МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Ю. Григорьев, Д.П. Малявко, К.А. Григорьев

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## Динамика материальной системы

## Учебное пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2016

УДК 531(075)
ББК 22.21
Г 83

**Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Григорьев К.А.** Теоретическая механика. Динамика материальной системы: Учеб. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 83 с.

Представлены материалы лекций по курсу «Теоретическая механика» для самостоятельного изучения раздела «Динамика материальной системы».

Предназначено для студентов направлений 16.03.03, 14.03.01, 23.03.03, 15.03.02, 19.03.02, 19.03.03 по дисциплине «Теоретическая механика» очной и заочной форм обучения.

**Рецензенты: кафедра гидротехнических сооружений, конструкций и гидравлики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова (зав. кафедрой кандидат техн. наук, доц. К.П. Моргунов); кандидат техн. наук, доц. В.Л. Щербаков (Санкт-Петербургская военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского)**

**Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования, протокол № 8 от 20.04.2015 г.**

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2016

© Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Григорьев К.А., 2016

# 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

## 1.1. Основные понятия и определения

**Определение 1**. Совокупность движущихся материальных точек, взаимодействующих друг с другом по тому или иному закону, называется *материальной системой*.

*Пример*. Абсолютно твёрдое тело – составляющие его материальные точки (молекулы) взаимодействуют друг с другом с такими электромагнитными силами, что расстояние между молекулами в процессе движения тела не меняется.

**Определение 2**. Материальная система называется *свободной*, если движение всех её точек в любом направлении ничем не ограничено.

*Пример*. Солнечная система. Её составляющие – Солнце, планеты, кометы, спутники и так далее могут, вообще говоря, двигаться в любом направлении.

**Определение 3**. Материальная система называется *несвободной*, если движение хотя бы одной её точки, хотя бы в одном направлении ограничено.

Материальные тела, ограничивающие перемещение точек *не свободной* системы, называются *связями*. Связи бывают двухсторонние и односторонние.

**Определение 4**. Связь называют односторонней, если она ограничивает движение точки материальной системы только в заданном, но не противоположном ему направлении.

*Пример 1*. Два тела (или две материальные точки) соединены нерастяжимым тросом длиной $l$ (рис. 1.1). Тогда, если ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$ и определить координаты материальных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в процессе движения материальных точек $M_1$ и $M_2$ расстояние между ними не должно превышать $l$. Данное условие математически можно задать неравенством

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \le l\,.$$

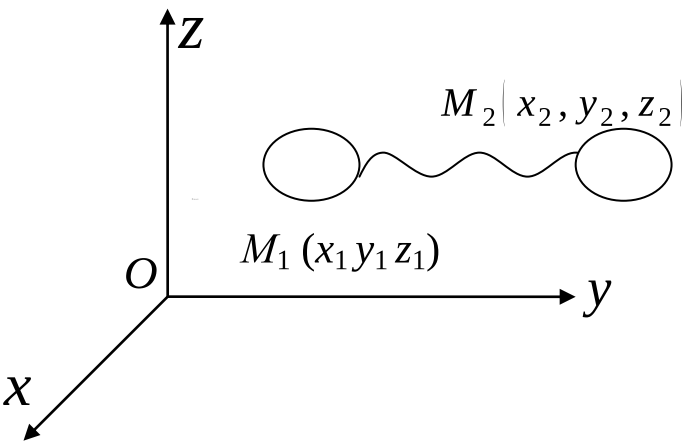



Рис. 1.1

*Пример 2.* Материальное тело (материальная система) находится над непроницаемой плоскостью (рис. 1.2). Если ввести систему координат $Oxy$, то очевидно плоскость для материальной системы будет односторонней связью. Эта плоскость не позволяет всем точкам материальной системы иметь координату $y < 0$, т. е. для всех точек системы задано условие $y_i \geq 0$.

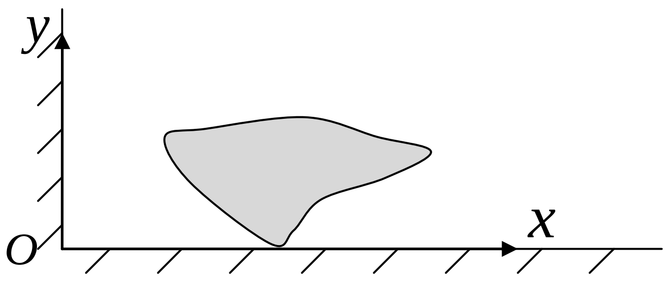



Рис. 1.2

Как видно из этих примеров, односторонние связи характеризуются математическими соотношениями типа неравенств.

**Определение 5**. Связь называется двухсторонней, если она ограничивает движение точек системы как в заданном, так и противоположном ему направлении.

*Пример*. Два тела (или две материальные точки) связаны абсолютно жёстким стержнем длиной $l$ (рис. 1.3).

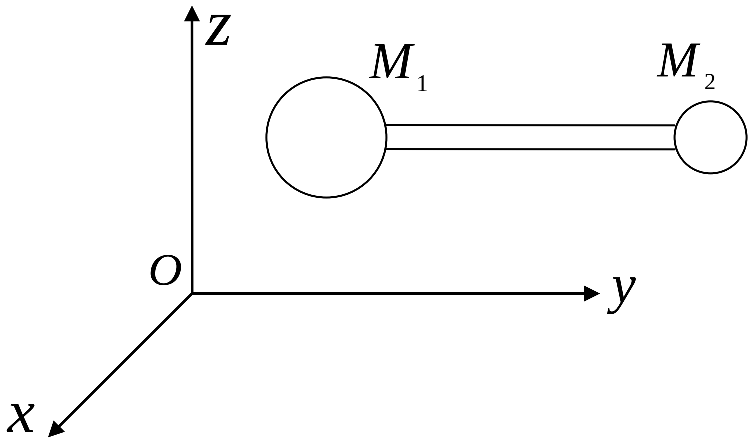



Рис. 1.3

Если ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$ и определить координаты точек $M_1$ и $M_2$ на концах стержня $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$ соответственно, то, так как стержень абсолютно жёсткий и не может деформироваться, расстояние между точками $M_1$ и $M_2$ в любой момент времени должно оставаться $l$, что математически можно записать равенством

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l\,. \qquad (1.1)$$

Как видно из этого примера, двухсторонние связи всегда характеризуются математическими соотношениями типа равенств.

Характеристики двухсторонних связей зависят от взаимного расположения точек системы, скоростей движения этих точек и могут меняться со временем. Пусть имеется материальная система, состоящая из "$n$" материальных точек $M_1, M_2, M_3,$ ... $M_n$. Пусть $x_i, y_i, z_i$ – декартовы координаты точки $M_i$ материальной системы, меняющиеся со временем; $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ – переменные со временем компоненты (составляющие) вектора скорости движения точки $M_i$ соответственно. Тогда уравнение наложенных на систему связей в общем случае имеет вид

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots\, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0\,.$$

Двухсторонняя связь называется *нестационарной*, если её уравнение зависит от времени явно. В противном случае связь называется *стационарной*. Связь называется *неголономной*, если уравнение явно зависит хотя бы от одной из компонент скоростей точек системы $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)$. В противном случае связь называется голономной. Так, выражение (1.1) описывает стационарную и голономную связи.

## 1.2. Классификация сил, действующих на материальную систему

Действующие на несвободную материальную систему силы, с одной стороны, можно разделить на активные силы и динамические реакции связей. Активные силы приводят материальную систему в движение и заранее обычно известны по модулю и направлению. В общем случае они являются функциями:

– координат материальных точек системы:

$x_i, y_i, z_i, x_2, \ldots x_n, y_n, z_n$;

– компонент скоростей движения этих точек:

$\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dot{x}_2, \ldots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$;

– времени $t$ явно.

Динамические реакции двухсторонних связей это силы, с которыми данные связи действуют на материальные точки системы. Реакции связей обычно заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи.

С другой стороны, действующие на материальную систему силы делятся на *внутренние* и *внешние*.

Внешние силы – это силы, с которыми внешние тела действуют на материальные точки системы.

Внутренние силы – это силы, с которыми материальные точки системы взаимодействуют друг с другом.

*Пример*. Тело находится на наклонной шероховатой поверхности (рис. 1.4). Здесь вес тела $\overline{P}$ – внешняя активная сила; $\overline{R}$ – внешняя динамическая реакция (почему внешняя? – так как плоскость не входит в материальную систему – твёрдое тело).

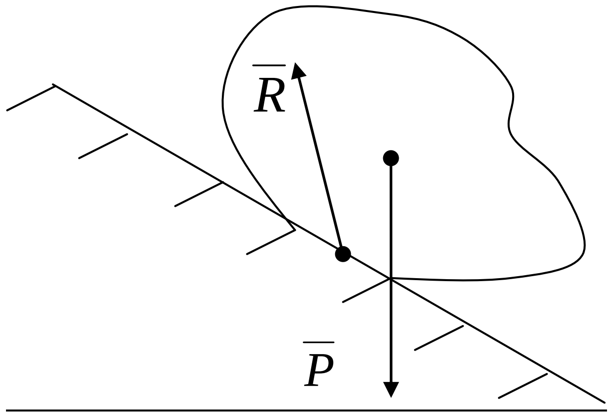



Рис. 1.4

Электромагнитные силы взаимодействия между молекулами твёрдого тела – внутренние реакции.

В Солнечной системе гравитационные силы притяжения между Солнцем и планетами – это внутренние активные силы.

Таким образом, деление сил на активные силы и реакции связей, а также на внутренние и внешние никак не связано друг с другом.

Внутренние силы удовлетворяют *закону парности внутренних сил*: внутренние силы всегда могут быть разбиты на пары сил, равные по модулю и действующие вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.5).

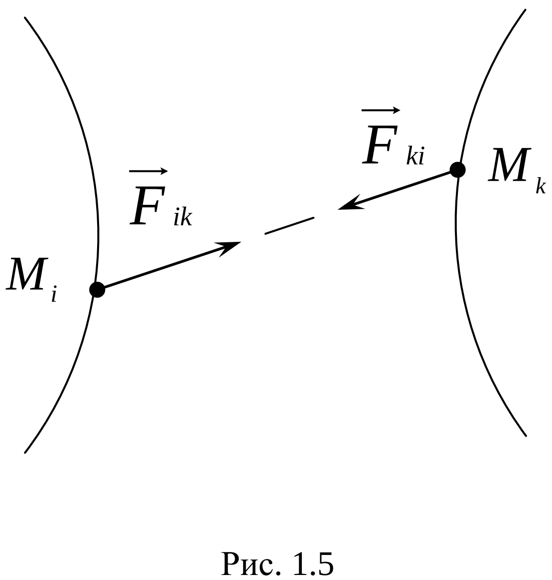



Рис. 1.5

Так, если $\vec{F}_{ik}$ – внутренняя сила, с которой материальная точка $M_k$ действует на точку $M_i$ системы, а $\vec{F}_{ki}$ – внутренняя сила, с которой материальная точка $M_i$ действует на материальную точку $M_k$ системы, то, согласно четвертой аксиоме динамики, силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$ лежат на одной прямой, равны по модулю и направлены в противоположные стороны, т. е. $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$.

В силу закона парности внутренних сил системы:

1. Геометрическая сумма всех действующих на материальную систему внутренних сил или, что то же самое, главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю:

$$\vec{F}^{(J)} = \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \vec{F}_{ik} = 0.$$

2. Геометрическая сумма векторов моментов внутренних сил материальной системы относительно произвольного центра или, что то же самое, главный момент внутренних сил системы относительно этого центра равен нулю:

$$\vec{M}^{(J)} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ik}) = 0.$$

Последнее равенство обусловлено тем, что векторы моментов сил в паре $\vec{M}_O(\vec{F}_{ik})$ и $\vec{M}_O(\vec{F}_{ki})$ равны по модулю, лежат на одной прямой, но противоположно направлены.

## 1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной системы

Рассмотрим движение материальной системы, состоящей из "$n$" материальных точек. Пусть для каждой материальной точки этой системы известно: $m_i$ – масса $i$-й материальной точки; $\overline{F}_i^{(J)}$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на материальную точку,

$$\overline{F}_i^{(J)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{n} \overline{F}_{ik};$$

$\overline{F}_i^{(E)}$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку (рис. 1.6).

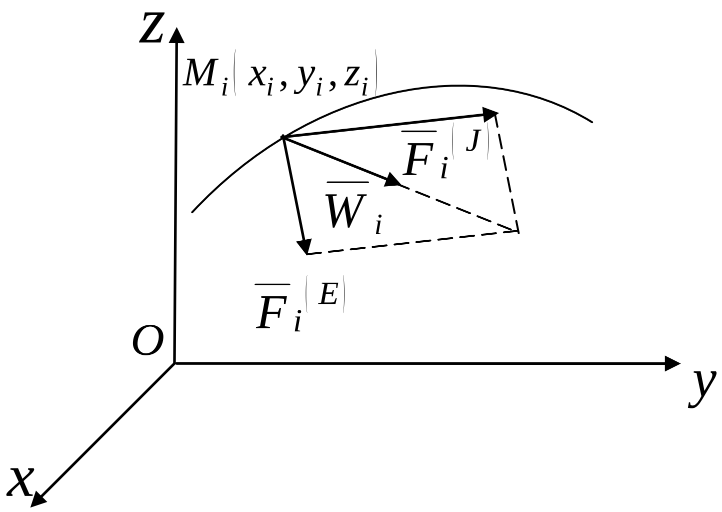



Рис. 1.6

Тогда основное уравнение динамики для каждой $i$-й материальной точки системы может быть записано в виде

$$m_i \overline{W}_i = \overline{F}_i^{(E)} + \overline{F}_i^{(J)}, \tag{1.2}$$

т. е. имеем "$n$" векторных уравнений вида (1.2), где $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$.

Введём декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $x_i, y_i, z_i$ – меняющиеся со временем декартовы координаты $i$-й материальной точки.

Согласно кинематике точки, координатное представление вектора ускорения будет следующим:

$$\overline{W}_i = \ddot{x}_i \bar{i} + \ddot{y}_i \bar{j} + \ddot{z}_i \bar{k}. \tag{1.3}$$

Координатное представление равнодействующей всех внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку,

$$\overline{F}_i^{\,E} = X_i^{\,E}\,\bar{i} + Y_i^{(E)}\,\bar{j} + Z_i^{(E)}\,\bar{k}. \tag{1.4}$$

Координатное представление равнодействующей всех внутренних сил, действующих на $i$-ю материальную точку,

$$\overline{F}_i^{\,J} = X_i^{\,J}\,\bar{i} + Y_i^{(J)}\,\bar{j} + Z_i^{(J)}\,\bar{k}. \tag{1.5}$$

С учётом выражений (1.3)–(1.5) спроектируем векторное выражение (1.2) на оси координат. В результате приходим к соотношениям, которые называются *дифференциальными уравнениями движения материальной системы*:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= X_i^{\,E} + X_i^{\,J}\,; \\ m_i\ddot{y}_i &= Y_i^{\,E} + Y_i^{\,J}\,; \\ m_i\ddot{z}_i &= Z_i^{\,E} + Z_i^{\,J}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$. Таким образом, имеем систему, состоящую из $3n$ уравнений.

*Если материальная система свободная*, то все действующие на неё силы являются активными и определяются как функции:

– координат всех материальных точек системы: $x_i, y_i, z_i$;

– компонент (составляющих) векторов скоростей всех точек материальной системы: $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$;

– времени $t$.

Поэтому для свободной материальной системы в правых частях дифференциальных уравнений (1.6) будут стоять известные функции координат материальных точек $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i,\ \ldots\ x_n, y_n, z_n$, их скоростей $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots\ \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i,\ \ldots\ \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ и времени $t$.

Следовательно, уравнения (1.6) будут образовывать систему $3n$ дифференциальных уравнений с $3n$ неизвестными координатами $x_i, y_i, z_i$. Общий порядок системы $6n$. Для определения закона движения материальной системы в координатной форме

$$x_i = x_i\,(t),\ \ y_i = y_i\,(t),\ \ z_i = z_i\,(t)$$

необходимо для всех $i = 1,\ 2,\ \dots\ n$ проинтегрировать данную систему дифференциальных уравнений. В ходе интегрирования возникнет $6n$ постоянных констант интегрирования. Для их определения необходимо задать начальные условия. Начальными условиями являются:

– положение всех точек материальной системы в начальный момент времени;

– скорость всех точек материальной системы в начальный момент времени.

