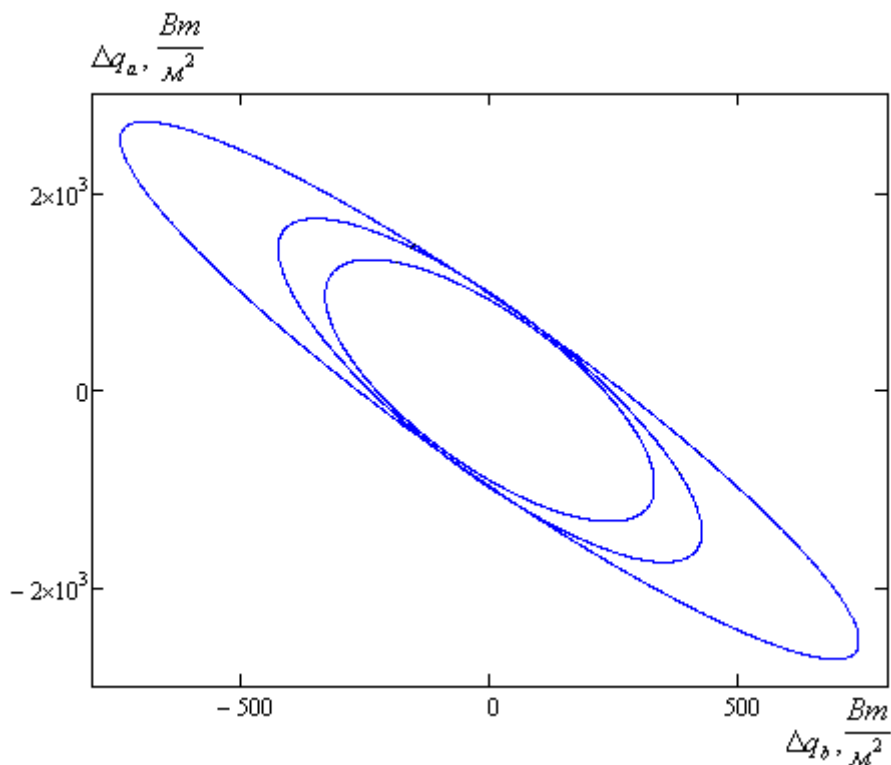


Н.В. Пилипенко

# МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОМЕТРИИ



Санкт-Петербург  
2016

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Н.В. Пилипенко**

**МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ  
ИДЕНТИФИКАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ  
ТЕПЛОМЕТРИИ**

**Учебное пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**

**2016**

Пилипенко Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплометрии. Учебное пособие – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 79 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Специальные разделы теории тепло- и массообмена» Федерального образовательного стандарта Министерства высшего образования и науки РФ для магистров по направлению подготовки 16.03.01– «Техническая физика» и 14.03.01 – «Ядерная энергетика и теплофизика».

В настоящее издание вошли лекции и практические занятия, посвященные методам параметрической идентификации нестационарных тепловых потоков на основе решения обратных задач теплопроводности с оценками погрешности определения исходных параметров

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета лазерной и световой инженерии 11 октября 2016 года, протокол № 10.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

©Пилипенко Н.В., 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	6
ВВЕДЕНИЕ .....	7
1 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПТП .....	10
1.1 Постановка и выбор метода решения ОЗТ.....	10
1.1.1 Исходные допущения .....	10
1.1.2 Требования к ПТП .....	11
1.1.3 Выбор метода решения граничной ОЗТ по восстановлению $q(\tau)$ ..	11
1.1.4 Способ параметризации $q(\tau)$ .....	11
1.1.5 Выбор алгоритма параметрической идентификации модели ПТП.....	12
1.1.6 Стратегия получения оптимальных оценок полного вектора искомых параметров $\mathbf{Q}_\Sigma$ .....	13
1.2 Восстановление теплового потока на основе алгоритма фильтра Калмана (ФК) по искомым параметрам .....	14
1.2.1 Постановка задачи .....	14
1.2.2 Ковариационные матрицы .....	15
1.2.3 Алгоритм фильтра Калмана по искомым параметрам $\mathbf{Q}$ .....	16
1.2.4 Условия входа в алгоритм .....	16
1.2.5 Программная реализация алгоритма .....	18
1.2.6 Методика имитационного моделирования (вычислительного эксперимента) процедур восстановления теплового потока и примеры ее реализации .....	18
1.3 Восстановление $q(\tau)$ на основе алгоритма ФК по искомым параметрам для однородных градиентных ПТП .....	21
1.3.1 Случай динамических измерений $q_I = \text{const}$ .....	21
1.3.2 Случаи восстановления переменного потока $q(\tau)$ .....	25
1.4 Восстановление теплового потока на основе алгоритмов расширенного фильтра Калмана.....	28
1.4.1 Постановка задачи .....	28
1.4.2 Восстановление $q(\tau)$ для ПТП с линейным теплопереносом.....	31
1.4.3 Восстановление $q(\tau)$ для ПТП с нелинейным теплопереносом....	33
1.4.4 Программная реализация алгоритма расширенного ФК.....	34
1.4.5 Восстановление $q(\tau)$ с помощью алгоритма расширенного ФК для однородного градиентного ПТП .....	34
1.5 Восстановление $q(\tau)$ с одновременным оцениванием коэффициента теплопроводности материала ПТП .....	37
1.5.1 Постановка задачи .....	37
1.5.2 Алгоритм фильтра Калмана по искомым параметрам.....	38

1.5.3 Алгоритм расширенного фильтра Калмана .....	39
1.6 Исследование возможностей и особенностей применения предложенной методологии нестационарной теплотметрии к ПТП различного типа .....	41
1.6.1 ПТП типа тонкого диска (ПТП Гардона) .....	42
1.6.2 ПТП с элементами полупространства .....	44
1.6.3 Батарейные ПТП .....	48
2 ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МЕТОДОЛОГИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОМЕТРИИ .....	51
2.1 Исходные положения .....	51
2.1.1 Структура суммарной погрешности .....	51
2.1.2 Прямые измерения плотности тепловых потоков .....	51
2.1.3 Косвенные измерения плотности тепловых потоков $q(\tau)$ .....	51
2.1.4 Состояние проблемы оценивания общих составляющих методической и динамической погрешности прикладной теплотметрии.....	53
2.1.5 Состояние проблемы оценивания методической погрешности восстановления $q(\tau)$ , выполненного методом параметрической идентификации.....	53
2.2 Основная методическая погрешность восстановления $q(\tau)$ методом параметрической идентификации.....	54
2.2.1 Постановка задачи .....	54
2.2.2 Оценки МНК и ковариационная матрица их ошибок.....	55
2.3 Совместные доверительные области (СДО) и интервалы (СДИ) оптимальных оценок составляющих вектора искомых параметров $\mathbf{Q}$ .....	57
2.3.1 СДО оценок составляющих $\hat{q}_{a,l}$ и $\hat{q}_{b,l}$ вектора искомых параметров.....	57
2.3.2 СДИ оценок составляющих $\hat{q}_{a,l}$ и $\hat{q}_{b,l}$ вектора искомых параметров.....	60
2.4 СДО и СДИ результатов параметрической идентификации в задаче ее планирования (организации) .....	61
2.4.1 Постановка задачи .....	61
2.4.2 Порядок планирования параметрической идентификации $q(\tau)$ ...	62
2.5 Применение методологии оценивания погрешностей результатов параметрической идентификации $q(\tau)$ и ее планирование (организация).....	63
2.5.1 Постановка задач .....	63
2.5.2 Однородный градиентный ПТП, теплоизолированный с тыльной стороны ( $q_2 = 0$ ).....	65

2.5.3 Исследование возможностей определения теплопроводности материала градиентного ПТП, теплоизолированного с тыльной стороны ( $q_2 = 0$ ) .....	67
2.5.4 ПТП с поперечным градиентом типа Гардона .....	69
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	73

## ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ВПТП — высокотемпературный преобразователь теплового потока;  
ГУ — граничное условие;  
ДРМ — дифференциально-разностная модель;  
ММТ — математическая модель теплопереноса;  
МНК — метод наименьших квадратов;  
ОЗТ — обратная задача теплопроводности;  
ПЗТ — прямая задача теплопроводности;  
ПК — программный комплекс;  
ПТП — приемник (преобразователь) теплового потока;  
СДИ — совместный доверительный интервал;  
СДО — совместная доверительная область;  
СОДУ — система обыкновенных дифференциальных уравнений;  
ТИС — теплотрическая измерительная система;  
ТФХ — теплофизические характеристики;  
ФК — фильтр Калмана.

## ВВЕДЕНИЕ

Во многих интенсивно развивающихся отраслях науки и техники прогресс зависит от решения проблемы **прикладной теплотметрии** — измерения локальных плотностей тепловых потоков на поверхностях объектов исследования, контроля или управления. В частности, это теплоэнергетика, тепловые двигатели, металлургия, электроника, ракеты и космические летательные аппараты, медицина, биология, теплоизмерительные приборы различного назначения: приемники теплового излучения, измерители тепловых потерь промышленных и жилых объектов, теплофизических характеристик (ТФХ) материалов.

В настоящее время разрабатываются и широко используются для прикладной теплотметрии различного типа приемники тепловых потоков (в дальнейшем изложении — ПТП), которые, как правило, представляют собой автономные достаточно миниатюрные устройства с одномерным теплопереносом, а в некоторых вариантах при упрощающих допущениях — одноемкостные. По наличию или отсутствию статических характеристик (градуировок) ПТП могут быть статическими, являясь средствами прямых измерений тепловых потоков, и астатическими — средствами косвенных измерений. Для большинства практически важных случаев прикладная теплотметрия является нестационарной, когда измерения постоянных или переменных во времени плотностей тепловых потоков  $q(\tau)$  как астатическими, так и статическими теплоинерционными ПТП выполняются в нестационарных режимах работы последних. При этом возникает необходимость **расчетного определения (восстановления)** плотности входящего в ПТП теплового потока  $q(\tau)$  по измеряемым температурам или их разностям в отдельных точках ПТП с применением современных ЭВМ. Эта задача относится к **нестационарным граничным обратным задачам теплопроводности (ОЗТ)**, а в аспекте измерительной техники — к косвенным методам измерений  $q(\tau)$ . Значительную роль в развитии нестационарной теплотметрии сыграли труды О. А. Геращенко, Т. Г. Грищенко, Н. А. Ярышева, Г. Н. Дульнева, Н. В. Шумакова, Б. М. Смольского, А. Г. Шашкова, Ю. Ф. Гортышева, В. А. Трушина, Л. С. Кременчугского, Ю. А. Полякова, Н. П. Дивина, С. З. Сапожникова, В. Ю. Митякова, А. В. Митякова, П. А. Короткова, Г. Е. Лондона, Г. Л. Гродзовского, В. И. Жука, Г. А. Суркова и других отечественных исследователей.

При разработке методов нестационарной теплотметрии усложняющим обстоятельством является **разнообразие ПТП по типам и разновидностям** конструкций, тепловых и измерительных схем и, что весьма важно, по виду математических моделей теплопереноса (ММТ) в ПТП. ММТ должны адекватно описывать процессы в ПТП с учетом всех значимых особенностей: наличия элементов из разнородных материалов, армирующих и защитных слоев, контактных тепловых сопротивлений, воздушных зазоров и др.; зави-



симось ТФХ материалов от температуры и другие нелинейности; различные граничные условия на тыльной поверхности ПТП и т. д. ММТ должен соответствовать метод решения прямой задачи теплопроводности (ПЗТ), обладающий приемлемой точностью и вычислительной эффективностью. Кроме того, желательна общность как вида самих ММТ, так и их программного обеспечения по отношению к различным видам ПТП. Предварительный анализ показал, что подобным требованиям удовлетворяют **дифференциально-разностные модели (ДРМ)**. Однако доказательство общности ДРМ для всех известных разновидностей ПТП, а также возможности использования их для получения динамических характеристик последних требует проведения соответствующих исследований.

Известно, что в общем случае граничные ОЗТ относятся к некорректно поставленным задачам математической физики. Это приводит к возможной неустойчивости их решений и, следовательно, к необходимости обращения к регуляризованным методам решения ОЗТ, интенсивно развиваемым в работах О. М. Алифанова, В. А. Морозова, В. Б. Гласко, Ю. В. Полежаева, Е. А. Артюхина, А. В. Ненарокова, С. В. Резника, В. В. Михайлова, Ю. Е. Воскобойникова, Дж. Бека и других исследователей.

В настоящее время общепризнанным является то, что для научно-технических приложений эффективными методами решения граничных ОЗТ являются экстремальные постановки с последующей функциональной (по классификации О. М. Алифанова) или параметрической идентификацией (оптимизацией). Они основаны на априорной параметрической аппроксимации искомой величины  $q(\tau)$ , неизвестные постоянные коэффициенты (параметры) которой подлежат идентификации. В этих случаях, как правило, применяются регуляризованные алгоритмы решения ОЗТ, реализующие итерационный принцип минимизации функционала (функции) невязки, что связано со значительными объемами вычислений. Поэтому возможности применения этих методов в теплотрических измерительных системах, работающих в реальном времени, существенно ограничены.

В то же время, в работах J.V. Beck, Д. Ф. Симбирского, Ю. М. Мацевитого, А. Е. Воскобойникова, J. Hodge, D. Audley, J. Hayes, Е. Н. Бута, А. С. Гольцова, А. В. Олейника и других исследователей, предложено использовать последовательные (рекуррентные) методы параметрической идентификации, в частности, модифицированные алгоритмы известного цифрового фильтра Калмана. Они исходно предназначены для измерительных систем реального времени и доказали свою эффективность при решении ряда граничных ОЗТ для однородных ПТП. Однако их использование требует проведения соответствующих исследований в части устойчивости, сходимости, возможности получения оценок погрешностей результатов восстановления  $q(\tau)$ .

Одной из актуальных проблем является оценивание и устранение методических погрешностей нестационарной теплотрии, особенно возникающих при решениях некорректно поставленных граничных ОЗТ по восста-

новлению  $q(\tau)$ .

Таким образом, в литературе практически отсутствует научно-обоснованный общий подход к тепломерам как к автономным измерительным системам реального времени, к методологии и возможностям их использования в нестационарной теплотометрии.

Изложенное показывает как научную, так и практическую актуальность нестационарной прикладной теплотометрии в особенности при подготовке бакалавров и магистров по направлению «Техническая физика».

Целью данного учебного пособия является обоснование общей, по отношению к различным типам ПТП и условиям измерений, методологии нестационарной теплотометрии пригодной для использования в теплотометрических измерительных системах реального времени.

Для достижения этой цели были рассмотрены общие для ПТП различных типов:

- метод моделирования динамики теплопереноса в ПТП, позволяющий решать как прямые, так и обратные задачи теплопроводности;
- метод восстановления плотности входящего теплового потока  $q(\tau)$  путем решения в реальном времени обратной задачи теплопроводности;
- метод, позволяющий оценить погрешности восстановления теплового потока  $q(\tau)$ .

# 1 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПТП

Исследуются особенности и возможности применения алгоритма оптимального цифрового фильтра Калмана (ФК) в качестве общего алгоритма решения граничной ОЗТ — восстановления теплового потока  $q(\tau)$  для различных типов ПТП, теплоперенос в которых описывается дифференциально-разностными моделями (ДРМ).

## 1.1 Постановка и выбор метода решения ОЗТ

### 1.1.1 Исходные допущения

Граничную ОЗТ по восстановлению  $q(\tau)$ , входящего в одномерный ПТП, предлагается рассматривать при следующих допущениях:

**1.1.1.1** Допускается, что для всего многообразия принципиальных тепловых и измерительных схем одномерных ПТП возможно и целесообразно использовать предложенные в [1] **математические модели**, состоящие из следующих универсальных ДРМ нелинейного или линейного теплопереноса соответственно:

$$\dot{\mathbf{T}}(\tau) = \mathbf{f}[\mathbf{T}(\tau), \mathbf{U}(\tau)] \quad (1.1)$$

или

$$\dot{\mathbf{T}}(\tau) = \mathbf{F}\mathbf{T}(\tau) + \mathbf{G}\mathbf{U}(\tau), \quad (1.2)$$

а также из уравнения измерений в ПТП

$$\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{H}\mathbf{T}(\tau) + \boldsymbol{\varepsilon}(\tau). \quad (1.3)$$

Вектор управления  $\mathbf{U}(\tau)$  представляет граничные условия на рабочей и тыльной поверхностях ПТП. В его состав в общем случае входит подлежащая измерению плотность теплового потока  $q(\tau)$ . Кроме того, для градиентных ПТП возможно задание на тыльной поверхности граничных условий любого рода: они либо известны, либо непосредственно измеряются, либо соответствуют условиям полупространства.

**1.1.1.2** Допускается, что имеющиеся априорные сведения о характере изменения во времени  $q(\tau)$ , позволяют с требуемой точностью выполнить ее аппроксимацию на интервале измерений  $\overline{0, \tau_N} = N\Delta\tau$  в виде обобщенного полинома [2]

$$q(\tau) = \sum_{z=0}^r q_z \phi_z(\tau). \quad (1.4)$$

Неизвестные постоянные параметры  $q_z$  объединяются в полный  $(r+1)$ -вектор искомых параметров

$$\mathbf{Q}_z = [q_0 \quad q_r \quad \cdots \quad q_{r-1}]^T = \text{const}.$$

Тогда задача восстановления  $q(\tau)$  сводится к получению оптимальных

или близких к ним (субоптимальных) оценок  $\mathbf{Q}_\Sigma$  полного вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}_\Sigma$ .

Известно, что оптимальные — несмещенные, состоятельные, эффективные и достоверные оценки являются наилучшими решениями поставленной задачи, исходные данные которой включают случайные величины: случайные погрешности в ДРМ, случайные погрешности  $\varepsilon(\tau)$  в измерениях и др.

### 1.1.2 Требования к ПТП

Используемые ПТП должны обладать минимальными значениями общих составляющих методической погрешности. Кроме того, желательно чтобы в вектор измерений  $\mathbf{Y}$ , входила температура  $t_1(\tau)$  рабочей поверхности ПТП либо непосредственно, либо в составе измеряемых перепадов температур по толщине последнего. Это пожелание вызвано, в основном, следующими обстоятельствами:

– его выполнение переводит ОЗТ в разряд псевдообратных корректно поставленных задач математической физики, что существенно снижает трудности их решения;

– измерение  $t_1(\tau)$  позволяет естественным образом получить информацию о моменте начала действия  $q(\tau)$  на рабочую поверхность ПТП, что принципиально необходимо для решения ОЗТ. В противном случае эта информация должна поступать от постороннего источника, что лишает ПТП статуса автономного средства измерения.

### 1.1.3 Выбор метода решения граничной ОЗТ по восстановлению $q(\tau)$

В качестве метода восстановления  $q(\tau)$  выбрана параметрическая идентификация ММТ в ПТП. Она выполняется путем минимизации функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$  по вектору искомых  $\mathbf{Q}$ -коэффициентов обобщенного полинома, аппроксимирующего  $q(\tau)$ . В основе указанного метода лежит априорная (предварительная) параметризация задачи, которая заключается в выборе вида полинома.

### 1.1.4 Способ параметризации $q(\tau)$

В соответствии с [2] предлагается использовать В-сплайн-аппроксимацию  $q(\tau)$ . С целью повышения устойчивости решения выбраны В-сплайны 1-го порядка.

Для В-сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  интервал измерений  $\overline{0, \tau_N}$ , включающий  $N$  моментов времени  $\tau_k (k = 1, 2, \dots, N)$  с равномерным временным шагом  $\Delta\tau$ , разбивается на  $(r - 1)$  одинаковых **участков сплайн-аппроксимации**  $\Delta_z = \Delta (z = 1, 2, 3, \dots, r - 1)$  (рисунок 1.1), каждый из которых включает  $l$  моментов времени, т. е. имеет протяженность  $\Delta = l \cdot \Delta\tau$ .

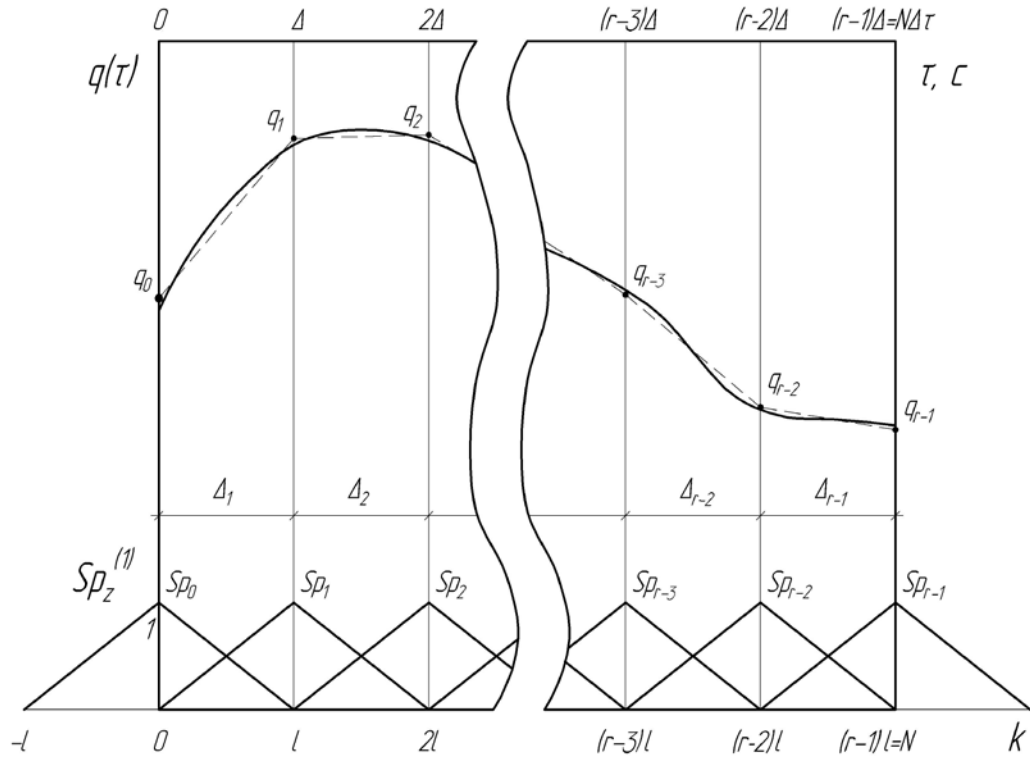


Рисунок 1.1 – Аппроксимация теплового потока  $q(\tau)$  В-сплайном 1-го порядка

Интервал измерений  $\overline{0, \tau_N}$ , на котором аппроксимируется  $q(\tau)$ , равен  $(r-1)\Delta\tau$ , а количество неизвестных параметров этой аппроксимации равно  $r$ . Параметры  $q_z$  — значения функции  $q(\tau)$  в узловых точках (на стыках участков сплайн-аппроксимации) составляют полный  $(r \times 1)$ -вектор искомых параметров  $\mathbf{Q}_\Sigma (z = 0, 1, 2, \dots, r-1)$ .

Предлагаемая В-сплайн-аппроксимация линейными сплайнами 1-го порядка для каждого участка  $\Delta z$  формально равносильна кусочно-линейной аппроксимации  $q(\tau)$  на участках  $\Delta\tau$ . Однако в них исходными данными для определения искомых параметров  $q_z$  и  $q_{z+1}$  являются значения всего лишь двух температур ПТП в моменты времени  $\tau_z$  и  $\tau_{z+1}$ , разделенных временным шагом  $\Delta\tau$ . В то же время, в предлагаемом подходе с «эффективной» параметризацией —  $l$  температур для  $l$  моментов времени на каждом участке  $\Delta z_1$ , то есть при существенно более высоком объеме исходной информации.

### 1.1.5 Выбор алгоритма параметрической идентификации модели ПТП

Параметрическая **идентификация модели теплопереноса** в ПТП, в частности входящего в него теплового потока  $q(\tau)$ , заключается в нахождении по измерениям  $\mathbf{Y}_k$  оптимальных оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_{\Sigma_N}$  полного вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}_\Sigma$ , дающих минимум дискретной скалярной квадратичной функции невязки [2].

В качестве метода минимизации выбрана рекуррентная процедура алгоритма оптимального дискретного фильтра Калмана.

### 1.1.6 Стратегия получения оптимальных оценок полного вектора искомых параметров $\mathbf{Q}_\Sigma$

При реализации рекуррентных процедур параметрической идентификации теплопереноса в ПТП принципиально возможны различные стратегии получения оптимальных оценок.

Исходя из поставленных задач, с целью снижения размерности цифрового ФК нами была выбрана стратегия скользящего оценивания. При этом в качестве **основного варианта** было выбрано последовательное, на каждом из  $z = 1, 2, 3, \dots, r - 1$  участков сплайн-аппроксимации, оценивание локального  $(2 \times 1)$ -вектора исходных параметров  $\mathbf{Q}_\Sigma = \begin{bmatrix} q_a^{(z)} & q_b^{(z)} \end{bmatrix}^T$ , составляющими которого являются значения теплового потока  $q_a^{(z)}$  и  $q_b^{(z)}$  на левой и правой границах  $z$ -го участка соответственно. Очевидно, что они являются также составляющими  $q_z (z = 0, 1, 2, \dots, r - 1)$  полного вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}_\Sigma$  — значениями  $q(\tau)$  на границах всех  $r - 1$  участков его сплайн-аппроксимации (рисунок 1.1). Их оптимальные оценки  $\hat{q}_{al}^{(z)}$  и  $\hat{q}_{bl}^{(z)}$ , получаются на основе измерений  $\mathbf{Y}_k$ , количество которых  $l$  задается в зависимости от уровня погрешностей  $\varepsilon_k$  в исходных измерениях и условий получения оценки  $\hat{q}_{al}^{(z)}$  требуемой точности.

