_j}] = [-\Delta q_j, \Delta q_j], \quad j = 1,2 \qquad (П4.3)$$

характеризуются нулевыми медианными $q_{j0} = 0$ и равные по модулю и различные по знаку центрированными интервальными составляющими.

Функциональное объединение ЗУ (П4.1) и ОУ (П4.2) образует систему управления с интервальными параметрами, имеющую векторно-матричное представление

$$\dot{x}(t) = F([q])x(t) + Gg(t), y(t) = Cx(t), \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \qquad (П4.4)$$

матрица состояния которой с интервальными параметрами имеет представление

$$F([q]) = F_0 + [\Delta F] \qquad (П4.5)$$

и характеризуется оценкой относительной интервальности

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|}. \qquad (П4.6)$$

Система (П4.4) функционирует при стохастическом стационарном в широком смысле воздействии типа «окрашенный» шум $\xi(t)$ так, что выполняется равенство $g(t) = \xi(t)$. Окрашенный шум характеризуется:

нулевым матожиданием $\overline{\xi}(t) = M\{\xi(t)\} = 0$, (П4.7)

и дисперсией $D_\xi = M\{\xi(t)\xi^T(t)\}$. (П4.8)

Возможны две системные ситуации:

1. $g(t)=\xi(t)-$ ***полезный сигнал***, который должен быть с минимальной ошибкой $\varepsilon(t)$ воспроизведем на выходе системы; (П4.9)

2. $g(t)=\xi(t)-$ ***помеха***, которая на выходе системы должна порождать составляющую минимальной величины. (П4.10)

Требования к системе :

1. В случае, когда $g(t)=\xi(t)-$ ***полезный сигнал***, спроектировать регулятор с ЗУ (ПЗ.1), доставляющий системе значение относительной дисперсии $\overline{D}_{\varepsilon}=D_{\varepsilon}/D_{\xi}$ ошибки $\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условию

$$\overline{D}_{\varepsilon}\le\overline{D}_{\varepsilon r}, \quad (П4.11)$$

где $\overline{D}_{\varepsilon r}-$ требуемое значение относительной дисперсии ошибки;

2. $g(t)=\xi(t)-$ ***сигнал помехи***, спроектировать регулятор с ЗУ (П4.1), доставляющий системе значение относительной дисперсии $\overline{D}_{y}=D_{y}/D_{\xi}$ выхода $y(t)$, удовлетворяющее условию

$$\overline{D}_{y}\le\overline{D}_{yr}, \quad (П4.12)$$

где $\overline{D}_{yr}-$ требуемое значение относительной дисперсии выхода (П4.12).

3.Фактор неопределенности исходного объекта управления (П4.2) учесть в формах:

1. достижения условия

$$\delta_I F=\frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|}\le\delta_{Ir}F, \quad (П4.13)$$

где $\delta_{Ir}F-$ требуемое значение относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы;

2..в случае невозможности достижения условия (П4.13) оценить аналитически влияние угловых реализаций интервальных параметров на значения минимизируемых дисперсий.

4.Провести комплексное исследование спроектированной системы при стохастическом внешнем воздействии типа «окрашенный шум» в модельной среде Simulink с целью достижения требуемых значений дисперсий переменных и влияния на них интервальных параметров ОУ.

ЗАДАНИЕ

Постановка задачи РИРМ

(Версия повышенной сложности: РИРМ_ВПС)

Методом медианного модального управления спроектировать регулятор, реализующий закон управления (ЗУ)

$$u(t)=K_g g(t)-K_x x(t) \qquad (П4.14)$$

непрерывным объектом управления (ОУ) с интервальными параметрами, описываемым передаточной функцией

$$W(s,[q])=\frac{K(1+[q_1])}{(T_1(1+[q_2])s+1)(T_2(1+[q_3])s+1)s}, \qquad (П4.15)$$

где интервальные параметры

$$[q_j]=q_{j0}+[\Delta q_j]=q_{j0}+[\underline{\Delta q_j},\overline{\Delta q_j}]=[-\Delta q_j,\Delta q_j], \quad j=1,2,3 \qquad (П4.16)$$

характеризуются нулевыми медианными $q_{j0}=0$ и равные по модулю и различные по знаку центрированными интервальными составляющими.

