МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Г.В. Алексеев, В.А. Демченко

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В ПИЩЕВОЙ ИНЖЕНЕРИИ

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2016

УДК 681.3.06

Алексеев Г.В., Демченко В.А. Системный подход в пищевой инженерии: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 48 с.

Приведены основные понятия и термины, рассмотрены чистые и смешанные стратегии и их свойства. Приведены и рассмотрены решения матричных игр в смешанных стратегиях, задач теории игр и задач теории игр с природой с помощью MathCAD. Указан порядок выполнения лабораторных работ по принятию решений на основе методов игр.

Рекомендовано студентам, обучающимся по магистерским программам «Машины и агрегаты пищевой промышленности», «Машины и оборудование биотехнологий» и «Процессы и аппараты пищевых производств» (направление 15.04.02 Технологические машины и оборудование) очной и заочной форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Арет

Рекомендовано к печати Советом факультета пищевых биотехнологий и инженерии, протокол № 1 от 19 сентября 2016 г.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель лабораторных работ – научить студентов обучающихся по магистерским программам направления 15.04.02 «Технологические машины и оборудование» самостоятельно исследовать проблемы, препятствующие дальнейшему совершенствованию производства технологических машин и оборудования, в первую очередь предназначенных для пищевой промышленности и пищевых производств, и выбирать пути для их разрешения.

Студенты, выполнившие соответствующие задания, в частности, должны:

- знать методы и средства обеспечения оптимального конструирования машиностроительной продукции и новейшие технологии конструирования технических устройств;
- уметь строить план «транспортной задачи» для моделирования процесса пищевого производства при определении оптимальных условий его реализации с точки зрения новейших технологий или выбора оптимальной конструкции для соответствующего аппарата или технического устройства;
- иметь навык по использованию компьютерной техники для реализации оптимальных режимов процессов и параметров конструкций оборудования для пищевых производств.

Курс «Системный подход в пищевой инженерии» базируется на естественно научной и инженерной подготовке студентов и тесно связан с такими дисциплинами, изучаемыми в университете как высшая математика (разделы: теория вероятности и математическая статистика), теория механизмов и машин (в полном объеме), гидравлика (в полном объеме), инженерная графика (в полном объеме) и «Информатика» (разделы: операционная система Windows, численные методы вычислений и пакет прикладных программ Mathcad).

При изучении дисциплины «Системный подход в пищевой инженерии» требуется проведение достаточно большого объема вычислительных работ, поэтому предусматривается проведение практических занятий с применением компьютерной техники.

Настоящие методические указания предназначены для более глубокой проработки отдельных разделов теоретического курса и для помощи при самостоятельном выполнении студентом индивидуальных заданий, в том числе, с использованием персонального компьютера.

1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР

1.1. Основные понятия и терминология

На практике часто появляется необходимость согласования действий участников производственной деятельности в случаях, когда их интересы не совпадают (повышение качества продукта – снижение его себестоимости, повышение производительности – уменьшение производственных площадей и др.). Таким образом, часто возникает ситуация, когда решение принимается в условиях противодействия активного противника. В таких ситуациях становятся эффективными подходы теории игр, которые позволяют найти лучшее решение для поведения участников, обязанных согласовать действия при столкновении интересов.

Теория игр часто занимается разработкой рекомендаций по принятию решений в описанной выше конфликтной ситуации. Формализуя конфликтные ситуации математически, их можно представить как игру двух, трех и более игроков, каждый из которых преследует цель максимизации своего выигрыша за счет другого игрока. Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий стороны в конкретной конфликтной ситуации, называют **стратегия**.

В дальнейшем предполагается, что при разрешении конфликта каждый игрок P_j получает сумму v_j, называемую **выигрышем.** При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь целью максимизации общей суммы выигрыша. Числа v_j (j = 1, …, n) могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если $v_j>0$, то это соответствует выигрышу j-го игрока, если $v_j<0$, – проигрышу, при $v_j = 0$ – ничейный исход.

Игры, в которых участвуют два игрока, называются **парными.** Принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация называется **ходом.** Ходы могут быть **личные** и **случайные**. Если ход выбирается сознательно, – это личный ход, а если с помощью механизма случайного выбора, – случайный ход.

Например, шахматы, являются игрой двух партнеров с конечным числом личных ходов. В дальнейшем мы будем рассматривать игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры вызывают наибольший интерес, поскольку чаще используются в практических приложениях.

Пример 1. Пусть игроки A и B, соответственно, предприятие пищевого производства и поставщик оборудования. В конце года у игрока A возникает потребность приобретения, для комплектования вновь запускаемых производственных линий, новых единиц оборудования. Причем линии таковы, что на них размещаются по 2 единицы одного и того же оборудования, например насосов одинаковой производительности на линии пастеризованного молока для перекачки поступающего сырья и термообработанного продукта. На складе у предприятия может остаться 1, 2 или 3 единицы такого оборудования от монтажа предыдущих линий. У поставщика оборудования может оставаться на конец года также 1, 2 или 3 единицы такого оборудования. Предприятие заинтересовано в приобретении такого количества оборудования, чтобы в сумме с имеющимся на складе можно было бы укомплектовать одну или несколько новых линий. Если поставщик не обеспечивает нужного количества, сделка не состоится и предприятие ищет нового поставщика. Одновременно и независимо друг от друга игроки A и B выставляют в конце года свои предложения по покупке или продаже оборудования. Размер выигрыша определяется общим количеством единиц оборудования в показанных предложениях. При этом, если число пальцев четное, выигрывает игрок A, нечетное, – игрок B. Игрок A выигрывает потому, что он включает в производственную деятельность сразу все приобретенные единицы оборудования, а игрок B проигрывает поскольку он несет убытки от закупки этого оборудования у производителя и упускает выгоду от продажи.

Такую игру двух игроков можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix},$$

где индекс i элементов a_{ij} (i, j = 1, 2, 3) означает количество единиц оборудования игрока A, а индекс j – количество единиц оборудования игрока B. Например, a_{13} означает, что одновременно и независимо друг от друга игрок A показал 1 единицу оборудования, а игрок B – 3 единицы оборудования. Количество единиц оборудования для элемента a_{13} = 4 указывает на выигрыш 4 единиц игроком A.

Элемент $a_{32} = -5$ указывает на проигрыш 5 единиц игроком A или выигрыш 5 единиц игроком B.

Здесь рассмотрен пример матричной игры 3-го порядков. В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размерности $m \times n$. Номер i строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком A. Номер j столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком B. Описанная игра однозначно определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком B игроку A, если A выбирает стратегию, соответствующую i-й строке, а B выбирает стратегию, соответствующую j-му столбцу.

Матричную игру часто записывают в развернутой форме (см. табл. 1), называемой **платежной матрицей.**

Каждый игрок выбирает для себя наиболее выгодную стратегию. При этом первый игрок стремится выбрать такую стратегию, которая доставляет ему максимальный выигрыш, тогда второй игрок выбирает стратегию, приводящую его к минимальному проигрышу. В этой связи вводят понятия нижней и верхней чистой цены игры.

Таблица 1

	B_1	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_j	a_{j1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Нижней чистой ценой игры (максимином) называется число α, определяемое по формуле

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \tag{1}$$

Верхней чистой ценой игры (минимаксом) называется число β, определяемое по формуле

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{2}$$

Стратегии игроков, соответствующие максимину (минимаксу), называются **максиминными (минимаксными).**

Пример 2. Найти максиминную и минимаксную стратегии игроков в матричной игре $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Данную игру представим в виде платежной матрицы (табл. 2).

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	-3	4	5	-3
A_2	3	7	8	4	3
A_3	5	1	3	7	1
A_4	4	6	2	9	2
β_j	5	7	8	9	

В соответствии с формулой (2) по каждой строке определяем наименьшее число, которое записывается в столбец α_i. Это означает, что, какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок B, выигрыш игрока A, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит соответственно: -3, 3, 1,2. Однако игроку A целесообразно выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш независимо от того, какой столбец выбрал игрок B, т. е. $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i = \max(-3, 3, 1, 2) = 3$. Максиминной стратегией игрока A является A_2.

Аналогично, пользуясь формулой (1), определяем минимаксную стратегию игрока B. Поскольку он выбирает стратегии по столбцам, то какие бы стратегии ни выбирал игрок A, в худшем случае игрок B может проиграть соответственно стратегиям B_1, B_2, B_3, B_4: 5, 7, 8, 9. Однако игрок B стремится минимизировать свой проигрыш, а потому выбирает стратегию, соответствующую минимальному из чисел 5, 7, 8, 9, т. е. минимаксу:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \qquad \beta = \min(5, 7, 8, 9) = 5.$$

Из платежной матрицы видно, что минимаксной стратегией игрока B является B_1.