Далее вычисления переносятся на  $(z + 1)$  участок, причем оценка  $\hat{q}_a^{(z)}$  принимается окончательной, а  $\hat{q}_b^{(z)} = \hat{q}_a^{(z+1)}$  подлежит дальнейшему уточнению на  $(z + 1)$ -м участке и т. д.

Если же добиться требуемой точности оценки  $\hat{q}_{al}^{(z)}$  не удастся, то логично использовать **второй вариант** стратегии оценивания, когда в локальный вектор  $\mathbf{Q}_{z,z+1}$  включаются параметры  $q_a^{(z)}$ ,  $q_b^{(z)}$  и  $q_c^{(z+1)}$ , представляющие  $q(\tau)$  на двух участках  $z$  и  $(z + 1)$ . Тогда по  $2l$  значениям  $\mathbf{Y}_k$  получаются оценки,  $\hat{q}_a^{(z)}$ ,  $\hat{q}_b^{(z)}$  и  $\hat{q}_c^{(z+1)}$ , из которых оценка  $\hat{q}_a^{(z)}$  принимается окончательной. Далее составляется вектор  $\mathbf{Q}_{z+1,z+2}$  из значений  $\hat{q}_a^{(z+1)} = \hat{q}_b^{(z)}$ ,  $\hat{q}_b^{(z+1)} = \hat{q}_c^{(z+1)}$  и  $\hat{q}_c^{(z+2)}$ , для оптимальных оценок которого используется  $2l$  значений  $\mathbf{Y}_k$  на участках  $(z + 1)$  и  $(z + 2)$  и т. д.

В дальнейшем приводятся данные по основному варианту стратегии, доказавшему свою эффективность. При этом с целью упрощения обозначений в последующем изложении, как правило, будем опускать индекс « $z$ », тогда вектор искомых параметров сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  на участке  $z$

имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_a & q_b \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, при решении ОЗТ применяется следующая кусочно-линейная В-сплайн-аппроксимация  $q(\tau)$ , вытекающая из общего выражения (1.4):

$$q(\tau) = q_a Sp_0^{(1)} + q_b Sp_1^{(1)}, \quad (1.5)$$

где:

$$Sp_0^{(1)} = \begin{cases} 1 - |\xi_0|, & \text{если } |\xi_0| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |\xi_0| > 1, \end{cases} \quad \xi_0 = \frac{\tau}{\Delta},$$

$$Sp_1^{(1)} = \begin{cases} 1 - |\xi_1|, & \text{если } |\xi_1| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |\xi_1| > 1, \end{cases} \quad \xi_1 = \frac{\tau}{\Delta\tau} - 1.$$

Формула (1.5) может быть представлена в дискретной форме, если ввести обозначения:

$$q_k = q(\tau_k), \quad Sp_{0,k}^{(1)} = Sp_0^{(1)}(\tau_k), \quad Sp_{1,k}^{(1)} = Sp_1^{(1)}(\tau_k)$$

и использовать в выражениях для  $\xi_0, \xi_1$  соотношение  $\frac{\tau}{\Delta} = \frac{k}{\ell}$ .

В соответствии с изложенным функция невязки для участка «z» принимает следующий вид:

$$\Phi(\mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^l [\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q})]^T \cdot R^{-1} [\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\mathbf{Q})]. \quad (1.6)$$

## 1.2 Восстановление теплового потока на основе алгоритма фильтра Калмана по искомым параметрам

### 1.2.1 Постановка задачи

Параметрическая идентификация ПТП заключается в получении оптимальных оценок вектора искомых параметров  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_a & q_b \end{bmatrix}^T$  на каждом участке  $\Delta_z$  сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  и выполняется последовательно от моментов времени  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) к моменту времени  $k + 1$ , т. е. от оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  к оценке  $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$ , последовательно, используя все  $l$  значения вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  для  $l$  моментов времени. Затем осуществляется переход на  $\Delta_{z+1}$  участок сплайн-аппроксимации,  $\Delta_{z+2}$  и т. д. В соответствии с рисунком 1.1 на 1-м участке оцениваются  $q_0$  и  $q_1$ , на 2-м —  $q_1$  и  $q_2$  и т. д.

Таким образом, для каждого  $k$ -го момента времени каждого  $z$ -го участка  $\Delta_z$  последовательно (рекуррентно), начиная с  $k = 1$  определяются оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$  и ковариационная  $(2 \times 2)$ -матрица  $P_{k+1}$  ошибок этих оценок на основании:

– известной оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  и ковариационной матрицы  $P_k$  ошибок этой

оценки для  $k$ -го момента времени;

- ДРМ ПТП, позволяющей по заданным  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  рассчитывать значения модельного вектора измерений  $\hat{\mathbf{Y}}_{k+1}(\mathbf{Q})$ ;
- значения вектора измерений  $\mathbf{Y}_{k+1}$ .

Полученные оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$  и их ковариационная матрица  $P_{k+1}$  наряду с вновь поступившим значением вектора измерений  $\mathbf{Y}_{k+2}$  являются основанием для определения  $\hat{\mathbf{Q}}_{k+2}$ ,  $P_{k+2}$  и т. д.

### 1.2.2 Ковариационные матрицы

В поставленной задаче восстановления  $q(\tau)$  участвуют **случайные векторы** шума измерений  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  и начальных оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_0$ , так как их составляющие  $\hat{q}_a$ ,  $\hat{q}_b$  являются случайными величинами. Поэтому решение  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  ОЗТ на  $z$ -м участке также является случайной величиной.

**1.2.2.1** Качество оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  определяется получаемой в процессе вычислений ковариационной матрицей  $P_l$  ошибок этих оценок, которая имеет следующий вид:

$$P_l = \begin{matrix} (r \times r) \\ \left( \begin{array}{cccc} P_{11,l} & P_{12,l} & P_{13,l} & \cdot & P_{1r,l} \\ P_{21,l} & P_{22,l} & P_{22,l} & \cdot & P_{2r,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{r1,l} & P_{r2,l} & P_{r3,l} & \cdot & P_{rr,l} \end{array} \right) \end{matrix}, \quad (1.7)$$

где диагональные элементы  $P_{11,l}, P_{22,l}, \dots, P_{rr,l}$  являются дисперсиями всех  $r$  составляющих вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_l$ , а остальные элементы  $p_{ij} (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, r; i \neq j)$  входят в следующую формулу для определения коэффициентов взаимной корреляции  $r_{ij}$  между  $i$ -й и  $j$ -й составляющими:

$$r_{ij} = \frac{P_{ijl}}{\sqrt{P_{iil} \cdot P_{jjl}}}. \quad (1.8)$$

**1.2.2.2** Относительно статистических свойств вектора случайных погрешностей будем предполагать, что он, как это обобщено в работе [3], является случайным вектором с нулевым математическим ожиданием

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_k] = 0 \quad (1.9)$$

и известной ковариационной матрицей

$$R = \begin{matrix} (m \times m) \\ \left( \begin{array}{ccc} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \sigma_m^2 \end{array} \right) \end{matrix}. \quad (1.10)$$

Приведенный вид  $R$  означает, что измерения  $y_{ik}$  температуры в отдель-



ных точках ПТП, являются случайными нормально-распределенными величинами, выполняются регистрирующей аппаратурой с дисперсией  $\sigma_i^2 (i=1,2,3,\dots,m)$  и между собой некоррелированы. Можно допустить, что дисперсии измерений температур или их перепадов одинаковы, т. е.  $\sigma_i^2 = \sigma^2$ . Тогда ковариационная матрица  $R$  имеет вид:

$$R = \sigma^2 I, \quad (1.11)$$

где  $I$  — единичная  $(m \times m)$  матрица.

### 1.2.3 Алгоритм фильтра Калмана по искомым параметрам $Q$

Алгоритм цифрового ФК по искомым параметрам  $Q$  приведен в [2], где матрица функций чувствительности  $H_{k+1}$  имеет следующий вид:

$$H_{k+1} = \frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k} = \begin{vmatrix} U_{1q_a(k+1)} & U_{1q_b(k+1)} \\ U_{2q_a(k+1)} & U_{2q_b(k+1)} \\ \dots & \dots \\ U_{mq_a(k+1)} & U_{mq_b(k+1)} \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

Составляющие матрицы чувствительности

$$U_{jq_a(k+1)} = \frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_a} \Big|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k}, \quad U_{jq_b(k+1)} = \frac{\partial y_{j,k}(\mathbf{Q})}{\partial q_b} \Big|_{\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k} \quad (1.13)$$

являются функциями чувствительности  $j$ -го измерения  $y_i(\hat{\mathbf{Q}}_k)$  к искомому параметру  $q_a$  и  $q_b$  в  $(k+1)$  момент времени  $(k=1,2,\dots,l)$ . Их значения рассчитываются по известной  $k$ -й оценке  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  вектора искоемых параметров путем решения уравнения теплопереноса (1.1) или (1.2) любым известным способом, в том числе и предложенным в разделе 2.2. При этом общим, всегда практически реализуемым, универсальным методом их определения является вычисление по формулам:

$$U_{j,q_a(k+1)} = \frac{y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak} \mp \Delta q_a, \hat{q}_{bk}) - y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk})}{\Delta q_a}, \quad (1.14)$$

$$U_{j,q_b(k+1)} = \frac{y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk} \pm \Delta q_b) - y_{j(k+1)}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk})}{\Delta q_b}.$$

Таким образом, для построения матрицы  $H_{k+1}$  для  $(k+1)$ , момента времени необходимо по формулам (1.14) определить изменение во времени  $(k=1,2,\dots,l)$  значений функции чувствительности. Обычно их количество невелико, потому что количество точек измерений температуры или их перепадов в реальных ПТП обычно не превышает двух.

### 1.2.4 Условия входа в алгоритм

Для выполнения расчетов по алгоритму ФК от момента  $k=0$  к моменту

времени  $k = 1$  кроме геометрических и теплофизических характеристик ПТП в его ДРМ необходимо задать интервал  $\Delta t$  дискретного времени, начальное распределение температур  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(k = 0)$ , начальные оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  и ковариационную матрицу  $P_0$  ошибок начальных оценок. Эти величины обычно называют условиями входа в алгоритм.

Принципиальным достоинством предложенного алгоритма ФК является произвольное задание  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  в предположении, что он является случайным вектором с нормальным законом распределения, математическим ожиданием и ковариационной  $P_0$  матрицей ошибок. Возможны два варианта выбора  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  и  $P_0$ . Для первого  $z = 1$  участка  $\Delta_1$  сплайн-аппроксимации  $q_1(\tau)$ , на котором необходимо получить оценки  $\hat{\mathbf{Q}} = |\hat{q}_{a1} \quad \hat{q}_{b1}|^T$  (см. раздел 1.1.6) значения  $\hat{q}_{a0}$  и  $\hat{q}_{b0}$  выбираются произвольно, а  $P_0$  имеет вид:

$$P_0 = \begin{vmatrix} \sigma_{\hat{q}_{a0}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{q}_{b0}}^2 \end{vmatrix}, \quad (1.15)$$

где  $\sigma_{\hat{q}_{a0}}^2$  и  $\sigma_{\hat{q}_{b0}}^2$  — дисперсии ошибок задания начальных оценок значений  $\hat{q}_{a0}$  и  $\hat{q}_{b0}$  искомых параметров  $q_a$  и  $q_b$ .

Если предположить, что неточности начальных оценок  $\hat{q}_{a0}$  и  $\hat{q}_{b0}$  укладываются в интервалы  $\pm \Delta q_a$  и  $\pm \Delta q_b$  соответственно, то с доверительной вероятностью 0,95 величины дисперсий предлагается [4] определить по формуле:

$$\sigma_{\hat{q}_{a0}}^2 = \frac{4}{9} \Delta^2 q_{a0}; \quad \sigma_{\hat{q}_{b0}}^2 = \frac{4}{9} \Delta^2 q_{b0}. \quad (1.16)$$

Для 2-го, 3-го и т. д. участков сплайн-аппроксимации в качестве начальной оценки  $\hat{q}_{a0}$  рекомендуется принять значение оценки  $\hat{q}_{bl}$ , полученной по  $l$  измерениям на предыдущем участке, а значение  $\hat{q}_{b0}$  — произвольным. Такой выбор можно отразить соответствующим выбором диагональных элементов матрицы  $P_0$  для второго участка и т. д.

Существенным является также **выбор начального распределения температур** в ПТП. Идеальным является случай, когда для  $k = 0$  на первом  $z = 1$  участке  $\Delta_1$  сплайн-аппроксимации  $\mathbf{T}_0^{(1)}$  достоверно известно. Если такая возможность отсутствует, то необходимо учитывать известное обстоятельство, что практически для всех видов решений ПЗТ с течением времени начальное распределение температуры перестает влиять на температурное поле тела. Это означает, что неточности в  $\mathbf{T}_0^{(1)}$  для  $z = 1$  будут сказываться на решениях прямых и обратных задач теплопроводности на ограниченном количестве временных шагов  $\Delta t$ . Поэтому для  $k = 0$  на втором участке  $z = 2$  начальное распределение температуры  $\mathbf{T}_0^{(2)}$  необходимо задать равным по-

лученному распределению температур  $T_l^{(1)}$  на первом участке. Это правило затем распространяется на все последующие  $z$ -участки, что способствует приближению момента нечувствительности вычислений к неточностям в  $T_0$ .

Кроме того, имеется возможность аппроксимировать начальные распределение температуры  $T(x, \tau = 0)$ , как это проделано, а неизвестные коэффициенты этой аппроксимации включить в состав искомым параметров для восстановления входящей в ПТП плотности теплового потока  $q(\tau)$ .

### 1.2.5 Программная реализация алгоритма

Приведенный выше алгоритм восстановления входящего в ПТП теплового потока  $q(\tau)$  реализован в форме программного комплекса ПК-1 «Heat Stream». ПК-1 написан на языке C++ в среде Borland C++ Builder 5 и предназначен для решения следующих задач для одномерных ПТП различных типов:

- прямых задач теплопереноса (ПЗТ) в ПТП;
- граничных обратных задач теплопереноса (ОЗТ) по восстановлению входящего ПТП теплового потока с помощью предложенного в разделе 1.2 алгоритма ФК по искомым параметрам  $Q$ ;
- задач по численному моделированию вычислительных процедур решения ОЗТ с целью изучения их сходимости и выработки требований к условиям проведения реальной теплотметрии.

На рисунке 1.2 представлена схема алгоритма подпрограммы решения граничной ОЗТ программного комплекса «Heat Stream» с использованием алгоритма ФК по искомым параметрам.

### 1.2.6 Методика имитационного моделирования (вычислительного эксперимента) процедур восстановления теплового потока и примеры ее реализации

В практических приложениях при решении задач, связанных со сходимостью вычислительных процедур и точностью получаемых оценок, обычно, а для нелинейных оценок — обязательно, проводят имитационное моделирование. Его особенностью является то, что эталонные значения вектора  $\hat{Y}_k$  берутся из решения некоторых эталонных ПЗТ для рассматриваемого ПТП.

Сущность имитационного моделирования заключается в выполнении следующих операций:

1. Задаемся значениями всех параметров ДРМ типа (1.1) или (1.2) конкретного ПТП, а также выбранным законом изменения  $q(\tau)$  и начальным вектором температурного состояния  $T_0$ . Получаем решения ПЗТ в виде температур  $T_k$  для моментов времени  $\tau_k = k\Delta\tau$ , особо выделив те, которые подлежат измерению.

2. Используя цифровой датчик случайных чисел (шума) с регулируемой величиной дисперсии, получаем значения погрешностей

в измерениях  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = [\varepsilon_{zk}]_{z=1}^m$ .

3. Определяем значения вектора  $\mathbf{Y}_k$  путем наложения шума на соответствующие выбранные составляющие вектора состояния  $\mathbf{T}_k$ .

4. Используя значения  $\mathbf{Y}_k$  в алгоритме ФК, получаем значения  $\hat{\mathbf{Q}}_{\Sigma,l}$  оценок полного вектора параметров  $\mathbf{Q}_{\Sigma}$  на всех участках сплайн-аппроксимации искомого теплового потока  $q(\tau)$  при различных условиях входа в алгоритм ФК ( $\hat{\mathbf{Q}}_0$  и  $P_0$ ), различном количестве  $l$  моментов времени  $\tau_k$  на участках аппроксимации, дисперсиях шумов  $\sigma^2$  в измерениях, неточностей в задании начального вектора состояния  $\mathbf{T}_0$  и др.

5. Путем сравнения  $\hat{\mathbf{Q}}_{\Sigma,l}$  с известными (эталонными) значениями теплового потока  $q_0, q_1, \dots, q_{r-1}$  на стыках участков его сплайн-аппроксимации делаем вывод о характере сходимости и конечной точности получаемых решений ОЗТ в зависимости от перечисленных выше факторов, а также вырабатываем количественные требования к последним.

Приведенная методика была успешно реализована нами с помощью ПК-1 при решениях ОЗТ по восстановлению  $q(\tau)$  для всех без исключения рассматриваемых ПТП.

В качестве иллюстрации приведем основные результаты вычислительного эксперимента для однородного градиентного ПТП.

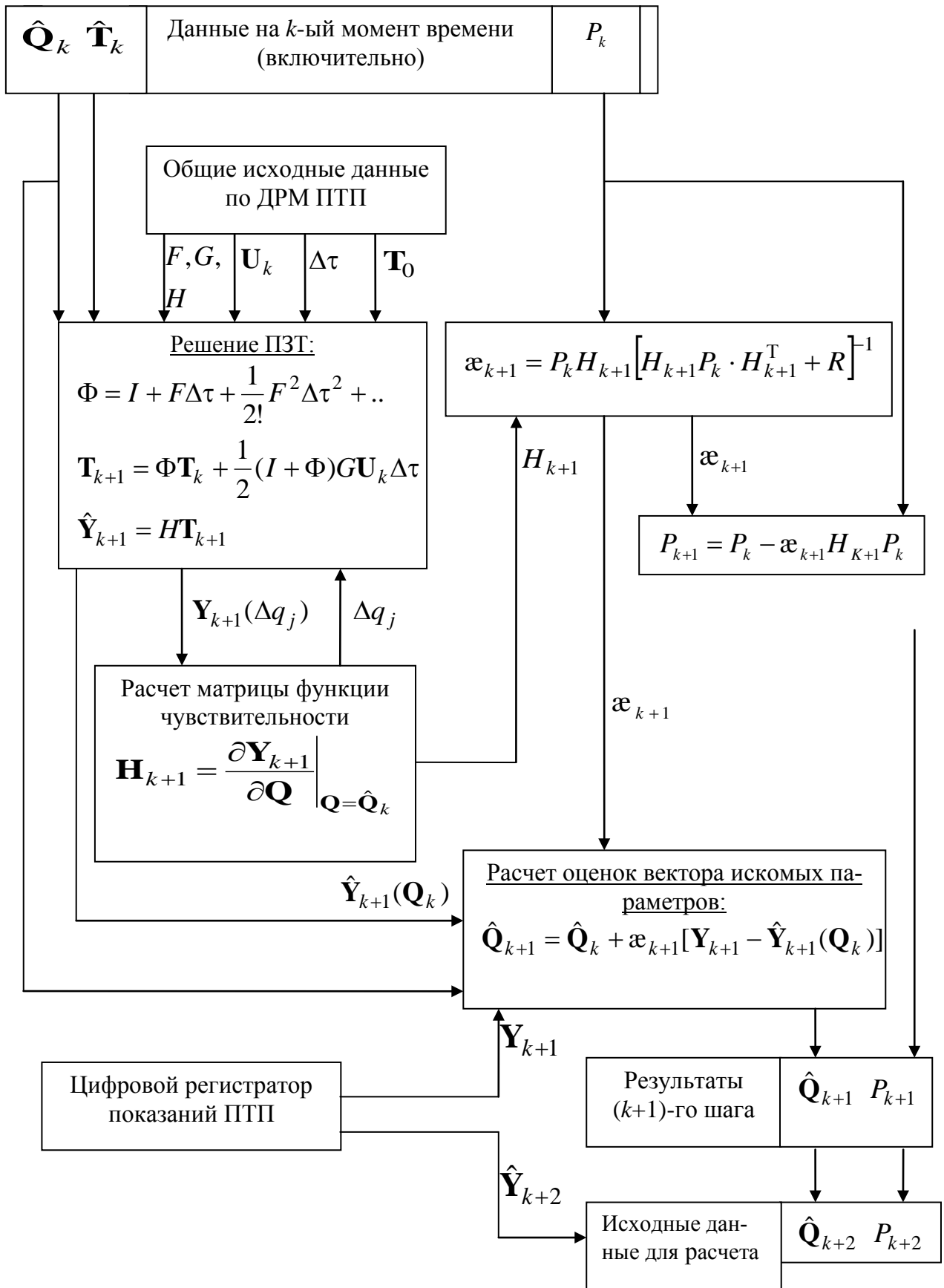


Рисунок 1.2 – Схема алгоритма подпрограммы решения граничной ОЗТ с использованием ФК по искомым параметрам

### 1.3 Восстановление $q(\tau)$ на основе алгоритма ФК по искомым параметрам для однородных градиентных ПТП

Рассматриваются особенности решения ОЗТ и результаты восстановления  $q(\tau)$  с использованием ПК «Heat Stream» с помощью однородного градиентного ПТП с постоянными ТФХ.

#### 1.3.1 Случай динамических измерений $q_l = \text{const}$

Исследование роли различных факторов, влияющих на сходимость и погрешности решения ОЗТ, проводилось для различных вариантов структуры вектора измерений при эталонных значениях  $q_1 = 1 \cdot 10^5$  Вт/м<sup>2</sup> и  $q_2 = 0$ . Рассматривался первый  $z = 1$  участок при количестве  $l = 30$  дискретных моментов времени  $k$  на нем.

Для всех рассмотренных вариантов установлены следующие начальные условия (для  $k = 0$ ) входа в алгоритм ФК: вектор начального распределения температур задавался точно ( $\mathbf{T}_0 = 0$ ), а начальные оценки  $\hat{q}_{a0} = \hat{q}_{b0} = 0$  со значительным отличием от их эталонных значений. В соответствии с этим значения диагональных элементов ковариационной матрицы  $P_0$  ошибок начальных оценок составляли  $P_{11,0} = P_{22,0} = 1 \cdot 10^{12}$  Вт<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>.

На рисунке 1.3 приведены движения оценок  $\hat{q}_{ak}$  и  $\hat{q}_{bk}$  при уровне шума (среднеквадратичного отклонения)  $\sigma = 0$ . Очевидно, что удовлетворительная сходимость (относительная погрешность  $\delta \leq 0,05$ ) оценок к истинным значениям наступает за два временных шага ( $k = 2$ ) для  $\hat{q}_{ak}$  и  $k = 11$  для  $\hat{q}_{bk}$ , а хорошая сходимость ( $\delta \leq 0,02$ ) —  $k = 8$  для  $\hat{q}_{ak}$  и  $k = 13$  для  $\hat{q}_{bk}$ . Поведение функции чувствительности измеренной температуры  $t_{1k}$  к оцениваемым параметрам (рисунок 1.4) соответствует результатам исследований.

На рисунке 1.5 демонстрируется влияние шумов  $|\sigma|$  в исходных измерениях температуры  $t_{1k}$  на сходимость оценок  $\hat{q}_{ak}$  и  $\hat{q}_{bk}$ . Как видно из рисунка 1.5, при  $\sigma = 0,5$  °С сходимость оценок сдвигается вправо: для  $\hat{q}_{ak}$  — до  $k = 10$ , а для  $\hat{q}_{bk}$  — до  $k = 23$ .

Движение оценок параметров  $\hat{q}_{ak}$  и  $\hat{q}_{bk}$  (рисунок 1.6) приведены как пример попытки улучшения сходимости за счет изменения структуры вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$ . Очевидно, что введение дополнительного измерения  $t_{3k}$  практически не влияет на качество сходимости оценок  $\hat{q}_{ak}$ , и незначительно влияет на  $\hat{q}_{bk}$ . Аналогичная ситуация имеет место при замене измерения  $t_{1k}$  измерением перепада температур  $\Delta t_{1-11,k} = t_{1k} - t_{11k}$  (рисунок 1.6,б). При измерениях температуры во внутренней точке сходимость существенно ухудшается (рисунок 1.6,в).