Функциональное объединение ЗУ (П4.14) и ОУ (П4.15) образует систему управления с интервальными параметрами, имеющую векторно-матричное представление

$$\dot{x}(t)=F([q])x(t)+Gg(t), y(t)=Cx(t), \varepsilon(t)=g(t)-y(t), \qquad (П4.17)$$

матрица состояния которой с интервальными параметрами имеет представление

$$F([q])=F_0+[\Delta F] \qquad (П4.18)$$

и характеризуется оценкой относительной интервальности

$$\delta_I F=\frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|}. \qquad (П4.19)$$

Система (П4.17) функционирует при стохастическом стационарном в широком смысле воздействии типа «окрашенный» шум $\xi(t)$ так, что выполняется равенство $g(t)=\xi(t)$. Окрашенный шум характеризуется:

нулевым матожиданием $\overline{\xi}(t)=M\{\xi(t)\}=0$, (П4.20)

и дисперсией $D_\xi=M\{\xi(t)\xi^T(t)\}$. (П4.21)

Возможны две системные ситуации:

1. $g(t)=\xi(t)$ – ***полезный сигнал***, который должен быть с минимальной ошибкой $\varepsilon(t)$ воспроизведем на выходе системы; (П4.22)

2. $g(t)=\xi(t)$ – ***помеха***, которая на выходе системы должна порождать составляющую минимальной величины. (П4.23)

Требования к системе :

1. В случае, когда $g(t)=\xi(t)$ – ***полезный сигнал***, спроектировать регулятор с ЗУ (П4.1), доставляющий системе значение

относительной дисперсии $\overline{D}_\varepsilon = D_\varepsilon / D_\xi$ ошибки $\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условию

$$\overline{D}_\varepsilon \le \overline{D}_{\varepsilon r}, \qquad \text{(П4.24)}$$

где $\overline{D}_{\varepsilon r}$ – требуемое значение относительной дисперсии ошибки;

2. $g(t) = \xi(t)$ – ***сигнал помехи***, спроектировать регулятор с ЗУ (П4.14), доставляющий системе значение относительной дисперсии $\overline{D}_y = D_y / D_\xi$ выхода $y(t)$, удовлетворяющее условию

$$\overline{D}_y \le \overline{D}_{yr}, \qquad \text{(П4.25)}$$

где $\overline{D}_{yr}$ – требуемое значение относительной дисперсии выхода.

П3.

3.Фактор неопределенности исходного объекта управления (П4.15) учесть в формах:

3.1. достижения условия

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta F]\|}{\|F_0\|} \le \delta_{Ir} F, \qquad \text{(П4.26)}$$

где $\delta_{Ir} F$ – требуемое значение относительной интервальности матрицы состояния спроектированной системы;

3.2. в случае невозможности достижения условия (П4.26) оценить аналитически влияние угловых реализаций интервальных параметров на значения минимизируемых дисперсий.

4.Провести комплексное исследование спроектированной системы при стохастическом внешнем воздействии типа «окрашенный шум» в модельной среде Simulink с целью достижения требуемых значений дисперсий переменных и влияния на них интервальных параметров ОУ.

Исходные данные для выполнения РИРМ_ОВ приведены в таблице П4.1 и РИРМ_ВПС в таблице П4.2 вариативной форме. В таблице П4.3 приведены варианты заданий РИРМ_ОВ, а в таблице П4.4 приведены варианты заданий РИРМ_ВПС.

ПРИМЕЧАНИЕ.

Вариант задания (его номер) определяется Вашим номером в списке группы.

Таблица П4.1

Варианты / **Исходные данные**	**А**	**Б**	**В**	**Г**
1. Значения параметров ПФ ОУ:				
K	5	10	15	20
T_1	0.05	0.1	0.15	0.2
Δq_1	0.1	0.2	0.3	0.4
Δq_2	0.1	0.2	0.3	0.4
Δq_3	0.1	0.2	0.3	0.4
2.Значение дисперсии D_ξ **внешнего стохастического воздействия типа «окрашенный шум»**	10	20	30	40
ППП3.Формирующий фильтр «окрашенного шума» с передаточной функцией	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{0.7s+1}$	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{0.3s+1}$	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{(0.04s^2+0.1s+1)}$	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{(0.04s^2+0.02s+1)}$
4.Внешнее стохастического воздействия типа «окрашенный шум»	Полезный сигнал	Сигнал помехи	Полезный сигнал	Сигнал помехи
5.Значение требуемой относительной дисперсии «ошибки–выхода»	0.01	0.04	0.09	0.0044
6. Относительная интервальность матрицы состояния системы	0.02	0.03	0.04	0.05