То есть в момент $t_0 = 0$ надо знать:

– $x_i = x_{i0},\ \ y_i = y_{i0},\ \ z_i = z_{i0}$;

– $\dot{x}_i = \dot{x}_{i0},\ \dot{y}_i = \dot{y}_{i0},\ \dot{z}_i = \dot{z}_{i0}$

для всех $i = 1, 2,\ \dots\ n$.

*Если материальная система несвободная* и на её движение наложено $S$ двухсторонних связей, то уравнения данных связей имеют вид

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,\ \dots\ x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1,\ \dots\ \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0, \quad (1.7)$$

где $j = 1, 2,\ \dots\ S$.

Во всех этих связях возникает $S$ неизвестных динамических реакций $R_1, R_2, R_3,\ \dots\ R_S$, поэтому правые части уравнений системы (1.6) зависят (кроме координат положения и скоростей материальной точки системы и времени $t$) также от неизвестных реакций $R_1, R_2,\ \dots\ R_S$.

Соотношения (1.6) и (1.7) образуют замкнутую систему $(3n + S)$ дифференциальных уравнений относительно $(3n + S)$ неизвестных:

$$(x_1, y_1, z_1,\ \dots\ x_n, y_n, z_n, R_1, R_2,\ \dots\ R_S).$$

Таким образом, для несвободной материальной системы необходимо одновременно определять и координаты материальных точек системы, и динамические реакции двухсторонних связей.

## 1.4. Понятие о центре масс материальной системы

Рассмотрим движущуюся материальную систему, состоящую из "$n$" материальных точек. Пусть точка $O$ – неподвижный центр, а $\bar{r}_i$ – радиус-вектор $i$-й материальной точки системы (рис. 1.7).

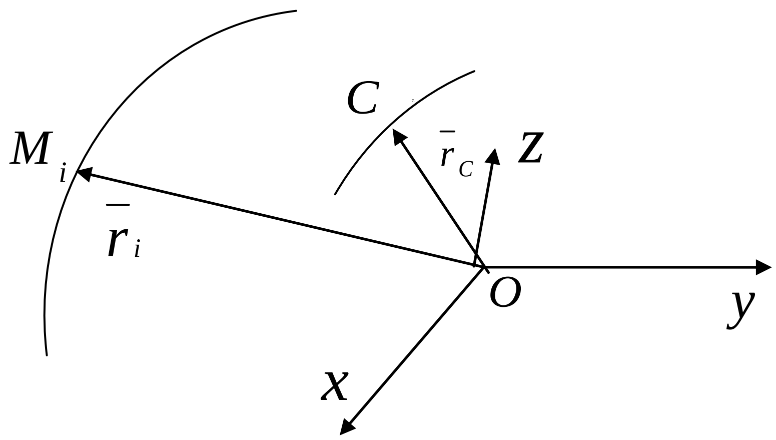



Рис. 1.7

**Определение**. Центром масс материальной системы называется точка пространства, радиус-вектор которой $\overline{r_C}$ определяется векторной формулой

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i, \tag{1.8}$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса материальной системы.

При движении материальной системы радиус-векторы её точек меняются и по модулю, и по направлению (см. рис. 1.7), поэтому центр масс системы меняет своё положение и перемещается в пространстве по некоторой траектории.

Если материальная система находится в однородном поле сил тяжести, то центр масс системы совпадает с центром тяжести, так как для центра тяжести ранее получили

$$\bar{r}_C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} P_i \bar{r}_i . \tag{1.9}$$

Здесь $P = m g$ – полный вес материальной системы; $P_i = m_i g$ – вес $i$-й точки материальной системы. Тогда очевидно, что

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m g} \sum_{i=1}^{n} m_i g \bar{r}_i ,$$

где $g$ – ускорение свободного падения.

Сократив числитель и знаменатель дроби на величину $g$, приходим к формуле (1.8), определяющей радиус-вектор центра масс материальной системы.

*Замечание*. Понятие центра масс системы является более общим, чем понятие центра тяжести, и полностью сохраняет свой смысл не только в поле однородных сил, но и в любом другом силовом поле.

Если ввести прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с началом $O$ в нашем неподвижном центре, то координатное представление радиус-вектора $i$-й точки системы имеет следующий вид:

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k} . \tag{1.10}$$

Координатное представление радиус-вектора центра масс

$$\bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k} , \tag{1.11}$$

где $x_C, y_C, z_C$ – переменные по времени декартовы координаты центра масс материальной системы.

Спроектируем векторное равенство (1.8) на декартовы оси с учётом выражений (1.10) и (1.11). В результате получим аналитические формулы для определения декартовых координат центра масс материальной системы:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i; \\ y_C &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i; \\ z_C &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

## 1.5. Теорема о движении центра масс материальной системы

**Определение.** Центр масс материальной системы движется как материальная точка с массой, равной полной массе системы под действием силы, равной главному вектору всех действующих на систему внешних сил.

### Доказательство

Для доказательства теоремы выпишем основное уравнение динамики для $i$-й материальной точки системы

$$m_i \overline{W}_i = \overline{F}_i^{(E)} + \overline{F}_i^{(J)}, \tag{1.13}$$

где $i = 1,\ 2,\ \dots\ n$.

Просуммируем векторно все выражения (1.13) по всем $i$ от единицы до $n$:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{W}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(J)}, \tag{1.14}$$

где выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(E)} = \overline{F}^{(E)} \tag{1.15}$$

является  главным вектором всех внешних сил, действующих на материальную систему, а формула

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(J)} = \overline{F}^{(J)} = 0 \tag{1.16}$$

обозначает главный вектор всех внутренних сил, действующих на материальную точку системы, равный нулю в силу закона парности внутренних сил.

Перепишем векторную формулу для определения радиус-вектора центра масс системы (1.8) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = m \overline{r}_C \ .$$

Продифференцируем дважды это векторное равенство по времени:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = m \frac{d^2 \overline{r}_C}{dt^2} \ . \tag{1.17}$$

Согласно кинематике материальной точки, $\dfrac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \overline{W}_i$ – вектор ускорения $i$-й точки материальной системы; $\dfrac{d^2 \overline{r}_C}{dt^2} = \overline{W}_C$ – вектор ускорения центра масс системы. Следовательно, из формулы (1.17) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{W}_i = m \overline{W}_C \, . \tag{1.18}$$

Тогда выражение (1.14) с учётом выражений (1.15)–(1.16) можно переписать в следующем виде:

$$m\overline{W_C} = \overline{F}^{\,E} \,. \qquad (1.19)$$

Итак, получено основное уравнение динамики для воображаемой материальной точки массой $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, которая движется под действием силы $\overline{F}^{(E)}$ и при этом в каждый момент времени совпадает с положением центра масс исходной материальной системы.

Теорема доказана.

*Следствие*. Закон сохранения движения центра масс материальной системы: **центр масс материальной системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если главный вектор всех действующих на систему внешних сил равен нулю.**

**Доказательство**

Если главный вектор всех внешних сил системы $\overline{F}^{(E)} = 0$, то из теоремы о движении центра масс материальной системы следует, что

$$m\overline{W}_C = \overline{F}^{\,E} = 0 \Rightarrow \overline{W}_C = 0 .$$

То есть ускорение центра масс системы равно нулю. Но согласно векторному способу задания движения материальной точки $\overline{W}_C = \dfrac{d\overline{\upsilon}_C}{dt}$, где $\overline{\upsilon}_C$ – вектор скорости движения центра масс системы. Так как $\overline{W}_C = 0$, то и $\dfrac{d\overline{\upsilon}_C}{dt} = 0 \;\Rightarrow \vec{\upsilon}_C$ = const, откуда следует, что вектор скорости движения центра масс материальной системы – есть вектор постоянный и по модулю, и по направлению, и в частном случае может быть равен нулю.

Следствие доказано.

*Замечание*. Подчеркнём, что характер движения центра масс системы в пространстве не зависит от внутренних сил и не может быть изменён под их влиянием.

## 1.6. Дифференциальные уравнения движения центра масс материальной системы

Выпишем основное уравнение динамики для центра масс системы:

$$m\overline{W}_C = \overline{F}^{(E)}. \tag{1.20}$$

Введём декартову систему координат $Oxyz$. Тогда вектор ускорения $\overline{W}_C$ и главный вектор всех внешних сил $\overline{F}^{(E)}$ через свои проекции можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \overline{W}_C &= \ddot{x}_C\,\bar{i} + \ddot{y}_C\,\bar{j} + \ddot{z}_C\,\bar{k}; \\ \overline{F}^{(E)} &= X^{(E)}\,\bar{i} + Y^{(E)}\,\bar{j} + Z^{(E)}\,\bar{k}. \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Спроектируем исходное векторное равенство (1.20) с учётом (1.21) на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения центра масс материальной системы:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_C &= X^{(E)}; \\ m_i\ddot{y}_C &= Y^{(E)}; \\ m_i\ddot{z}_C &= Z^{(E)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

В самом общем случае правые части этих уравнений зависят только от координат положения центра масс материальной системы и компонент (составляющих) вектора скорости его движения, а также времени, т. е. правые части – это некоторые функции вида

$$f = f(x_C, y_C, z_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C, t) = 0.$$

Тогда уравнения (1.22) образуют систему трех дифференциальных уравнений 6-го порядка с тремя неизвестными. Для определения закона движения центра масс системы в координатной форме, т. е. для получения зависимостей типа

$$x_C = x_C(t),\ y_C = y_C(t),\ z_C = z_C(t),$$

необходимо проинтегрировать систему уравнений (1.22) при заданных *начальных* условиях. Начальными условиями являются координаты и компоненты вектора скорости центра масс системы в момент начала рассмотрения движения системы при $t_0 = 0$:

$$x_C = x_{C0},\ y_C = y_{C0},\ z_C = z_{C0},$$
$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0},\ \dot{y}_C = \dot{y}_{C0},\ \dot{z}_C = \dot{z}_{C0}.$$

Таким образом, задача определения закона движения центра масс системы намного проще задачи определения закона движения всей материальной системы.

*Следствие*. Проекция центра масс материальной системы на координатную ось не изменится или будет меняться со временем по линейному закону, если проекция главного вектора внешних сил на эту ось равна нулю.

Доказательство следствия проведём на примере оси $Ox$. Пусть для этой оси проекция главного вектора на ось $x$ равна нулю, т. е. $X^{(E)} = 0$, тогда из уравнений (21) имеем: $m\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0$. Проинтегрируем это дифференциальное уравнение дважды по времени при следующих начальных условиях:

$$\text{при } t_0 = 0 \qquad x_C = x_{C0}, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_{C0},$$

тогда

$$\frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0, \qquad \dot{x}_C = c_1 = \dot{x}_{C0};$$

$$\frac{dx_C}{dt} = \dot{x}_{C0}, \qquad x_C = \dot{x}_{C0}(t) + x_{C0}.$$

Отсюда получим, что абсцисса центра масс системы, координата $x_C$, изменяется со временем линейно, а в случае, если $\dot{x}_{C0} = 0$, она постоянна.

*Пример.* Движение статора неуравновешенного электромотора по гладкой горизонтальной поверхности.

Пусть нам дан неуравновешенный электродвигатель. Пусть точка $C$ – центр масс всего двигателя; $C_1$ – центр масс статора; $C_2$ – центр масс ротора электродвигателя (рис. 1.8) и, соответственно, $m_1$ – масса статора, а $m_2$ – масса ротора.

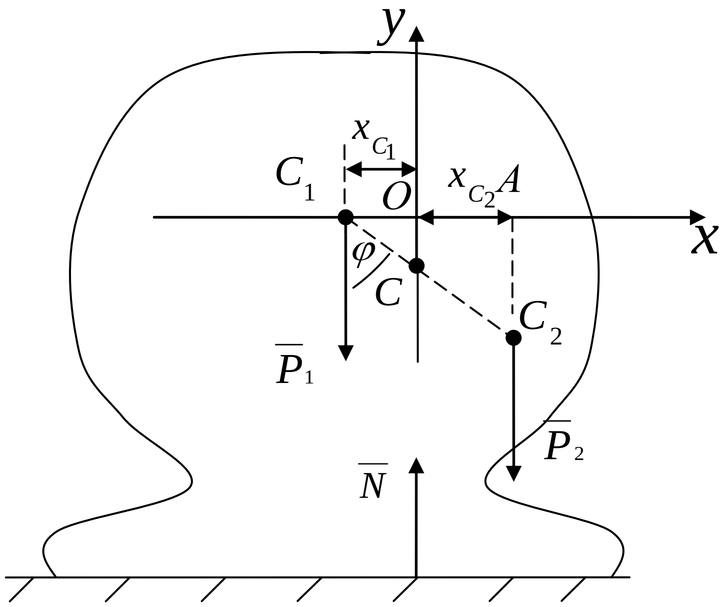



Рис. 1.8

Закон вращения ротора задан $\varphi = \omega t$, где $\omega = \text{const}$ – угловая скорость вращения ротора. Расстояние $C_1C_2 = \varepsilon$ называется эксцентриситетом ротора. Требуется определить закон движения статора по гладкой поверхности.

Очевидно, что на электродвигатель действуют три внешние силы: $P_1$ – вес статора, $P_2$ – вес ротора, $\overline{N}$ – нормальная реакция основания. Трением основания и сопротивлением воздуха пренебрегаем. Силы взаимодействия между ротором и статором являются внутренними силами системы, поэтому положение центра масс системы ротор–статор (т. е. центра масс электродвигателя) они изменить не могут.

Внешние силы $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ и $\overline{N}$ направлены перпендикулярно поверхности, на которой находится двигатель, поэтому они не могут перемещать центр масс системы параллельно поверхности, и, следовательно, центр масс не будет изменять своего положения в этом направлении в процессе работы электродвигателя. Введём прямоугольную систему координат $Oxy$ так, что ось $y$ перпендикулярна поверхности, на которой находится двигатель, а ось $x$ параллельна ей. Начало координат (точка $O$) выбрано так, что координата $x$ центра масс электродвигателя $x_C = 0$.

Если $x_{C1} = -OC_1$ – абсцисса центра масс статора, а $x_{C2} = OA$ – абсцисса центра масс ротора, то из прямоугольного треугольника $AC_1C_2$ получим:

$$x_{C2} + x_{C1} = AO + OC_1 =$$
$$= C_1C_2 \sin\varphi = \varepsilon \sin(\omega t) \Rightarrow x_{C2} = x_{C1} + \varepsilon \sin(\omega t).$$

Для точки $C$ центра масс всего двигателя $x$-я координата $x_C$, согласно аналитическим формулам для определения координат центра масс системы, определяется выражением

$$x_C = \frac{m_1 x_{C1} + m_2 x_{C2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_{C1} + m_2 (x_{C1} + \varepsilon \sin(\omega t))}{m_1 + m_2}, \text{ но } x_C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 x_{C1} + m_2 x_{C1} + m_2 \varepsilon \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow x_{C1} = -\frac{m_2 \varepsilon \sin(\omega t)}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, координата статора $x_{C1}$ изменяется по гармоническому закону, а само движение носит характер гармонических колебаний с частотой $\omega$, равной угловой скорости вращения ротора. Амплитуда этих колебаний:

$$a = \frac{m_2 \varepsilon}{m_1 + m_2}.$$

# 2. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

## 2.1. Понятие о векторе количества движения материальной системы

Рассмотрим материальную систему, состоящую из "$n$" материальных точек. Пусть $\bar{\upsilon}_i$ – вектор скорости $i$-й точки системы (рис. 2.1). Введём неподвижный центр $O$. Пусть $\vec{r}_i$ – радиус-вектор $i$-й материальной точки. Тогда согласно динамике материальной точки, $\vec{Q}_i = m\bar{\upsilon}_i$ – вектор количества движения $i$-й материальной точки системы.