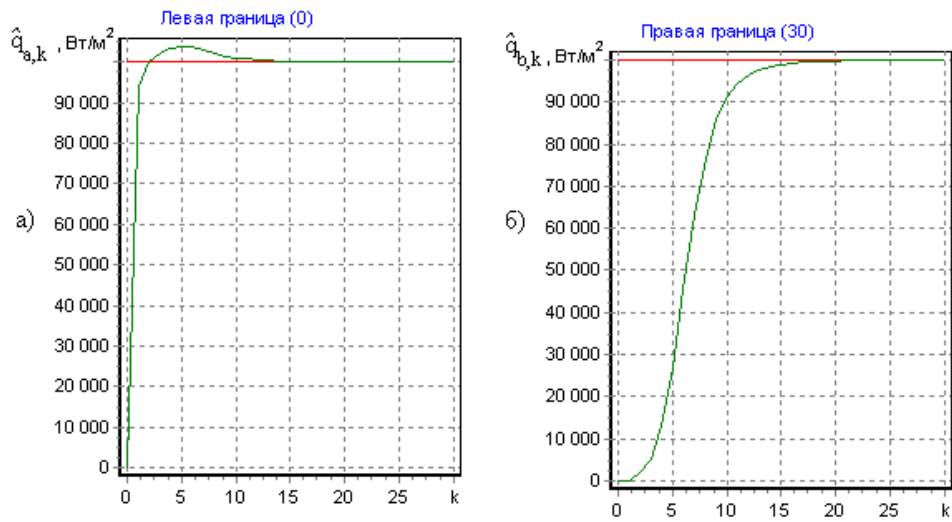


Рисунок 1.3 – Однородный градиентный ПТП при  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$  и  $q_2 = 0$ . Движение оценок  $\hat{q}_{ak}$  (а) и  $\hat{q}_{bk}$  (б) к истинным значениям  $q_a = q_b = q_1$  при измерениях температуры  $t_{1k}$  и уровне шума  $\sigma = 0$

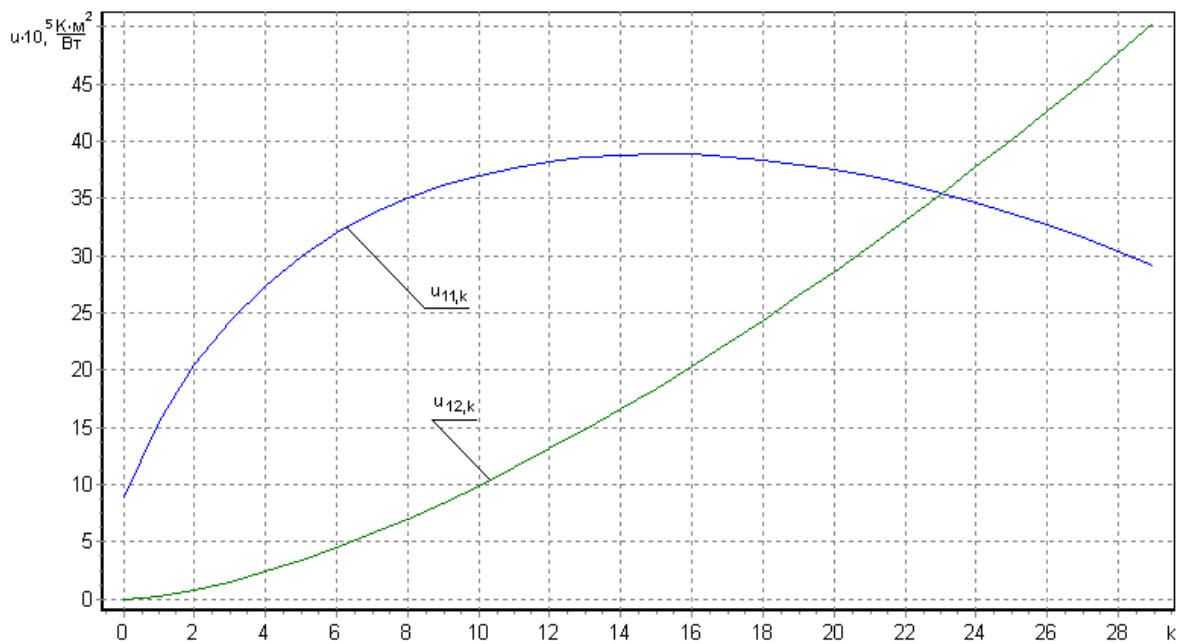


Рисунок 1.4 – Однородный градиентный ПТП при  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$  и  $q_2 = 0$ . Функции чувствительности  $u_{11,k}$  и  $u_{12,k}$  измеряемой температуры  $t_{1k}$  к параметрам  $q_a$  и  $q_b$  соответственно

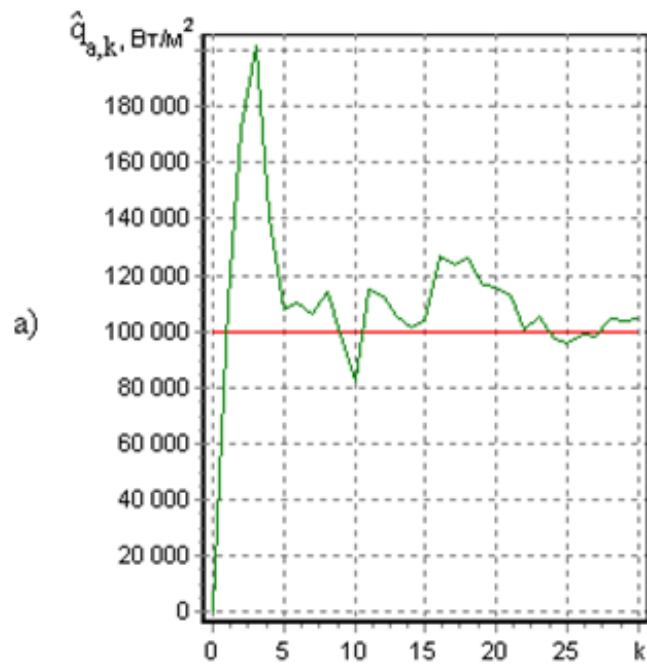


Рисунок 1.5 – Однородный градиентный ПТП при  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5$  Вт/м<sup>2</sup> и  $q_2 = 0$ .  
 Движение оценок  $\hat{q}_{ak}$  (а) и  $\hat{q}_{bk}$  (б) к истинным значениям  $q_a = q_b = q_1$   
 при уровне шума  $\sigma = 0,5$  °С



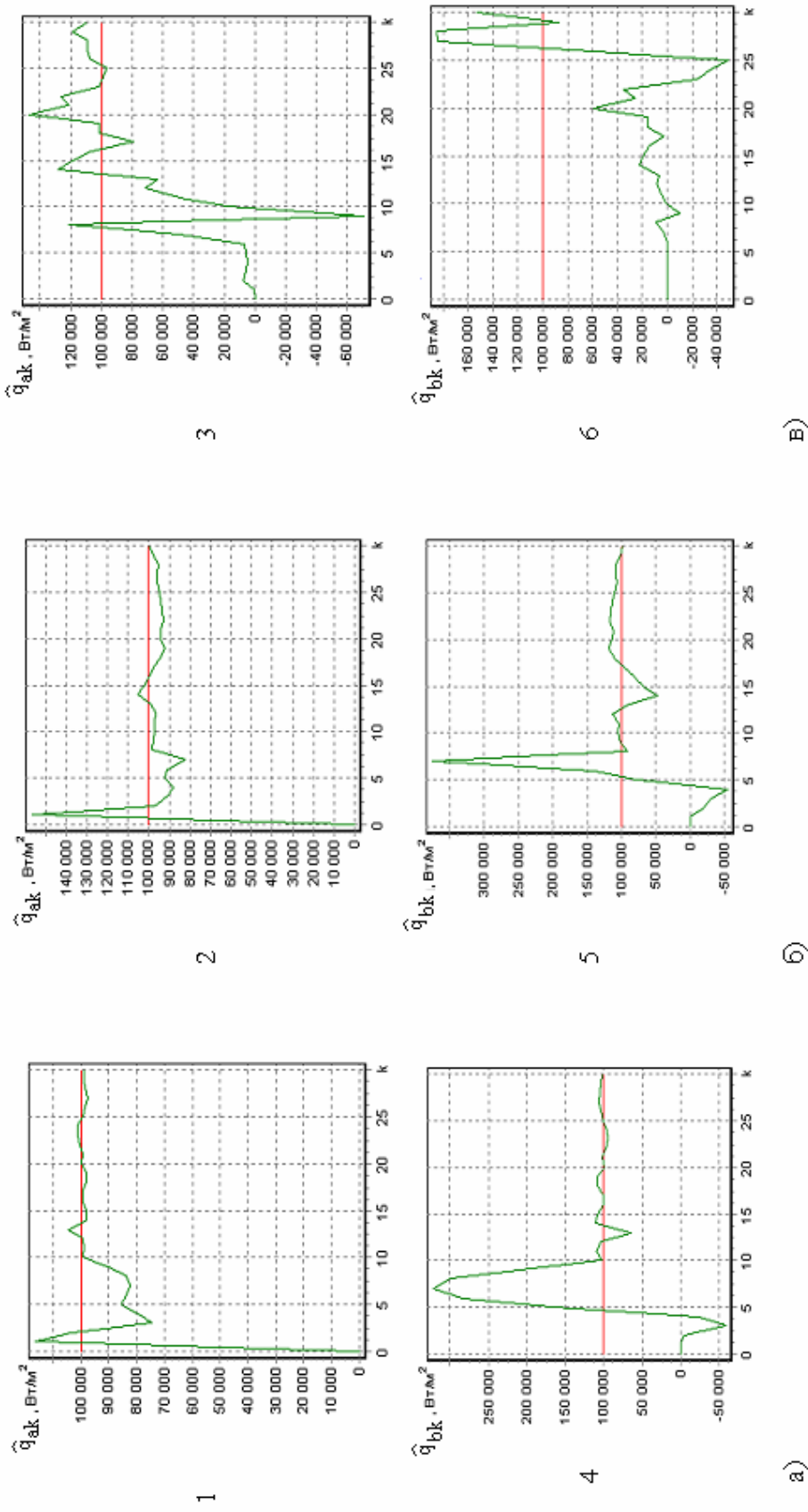


Рисунок 1.6 – Однородный градиентный ПТП при  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$  и  $q_2 = 0$ .  
 Движение оценок параметров  $q_{ak}$  (1, 2, 3) и  $q_{bk}$  (4, 5, 6) при измерениях температур:  
 а)  $t_{1k}$  и  $t_{3k}$ ; б)  $\Delta t_{(1-11)k}$ ; в)  $t_{2k}$ . Уровень шума в измерениях  $\sigma = 0,3 \text{ }^\circ\text{C}$

### 1.3.2 Случаи восстановления переменного потока $q(\tau)$

В качестве примеров, имитирующих реальные случаи нестационарной теплотометрии, была рассмотрена работа алгоритма ФК в составе ПК-1 «Heat Stream» в случае **изменения  $q(\tau)$  по различным законам.**

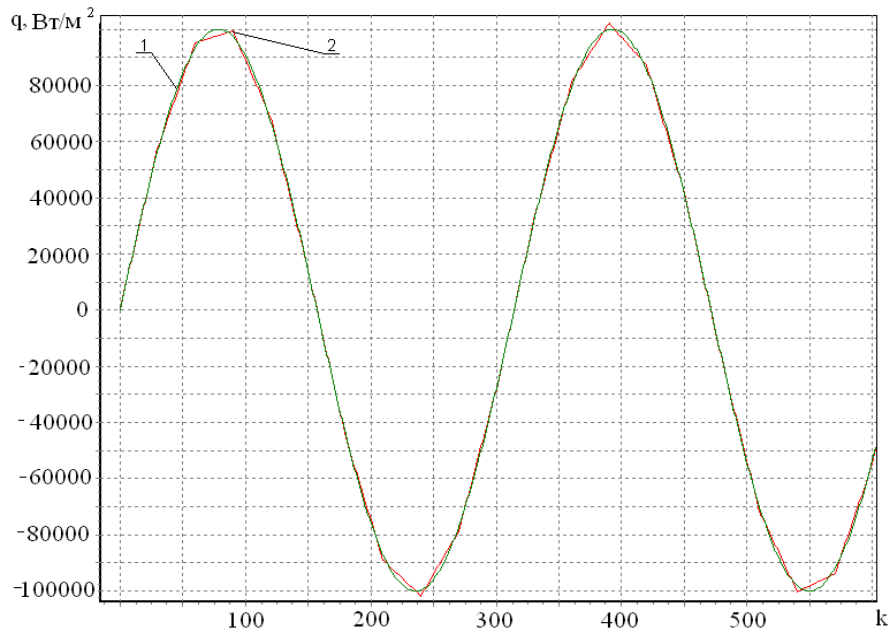
На рисунке 1.7 приведены результаты восстановления теплового потока, изменяющегося по **гармоническому закону**  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5 \cdot \sin 2\tau$ . В частности, на рисунке приведен вид  $q_1(\tau)$  (1), а на рисунке 1.7,б — реакция температур  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  ПТП на это входное воздействие. На рисунке 1.7,а приведены также результаты восстановления  $q_1(\tau)$  при уровне шума в измерениях  $\sigma = 0$ .

На рисунке 1.8 приведен эталонный (заданный) **треугольный импульс** теплового потока  $q_1(\tau)$  (при  $q_2 = 0$ ) и результаты его восстановления по измеряемой температуре  $t_{1k}$  при  $\sigma = 0$ .

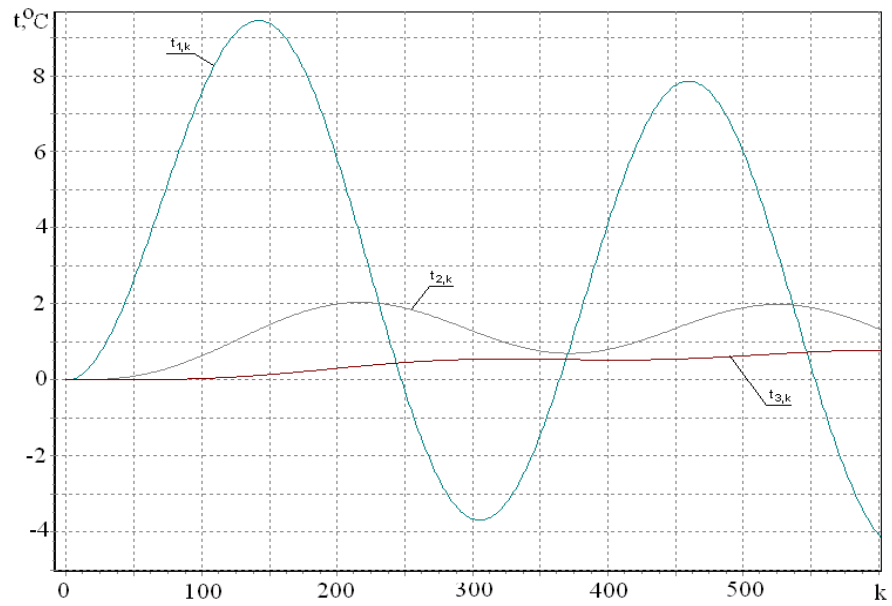
В процессе исследований задавались различные законы изменения потока  $q(\tau)$  при изменениях погрешности в измерениях температуры  $q_1(\tau)$  в пределах  $\sigma = 0 \div 1,5$  °С (что составляет 10 % при  $\sigma = 1,5$  °С).

В процессе исследований градиентных ПТП задавались различные законы изменения потока  $q(\tau)$  при погрешности в измерениях температуры  $t_1(\tau)$  до 10 %.

В целом, по результатам имитационного моделирования процедур восстановления входящего в однородный градиентный ПТП плотности теплового потока  $q_1(\tau)$  с применением алгоритма ФК по искомым параметрам можно считать успешным. Показана возможность получения количественных оценок влияния таких усложняющих факторов, как величины шума в исходных измерениях  $\sigma$  и уровня заглубления точек измерения точек измерения температуры.

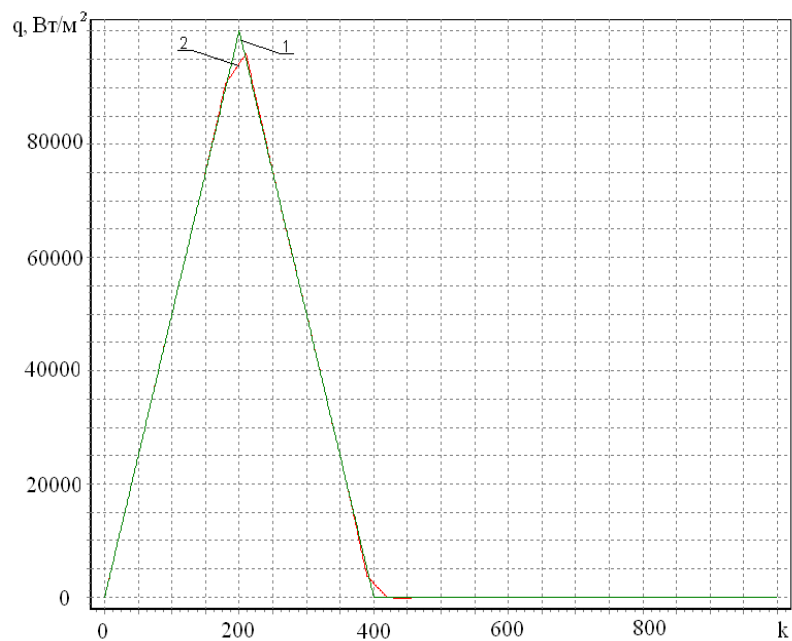


а)



б)

Рисунок 1.7 – Восстановление теплового потока, изменяющегося по гармоническому закону  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5 \sin(2\tau)$  при  $q_2 = 0$ . а) Эталонный (заданный) (1) и восстановленный при  $\sigma = 0$  (2) тепловые потоки. б) Реакция на эталонный тепловой поток



а)



б)

Рисунок 1.8 – Восстановление теплового потока в форме треугольного импульса  $q_1(\tau)$  при  $q_2 = 0$ . а) Эталонный (заданный) (1) и восстановленный при  $\sigma = 0$  (2) тепловые потоки. б) Реакция температуры  $t_{1k}$  на эталонный тепловой поток

## 1.4 Восстановление теплового потока на основе алгоритмов расширенного фильтра Калмана

### 1.4.1 Постановка задачи

В разделе 1.2 для восстановления входящего в ПТП теплового потока  $q(\tau)$  предложено использовать алгоритм цифрового ФК по параметрам  $\mathbf{Q}$ , а в разделе 1.3 проведены исследования эффективности этого алгоритма. Его достоинством является небольшая размерность вектора оцениваемых параметров, а к недостаткам следует отнести значительный объем вычислений матрицы функций чувствительности  $H_{k+1}$  на каждом шаге вычислений и необходимости задания начального распределения температур  $\mathbf{T}_0$  по ПТП с требуемой точностью (см. раздел 1.2.4).

В связи с этим, было предложено для получения оптимальных оценок  $\mathbf{Q}$  на каждом участке сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  использовать алгоритм так называемого **расширенного ФК**, который позволяет устранить первый недостаток и существенно смягчить требования к точности задания  $\mathbf{T}_0$  [4].

Как известно, расширенный фильтр Калмана основан на введении расширенного вектора состояния

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = [t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_n \quad q_a \quad q_b]^T \quad (1.17)$$

и соответствующих преобразований исходных моделей (1.1) и (1.2) теплопереноса в ПТП, а также модели измерений (1.3).

Уравнения исходных ДРМ необходимо дополнить дифференциальными уравнениями для составляющих  $q_a$  и  $q_b$  вектора  $\mathbf{R}$ . Учитывая условие  $\mathbf{Q} = \text{const}$ , эти дополнительные уравнения могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} q_a &= \dot{q}_a = 0, \\ \frac{d}{d\tau} q_b &= \dot{q}_b = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

**1.4.1.1** Расширенная ДРМ для **исходной линейной ДРМ** остается линейной и имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{R}}(\tau) = F_R(\tau)\mathbf{R}(\tau) + G_R\mathbf{U}(\tau), \quad (1.19)$$

$$\text{где } F_R(\tau) = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} F \\ (n \times n) \end{array} \right| \begin{array}{cc} 2dSp_0^{(1)} & 2dSp_1^{(1)} \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{array} \right| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| ; \\ G_R = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2d & 0 & 0 \end{array} \right|^T. \end{array} \quad (1.20)$$

Приведенный выше вид матрицы управления  $G_R$  относится к случаю, когда в векторе управления  $\mathbf{U}(\tau) = [q_1(\tau) \quad q_2(\tau)]^T$  искомый тепловой поток  $q_1(\tau)$  внесен в матрицу обратных связей  $F_R(\tau)$  и подлежит восстановлению, а тепловой поток  $q_2(\tau)$  на тыльной стороне ПТП предполагается известным. При этом учет других возможных вариантов условий теплообмена на тыльной стороне не вызывает принципиальных затруднений, но приводит к некоторым изменениям в модели (1.19).

Очевидно, что  $(m \times 1)$ -вектор измерений  $\mathbf{Y}(\tau)$  остается без изменений, а уравнение измерений в соответствии с (1.3) преобразуется к виду

$$\mathbf{Y}(\tau) = H_R \cdot \mathbf{R}(\tau) + \boldsymbol{\varepsilon}(\tau), \quad (1.21)$$

где матрица  $H_R$  измерений расширенной системы, которая выражается через матрицу  $H$  измерений исходной системы следующим образом:

$$H_R = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} H \\ (m \times n) \end{array} \right] \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (1.22)$$

Принципиальной особенностью ДРМ (1.19) является её нестационарность — зависимость матрицы обратных связей  $F_R(\tau)$  от времени  $\tau$ . В теории пространства состояний нестационарность линейных объектов является общим случаем и учитывается путем расчета на каждом временном шаге переходной матрицы  $\Phi_{k+1,k}$  с учетом зависимости матрицы обратных связей  $F_R(\tau)$  от времени  $\tau$ .

В соответствии с формулой (1.5) на каждом из участков  $\Delta_z$  кусочно-линейной сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  ( $z = 1, 2, \dots, r-1$ ) дискретный тепловой поток  $q_k$  изменяется по закону

$$q_k = q_a \left(1 - \frac{k}{l}\right) + q_b \cdot \frac{k}{l},$$

где  $k = 1, 2, \dots, l$ .

С учетом этой формулы дискретный аналог  $F_{R,k}$  матрицы  $F_R(\tau)$  может быть записан в виде

$$F_{R,k+1} = \begin{bmatrix} & & & & & 2d \left(1 - \frac{k}{l}\right) & 2d \frac{k}{l} \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Тогда переходная от моментов времени « $k$ » к « $k+1$ » матрица  $\Phi_{R,k+1}$  состояния ДРМ (1.19) будет иметь вид

$$\Phi_{R,k+1} = I + F_{R,k+1} \cdot \Delta\tau + \frac{1}{2!} F_{R,k+1}^2 \cdot \Delta\tau^2 + \frac{1}{3!} F_{R,k+1}^3 \cdot \Delta\tau^3 + \dots, \quad (1.24)$$

а дискретный аналог ДРМ — вид

$$\mathbf{R}_{k+1} = \Phi_{R,k+1} \cdot \mathbf{R}_k + \frac{1}{2} (I + \Phi_{R,k+1}) G_R \cdot \mathbf{U}_k \cdot \Delta\tau. \quad (1.25)$$

Дискретное уравнение измерений в соответствии с (1.21) — вид

$$\mathbf{Y}_k = H_R \cdot \mathbf{R}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k. \quad (1.26)$$

**1.4.1.2** Для **исходно нелинейной ДРМ** (2.5) расширенная ДРМ также является нелинейной. Она может быть представлена в следующей форме

$$\dot{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{f}_R[\mathbf{R}(\tau)], \quad (1.27)$$

где  $\mathbf{f}_R[\mathbf{R}(\tau)]$  нелинейная вектор-функция размерности  $(n+2) \times 1$ , составляющими  $f_i[\mathbf{R}(\tau)]$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$ ) которой являются  $n$  правых частей ДРМ и правые нулевые части уравнений (1.18). Уравнение измерений имеет вид (1.26).

**1.4.1.3** Для приведенных выше расширенных ДРМ задача **восстановления входящего в ПТП теплового потока**  $q(\tau)$  выглядит следующим образом: на участке сплайн-аппроксимации  $q_1(\tau)$  для расширенных моделей теплопереноса (1.19) или (1.27) и уравнения измерений (1.26), имея на каждом « $k$ »-м шаге значение вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$ , последовательно от « $k$ »-го момента времени к « $k+1$ » получить оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1}$  вектора  $\mathbf{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ). Оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1}$  включают оценки  $\hat{\mathbf{T}}_{k+1}$  вектора состояния ПТП  $\mathbf{T}$  и оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$  локального вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$ .

На практике по виду расширенной ДРМ могут иметь место следующие варианты постановки ОЗТ:

1. Линейная расширенная ДРМ (1.19).
2. Нелинейная расширенная ДРМ (1.27), причем исходная ДРМ (1.1) — нелинейна, что вызвано зависимостью ТФХ материала от температуры.
3. То же (п. 2), однако нелинейность вызвана лучистым теплообменом активного торца ПТП.

Для решения указанных задач воспользуемся алгоритмами цифрового ФК — линейным для ДРМ (1.19) и нелинейным для ДРМ (1.27).

#### 1.4.2 Восстановление $q(\tau)$ для ПТП с линейным теплопереносом

Расширенная ДРМ ПТП для этого случая имеет вид (1.19), её дискретный аналог выражается уравнениями (1.25), а дискретная модель измерений имеет вид (1.26)

Для решения поставленной задачи определения оптимальных оценок  $\hat{\mathbf{R}}_k$ , а в их составе — искомого вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_k$ , воспользуемся алгоритмом линейного цифрового ФК.

Фильтр Калмана является рекуррентной (последовательной) вычислительной процедурой, в которой на основании поступивших измерений  $\mathbf{Y}_{k+1}$ , предыдущей оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k/k}$  и ее ковариационной матрицы  $P_{k/k}$  вычисляются новые оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k+1}$  и их ковариационная матрица  $P_{k+1/k+1}$ . При этом для оценок  $\mathbf{R}$  и их ковариационных матриц  $P$  используется двойная индексация: первый индекс указывает для какого момента дискретного времени определяется оценка, второй — по какому моменту дискретного времени включительно используется набор измерений  $\mathbf{Y}_k$ . Статистические характеристики вектора случайных погрешностей  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  соответствуют указанным в разделе 1.2.2.2.

**1.4.2.1 Алгоритм ФК** применительно к расширенной ДРМ заключается в последовательном выполнении следующих векторно-матричных операций

$$\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k} = \Phi_{R,k+1} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{k/k} + \frac{1}{2} (I + \Phi_{R,k+1}) \cdot G_R \cdot \mathbf{U}_k \cdot \Delta\tau, \quad (1.28)$$

$$P_{k+1/k} = \Phi_{R,k+1} \cdot P_{k/k} \cdot \Phi_{R,k+1}^T, \quad (1.29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = P_{k+1/k} \cdot H_R^T \cdot [H_R P_{k+1/k} H_R^T + R]^{-1}, \quad (1.30)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{R}}_{k+1/k} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} [\mathbf{Y}_{k+1} - H_R \hat{\mathbf{R}}_{k+1/k}], \quad (1.31)$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} H_R P_{k+1/k}. \quad (1.32)$$

Здесь  $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$  весовая  $(n+2) \times m$ -мерная матрица;  $P_{k+1/k+1}$  и  $P_{k/k}$  ковариационные  $(n+2) \times (n+2)$ -мерные матрицы ошибок оценок расширенного вектора состояния, а  $P_{k+1/k}$  — ковариационная матрица ошибок оценок прогноза  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k}$  расширенного вектора состояний.