Таблица П4.2

Варианты / **Исходные данные**	**А**	**Б**	**В**	**Г**
1. Значения параметров ПФ ОУ:				
K	5	10	15	20
T_1	0.05	0.1	0.15	0.2
T_2	0.3	0.45	0.6	0.75
Δq_1	0.1	0.2	0.3	0.4
Δq_2	0.1	0.2	0.3	0.4
Δq_3	0.1	0.2	0.3	0.4
2.Значение дисперсии D_ξ внешнего стохастического воздействия типа «окрашенный шум»	10	20	30	40
ППП3.Формирующий фильтр «окрашенного шума» с передаточной функцией	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{0.7s+1}$	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{0.3s+1}$	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{(0.04s^2 + 0.1s+1)}$	$W_{\phi\phi}(s) = \frac{1}{(0.04s^2 + 0.02s+1)}$
4.Внешнее стохастического воздействия типа «окрашенный шум»	Полезный сигнал	Сигнал помехи	Полезный сигнал	Сигнал помехи
5.Значение требуемой относительной дисперсии «ошибки–выхода»	0.01	0.04	0.09	0.0044
6. Относительная интервальность матрицы состояния системы	0.02	0.03	0.04	0.05

Таблица.П4.3

Варианты задания на РИРМ_ОВ

№	БУКВЕННЫЙ КОД ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ									
1	А	А	А	А	А	А	А	А	А	А
2	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б
3	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
4	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г
5	Б	Б	А	А	А	А	А	А	А	А
6	А	А	Б	Б	А	А	А	А	А	А
7	А	А	А	А	Б	Б	А	А	А	А
8	А	А	А	А	А	А	Б	Б	А	А
9	В	В	А	А	А	А	А	А	А	А
10	А	А	В	В	А	А	А	А	А	А
11	А	А	А	А	В	В	А	В	В	А
12	А	А	А	А	А	А	В	А	В	В
13	Г	Г	А	А	А	А	А	А	А	А
14	А	А	Г	Г	А	А	А	А	А	А
15	А	А	А	А	Г	Г	А	Г	А	А
16	А	А	А	А	А	А	Г	А	Г	А
17	Б	Б	Б	А	А	А	А	А	А	А
18	А	А	Б	Б	Б	А	А	А	А	А
19	А	А	А	А	Б	Б	Б	Б	А	А
20	А	А	А	А	А	Б	Б	А	Б	А
21	В	В	В	А	А	А	А	А	Б	Б
22	А	В	В	В	А	А	А	А	Б	Б
23	А	А	В	В	В	А	А	В	А	А
24	А	А	А	В	В	В	А	А	В	А
25	А	А	А	А	А	В	В	А	В	В
26	Г	Г	Г	А	А	А	А	А	А	А
27	А	Г	Г	Г	А	А	А	А	А	А
28	А	А	Г	Г	Г	А	А	А	А	А
29	А	А	А	Г	Г	Г	А	Г	А	А
30	А	А	А	А	Г	Г	Г	А	Г	А
31	А	А	А	А	А	Г	Г	А	Г	Г
32	Б	Б	Б	Б	А	А	А	А	А	А
33	А	А	Б	Б	Б	А	А	Б	А	А
34	А	А	Б	Б	Б	Б	А	А	Б	А
35	А	А	А	А	Б	Б	Б	А	Б	Б
36	В	В	В	В	А	А	А	А	Б	Б
37	А	А	В	В	В	А	А	А	В	В
38	А	А	В	В	В	В	А	В	Г	Г
39	А	А	А	В	В	В	В	Б	Б	Г
40	А	А	А	А	В	В	В	Г	Г	Б