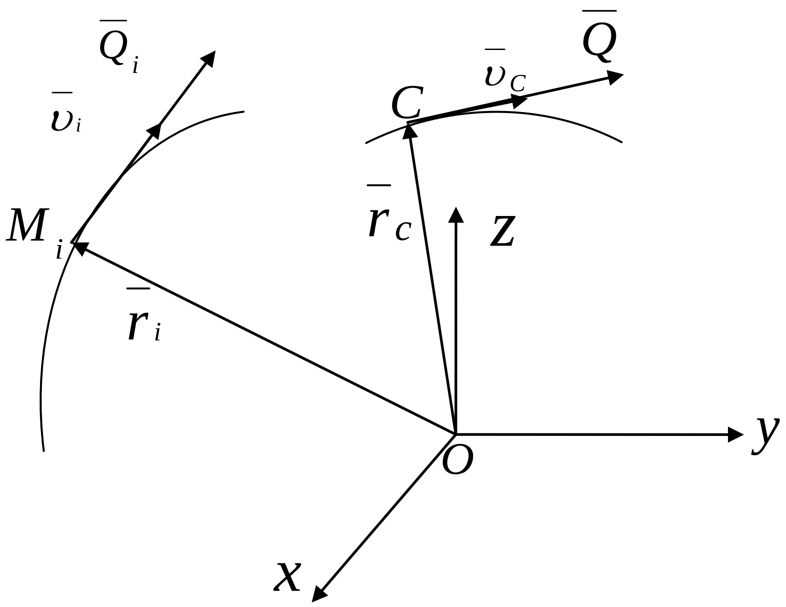



Рис. 2.1

**Определение.** Количеством движения материальной системы называется векторная величина, равная геометрической сумме векторов количества движения всех её материальных точек,

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^{n} \bar{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_i. \tag{2.1}$$

Пусть точка $C$ – центр масс материальной системы, тогда её радиус-вектор $\overline{r}_C$ определяется выражением

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{m},$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса всей материальной системы.

Продифференцируем приведенное векторное равенство по времени и получим

$$m\frac{d\overline{r}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{r}_i}{dt}.$$

Но $\frac{d\overline{r}_i}{dt} = \overline{\upsilon}_i$ – вектор скорости движения $i$-й точки, а $\frac{dr_C}{dt} = \vec{\upsilon}_C$ – вектор скорости центра масс системы. Следовательно,

$$m\overline{\upsilon}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\upsilon}_i .$$

Откуда получим, что вектор количества движения центра масс материальной системы $\overline{Q_C} = m\overline{\upsilon}_C$ равен вектору количества движения всей материальной системы $\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{Q}_i = \vec{Q}$.

Если ввести декартову систему координат $Oxyz$ с началом в точке $O$, то вектор скорости центра масс системы $\overline{\upsilon}_C$ через свои проекции может быть записан в виде

$$\overline{\upsilon}_C = \dot{x}_C \overline{i} + \dot{y}_C \overline{j} + \dot{z}_C \overline{k},$$

где $x_C, y_C, z_C$ – проекции вектора скорости $\overline{\upsilon}_C$ на оси координат.

Тогда проекции на оси координат вектора количества движения материальной системы будут следующие:

$$Q_X = m\dot{x}_C, \ Q_Y = m\dot{y}_C, \ Q_Z = m\dot{z}_C.$$

## 2.2. Теорема об изменении вектора количества движения материальной системы

**Определение.** Геометрическое приращение вектора количества движения материальной системы на некотором интервале времени равно векторной сумме импульсов всех действующих на систему внешних сил на том же интервале времени:

$$\overline{Q}\ t\ - \overline{Q}\ t_0\ = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i^{\ E}\ . \qquad (2.2)$$

**Доказательство**

Для доказательства теоремы запишем основное уравнение динамики движения центра масс системы:

$$m\overline{W}_C = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\ E} = \overline{F}^{\ E},$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – полная масса системы; $\overline{W}_C = \dfrac{d\overline{\upsilon}_C}{dt}$, где $\overline{W}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\overline{F}^{\ E} = \sum \vec{F}_i^{\ E}$ – главный вектор всех внешних сил, действующих на точки материальной системы; $\vec{F}_i^{\ E}$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на $i$-ю точку системы.

Перепишем векторное уравнение движения центра масс системы в следующем виде:

$$m\,\frac{d\overline{\upsilon}_C}{dt} = \overrightarrow{F}_i^{\;E} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\;E} \quad \text{или} \quad \frac{d\,(m\overline{\upsilon}_C)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\;E} \;,$$

но $m\overline{\upsilon}_C = \overline{Q}$ – количество движения всей материальной системы, следовательно, приходим к новой форме основного уравнения динамики движения центра масс системы:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\;E} \;. \tag{2.3}$$

Таким образом, производная по времени от вектора количества движения материальной системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Проинтегрируем векторное уравнение (2.3) по времени от начального момента $t_0 = 0$ до текущего момента времени $t$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\overline{Q}}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\;E}\,dt \;. \tag{2.4}$$

В соответствии с правилами векторного интегрирования имеем:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\overline{Q}}{dt}\,dt = \overline{Q}\;t\; - \overline{Q}\;t_0 \;,$$

где $\overline{Q}\;t$ – конечное количество движения материальной системы; $\overline{Q}\;t_0$ – начальное количество движения материальной системы; $\int_{t_0}^{t} \overline{F}_i^{\;E}\,dt = \vec{S}_i^{\;E}$ – импульс равнодействующей всех внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку в течение интервала времени от $t_0$ до $t$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \overline{F}_i^{\;E}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \overline{F}_i^{\;E}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i^{\;E} \;.$$

Подставляя полученные левую и правую части в выражение (2.4), приходим к равенству

$$\overline{Q}\ t\ -\overline{Q}\ t_0\ =\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i\ ^{E}\ . \qquad (2.5)$$

Теорема доказана.

*Замечание*. Отметим, что внутренние силы системы не оказывают влияния на изменение вектора количества движения материальной системы.

*Следствие 1*. Закон сохранения вектора количества движения материальной системы: **геометрическое приращение вектора количества движения материальной системы на некотором интервале времени равно нулю, если векторная сумма импульсов всех действующих на систему внешних сил на данном интервале времени равна нулю.**

Доказательство данного закона простое. Поскольку $\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i\ ^{E}\ = 0$, из равенства (2.5) следует, что $\overline{Q}(t)=\overline{Q}(t_0)$ .

*Следствие 2*. Алгебраическое приращение проекции вектора количества движения материальной системы на некоторую ось равно алгебраической сумме проекций векторов импульсов всех внешних сил на эту ось, действующих на систему на том же интервале времени.

**Доказательство**

Спроектируем векторное уравнение (2.5) на некоторую ось $Ox$, тогда имеем

$$Q_X\ t\ -Q_X\ t_0\ =\sum_{i=1}^{n}\overline{S}_X^{(E)}\ .$$

*Следствие 3*. Проекция вектора количества движения системы на некоторую ось неизменна, если алгебраическая сумма проекций на эту же ось векторов импульсов всех действующих на систему внешних сил равна нулю.

## Доказательство

$$\text{Если } \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_X^E = 0, \text{ то } Q_X(t) = Q_X(t_0).$$

*Пример*. Определить скорость отката артиллерийского орудия при выстреле. Дано: артиллерийское орудие (рис. 2.2); в момент времени $t = t_0$ перед выстрелом скорость орудия $u_0 = 0$ и скорость снаряда $\upsilon_0 = 0$.

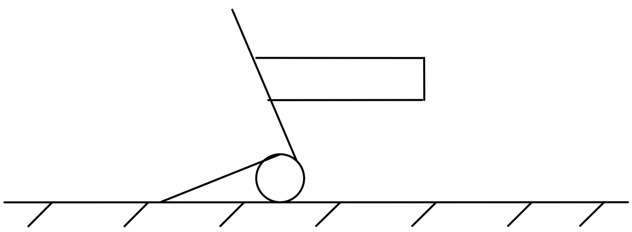


Рис. 2.2

В момент времени $t$, сразу после выстрела, скорости орудия и снаряда соответственно равны $\vec{u}$ и $\vec{\upsilon}$ (рис. 2.3). На систему действуют внешние силы: $\overline{P}_0$ – вес орудия, $\overline{P}_C$ – вес снаряда, $\overline{N}$ – нормальная реакция основания. Остальными внешними силами пренебрегаем.

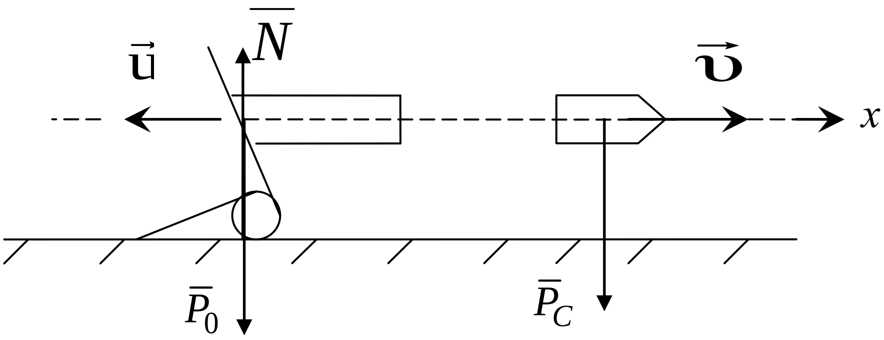



Рис. 2.3

Все внешние силы перпендикулярны горизонтальной оси $Ox$, вдоль которой после выстрела движутся снаряд и орудие. Следовательно, сумма проекций векторов импульсов этих сил на ось $x$ будет равна нулю, откуда

$$Q_X(t) - Q_X(t_0) = 0.$$

Поскольку в начальный момент $t = t_0$ система покоилась, то $Q_X(t_0) = 0 \Rightarrow Q_X(t) = 0$, но $Q_X(t) = m_0 \mathrm{u}_X + m_C \upsilon_X$, где $m_0$ – масса орудия, а $m_C$ – масса снаряда.

При нашем выборе направления оси $x$: $\mathrm{u}_X = -\mathrm{u}$, $\upsilon_X = \upsilon$,

тогда $-m_0 \mathrm{u} + m_C \upsilon = Q_X(t) = 0 \Rightarrow \mathrm{u} = m_C \dfrac{\upsilon}{m_0}$ – формула для определения скорости отката орудия при выстреле.

# 3. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

## 3.1. Момент и радиус инерции твёрдого тела относительно оси

Пусть имеются материальная точка $M$ и ось $z$ (рис. 3.1). Пусть $m$ – масса материальной точки, $h$ – кратчайшее расстояние от точки до оси.

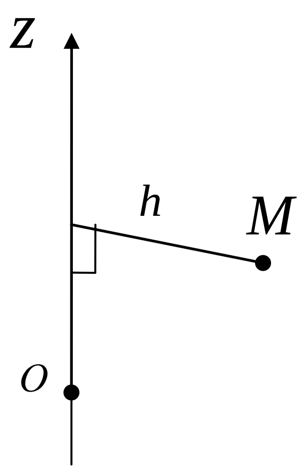



Рис. 3.1

**Определение 1.** Моментом инерции материальной точки относительно оси называется скалярная величина, равная произведению массы точки на квадрат кратчайшего расстояния от точки до оси,

$$J_Z = m h^2 . \tag{3.1}$$

Очевидно, что размерность момента инерции в системе СИ

$$J_Z = \text{кг} \cdot \text{м}^2 .$$

**Определение 2.** Моментом инерции твёрдого тела относительно оси называется положительная скалярная величина, равная сумме моментов инерции всех входящих в тело материальных точек относительно той же оси,

$$J_Z = \sum_{i=1}^{n} J_{Zi} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, h_i^2 . \qquad (3.2)$$

Пусть имеются некоторое твёрдое тело и декартова система координат $Oxyz$ (рис. 3.2).

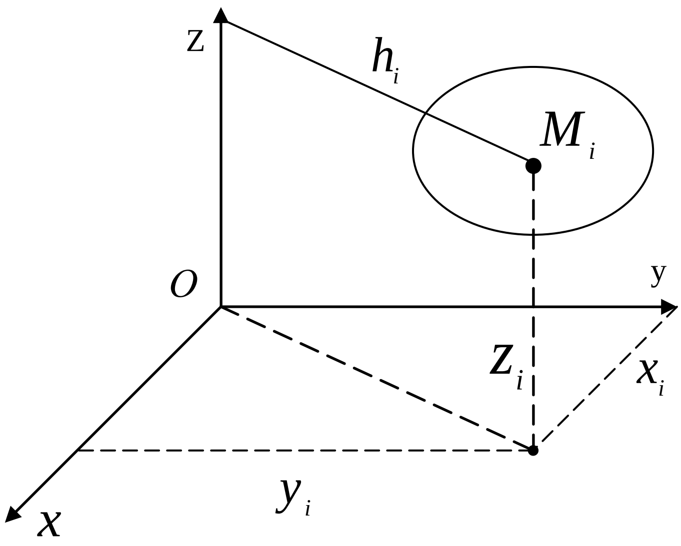



Рис. 3.2

Пусть $M_i$ ($i$-я точка тела) имеет координаты $x$, $y_i$, $z_i$, а её масса $m_i$. Пусть $h_i$ – кратчайшее расстояние от точки $M_i$ до оси $z$. Тогда, согласно определению, момент инерции точки $M_i$ относительно оси $z$ будет следующим:

$$J_Z = \sum_{i=1}^{n} J_{Zi} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, h_i^2 .$$

Согласно теореме Пифагора,

$$h_i^2 = ON_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \Rightarrow J_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad x_i^2 + y_i^2 \quad .$$

Аналогично можно получить моменты инерции твёрдого тела относительно других осей:

$$J_X = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2).$$

**Определение.** Радиусом инерции твёрдого тела относительно некоторой оси называется расстояние от этой оси до воображаемой материальной точки, масса и момент инерции которой относительно данной оси совпадают с массой и моментом инерции тела относительно той же оси.

Масса этой воображаемой материальной точки $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Момент инерции точки, согласно определению, равен $J_Z = m\rho_Z^2$, следовательно, радиус инерции твёрдого тела относительно оси $z$ определяется по формуле

$$\rho_Z = \sqrt{\frac{J_Z}{m}}. \tag{3.3}$$

Таким образом, *радиус инерции твёрдого тела относительно какой-либо оси равен корню квадратному из отношения момента инерции тела относительно этой оси к массе тела*.

## 3.2. Примеры вычисления моментов инерции твёрдого тела относительно оси

*Пример 1*. Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно его продольной оси.

Пусть дан стержень длиной $l$ с площадью поперечного сечения $S$. Пусть $\rho$ – объемная плотность материала, из которого сделан стержень, известна. Требуется определить момент инерции стержня относительно оси $z$ (рис. 3.3).

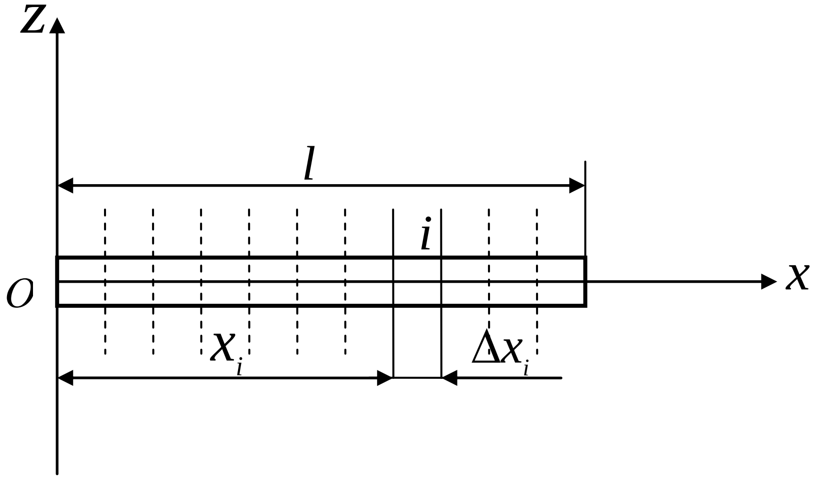



Рис. 3.3

Так как $l$, $S$ и $\rho$ нам известны, мы можем определить массу стержня:

$$m = l\,S\,\rho\,.$$

Разобьём мысленно стержень поперечными сечениями на "$n$" частей. Пусть $x_i$ – расстояние от $i$-й части стержня до оси $z$, а $\Delta x_i$ – длина $i$-й части. Тогда массу $i$-й части определим выражением $m_i = \rho\,S\,\Delta x_i$. Длину $\Delta x_i$ каждой $i$-й части принимаем настолько малой, что расстояние от всех её точек до оси $z$ приблизительно будем считать равным $x_i$. Тогда момент инерции $i$-й части стержня относительно оси $z$ примерно будет равен

$$J_{Zi} = m_i\,x_i^2 = \rho\,S\,x_i^2\,\Delta x_i\,.$$

Найдём сумму моментов инерции относительно оси $z$ всех "$n$" элементарных частей стержня

$$J_Z^{\,n} = \sum_{i=1}^{n} J_{Z_i} = \rho\,S \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\Delta x_i\,.$$

Данная формула даёт выражение для момента инерции стержня тем точнее, чем больше число элементарных частей "$n$" и чем меньше их длина $\Delta x_i$, поэтому точное значение получится после предельного перехода:

$$J_z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to\infty}} = \rho S \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to\infty}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,\Delta x_i .$$

Предел указанной суммы есть ничто иное, как определённый интеграл

$$J_z = \rho S \int_0^l x^2 dx = \rho S \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \frac{\rho S l^3}{3} = \underbrace{\rho S l}_{m} \frac{l^2}{3} = m \frac{l^2}{3}.$$

Тогда радиус инерции стержня относительно оси $z$ может быть определён как

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \sqrt{\frac{\cancel{m} l^2}{\cancel{m}\cdot 3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда видно, что радиус инерции $\rho_z$ больше, чем расстояние от оси до центра масс ($\frac{l}{\sqrt{3}} > \frac{l}{2}$).