Перед выполнением вычислений по формуле (1.28)–(1.32) необходимо



провести две подготовительные операции, а именно:

- рассчитать матрицу обратных связей  $F_{R,k+1}$ , подставив в формулу (1.23) вместо  $q_a$  и  $q_b$  их  $k$ -е оценки  $\hat{q}_{ak}$  и  $\hat{q}_{bk}$ ;
- по формуле (1.24) рассчитать переходную матрицу  $\Phi_{R,k+1}$ .

Полученные значения  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k+1}$  и  $P_{k+1/k+1}$ , а так же значение  $\mathbf{Y}_{k+2}$  вектора измерений служат основанием для определения следующей  $(k+2)$ -й оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k+2/k+2}$  расширенного вектора состояния и ее ковариационной матрицы  $P_{k+2/k+2}$  и т. д.

**1.4.2.2** Важным является вопрос выбора **начальных ( $k=0$ ) оценок** расширенного вектора состояния  $\hat{\mathbf{R}}_{0/0}$ , включающего как начальное распределение температур по ПТП (вектор  $\hat{\mathbf{T}}_{0/0}$ ), так и начальную оценку  $\hat{\mathbf{Q}}_{0/0}$  искомого вектора  $\mathbf{Q}$ .

Подход к решению этой задачи приведен в разделе 1.2.4 в части выбора начальных оценок вектора искомых параметров  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  и их ковариационной матрицы  $P_0$ . Достоинством алгоритма расширенного ФК является обоснованное распространение этого подхода на выбор начальных оценок вектора  $\hat{\mathbf{T}}_{0/0}$  температурного состояния ПТП и их ковариационной матрицы  $P_{0/0}$ . Благодаря этому оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{T}}_{k+1/k+1}$  текущего вектора  $\hat{\mathbf{T}}_{k+1}$  начинают определяться непосредственно с первых временных шагов, в то время как в алгоритмах ФК по искомым параметрам они определяются опосредствованно через оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_k$ .

На практике вопросы влияния неточностей при задании начальных оценок решаются в процессе проведения численных экспериментов по исследованию особенностей функционирования алгоритмов ФК, методика которых изложена в подразделе 1.3.1.

Учет зависимости ТФХ от температуры может без существенных изменений проводиться в рамках алгоритма (1.28)–(1.32) линейного расширенного ФК. Для этого при вычислении по формуле (1.20) матрицы обратных связей  $F_{R,k+1}$  расширенной ДРМ для  $(k+1)$ -го момента времени значения  $\lambda(T)$ ,  $c(T)$  или  $a(T)$  необходимо отнести к рассчитанным на предыдущем  $k$ -м шаге температурам соответствующих блоков  $t_{i,k}$ . При этом известные справочные зависимости  $\lambda(T)$ ,  $c(T)$  или  $a(T)$  удобно аппроксимировать Всплайнами первого порядка по  $T$  в соответствии с формулой (1.5), в которой вместо временного интервала аппроксимации  $\Delta\tau$  используется температурный  $\Delta T$ . Тогда для различных вариантов аппроксимации ТФХ имеют следующий вид:

$$\lambda(T) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i S p_i^{(1)}(T); \quad c(T) = \sum_{i=1}^{p+1} c_i S p_i^{(1)}(T); \quad a(T) = \sum_{i=1}^{p+1} a_i S p_i^{(1)}(T). \quad (1.33)$$

### 1.4.3 Восстановление $q(\tau)$ для ПТП с нелинейным теплопереносом

Для получения оценок  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k+1}$  расширенного вектора  $\mathbf{R}_{k+1}$  подобной **сугубо нелинейной** расширенной ДРМ (1.27) с моделью измерений (1.26) возможно использовать алгоритм нелинейного цифрового ФК, который по своей структуре близок алгоритму (1.28)–(1.32) линейного ФК. Он основан на рекуррентной (последовательной) линеаризации нелинейной модели. В отличие от обычных методов линеаризации, когда опорная траектория  $\mathbf{R}_k$ , относительно которой выполняется линеаризация, должна быть задана сразу по всему участку измерений  $\overline{0, \tau_N}$ , линеаризация выполняется лишь на один шаг по времени  $\Delta t$  вперед (от « $k$ » до « $k+1$ ») по предыдущему значению опорной траектории, в качестве которой используются оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k/k}$ .

Для нелинейной ДРМ (1.38), этот метод реализуется путем получения на каждом  $(k+1)$ -м временном шаге линеаризованной матрицы обратной связи  $\hat{F}_{R,k}$  в следующем виде:

$$\hat{F}_{R,k+1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{f}[\mathbf{R}(\tau)]_{\mathbf{R}=\hat{\mathbf{R}}_{k/k}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{R})}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{R})}{\partial t_n} & \frac{\partial f_1(\mathbf{R})}{\partial q_a} & \frac{\partial f_1(\mathbf{R})}{\partial q_b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{R})}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{R})}{\partial t_n} & \frac{\partial f_n(\mathbf{R})}{\partial q_a} & \frac{\partial f_n(\mathbf{R})}{\partial q_b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{\mathbf{R}=\hat{\mathbf{R}}_{k/k}}, \quad (1.34)$$

где  $q_a$  и  $q_b$  — составляющие вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$  (на каждом  $z$ -м ( $z = 1, 2, \dots, r-1$ ) участке).

Тогда нелинейная ДРМ (1.27) будет иметь свой дискретный аналог в форме уравнения (1.34), где переходная матрица  $\hat{\Phi}_{R,k+1}$  рассчитывается по формуле (1.24) с подстановкой в нее определенной по формуле (1.34) матрицы обратных связей  $\hat{F}_{R,k+1}$  вместо  $F_{R,k+1}$ .

Благодаря пошаговой линеаризации расширенной ДРМ для получения оптимальных оценок расширенного вектора состояния  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k+1}$  и его ковариационной матрицы  $P_{k+1/k+1}$  на каждом из  $z$  участков сплайн-аппроксимации, можно использовать **алгоритм** расширенного ФК (1.28)–(1.32). Полученная оценка  $\hat{\mathbf{R}}_{k+1/k+1}$  и ее ковариационная матрица  $P_{k+1/k+1}$  наряду с измерением  $\mathbf{Y}_{k+2}$  служат основанием для последующего определения оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{k+2/k+2}$  и ее ковариационной матрицы  $P_{k+2/k+2}$  для  $(k+2)$ -го момента времени по при-

веденному алгоритму и т. д.

Следует отметить, что как показано в литературе по оптимальной фильтрации, в связи с нелинейностью задачи полученные оценки относятся к виду квазиоптимальных или субоптимальных. Поэтому их качество необходимо в каждом конкретном случае исследовать методом численного моделирования с анализом влияния всех неоднозначных факторов на конечные результаты решения ОЗТ.

#### 1.4.4 Программная реализация алгоритма расширенного ФК

Для реализации предложенного выше метода восстановления входящего в ПТП теплового потока разработан, протестирован и внедрен в практику нестационарной теплотометрии программный комплекс «Heat Identification» (ПК-2), который является 32-разрядным многопоточным приложением для операционной системы Windows, его программа написана на языке C++ в интегрированной среде разработки Borland C++ Builder 6.

Назначение, задачи, структура алгоритма, режимы вычислений и работа **основной программы** соответствуют приведенным в разделе 1.2.5 для ПК-1 «Heat Stream». Существенные отличия имеют место в подпрограмме решения ПЗТ, в которой рассматриваются расширенные ДРМ ПТП (1.19) и модель измерений (1.21), и в подпрограмме решения граничной ОЗТ по восстановлению входящего в ПТП теплового потока методом расширенного ФК.

**Тестирование ПК-2** было выполнено методом численного эксперимента, изложенного в разделе 1.3.1. Оно заключалось в исследованиях как процедур сходимости, так и конечной точности алгоритма расширенного ФК применительно к градиентному однородному ПТП при вариациях различных факторов, которые влияют на решение ОЗТ.

Анализ результатов этих исследований показал устойчивую сходимость и приемлемую точность результатов восстановления  $q_1(\tau)$  при выполнении оговоренных в разделе 1.1 условий.

#### 1.4.5 Восстановление $q(\tau)$ с помощью алгоритма расширенного ФК для однородного градиентного ПТП

Был выполнен значительный объем численных экспериментов с целью тестирования программного комплекса ПК-2, а также сравнения эффективности двух вариантов алгоритма ФК: по искомым параметрам  $Q$ , реализованного в ПК-1, и расширенного — ПК-2.

**1.4.5.1** В качестве объекта исследований была выбрана граничная ОЗТ по восстановлению плотности теплового потока  $q(\tau)$ , входящего в **одномерный градиентный ПТП**. Решение этой ОЗТ с помощью ПК-1 детально рассмотрено в разделе 1.3 для двух случаев: 1)  $q = q_a = q_b = 1 \cdot 10^5$  Вт/м<sup>2</sup>; 2)  $q(\tau) = 1 \cdot 10^5 \sin 2\tau$ . Для таких же вариантов решения было повторено с применением ПК-2.

Для ПК-1 и ПК-2 выбрано количество измерений на участках сплайн-аппроксимации  $l = 30$ , временной шаг  $\Delta\tau = 0,01$  с, всего временных шагов

$N = 3 \cdot 10^3$ . Были заданы значения среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  шума в измерениях  $\sigma = 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$  и погрешность задания начального распределения температур по ПТП  $\Delta T_0 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$  по всем составляющим  $\hat{\mathbf{T}}_0$ . Эталонное значение  $\mathbf{T}_0 = 0$ . Учитывая, что перепад измеряемой температуры за  $0,3 \text{ с}$  составлял всего  $3,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , то заданный уровень погрешностей, особенно по  $\sigma$  необходимо признать высоким.

В качестве начальных оценок  $q_a$  и  $q_b$  на всех участках задавались  $\hat{q}_{a_0} = \hat{q}_{b_0} = 100 \text{ Вт/м}^2$ . Значения диагональных элементов ковариационной матрицы  $p_{1,1_0} = p_{2,2_0} = \dots = p_{11,11_0} = 100 \text{ Вт}^2/\text{м}^4$  и  $p_{12,12_0} = p_{13,13_0} = 10^{12} \text{ Вт}^2/\text{м}^4$  на 1-м участке и на всех последующих.

На рисунке 1.9 приведено движение оценок  $\hat{q}_{1k}$  на всем интервале наблюдения до  $k = N = 3 \cdot 10^3$ , полученное ПК-2 и ПК-1.

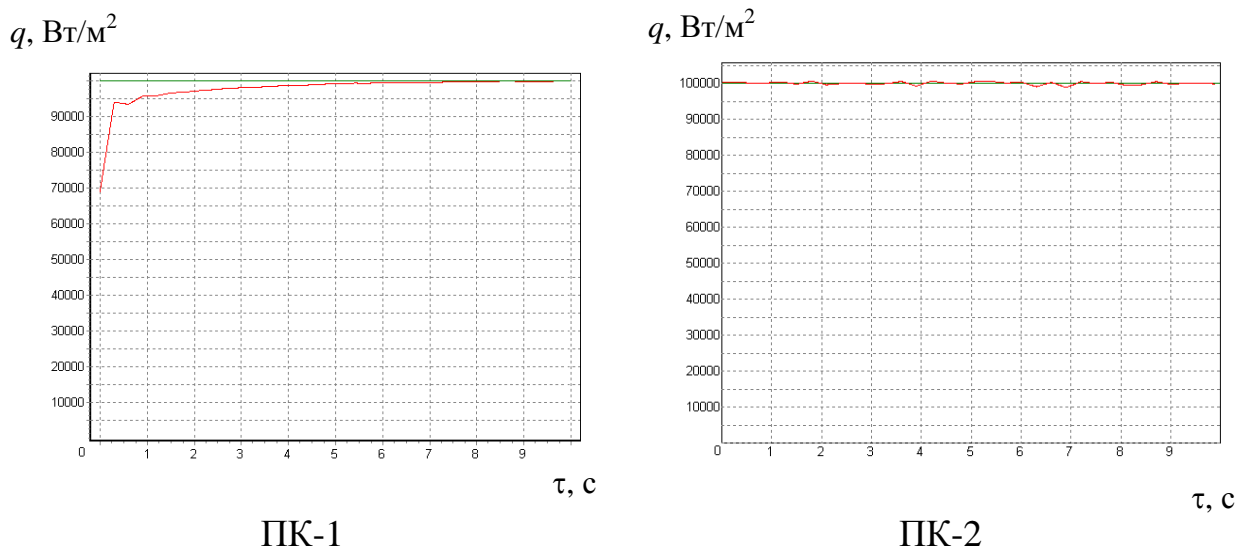


Рисунок 1.9 – Движение оценок  $\hat{q}_{1k}$  теплового потока  $q_1$ , полученные по ПК-1 и ПК-2 для однородного градиентного ПТП

В целом, результаты численного экспериментирования показали устойчивую сходимость ФК как расширенного (ПК-2), так и по искомым параметрам (ПК-1) с погрешностью в пределах до  $3\%$  от  $q_0$ . При этом, алгоритм ПК-2 устраняет влияние погрешности  $\Delta T_0$  значительно быстрее, чем алгоритм ПК-1. Очевидно, что это является следствием включения вектора  $\mathbf{T}_k$  температурного состояния в искомый вектор  $\mathbf{R}_k$ , что позволяет в ПК-2 получать оценки  $\mathbf{T}_k$ , начиная с первого же шага  $k = 1$  оценивания (см. также раздел 1.4.1). В то же время, в алгоритме ПК-1 уточнение  $\mathbf{T}_k$  происходит опосредственно и поэтому существенно более низкими темпами.

**1.4.5.2** Был также рассмотрен случай восстановления потока, изменяющегося по гармоническому закону  $q_1(\tau) = 1 \cdot 10^5 \sin 2\tau$ , с использованием ПК-2 при разных уровнях шумов в измерениях (до  $\sigma = 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ) и погрешностей задания начальных распределений температур по ПТП (до

$\Delta T_0 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Для таких условий расчеты по ПК-2 давали устойчивую сходимость к эталонным значениям  $q_0(\tau)$  и более высокую точность конечных результатов, чем при использовании ПК-1.

**1.4.5.3** Кроме рассмотренных факторов  $\sigma$  и  $\Delta T_0$ , оказывающих, как указано выше, существенное влияние на качество решения ОЗТ, было исследовано влияние **других факторов**, а именно: количества и места размещения в ПТП точек измерения температуры, граничных условий на тыльной стороне, закона изменения  $q_1(\tau)$ , количества измерений  $l$  на участках сплайн-аппроксимации, а также условий входа в алгоритм ФК. К последним были отнесены выбор начальных оценок  $\hat{q}_{a,k}$  и  $\hat{q}_{b,k}$  на первом и последующих участках сплайн-аппроксимации диагональных элементов  $p_{11,0}$  и  $p_{22,0}$  ковариационной матрицы ошибок этих оценок.

Если **обобщить результаты указанных численных экспериментов** на основе алгоритма ПК-2, то можно сделать вывод, что закономерности влияния перечисленных выше факторов во многом аналогичны обнаруженным в разделе 1.3 для алгоритма ФК по искомым параметрам в форме ПК-1. В частности:

1. Качество решения ОЗТ (сходимость и точность) существенно ухудшается вплоть до расхождения оценок при заглублинии точки измерения температуры, а также, если температура рабочей поверхности  $t_1(\tau)$  не входит в состав вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$ . При этом при добавлении точек измерения температуры качество решения улучшается несущественно.

2. На тыльной стороне ПТП допускаются любые граничные условия теплообмена при условии, что они известны.

3. Условия входа в алгоритм ФК практически не сказывается на качестве решения ОЗТ. Так, начальные оценки искомым параметров обычно задавались равными  $\hat{q}_{a_0} = \hat{q}_{b_0} = 100 \text{ Вт/м}^2$  вместо истинных  $q_a$  и  $q_b$  порядка  $1 \cdot 10^5 \div 1 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$ .

4. Уровень шума в измерениях  $\sigma$  сказывается существенным образом, однако это влияние может быть устранено или значительно уменьшено путем увеличения количества  $l$  измерений  $\mathbf{Y}_k$  на участках  $\Delta$  сплайн-аппроксимации  $q_1(\tau)$ . Последнее, к сожалению, либо уменьшает значимость текущих измерений из-за малых различий между  $\mathbf{Y}_k$  и  $\mathbf{Y}_{k+1}$  (из-за уменьшения  $\Delta\tau$ ), либо увеличивает  $\Delta = l \cdot \Delta\tau$  и, следовательно, ухудшает качество сплайн-аппроксимации  $q_1(\tau)$  (при неизменных  $\Delta\tau$ ).

5. Неточности  $\Delta T_0$  задания начального распределения  $\mathbf{T}_0$  температуры по ПТП существенно влияют на результаты решения ОЗТ на начальном участке протекания переходных процессов, а по истечению некоторого критического значения  $\tau_{кр}$  перестают сказываться.

## 1.5 Восстановление $q(\tau)$ с одновременным оцениванием коэффициента теплопроводности материала ПТП

### 1.5.1 Постановка задачи

Теплофизические характеристики (ТФХ) материала ПТП существенно влияют на результатах восстановления плотности теплового потока. В теплотометрии в качестве информации о ТФХ используются справочные данные. Однако для новых материалов, многокомпонентных сложных сплавов, керамик, композитов и многих других значения ТФХ либо неизвестны, либо различаются в зависимости от технологии их получения. Для неоднородных градиентных ПТП, например, термобатарейных, многослойных и т. п. величины ТФХ известны лишь приблизительно.

Выход из создавшегося положения обычно заключается в прямой градуировке ПТП, в ряде случаев — на специальных стендах, создание которых требует значительных усилий. В свою очередь, учет погрешностей вызываемых возможными различиями ТФХ материалов ПТП представляет достаточно сложную научную проблему.

Перспективным является использование методов постановки и решения **комбинированных ОЗТ**, в которых ставятся задачи одновременного решения граничной и коэффициентной ОЗТ.

При постановке **коэффициентной ОЗТ** ограничимся случаем оценивания величины некоторого среднего для каждого  $z$ -го участка сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  значения  $\lambda_z$

$$\mathbf{Q}_{\lambda,z} = \lambda_z. \quad (1.35)$$

Оно войдет в **обобщенный вектор искомых параметров** на этом участке

$$\mathbf{Q}_z = \left| \mathbf{Q}_{q,z} \quad \mathbf{Q}_{\lambda,z} \right| = \left| q_{a,z} \quad q_{b,z} \quad \lambda_z \right|^T, \quad (1.36)$$

который подлежит оцениванию по  $l$  значениям вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  на этом участке ( $k=1,2,\dots,l$ ). Условием такой постановки является возможность раздельного независимого определения оценок  $\hat{q}_{a,z}$ ,  $\hat{q}_{b,z}$  и  $\hat{\lambda}_z$  искомых параметров. Эти возможности могут быть исследованы путем получения совместных доверительных интервалов указанных оценок при использовании аппарата функций чувствительности каждой составляющей вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  каждой составляющей обобщенного вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}_z$ . Полученные оценки  $\hat{\lambda}_z$  справедливы для каждого из  $z$  интервалов, однако если их отнести к средней по участку аппроксимации температуре  $t_{cp,z}$ , то они могут дать общее представление о зависимости  $\lambda(T)$ . Фактически это означает параметризацию зависимости  $\lambda(T)$  путем ее кусочно-постоянной аппроксимации на каждом из  $z$  участков. Такая параметризация незначительно повышает сложность решения комбинированной ОЗТ сравнительно с граничной и при этом, как показали наши исследования, существенно снижает уровень погрешности результатов от ошибок в  $\lambda(T)$ .

Заметим, что принципиально возможно другие более точные способы параметризации  $\lambda(T)$ , например, кусочно-линейная, когда  $\mathbf{Q}_{\lambda,z} = \begin{bmatrix} \lambda_{a,z} & \lambda_{b,z} \end{bmatrix}^T$ . Однако, они являются отдельной сложной проблемой, особенно для ПТП с элементами полупространства.

Решение комбинированной ОЗТ может быть получено путем минимизации функции невязки (1.6), в которую через модельное измерений  $\hat{\mathbf{Y}}_k(\hat{\mathbf{Q}}_z)$  входит обобщенный вектор искомым параметров  $\mathbf{Q}_z$ . При этом из-за нелинейности комбинированной ОЗТ получаемые оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_z$  вектора  $\mathbf{Q}_z$  могут потерять свойства оптимальности и стать субоптимальными (приближенными). Для получения указанных оценок могут быть использованы оба рассмотренных выше варианта цифрового ФК. Остановимся на этом более детально.

### 1.5.2 Алгоритм фильтра Калмана по искомым параметрам

В приведенные в разделе 1.2 структуру алгоритма порядок вычислений и условия входа в алгоритм вносятся некоторые коррективы. Так, вместо формулы (1.12) для вычисления матрицы  $H_{k+1}$  функций чувствительности измерений к определяемым параметрам  $\mathbf{Q}_z$  необходимо использовать следующую

$$H_{k+1} = \frac{\partial \mathbf{Y}_{k+1}}{\partial \mathbf{Q}_z} \Big|_{\mathbf{Q}_z = \hat{\mathbf{Q}}_{z,k}} = \begin{bmatrix} U_{1,q_a,k+1} & U_{1,q_b,k+1} & U_{1,\lambda,k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{m,q_a,k+1} & U_{m,q_b,k+1} & U_{m,\lambda,k+1} \end{bmatrix}_{\mathbf{Q}_z = \hat{\mathbf{Q}}_{z,k}}, \quad (1.37)$$

где  $U_{j,\lambda,k+1}$  — функция чувствительности  $j$ -го измерения ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) к  $\lambda$  в  $(k+1)$  момент времени.

Для расчета  $U_{j,\lambda,k+1}$ , основанного на полученном на  $k$ -м шаге значении  $\hat{\mathbf{Q}}_{z,k}$ , можно воспользоваться формулой

$$U_{j,\lambda,k+1} = \frac{y_{j,k+1}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk}, \lambda_k \pm \Delta\lambda) - y_{j,k+1}(\hat{q}_{ak}, \hat{q}_{bk}, \lambda_k)}{\Delta\lambda}. \quad (1.38)$$

Для определения матрицы функций чувствительности  $H_{k+1}$ , а также модельного измерения  $\hat{\mathbf{Y}}_{k+1}(\hat{\mathbf{Q}}_{z,k})$  могут быть использованы нелинейная или линейная ДРМ. При задании условий входа в алгоритм  $\hat{\mathbf{Q}}_{z,0}$  и  $P_0$ , в соответствии с изложенной в подразделе 1.2.4.2 рекомендацией, необходимо учесть специфику априорных сведений о величине  $\lambda$  и отразить ее в формуле  $\sigma_{\hat{\lambda}_0}^2 = \frac{4}{9} \Delta^2 \lambda_0$ , где  $\pm \Delta\lambda_0$  — интервал возможных отклонений  $\hat{\lambda}_0$  от истинного значения  $\lambda$ .

Данный алгоритм был реализован в виде программы «Heat Conduction»

на языке высокого уровня Scilab, который предназначен для выполнения инженерных и научных расчетов.

В качестве иллюстрации на рисунке 1.10 представлены результаты восстановления линейного теплового потока и теплопроводности для однородного градиентного ПТП из германия при задании начальных оценок вектора искомых параметров вдвое меньше эталонных и уровне шумов в измерениях  $\sigma=0,05$  °С.

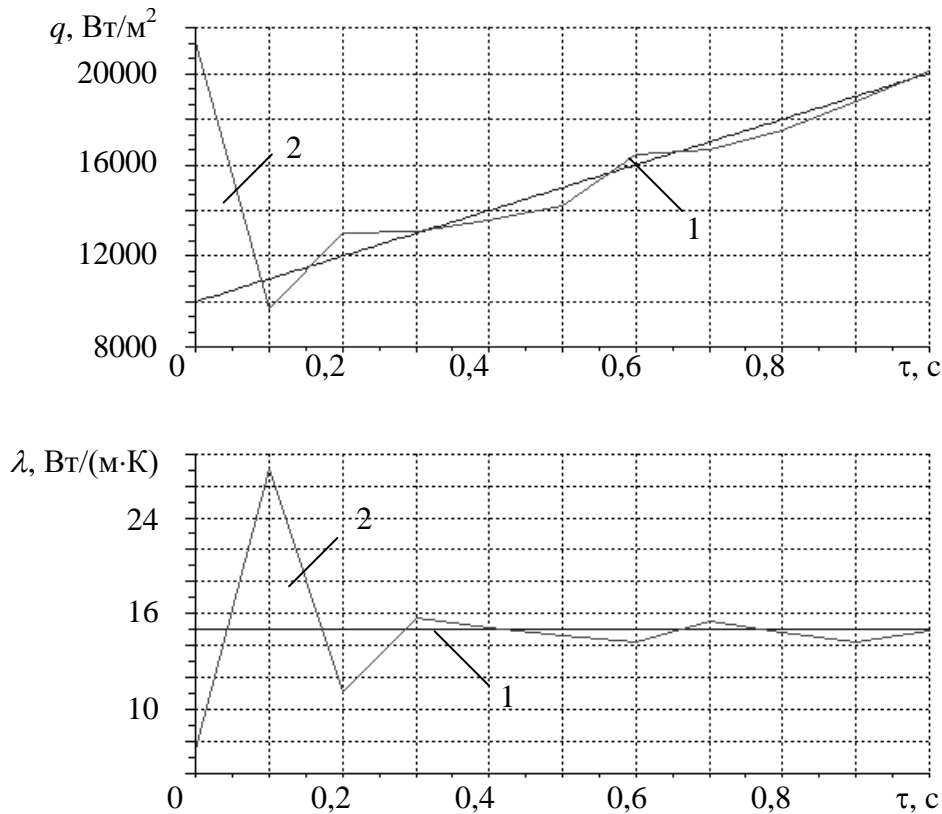


Рисунок 1.10 – Эталонные (1) и восстановленные (2) значения теплового потока и коэффициента теплопроводности

### 1.5.3 Алгоритм расширенного фильтра Калмана

В разделе 1.4.2 рассмотрено применение алгоритма расширенного ФК для решения граничной ОЗТ по восстановлению  $q(\tau)$  для ПТП с исходной линейной ДРМ типа. В этом случае расширенная ДРМ остается линейной, и к ней применяется алгоритм линейного ФК. Для ПТП с нелинейной исходной ДРМ расширенная ДРМ (1.19) также является нелинейной, и к ней применяется алгоритм нелинейного расширенного ФК, описанный в разделе 1.4.4.