1.2. Чистые и смешанные стратегии и их свойства

Различают стратегии **чистые** и **смешанные**. Чистая стратегия A_i ($i = 1,\dots,m$) первого игрока (чистая стратегия B_j ($j = 1, \dots, n$) второго игрока) – это возможный ход первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной 1.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй – n стратегий, то для любой пары стратегий первого и второго игроков чистые стратегии можно представить в виде единичных векторов. Например, для пары стратегий A_1, B_2 чистые стратегии первого и второго игроков запишутся в виде: $p_1 = (1;0;...;0)$, $q_2 = (0;1;0;...;0)$. Для пары стратегий A_i B_j чистые стратегии можно записать в виде:

$$p_i = (0;...;0;\underbrace{1}_{i\text{-е место}};0;...;0),$$

$$q_j = (0;\dots;0;\underbrace{1}_{j\text{-е место}};0;...;0).$$

Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков A и B соответственно имеет место равенство $\alpha = \beta$, то пару чистых стратегий (A_i,B_j) называют **седловой точкой матричной игры,** элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, – **седловым элементом платежной матрицы**, а число $v = \alpha = \beta$ – **чистой ценой игры.**

Пример 1. Найдём нижнюю и верхнюю чистые цены, установим наличие седловых точек матричной игры $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Определим нижние и верхние чистые цены игры (табл. 3):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max(5, 1, -4) = 5,$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(9, 5, 6, 8) = 5,$$

$$v = \alpha = \beta = 5.$$

В данном случае имеем одну седловую точку (A_1, B_2), а седловой элемент равен 5. Этот элемент является наименьшим в 1-й строке и наибольшим во 2-м столбце. Отклонение игрока A от максиминной стратегии A_1 ведет к уменьшению его выигрыша, а отклонение игрока B от минимаксной стратегии B_2 ведет к увеличению его проигрыша. Иными словами, если в матричной игре имеется седловой элемент, то наилучшими для игроков являются их минимаксные стратегии. И эти чистые стратегии, образующие седловую точку и выделяющие в матрице игры седловой элемент $a_{12} = 5$, есть оптимальные чистые стратегии A_1 и B_2 игроков A и B.

Если же матричная игра не имеет седловой точки, то решение игры затрудняется. В этих играх $\alpha<\beta$. Применение минимаксных стратегий в таких играх приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает α, а проигрыш – не меньше β. Для каждого игрока возникает вопрос увеличения выигрыша (уменьшения проигрыша). Решение находят, применяя смешанные стратегии. **Смешанной стратегией** первого (второго) игрока называется вектор $p = (p_1;... ; p_m)$, где

$$p_i \geq 0 \ (i=1,\dots,m) \text{ и } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$$(q = (q_1; \dots ;q_n), \text{ где } q_j \geq 0 \ (j = 1,\dots,n) \text{ и } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1).$$

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	$\underline{5}$	6	7	5
A_2	1	4	3	8	1
A_3	6	3	2	-4	-4
β_j	9	5	6	8	

Вектор p (q) означает вероятность применения i-й чистой стратегии первым игроком (j-й чистой стратегии вторым игроком).

Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша). В таком случае средняя величина выигрыша (проигрыша) – математическое ожидание – является функцией смешанных стратегий p,q:

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j \,.$$

Функция $f(p,q)$ называется **платежной функцией** игры с матрицей $(a_{ij})_{m\times n}$.

Стратегии $p^* = (p_1^*;\ldots;\ p_m^*)$, $q^* = (q_1^*;\ldots;q_n^*)$ называются **оптимальными,** если для произвольных стратегий $p = (p_1;\ldots;p_m)$, $q = (q_1;\ldots;q_n)$ выполняется условие

$$f(p,q^*) \le f(p^*,q^*) \le f(p^*,q). \qquad (3)$$

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии p, второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии q.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет **решение игры**.

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры v, т. е. $f(p^*,q^*) = v$.

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков A и B называются **дублирующими**.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры.

Платежную матрицу, имеющую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.

Пример 2. Выполним все возможные упрощения матричной игры

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк матрицы игры равны, т. е. имеем две дублирующие строки, опустим, например, четвертую строку:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сравним соответствующие элементы столбцов.

Элементы первого столбца доминируют над элементами третьего и шестого столбцов, а элементы второго столбца доминируют над соответствующими элементами четвертого столбца. Игроку B невыгодно применять стратегии B_3, B_4 и B_6. Опускаем третий, четвертый и шестой столбцы и получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки меньше соответствующих элементов третьей строки. Следовательно, игроку A невыгодна стратегия A_2. Опуская вторую строку, получаем упрощенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Если требуется получить матрицу с положительными элементами, то достаточно прибавить к ее элементам, например, число 3.

1.3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Решение матричных игр в смешанных стратегиях может быть найдено **либо графически, либо методами линейного программирования.** Графический метод применим для решения игр, в которых хоть один игрок имеет две чистые стратегии. Этот метод интересен в том плане, что графически объясняет понятие седловой точки. Методами линейного программирования может быть решена любая игра двух лиц с нулевой суммой.

Рассмотрим игру $2 \times n$, в которой игрок A имеет две стратегии.

$$\begin{array}{cc|cccc|} & & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ & & q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ \cline{3-6} A_1 & p_1 = p & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & p_2 = 1-p & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cline{3-6} \end{array}$$

Игра предполагает, что игрок A смешивает стратегии A_1 и A_2 с соответствующими вероятностями $p_1 = p$ и $p_2 = 1-p$, $0 \le p \le 1$. Игрок B смешивает стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$ с вероятностями $q_1, q_2, \dots, q_n$, где $q_j \ge 0, j=1,2,...,n$, и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. В этом случае ожидаемый выигрыш игрока A, соответствующий j-й чистой стратегии игрока B, вычисляется в виде

$$w = (a_{1j} - a_{2j})p + a_{2j}, \quad j=1,2,...,n. \tag{4}$$

На плоскости (p, w) эти уравнения описывают прямые. Тем самым каждой чистой стратегии игрока B на этой плоскости соответствует своя прямая. Поэтому сначала на плоскости (p, w) последовательно рисуются все прямые (рис. 1). Затем для каждого значения p, $0 \le p \le 1$, путем визуального сравнения соответствующих ему значений w на каждой из построенных прямых определяется и отмечается наименьшее из них.

В результате описанной процедуры получается ломаная, которая и является графиком функции (жирная линия на рис. 1). Эта ломаная огибает снизу все семейство построенных прямых, и поэтому называется нижней огибающей этого семейства.

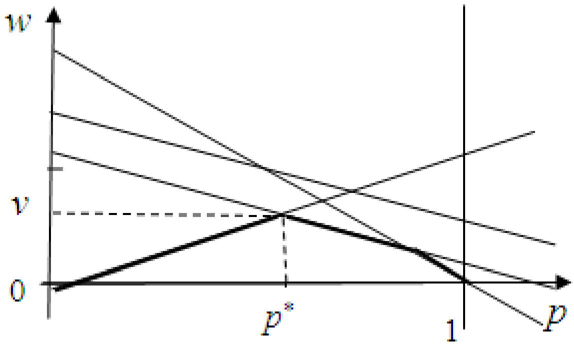


Рис. 1. Графическое решение игры 2×n

Абсциссой верхней точки полученной ломаной будет значение p^*, определяющее оптимальную смешанную стратегию игрока A, а ординатой v – цена игры (рис. 1).

Пример 1. Рассмотрим следующую игру 2×3:

Игра не имеет решения в чистых стратегиях (α = 2, β = 3), и, следовательно, стратегии должны быть смешанными. Ожидаемые выигрыши игрока A, w_A, соответствующие чистым стратегиям игрока B, приведены в следующей табл. 4.

Таблица 4

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	-1
A_2	4	2	6

На рис. 2 изображены три прямые линии, соответствующие чистым стратегиям игрока B. Чтобы определить **наилучший результат из наихудших**, построена **нижняя** огибающая трех указанных прямых (изображенная на рис. 1 толстыми линейными сегментами), которая представляет минимальный (наихудший) выигрыш для игрока A независимо от того, что делает игрок B. Максимум (наилучшее) нижней огибающей соответствует максиминному решению в точке $p^* = 0{,}5$. Это значение p^* определяется из уравнения $2+p = 6-7p$, отвечающего пересечению прямых 2 и 3 (табл. 5).