*Замечание*. Надо помнить, что точка, находящаяся на расстоянии радиуса инерции тела от оси, не совпадает с центром масс тела.

*Пример 2*. Осевой момент инерции полого цилиндра (рис. 3.4).

Пусть имеется полый цилиндр высотой $h$, с внешним радиусом $R_1$ и внутренним радиусом $R_2$. Пусть $\rho$ – объёмная плотность материала, из которого сделан цилиндр. Тогда $S = \pi \; R_1^2 - R_2^2$ – площадь поперечного сечения цилиндра, а $m = \rho S h = \rho h \pi \; R_1^2 - R_2^2$ – общая масса цилиндра.

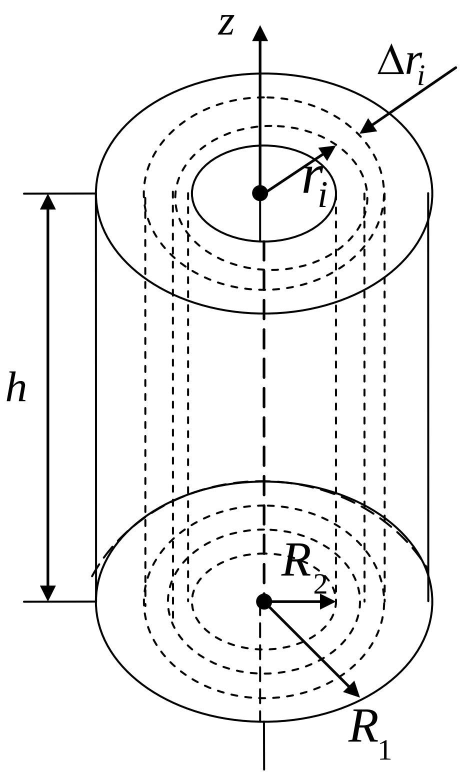



Рис. 3.4

Разобьём мысленно цилиндр на "$n$" элементарных цилиндров с толщиной стенок $\Delta r_i$ и внутренними радиусами $r_i$. Тогда внешний радиус каждого $i$-го цилиндра будет равен $r_i + \Delta r_i$. Массу каждого $i$-го цилиндра определяем из выражения

$$m_i = \rho h \pi \left[ (r_i + \Delta r_i)^2 - r_i^2 \right] = \pi \rho h \, (2 r_i \Delta r_i + \Delta r_i^2) =$$

$$= 2 r_i \pi \rho h \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta r_i}{r_i} \right) \Delta r_i .$$

Будем считать, что число элементарных цилиндров настолько велико, а их толщина $\Delta r_i$ настолько мала, что отношение $\dfrac{\Delta r_i}{r_i} << 1$ и им можно (по сравнению с единицей) пренебречь. Тогда с учётом этого допущения масса $i$-го цилиндра определяется выражением

$$m_i = 2\pi \rho h r_i \ \Delta r_i \, .$$

А его момент инерции относительно оси $z$

$$J_{Zi} = m_i \ r_i^2 = 2\pi \rho h r_i^3 \Delta r_i \, .$$

Полный момент инерции всего цилиндра относительно оси $z$ приблизительно определяется выражением

$$J_Z^{\ n} = 2\pi \rho h \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \ \Delta r_i \, .$$

Точное значение момента инерции цилиндра относительно оси $z$ получим при устремлении $n \to \infty$, а $\Delta r_i \to 0$:

$$J_Z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta r_i \to 0}} J_Z^{\ n} = 2\pi\rho h \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} r_i^3 \Delta r_i \, .$$

После перехода к пределу получим

$$J_Z = 2\pi\rho h \int_{R_2}^{R_1} r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{r^4}{4} \Bigg|_{R_2}^{R_1} = \frac{\pi}{2} \rho h \ \ R_1^4 - R_2^4 \ \ =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \pi\rho h \ \ R_1^2 - R_2^2}_{m} \ \ R_1^2 + R_2^2 \ = \frac{1}{2} m \ \ R_1^2 + R_2^2 \ \ .$$

*Пример 3*. Осевой момент инерции сплошного цилиндра.

Пусть дан сплошной цилиндр радиусом $R$ и массой $m$. Тогда, исходя из формулы для величины момента инерции полого цилиндра, имеем $R_1 = R$, $R_2 = 0 \Rightarrow$ $J = \dfrac{m R^2}{2}$ – момент инерции сплошного цилиндра относительно оси $z$.

*Пример 4*. Осевой момент инерции тонкостенного цилиндра.

Для тонкостенного цилиндра $R_1 = R_2 = R$.

Тогда $J_z = \frac{1}{2} m\ R_1^2 + R_2^2\ = \frac{1}{2} m\, 2R^2 = mR^2$ – момент инерции сплошного цилиндра относительно оси $z$.

Для тел простой геометрической формы моменты инерции могут быть вычислены аналогично. Сначала необходимо разбить эти тела на "$n$" элементарных частей, затем определить момент инерции одной части, далее суммировать моменты инерции всех частей тела и при переходе к пределу получить момент инерции данного тела относительно оси.

*Пример 5*. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр (рис. 3.5).

$$J_z = 0,4\ mR^2$$

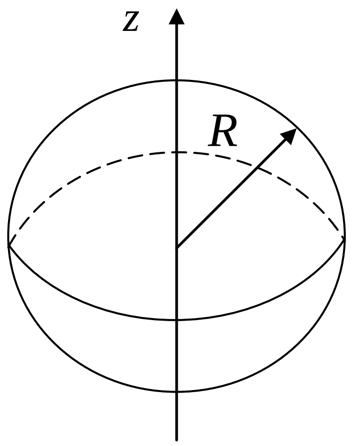



Рис. 3.5

*Пример 6*. Осевой момент инерции сплошного конуса (рис. 3.6).

$$J = 0,3\ mR$$

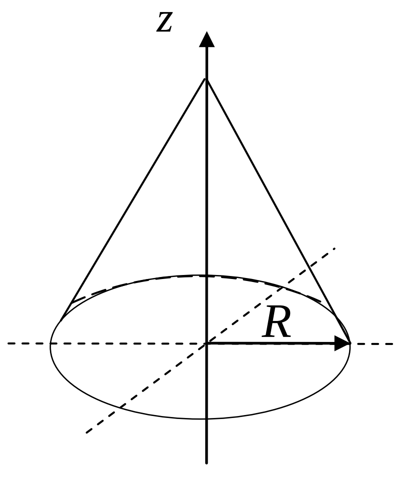
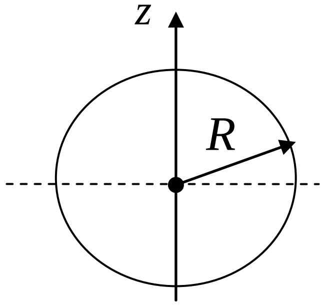



Рис. 3.6

*Пример 7*. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр диска и лежащей с ним в одной плоскости (рис. 3.7).




$$J_Z = \frac{mR^2}{4}$$

Рис. 3.7

## 3.3. Теорема Штейнера о моментах инерции твёрдого тела относительно параллельных осей

Прежде чем доказывать теорему, введём два определения.

**Определение 1.** Ось, проведённая через центр масс тела, называется центральной осью.

**Определение 2.** Момент инерции тела относительно центральной оси называется центральным моментом инерции тела.

**Теорема**. Момент инерции твёрдого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между указанными осями:

$$J_Z = J_{ZC} + m d^2 . \tag{3.4}$$

### Доказательство

Пусть имеется твёрдое тело с центром масс в точке $C$ и ось $z$. Расстояние от точки $C$ до $z$ равно ОС = $d$. Проведём ось $y$ через точку $C \perp z$, а ось $x$ – через точку $O$ перпендикулярно осям $z$ и $y$.

В результате получим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 3.8).

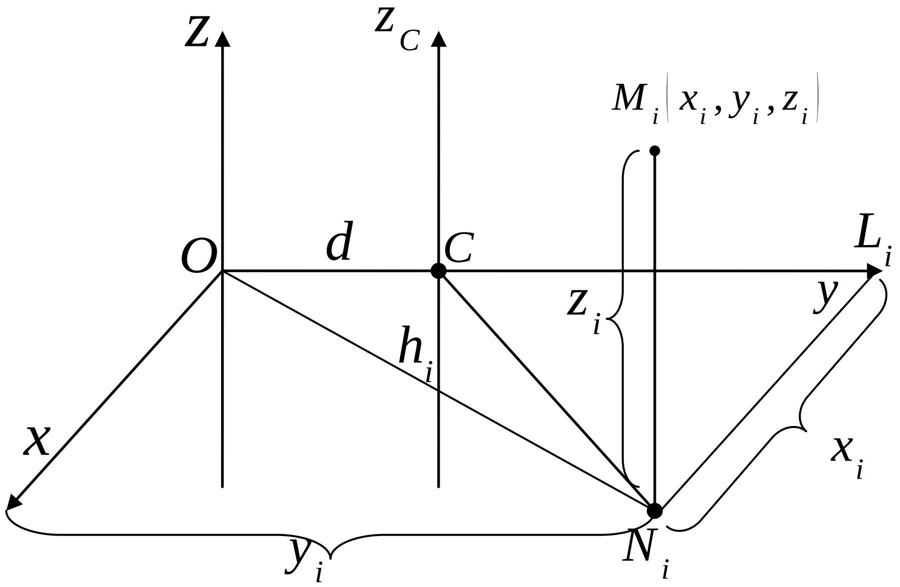



Рис. 3.8

Проведём через точку С центральную ось $z_C$, параллельную оси $z$. Расстояние между осями очевидно равно $y_C = OC = d$.

Рассмотрим произвольную точку $M_i$ твёрдого тела с координатами $x_i, y_i, z_i$. Момент инерции данной точки относительно оси $z$ равен

$$J_{Zi} = m_i h_i^2 = m_i ON_i^2 = m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

а момент инерции всего твёрдого тела относительно оси $z$

$$J_Z = \sum_{i=1}^{n} J_{Zi} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Момент инерции твёрдого тела относительно центральной оси

$$J_{z_C} = \sum_{i=1}^{n} m_i CN_i^2.$$

Из прямоугольного треугольника $CN_iL_i$ по теореме Пифагора имеем

$$CN_i^2 = CL_i^2 + L_iN_i^2 = \left(y_i - d\right)^2 + x_i^2 = y_i^2 + x_i^2 - 2dy_i + d^2,$$

тогда

$$J_{z_C} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)}_{J_Z} - 2d\sum_{i=1}^{n} m_i y_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{m} d^2 = J_Z + md^2 - 2d\sum_{i=1}^{n} m_i y_i. \quad (3.5)$$

Координата $y_C$ центра масс тела, согласно формуле для определения координат центра масс материальной системы, определяется выражением

$$y_C = d = \frac{1}{m}\sum_{i=1`}^{n} m_i y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = md.$$

Подставляя значение $y_C$ в выражение (3.5), получим

$$J_{z_C} = J_Z + md^2 - 2d\,md = J_Z - md^2 \Rightarrow J_Z = J_{z_C} + md^2. \quad (3.6)$$

Теорема доказана.

*Замечание 1*. Как видно из выражения (3.5), центральный момент инерции твёрдого тела относительно центральной оси всегда меньше, чем момент инерции тела относительно любой другой оси, параллельной центральной.

*Замечание 2*. Используя выражение (3.5) теоремы Штейнера, мы можем по известной величине центрального момента инерции легко определить момент инерции твёрдого тела относительно любой параллельной оси и наоборот.

*Пример 1*. Центральный момент инерции однородного стержня относительно центральной оси, перпендикулярной его продольной оси (рис. 3.9).

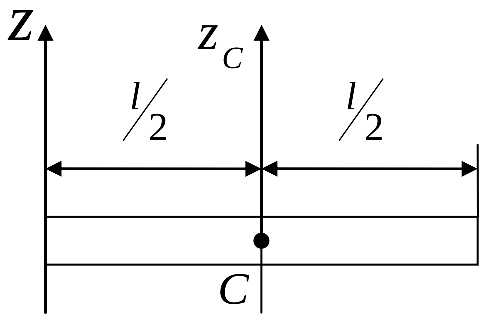



Рис. 3.9

Мы знаем, что $J_Z = \dfrac{ml^2}{3}$, очевидно, расстояние между осями $z$ и $z_C$ будет $d = \dfrac{l}{2}$. Тогда из выражения (3.5) имеем

$$J_{z_C} = J_Z - md^2 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12} \Rightarrow J_{z_C} = \frac{1}{4} J_Z .$$

Соответственно, радиус инерции относительно центральной оси

$$\rho_{z_C} = \sqrt{\frac{J_{z_C}}{m}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} = \frac{\rho_Z}{2}.$$

*Пример 2*. Момент инерции сплошного цилиндра относительно его образующей оси $z$ (рис. 3.10).

Мы знаем, что $J_{z_C} = \dfrac{mR}{2}$. Расстояние $d$ между осями равно радиусу цилиндра $R$, тогда согласно выражению (3.5)

$$J_Z = J_{z_C} + md^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

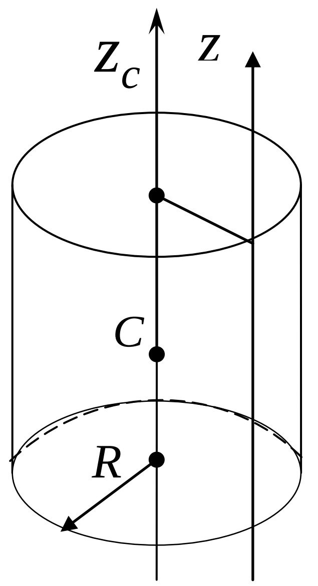



Рис. 3.10

Таким образом, момент инерции сплошного цилиндра относительно образующей оси $z$ в три раза больше, чем относительно центральной оси $z_C$.