В рассматриваемой комбинированной ОЗТ составляющая  $\lambda$  искомого расширенного вектора  $\mathbf{R}_z = \left[ \mathbf{T} \quad \mathbf{Q}_z \right]^T = \left[ t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n \quad q_a^z \quad q_b^z \quad \lambda_z \right]^T$  входит в каждое уравнение искомой линейной ДРМ (2.9), в которых появляются нелинейные члены, содержащие произведения  $\lambda \cdot t_i$ . Таким образом, расширенная ДРМ имеет следующий вид в развернутой форме



$$\begin{aligned}
 i_i &= -2\bar{b} \cdot \lambda t_1 + 2\bar{b} \cdot \lambda t_2 + 2d \cdot q_a^z \cdot S_{p_0}^{(1)} + 2d \cdot q_b^z \cdot S_{p_1}^{(1)} = f_1(\mathbf{R}_z) \\
 i_2 &= \bar{b} \cdot \lambda t_1 + 2\bar{b} \cdot \lambda t_2 + \bar{b} \cdot \lambda t_3 = f_2(\mathbf{R}_z) \\
 &\dots\dots\dots \\
 i_n &= 2\bar{b} \cdot \lambda t_{n-1} - 2\bar{b} \cdot \lambda t_n + 2dq_2(\tau) = f_n(\mathbf{R}_z) \\
 \dot{q}_a &= 0 = f_{n+1}(\mathbf{R}), \quad \dot{q}_b = 0 = f_{n+2}(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad \dot{\lambda} = 0 = f_{n+3}(\mathbf{R})
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

и в векторно-матричной форме  $\dot{\mathbf{R}}_z = \mathbf{f}_R[\mathbf{R}_z(\tau)]$ , где вектор-функция  $\mathbf{f}_R[\mathbf{R}_z(\tau)] = [f_1[\mathbf{R}_z(\tau)] \quad f_2[\mathbf{R}_z(\tau)] \dots f_{n+3}[\mathbf{R}_z(\tau)]]$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае расширенная ДРМ ПТП в обоих случаях является нелинейной и имеет вид (1.39). При этом в расширенное уравнение измерений в форме (1.26) вместо  $(n+2)$ -вектора  $\mathbf{R}$  необходимо включить  $(n+3)$ -вектор  $\mathbf{R}_z$ . К представленным в такой форме расширенным моделям ПТП и измерений (1.25) и (1.26) для получения оптимальных оценок вектора искомым параметров  $\mathbf{R}_z$  можно применить алгоритм расширенного нелинейного ФК. В его основе лежит процедура рекуррентной линеаризации, которая закладывается в расчете на каждом временном шаге линеаризованной матрицы обратной связи

$$\hat{F}_{R_{z,k}} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{f}[\mathbf{R}_z(\tau)] \right|_{\mathbf{R}_z = \hat{\mathbf{R}}_{k/k}} .$$

В рассматриваемом случае она имеет вид:

$$\hat{F}_{R_{z,k}} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_n} & \frac{\partial f_1}{\partial q_a} & \frac{\partial f_1}{\partial q_b} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \frac{\partial f_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t_n} & \frac{\partial f_n}{\partial q_a} & \frac{\partial f_n}{\partial q_b} & \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{R}_z = \hat{\mathbf{R}}_{k/k}} \tag{1.40}$$

Если в выражении (1.40) для  $\hat{F}_{R_{z,k}}$  подставить выражения для  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}, f_{n+2}$  из (1.39), то получим:

$$\hat{F}_{R_{z,k}} = \left. \begin{bmatrix} -2\bar{b}\hat{\lambda}_{k/k} & 2\bar{b}\hat{\lambda}_{k/k} & \dots & 0 & 2dS_{p_0}^{(1)} & 2dS_{p_1}^{(1)} & -2\bar{b}\hat{t}_{1,k/k} + 2\bar{b}\hat{t}_{2,k/k} + 0 + \dots + 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2\bar{b}\hat{\lambda}_{k/k} & 0 & 0 & 2\bar{b}\hat{t}_{n-1,k/k} - 2\bar{b}\hat{t}_{n,k/k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{R}_z = \hat{\mathbf{R}}_{k/k}}$$

(1.41)

Далее порядок вычислений  $\hat{\mathbf{R}}_{z,k/k} = \left| \hat{\mathbf{T}}_{k/k} \quad \hat{\mathbf{Q}}_{z,k/k} \right|^T$  практически соответствует приведенному в подразделе 1.4 за единственным исключением: линеаризованная матрица обратной связи  $\hat{F}_{R_{z,k}}$  определяется по формуле (1.41), а не по формуле (1.34). Таким образом, от  $k$ -го момента времени на основе имеющейся оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{z,k|k}$ , ее ковариационной матрицы  $P_{z,k/k}$  и измерения  $\mathbf{Y}_{k+1}$  определяются оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{z,k+1/k+1}$  и их ковариационная матрица  $P_{z,k+1/k+1}$ . Оценки  $\hat{\mathbf{R}}_{z,k+1/k+1}$  включают оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_z$  вектора искомых параметров теплового потока  $\hat{q}_{ak/k}$ ,  $\hat{q}_{bk/k}$  и коэффициента теплопроводности  $\hat{\lambda}_{k/k}$ . Эти вычисления повторяются  $k = l$  раз на каждом  $z$ -м участке сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$ , а затем осуществляется переход на  $(z+1)$  участок, как это показано в подразделе 1.1.6.

## 1.6 Исследование возможностей и особенностей применения предложенной методологии нестационарной теплотметрии к ПТП различного типа

Эффективность предложенной методологии нестационарной теплотметрии очевидна, если в качестве объектов исследования выбрать те ПТП, по которым либо полностью отсутствует информация о возможностях восстановления  $q(\tau)$ , либо вызывают сомнения эффективность и точность методов из числа известных.

К первым относится **ПТП Гардона** даже для наиболее простого случая, лучистого теплового потока  $q(\tau)$ , постоянного по радиусу диска. Наличие существенной доли конвективного теплообмена, а также учет дополнительных элементов конструкции в тепловой схеме ПТП ещё более усложняют задачу.

Ко вторым можно отнести **батарейный ПТП** при всевозможных условиях теплообмена на тыльном торце, в том числе и размещение их на полубесконечном теле.

В связи с этим ниже рассмотрены возможности и особенности использования алгоритмов ФК для восстановления тепловых потоков именно с помощью таких распространенных ПТП, как тепломер Гардона, тепломер с элементами полупространства и батарейный тепломер Геращенко. При этом использовались ДРМ теплопереноса в ПТП, при необходимости учитывающие их существенные особенности, в частности, тепловые сопротивления и воздушные зазоры между составляющими элементами ПТП, наличие теплоизолирующих слоев и другие.

### 1.6.1 ПТП типа тонкого диска (ПТП Гардона)

В качестве иллюстрации приведем отдельные результаты восстановления теплового потока с помощью ПТП Гардона. Целью начального этапа являлось изучение вопросов качества сходимости алгоритма ФК и точности конечных результатов, в частности, зависимости этих показателей от условий входа в алгоритм ФК величины отличий начальных оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_0$  от его истинных значений  $\mathbf{Q}_0$  и вида ковариационной матрицы  $P_0$ .

**1.6.1.1** При этом для случая ступенчатого изменения теплового потока при постоянной температуре  $t_{em} = 0$  и различных  $R_k$  рассматривался первый участок сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$  с различным количеством  $l$  измерений  $y_k$  перепада температур  $\Delta t_{1-11} = t_{1,k} - t_{11,k}$ . Для всех вариантов задавались следующие условия входа в алгоритм ФК: вектор начального распределения температур задавался точно ( $\mathbf{T}_0 = 0$ ), а начальные условия оценки  $\hat{q}_{a_0} = \hat{q}_{b_0} = 100$  Вт/м<sup>2</sup> — со значительными отличиями от истинных  $q_{a_0} = q_{b_0} = 10^4$  Вт/м<sup>2</sup>. Поэтому диагональные элементы  $p_{11,0}$  и  $p_{22,0}$ , в соответствии с подразделом о ковариационной матрицы  $P_0$  ошибок начальных оценок выбирались равными  $10^{12}$  Вт<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>. По результатам численного моделирования для широкого диапазона изменения величин  $q_0$  была отмечена устойчивая сходимость получаемых оценок  $\hat{q}_{a_l}$  и  $\hat{q}_{b_l}$  к величине  $q_0$ .

В результате исследований установлено существенное влияние на погрешность восстановления  $q(\tau)$  контактного теплового сопротивления между диском и втулкой. Как видно из рисунке 1.11, до значений  $R_k \leq 10^{-3}$  м<sup>2</sup>К/Вт его можно не учитывать, чего нельзя сказать при  $R_k \geq 10^{-2}$  м<sup>2</sup>К/Вт. Так при  $R_k = 10^{-1}$  м<sup>2</sup>·К/Вт погрешность восстановления  $q(\tau)$  составляет более 40 %.

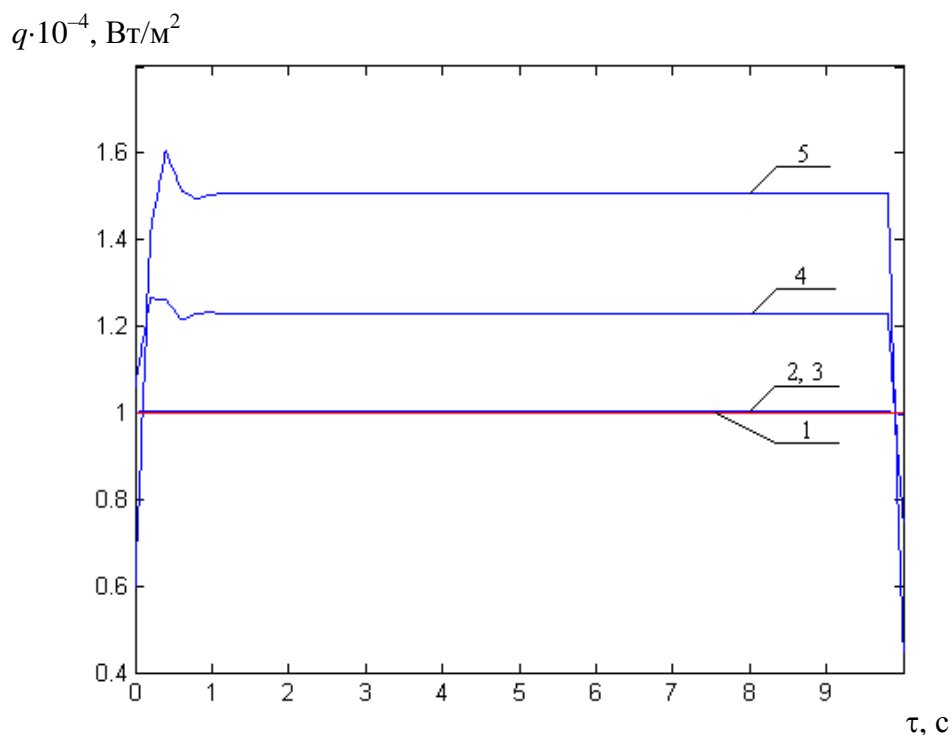


Рисунок 1.11 – Зависимость получаемых оценок теплового потока  $\hat{q}_a = \hat{q}_b$  от величины контактного теплового сопротивления  $R_k$  :

- 1 — истинное значения теплового потока  $q_0 = 1 \cdot 10^4$  Вт/м<sup>2</sup>;
- 2 —  $q_1$  при  $R_k = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>·К/Вт; 3 —  $q_2$  при  $R_k = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>·К/Вт;
- 4 —  $q_3$  при  $R_k = 10^{-2}$  м<sup>2</sup>·К/Вт; 5 —  $q_4$  при  $R_k = 10^{-1}$  м<sup>2</sup>·К/Вт;

Были проведены исследования в части влияния случайных погрешностей (шумов  $\varepsilon_k$ ) в измерениях  $y_k = \Delta t_1 + \varepsilon_k$ . На рисунке 1.12 в качестве иллюстрации приведен фрагмент таких исследований: сходимость оценок  $\hat{q}_{a,k}$  и  $\hat{q}_{b,k}$  при различных уровнях шумов  $\varepsilon_k$ , характеризуемых значениями среднеквадратичных отклонений  $\sigma$ .

Очевидно, что качество сходимости существенно зависит от  $\sigma$ . Так, при  $\sigma = 0$  сходимость с погрешностью меньшей 5 % достигается за 3 шага по  $\hat{q}_a$  и 17 шагов по  $\hat{q}_b$ , а при  $\sigma = 0,1$  °С — за 8 и 20 шагов соответственно. Шум с уровнем  $\sigma = 0,3$  °С приводит к погрешностям оценок в 10–20 %.

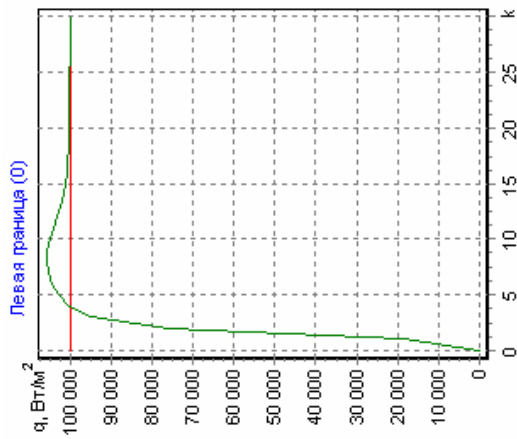
**1.6.1.2** Моделировались различные случаи нестационарной теплотемрии. Задавались и восстанавливались потоки  $q(\tau)$ , меняющиеся по различным законам, в том числе и произвольному. В качестве примера на рисунке 1.13 показан случай гармонического изменения потока  $q(\tau) = 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^4 \sin 2\tau$  при различных уровнях  $\sigma$  в измерениях. На рисунке 1.13,б;в;г приведены истинный вид  $q(\tau)$  (1) и результаты его восстановления (2), а на рисунке 1.13,а — измеряемый перепад температур  $\Delta t_{1-11}$ . При этом величины участков аппроксимации  $q(\tau)$  соответствовали  $l = 30$  измерениям

с дискретностью  $\Delta\tau = 0,01$  с, то есть составляли по  $\tau_l = 0,3$  с. На первом участке задавались значения  $\hat{q}_{a,0}^1 = \hat{q}_{b,0}^1 = 100$  Вт/м<sup>2</sup> с диагональной ковариационной матрицей  $p_{11,0} = p_{22,0} = 1 \cdot 10^{12}$  Вт<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>. Очевидно, что восстановление  $q(\tau)$  при  $\sigma = 0$  происходит практически идеально, при  $\sigma = 0,1$  °С — с несущественными погрешностями, а при  $\sigma = 0,2$  °С погрешности хотя и возрастают, однако находятся в пределах допустимых значений.

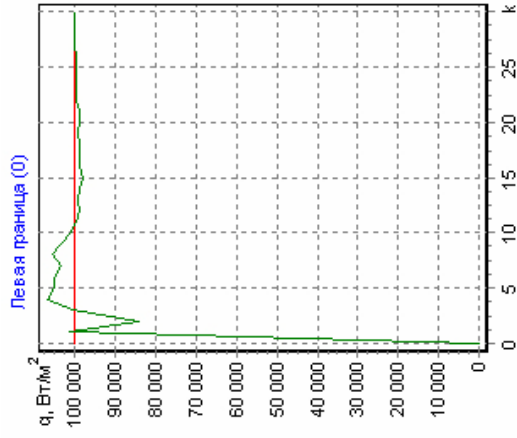
### 1.6.2 ПТП с элементами полупространства

Рассматривались два варианта ПТП, данного типа: полупространство и однородный ПТП на полупространстве с контактным сопротивлением  $R_k$  между ними. ДРМ теплопереноса в этих ПТП и особенности их применения при решениях ПЗТ.

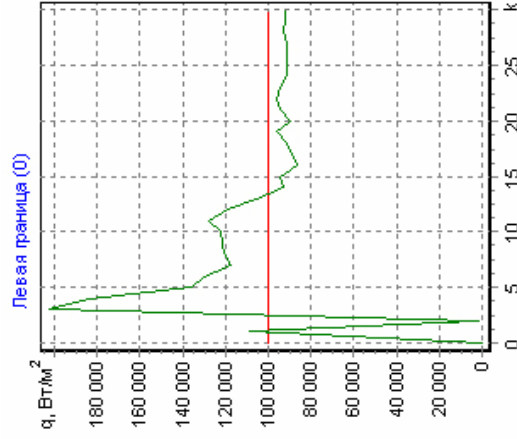
Исследовалась при различных шумах в измерениях температуры  $t_1(\tau)$  сходимостью оценок  $\hat{q}_{a,k}$  и  $\hat{q}_{b,k}$  на различных участках сплайн-аппроксимации; определялись функции чувствительности и диагональные элементы ковариационной матрицы ошибок оценок  $\hat{q}_{a,k}$  и  $\hat{q}_{b,k}$ ; устанавливались погрешности восстановления  $q(\tau)$  при различных законах (периодическом, ступенчатом, треугольном, произвольном).



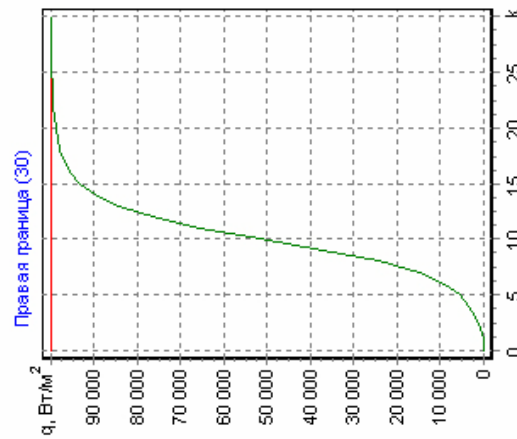
1



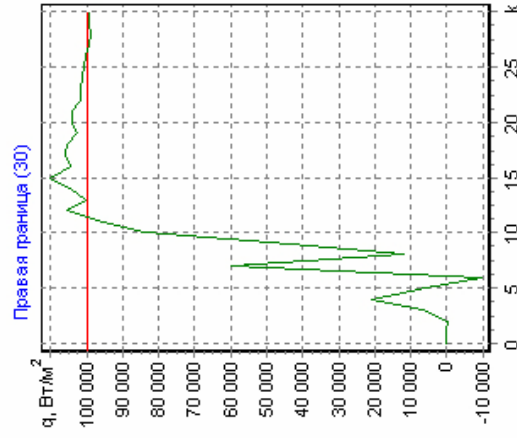
2



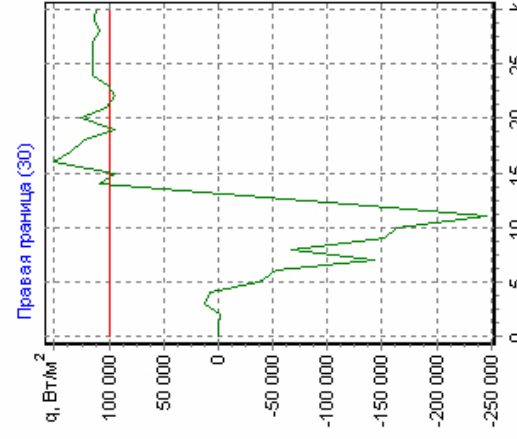
3



4



5



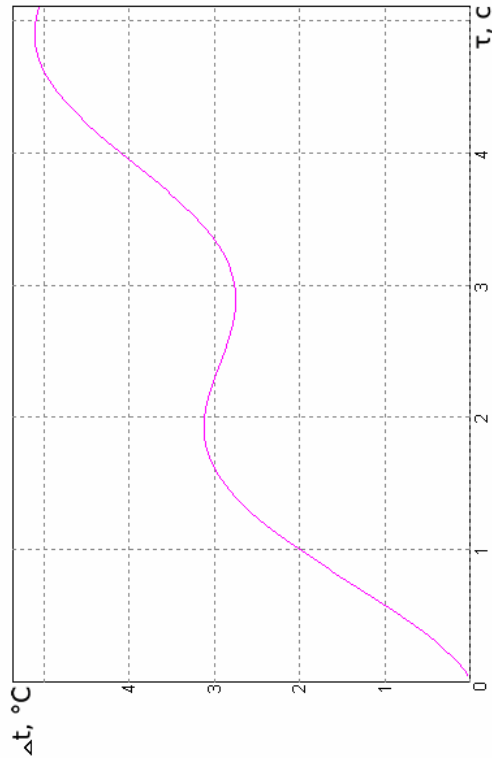
6

$\sigma = 0$

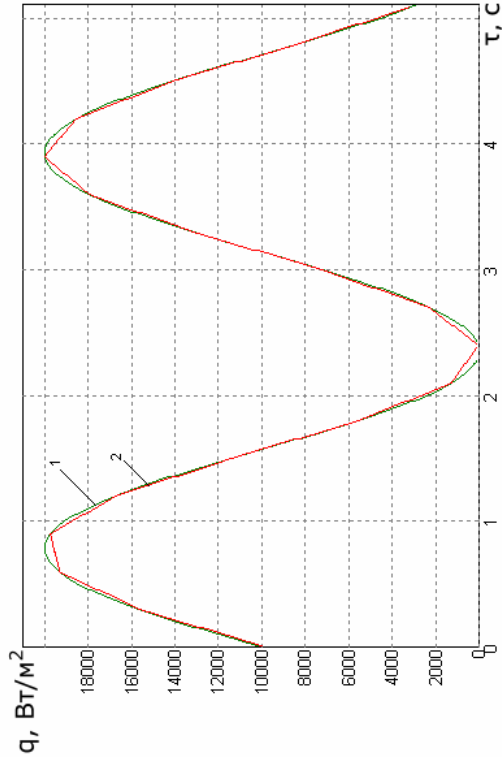
$\sigma = 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$

$\sigma = 0,3 \text{ } ^\circ\text{C}$

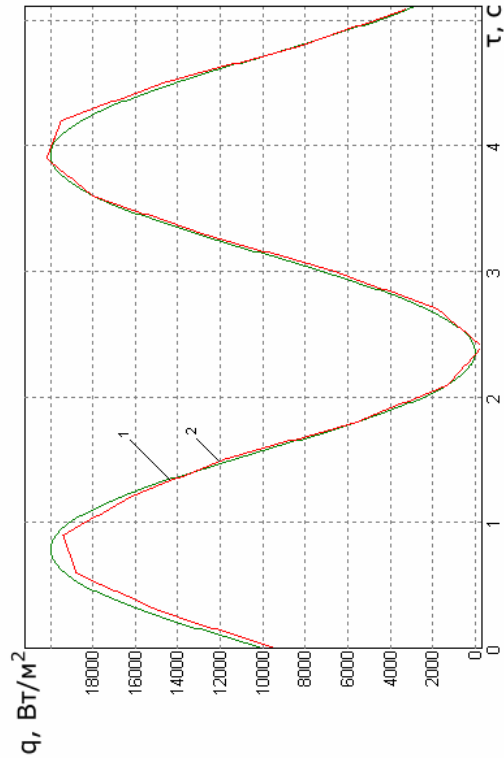
Рисунок 1.12 – Движение оценок параметров  $q_a$  (1, 2, 3 — левая граница),  $q_b$  (4, 5, 6 — правая граница) при различных уровнях шумов  $\sigma$  в измерениях для случая  $q_1=1 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$ ,  $t_{внт}=0$ ,  $R_k=10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}$  и  $\Delta\tau=0.01 \text{ с}$



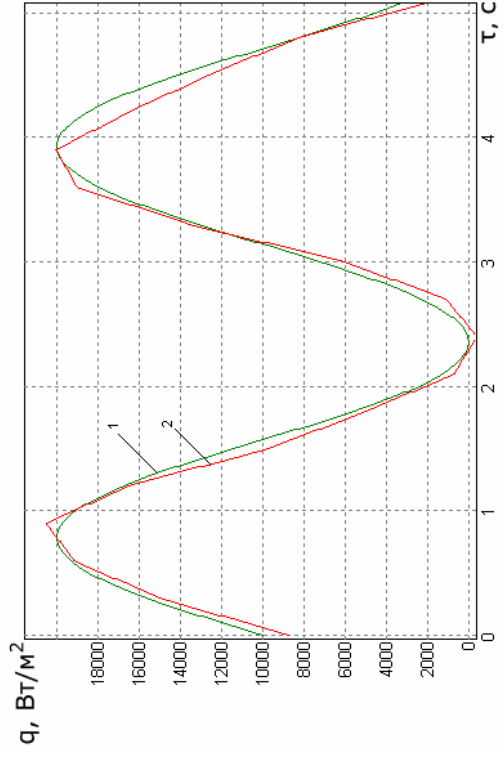
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.13 – ПТП Гардона. Результат восстановления  $q(\tau) = 10^4 + 10^4 \sin(2\tau)$  при различных уровнях шумов  $\sigma$  в измерениях:

б —  $\sigma = 0$ ; в —  $\sigma = 0,1$  °C; г —  $\sigma = 0,2$  °C; а — измеренный перепад температур  $\Delta t_{1-II}$ ; истинные (1) и восстановленные (2) значения  $q_1(\tau)$