Следовательно, оптимальным решением для игрока является смешивание стратегий B_2 и B_3 с вероятностями 0,5 и 0,5 соответственно.

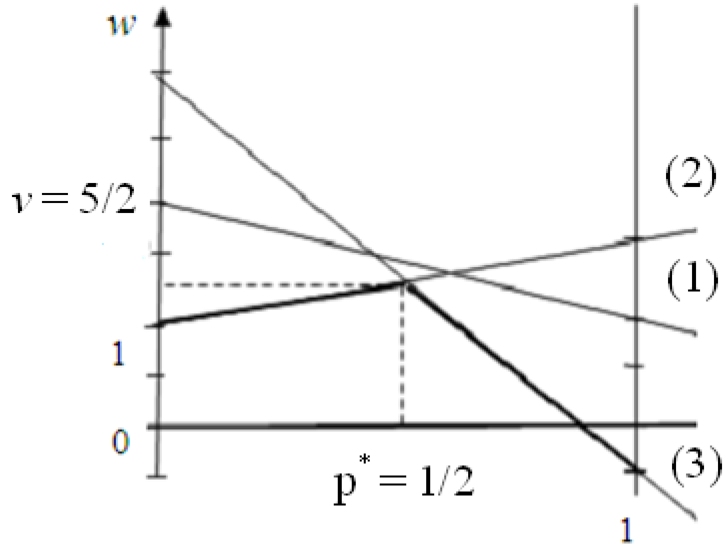


Рис. 2. Графическое решение игры (пример 1)

Таблица 5

B_j	w_A
1	4-2p
2	2+p
3	6-7p

Цена игры v определяется подстановкой p = 0,5 в уравнение либо прямой 2, либо 3, что приводит к следующему:

$$v = \begin{cases} 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 2,} \\ 6 - 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 3.} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется двумя стратегиями, которые определяют нижнюю огибающую графика. Это значит, что игрок B может смешивать стратегии B_2 и B_3, в этом случае q_1=0 и q_3=1-q_2=1-q.

Следовательно, ожидаемые платежи игрока B, соответствующие чистым стратегиям игрока A, имеют следующий вид.

Наилучшее решение из наихудших для игрока B представляет собой точку минимума **верхней** огибающей заданных двух прямых. Эта процедура эквивалентна решению уравнения -1+4q = 6-4q (табл. 6).

Таблица 6

A_i	w_B
1	-1+4q
2	6-4q

Его решением будет q = 7/8, что определяет цену игры v = - 1+4 (7/8) = 5/2. Таким образом, решением игры для игрока A является смешивание стратегий A_1 и A_2 с равными вероятностями 0,5 и 0,5, а для игрока B – смешивание стратегий B_2 и B_3 с вероятностями 7/8 и 1/8: v = 5/2, p^*= (1/2; 1/2) и q^* = (0; 7/8; 1/8).

Пусть теперь в матричной игре две чистые стратегии имеет игрок B, а число чистых стратегий у игрока A произвольно (равно m). Это означает, что платежная матрица такой игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Анализ такой игры во многом напоминает рассуждения, описанные для игры 2×n.

Пусть q = (q, 1-q) – произвольная смешанная стратегия игрока B. Если игрок A выбирает i-ю чистую стратегию, i=1,2,..., m, то средний выигрыш игрока B в ситуации $\{i,q\}$ будет равным

$$w_i = a_{i1}q+a_{i2}(1-q),\ i = 1, 2,..., m. \qquad (5)$$

Зависимость этого выигрыша от переменной q описывается прямой. Графиком функции $\max\limits_{1\le i\le m}(a_{i1}q+a_{i2}(1-q))$ является верхняя огибающая семейства прямых (рис. 2), соответствующих чистым стратегиям игрока A (рис. 3). Абсциссой нижней точки полученной ломаной будет значение q^*, определяющее оптимальную смешанную стратегию игрока B, а ординатой v – цена игры.

Отыскание оптимальной смешанной стратегии игрока A проводится по той же схеме, которая позволяет находить оптимальную смешанную стратегию игрока B в игре 2×n. Рассмотрим конкретный пример.

Пример 2. Игра 3×2 задана матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

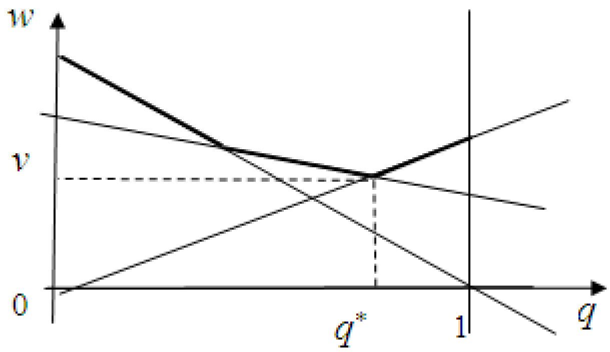


Рис. 3. Графическое решение игры *m*×2

Нижняя цена игры равна 0, верхняя – равна 3. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

Ожидаемые выигрыши игрока *B*, соответствующие чистым стратегиям игрока *A*, приведены в табл. 7.

Таблица 7

A_i	w_B
1	-1+4q
2	3-4q
3	q

Построим на координатной плоскости (q,w) все три прямые, а затем и их верхнюю огибающую (рис. 4). Нижняя точка верхней огибающей является точкой пересечения прямых (1) и (2). Решая уравнение -1+4q=3-4q, получаем $q^*=\frac{1}{2}$, $v = 1$.

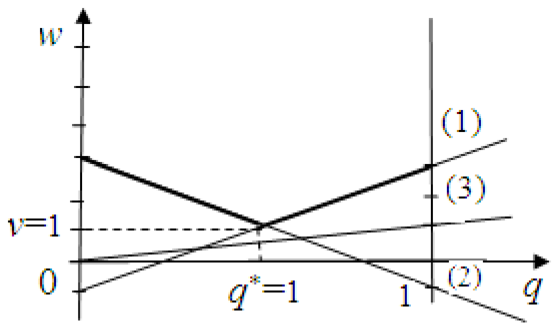


Рис. 4. Графическое решение игры (пример 2)

Приравниваем средние выигрыши игрока A, соответствующие чистым стратегиям игрока B: $-1+4p=3-4p$, и находим $p^*=1/2$.

Таким образом, цена игры и оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно равны:

$$v = 1,\ p^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ q^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Пусть имеем игру размерности $m \times n$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $p^* = (p_1;\dots;p_m)$, $q^* = (q_1;\dots;q_n)$ оптимальные смешанные стратегии игроков A *и* B. Стратегия p^* игрока A гарантирует ему выигрыш не меньше v, независимо от выбора стратегии B_j игроком B. Это можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 + \dots + \alpha_{m1}p_m \geq v, \\ \alpha_{12}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \dots + \alpha_{2m}p_m \geq v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}p_1 + \alpha_{12n}p_2 + \dots + \alpha_{mn}p_m \geq v, \end{cases} \tag{6}$$

где $p_1+p_2+\dots+p_m=1$; $p_i \geq 0$ $(i=1,\dots,m)$.

Аналогично стратегия q^* игрока B гарантирует ему проигрыш не больше v, независимо от выбора стратегии A_i игроком A, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots + \alpha_{1n}q_n \leq v, \\ \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \dots + \alpha_{2n}q_n \leq v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}q_1 + \alpha_{m2}q_2 + \dots + \alpha_{mn}q_n \leq v, \end{cases} \tag{7}$$

где $q_1+q_2+\dots+q_n=1$; $q_j \geq 0$ $(j=1,\dots,n)$.

Поскольку элементы платежной матрицы всегда можно сделать положительными, то и цена игры $v>0$.

Преобразуем системы (6) и (7), разделив обе части каждого неравенства на положительное число v, и введем новые обозначения: $p_i/v=x_i$, $q_j/v=y_j$ ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$).

Получим:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2+\ldots+\alpha_{m1}x_m \ge 1, \\ \alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2m}x_m \ge 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}x_1+\alpha_{12n}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_m \ge 1, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=1/v;\ x_i\ge 0\ (i=1,\ldots,m), \tag{9}$$

и

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\ldots+\alpha_{1n}y_n \le 1, \\ \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\ldots+\alpha_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}y_1+\alpha_{m2}y_2+\ldots+\alpha_{mn}y_n \le 1, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=1/v;\ y_j\ge 0\ (j=1,\ldots,n). \tag{11}$$

Так как игрок A стремится максимизировать цену игры v, то обратная величина $1/v$ будет минимизироваться, поэтому оптимальная стратегия игрока A определится из задачи линейного программирования следующего вида: найти минимальное значение функции $z = x_1+x_2+\ldots+x_m$ при записанных ограничениях.