# 4. КИНЕТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

## 4.1. Кинетические моменты системы относительно центра и оси

Рассмотрим движение материальной системы, состоящей из "$n$" материальных точек. Выберем произвольный неподвижный центр точку $O$ и рассмотрим движение $i$-й материальной точки системы (рис. 4.1). Пусть масса $i$-й точки – $m_i$, скорость её движения – $\overline{\upsilon}_i$, $\overline{r}_i$ – радиус-вектор положения материальной точки ($\overline{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$). Тогда вектор количества движения $i$-й точки, согласно динамике материальной точки, определяется выражением $\overline{Q}_i = m_i \overline{\upsilon}_i$, а кинетический момент $i$-й материальной точки относительно неподвижного центра $O$ будет равен

$$\overline{l}_{Oi} = \overline{r}_i \times \overline{Q}_i = m_i \overline{r}_i \times \overline{\upsilon}_i .$$

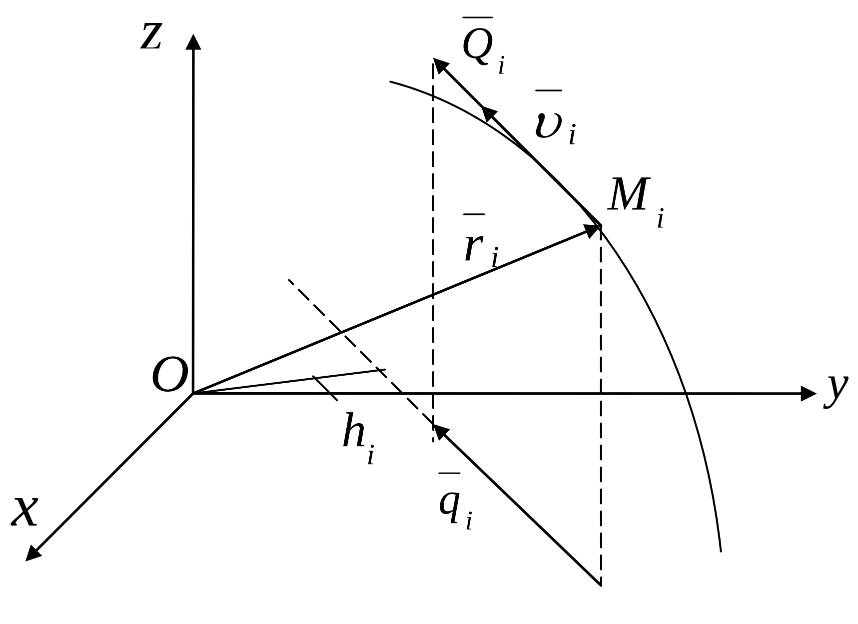



Рис. 4.1

**Определение 1**. Кинетическим моментом материальной системы относительно неподвижного центра называется векторная величина, равная геометрической сумме кинетических моментов всех материальных точек системы относительно того же центра:

$$\bar{l}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{l}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} m\, \bar{r}_i \times \bar{\upsilon}_i . \qquad (4.1)$$

Введём прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с центром в нашем неподвижном центре $O$ (см. рис. 4.1). Пусть $\bar{q}_i$ – проекция вектора количества движения $\bar{Q}_i$ на плоскость $Oxy$, $h_i$ – кратчайшее расстояние от оси $z$ (точки $O$) до линии действия проекции вектора количества движения $\bar{q}_i$. Тогда кинетический момент нашей $i$-й материальной точки системы относительно оси $z$ будет равен

$$l_{z_i} = \pm q_i h_i ,$$

где знак “$+$”, если $\bar{q}_i$ вращает плоскость $Oxy$ вокруг оси $z$ против хода часовой стрелки, и, наоборот, знак “$-$”, если $\bar{q}_i$ вращает плоскость $Oxy$ вокруг оси $z$ по часовой стрелке. (На рис. 4.1 $l_{z_i} > 0$.)

**Определение 2.** Кинетическим моментом материальной системы относительно оси является скалярная величина, равная алгебраической сумме кинетических моментов всех её точек относительно той же оси,

$$l_z = \sum_{i=1}^{n} l_{z_i} . \qquad (4.2)$$

Согласно теореме о связи кинетических моментов материальной точки относительно оси и центра, лежащего на этой оси, имеем

$$l = np\, \bar{l}_{Oi} .$$

С учётом этого спроектируем векторное равенство (4.1) на ось z. Тогда в силу теоремы о проекции геометрической суммы на ось получим

$$np_Z \bar{l}_O = l_Z = \sum_{i=1}^{n} np_Z \bar{l}_{Oi} .$$

Аналогично, проектируя равенство (4.1) на оси $x$ и $y$, имеем

$$np_X \bar{l}_O = l_X = \sum_{i=1}^{n} np_x \bar{l}_{Oi} , \quad np_Y \bar{l}_O = l_Y = \sum_{i=1}^{n} np_y \bar{l}_{Oi} .$$

Вектор кинетического момента материальной системы относительно начала координат через свои проекции на оси координат может быть записан в следующем виде:

$$\bar{l}_O = np_X \; \bar{l}_O \; \bar{i} + np_Y \; \bar{l}_O \; \bar{j} + np_Z \; \bar{l}_O \; \bar{k}$$

или

$$\bar{l}_O = l_X \bar{i} + l_Y \bar{j} + \bar{l}_Z \bar{k} . \qquad (4.3)$$

## 4.2. Кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Пусть имеется некоторое твёрдое тело (рис. 4.2), вращающееся вокруг неподвижной оси $z$ по известному закону $\varphi = \varphi\,(t)$.

Требуется определить кинетический момент твёрдого тела относительно оси z. Как нам известно из кинематики вращательного движения, угловая скорость вращения тела $\bar{\omega}$ – это вектор. Модуль данного вектора $\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = |\dot{\varphi}|$. Направлен указанный вектор вдоль оси z в ту сторону, откуда вращение твёрдого тела видим против хода часовой стрелки (см. рис. 4.2, а или 4.2, б).

То есть, если ввести орт $\bar{k}$ оси $Z$, то $\vec{\omega} = \omega_z \bar{k}$, где:

1) $\omega_z = \omega = \dot{\varphi} > 0$, если $\bar{\omega}$ и $\bar{k}$ совпадают по направлению (см. рис. 4.2, а);

2) $\omega_z = -\omega = \dot{\varphi} < 0$, если $\bar{\omega}$ и $\bar{k}$ имеют противоположные направления (см. рис. 4.2, б).

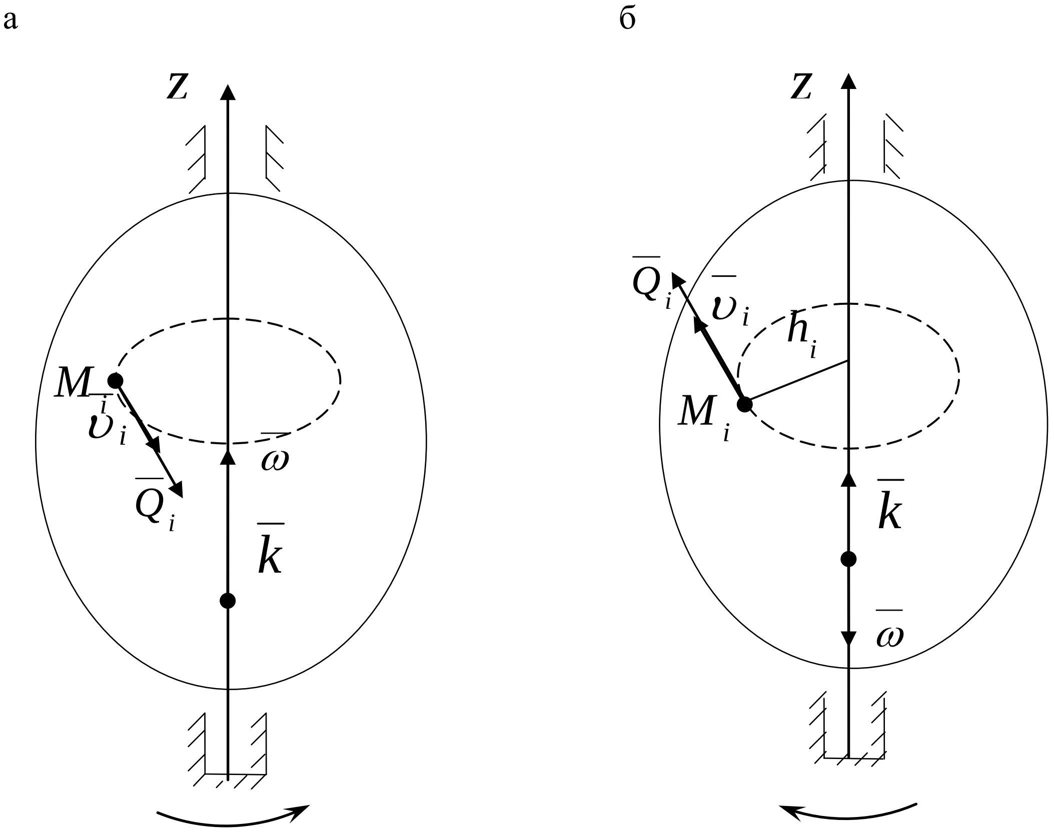



Рис. 4.2:
а – вращение против часовой стрелки; б – вращение по часовой стрелке

Рассмотрим движение $i$-й материальной точки твёрдого тела массой $m_i$, отстоящей от оси вращения на расстоянии $h_i$. Скорость точки $\bar{\upsilon}_i$ направлена по касательной к траектории движения, т. е. по касательной к окружности радиуса $h_i$ в сторону вращения твёрдого тела. Модуль данной точки $\upsilon_i = \omega h_i$. Вектор её количества движения $\bar{Q}_i$ направлен в ту же сторону, что и вектор скорости, а по величине $Q_i = m_i \upsilon_i = m_i h_i \omega$. Кинетический момент указанной точки относительно оси $z$, согласно определению, будет равен:

1) если $\omega_z > 0$ (см. рис. 4.2, а), то

$$l_{z_i} = h_i Q_i = m_i h_i^2 \omega = m_i h_i^2 \omega_z = m_i h_i^2 \varphi;$$

2) если $\omega_z < 0$ (см. рис. 4.2, б), то

$$l_{z_i} = -h_i Q_i = -h_i^2 m_i \omega = -m_i h_i^2 \; -\omega_z = m_i h_i^2 \omega_z = m_i h_i^2 \dot{\varphi}.$$

Следовательно, независимо от направления вращения

$$l_{z_i} = m_i h_i^2 \omega_z = m_i h_i^2 \dot{\varphi}.$$

Кинетический момент всего твёрдого тела относительно оси *z*, согласно определению, введённому в предыдущем разделе, равен алгебраической сумме кинетических моментов всех его точек относительно той же оси *z*:

$$l_z = \sum_{i=1}^{n} l_{z_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \omega_z.$$

Но $\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = J_z$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси z.
Тогда окончательно получим

$$l_z = J_z \omega_z. \tag{4.4}$$

Кинетический момент твёрдого тела относительно оси вращения равен произведению его момента инерции относительно этой оси на проекцию угловой скорости вращения тела на ось вращения.

Кинетический момент тела будет:

1) положительным ( $J_Z > 0$), если тело вращается в положительном направлении относительно оси;

2) отрицательным ($J_Z < 0$), если тело вращается в отрицательном направлении относительно оси.

Если ещё вспомнить, что $\omega_Z = \dot{\varphi}$, то $l_Z = J_Z \dot{\varphi}$.

## 4.3. Теорема о кинетическом моменте материальной системы относительно оси

*Производная по времени от кинетического момента материальной системы относительно оси равна алгебраической сумме моментов всех действующих на систему внешних сил относительно этой же оси*:

$$\frac{dl_Z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i^{(E)}\right).$$

**Доказательство**

Пусть имеются материальная система, состоящая из "$n$" материальных точек, и неподвижная ось z. Запишем теорему о кинетическом моменте $i$-й материальной точки системы относительно оси:

$$\frac{dl_{Zi}}{dt} = M\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + M\left(\overline{F}_i^{(J)}\right), \tag{4.5}$$

где $l_{Zi}$ – кинетический момент $i$-й материальной точки системы относительно оси z; $\overline{F}_i^{(E)}$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку; $\overline{F}_i^{(J)}$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на $i$-ю материальную точку.

Выражения, аналогичные выражению (4.5), мы можем составить для всех точек материальной системы ($i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$). Просуммируем правые и левые части выражений (4.5) по всем $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dl_{Zi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i^{(J)}\right).$$

Но здесь $\sum_{i=1}^{n}\frac{dl_{Z\,i}}{dt}=\frac{d\sum_{i=1}^{n}l_{Zi}}{dt}=\frac{dl_Z}{dt}$, где $l_Z$ – кинетический момент системы относительно оси z. $\sum_{i=1}^{n}M_Z\left(\overline{F}_i^{(J)}\right)=0$ в силу закона парности внутренних сил системы (главный момент всех внутренних сил системы относительно любой оси равен нулю).
Исходя из этого, имеем

$$\frac{dl_Z}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_Z\left(\overline{F}_i^{(E)}\right). \tag{4.6}$$

Теорема доказана.

*Следствие*. Закон сохранения кинетического момента материальной системы относительно неподвижной оси.

Кинетический момент материальной системы относительно неподвижной оси *постоянен*, если алгебраическая сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно той же оси равна нулю.

## Доказательство

Исходя из выражения (4.6) теоремы об изменении кинетического момента материальной системы относительно оси, имеем, если

$$\sum_{i=1}^{n}M_Z\left(\overline{F}_i^{(E)}\right)=0,$$

то

$$\frac{dl_Z}{dt}=0 \;\Rightarrow\; l_Z=\mathrm{const}\ \ t\ .$$

*Замечание*. Подчеркнём, что внутренние силы на величину кинетического момента материальной системы влияния не оказывают.

*Пример*. Платформа Жуковского (рис. 4.3).

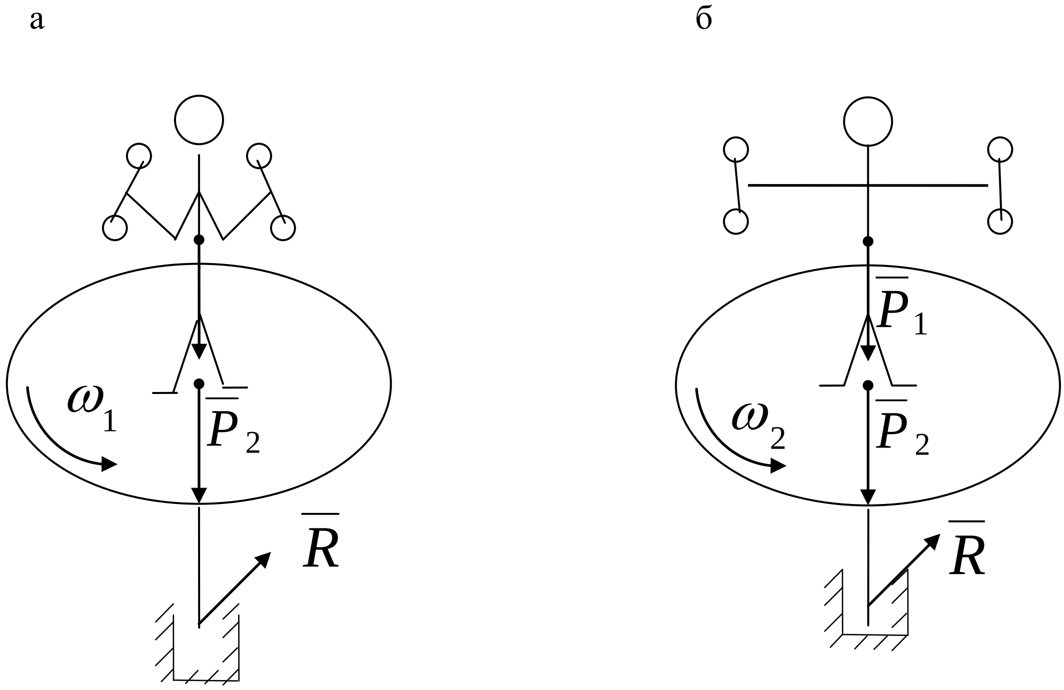



Рис. 4.3:
а – первоначальное положение материальной системы;
б – конечное положение материальной системы

Пусть $J_1$ – первоначальный момент инерции системы; $J_2$ – конечный момент инерции системы.

Очевидно, что $J_2 > J_1$.

На систему действуют: $P_1$ – сила веса человека с гантелями; $P_2$ – вес платформы; $R$ – динамическая реакция подпятника. Так как эти силы проходят через ось вращения, то момента относительно неё они не дают. Кинетический момент системы в первом случае $l_1 = J_1\,\omega_1$, во втором – $l_2 = J_2\,\omega_2$ .

В силу справедливости закона о сохранении кинетического момента

$$l_1 = l_2 \Rightarrow J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\,\omega_1 \Rightarrow \ \omega_2 < \omega_1, \text{ так как } \ J_2 > J_1.$$

То есть вращение платформы и человека замедлится.

## 4.4. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Пусть имеется некоторое твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси $z$ по какому-то закону $\varphi = \varphi\,(t)$ – рис. 4.4.