Таблица.П4.4

Варианты задания на РИРМ_ВПС

№	БУКВЕННЫЙ КОД ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ										
1	А	А	А	А	А	А	А	А	А	А	А
2	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б
3	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
4	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г
5	Б	Б	А	А	А	А	А	А	А	А	А
6	А	А	Б	Б	А	А	А	А	А	А	А
7	А	А	А	А	Б	Б	А	А	А	А	А
8	А	А	А	А	А	А	Б	Б	А	А	А
9	В	В	А	А	А	А	А	А	А	А	А
10	А	А	В	В	А	А	А	А	А	А	А
11	А	А	А	А	В	В	А	В	В	А	А
12	А	А	А	А	А	А	В	А	В	В	А
13	Г	Г	А	А	А	А	А	А	А	А	А
14	А	А	Г	Г	А	А	А	А	А	А	А
15	А	А	А	А	Г	Г	А	Г	А	А	А
16	А	А	А	А	А	А	Г	А	Г	А	А
17	Б	Б	Б	А	А	А	А	А	А	А	А
18	А	А	Б	Б	Б	А	А	А	А	А	А
19	А	А	А	А	Б	Б	Б	Б	А	А	А
20	А	А	А	А	А	Б	Б	А	Б	А	А
21	В	В	В	А	А	А	А	А	Б	Б	А
22	А	В	В	В	А	А	А	А	Б	Б	Б
23	А	А	В	В	В	А	А	В	А	А	А
24	А	А	А	В	В	В	А	А	В	А	А
25	А	А	А	А	А	В	В	А	В	В	А
26	Г	Г	Г	А	А	А	А	А	А	А	А
27	А	Г	Г	Г	А	А	А	А	А	А	А
28	А	А	Г	Г	Г	А	А	А	А	А	А
29	А	А	А	Г	Г	Г	А	Г	А	А	А
30	А	А	А	А	Г	Г	Г	А	Г	А	Г
31	А	А	А	А	А	Г	Г	А	Г	Г	А
32	Б	Б	Б	Б	А	А	А	А	А	А	А
33	А	А	Б	Б	Б	А	А	Б	А	А	А
34	А	А	Б	Б	Б	Б	А	А	Б	А	А
35	А	А	А	А	Б	Б	Б	А	Б	Б	А
36	В	В	В	В	А	А	А	А	Б	Б	Б
37	А	А	В	В	В	А	А	А	В	В	В
38	А	А	В	В	В	В	А	В	Г	Г	Г
39	А	А	А	В	В	В	В	Б	Б	Г	Г
40	А	А	А	А	В	В	В	Г	Г	Б	Б

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных проблем.

ИЗ ИСТОРИИ КАФЕДРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ (*до 2001 года* АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ)

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года автоматики и телемеханики) была образована в 1945 году как подразделение основанного в тот же год факультета Электроприборостроения ЛИТМО и именовалась кафедрой Электроприборостроения (№80). Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и первого декана факультета Электроприборостроения профессора Марка Львовича Цуккермана. Профессор М.Л. Цуккерман в 1913 году закончил электромеханический факультет Санкт-Петербургского политехнического института им. Петра Великого, в двадцатые годы организовал в Ленинграде отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области систем телеизмерений. С 1933 по 1935 год профессор М.Л. Цуккерман руководит кафедрой « Автоматизации и телемеханизации» ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина). С 1935 года профессор М.Л. Цуккерман вплоть до начала Великой отечественной войны находится в научной командировке в Европе.

В отличие от существовавших к тому моменту кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина), на кафедру автоматики и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Осенью 1945 года кафедра провела первый набор студентов по специальности электроприборостроение. В 1947 году

кафедра претерпевает первое изменение своего названия, после которого называется кафедрой Автоматики и телемеханики (№80 вплоть до XX–го съезда КПСС). Первый выпуск инженеров–электромехаников по специальности «приборы автоматики и телемеханики» состоялся уже в 1948 году и составил 17 человек. По временной хронологии это событие совпало в выходом в свет на английском языке известной книги Норберта Винера "Кибернетика или наука об управлении и связи в машинах, живых организмах и обществах", в которой дается обоснование кибернетического подхода, выдвигающего на передний план информационное содержание природных, социальных и технических процессов и рассматривающего проблемы автоматического управления с точки зрения преобразования, передачи и использования информации. Советская научная общественность познакомится с этой книгой в переводе на русский язык только в 1958 году.

Профессор М.Л. Цуккерман руководил кафедрой с 1945 по 1959 год. К своей работе кафедра приступила, имея преподавательский состав, включавший профессора Д.И. Зорина, доцентов Е.А. Танского и Р.И. Юргенсона и заведующего лабораторией А.А. Мезерина. В пятидесятые годы в преподавательский состав кафедры вошли профессор А.А. Кампе-Немм, доцент Г.А. Тацитов, а также старшие преподаватели В.А. Борисов, В.Г. Новиков и В.В. Соколов. К концу пятидесятых годов преподавательский состав пополнился выпускниками ЛИТМО доцентом Н.М. Яковлевым, старшими преподавателями Л.Т. Никифоровой, Н.М. Перевозчиковым, Ю.Б. Ганту и ассистентом А.М. Шпаковым, а также доцентом Б.А. Арефьевым.