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определится решением задачи следующего вида: найти максимальное значение функции $w = y_1+y_2+\ldots+y_n$ при ограничениях (10), (11).

Решив пару **двойственных задач**, далее определим:

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^*},\ p_i = \frac{x_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^*},\ q_j = \frac{y_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^*}\ \ (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Проиллюстрируем решение матричной игры сведением ее к задаче ЛП.

Пример 3. Два сельскохозяйственных предприятия A и B выделяют денежные средства на строительство трех объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль предприятия A в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Убыток предприятия B при этом равен прибыли предприятия A. Требуется найти оптимальные стратегии предприятий A и B.

Обозначим чистые стратегии предприятий A и B через A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно. Предположим, что предприятие A располагает общей суммой a тыс. ден. ед., отпускаемой на строительство трех объектов. Аналогично и предприятие B имеет сумму в b тыс. ден. ед., отпускаемую на строительство тех же трех объектов. Тогда чистая стратегия A_1 – это выделение a_1 тыс. ден. ед. предприятием A на строительство первого объекта; A_2 – чистая стратегия предприятия A, которое выделяет сумму a_2 тыс. ден. ед. на строительство второго объекта; A_3 – чистая стратегия предприятия A, которое выделяет сумму a_3 тысяч денежных единиц на строительство третьего объекта. Общая сумма средств, выделяемых на строительство трех объектов, $a=a_1+a_2+a_3$. Аналогично определяются чистые стратегии и для предприятия B.

Проверим игру на наличие седловой точки:

$$\alpha = \max_i \min_j \quad a_{ij} = 4,\ \beta = \min_j \max_i \quad a_{ij} = 6\ ,\ \alpha \neq \beta.$$

Седловой точки нет, поэтому решение игры определяем в смешанных стратегиях. Цена игры v заключена между нижней α

и верхней β ценами, т.е. $4 \le v \le 6$. Составим задачу ЛП для каждого игрока.

Для игрока A:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$x_i \ge 0$ (i=1,2,3).

Для игрока B:

$$w = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4x_3 \le 1, \end{cases}$$

$y_j \ge 0$ (j=1,2,3).

Вводя балансовые переменные $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$ для исходной задачи и $y_4 \ge 0$, $y_5 \ge 0$, $y_6 \ge 0$ для двойственной задачи, модели задач преобразуем к канонической форме. При этом балансовые переменные двойственной задачи станут базисными.

При «ручном» счёте проще решать **двойственную** задачу, т.к. она не требует введения искусственных переменных. Соответствие между переменными пары взаимно двойственных задач будет следующее (табл. 8).

Таблица 8

Свободные			Базисные		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓
y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3
Базисные			Свободные		

Решим, например, двойственную задачу ЛП, построенную для определения выигрыша предприятия B.

Каноническая форма задачи имеет вид:

$$w = y_1 + y_2 + y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4x_3 + y_6 = 1, \end{cases}$$

$y_j \ge 0$ (j = 1,…, 6).

Решая ее симплекс-методом, имеем (итерации 0 – 2) оптимальный план $y^*=(y_1^*;\ldots;y_6^*)$ = (1/27; 4/27; 0; 0; 2/27; 0). При этом w^*=5/27.

Итерация 0

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Р	О
w	-1	-1	-1	0	0	0	0	–
y_4	3	6	8	1	0	0	1	1/6
y_5	9	4	2	0	1	0	1	1/4
y_6	7	5	4	0	0	1	1	1/5

*Итерация*1

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Р	О
w	-1/2	0	1/3	1/6	0	0	1/6	–
y_2	1/2	1	4/3	1/6	0	0	1/6	1/3
y_5	7	0	-10/3	-2/3	1	0	1/3	1/21
y_6	9/2	0	8/3	-5/6	0	1	1/6	1/27

Итерация 2

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Р
w	0	0	17/27	2/27	0	1/9	5/27
y_2	0	1	28/27	7/27	0	-1/9	4/27
y_5	0	0	-202/27	17/27	1	-14/9	2/27
y_1	1	0	16/27	-5/27	0	2/9	1/27

С учетом основной теоремы двойственности и соответствия между переменными оптимальный план исходной задачи запишется в виде

$$x^*=(x_1^*;\ldots;x_6^*)=(2/27;\ 0;\ 1/9;\ 0;\ 0;\ 17/27),\ z^*=5/27.$$

По формулам $v=\frac{1}{z^*}=\frac{1}{w^*}$, $\frac{p_i}{v}=x_i$, $\frac{q_j}{v}=y_j$ (i=1,…,m, j=1,…,n) получим цену игры v = 27/5 и вероятности p_i^* и q_j^* для оптимальных смешанных стратегий соответственно предприятий *A* и *B*:

$$p_1^* = 27/5\cdot 2/27 = 2/5,\ p_2^* = 27/5\cdot 0 = 0,\ p_3^* = 27/5\cdot 1/9 = 3/5,$$

$$q_1^* = 27/5\cdot 1/27 = 1/5,\ q_2^* = 27/5\cdot 4/27 = 4/5,\ q_3^* = 27/5\cdot 0 = 0.$$

Таким образом, оптимальными смешанными стратегиями сельскохозяйственных предприятий *A* и *B* являются стратегии

p^* = (2/5; 0; 3/5) и q^* = (1/5; 4/5; 0) соответственно при гарантированном получении предприятием *A* независимо от стратегий предприятия *B* прибыли не менее 27/5 = 5,4 тысяч денежных единиц. Убыток предприятия *B* при этом составит не более 5,4 тысяч денежных единиц.

Итак, из общей суммы средств *a* тысяч денежных единиц, выделяемых предприятием *A* на строительство трех объектов, на долю первого объекта должно выделяться 40 %, второго – 0 % и третьего – 60 % этой суммы. Аналогично распределяются средства *b* тысяч денежных единиц предприятием *B*: на долю первого объекта приходится 20 %, второго – 80 % и третьего – 0 % общей суммы.

1.4. Решение задач теории игр с помощью MathCAD

Пример 1. Рассмотрим следующую игру 2×4:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	0
A_2	4	3	2	4

Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис. 5. Вначале определены верхняя и нижняя цены игры: $\beta = 3$, $\alpha = 2$. Затем вычисляется ожидаемый выигрыш игрока *A,* соответствующий каждой чистой стратегии игрока *B,* в виде W_1, W_2, W_3 и W_4. На рисунке 5 изображены четыре прямые линии, соответствующие чистым стратегиям игрока *B*. Чтобы определить **наилучший результат из наихудших**, построена **нижняя** огибающая трех указанных прямых, которая представляет минимальный (наихудший) выигрыш для игрока *A* независимо от того, что делает игрок *B*. Максимум нижней огибающей соответствует максиминному решению в точке p^*=2/5. Это значение p^* определяется из уравнения $2+p=4-4p$, отвечающего пересечению прямых 3 и 4. Следовательно, оптимальным решением для игрока *A* является смешивание стратегий A_1 и A_2 с вероятностями 2/5 и 3/5 соответственно. Цена игры *v* определяется подстановкой

$p = 2/5$ в уравнение либо прямой 3, либо 4, что приводит к следующему:

$$v=\begin{cases} 2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}=2{,}5 \text{ из уравнения прямой 3,} \\ 4\text{-}4\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}=2{,}5 \text{ из уравнения прямой 4.} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется двумя стратегиями, которые определяют нижнюю огибающую графика. Это значит, что игрок B может смешивать стратегии B_3 и B_4, в этом случае $q_1=q_2=0$ и $q_3=q$, $q_4=1\text{-}q_3=1\text{-}q$.

Следовательно, ожидаемые платежи игрока B, соответствующие чистым стратегиям игрока A, имеют следующий вид (табл. 9).

Таблица 9

A_i	w_B
1	$3q$
2	$4\text{-}2q$

Наилучшее решение из наихудших для игрока B представляет собой точку минимума **верхней** огибающей заданных двух прямых.

Эта процедура эквивалентна решению уравнения $3q = 4\text{-}2q$. Его решением будет $q = 4/5$, что определяет цену игры $v = 3\cdot(4/5) = 12/5$.

Таким образом, решением игры для игрока A является смешивание стратегий A_1 и A_2 с вероятностями 2/5 и 3/5, а для игрока B – смешивание стратегий B_3 и B_4 с вероятностями 4/5 и 1/5:

- $v = 12/5$;
- $p^* = (2/5; 3/5)$;
- $q^* = (0; 0; 4/5; 1/5)$.