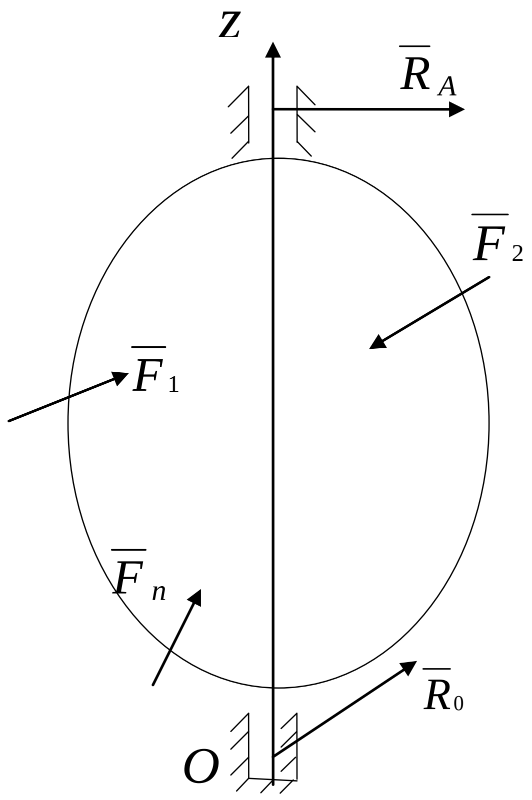



Рис. 4.4

Вращающееся тело находится под действием следующих внешних сил:

1) $\overline{F}_1, \overline{F}_2,\ \ldots\ \overline{F}_n$ – внешние активные силы;

2) $\overline{R}_O, \overline{R}_A$ – внешние динамические реакции подпятника $O$ и подшипника $A$.

Применим к нашему твёрдому телу теорему о кинетическом моменте материальной системы относительно оси:

$$\frac{dl_Z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_Z \;\; \overline{F}_i^{(E)} \;\; + M_Z \;\; \overline{R}_O \;\; + M_Z \;\; \overline{R}_A \;\; .$$

Мы знаем, что $l_z = J_z\,\dot{\varphi} = J_z\,\omega_z$.

Следовательно, $\dfrac{dl_Z}{dt} = J_Z\,\ddot{\varphi}$, $M_Z\left(\overline{R}_O\right) = M_Z\left(\overline{R}_A\right) = 0$, так как силы $\overline{R}_O$ и $\overline{R}_A$ пересекают ось $z$. Исходя из этого, получаем

$$J_Z\,\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i^{\,E}\right). \qquad (4.7)$$

Выражение (4.7) – это дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Заметим, что в правой части этого выражения стоят моменты только внешних активных сил.

С помощью дифференциального уравнения вращения (4.7), зная закон вращения $\varphi = \varphi\,(t)$ и момент инерции тела относительно оси вращения, можно определить главный момент всех внешних активных сил относительно оси вращения. Для этого надо дважды продифференцировать закон вращения $\varphi = \varphi\,(t)$ по времени и подставить в уравнение (4.7).

Если известны момент инерции тела относительно оси вращения и все активные силы, действующие на тело, то можно определить закон его вращения $\varphi = \varphi\,(t)$. Для этого надо определить алгебраическую сумму моментов всех внешних активных сил относительно оси вращения и подставить её в уравнение (4.7). Затем необходимо проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение второго порядка (4.7). При интегрировании возникнут две константы интегрирования, которые легко определить, если заданы начальные условия: положение тела и его угловая скорость вращения, т. е. при $t = 0$ будут известны $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

## 4.5. Физический смысл осевого момента инерции

Возьмём операцию модуля от обеих частей дифференциального уравнения вращения твёрдого тела (4.7). Так как $\left|\ddot{\varphi}\right| = \varepsilon$ – модуль вектора углового ускорения вращения тела, получим

$$J_Z\,\varepsilon = \left|\sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i\right)\right| \Rightarrow \varepsilon = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{F}_i\right)\right|}{J_Z}.$$

Как видим, чем больше момент инерции тела $J_z$, тем меньше угловое ускорение вращения тела и, следовательно, тем медленнее меняется характер его вращения. И наоборот, чем меньше $J_z$, тем больше угловое ускорение вращения тела и тем быстрее меняется характер вращения тела.

Таким образом, как масса тела $m$ характеризует инерционность тела при поступательном движении, так же момент инерции тела характеризует его инерционность при вращательном движении.

## 4.6. Теория физического маятника

**Определение**. Физическим маятником называется абсолютно твёрдое тело, которое в однородном поле сил тяжести может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси.

Пусть нам дан физический маятник (рис. 4.5). Здесь $Oz$ – горизонтальная ось вращения маятника; точка $C$ – центр масс маятника. Расстояние $OC = l$ называется *эксцентриситетом маятника*; $\overline{P}$ – вертикально вниз действующая сила веса маятника. Другими активными силами, действующими на маятник, пренебрегаем.

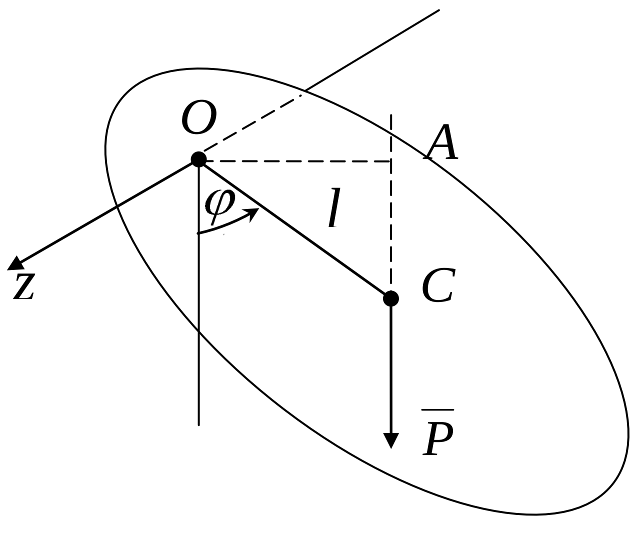



Рис. 4.5

В качестве координаты положения маятника выберем угол отклонения φ эксцентриситета $OC$ от вертикали. Запишем дифференциальное уравнение вращения маятника:

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z(\overline{P}).$$

Момент силы веса $M_z(\overline{P})$ относительно оси $Oz$ определяется выражением

$$M_z(\overline{P}) = -POA = -POC\sin\varphi = -Pl\sin\varphi.$$

С учётом данного выражения получаем дифференциальное уравнение движения физического маятника:

$$J_z\ddot{\varphi} + Pl\sin\varphi = 0. \tag{4.8}$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (4.8) *не интегрируется в элементарных функциях*. Поэтому далее рассмотрим частный случай малых колебаний физического маятника. То есть случай, когда $\varphi \ll 1$, а $\sin\varphi = \varphi$. Исходя из этого, получим следующее дифференциальное уравнение малых колебаний маятника:

$$J_z\varphi + Pl\varphi = 0. \tag{4.9}$$

Данное линейное дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно дифференциальному уравнению гармонических колебаний груза на пружине:

$$m\ddot{x} + cx = 0.$$

Следовательно, малые колебания физического маятника также носят гармонический характер и являются периодическими.

Решение дифференциального уравнения малых колебаний маятника аналогично решению задачи колебания груза на пружине. Как и там, мы получим закон гармонических малых колебаний физического маятника

$$\varphi = a\sin(kt + \alpha),$$

где $a = \sqrt{\varphi_0^2 + \dfrac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}$ – амплитуда колебаний ($\varphi_0$ и $\dot{\varphi}_0$ – начальные значения угловой координаты $\varphi$ и угловой скорости $\dot{\varphi}$); $k = \sqrt{\dfrac{Pl}{J_z}}$ – круговая частота колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}$ – формула для определения начальной фазы колебаний $\alpha$;

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Pl}}, \tag{4.10}$$

где $T$ – период малых гармонических колебаний маятника.

## 4.7. Экспериментальное определение осевого момента инерции твёрдого тела

В предыдущем разделе были выведены формулы для определения моментов инерции тел простой геометрической формы. На практике численное определение моментов инерции тел сложной конфигурации бывает весьма трудоёмким. Поэтому часто используют следующий экспериментальный способ определения момента инерции тела относительно оси:

– закрепляют ось, относительно которой хотят определить момент инерции тела, горизонтально в подшипниках, превратив тело в физический маятник;

– с помощью секундомера определяют период колебаний этого маятника;

– определяют вес и эксцентриситет данного маятника;

– вычисляют момент инерции тела относительно оси по формуле

$$J_z = Pl\,\frac{T^2}{4\pi^2}. \tag{4.11}$$

Данную формулу получают из формулы (4.10) для периода колебаний, если её разрешить относительно момента инерции $J_z$.

Указанный способ определения момента инерции тела относительно оси не может быть применён, если ось является центральной, т. е. проходит через центр масс тела и, следовательно, эксцентриситет $OC = l = 0$, а период колебаний $T \to \infty$.

В данном случае согласно вышеописанному способу надо определить момент инерции тела относительно оси, параллельной данной центральной оси. После этого центральный момент инерции определяют по теореме Штейнера о связи моментов инерции тела относительно параллельных осей:

$$J_{z_C} = J_z - ml^2 = Pl\,\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{P}{g}\,l^2.$$

# 5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

## 5.1. Понятие о кинетической энергии материальной системы

**Определение.** Скалярная положительная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы, называется *кинетической энергией материальной системы*:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 . \qquad (5.1)$$

Если вспомнить, что скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля $\bar{\upsilon}_i^2 = \upsilon_i^2$, то получим другую формулу для определения кинетической энергии материальной системы:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \bar{\upsilon}_i^2 . \qquad (5.2)$$

Для твёрдого тела, движущегося поступательно, мы знаем, что скорости всех его точек одинаковые, т. е. $\bar{\upsilon}_1 = \bar{\upsilon}_2 = \bar{\upsilon}_3 = \ldots = \bar{\upsilon}_n = \bar{\upsilon}_C$ – скорости центра масс тела. Тогда кинетическая энергия поступательного движения твёрдого тела определится выражением

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{m} \vec{\upsilon}_C^2 = \frac{m}{2} \upsilon_C^2 . \qquad (5.3)$$

То есть кинетическая энергия твёрдого тела при поступательном движении равна половине произведения его полной массы на квадрат модуля вектора скорости движения центра масс тела.

## 5.2. Кинетическая энергия твёрдого тела при вращательном движении

Пусть имеется некоторое твёрдое тело, вращающееся с угловой скоростью $\omega$ вокруг неподвижной оси $z$ (рис. 5.1). Рассмотрим движение $i$-й точки $M_i$ твёрдого тела, отстоящей на расстоянии $h_i$ от оси вращения.

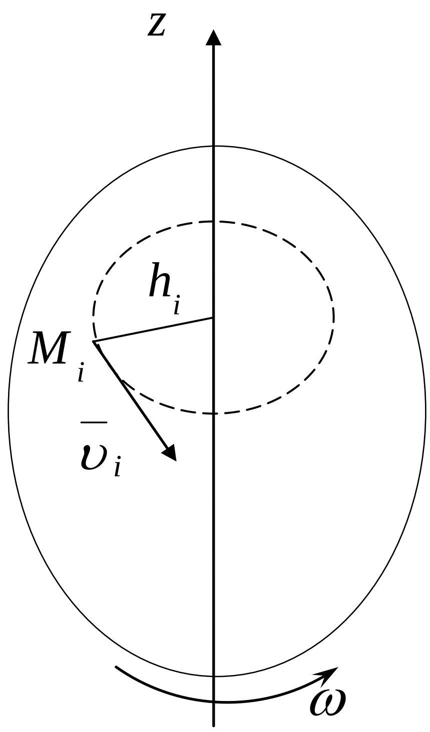



Рис. 5.1

Согласно кинематике вращательного движения, линейная скорость $i$-й точки $\upsilon_i = \omega h_i$, а кинетическая энергия

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 h_i^2 .$$

Кинетическая энергия всего тела, согласно определению, введённому в предыдущем разделе, равна

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 .$$

Но $\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = J_Z$ – это, согласно определению, момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения. Тогда кинетическая энергия твёрдого тела при вращательном движении определяется выражением

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 . \tag{5.4}$$

Она равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости его вращения.

Сравнивая формулы (5.3) и (5.4), отметим, что линейная скорость $\upsilon_C$ поступательного движения по физической сути аналогична угловой скорости вращательного движения твёрдого тела. А масса тела в поступательном движении аналогична по своей сути моменту инерции тела во вращательном движении. На такую аналогию было обращено внимание ранее.

## 5.3. Теорема Кёнига о кинетической энергии материальной системы

*Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии её поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии относительного движения системы относительно центра масс*:

$$T = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + T_r . \tag{5.5}$$

### Доказательство

Рассмотрим движущуюся материальную систему, состоящую из "$n$" материальных точек. Введём неподвижную декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 5.2). Пусть точка $C$ – центр масс материальной системы. Введём такую поступательно движущуюся вместе с центром масс систему координат $C\xi\eta\zeta$, что во всё время движения её оси $C\xi \parallel Ox$, $C\eta \parallel Oy$, $C\zeta \parallel Oz$.

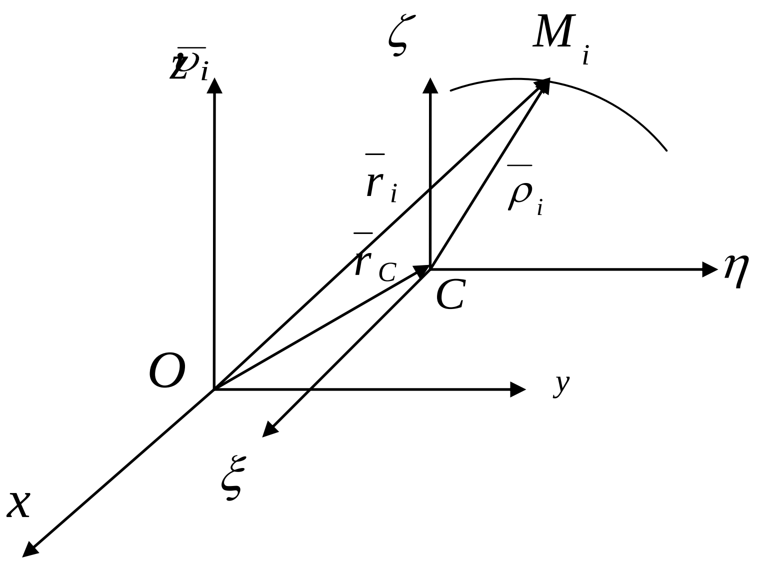



Рис. 5.2

Рассмотрим движение $i$-й материальной точки системы массой $m_i$ как составное. Переносным движением здесь будет являться поступательное движение вместе с центром масс материальной системы. Относительным движением будет перемещение точки относительно подвижной системы $C\xi\eta\zeta$.

Тогда согласно теореме о сложении скоростей в составном движении абсолютная скорость $\bar{\upsilon}_i$ $i$-й материальной точки

$$\bar{\upsilon}_i = \bar{\upsilon}_C + \bar{\upsilon}_{ir}, \tag{5.6}$$

где $\bar{\upsilon}_C$ – скорость центра масс – это скорость переносного движения всех точек материальной системы (так как переносная среда движется поступательно); $\bar{\upsilon}_{ir}$ – скорость относительного движения $i$-й материальной точки.

Введём следующие радиус-векторы:

$\bar{r}_i = \overline{OM}_i$ – абсолютный радиус-вектор $i$-й материальной точки;

$\bar{r}_C = \overline{OC}$ – радиус-вектор центра масс системы (одновременно радиус-вектор начала координат подвижной системы $C\xi\eta\zeta$);

$\bar{\rho}_i = \overline{CM}_i$ – относительный радиус-вектор $i$-й материальной точки системы.

Как видно из рис. 5.2, в каждый момент времени справедливо векторное равенство

$$\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{\rho}_i . \tag{5.7}$$

Продифференцируем левую и правую части векторного равенства (5.7) по времени:

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d\bar{r}_C}{dt} + \frac{d\bar{\rho}_i}{dt} .$$

Из кинематики материальной точки известно, что

$\dfrac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{\upsilon}_i$ – абсолютная скорость движения $i$-й материальной точки;

$\dfrac{d\bar{r}_C}{dt} = \bar{\upsilon}_C$ – скорость центра масс системы.