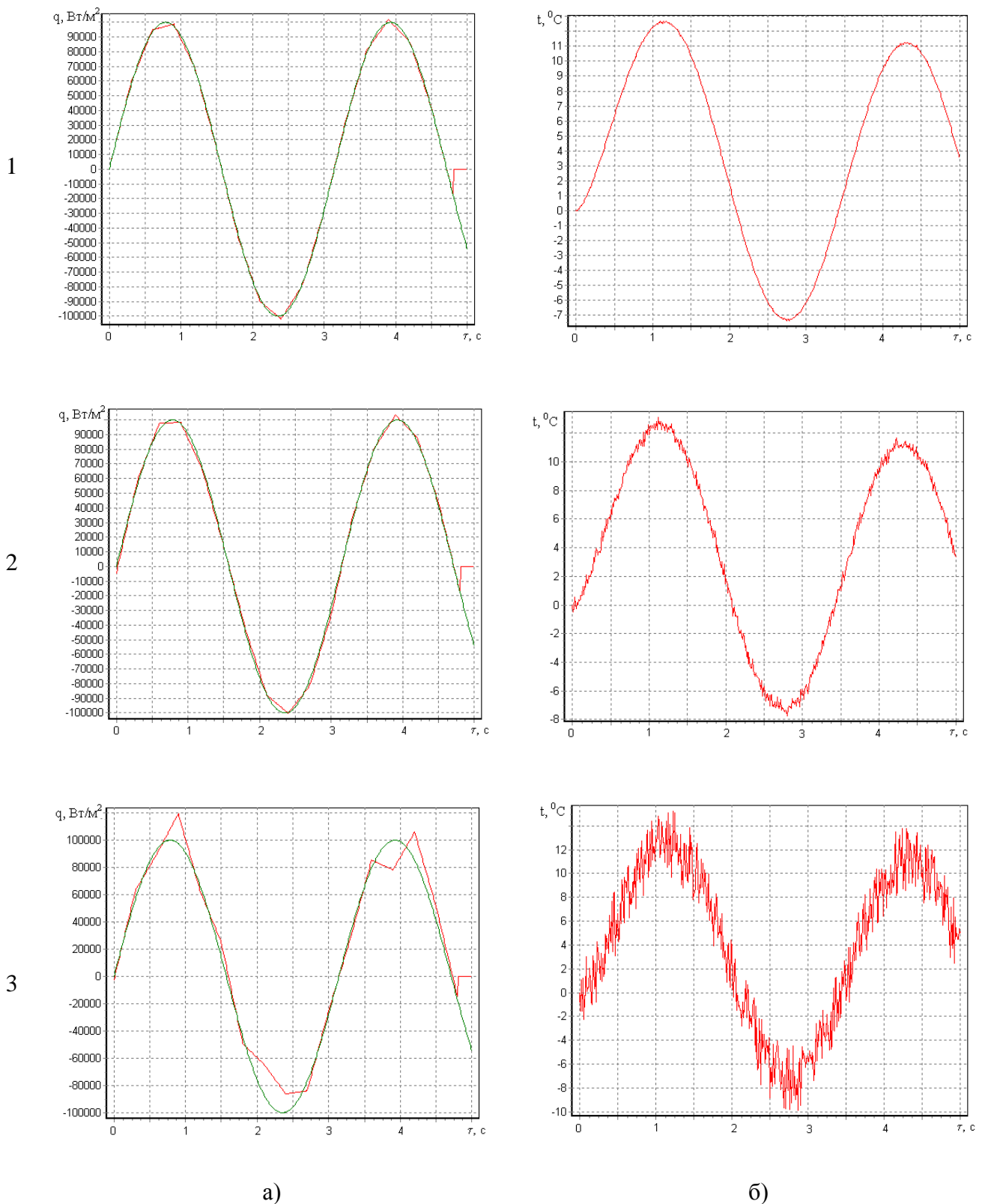


Рисунок 1.14 – Однородный ПТП на полупространстве. Результаты восстановления потока а)  $q(\tau) = 10^5 \sin(2\tau)$  при различных уровнях шумов  $\sigma$  в измерениях температуры б): 1 —  $\sigma = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$ ; 2 —  $\sigma = 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ; 3 —  $\sigma = 1,5 \text{ }^\circ\text{C}$



В качестве примера, для ПТП в виде полупространства, на рисунке 1.14 показаны результаты восстановления  $q(\tau)$ , меняющегося по периодическому закону с представлением реакции (температуры  $t_1(\tau)$ ) на воздействие  $q_1(\tau)$ . При этом показано изменение  $t_1(\tau)$  с учётом шума  $\sigma = (0,2 \div 1,5) \text{ }^\circ\text{C}$ .

Для ПТП в виде однородный ПТП на полупространстве в связи с существенным влиянием соотношения теплопроводностей  $\lambda_1$  пластины и  $\lambda_2$  полупространства на динамику теплопереноса исследование особенностей восстановления  $q(\tau)$  проводилось для двух случаев, а именно при  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  и  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ .

Анализ полученных результатов показал, что для ПТП рассматриваемых типов могут быть успешно использованы предложенные методы, как восстановления  $q(\tau)$ , так и исследования их точности. В целом, подтверждены выводы относительно роли различных факторов, влияющих на рекомендации, которые были получены для однородного градиентного ПТП и ПТП Гардона.

### 1.6.3 Батарейные ПТП

Батарейные ПТП разработки Института технической теплофизики Национальной Академии наук Украины [5], выпускаемые серийно, нашедшие отражение в нормативных материалах России и СНГ, имеющие чрезвычайно обширную библиографию, находят широкое практическое применение в стационарной теплометрии. В то же время информация об их использовании в нестационарной теплометрии безусловно является актуальной проблемой, ограничивается небольшим кругом исследований, в которых описаны некоторые достаточно приближенные методы восстановления  $q(\tau)$  в простейших случаях. Это объясняется, на наш взгляд, сложностью ММТ, разнообразием граничных условий на тыльном торце и недостатком информации о ТФХ материала конструкции, что приводит к значительным погрешностям даже при решении ПЗТ.

В то же время, как показали наши исследования, использование алгоритмов ФК и методов определения ТФХ, при необходимости в процессе теплометрии (раздел 1.5), позволяет получать решение проблемы восстановления  $q(\tau)$ , входящего в батарейный ПТП при практически любых граничных условиях на его тыльном торце.

Для иллюстрации ниже представлены некоторые результаты имитационного моделирования процедур восстановления входящих в батарейные ПТП тепловых потоков  $q(\tau)$  с исследованием предложенной методологии.

Основные исследования были выполнены для батарейного ПТП.

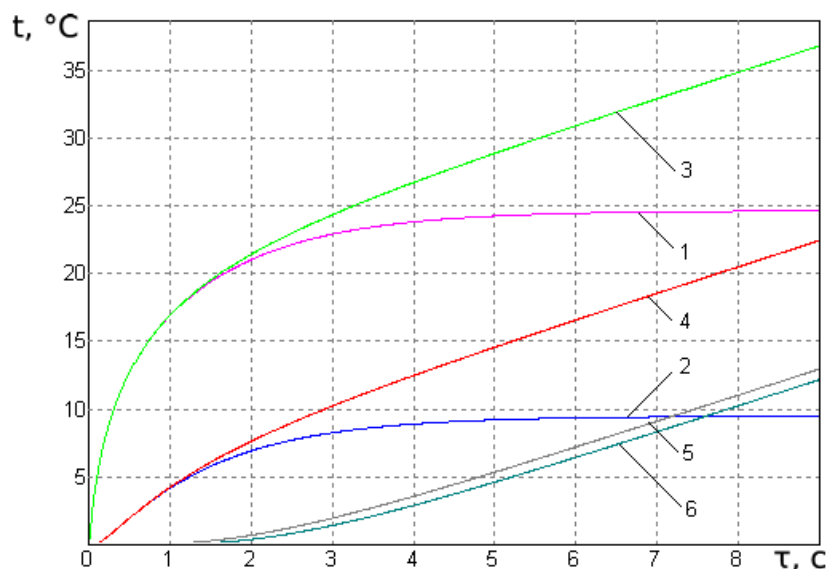


Рисунок 1.15 – Переходные характеристики батарейного ПТП:

1 —  $\Delta t_{1-10}$ ; 2 —  $\Delta t_{3-8}$ ; 3 —  $t_l$ ; 4 —  $t_3$ ; 5 —  $t_8$ ; 6 —  $t_{10}$

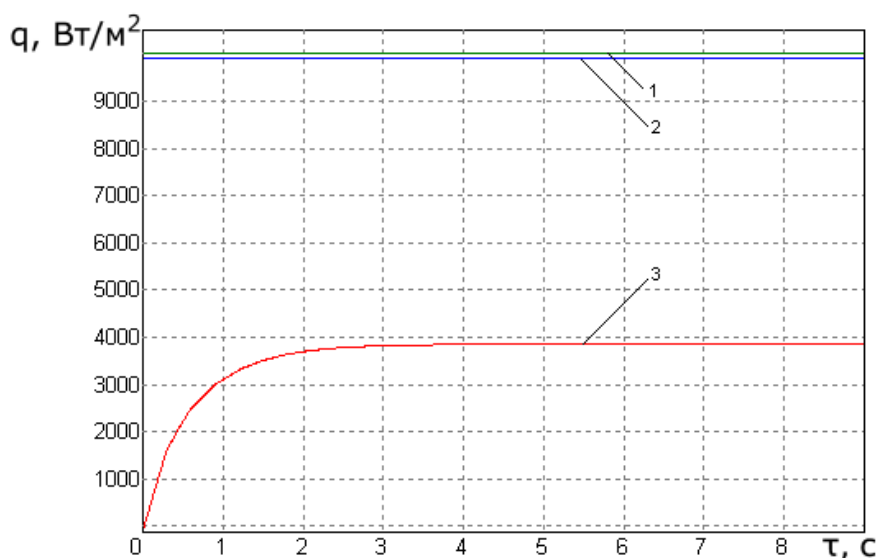


Рисунок 1.16 – Результаты восстановления потока  $q_1(\tau)$  с помощью батарейного ПТП:

1 — заданный поток; 2 — восстановленный поток при измерении  $\Delta t_{3-8}$ ;  
3 — восстановленный поток при измерении  $\Delta t_{1-10}$ ,

Ранее отмечалось, что на динамические характеристики батарейного ПТП существенное влияние оказывают теплоизолирующие слои толщиной  $\delta_1$  и  $\delta_3$  [6] и поэтому измеряемый перепад  $\Delta t_{3-8}$  отличался от кажущегося —  $\Delta t_{1-10}$ . На рисунке 1.15 и 1.16 показаны переходные характеристики и некоторые температуры, а также результаты восстановления потока  $q = \text{const}$  (но

в динамическом режиме). Из рисунка 1.16 видно, что при измерении кажущегося перепада  $\Delta t_{1-10}$  погрешность восстановления потока весьма существенна.

В целом по результатам приведенных нами исследований можно сделать вывод о том, что с помощью предложенных методов моделирования теплопереноса и восстановления  $q(\tau)$  получено решение проблемы использования батарейных ПТП в нестационарной теплотометрии (в пределах принятых допущений и ограничений), а именно:

- с учетом большинства особенностей конструкции и тепловой схемы ПТП, в частности, разнородности их составляющих по расположению, толщинам и ТФХ материалов, наличия тепловых контактных сопротивлений, воздушных прослоек и т. п.;

- для разнообразных граничных условий теплообмена на тыльном торце ПТП, учитывающих реальные условия их применения: теплоизоляцию, термостабилизацию и другие, в том числе и с возможностью их измерения;

- с различной структурой вектора измеряемых температур или их перепадов по толщине ПТП.

Таким образом, в разделе 1.6 приведены доказательства универсальности и перспективности методологии нестационарной прикладной теплотометрии на примере некоторых распространенных ПТП, для которых проблема эффективного восстановления  $q(\tau)$  практически не имела решения. В целом отметим следующее:

1. На основе априорных сведений о характере изменения искомого потока  $q(\tau)$  принята кусочно-линейная аппроксимация его на всем интервале измерений с использованием В-сплайнов первого порядка, которую в ряде работ называют параметризацией обратной задачи теплопроводности (ОЗТ).

2. Для решения граничной ОЗТ по восстановлению плотности входящего нестационарного теплового потока выбрана параметрическая идентификация математической модели теплопереноса в ПТП, которая выполняется путем минимизации функции невязки между вектором измерений и его аналогом, рассчитанным по дифференциально-разностной модели (ДРМ).

3. Для минимизации функции невязки, указанной в п. 2, используется алгоритм цифрового фильтра Калмана (ФК) по искомым параметрам, отличающийся высокой вычислительной эффективностью и изначально предназначенный для работы в измерительно-вычислительных системах реального времени.

4. В связи с рядом особенностей ФК по искомым параметрам, а именно, повышенным объемам вычислений функций чувствительности измерений к искомым параметрам и необходимостью знания начального распределения температуры по ПТП, рассмотрен расширенный ФК. Он основан на введении расширенного вектора состояния, состоящего из вектора состояния и вектора искомым параметров, а так же расширенной ДРМ ПТП.

5. Рассмотрен метод решения комбинированной — одновременно граничной и коэффицентной — обратной задачи теплопроводности для раз-

личных типов ПТП.

6. Результаты расчетов по трём программным комплексам «Heat Stream», «Heat Identification» и «Heat Conduction», позволили сделать вывод об эффективности рассмотренного подхода и приемлемого уровня точности восстановления плотности теплового потока меняющегося по произвольному закону.

## 2 ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МЕТОДОЛОГИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОМЕТРИИ

Рассмотрено структурирование суммарной погрешности нестационарной теплотметрии с акцентом на ее методическую составляющую. Для случая нестационарной теплотметрии рассматривается общий применительно к различным ПТП метод построения **совместных доверительных областей (СДО) и интервалов (СДИ)** результатов восстановления  $q(\tau)$ , получаемых путем параметрической идентификации теплопереноса в ПТП. Метод основан на **обращении матрицы Грама** (информационной матрицы Фишера), составляющими которой являются **функции чувствительности** измеряемых температур в ПТП или их перепадов к искомым параметрам кусочно-линейной аппроксимации  $q(\tau)$ .

Для некоторых распространенных ПТП приводятся результаты исследований особенностей реализации предложенной методологии оценок погрешностей восстановления  $q(\tau)$ .

### 2.1 Исходные положения

#### 2.1.1 Структура суммарной погрешности

В статье [7] рассмотрено состояние проблемы **оценивания суммарной погрешности** результатов прикладной теплотметрии в рамках общепринятой структуры этой погрешности. Констатируется, что в ней превалирует **методическая составляющая**, структура которой приведена на [7]. Для анализа этой составляющей были последовательно рассмотрены известные случаи **прямых измерений** плотности постоянных  $q = \text{const}$  или медленно изменяющихся тепловых потоков и **косвенных измерений**, произвольно изменяющихся во времени  $q(\tau)$  или  $q = \text{const}$  в динамическом режиме. Второй случай, который наиболее востребован на практике, определяет предмет нестационарной теплотметрии.

В обоих случаях присутствует **общая составляющая методической погрешности**, структура которой приведена на [7].

#### 2.1.2 Прямые измерения плотности тепловых потоков

В этом случае, кроме указанных выше общих составляющих методической погрешности, необходимо анализировать уровень **динамических погрешностей статических ПТП**, позволяющий тепломерам оставаться в рамках средств прямых измерений.

#### 2.1.3 Косвенные измерения плотности тепловых потоков $q(\tau)$

В этом случае кроме общих составляющих методической погрешности теплотметрии определяющей является **методическая погрешность восста-**

**новления**  $q(\tau)$ , которая относится к наиболее актуальным и недостаточно изученным.



Рисунок 2.1 – Методические погрешности восстановления  $q(\tau)$  методом параметрической идентификации

При использовании для **восстановления**  $q(\tau)$  **метода параметрической идентификации ПТП** в методической погрешности (рисунок 2.1) можно выделить две составляющие, а именно:

**2.1.3.1 Погрешность аппроксимации искомой функции  $q(\tau)$**  с выделением вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$ . В разделе 1.1.4 приведены кусочно-линейная аппроксимация  $q(\tau)$  и стратегия последовательного получения оптимальных оценок  $(2 \times 1)$ -вектора  $\mathbf{Q} = |q_a \quad q_b|^T$  на каждом  $z$ -м участке сплайн-аппроксимации, имеющей длину  $\Delta$ .

**2.1.3.2 Погрешность оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$ .** В соответствии с рисунком 2.1 на **оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  вектора  $\mathbf{Q}$**  влияют следующие факторы:

1. Структурная и параметрическая неадекватность используемой ДРМ реальным процессам теплопереноса в ПТП.

2. Погрешности решения прямой задачи теплопроводности (ПЗТ) в ПТП.

3. Систематические погрешности в векторе  $\mathbf{Y}_k$  измерения температур или их перепадов в ПТП.

4. Погрешности алгоритма получения оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$ , в основе которых лежит минимизация по  $\mathbf{Q}$  функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$  МНК.

5. Особенности формы (топологии) функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$  в пространстве составляющих  $q_a, q_b$  вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$ .

#### **2.1.4 Состояние проблемы оценивания общих составляющих методической и динамической погрешности прикладной теплотметрии**

Выше были рассмотрены известные методы и подходы к различным аспектам решения проблемы оценивания методических погрешностей нестационарной теплотметрии. Последовательно подытожим результаты этого анализа на основе представленных материалов с целью **выделения основных задач** нестационарной теплотметрии.

**2.1.4.1 Устранение или учет общих составляющих методической погрешности прикладной теплотметрии** представляется чрезвычайно важной и сложной проблемой. Для решения этой проблемы необходимо привлекать классические работы О. А. Геращенко, Н. А. Ярышева, Т. Г. Грищенко и результаты других исследователей.

**2.1.4.2** Проблему оценки динамических погрешностей путем использования расчетных динамических характеристик для всех без исключения известных ПТП допустимо считать решаемой с помощью для различных ПТП методологии решения прямых задач теплопроводности и анализа динамики ПТП в пространстве состояний на основе использования ДРМ теплопереноса [8].

#### **2.1.5 Состояние проблемы оценивания методической погрешности восстановления $q(\tau)$ , выполненного методом параметрической идентификации**

**2.1.5.1** Определение погрешностей аппроксимации искомой функции  $q(\tau)$  должно проводиться при априорном выборе длины участка  $\Delta = l \cdot \Delta\tau$  и количества  $l$  измерений  $Y_k$  на нем ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) на основе имеющейся априорной информации о природе, свойствах и динамике теплогенерирующей среды. Величина  $\Delta$  должна быть оптимальной, исходя из двух условий: минимальной протяженности с позиции лучшей аппроксимации  $q(\tau)$  и достаточной протяженности, для того, чтобы за  $l$  измерений получить оптимальные оценки  $Q_z$ .

**2.1.5.2** Определение погрешностей оценок  $\hat{Q}_l$  с учетом приведенного в разделе 2.1.3.2 набора влияющих факторов является наиболее сложной задачей. По результатам анализа литературных источников можно констатировать следующее:

– по ряду составляющих указанной погрешности, таких как структурная неадекватность модели теплопереноса в ПТП и погрешность алгоритма минимизации по  $\mathbf{Q}$  функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$ , определяемой формулой (1.6), необходимо априорно выполнять численные эксперименты (имитационное моделирование) по анализу указанных составляющих.

**2.1.5.3** Если исходить из положений прикладной теории ОЗТ, факторы из перечня раздела 2.1.3.2 могут приводить к возникновению существенных погрешностей в оценках  $\hat{\mathbf{Q}}_l$ , вплоть до потери устойчивости решения. Поэтому основное внимание в настоящем разделе будет уделено двум факторам: случайным погрешностям (шумам)  $\varepsilon_k$  в измерениях  $\mathbf{Y}_k$  и погрешностям, вызываемым особенностями топологии функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$  в пространстве искомых параметров  $q_a$  и  $q_b$ .

В дальнейшем будем называть эту погрешность **основной методической погрешностью восстановления**  $q(\tau)$  путем параметрической идентификации ММТ в ПТП.

## 2.2 Основная методическая погрешность восстановления $q(\tau)$ методом параметрической идентификации

В качестве метода исследования предлагается использовать приведенный в [9,10] метод построения СДО или СДИ для получаемых оценок  $\hat{q}_{kl}$  составляющих  $q_{a,z}$  и  $q_{b,z}$  вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}_z$  на каждом из  $z$  участков кусочно-линейной В-сплайн-аппроксимации искомой плотности  $q(\tau)$  теплового потока.

### 2.2.1 Постановка задачи

В разделе 1.1 были предложены и исследованы общие для различных ПТП метод и стратегия восстановления  $q(\tau)$  путем параметрической идентификации ДРМ ПТП. Параметризация выполняется путем кусочно-линейной В-сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$ , а в качестве стратегии идентификации выбрано последовательное оценивание  $(2 \times 1)$ -вектора искомых параметров

$$\mathbf{Q}_z = \begin{vmatrix} q_{a,z} & q_{b,z} \end{vmatrix}^T \quad (2.1)$$

по  $l$  значениям  $(m \times 1)$ -вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) на каждом из участков аппроксимации длиной  $\Delta = l \cdot \Delta\tau$ .

Для находжений оптимальных оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_{z,l}$  на  $z$ -м участке используются алгоритмы фильтра Калмана (ФК). Они при практической реализации по сути являются рекуррентными процедурами обобщенного МНК, минимизирующими по вектору искомых параметров  $\mathbf{Q}_z$  функцию невязки которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Phi(\mathbf{Q}_z) = \sum_{k=1}^l \left[ \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\hat{\mathbf{Q}}_{z,k-1}) \right]^T \cdot R^{-1} \cdot \left[ \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\hat{\mathbf{Q}}_{z,k-1}) \right], \quad (2.2)$$

где  $\hat{\mathbf{Y}}_k(\hat{\mathbf{Q}}_{z,k-1})$  — модельный вектор измерений, рассчитываемый по ММТ в



ПТП для значений  $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_{z,k-1}$ . В дальнейшем изложении для упрощения записи формул индекс « $z$ » будет опущен.

### 2.2.2 Оценки МНК и ковариационная матрица их ошибок

Для рассматриваемого случая, когда в соответствии с (2.1) количество искомых параметров на каждом  $z$ -м участке  $r = 2$ , справедливы следующие зависимости для оптимальных оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  и ковариационной  $(2 \times 2)$ -матрицы ее ошибок  $P(\hat{\mathbf{Q}}_l)$  [7]:

$$\hat{\mathbf{Q}}_l = P(\hat{\mathbf{Q}}_l) \cdot \sum_{k=1}^l \left( \frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{\hat{\mathbf{Q}}_l}^T \cdot \mathbf{Y}_k = P(\hat{\mathbf{Q}}_l) \cdot \sum_{k=1}^l H_k^T \cdot \mathbf{Y}, \quad (2.3)$$

$$P(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \left( \sum_{k=1}^l H_k^T R^{-1} H_k \right)^{-1}, \quad (2.4)$$

где  $(m \times 2)$ -матрица функций чувствительности  $H_k$ , которая имеет вид

$$H_k = \left( \frac{\partial \mathbf{Y}_k}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{\hat{\mathbf{Q}}_l} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{1k}}{\partial q_a} & \frac{\partial y_{1k}}{\partial q_b} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{mk}}{\partial q_a} & \frac{\partial y_{mk}}{\partial q_b} \end{vmatrix}_{\hat{\mathbf{Q}}_l} = \begin{vmatrix} U_{11k} & U_{12k} \\ \dots & \dots \\ U_{m1k} & U_{m2k} \end{vmatrix}_{\hat{\mathbf{Q}}_l}. \quad (2.5)$$

Матрицу  $H_k$  составляют функции чувствительности  $U_{ijk}$

$$U_{i1k} = \frac{\partial y_{ik}}{\partial q_a} \Big|_{\hat{\mathbf{Q}}_l}, \quad U_{i2k} = \frac{\partial y_{ik}}{\partial q_b} \Big|_{\hat{\mathbf{Q}}_l}. \quad (2.6)$$

Информация о матрице функций чувствительности  $H_k$ , которая входит в алгоритм ФК по искомым параметрам, имеется также в разделе 1.2.3. Там же приведена формула (1.12), реализующая универсальный численный способ расчета функций чувствительности.

Ковариационная  $(2 \times 2)$ -матрица  $P(\hat{\mathbf{Q}}_l)$  является характеристикой точности оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$ . В рассматриваемом случае она имеет вид

$$P(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Как показано в подразделе 1.2.2.1 ее диагональные элементы  $p_{11}$  и  $p_{22}$  являются дисперсиями оценок  $\hat{q}_{a,l}$  и  $\hat{q}_{b,l}$  соответственно, а элементы  $p_{12} = p_{21}$  характеризуют взаимную корреляцию этих оценок.

При выполнении допущений в части характеристик случайных погрешностей измерений температур в ПТП их ковариационная матрица  $R$

имеет вид. Тогда формула (2.4) в соответствии с выражением (2.5) для матрицы  $H_k$  функции чувствительности в рассматриваемом случае преобразуется к виду

$$P(\hat{Q}_l) = \sigma^2 A_l^{-1}, \quad (2.8)$$

$$\text{где } A_l = \sum_{k=1}^l H_k^T \cdot H_k = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m U_{m1k}^2 & \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m U_{m1k} \cdot U_{m2k} \\ \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m U_{m2k} \cdot U_{m1k} & \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m U_{m2k}^2 \end{vmatrix} \quad \bar{Q} = \hat{Q}_l \quad (2.9)$$

— матрица Грама функций чувствительности ПТП.

В формуле (2.8) разделены влияния уровня  $\sigma^2$  шума в измерениях и других значимых особенностей (факторов) нестационарной теплометрии, которые отражены в обращенной матрице Грама  $A_l^{-1}$  через матрицу функций чувствительности  $H_k$ . Этот результат имеет принципиальное положительное значение для излагаемого метода.