$ORIGIN := 1$

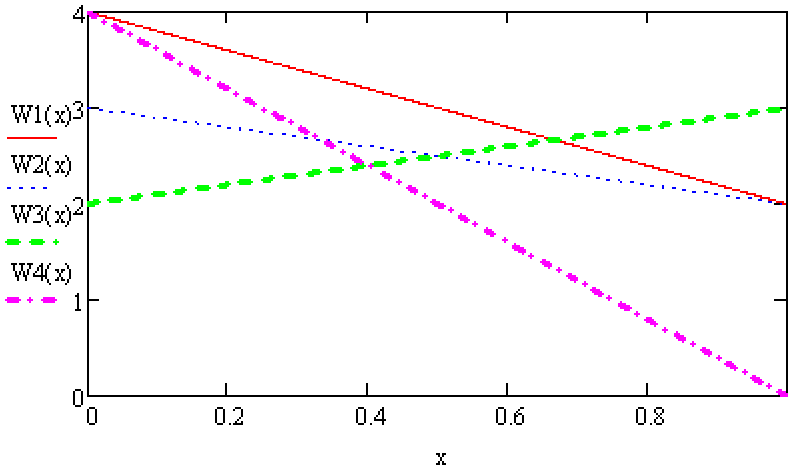
$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad n := cols(A) \quad i := 1..n \quad b_i := max\left(A^{\langle i\rangle}\right) \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \beta := min(b) \quad \beta = 3$

$Q := A^T \quad i := 1..2 \quad a_i := min\left(Q^{\langle i\rangle}\right) \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha := max(a)$

$\alpha = 2 \qquad 2 \le \nu \le 3$

$W1(x) := \left(A_{1,1} - A_{2,1}\right)\cdot x + A_{2,1} \quad W2(x) := \left(A_{1,2} - A_{2,2}\right)\cdot x + A_{2,2} \quad W3(x) := \left(A_{1,3} - A_{2,3}\right)\cdot x + A_{2,3}$

$W4(x) := \left(A_{1,4} - A_{2,4}\right)\cdot x + A_{2,4}$



$W3(x) = W4(x)\ solve, x \rightarrow \frac{2}{5} \quad p1 := \frac{2}{5} \quad p2 := 1 - p1 \quad \nu := W3(p1) \quad \nu = 2.4$

$b1(y) := 3y \quad b2(y) := -2y + 4 \quad b2(y) = b1(y)\ solve, y \rightarrow \frac{4}{5} \quad q3 := \frac{4}{5} \quad q4 := 1 - q3$

$\nu := b2(q3) \quad \nu = 2.4 \quad p := (p1\ \ p2) \quad q := (0\ \ 0\ \ q3\ \ q4)$

$p = (0.4\ \ 0.6) \quad q = (0\ \ 0\ \ 0.8\ \ 0.2) \quad \nu = 2.4$

Рис. 5. Решение игры 2×4 с помощью MathCAD

Пример 2. Игра 4×2 задана матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Нижняя цена игры равна 2, верхняя – 3. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях. Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис. 6.

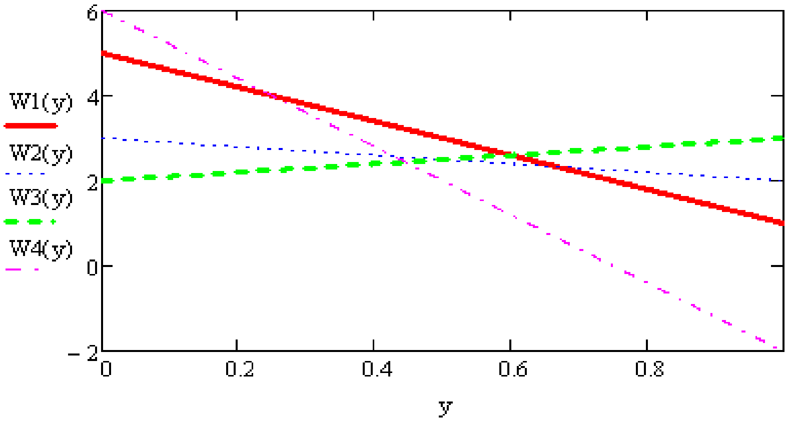
$\text{ORIGIN} := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad i := 1..2 \quad m := \text{rows}(A)\ \ b_i := \max\left(A^{\langle i \rangle}\right)\ \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \beta := \min(b) \quad \beta = 3$$

$$Q := A^T \quad i := 1..m \quad a_i := \min\left(Q^{\langle i \rangle}\right) \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \alpha := \max(a)$$

$$\alpha = 2 \quad 2 \le \nu \le 3 \quad W1(y) := \left(A_{1,1} - A_{1,2}\right)y + A_{1,2}$$

$$W2(y) := \left(A_{2,1} - A_{2,2}\right)y + A_{2,2} \quad W3(y) := \left(A_{3,1} - A_{3,2}\right)y + A_{3,2} \quad W4(y) := \left(A_{4,1} - A_{4,2}\right)y$$



$$W1(y) = W3(y) \text{ solve}, y \rightarrow \frac{3}{5} \quad q1 := \frac{3}{5} \quad q2 := 1 - q1 \quad \nu := W1(q1) \quad \nu = 2.6$$

$$a1(x) := -2x + 3 \quad a2(x) := 3x + 2 \quad a1(x) = a2(x) \text{ solve}, x \rightarrow \frac{1}{5} \quad p1 := \frac{1}{5} \quad p3 := 1 - p1$$

$$\nu := a1(p1) \quad \nu = 2.6 \quad p := (p1\ \ 0\ \ p3\ \ 0) \quad q := (q1\ \ q2)$$

$$\nu = 2.6 \quad p = (0.2\ \ 0\ \ 0.8\ \ 0) \quad q = (0.6\ \ 0.4)$$

Рис. 6. Решение игры 4×2 с помощью MathCAD

Пример 3. Сведём матричную игру, имеющую платёжную матрицу, $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, к задаче ЛП и решим с помощью MathCAD.

Нижняя цена игры равна -2, верхняя равна -1. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях. Решение задачи с помощью MathCAD приведено на рис. 7.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \qquad m := \mathrm{rows}(A) \quad m = 5 \qquad n := \mathrm{cols}(A) \quad n = 5$$

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad i := 1..n \quad b_i := \max\left(A^{\langle i\rangle}\right) \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A1 := A^T \qquad \beta := \min(b) \qquad \beta = -1$$

$$i := 1..m \qquad a_i := \min\left(A1^{\langle i\rangle}\right) \qquad a = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \alpha := \max(a) \qquad \alpha = -2 \qquad -2 \le v \le -1$$

$$A := \begin{vmatrix} A - \alpha & \text{if } \alpha < 0 \\ A & \text{otherwise} \end{vmatrix} \qquad A1 := A^T$$

$$x := a \qquad c := (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1) \qquad f(x) := c \cdot x \qquad f(x) = -22 \qquad c1 := c$$

$$y := b \qquad w(y) := c1 \cdot y \qquad w(y) = 8$$

Given

$$A1 \cdot x \ge c1^T \qquad x \ge 0 \qquad M := \mathrm{Minimize}(f, x)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(M) = 1.667 \qquad v1 := \frac{1}{f(M)} \qquad v1 = 0.6$$

$$v := \begin{vmatrix} v1 + \alpha & \text{if } \alpha < 0 \\ v1 & \text{otherwise} \end{vmatrix} \qquad v = -1.4 \qquad P := M \cdot v1 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$A \cdot y \le c^T \qquad y \ge 0 \qquad M1 := \mathrm{Maximize}(w, y) \qquad M1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.333 \\ 0 \\ 0 \\ 1.333 \end{pmatrix} \qquad w(M1) = 1.667 \qquad v1 := \frac{1}{w(M1)}$$

$$v := \begin{vmatrix} v1 + \alpha & \text{if } \alpha < 0 \\ v1 & \text{otherwise} \end{vmatrix} \qquad v = -1.4 \qquad Q := M1 \cdot v1 \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$v = -1.4 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Рис. 7. Решение игры $m \times n$ с помощью MathCAD

2. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

2.1. Критерии для принятия решений

Для управления производственными процессами необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточной информации возникает некоторая неопределенность в принятии решения. Причины этого различны: невозможность получения информации к моменту принятия решения; слишком высокие затраты на получение информации; невозможность устранения неопределенности по причинам объективного характера и т. д.