Тогда имеем

$$\bar{\upsilon}_i = \bar{\upsilon}_C + \frac{d\bar{\rho}_i}{dt} . \tag{5.8}$$

Сравнивая формулы (5.6) и (5.8), получим:

$$\bar{\upsilon}_{ir} = \frac{d\bar{\rho}_i}{dt} . \tag{5.9}$$

Перемножим левую и правую части выражения (5.7) на $m_i$ – массу $i$-й точки, а затем просуммируем геометрически эти выражения по всем точкам $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{m} \bar{r}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\rho}_C .$$

Радиус-вектор центра масс материальной системы определяется выражением

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\rho}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i - m\bar{r}_C = 0 .$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{\rho}_i}{dt} = 0..$$

Из выражения (5.9) $\dfrac{d\bar{\rho}_i}{dt} = \bar{\upsilon}_{ir}$ – относительная скорость движения точки, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_{ir} = 0 . \tag{5.10}$$

Согласно определению, кинетическая энергия материальной системы равна алгебраической сумме кинетических энергий всех её точек:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_i^{2} .$$

С учётом выражений (5.6) и (5.10) это выражение можно переписать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\bar{\upsilon}_C + \bar{\upsilon}_{ir}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\bar{\upsilon}_C^2 + 2\bar{\upsilon}_C \bar{\upsilon}_{ir} + \bar{\upsilon}_{ir}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_C^2 + \bar{\upsilon}_C \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_{ir} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_{ir}^2 = \frac{1}{2} m \bar{\upsilon}_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_{ir}^2 .$$

Но $\frac{1}{2} m \bar{\upsilon}_C^2$ – это кинетическая энергия переносного поступательного движения системы вместе с центром масс; $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\upsilon}_{ir}^2$ – кинетическая энергия относительного движения системы относительно центра масс. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} m \bar{\upsilon}_C^2 + T_r .$$

Теорема доказана.

## 5.4. Кинетическая энергия плоско-параллельного движения твёрдого тела

Пусть имеется твёрдое тело, совершающее плоско-параллельное движение. Проведём через центр масс тела центральную ось $z_C$, перпендикулярную плоскости движения (рис. 5.3). Тогда плоско-параллельное движение твёрдого тела мы можем представить как сумму двух движений:

1) переносного поступательного движения тела вместе с центром масс тела;

2) относительного вращательного движения тела относительно центральной оси $z_C$.

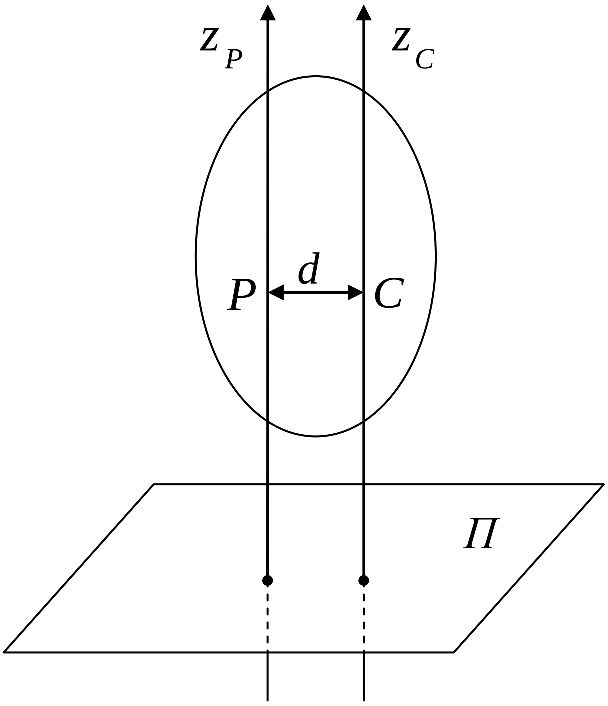



Рис. 5.3

Согласно теореме Кёнига, кинетическая энергия твёрдого тела при плоско-параллельном движении складывается из кинетической энергии поступательного движения $T_1 = \dfrac{m\upsilon_C^2}{2}$ вместе с центром масс и кинетической энергии относительного вращательного движения вокруг центральной оси $z_C$:

$$T_2 = \frac{J_{z_C}\omega^2}{2}.$$

То есть

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_{z_C}\omega^2}{2}. \qquad (5.11)$$

Дадим другой вывод этой формулы. Пусть имеется твёрдое тело, совершающее плоско-параллельное движение. Проведём через точку центра масс тела $C$ центральную ось $z_C$, перпендикулярную плоскости движения $\Pi$. Построим также мгновенную ось вращения $z_P$, которая, как нам известно, проходит через мгновенный центр скоростей каждой фигуры сечения тела и тоже перпендикулярна плоскости движения $\Pi$. Следовательно, оси $z_C$ и $z_P$ параллельны.

Как нам известно из кинематики, плоско-параллельное движение твёрдого тела можно рассматривать на бесконечно малом интервале времени как бесконечно малый поворот вокруг мгновенной оси вращения $z_P$. Поэтому кинетическая энергия твёрдого тела при плоско-параллельном движении может быть просто записана как кинетическая энергия вращения вокруг мгновенной оси $z_P$:

$$T_2 = \frac{J_{z_P}\omega^2}{2}.$$

Но мгновенная ось вращения перемещается относительно тела параллельно самой себе, поэтому момент инерции $J_{z_P}$ твёрдого тела относительно этой оси есть величина переменная. По теореме Штейнера о моменте инерции твёрдого тела относительно параллельных осей имеем

$$J_{z_P} = J_{z_C} + md^2,$$

где $d$ – кратчайшее расстояние между осями $z_P$ и $z_C$. Тогда

$$T_2 = \frac{J_{z_C}\omega^2}{2} = \left(J_{z_C} + md^2\right)\frac{\omega^2}{2} = J_{z_C}\frac{\omega^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\underbrace{d\,\omega}_{\upsilon_C}\right)^2 = J_{z_C}\frac{\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon_C^2}{2}.$$

*Пример*. Требуется определить кинетическую энергию цилиндра массой $m$ и радиусом $r$, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис. 5.4).

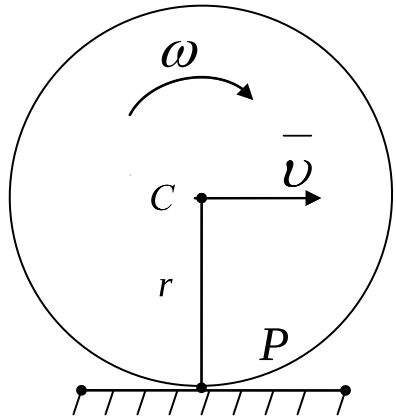



Рис. 5.4

Скорость движения цилиндра $\vec{\upsilon}$ равна скорости движения точки $C$ (его центра масс). Угловая скорость вращения: $\omega = \dfrac{\upsilon}{r}$.

Центральный момент инерции цилиндра: $J_{z_C} = \dfrac{mr^2}{2}$.

Тогда его кинетическая энергия:

$$T = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_{z_C}\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\cancel{r}^2}{2}\,\frac{\upsilon^2}{\cancel{r}^2}\,\frac{1}{2} = \frac{3}{4}m\upsilon^2.$$

Как видим, кинетическая энергия качения в 1,5 раза больше кинетической энергии поступательного движения цилиндра с той же скоростью.

## 5.5. Работа и мощность силы, приложенной к вращающемуся твёрдому телу

Пусть имеется твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси $z$ (рис. 5.5); $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения. К точке $M$ тела приложена сила $\overline{F}$, скорость движения точки $M$ равна $\overline{\upsilon}$.

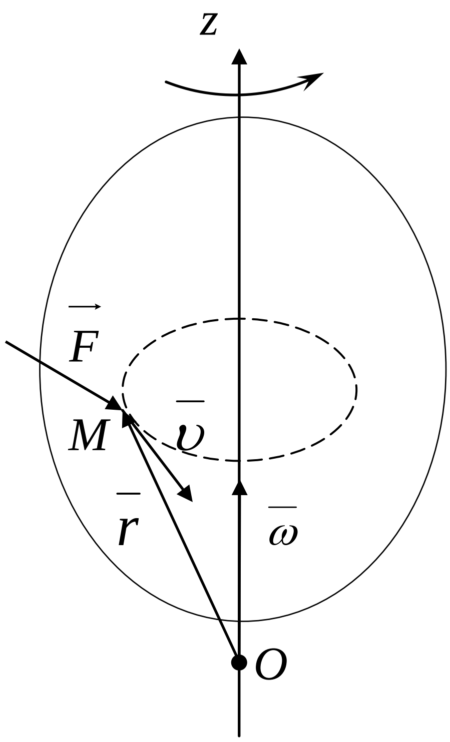



Рис. 5.5

Тогда мощность силы $\bar{F}$, согласно определению, можно найти из выражения

$$N = \bar{F}\,\bar{\upsilon}.$$

Возьмём на оси $z$ неподвижный центр $O$. Построим $\bar{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор точки $M$.

Из кинематики вращательного движения твёрдого тела мы знаем, что

$$\bar{\upsilon} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

следовательно,

$$N = \bar{F}\,(\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Согласно правилам смешанного произведения трёх векторов (правило цикличной перестановки трех векторов),

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}),$$

следовательно,

$$N = \overline{F} \cdot (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}).$$

Но $\overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_0(\overline{F})$ – вектор момента силы $\overline{F}$ относительно центра $O$. Тогда

$$N = \overline{\omega} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}) = \overline{\omega} \cdot \overline{M}_O(\overline{F}).$$

Если вспомнить, что скалярное произведение двух векторов

$$\overline{a}\,\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

то

$$N = \overline{\omega}\overline{M_O}(\overline{F}) = \omega_X \, np_X \, \overline{M}_O(\overline{F}) + \omega_Y \, np_Y \, \overline{M}_O(\overline{F}) + \omega_Z \, np_Z \, \overline{M}_O(\overline{F}).$$

Согласно определению вектора угловой скорости вращения, проекции этого вектора $\omega_X = \omega_Y = 0$, а $np_Z \overline{M}_O(\overline{F}) = M_Z(\overline{F})$. Тогда окончательно получаем

$$N = M_Z(\overline{F})\omega_Z. \tag{5.12}$$

Проекция вектора угловой скорости вращения $\overline{\omega}$ на ось $z$ определяется выражением

$$\omega_Z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

(она равна первой производной от закона вращения по времени), следовательно, формула для определения мощности силы, приложенной к вращательному твёрдому телу, имеет вид

$$N = M_Z(\overline{F})\,\dot{\varphi}.$$

Как мы знаем, мощность силы через элементарную работу $\delta A$ определяется выражением

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M_Z(\overline{F})\frac{d\varphi}{dt},$$

следовательно, формула для определения элементарной работы силы, приложенной к вращающемуся твёрдому телу, имеет вид

$$\delta A = M_Z(\overline{F})\,d\varphi.$$

Проинтегрируем это выражение на повороте от значения $\varphi_0$ до текущего значения $\varphi$. В результате получим следующее выражение для работы силы $\overline{F}$ на указанном повороте:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_Z(\overline{F})d\varphi. \qquad (5.13)$$

Как видно из выражения (5.13), если момент силы $\overline{F}$ относительно оси вращения постоянен, то работа этой силы равна произведению момента силы относительно данной оси на угол поворота:

$$A = M_Z(\overline{F})\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = M_Z(\overline{F})\ \ \varphi - \varphi_0\ \ = M_Z(\overline{F})\,\Delta\varphi. \qquad (5.14)$$

Если на вращающееся тело действует механическая пара сил, ориентированная в плоскости, перпендикулярной оси, и имеющая постоянный момент $M$, то работа механической пары сил определяется выражением

$$A = M\,\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота.

## 5.6. Работа внутренних сил материальной системы

Пусть имеется движущаяся материальная система, состоящая из "$n$" материальных точек. Рассмотрим взаимодействующие точки $M$ и $N$ системы (рис. 5.6).

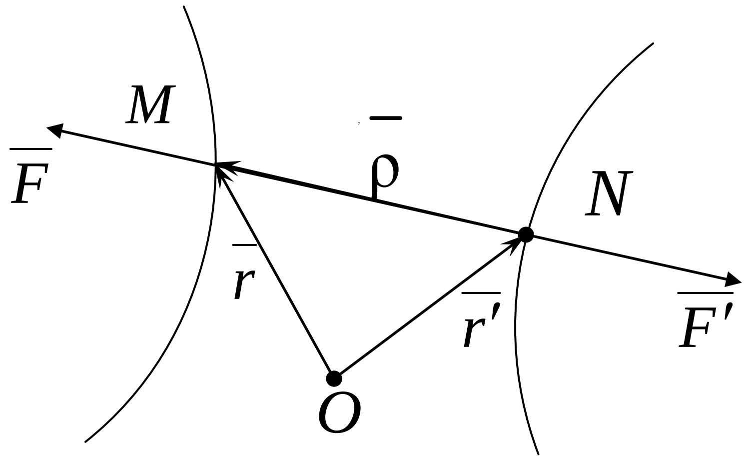



Рис. 5.6

Пусть $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ – силы взаимодействия между указанными точками (например, силы отталкивания). Согласно закону парности сил, $\overline{F} = -\overline{F'}$. Введём в пространстве неподвижный центр $O$. Пусть $\overline{r}$ и $\overline{r'}$ соответственно радиус-векторы точек $M$ и $N$. Тогда суммарную элементарную работу пары внутренних сил отталкивания можно определить следующим образом:

$$\delta A^{(J)} = \delta A_1^{(J)} + \delta A_2^{(J)} = \overline{F}\,d\overline{r} + \overline{F'}\,d\overline{r'},$$

где $d\overline{r}$ – вектор бесконечно малого действительного перемещения точки $M$; $d\overline{r'}$ – вектор бесконечно малого действительного перемещения точки $N$.

Подставив вместо $\overline{F}$ ее значение $\overline{F'}$, имеем:

$$\delta A^{(J)} = \overline{F}\,d\overline{r} + (-\overline{F})\,d\overline{r'} = \overline{F}\,d(\overline{r} - \overline{r'}).$$

Но $\overline{r} - \overline{r'} = \overline{NM} = \overline{\rho}$ – вектор расстояния между точками, следовательно:

$$\delta A' = \overline{F}\, d\overline{\rho}.$$

Векторы $\overline{F}$ и $\overline{\rho}$ лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление, следовательно,

$$\overline{F} = F\left(\frac{\overline{\rho}}{\rho}\right),$$

тогда

$$\delta A^{J} = \overline{F} d\overline{\rho} = F\frac{\overline{\rho}}{\rho} d\overline{\rho} = \frac{F}{\rho} d\left(\frac{\overline{\rho^2}}{2}\right) = \frac{F}{\rho}\, d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{F}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho}\, d\rho = F\, d\rho,$$

т. е. окончательно

$$\delta A' = F\, d\rho. \tag{5.15}$$

Если в процессе движения системы расстояние между точками $M$ и $N$ меняется от $\rho_0$ до $\rho$, где $\rho_0$ – начальное расстояние между точками; $\rho$ – конечное расстояние между точками, то, проинтегрировав выражение (5.15) получим:

$$A^{J} = \int_{\rho_0}^{\rho} F d\rho. \tag{5.16}$$

Работа пары внутренних сил отталкивания положительная, если конечное расстояние между точками больше (>) начального расстояния, т. е. $A^{(J)} > 0$, если $\rho > \rho_0$, и $A^{(J)} < 0$, если $\rho < \rho_0$.

В случае сил притяжения $A^{(J)} = -\int_{\rho_0}^{\rho} F d\rho$, так как $\overline{F} = -F\,\frac{\overline{\rho}}{\rho}$.

Работа сил притяжения будет положительной ($A^{(J)} > 0$), если $\rho < \rho_0$, и отрицательной ($A^{(J)} < 0$), если $\rho < \rho_0$.

*Замечание.* Внутренние силы, действующие на точки материальной системы, работу не совершают, если расстояние между взаимодействующими точками этой системы со временем не меняется. Поэтому работа электромагнитных сил взаимодействия между молекулами абсолютно твёрдого тела равна нулю, как бы тело не двигалось (поскольку расстояния между молекулами твёрдого тела со временем не меняются).

## 5.7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

*Алгебраическое приращение кинетической энергии материальной системы на некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил на том же перемещении:*

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right). \tag{5.17}$$

### Доказательство

Рассмотрим движущуюся материальную систему, состоящую из "$n$" материальных точек. Пусть при некотором движении системы её $i$-я точка переместилась из положения $M_{i0}$ в положение $M_{i1}$ (рис. 5.7).