Введем понятие **характеристической ковариационной матрицы**  $\bar{P}_l$ , которая является обращенной матрицей Грама и имеет вид

$$\bar{P}_l = A_l^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Тогда выражение (2.8) для  $P(\hat{Q}_l)$  примет вид

$$P(\hat{Q}_l) = \sigma^2 \cdot A_l^{-1} = \sigma^2 \cdot \bar{P}_l. \quad (2.11,а)$$

Из (2.9) и (2.11,а) следует соотношение

$$P(\hat{Q}_l)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \bar{P}_l^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} A_l, \quad (2.11)$$

которое будет использовано в дальнейшем.

**2.2.2.1** В случае зависимости ТФХ материала или (и) нелинейных граничных условий теплообмена ПТП теплоперенос в нем становится **нелинейным**. Следовательно, функция невязки (2.2) и сам МНК также становится **нелинейным**.

В этом случае будем стратегию оценивания рассматриваемых погрешностей, которая заключается в следующем.

1. Предполагается, что методами нелинейного программирования, к которым относится и алгоритм нелинейного ФК, могут быть получены квазиоптимальные оценки  $\hat{Q}_l$  близкие их истинным (оптимальным) значениям.

2. Справедливость этого предположения должна быть доказана путем проведения имитационного моделирования, учитывающего особенности ПТП, его ДРМ, используемого алгоритма и условий входа в него.

3. В случае  $\hat{Q}_l$  близких к истинным, функция невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$  может быть линеаризована в области полученных оценок  $\hat{Q}_l$  (п. 1). Тогда нелинейный случай в части оценивания погрешностей приводится к линейному, то есть приведенные выше формулы (2.4)–(2.11) остаются в силе.

**2.2.2.2** Таким образом, в соответствии с изложенным выше и формулой (2.11,а) удается разделить влияние уровня случайных погрешностей в исходных измерениях ( $\sigma^2$ ) и значений элементов характеристической ковариационной матрицы  $\bar{P}_l$ . Она через матрицу функций чувствительности  $H_k$  количественно отражает влияние всех значимых факторов процесса нестационарной теплотерии.

В дальнейшем к **значимым факторам** будем относить:

1. Особенности конструкции, тепловой схемы и ТФХ материалов ПТП.
2. Структуру вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$ : вид, количество и топология размещения в ПТП датчиков для измерения температуры или ее перепадов.
3. Особенности нестационарных температурных процессов в ПТП, включая начальное распределение температур  $\mathbf{T}_0$ , которые определяются видом восстанавливаемого  $q(\tau)$ .
4. Количество измерений  $l$  вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  на этом участке  $z$  наблюдаемого переходного процесса и ( $k = 1, 2, \dots, l$ ).

В свою очередь, дисперсия  $\sigma^2$  случайных погрешностей в измерениях температуры ПТП, в предположении нормальности их функции распределения, учитывает особенности и качество как первичных термометров (чувствительных элементов ПТП), так и регистрирующей аппаратуры.

Как будет показано ниже, матрица Грама позволяет также получать более полные характеристики точности — СДО или СДИ оценок параметров  $\hat{q}_{a,l}$  и  $\hat{q}_{b,l}$ , в которые с заданной вероятностью  $\nu$  попадают эти оценки, получаемые в результате решения задачи параметрической идентификации ПТП.

## **2.3 Совместные доверительные области (СДО) и интервалы (СДИ) оптимальных оценок составляющих вектора искомых параметров $\mathbf{Q}$**

Форма СДО или величина СДИ, также как и ковариационная матрица  $P(\hat{\mathbf{Q}}_k)$ , зависят от значимых факторов процесса теплотерии.

Рассмотрим методику построения СДО и СДИ для некоторых практически важных случаев. При этом будем использовать методики, приведенные в, в монографии [3].

### **2.3.1 СДО оценок составляющих $\hat{q}_{a,l}$ и $\hat{q}_{b,l}$ вектора искомых параметров**

Рассмотрим случай, когда вектор искомых параметров  $\mathbf{Q}$  включает две

составляющие  $\hat{q}_{a,l}$  и  $\hat{q}_{b,l}$  на каждом из  $z$  участков сплайн-аппроксимации и имеется  $k = 1, 2, \dots, l$  моментов времени  $\tau_k = k \cdot \Delta\tau$  получения значений вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$ , для которого, в свою очередь, возможны два варианта измерения температуры или ее перепадов в ПТП: скалярный  $m = 1$  (в одной точке ПТП) и векторный  $m = 2, 3, \dots$  (в двух и более точках ПТП).

**2.3.1.1** Для этого случая уравнение для СДО полученных оценок  $\hat{q}_{a,l}$  и  $\hat{q}_{b,l}$  на каждом  $z$ -м участке имеет вид:

$$(\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_l)^T \cdot A_l \cdot (\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}}_l) = B^*, \quad (2.12)$$

$$\text{где } B^* = \begin{cases} 2S_0^2 \cdot F_v(2, l-2) - \text{ для } m = 1; \\ 2S_l^2 \cdot F_v(2, l-2) - \text{ для } m \geq 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

При этом в приведенных в разделе 1.6.5 формулах для  $S_0^2$  и  $S_N^2$  вместо  $r$  и  $N$  необходимо подставить 2 и  $l$  соответственно, а величину  $\Phi_{\min}$  вычислять по формуле

$$\Phi_{\min}(\hat{\mathbf{Q}}_l) = \sigma^2 \sum_{k=1}^l \left[ \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\hat{\mathbf{Q}}_{k-1}) \right]^T \left[ \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(\hat{\mathbf{Q}}_{k-1}) \right].$$

Матрица Грамма  $A_l$  определяется по формуле (2.9), в которой функции чувствительности  $U_{ijk}$  рассчитываются по формулам (2.6) при  $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}_k$ .

**2.3.1.2** СДО, которые в рассматриваемом случае имеют форму эллипсов в пространстве двух искомых параметров  $q_a$  и  $q_b$ , описываются уравнением (2.12) и могут быть построены методом канонического анализа. Выполним такое построение для некоторого  $z$ -го участка сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$ .

Пусть определены оценки  $\hat{\mathbf{Q}}_l = \begin{vmatrix} \hat{q}_{a,l} & \hat{q}_{b,l} \end{vmatrix}^T$  вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$  и на их основании по формуле (2.9) рассчитана матрица Грама  $A_l$ , которая имеет виде

$$A_l = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.15)$$

а также значения параметра  $B^*$  для соответствующих  $m$  по формуле (2.13).

Тогда, подставив в (2.12) найденные величины  $A_l$  и  $B^*$  и, проведя соответствующие преобразования, получим следующее уравнение кривой второго порядка (эллипса) в координатах  $\Delta q_a = q_a - \hat{q}_{a,l}$  и  $\Delta q_b = q_b - \hat{q}_{b,l}$ :

$$a_{11} \cdot (\Delta q_a)^2 + 2a_{12} (\Delta q_a) \cdot (\Delta q_b) + a_{22} \cdot (\Delta q_b)^2 = B^*. \quad (2.16)$$

На рисунке 2.2 приведен общий вид СДО в указанных координатах.

Для рассмотрения особенностей СДО (2.16) можно привлечь хорошо известные методы канонического анализа функций. Однако более удобным

является способ построения эллипса по точкам, заключающийся в следующем: задаваясь значениями одной координаты, например,  $(\Delta q_b)^*$ , можно получить из (2.16) квадратные уравнения относительно двух значений второй координаты  $(\Delta q_a)_1^*$  и  $(\Delta q_a)_2^*$ , которые в системе координат  $(\Delta q_a)$  и  $(\Delta q_b)$  дают по два значения на кривой эллипса (рисунок 2.2).

Приведем вид решения этих уравнений, если задаваться величиной  $(\Delta q_b)$ , то

$$(\Delta q_a)_{1,2} = \frac{-a_{12}(\Delta q_b) \pm \sqrt{a_{12}^2(\Delta q_b)^2 - a_{11}[a_{22}(\Delta q_b)^2 - B^*]}}{a_{11}}. \quad (2.17a)$$

Если задаваться  $(\Delta q_b)$ , то

$$(\Delta q_b)_{1,2} = \frac{-a_{12}(\Delta q_a) \pm \sqrt{a_{12}^2(\Delta q_a)^2 - a_{22}[a_{11}(\Delta q_a)^2 - B^*]}}{a_{22}}. \quad (2.17b)$$

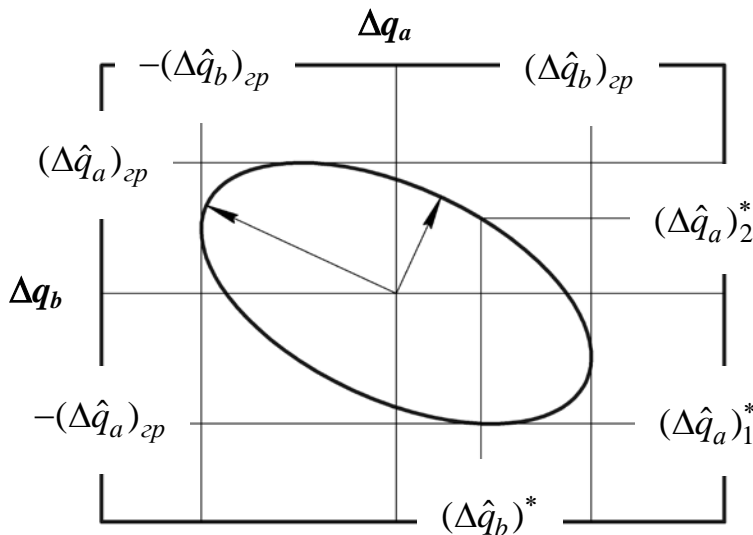


Рисунок 2.2 – Доверительный эллипс и границы доверительных интервалов в пространстве двух идентифицируемых параметров  $q_a$  и  $q_b$

более сложная, чем изложенная выше, а сами СДО не являются наглядными.

Поэтому при  $r > 2$ , по нашему мнению, необходимо обращаться к построению упрощенных характеристик — совместных доверительных интервалов (СДИ) для оценок вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_l$ , в которые попадают его составляющие с заданной вероятностью  $v$ .

Таким образом, для случая размерности  $r = 2$  вектора  $\mathbf{Q}$  и любой размерности  $m$  вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  и могут быть достаточно просто построены двухмерные СДО оценок  $\hat{q}_{a,l}$  и  $\hat{q}_{b,l}$ , имеющие форму эллипсов в пространстве  $q_a$  и  $q_b$ .

Для случая  $r > 2$  построение трех- и более мерных СДО возможно выполнить на основе канонического анализа эллипсоида (2.13). Эта методика, во-первых, существенно

### 2.3.2 СДИ оценок составляющих $\hat{q}_{a,l}$ и $\hat{q}_{b,l}$ вектора искомых параметров

Известны два подхода к построению СДИ:

**2.3.2.1 Первый из них**, в котором используется матрица Грама, состоит в нахождении **проекций СДО на оси координат** двухмерного пространства составляющих  $q_a$  и  $q_b$  вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}$ .

В качестве иллюстрации можно привести пример получения из формулы (2.17) величин проекций эллипса на оси  $(\Delta q_a)$  и  $(\Delta q_b)$ , которые являются границами СДИ по каждой из искомых оценок  $\hat{q}_{a,l}$  и  $\hat{q}_{b,l}$  (рисунок 2.2). Эти проекции получаются, исходя из следующих условий существования одинаковых корней уравнения (2.16), сводящихся к равенству нулю подкоренных выражений в формуле (2.17)

$$a_{12}^2 \cdot (\Delta q_a)_{ep}^2 - a_{22} \cdot [a_{11} \cdot (\Delta q_a)_{ep}^2 - B^*] = 0,$$

$$a_{12}^2 \cdot (\Delta q_b)_{ep}^2 - a_{11} \cdot [a_{22} \cdot (\Delta q_b)_{ep}^2 - B^*] = 0.$$

Отсюда следуют выражения для границ доверительных интервалов

$$(\Delta q_a)_{ep} = \pm \sqrt{\frac{-a_{22} \cdot B^*}{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}} = \pm \sqrt{\frac{a_{22} \cdot B^*}{\det A}}, \quad (2.18)$$

$$(\Delta q_b)_{ep} = \pm \sqrt{\frac{-a_{11} \cdot B^*}{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}} = \pm \sqrt{\frac{a_{11} \cdot B^*}{\det A}}. \quad (2.19)$$

Их расположение показано на рисунке 2.2.

**2.3.2.2 В основу второго подхода** положено использование формулы (1.17) из раздела 1.6.5.4, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$(\Delta q_a)_{ep} = \pm \sqrt{a_{11}^* \cdot B^*}, \quad (2.20)$$

$$(\Delta q_b)_{ep} = \pm \sqrt{a_{22}^* \cdot B^*}, \quad (2.21)$$

где  $a_{11}^*$  и  $a_{22}^*$  — диагональные элементы обращенной матрицы Грама, которые в соответствии с формулой (2.10) являются также диагональными элементами характеристической ковариационной матрицы  $\bar{P}_l$ .

В связи с существенно более простой методикой построения СДИ они рекомендуются для практического использования. При этом могут возникнуть вычислительные проблемы с обращением матрицы Грама, элементы которой могут значительно отличаться числовыми порядками, а матрица из-за этого быть недостаточно обусловленной. Известны методы повышения точности обращения подобных матриц, наиболее простым из которых является их масштабирование.

## 2.4 СДО и СДИ результатов параметрической идентификации в задаче ее планирования (организации)

### 2.4.1 Постановка задачи

Выше был представлен метод апостериорных (после проведения эксперимента) исследований погрешностей полученных оценок  $\hat{Q}_l$ . Учитывая, что получаемые СДО и СДИ зависят от всех значимых факторов организации и проведения теплотрии, этот метод может быть приспособлен для априорных исследований влияния указанных факторов на СДО и СДИ, т. е. фактически, для **оптимального**, или, по крайней мере, **рационального планирования (организации) нестационарной теплотрии**.

Эти зависимости осуществляются через функции чувствительности  $U_{jrk}$ . Критерием оптимальности планирования является условие получения оптимальных в смысле минимума среднеквадратичной функции невязки оценок идентифицируемых параметров на каждом  $z$ -м участке сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$ , обладающих свойствами несмещенности, достоверности и состоятельности или близкими к ним.

Выбранный метод оптимального планирования основан на построении СДО или СДИ, в которые при заданной доверительной вероятности  $v$  могут попасть оценки  $\hat{Q}_l$ . Тогда выражение для СДО имеет вид:

$$(\hat{Q} - Q_0)^T P^{-1}(Q_0) \cdot (\hat{Q} - Q_0) = \chi_v^2(r), \quad (2.22)$$

где  $\chi^2(r)$  — квантиль  $\chi^2$ -распределения для  $r$  параметров (в рассматриваемом случае  $r = 2$ );  $Q_0$  — задаваемые априорно «истинные» значения вектора параметров.

В соответствии с формулой (2.11) уравнение (2.22) может быть преобразовано к виду

$$(\hat{Q} - Q_0)^T A_l (\hat{Q} - Q_0) = \sigma^2 \chi_v^2(r). \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) отличается от (2.12) значениями правых частей. Очевидно, что с учетом этих отличий для построения СДО и СДИ при оптимальном планировании могут быть использованы все результаты раздела 2.3. При этом эллипс (2.23) отвечает случаям как единичного, так и векторного измерения температур ПТП.

В формуле (2.23) вместо выборочных дисперсий  $S_0^2$  и  $S_l^2$ , которые априори неизвестны, обычно используется дисперсия  $\sigma^2$ , соответствующая паспортным или экспериментальным данным средств измерения температуры ПТП.

Для построения СДО можно воспользоваться формулами (2.17)–(2.19), подставляя в них вместо  $B^*$  величину  $\sigma^2 \chi_v^2(2)$ , а для расчета СДИ —

следующими формулами, аналогичными (2.20) и (2.21):

$$(\Delta q_a)_{zp} = \pm \sqrt{a_{11}^* \cdot \sigma^2 \chi_v^2(2)}, \quad (2.24)$$

$$(\Delta q_b)_{zp} = \pm \sqrt{a_{22}^* \cdot \sigma^2 \chi_v^2(2)}. \quad (2.25)$$

Такая постановка отличается от подхода к оптимальному планированию тепловых экспериментов, который используется научной школой акад. О. М. Алифанова применительно к ОЗТ [10]. Этот подход заключается в применении различных критериев оптимальности к информационной матрице Фишера (она же матрица Грама), которая зависит от факторов проведения экспериментов, результаты которых будут основой решения ОЗТ. Это отвечает специфике рассматриваемых ими задач — организации комплексных экспериментальных исследований по натурной или стендовой отработке теплового состояния сложных объектов ракетно-космической отрасли. В то же время для тепломеров как средства измерений СДО или СДИ являются более органическими с позиций законодательной метрологии характеристиками точности конечных результатов. В частности, в работах [11,12] априорные исследования СДО и СДИ предлагалось положить в основу метрологического обеспечения методов восстановления  $q(\tau)$ , так как они являются разновидностью, причем одной из наиболее сложных, косвенных измерений.

#### 2.4.2 Порядок планирования параметрической идентификации $q(\tau)$

В соответствии с изложенным в разделе 2.1, использование СДИ в качестве целевых функций, минимизируемых по параметрам различных факторов, должно являться заключительным этапом оптимального планирования конкретной нестационарной теплотметрии.

Предварительно должны быть выполнены следующие этапы ее планирования:

1. Исходя из априорной информации об объекте и условиях проведения теплотметрических исследований:

1.1. Выбрать тип и параметры ПТП.

1.2. Путем сравнительного анализа динамических характеристик ПТП и характера теплообмена объекта со средой убедиться в необходимости решения граничной ОЗТ по восстановлению  $q(\tau)$ .

1.3. На основе априорных представлений о  $q(\tau)$  обосновать принципиальную возможность его кусочно-линейной сплайн-аппроксимации и выбрать вектор искомых параметров  $\mathbf{Q}$ .

2. Путем проведения имитационного моделирования с использованием ДРМ ПТП, априорных сведений о  $q(\tau)$  и выбранного алгоритма параметрической идентификации убедиться в возможности получения оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$ , близких априорно задаваемым «истинным» значениям  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ .

После выполнения этих этапов можно приступить к оптимальному



планированию (организации) параметрической идентификации, а именно:

3. Задаться требуемыми характеристиками точности идентификации — значением СДИ для каждой составляющей  $\mathbf{Q}$  или формы их СДО (в случае  $r \leq 2$ ).

4. Задаться априорными эталонными значениями  $\mathbf{Q}_0$  вектора идентифицируемых параметров  $\mathbf{Q}$ . Положительным фактором при этом, как указано в ряде исследований [10, 13, 14], является то, что априорная неопределенность в  $\mathbf{Q}_0$  несущественно сказывается на результатах планирования в части принципиальных, качественных выводов.

5. Задаться комбинацией перечисленных в разделе 2.2.2 значимых факторов эксперимента и их числовыми выражениями. По ДРМ ПТП с учетом указанных факторов и величины  $\mathbf{Q}_0$  вычислить функции чувствительности  $U_{jik}$  ( $j=1, \dots, m$ ;  $i=1, \dots, r$   $k=1, \dots, N$ ), а далее по формуле (2.5) — матрицу чувствительности  $H_k$ . В указанных формулах вместо  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  подставлять  $\hat{\mathbf{Q}}_0$ .

6. По формуле (2.9) на основе полученных матриц  $H_k$  и количества измерений  $l$  на рассматриваемом  $z$ -м участке рассмотреть матрицу Грама.

7. Для случая  $r \leq 2$  можно ограничиться полученной матрицей Грама и на ее основе построить СДО и СДИ для оценок  $\hat{\mathbf{Q}}$ , аналогичные описываемым формулами (2.17)–(2.19).

8. Для случая  $r \geq 2$ , как это рекомендовано в разделе 2.3.2, в качестве характеристик априорной точности оценок  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  следует использовать СДИ.

Для их определения необходимо:

1) выполнить обращение построенной для  $\mathbf{Q}_0$  матрицы Грама (п.6);  
2) задаться доверительной вероятностью  $v$  и определить значение правой части уравнения (2.23);

3) по формулам (2.24) и (2.25) определить СДИ для составляющих искомого вектора параметров  $\mathbf{Q}$ , в рассматриваемом случае  $q_a$  и  $q_b$ .

9. Путем сравнения полученных значений СДИ для всех составляющих  $\mathbf{Q}$  (при  $r \leq 2$  возможно также и СДО) с заданными (п.3) произвести вывод о правильности выбора значимых факторов эксперимента. При отрицательном результате процедуру планирования следует повторить до удовлетворения заданных требований.

## **2.5 Применение методологии оценивания погрешностей результатов параметрической идентификации $q(\tau)$ и ее планирование (организация)**

### **2.5.1 Постановка задач**

**2.5.1.1** В подразделах 2.2–2.4 предложена общая для различных ПТП методология оценивания погрешностей результатов восстановления

$q(\tau)$ , выполненного путем параметрической идентификации теплопереноса в ПТП, которая заключается в получении оптимальных оценок параметров кусочно-линейной В-сплайн аппроксимации  $q(\tau)$  на каждом из  $z$  ее участков. Эти параметры объединены в вектор искомых параметров  $\mathbf{Q} = |q_a \quad q_b|^\Gamma$ , который при необходимости уточнения значений коэффициентов теплопроводности  $\lambda$  или других теплофизических характеристик материала ПТП принимает вид  $\mathbf{Q} = |q_a \quad q_b \quad \lambda|^\Gamma$ .

Названная методология используется либо апостериорно — в процессе или после проведения теплотметрии, либо априорно — при постановках ОЗТ по восстановлению  $q(\tau)$  в классе выбранной разновидности ПТП и особенностей теплообмена объекта теплотметрии с окружающей средой.

При постановке задач настоящего подраздела необходимо учитывать следующие противоречивые обстоятельства:

1) большое разнообразие как разновидностей ПТП, так и, особенно, условий проведения нестационарной теплотметрии;

2) методология оценивания погрешностей результатов восстановления  $q(\tau)$  является лишь решением одной из основных задач.

Поэтому не представляется возможным в ее рамках выполнить углубленный детальный анализ значительного количества типовых случаев нестационарной теплотметрии, а приходится ограничиться отдельными случаями. При этом, по-нашему мнению, достаточно полное представление может быть получено при рассмотрении вопросов постановки различных ОЗТ и оптимальной организации их решения, изложенных в разделе 2.4.

**2.5.1.2** Рассмотрим с указанных позиций некоторые типовые ОЗТ, в которых используются ряд распространенных ПТП. Целью рассмотрения является анализ влияния различных факторов как теплоизмерительных схем ПТП, так и процесса проведения теплотметрии.

Общим элементом этого рассмотрения является построение СДО или СДИ, в которые с заданной вероятностью попадают оценки  $\hat{q}_{a,l}$ ,  $\hat{q}_{b,l}$ ,  $\hat{\lambda}_l, \dots$  на каждом из  $z$  участков сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$ , которые включают по  $l$  моментов времени измерения вектора  $\mathbf{Y}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ).

**В основе построения как СДО, так и СДИ лежит вычисление матрицы Грама (2.9), составляющими которой являются функции чувствительности измерений к искомым параметрам. Как указано в п. 2 раздела 2.4.2, матрица Грама рассчитывается для априорно задаваемых выбранных значений (истинных, эталонных и др.) составляющих искомого вектора параметров  $\mathbf{Q}_0$ .**

**Построение СДО** рекомендуется выполнять по формулам (2.17), в которые величину  $B^*$ , определяемую формулой (2.13), необходимо подставлять равной  $B^* = \sigma^2 \chi_v^2(2)$ , что вытекает из уравнения (2.23) для СДО.

Для получения более доступных и простых характеристик — СДИ оценок  $\hat{q}_{a,l}$ ,  $\hat{q}_{b,l}$ ,  $\hat{\lambda}_l, \dots$  будем использовать два способа: либо изложенный в разделе 2.3.2.1 на базе матрицы Грама  $A_l$  по формулам, аналогичным (2.15) с указанной выше подстановкой  $B^*$ , либо по формулам (2.24) и (2.25) на базе диагональных элементов  $a_{ii}$  **обращенной матрицы Грама**  $A_l^{-1}$  (формула (2.10)). Значения СДИ могут быть получены в размерном виде  $\pm\Delta q_a$  и  $\pm\Delta q_b$  или в относительных значениях  $\pm\delta q_a$  или  $\pm\delta q_b$  [%]. При этом в них в качестве множителя имеет место дисперсия  $\sigma^2$  случайных погрешностей  $\varepsilon_k$  в измерениях.

Ниже приведем некоторые результаты указанных исследований и выводы по ним.

### 2.5.2 Однородный градиентный ПТП, теплоизолированный с тыльной стороны ( $q_2 = 0$ )

**2.5.2.1** Для случая  $h = 4 \cdot 10^{-3}$  м,  $n = 11$ ,  $\lambda = 18$  Вт/(м·К),  $a = 4,0 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\Delta\tau = 0,02$  с,  $T_0 = 0$ ,  $Q_0 = |q_{a0} \quad q_{b0}|^T = |2 \cdot 10^5 \quad 6 \cdot 10^5|^T$  Вт/м<sup>2</sup>, при измерении температуры  $t_1$  проведено исследование влияния количества измерений  $l$  на участке сплайн-аппроксимации.

Таблица 2.1

$k$	1	2	3	4	5
$t_{1k}, \text{ }^\circ\text{C}$	3,28	6,28	9,50	12,98	16,73
$U_{qa,k} \cdot 10^6, (\text{K} \cdot \text{m}^2)/\text{Вт}$	16,38	21,63	22,78	20,59	18,72
$U_{qb,k} \cdot 10^6, (\text{K} \cdot \text{m}^2)/\text{Вт}$	0	3,21	8,24	14,44	21,64

В таблице 2.1 приведены значения измеряемой температуры  $t_{1k}$  и функции чувствительности  $U_{qa,k}$  и  $U_{qb,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ), а на рисунке 2.3 — вид функций чувствительности.