По мере совершенствования средств сбора информации и ее обработки неопределенность в момент принятия управленческих решений будет уменьшаться. Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих явлений. Например, случайность спроса на продукцию делает невозможным точное прогнозирование объема ее выпуска. Принятие решения тогда связано с риском. Или, например, прием партии товара для контроля на соответствие стандарту также связан с риском. Правда, неопределенность при контроле может быть устранена в случае контроля всего товара, выпускаемого для реализации. Однако это может оказаться слишком дорогостоящим мероприятием.

В целях уменьшения неблагоприятных последствий в каждом конкретном случае следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. И здесь **лицо, принимающее решение** (ЛПР), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом, условно называемое **«природой»,** а такие ситуации принято называть **играми с природой.** Таким образом, ЛПР должно уметь находить управленческое решение, когда природа не выбирает сознательно свои оптимальные стратегии. Вместе с тем, в некоторых случаях мы иногда располагаем некоторыми вероятностными характеристиками состояния природы.

Хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. Под «природой» будем понимать **совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений**.

Безразличие природы к результату игры (выигрышу) и возможность получения ЛПР дополнительной информации о ее состоянии отличают игру с природой от обычной игры с двумя сознательными игроками.

Игры с природой представляют собой одну из основных моделей теории принятия решений в условиях частичной неопределенности.

Множество **стратегий** природы обозначим через П, отдельное состояние – $П_j$, $П_j \in П$ ($j = 1, \ldots, n$). Множество **стратегий** ЛПР обозначим через A, отдельную **стратегию** – A_i, $A_i \in A$ ($i = 1, \ldots, m$).

Для i-й стратегии A_i ЛПР и j-го состояния природы $П_j$ имеем некоторое число, обозначающее функцию выигрышей $a_{ij}(A_i, П_j)$, которая, как правило, является случайной величиной.

Во взаимоотношениях с природой ЛПР может использовать любые из своих стратегий $A_1, \ldots, A_m$ в зависимости от состояний $П_j$ природы. Имея эти стратегии, ЛПР должен руководствоваться некоторым правилом, с помощью которого он определяет выбираемую стратегию $A_i \in A$. Другими словами, ЛПР отыскивает оптимальное поведение, которое и будет его оптимальной стратегией. При этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями. При этом игры с природой могут решаться как в чистых, так и смешанных стратегиях. Но игры с природой имеют особенности по сравнению играми двух сознательных игроков. В частности, игрок П (природа) применяет свои чистые стратегии независимо от того, выгодно ли это игроку A (ЛПР) или нет, т.е. природа безразлична к своему выигрышу и не стремится воспользоваться промахами игрока A. Поэтому решение игры достаточно находить только для игрока A, так как игрок П не способен воспринимать какие-либо рекомендации, интересоваться результатами решения.

Предположим, что есть возможность численно оценить величиной a_{ij} эффективность каждой комбинации $(A_i, П_j)$. Тем самым определена так называемая **платежная матрица игры с природой**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

на основе которой в дальнейшем и будут сформулированы «правила поведения» – критерии выбора оптимальной стратегии ЛПР.

Элемент a_{ij} назовем выигрышем ЛПР, если он использует стратегию A_i при состоянии природы $П_j$. Его значение может быть как положительным, так и нулем, так и отрицательным числом.

Решение игры с природой несколько отличается от решения обычной игры, где оба игрока ведут игру сознательно. Отличие состоит в упрощении игры. Выявление дублирующих и доминируемых стратегий производится только для стратегий ЛПР. Стратегии природы нельзя опускать, поскольку она не имеет «умысла» навредить ЛПР, более того, она может реализовать состояния, заведомо выгодные ЛПР.

При решении игры с природой наряду с платежной матрицей используется **матрица рисков.** Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который ЛПР получит в тех же условиях $П_j$, применяя стратегию A_i, т. е. $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$.

Оптимальную стратегию ЛПР можно определяют, используя ряд критериев. При известном распределении вероятностей различных состояний $П_j$ природы пользуются **критерием Байеса.** Показателем в этом критерии служит либо величина среднего выигрыша, либо величина среднего риска.

Платежную матрицу (a_{ij}) представим в виде табл. 10.

Таблица 10

Стратегия ЛПР A_i	Состояния природы $П_j$				Средний выигрыш $\overline{\alpha}_i$
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\overline{\alpha}_1$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\overline{\alpha}_2$
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\overline{\alpha}_m$

По критерию Байеса за оптимальную принимается та чистая стратегия A, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{\alpha}_i$ ЛПР, т.е. обеспечивается $\overline{\alpha} = \max\limits_i \overline{\alpha}_i$, где

$$\overline{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \quad (i=1,\ldots,m).$$

Матрицу рисков представим в виде табл. 11. За оптимальную стратегию ЛПР принимается чистая стратегия A_i, при которой минимизируется средний риск, т.е. обеспечивается $\bar{r} = \min\limits_i \bar{r}_i$, где

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \quad (i=1,\ldots,m).$$

Таблица 11

Стратегия ЛПР A_i	Состояния природы $П_j$				Средний выигрыш $\overline{\alpha}_i$
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}	$\bar{r}_1$
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}	$\bar{r}_2$
…	…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}	$\bar{r}_m$
q_j	q_1	q_2	…	q_n	

В случае, когда одно состояние природы нельзя предпочесть другому, для их оценки используют принцип **недостаточного основания Лапласа,** согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1=q_2=\ldots=q_n=1/n$. Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

В случае, когда вероятности состояний природы неизвестны, для решения игр с природой – выбора оптимальной стратегии ЛПР – можно использовать несколько критериев.

Максиминный критерий Вальда совпадает с критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получать нижнюю чистую цену α в парной игре с нулевой суммой. По критерию Вальда, за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т. е.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Это критерий **крайнего пессимизма**, так как ЛПР исходит из предположения, что природа действует против него наилучшим для себя образом.

Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях (достигается «минимальный риск из максимально возможных»), т.е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Это – минимаксный критерий в отношении риска.

Критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют ЛПР на самые неблагоприятные состояния природы, т. е. эти критерии выражают пессимистическую оценку ситуации.

Критерий Гурвица (критерием пессимизма-оптимизма) рекомендует рассчитывать на нечто среднее. За оптимальную чистую стратегию принимается та, для которой выполняется соотношение

$$\max_i (\lambda \max_j a_{ij}+(1-\lambda) \min_j a_{ij}),$$

где $0 \le \lambda \le 1$. При $\lambda = 0$ имеем критерий пессимизма Вальда, а при $\lambda = 1$ – критерий крайнего оптимизма (рекомендуется выбирать лучшее из лучшего). В случае, когда $0 < \lambda < 1$, мы имеем нечто среднее. При желании подстраховаться в данной ситуации λ принимают близким нулю. В общем случае число λ выбирается из субъективных соображений (опыта, здравого смысла и т.д.).

Пример 1. Потребление исходного сырья S на предприятии в зависимости от его качества составляет 5, 6 или 7 ед. Если для выпуска запланированного объема продукции сырья S окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 4 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 3 ед. в расчете на единицу сырья. При изучении работы аналогичных предприятий планирующий орган располагает некоторой дополнительной информацией, снижающей неопределенность ситуации: 1) известны вероятности потребности в сырье в количествах 5, 6 и 7 ед.: 0,25; 0,35; 0,4; 2) потребность в сырье равновероятна; 3) о вероятностях потребности в сырье ничего определенного сказать нельзя (табл.12).

Таблица 12

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	-4	-8
A_2	-3	0	-4
A_3	-6	-3	0

Планирующий орган предприятия может принять одно из следующих решений: создать запас сырья в 5 ед. (стратегия A_1); в 6 ед. (стратегия A_2); в 7 ед. (стратегия A_3).

Второй играющей стороной – природой – будем считать совокупность объективных внешних условий, определяющую потребность в сырье. Если для выпуска запланированного объема продукции сырья S окажется достаточно в размере 5 ед., это будет означать состояние природы $П_1$; если в размере 6 ед. – состояние $П_2$; в размере 7 ед. – состояние $П_3$. Итак, описанная ситуация представляет собой игру с природой. Рассчитаем элементы платежной матрицы (табл. 13). Так, в ситуации (A_1, $П_1$) элемент a_{11} вычисляется следующим образом. Плановый орган принимает решение создать запас сырья в 5 ед., что и соответствует их расходованию в 5 ед., $a_{11} = 0$. Элемент a_{12} рассчитываем так. Запас сырья создан в 5 ед., а для выпуска запланированного объема продукции требуется 6 ед. Мы его пополняем, что потребует затрат в размере 4·(6-5) = 4 ден. ед., т.е. $a_{12} = -4$. Аналогично определяются и другие элементы табл. 13, например элемент a_{21} для ситуации (A_2, $П_1$). Запас сырья создан в 6 ед., а для выпуска запланированного объема продукции требуется 5 ед.