В 1955 году при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 года по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана, выпускник кафедры Автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) 1936 года, доцент Евфимий Аполлонович Танский. За время его руководства профессорско–преподавательский состав пополнился старшим преподавателем Л.Л. Бориной, доцентами А.И. Новоселовым и И.П. Пальтовым, пришедшими из промышленности и высших военных учебных заведений, а также выпускниками кафедры, успешно закончившими обучение в ее аспирантуре, доцентами В.Н. Дроздовым, А.В. Ушаковым, В.А. Власенко, и ассистентом И.Н.

Богоявленской. В этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты Б.А. Арефьев и Р.И. Юргенсон. В научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико–механического приборостроения, что привело к длительному научно – техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса "Газета-2".

С 1970 по 1990 год кафедрой руководил известный в стране специалист в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктор технических наук, профессор Юрий Алексеевич Сабинин. В эти годы заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам "Теория автоматического регулирования и следящие системы", "Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы", "Элементы автоматики" и "Телемеханика" были добавлены дисциплины: "Теоретические основы кибернетики", "Локальные системы управления", "САПР систем управления" и другие. Коллектив преподавателей пополнился новым отрядом выпускников ее аспирантуры: доцентами Ю.Л. Тихоновым, В.В. Лаврентьевым, В.В. Григорьевым, В.В. Хабаловым, Л.С. Громовой, В.И. Бойковым, С.В. Быстровым, А.Б. Бушуевым, А.Н. Коровьяковым, И.В. Мирошником, Ю.П. Котельниковым, Г.И. Болтуновым, старшим преподавателем И.П. Салмыгиным. Из промышленности и других подразделений института пришли на кафедру доценты И.Ю. Рогинский, П.В. Николаев, И.П. Болтунов. Приобрела устойчивый характер система подготовки кадров высшей квалификации. В период с 1970–го по 1990–й защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты И.П. Пальтов, В.В. Григорьев и В.Н. Дроздов. Более 40 человек успешно завершили обучение в аспирантуре.

Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; с задачами автоматизации обработки снимков в пузырьковых камерах; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов. Новый облик теории управления 1970 годов, внедрение метода пространства состояний и вычислительной техники,

повышение математического уровня научных исследований нашли отражение в научных разработках кафедры, многочисленных трудах и монографиях. В эти годы интенсивно разрабатываются проблемы теории многомерных динамических систем, качественная теория устойчивости, методы согласованного и многорежимного управления, положено начало теоретическим работам в области робототехники. Научное руководство перечисленными работами осуществляли профессора кафедры Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В. Ушаков, В.В. Григорьев и И.В. Мирошник .

С 1990 года по 1995–й год кафедра переживает «смутное время» на уровне руководства ею, но не на уровне интеллектуальной обстановке в ее коллективе. Известно высказывание ректора НИУ ИТМО: «Интересно, на кафедре автоматики нет номинального заведующего вот уже столько лет и ни одного скандала». Лучшего комплимента кафедре не придумаешь. С 1990 года по 1992–й обязанности заведующего кафедрой исполнял профессор В.В.Григорьев, в 1992–м году в результате проведенного конкурса заведующим кафедрой автоматики и телемеханики становится профессор Таганрогского радиотехнического института Анатолий Аркадьевич Колесников, известный специалист в области синергетики. К сожалению, по причинам личного характера он так и не покинул Таганрог и не приступил к руководству кафедрой автоматики и телемеханики ЛИТМО. В 1994–м году его заведование руководством института приостанавливается, объявляется новый конкурс, в результате которого с 1995–го года по 2010–й кафедрой руководил ее воспитанник доктор технических наук, профессор Валерий Владимирович Григорьев, по инициативе которого в 2001–м году кафедра получила название кафедры «Систем управления и информатики». В эти годы профессорско-преподавательский состав пополнился профессором Е.Ф. Очиным (1993-1996 годы), а также выпускниками аспирантуры ИТМО В.В. Черноусовым, А.П. Баевым, В.О. Никифоровым, М.С. Чежиным, А.В. Ляминым, А.А. Бобцовым и К.А. Сергеевым. Продолжала эффективно работать система подготовки кадров высшей квалификации, диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук защитили И.В. Мирошник, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков, А.И. Скалон, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов.