Для случаев  $l = 5$  и  $l = 3$  матрицы Грама  $A_l$  имеют вид

$$A_5 = \begin{vmatrix} 2,03 \cdot 10^{-9} & 9,59 \cdot 10^{-10} \\ 9,59 \cdot 10^{-10} & 7,55 \cdot 10^{-10} \end{vmatrix};$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 9,19 \cdot 10^{-10} & 3,09 \cdot 10^{-10} \\ 3,09 \cdot 10^{-10} & 2,08 \cdot 10^{-10} \end{vmatrix}.$$

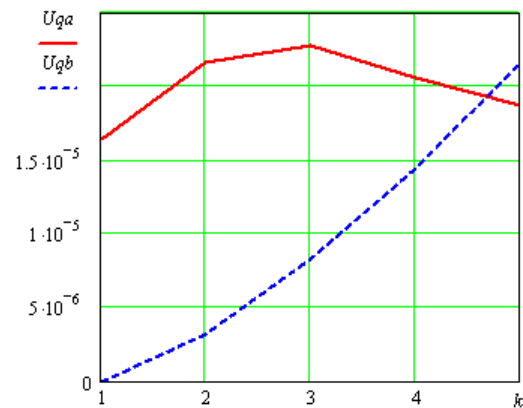


Рисунок 2.3 – Значения функции чувствительности однородного ПТП

На базе матриц Грама  $A_5$  и  $A_3$  по формулам (2.18) и (2.19) для  $V^* = \sigma^2 \chi_{0,95}^2(2) = 5,99$  получены СДИ в абсолютных и относительных выражениях. Последние определялись по формулам

$$\delta q_a = \frac{\Delta q_a}{q_{a0}}, \quad \delta q_b = \frac{\Delta q_b}{q_{b0}}. \quad (2.26)$$

Значения СДИ приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

$l$	$\pm \Delta q_a, \text{ Вт/м}^2$	$\pm \Delta q_b, \text{ Вт/м}^2$	$\pm \delta q_a, \%$	$\pm \delta q_b, \%$
5	$4,30 \cdot 10^4 \cdot \sigma$	$7,05 \cdot 10^4 \cdot \sigma$	$21,5 \cdot \sigma$	$11,7 \cdot \sigma$
3*	$11,44 \cdot 10^4 \cdot \sigma$	$24,07 \cdot 10^4 \cdot \sigma$	$57,2 \cdot \sigma$	$54,7 \cdot \sigma$

\* Для случая  $l=3$  в качестве  $q_{b0}$  взята величина  $2 \cdot 10^5 + \frac{3}{5} \cdot (6-2) \cdot 10^5 = 4,4 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$

Таким образом, погрешность оценок  $q_a$  и  $q_b$  зависит от уровня среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  погрешности в измерениях температур и в умеренной степени от количества измерений  $l$ . В приведенном в таблице 2.1. диапазоне измеряемых температур реальные значения  $\sigma$  не должны превышать, по нашим оценкам,  $(0,2 - 0,3) \text{ }^\circ\text{C}$ , то для заданных условий результаты теплотрии не могут быть удовлетворительными, следовательно необходимо увеличивать количество измерений на участке аппроксимации.

**2.5.2.2** Для случая  $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $n = 11$ ,  $\lambda = 15 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $a = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\tau = 16 \text{ с}$ ,  $\mathbf{T}_0 = 0$ ,  $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^5 & 2 \cdot 10^5 \end{bmatrix}^T \text{ Вт/м}^2$ , приведем результаты исследований влияния количества измерений  $l$  на участке сплайн-аппроксимации. Рассматривались варианты:  $l=16$  при  $\Delta\tau=1 \text{ с}$ ;  $l=8$  при  $\Delta\tau=2 \text{ с}$ ;  $l=4$  при  $\Delta\tau=4 \text{ с}$ ; в которых измеряемые температуры  $t_{lk}$  поверхности ПТП находились в пределах от  $0,65$  до  $71,05 \text{ }^\circ\text{C}$ . Значения СДИ приведены в таблице 2.3, которые определялись на базе  $A_l^{-1}$  по формулам (2.24)–(2.25)

$$A_{16}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,26 \cdot 10^6 & -1,37 \cdot 10^6 \\ -1,37 \cdot 10^6 & 2,41 \cdot 10^6 \end{bmatrix}; \quad A_8^{-1} = \begin{bmatrix} 1,63 \cdot 10^6 & -1,69 \cdot 10^6 \\ -1,69 \cdot 10^6 & 2,10 \cdot 10^6 \end{bmatrix};$$

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1,79 \cdot 10^6 & -0,55 \cdot 10^6 \\ -0,55 \cdot 10^6 & 1,74 \cdot 10^6 \end{bmatrix}.$$

Таблица 2.3

$l$	$\pm\Delta q_a, \text{Вт/м}^2$	$\pm\Delta q_b, \text{Вт/м}^2$	$\pm\delta q_a, \%$	$\pm\delta q_b, \%$
16	$2,74 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,80 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$2,74 \cdot \sigma$	$1,90 \cdot \sigma$
8	$3,13 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,46 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,13 \cdot \sigma$	$1,73 \cdot \sigma$
4	$3,28 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,23 \cdot 10^4 \cdot \sigma$	$3,28 \cdot \sigma$	$1,62 \cdot \sigma$

В этом случае, учитывая, что в указанном диапазоне изменения температур  $t_{1k}$  можно принять  $\sigma \leq 1$  °С, точность восстановления  $q(\tau)$  вполне удовлетворительно и не существенно зависит от количества измерений  $l$  на участке аппроксимации, в связи с более высоким уровнем измеряемых температур.

**2.5.2.3** Для условий теплотрии, принятых в подразделе 2.5.2.2 при  $l = 8$  можно привести основные результаты оценки влияния структуры вектора измерения  $Y_k$  ПТП, а именно: количества  $m$  и местоположения точек измерения температуры в ПТП. Полученные по принятой методике на базе  $A_l^{-1}$  значения СДИ оценок для некоторых характерных вариантов приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Структура вектора измерений	$\pm\Delta q_a, \text{Вт/м}^2$	$\pm\Delta q_b, \text{Вт/м}^2$	$\pm\delta q_a, \%$	$\pm\delta q_b, \%$
измеряется $t_{1k}$ ( $m = 1$ )	$3,13 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,46 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,13 \cdot \sigma$	$1,73 \cdot \sigma$
измеряется $t_{2k}$ ( $m = 1$ )	$6,23 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$6,02 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$6,23 \cdot \sigma$	$3,01 \cdot \sigma$
измеряются $t_{1k}$ и $t_{2k}$ ( $m = 2$ )	$2,96 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,04 \cdot 10^4 \cdot \sigma$	$2,96 \cdot \sigma$	$1,52 \cdot \sigma$

Можно сделать вывод, что заглупление точки измерения температуры существенно (примерно вдвое) увеличивают погрешности оценок  $q_a$  и  $q_b$ , а удвоение количества измеряемых температур в ПТП незначительно снижают эти погрешности.

### 2.5.3 Исследование возможностей определения теплопроводности материала градиентного ПТП, теплоизолированного с тыльной стороны ( $q_2 = 0$ )

**2.5.3.1** Для случая  $h = 4 \cdot 10^{-3}$  м,  $n = 11$ ,  $a = 0,6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\Delta\tau = 0,02$  с,  $\tau = 0,2$  с,  $l = 10$ ,  $T_0 = 0$ ,  $Q_0 = |q_0 \quad \lambda_0|^T = |1 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2 \quad 1,2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}|^T$ , при измерении температуры  $t_1$  оценены возможные погрешности оценок  $Q$ .

Значения измеряемых температур  $t_{1k}$  изменялось в пределах от 7,85 до 31,6 °С, а функции чувствительности рассчитанных по принятой методике, в пределах:  $U_{qk} = (0,748 \cdot 10^{-4} - 3,02 \cdot 10^{-4})$  (К·м<sup>2</sup>)/Вт и  $U_{\lambda k} = (1 - 1,04)$  (К<sup>2</sup>·м)/Вт.

Матрица Грама была получена в виде

$$A_{10} = \begin{vmatrix} 48,70 \cdot 10^{-8} & -1,785 \cdot 10^{-4} \\ -1,785 \cdot 10^{-4} & 6,51 \cdot 10^2 \end{vmatrix},$$

что позволило определить по формулам (2.18)–(2.19) СДИ оценок  $q$  и  $\lambda$ :

$$\Delta q = \pm 3,51 \cdot 10^3 \cdot \sigma \text{ Вт/м}^2; \delta q = \pm 3,51 \cdot \sigma \%,$$

$$\Delta \lambda = \pm 9,4 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \delta \lambda = \pm 7,83 \cdot \sigma \%.$$

Таким образом, определение  $q$  и  $\lambda$  вполне возможно, а его точность зависит от величины  $\sigma$ . Причем погрешность в определении  $\lambda$  примерно вдвое выше, чем для  $q$ .

**2.5.3.2** Для случая, соответствующего условиям подраздела 2.5.2.2 рассматривались возможности и уровни погрешностей одновременного определения параметров  $q_a$ ,  $q_b$  и  $\lambda$ . Их истинные значения были приняты равными

$$\mathbf{Q}_0 = \left[ 1 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2 \quad 2 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2 \quad 15 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)} \right]^T.$$

Рассматривались следующие варианты количества измерений  $l$  на участке сплайн-аппроксимации:  $l = 16$  при  $\Delta \tau = 1$  с;  $l = 8$  при  $\Delta \tau = 2$  с;  $l = 4$  при  $\Delta \tau = 4$  с. Для них были получены следующие значения обращенных матриц Грама:

$$A_{16}^{-1} = \begin{vmatrix} 1,80 \cdot 10^6 & -0,54 \cdot 10^6 & -0,7 \cdot 10^2 \\ -0,54 \cdot 10^6 & 4,17 \cdot 10^6 & 1,57 \cdot 10^2 \\ -0,7 \cdot 10^2 & 1,57 \cdot 10^2 & 1,4 \cdot 10^{-2} \end{vmatrix};$$

$$A_8^{-1} = \begin{vmatrix} 4,84 \cdot 10^6 & 10,19 \cdot 10^6 & -2,88 \cdot 10^2 \\ 10,19 \cdot 10^6 & 30,74 \cdot 10^6 & -11,52 \cdot 10^2 \\ -2,88 \cdot 10^2 & -11,52 \cdot 10^2 & 5,6 \cdot 10^{-2} \end{vmatrix};$$

$$A_4^{-1} = \begin{vmatrix} 17,49 \cdot 10^6 & 9,31 \cdot 10^6 & -3,75 \cdot 10^2 \\ 9,31 \cdot 10^6 & 140,36 \cdot 10^6 & -49,4 \cdot 10^2 \\ -3,75 \cdot 10^2 & -49,4 \cdot 10^2 & 160 \cdot 10^{-2} \end{vmatrix}.$$

На основе обращенных матриц Грама  $A_l^{-1}$  по формулам, аналогичным (2.24) и (2.25) для значения  $B^* = \sigma^2 \chi_{0,95}^2(3) = 7,815$  были получены СДИ искомым оценок, приведенные в таблице 2.5.

Таблица 2.5

$l$	$\pm\Delta q_a, \text{ Вт/м}^2$	$\pm\delta q_a, \%$	$\pm\Delta q_b, \text{ Вт/м}^2$	$\pm\delta q_b, \%$	$\pm\Delta\lambda, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$\pm\delta\lambda, \%$
1 6	$3,75 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$3,75 \cdot \sigma$	$5,71 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$2,76 \cdot \sigma$	$0,33 \cdot \sigma$	$2,20 \cdot \sigma$
8	$6,15 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$6,15 \cdot \sigma$	$15,0 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$7,5 \cdot \sigma$	$0,66 \cdot \sigma$	$4,07 \cdot \sigma$
4	$11,69 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$11,69 \cdot \sigma$	$33,12 \cdot 10^3 \cdot \sigma$	$16,56 \cdot \sigma$	$3,53 \cdot \sigma$	$23,5 \cdot \sigma$

Полученные результаты вскрывают ряд важных закономерностей, а именно:

1. Поставленная комбинированная ОЗТ, по нашему мнению, при достаточных значениях  $l \geq 8$  вполне разрешима, так как в диапазоне изменяемых температур от 0,65 до 71,05 °С величина среднеквадратического отклонения может быть удержана в пределах до 1 °С, что ограничивает СДИ результатов значениями  $\pm(2-5) \%$ .

2. При достаточных величинах  $l \geq 8$  величина  $\lambda$  может определять более точно, чем  $q_a$  и  $q_b$ .

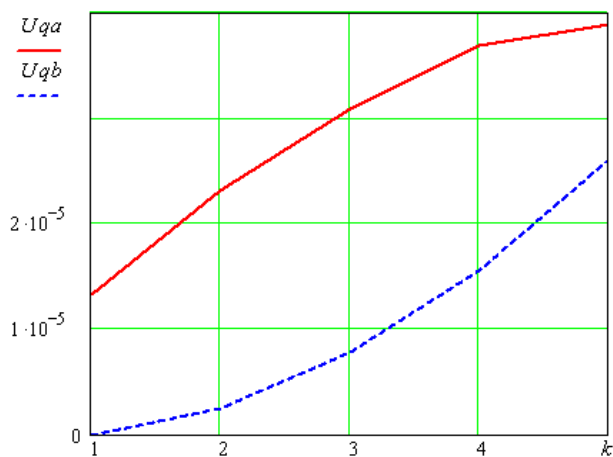
3. При уменьшении  $l$  погрешность определения всех параметров, особенно  $\lambda$ , быстро возрастают, а при  $l < 4$  становятся, по нашему мнению, недопустимой.

Как видно из таблицы 2.5, погрешность восстановления теплового потока растет при уменьшении количества измерений.

#### 2.5.4 ПТП с поперечным градиентом типа Гардона

ДРМ ПТП этого приведена в подразделе 2.4.2.

Для случая  $R = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $n = 11$ ,  $h = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\lambda = 23,3 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $a = 6,15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\tau = 0,025 \text{ с}$ ,  $\mathbf{T}_0 = 0$ ,  $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^5 & 6 \cdot 10^5 \end{bmatrix}^T \text{ Вт/м}^2$ , при измерении перепада температур  $t_{1k} - t_{em} = t_{1k}$  проведено исследование СДО и СДИ оценок  $\hat{q}_{al}$  и  $\hat{q}_{bl}$  при двух вариантах количества измерений  $l$  на участке сплайн-аппроксимации:  $l = 20$  при  $\Delta\tau = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ;  $l = 5$  при  $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ .



Для случая  $l=5$  значения измеряемых температур  $t_{1k}$  и функций чувствительности  $U_{qa,k}$  и  $U_{qb,k}$  приведены в таблице 2.6, а движение функций чувствительности — на рисунке 2.4.

Рисунок 2.4 – Значения функции чувствительности ПТП Гардона

Таблица 2.6

$k$	1	2	3	4	5
$t_{1k}, ^\circ\text{C}$	1,315	3,945	7,890	13,150	19,725
$U_{qa,k} \cdot 10^5, (\text{K} \cdot \text{m}^2)/\text{Вт}$	1,33	2,31	3,09	3,69	3,89
$U_{qb,k} \cdot 10^5, (\text{K} \cdot \text{m}^2)/\text{Вт}$	0	0,25	0,78	1,56	2,61

В соответствии с принятой методикой для  $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^5 & 6 \cdot 10^5 \end{bmatrix}^T$  были получены следующие матрицы Грама  $A_i$ :

$$A_{20} = \begin{bmatrix} 12,9 \cdot 10^{-9} & 6,82 \cdot 10^{-9} \\ 6,82 \cdot 10^{-9} & 4,304 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}; \quad A_5 = \begin{bmatrix} 4,47 \cdot 10^{-9} & 1,886 \cdot 10^{-9} \\ 1,886 \cdot 10^{-9} & 1,01 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}.$$

Для  $V^* = \sigma^2 \chi_{0,95}^2(2)$  по формулам (2.15) и (2.19) были рассчитаны СДИ оценок, приведенные в таблице 2.7, а по формулам (2.17) — их СДО для  $\sigma = 0,5 ^\circ\text{C}$  (рисунок 2.5).

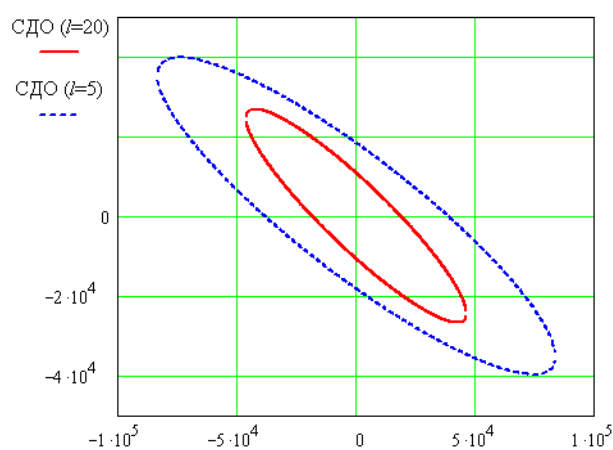


Рисунок 2.5 – СДО ПТП Гардона



Таблица 2.7

$l$	$\pm\Delta q_a, \text{Вт/м}^2$	$\pm\Delta q_b, \text{Вт/м}^2$	$\pm\delta q_a, \%$	$\pm\delta q_b, \%$
20	$0,524 \cdot 10^5 \cdot \sigma$	$0,910 \cdot 10^5 \cdot \sigma$	$0,524 \cdot \sigma$	$0,152 \cdot \sigma$
5	$0,806 \cdot 10^5 \cdot \sigma$	$1,54 \cdot 10^5 \cdot \sigma$	$0,806 \cdot \sigma$	$0,257 \cdot \sigma$

Таким образом, при завышенных значениях среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ , например,  $\sigma = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ , погрешности оценок  $\hat{q}_{al}$  и  $\hat{q}_{bl}$  представляются допустимыми. Причем, существенное уменьшение  $l$  не изменяет этот вывод.

В заключении ко второй главе отметим следующее.

Рассмотрен общий для различных типов ПТП приближенный метод учета и априорного анализа **основных методических погрешностей** нестационарной теплотометрии, при использовании для восстановления  $q(\tau)$  метода параметрической идентификации ДРМ ПТП, для чего:

1. Выполнено структурирование указанной погрешности с предварительным выделением ее общих составляющих, вызываемых возможной **неоднородностью теплопереноса в ПТП и влиянием последнего на поле температуры в объекте**. Для оценки предлагается привлекать известные методики.

2. Значимой составляющей, предложенного метода восстановления  $q(\tau)$ , является **погрешность кусочно-линейной сплайн-аппроксимации  $q(\tau)$** , которую необходимо априори анализировать и оценивать с учетом природы и динамических свойств теплогенерирующей среды, дискретности  $\Delta t$  и количества измерений  $l$  на участке аппроксимации.

3. Наиболее проблемной и недостаточно изученной является **погрешность восстановления  $q(\tau)$  путем решения потенциально неустойчивой граничной ОЗТ**. Выделен и рассмотрен ряд составляющих погрешностей:

– погрешности расчета модельного вектора измерений  $\hat{Y}(\mathbf{Q}_z)$ .

– погрешности **минимизации функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q}_z)$  по вектору искомых параметров  $\mathbf{Q}_z$** , связанные с алгоритмами минимизации.

4. Основное внимание в главе уделено методологии, позволяющей учесть определяющую погрешность параметрической идентификации, **вызываемую взаимным влиянием шума в исходных измерениях и топологией функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$**  в пространстве искомых параметров. Для решения задачи использованы известные результаты теории метода наименьших квадратов и анализа процессов статистическими методами.

Показано, что для линейной по искомым параметрам функции  $\Phi(\mathbf{Q}_z)$  точно, а для нелинейной — приблизительно (при обычно принимаемой зависимости ковариационной матрицы случайных погрешностей в пределах температур ПТП от среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ ) ковариационная матри-

ца ошибок оценок составляющих вектора искомых параметров  $\hat{q}_{az,l}$  и  $\hat{q}_{bz,l}$  имеет вид  $P(\hat{\mathbf{Q}}_{z,l}) = \sigma^2 \cdot A_{z,l}^{-1}$ , где  $A_{z,l}$  —  $(2 \times 2)$ -матрица Грама для полной системы векторов функций чувствительности всех  $m$  составляющих вектора измерений к каждой из двух составляющих вектора искомых параметров  $\mathbf{Q}_z$ .

Таким образом, ковариационная матрица ошибок оценок учитывает, причем отдельно, уровень погрешностей в измерениях и через обратную матрицу Грама  $A_{z,l}^{-1}$  — все значимые факторы процесса нестационарной теплотметрии: особенности устройства и тепловой схемы ПТП; вид, количество и характер размещения измерителей температур или их разностей; закон изменения восстанавливаемого теплового потока  $q(\tau)$ ; количество измерений  $l$  вектора измерений  $\mathbf{Y}_k$  на участке ( $k = 1, 2, \dots, l$ ).

5. Показано, что на основе матрицы Грама можно построить совместные доверительные области (СДО) или интервалы (СДИ), в которые с заданной доверительной вероятностью попадают получаемые на каждом участке оценки, аппроксимирующие  $q(\tau)$  и которые, как известно, являются нормативными показателями погрешностей косвенных измерений.

6. Предложено использовать метод **априорных исследований СДИ** для оптимального проектирования нестационарной теплотметрии путем выбора ее значимых факторов. Критерием выбора являются величины априорных СДИ оценок идентифицируемых параметров. Для построения таких СДИ необходимо априорно выбрать эталонные (предполагаемые) значения  $\mathbf{Q}_0$ .

7. Предложенный метод принципиально отличается от известного подхода к оптимальному планированию эксперимента, результаты которого приведены в работах Е. А. Артюхина, О. М. Алифанова. Их подход заключается в использовании информационной матрицы Фишера для выбора оптимальных планов проведения экспериментов по натурной или стендовой отработке теплового состояния объектов методами ОЗТ.

8. В качестве иллюстраций возможностей предложенной методологии и ее применимости к нестационарной теплотметрии приведены результаты построений СДО и СДИ при постановке граничных и комбинированных ОЗТ для различных типов ПТП.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пилипенко Н. В.* Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотометрии. Ч. 1 // Известия ВУЗов. Приборостроение, 2003. № 8. Т.46. С. 50–54.
2. *Пилипенко Н. В.* Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотометрии. Ч. 2 // Изв. вузов. Приборостроение, 2003. № 10. Т.46. С. 67–71.
3. *Симбирский Д. Ф.* Температурная диагностика двигателей. Киев: Техника, 1976. 208 с.
4. *Никитенко Н. И.* Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. Киев: Наукова думка, 1978. 212 с.
5. *Герашенко О. А.* Основы теплотометрии. Киев: Наукова думка, 1971. 191 с.
6. *Пилипенко Н. В., Лазуренко Н. В., Лебедев П. В.* Параметрическая идентификация нестационарных потоков с помощью тепломеров «вспомогательная стенка» // Изв. вузов. Приборостроение, 2005. № 9. Т. 48. С. 47–50.
7. *Пилипенко Н. В.* Методические погрешности определения нестационарных условий теплообмена при параметрической идентификации // Измерительная техника, 2007. № 8. С. 54–59.
8. *Pilipenko N.* Parametrical Identification of Differential-difference Heat Transfer Models in Non-stationary Thermal Measurements // Advances in heat transfer: Proceedings of the Baltic heat transfer conference, 2007. Vol. 2. P. 598–602.
9. *Pilipenko N.* Parametrical Identification of Differential-difference Heat Transfer Models in Non-stationary Thermal Measurements // Heat Transfer Research, 2008. Vol. 39. №. 4. pp. 311–315.
10. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем: Учебное пособие / О.М. Алифанов и др. М.: Логос, 2001. 400 с.
11. *Симбирский Е. Ф., Гольцов А. С., Бут Е. Н.* О погрешности дифференциально-разностной аппроксимации одномерного уравнения теплопроводности // Теплофизика и теплотехника, 1977. Вып. 33. С. 92–96.
12. *Симбирский Д. Ф., Олейник А. В., Макаренко Г. В.* Планирование и оценка погрешности косвенных измерений. Ленинград, 1989. С 47–49.
13. *Химельблау Д. Т.* Анализ процессов статистическими методами (Пер. с англ.). М.: Мир, 1973. 957 с.
14. *Симбирский Д. Ф.* Метрология косвенных измерений // Измерительная техника, 1983. № 1. С. 12–14.

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## **КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ И ЭНЕРГО- ФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА**

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958). В 1954 году вышла в свет его монография «Регулярный тепловой режим». Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена. В начале 50-х годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов – оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора технических наук Дульнева Г.Н., возглавлявшего кафедру с 1958 года по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ признается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике. Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года – кафедрой теплофизики, с 1991 года – кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В.Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из которой вышли доктора наук А.Н.Гордов, А.И.Лазарев, Г.Н.Дульнев, Б.Н.Олейник, Е.С.Платунов, Н.А.Ярышев, В.Н.Васильев, Ю.П.Заричняк, А.В.Шарков, Н.В. Пилипенко и другие ученые-теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследовании термооптических явлений в космических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте «ВЕГА», при создании лазерного устройства в проекте «ФОБОС». Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов, работа которых использует явления сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работы по созданию принципиально новых композиционных материалов – особо прочных, термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых направлений, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением. На базе ведущихся на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году. В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению – «Техническая физика». В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров.

На кафедре ведется подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин». Сейчас коллектив кафедры продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведет поиск в новых областях науки и техники.

Николай Васильевич Пилипенко

**МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОМЕТРИИ**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49