Таблица 13

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Критерии		
				Лапласа	Вальда	Гурвица (λ = 0,6)
A_1	0	-4	-8	-4,00	-8	-3,8
A_2	-3	0	-4	**-2,33**	**-4**	**-1,6**
A_3	-6	-3	0	-3,00	-6	-2,4
q_j	0,25	0,35	0,4			

Запас сырья превышает потребности, тогда дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 3·(6-5) = 3 ден. ед., т.е. $a_{21} = -3$. В общем случае элементы платежной матрицы рассчитываются по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} 4(i-j), \text{ если } i \le j; \\ -3(i-j), \text{ если } i > j. \end{cases}$$

Вычисляем средние выигрыши (**критерий Байеса)**:

$$\bar{\alpha}_1=0\cdot0{,}25+(-4)\cdot0{,}35+(-8)\cdot0{,}4=-4{,}6,\ \bar{\alpha}_2=-2{,}35,\ \bar{\alpha}_3=-2{,}55.$$

Оптимальной стратегией по Байесу является A_2:

$$\bar{\alpha} = \max(-4{,}6,\ -2{,}35,\ -2{,}55) = -2{,}35 \text{ (ден. ед.)}.$$

Результаты расчетов по критериям Лапласа, Вальда и Гурвица приведены в табл. 14 (оптимальное значение выделено жирным шрифтом).

Таблица 14

	Матрица рисков			r_i
	П$_1$	П$_2$	П$_3$	
A_1	0	4	8	8
A_2	3	0	4	**4**
A_3	6	3	0	6

Все они рекомендуют иметь запасы исходного сырья в 6 ед.

2.1.1. Решение задач теории игр с природой с помощью MathCAD

Рассмотрим решение следующей задачи с помощью MathCAD.

Пример 1. Объем продаж некоторого товара *V* за рассматриваемый период времени в универмаге колеблется, в зависимости от уровня покупательского спроса, в пределах от 5 до 8 ед.

Прибыль универмага от единицы реализованного товара *V* равна 3 ден. ед. Если запаса товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, можно заказать дополнительно некоторое количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере 4 ден. ед. за единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на хранение остатка составят 2 ден. ед. за единицу товара.

Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара V в универмаге, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, а также хранение остатка.

Решение найти в чистых стратегиях:

1) на основе критериев Байеса ($q_1 = 0{,}10$, $q_2 = 0{,}25$, $q_3 = 0{,}40$, $q_4 = 0{,}30$);

2) Лапласа;

3) Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр λ Гурвица принять равным 0,65).

Планирующий орган универмага может принять одно из решений: создать запас товара в 5 ед. (стратегия A_1); в 6 ед. (стратегия A_2); в 7 ед. (стратегия A_3), 8 ед. (стратегия A_4).

Второй играющей стороной – природой – считаем совокупность объективных внешних условий, определяющую потребительский спрос. Если для удовлетворения спроса запаса объема продукции товара окажется достаточно в размере 5 ед., это будет означать состояние природы $П_1$; в размере 6 ед. – состояние $П_2$; в размере 7 ед. – состояние $П_3$, в размере 8 ед. – состояние $П_4$. Рассчитаем элементы платежной матрицы (см. табл. 3). Элементы платежной матрицы рассчитываются по формуле

$$a_{ij} = 5(4+j)+\begin{cases} 3(i-j), \text{ если } i \le j; \\ -2(i-j), \text{ если } i > j. \end{cases}$$

Платежная матрица выглядит следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 22 & 19 & 16 \\ 23 & 30 & 27 & 24 \\ 21 & 28 & 35 & 33 \\ 19 & 26 & 33 & 40 \end{pmatrix}.$$

Решение в MathCAD приведено на рис. 8 по всем критериям.

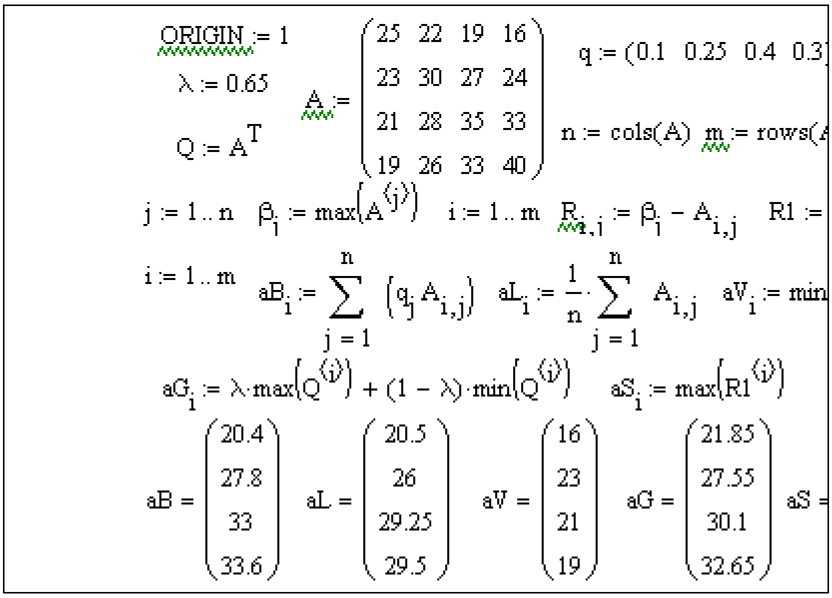


Рис. 8. Решение задачи игры с природой в MathCAD

Вводим начальные данные задачи – параметр Гурвица λ, платежную матрицу A и вектор вероятностей стратегий природы q. В результате получаем по всем стратегиям игрока A (ЛПР) его выигрыши по критериям: Байеса aB, Лапласа aL, Вальда aV, Гурвица aG и Сэвиджа aS. Выбираем те стратегии ЛПР, которым соответствуют наибольшие выигрыши (прибыли) и наименьшие риски. По критерию Байеса – это стратегия A_4 с прибылью 33,6 ден.ед., Лапласа – тоже A_4 с прибылью 29,5 ден.ед., Вальда – A_2 с прибылью 23 ден.ед., Гурвица – A_4 с прибылью 32,65 ден.ед. и Сэвиджа – тоже A_4 с наименьшим риском в 6 ден.ед. По различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A_4. Следовательно, необходимо создать запас товара в 8 ед.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. Решить графически игру, заданную платёжной матрицей **(2×*n*).**

Даны следующие платежные матрицы.

$$\mathbf{1}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{2}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 & 10 & 5 \\ 7 & 8 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & -6 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 6 & -3 \\ 7 & 6 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{7}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{8}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{12}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{13}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{15}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{16}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{17}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{19}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{20}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{21}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{22}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{23}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{24}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 8 \\ -1 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{25}\begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ 10 & 10 & 16 & 8 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{26}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{27}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{28}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{29}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{30}\begin{pmatrix} 14 & 13 & 4 & 13 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{31}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{32}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Решить графически игру, заданную платёжной матрицей (***m***×**2**).

Даны следующие платежные матрицы.

1 $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & -1 \\ 0 & -5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ **2** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ **3** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **4** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ **5** $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \\ 5 & -1 \\ -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **7** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \\ 8 & 3 \\ 5 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ **8** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ **9** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **10** $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -4 \\ 5 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **11** $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 4 & 6 \\ -2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

12 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ **13** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **14** $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \\ -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **15** $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **16** $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \\ 7 & 4 \\ 1 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **17** $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \\ -3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

18 $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 11 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ **19** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **20** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ **21** $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **22** $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **23** $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 4 \\ 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

24 $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ **25** $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -1 \\ -4 & -2 \\ 5 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **26** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 7 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ **27** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{28}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{29}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{30}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -6 & 3 \\ 0 & -4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{31}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 3 \\ -3 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{32}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{33}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{34}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{35}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2.3. Решить матричную игру $\boldsymbol{m \times n}$ с помощью линейного программирования или в MathCAD.