Помимо традиционной подготовки инженеров–электриков была начата подготовка бакалавров по направлению "Управление и автоматизация". С введением локальной сети и подключением к Интернет проведена модернизация компьютерного класса и учебных лабораторий. Научно-исследовательская работа ведется по целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. Завершилось формирование научной школы кафедры и ее основных направлений, возглавляемых

профессорами В.В. Григорьевым, А.В. Ушаковым, И.В. Мирошником, В.О. Никифоровым и доцентом В.И. Бойковым. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивным систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 году образована научная лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 года существенно расширились международные контакты кафедры, участие в международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. Профессора кафедры Григорьев В.В., Мирошник И.В, Ушаков А.В. , а позднее и Никифоров В.О. становятся действительными членами (академиками) Международной Академии нелинейных наук.

В феврале 2010 года заведующим кафедрой Систем управления и информатики был избран выпускник кафедры 1996–го года декан факультета компьютерных технологий и управления, доктор технических наук, профессор Алексей Алексеевич Бобцов, А.А. Бобцов является также председателем Совета молодых ученых и специалистов при Правительстве Санкт–Петербурга, действительным членом академии Навигации и управления движением и членом научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации.

В последние годы профессорско-преподавательский состав кафедры пополнился молодыми кадрами: доцентами Кремлевым А.С., Чепинским С.А. (выпуска кафедры 2002-го года), Дударенко Н.А., Нуйей (Осипцеволй) О.С., Николаевым Н.А., Слитой О.В. (выпуска кафедры 2003-го года), Герасимовым Д.Н. (выпуска кафедры 2005-го года), Арановским С.В., Блинниковым А.А. (выпуска кафедры 2006-го года), Сержантовой (Поляковой) М.В. (выпуска кафедры 2007-го года), Пыркиным А.А. (выпуска кафедры 2008-го года), Колюбиным С.А. (выпуска кафедры 2010-го года), Капитоновым А.А. и Шаветовым С.В. (выпуска кафедры 2011-го года). К участие в подготовке магистров подключились профессора из санкт-петербургских университетов Фрадков А.Л., Андриевский Б.Р., Тертычный В.Ю. и Фуртат И.Б.

Продолжает эффективно работать система подготовки кадров высшей научной квалификации, диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук защитил в 2013-м году выпусник кафедры 1998-го года Мельников В.Г.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области автоматических систем и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI–го столетия. На кафедре функционируют четыре научно-исследовательские группы: «Технической кибернетики» (основатель профессор И.В. Мирошник,

научный руководитель профессор А.А. Бобцов), «Автоматизированного оптоэлектронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели профессор Ю.А. Сабинин и доцент П.В. Николаев, научные руководители – доцент В.И. Бойков и профессор А.В. Ушаков) и «Технической информатики и телемеханики (основатель профессор М.Л. Цуккерман, научный руководитель профессор А.В. Ушаков), «Интеллектуальной робототехники» (основатель и научный руководитель профессор А.А.Бобцов). Усилиями ученых кафедры на кафедре создана научная школа « Управление в условиях системных неопределенностей», при кафедре вот уже второе десятилетие проводятся ежегодные «Крещенские научные чтения», имеющие статус городского семинара по теории управления. Памятным событием в юбилейный год кафедры стала защита диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук выпускником кафедры 2008-го года тридцатилетним Антоном Александровичем Пыркиным, ставшим в 2016-м году деканом факультета Систем управления и робототехники.

Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и трудах международных конференций. Сотрудниками кафедры опубликовано более 120 монографий и учебников, 250 методических и учебных пособий, 3500 статей, из них более 380 в журналах академий наук, около 300 статей и докладов в зарубежных научных изданиях. Ученые кафедры являются авторами более 600 изобретений, постоянно принимают участие в работе российских и зарубежных семинаров, конференций и конгрессов. Кафедра поддерживает контакты с 20 техническими зарубежными университетами.

Кафедра осенью 2015 года отметила свое семидесятилетие и шагнула в будущее. На восьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов.