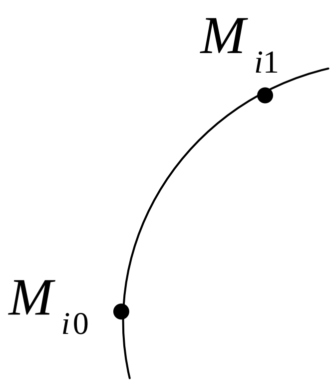



Рис. 5.7

Применим к указанной $i$-й точке системы теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$T_{i1} - T_{i0} = A_i^{(E)} + A_i^{(J)}, \tag{5.18}$$

где $T_{i1} = \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2$ – конечная кинетическая энергия $i$-й материальной точки; $T_{i0} = \frac{1}{2} m_i \upsilon_{i0}^2$ – начальная кинетическая энергия $i$-й материальной точки; $\upsilon_i$ и $\upsilon_{i0}$ – модули конечной и начальной скоростей движения $i$-й материальной точки; $A_i^{(E)} = A\left(\overline{F}_i^{(E)}\right)$ – работа равнодействующей внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку на рассматриваемом перемещении; $A_i^{(J)} = A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right)$ – работа равнодействующей внутренних сил, действующих на $i$-ю материальную точку на том же перемещении.

Для всех точек системы ($i$ = 1, 2, … $n$) составим алгебраические равенства (5.18), просуммируем их и получим:

$$\sum_{i=1}^{n} T_{i1} - \sum_{i=1}^{n} T_{i0} = \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right).$$

Но $\sum_{i=1}^{n} T_{i1} = T_1$ – конечная кинетическая энергия системы; $\sum_{i=1}^{n} T_{i0} = T_0$ – начальная кинетическая энергия материальной системы.

Следовательно, имеем:

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right).$$

Теорема доказана.

*Замечание 1*. В случае, если материальная система представляет собой абсолютно твёрдое тело, расстояние между точками тела не меняется, следовательно, работа внутренних сил системы

$$A\left(\overline{F}^{(J)}\right) = \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right) = 0,$$

следовательно, теорема об изменении кинетической энергии твёрдого тела имеет вид

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(E)}\right).$$

*Замечание 2*. Если в материальную систему наряду с материальными точками входят твёрдые тела, то для определения их кинетической энергии надо использовать теорему Кёнига.

*Пример*. Материальная система состоит из следующих элементов:

– блока радиусом $r$, имеющего центральный момент инерции $J$;

– намотанной на блоке невесомой и нерастяжимой нити;

– подвешенного к концу нити груза весом $P$.

Система начинает двигаться из состояния покоя (рис. 5.8). Требуется определить скорость груза $\upsilon$ после того, как он опустится на величину $h$. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right).$$

На систему действуют следующие внешние силы: вес груза $\overline{P}$, вес блока $\overline{P}_\delta$ и реакция цилиндрического шарнира $\overline{R}$. Действием прочих внешних сил на систему пренебрегаем.

Расстояние между точками груза и блока меняется со временем, однако эти точки не взаимодействуют друг с другом, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} A\left(\overline{F}_i^{(J)}\right) = 0.$$

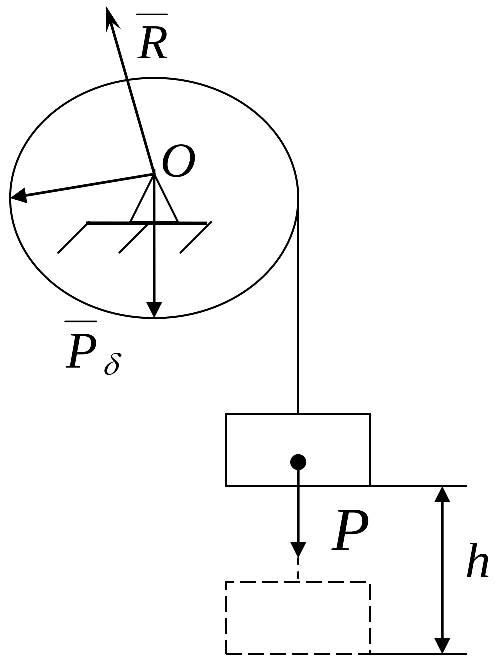



Рис. 5.8

Тогда

$$T_1 - T_0 = A(\overline{P}) + A(\overline{P}_\delta) + A(\overline{R}).$$

$T_0 = 0$, так как система в начальный момент времени покоилась.

$$T_1 = T_{1гр} + T_{1бл}, \text{ но } T_{1гр} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\upsilon^2,$$

$$\text{а} \quad T_{1бл} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\frac{\upsilon^2}{r^2} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}\upsilon^2\left(\frac{P}{g} + \frac{J}{r^2}\right).$$

Работа силы веса $\vec{P}$ определяется выражением $A(\overline{P}) = Ph$, а работы сил $\vec{R}$ и $\vec{P}\delta$ соответственно $A(\overline{R}) = A(\overline{P}\delta) = 0$, так как центр тяжести блока не имеет перемещения. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\upsilon^2\left(\frac{P}{g} + \frac{J}{r^2}\right) = P \cdot h \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2P \cdot h}{\frac{P}{g} + \frac{J}{r^2}}}.$$

# 6. КИНЕТОСТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

## 6.1. Метод кинетостатики для материальной системы

Рассмотрим движущуюся материальную систему, состоящую из $"n"$ материальных точек. Пусть $M_i$ – одна из точек системы с массой $m_i$ и ускорением движения $\bar{W}_i$; $\bar{F}_i^{(E)}$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на $i$-ю материальную точку системы; $\bar{F}_i^{(J)}$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на эту точку системы. Запишем уравнение кинетостатики для $i$-й точки системы:

$$\overline{F}_i^{(E)} + \overline{F}_i^{(J)} + \overline{J}_i = 0. \tag{6.1}$$

Геометрическая сумма всех сил, действующих на материальную точку, включая силу инерции, равна нулю. В этом выражении $\overline{J}_i$ – сила инерции, которая определяется выражением

$$\overline{J}_i = -m_i \overline{W}_i,$$

а её модуль

$$J_i = m_i W_i.$$

Если составить аналогичные уравнению (6.1) уравнения кинетостатики для всех точек материальной системы $i = 1, 2, \ldots n$ и просуммировать их векторно друг с другом, то мы получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(J)} + \sum_{i=1}^{n} \overline{J}_i = 0. \tag{6.2}$$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(E)}$ – главный вектор всех внешних сил, действующих на систему; $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(J)} = 0$ – главный вектор внутренних сил системы, который согласно закону парности внутренних сил равен нулю; $\sum_{i=1}^{n}\vec{J}_i$ – главный вектор сил инерции материальной системы.

Окончательно получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i^{(E)}+\sum_{i=1}^{n}\overline{J}_i=0. \qquad (6.3)$$

Введём в пространстве неподвижный центр $O$. Пусть $\overline{r}_i$ – радиус-вектор положения $i$-й точки. Умножим векторно каждое уравнение (6.1) на радиус-вектор положения материальной точки $\overline{r}_i$, сложим все уравнения $i$ = 1, 2, … $n$ и получим

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i^{(E)}+\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i^{(J)}+\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{J}_i=0.$$

Здесь $\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i^{(E)}=\overrightarrow{M}_0^{(E)}=\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_0\left(\overline{F}_i^{(E)}\right)$ – главный момент внешних сил относительно выбранного центра $O$; $\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i^{(J)}=\overrightarrow{M}_0^{(J)}=\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_0\left(\overline{F}_i^{(J)}\right)$ – главный момент внутренних сил системы, который согласно закону парности внутренних сил равен нулю; $\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{J}_i=\overline{M}_0^{(ин)}(\vec{J}_i)$ – главный момент сил инерции точек системы относительно центра $O$.

Тогда окончательно имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_0\left(\overline{F}_i^{(E)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_0^{(ин)}\left(\overline{J}_i\right)=0. \qquad (6.4)$$

Уравнения (6.3) и (6.4) образуют систему векторных уравнений кинетостатики материальной системы.

Если спроектировать на декартовы оси координат уравнения (6.3) и (6.4), то получим следующие 6 аналитических уравнений кинетостатики материальной системы:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} X_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{n} \overline{J}x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Mx\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} Mx\left(\overline{J}_i\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} Y_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{n} \overline{J}y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} My\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} My\left(\overline{J}_i\right) = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(E)} + \sum_{i=1}^{n} \overline{J}z_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Mz\left(\overline{F}_i^{(E)}\right) + \sum_{i=1}^{n} Mz\left(\overline{J}_i\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

*Замечание.* Для использования данных уравнений при решении задач динамики необходимо предварительно привести силы инерции системы к простейшему виду, т. е. главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции системы.

## 6.2. Примеры приведения сил инерции твёрдого тела к простейшему виду

*Пример 1*. Поступательное движение твёрдого тела.

При поступательном движении твёрдого тела векторы ускорений всех его точек одинаковые (рис. 6.1), т. е. все $\overline{W}_i = \overline{W}$. Поэтому силы инерции материальных точек тела $\overline{J}_i = -m_i\overline{W}$ образуют систему параллельных сил одного направления.

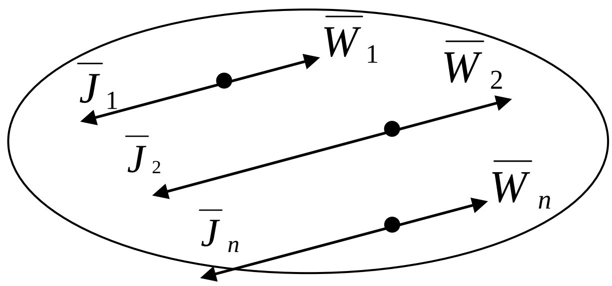



Рис. 6.1

Из статики известно, что указанная система сил приводится к одной равнодействующей силе, приложенной в так называемом центре параллельных сил. Она равна

$$\overline{J} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{W} = -\overline{W} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{m} = -m\overline{W}\,.$$

Следовательно, при поступательном движении твёрдого тела для вектора силы инерции тела справедлива та же формула, что и при движении одной материальной точки.

Радиус-вектор $\overline{r_ц}$ точки приложения равнодействующей сил инерции найдем по правилу определения радиус-вектора центра параллельных сил

$$\overline{r}_ц = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{J}_i \overline{r}_i}{\overline{J}} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} m_i W \overline{r}_i}{-mW} = \frac{W\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{mW} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{m} = \overline{r}_C\,. \qquad (6.6)$$

По этой же формуле, как мы знаем, определяется радиус-вектор положения центра масс тела (см. разд. 1, формула (1.7)).

Итак, силы инерции твёрдого тела при поступательном движении приводятся к равнодействующей силе, приложенной к центру масс тела.

*Пример 2*. Вращательное движение твёрдого тела вокруг оси материальной симметрии тела.

Рассмотрим вращательное движение твёрдого тела вокруг своей оси материальной симметрии (рис. 6.2). Пусть тело вращается вокруг этой оси с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и угловым ускорением $\overline{\varepsilon}$.

Вследствие материальной симметрии тела каждой точке $M_i$ с массой $m_i$, находящейся на расстоянии $h_i$ от оси вращения, соответствует другая точка $M'_i$ с той же массой $m_i$ и расстоянием $h_i$ от оси вращения, лежащая на одном и том же перпендикуляре к оси вращения.

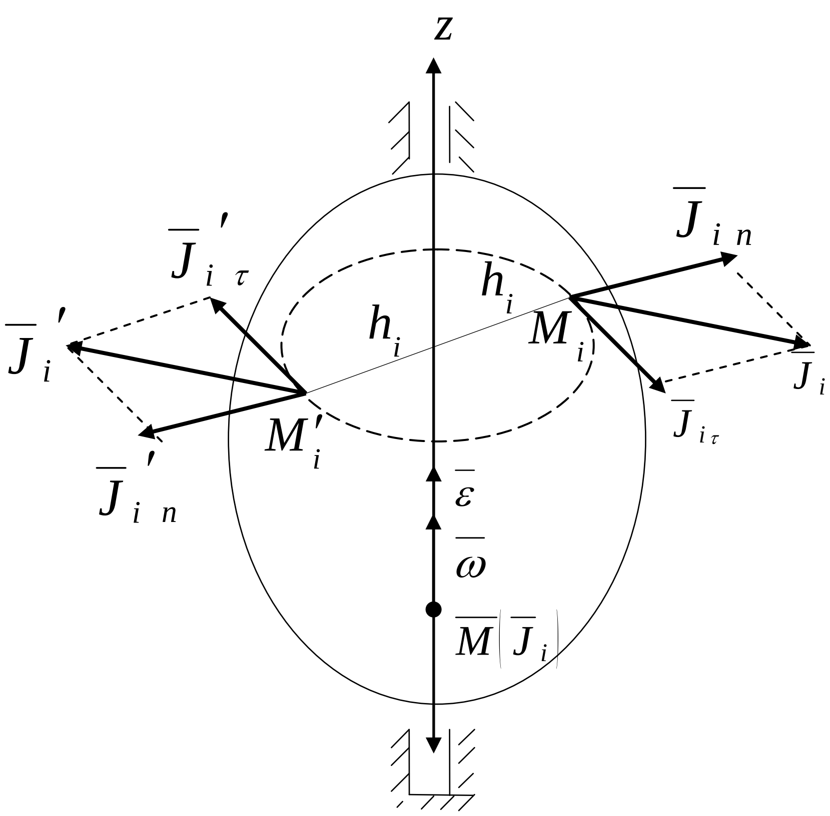



Рис. 6.2

Разложим силы инерции точек $M_i$ и $M_i'$ на нормальные и касательные составляющие к траектории движения (окружности):

$$\overline{J}_i = \overline{J}_{i\tau}' + \overline{J}_{in}; \qquad \overline{J}_i' = \overline{J}_{i\tau}' + \overline{J}_{in}'.$$

Модули касательных и нормальных сил инерции указанных точек соответственно равны:

$$\overline{J}_{i\tau} = m_i h_i \varepsilon = \overline{J}_{i\tau}',$$

$$\overline{J}_{in} = m_i h_i \omega^2 = \overline{J}_{in}'.$$

Нормальные силы инерции $\overline{J}_{in}$ и $\overline{J}_{in}'$ противоположны по направлению и лежат на одной прямой. Следовательно, они уравновешиваются для каждой пары точек тела. Касательные силы инерции образуют механическую пару, модуль момента которой

$$\overline{M}_Z\,(\overline{J_i}) = m_i\,(h_i\,\varepsilon)\,2h_i = 2m_i\,h_i^2\varepsilon .$$

Вектор $\overline{M}_Z\left(\overline{J}_i\right)$ направлен противоположно вектору $\overline{\varepsilon}$, следовательно,

$$\overline{M}_Z\,(\overline{J_i}) = -2m_i\,h_i^2\,\overline{\varepsilon}.$$

Аналогичные выражения можно составить для всех пар точек, образующих тело. Сложив все механические пары, получим равнодействующую пару, момент которой

$$\overline{M}^{(j)} = \sum_{i=1}^{n/2} \overline{M}\,(\overline{J_i}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n/2} 2m_i\,h_i^2,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n/2} 2m_i\,h_i^2 = J_Z$ – момент инерции тела относительно оси вращения; следовательно,

$$\overline{M}^{(j)} = -J_Z\,\overline{\varepsilon}. \tag{6.7}$$

Таким образом, силы инерции твёрдого тела при вращении вокруг оси материальной симметрии приводятся к одной механической паре сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Момент данной механической пары вычисляется по формуле (6.7). Для удобства использования равенство (6.7) обычно проектируют на ось вращения $z$:

$$M_Z^{(j)} = J_Z\,\varepsilon_Z. \tag{6.8}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.Е.** Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

2. **Яблонский А.А., Никифорова В.М**. Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Высш. шк., 1966. – 487 с.

3. **Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. – М.: Наука, 1967. – 326 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Григорьев Александр Юрьевич
Малявко Дмитрий Пантелеймонович
Григорьев Константин Александрович

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## Динамика материальной системы

## Учебное пособие

*Ответственный редактор*
Т.Г. Смирнова

*Редактор*
Т.В. Белянкина

*Компьютерная верстка*
Н.В. Гуральник

*Дизайн обложки*
Н.А. Потехина

Подписано в печать 28.11.2016. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 4,89. Печ. л. 5,25. Уч.-изд. л. 5,06
Тираж 100 экз. Заказ № С 7

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9