Даны следующие платежные матрицы.

$$\mathbf{1}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{2}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 8 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 6 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{3}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 & 10 & 5 \\ 5 & 6 & -3 & 8 & 13 \\ 4 & 6 & -1 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{6}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & -2 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 6 & -6 & 7 & -3 & 9 \\ 4 & -7 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & -5 & 6 & -3 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 6 & -5 & 7 & -5 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{8}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ -2 & 8 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{9}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -6 & -7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -5 & -2 & -3 & -3 \\ -8 & -3 & -1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

10 $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ **11** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & -3 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **13** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **14** $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & -5 \\ 5 & 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **16** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -6 & -4 \\ 5 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 7 & -5 & -3 \\ -3 & 2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

17 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **18** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ **19** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **21** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 5 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **22** $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 9 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ 10 & 10 & 16 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **24** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 8 & -1 & 14 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

25 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 2 & 7 \\ 14 & 13 & -3 & 13 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **26** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **27** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 7 & 2 \\ -1 & -1 & -7 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -6 & 7 & -3 \\ -4 & -1 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

28 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -4 & -6 \\ 5 & 5 & -5 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **29** $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \\ -10 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **30** $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

31 $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **32** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.4. Решить игры с природой

2.4.1. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет 10 – 12 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 ед. в расчете на единицу сырья. Придать описанной производственной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу. Дать рекомендации по созданию оптимального запаса сырья на предприятии.

2.4.2. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке A – повышенной влажности, Б – средней влажности, B – сухом. Урожайность картофеля зависит от погодных условий, в частности, от количества осадков, выпадающих в течение сезона. Если осадков выпадает меньше нормы, то средняя урожайность на участке A составляет 270 ц с 1 га; при количестве осадков, близком к норме, – 220 ц; если же осадков выпадет больше нормы, – 110 ц; на участке $Б$ – соответственно 210, 250 и 140 ц; на участке B – 120, 260 и 280 ц. Используя игровой подход, составить платежную матрицу. Установить, на каком участке следует выращивать картофель в предстоящем году, если, по данным службы долгосрочного прогнозирования погоды, вероятность выпадения осадков меньше нормы ожидается равной 0,3, близко к норме – 0,6, больше нормы – 0,1.

2.4.3. Объем выработки продукции (тонн) T за рассматриваемый период времени колеблется, в зависимости от уровня покупательского спроса, в пределах от 4 до 7 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара T равна 2 ден. ед. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере 4 ден. ед. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка составят 3 ден. ед. в расчете на единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Используя игровой подход, высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара T на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка.

Решение найти в чистых стратегиях на основе критериев Байеса (q_1 = 0,15, q_2 = 0,20, q_3 = 0,40, q_4 = 0,25), Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица (параметр λ Гурвица принять равным 0,55).

2.4.4. Руководство предприятия заказывает оборудование вида A. Известно, что спрос на данное оборудование лежит в пределах от 6 до 9 ед. Если заказанного оборудования окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Если же потребность будет меньше наличного количества оборудования, то нереализованный товар хранится на складе.

Требуется определить такой объем заказа на оборудование, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом, были бы минимальными, если расходы на хранение 1 ед. оборудования составляют 1000 руб., а по срочному заказу и завозу − 2000 руб.

Необходимые числовые данные для 10 вариантов приведены в табл. 15.

Таблица 15

	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b_1	20	7	11	14	17	10	13	19	30	12
b_2	22	8	12	16	19	12	15	20	32	14

Окончание таблицы 15

	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b_3	24	9	13	18	21	14	17	21	34	16
c	3	4	5	7	8	9	11	4	5	4
d	2	2	3	3	4	5	5	2	3	1
λ	0,6	0,8	0,7	0,8	0,75	0,6	0,7	0,6	0,55	0,7
q_1	0,35	0,30	0.35	0,25	0,45	0,30	0,30	0,25	0,40	0,45
q_2	0,30	0,30	0,25	0.35	0,30	0,40	0,35	0,35	0.25	0,25
q_3	0,35	0,40	0,40	0,40	0,25	0,30	0,35	0,40	0,35	0,30

2.4.5. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний:

1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта;

2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы;

3) оборудование требует капитального ремонта или замены.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения:

1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1, a_2 или a_3 ден. ед.;

2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1, b_2 или b_3 ден. ед.;

3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2 или c_3 ден. ед.

Указанные выше расходы предприятия включают кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях:

а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2, q_3;

б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны;

в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя.

В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а – критерием Байеса, в п. 3б – критерием Лапласа, в п. 3в – критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра λ в критерии Гурвица задается).

Необходимые числовые данные для 10 вариантов приведены в табл. 16.

Таблица 16

	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a_1	5	4	7	6	9	10	8	7	10	13
a_2	11	6	11	10	12	8	11	12	17	9
a_3	9	9	9	15	10	13	7	20	13	15
b_1	7	5	6	15	7	18	15	15	12	20
b_2	12	3	8	9	14	14	10	11	15	12
b_3	6	7	16	18	9	10	16	17	9	11
c_1	15	20	21	13	15	25	12	23	21	18
c_2	10	16	10	24	11	12	9	9	8	10
c_3	16	6	12	12	18	9	18	13	14	14
q_1	0,30	0,40	0,15	0,15	0,20	0,35	0,35	0,15	0,45	0,30
q_2	0,50	0,45	0,60	0,55	0,65	0,55	0,50	0,65	0,45	0,45
q_3	0,20	0,25	0,35	0,40	0,25	0,20	0,25	0,20	0,20	0,35
λ	0,70	0,60	0,50	0,80	0,60	0,80	0,70	0,75	0,60	0,70

2.4.6. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет b_1, b_2, b_3 или b_4 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме c_1 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят c_2 ед. в расчете на единицу сырья.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;

2) вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

3) дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными при следующих предположениях:

а) вероятности q_1, q_2, q_3, q_4 потребности в сырье в количестве соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 ед. известны;

б) потребление сырья в количестве b_1, b_2, b_3, b_4 ед. представляется равновероятным;

в) о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя.

В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3а – критерием Байеса, в п. 3б – критерием Лапласа, в п. 3в – критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра λ в критерии Гурвица задается).

Необходимые числовые данные для 10 вариантов приведены в табл. 17.

Таблица 17

	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b_1	12	10	8	15	9	6	20	13	10	8
b_2	14	11	9	17	10	8	21	15	12	10
b_3	16	12	10	19	11	10	22	17	14	12
b_4	18	13	11	21	12	12	23	19	16	14
c_1	5	8	7	4	6	5	2	9	3	5
c_2	7	4	3	9	2	8	4	7	6	8
q_1	0,24	0,14	0,20	0,25	0,10	0,15	0,20	0,10	0,20	0,15
q_2	0,30	0,30	0,25	0,45	0,30	0,30	0,30	0,35	0,25	0,25
q_3	0,26	0,40	0,40	0,20	0,40	0,40	0,35	0,35	0,40	0,20
q_4	0,20	0,16	0,15	0,10	0,20	0,15	0,15	0,20	0,15	0,40
λ	0,60	0,80	0,70	0,40	0,80	0,65	0,40	0,70	0,80	0,60

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев Г.В., Антуфьев В.Т., Громцев А.С.** Технологические машины и оборудование биотехнологий: Учеб. – СПб.: ГИОРД, 2015. – 358 с.

2. **Алексеев Г.В., Вороненко Б.А., Гончаров М.В., Холявин И.И.** Численные методы при моделировании технологических машин и оборудования: Учеб. пособие. – СПб.: ГИОРД, 2014. – 215 с.

3. **Алексеев Г.В., Вороненко Б.А., Лукин М.И.** Математические методы в пищевой инженерии: Учеб. пособие. – СПб.: ЛАНЬ, 2012. – 187 с.

4. **Алексеев Г.В., Холявин И.И.** Системный подход в пищевой инженерии: Учеб. пособие. – СПб.: ГИОРД, 2016. – 120 с.

5. **Алексеев Г.В., Холявин И.И., Гончаров М.В.** Численное экономико-математическое моделирование и оптимизация. – СПб.: ГИОРД, 2014. – 272 с.

6. **Волкова В.Н., Денисов А.А.** Основы теории систем и системного анализа: Учеб. – СПб.: СПбГТУ, 1997. – 510 с.

7. **Лагоша Б.А., Емельянов А.А.** Введение в системный анализ: Учеб. пособие. – М.: МЭСИ, 1998. – 77 с.

8. **Моисеев Н.Н.** Математические задачи системного анализа: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

9. **Спицнадель В.Н.** Основы системного анализа: Учеб. пособие. – СПб.: Бизнес-пресса, 2000. – 326 с.

10. **Тырсин А.Н.** Теория систем и системный анализ: Учеб. пособие. – Челябинск: УрСЭИ АТиСО, 2002. – 128 с.

Алексеев Геннадий Валентинович
Демченко Вера Артёмовна

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В ПИЩЕВОЙ ИНЖЕНЕРИИ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Компьютерная верстка
В.А. Демченко

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 22.11.2016. Формат 60x84 1/16
Усл. печ. л. 2,79. Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,88
Тираж 50 экз. Заказ № С 47

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 46

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9