ОБ АВТОРАХ

ВУНДЕР (ПОЛИНОВА)
НИНА АЛЕКСАНДРОВНА

Родилась в 1992-м году, в 2009-м году закончила школу «с отличием», получив серебряную медаль. На основе конкурсной ЕГЭ системы получила приглашение пяти университетов РФ, из коих осознано выбрала Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики, и оптики «Университет ИТМО». В 2013-м году по результатам защиты выпускной квалификационной работы (ВКР) получила академическую степень бакалавра техники и технологии, удостоившись диплома «с отличием». Автор ВКР стала лауреатом конкурса бакалаврских выпускных квалификационных работ Университета ИТМО. В 2015-м году закончила «с отличием» магистратуру Университета ИТМО по направлению «Системный анализ и управление», получив академическую степень магистра техники и технологий на основе защиты магистерской диссертации на тему «Фактор кратности собственных чисел: вопросы теории и приложения в задачах управления». В настоящее время – аспирант Университета ИТМО. Н. А. Вундер (Полинова) – автор монографии, двух учебных пособий, двадцати научных печатных публикаций.

СЕРЖАНТОВА МАЙЯ ВЯЧЕСЛАВОВНА, урожденная ПОЛЯКОВА, родилась в 1983 году. В 2000 году закончила среднюю школу. Высшее образование получила в стенах Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий механики и оптики (ныне Университет ИТМО), закончив его вечерний факультет по специальности 220201 – «Управление и информатика в технических системах» в 2007 году с квалификацией инженер. В 2012 году после успешного окончания аспирантуры и защиты диссертации М.В. Сержантовой присуждена ученая степень кандидата технических наук по специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)».

С 2010 года М.В. Сержантова ассистент кафедры Систем управления и информатики, автор двух учебных пособий и одной монографии, а также 20 научных статей. Круг ее научных интересов составляют векторно-матричный формализм современной теории управления, проблемы вырождения сложных технических и производственных систем, сложные системы с человеком–оператором в контуре управления.

СЛИТА ОЛЬГА ВАЛЕРЬЕВНА

Родилась в 1980-м году, в 1997-м году закончила среднюю школу. Высшее образование получила в стенах Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (ныне Университет ИТМО), закончив его «с отличием» по специальности 220201 – «Управление и информатика в технических системах» в 2003-м году с квалификацией инженер. В 2006-м году после успешных окончания аспирантуры и защиты диссертации О.В. Слите присуждена ученая степень кандидата технических наук. С 2006-го года по 2010-й год О.В. Слита – доцент кафедры Мехатроники и робототехники Балтийского государственного технического университета «Военмех». С 2010-го года – доцент кафедры систем управления и информатики Университета ИТМО.О.В. Слита – автор 6 учебных пособий и 3 монографий, 41 научных статей. Круг ее научных интересов составляют проблемы управления в условиях неопределенности, инвариантность к экзогенным сигнальным и эндогенным параметрическим возмущениям, использование возможностей обобщенного модального управления в задачах синтеза робастных систем.

УШАКОВ АНАТОЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Родился в 1937-м году, в 1954-м году закончил мужскую среднюю школу, в 1960 – м году закончил «с отличием» ЛИТМО по специальности 0606 – «Автоматика и телемеханика» с квалификацией инженер – электромеханик. Научный путь: аспирант–кандидат технических наук – доцент – доктор технических наук – профессор. В настоящее время – профессор кафедры систем управления и информатики Университета ИТМО. А.В. Ушаков – автор 37 монографий и учебных пособий, более 350 научных печатных публикаций. Под научным руководством А.В. Ушакова подготовлено 26 кандидатов наук и два доктора наук. Круг научных интересов включает матричный формализм метода пространства состояния, эллипсоидные оценки качества процессов в многомерных системах, модальная робастность, управление в условиях неопределенности, системы с интервальными параметрами, проблемы вырождения сложных динамических систем, обобщенное модальное управление, решение задач помехозащиты методами двоичного наблюдения и двоичными рекуррентными процедурами, цифровое дистанционное управление, сложные системы с антропокомпонентами.

Ушаков Анатолий Владимирович

Вундер Нина Александрова

Сержантова Майя Вячеславовна

Слита Ольга Валерьевна

Стохастическая динамика непрерывных и дискретных систем в условиях неопределенности

Учебное пособие для университетов

В авторской редакции

Компьютерная верстка и дизайн А.В.Ушаков
Н.А.Вундер
М.В.Сержантова
О.В.Слита

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. редакционно-издательским отделом Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД №00408 от 05.11.99.

Подписано к печати 17.10.2016.

Отпечатано на ризографе

Тираж 500 экз.

Заказ №1515

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО