УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Кафедра высшей математики

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика"

4 модуль

Санкт-Петербург
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика"

4 модуль

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2016

Родина Т.В., Трифанова Е.С., Бойцев А.А. Типовой расчет по математическому анализу для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика". 4 модуль. Учебно-методическое пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 33 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов бакалавриата первого курса по направлению подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика".

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 01.11.2016, протокол №5.

Содержание

ЧАСТЬ 1. Методические указания

В данном пособии предлагаются методические указания и задания типовых расчетов для студентов первого курса, обучающихся по направлению подготовки бакалавров “Прикладная математика и информатика”.

Перед решением каждого задания студенту рекомендуется изучить соответствующие разделы литературы [1–4]. В конце каждого задания приведены вопросы для самоконтроля, на которые студент должен знать ответ при защите типовых расчетов.

Задание 1. Сходимость числовых рядов

В первом задании типового расчета нужно, используя признаки сходимости числовых рядов, исследовать шесть рядов на сходимость. Перед выполнением заданий рекомендуется изучить [1: гл.2 п.5.1, 5.2 и 2: гл.9, §1–2].

Напомним определения абсолютной и условной сходимостей ряда. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно (или не абсолютно), если он сходится, но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \frac{\ln\left(n^2-n+1\right)}{\ln\left(n^{10}+2n-2\right)}.$$

☺ Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому общий член ряда равен

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\ln\left(n^2-n+1\right)}{\ln\left(n^{10}+2n-2\right)},$$

т.е. ряд знакочередующийся. Попробуем применить к нему признак Лейбница. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2-n+1\right)}{\ln\left(n^{10}+2n-2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n+\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{10\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}}{10+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\ln n}} = \frac{1}{5}.$$

Модуль общего члена ряда не стремится к нулю, т.е. условие признака Лейбница не выполняется. Напомним, что признак Лейбница является <u>достаточным</u> признаком, следовательно, если его условия не выполняются, то никаких выводов о сходимости ряда мы делать не можем.

Однако, условие $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ является необходимым условием сходимости ряда, и, так как оно не выполнено, то данный ряд расходится. ☻

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n}}.$$

☺ Заметим, что знак общего члена ряда не постоянный. Для исследования ряда преобразуем числитель общего члена, используя формулу Маклорена для биномиальной функции:

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right) = \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Так как ряды с общими членами

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad c_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

сходятся абсолютно, то исходный ряд тоже сходится абсолютно. ☻

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,(2n-1)}{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)} \left(\frac{3}{2}\right)^n .$$

☺ Члены этого ряда положительны. Попробуем применить признак Даламбера. Найдем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3\,(2n+1)^2}{2\,(3n+5)\,(2n-1)} = \frac{12n^2+12n+3}{12n^2+14n-10} = 1 - \frac{2n-13}{12n^2+14n-10}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, и признак Даламбера не позволяет сделать какого-либо заключения о сходимости ряда.

Тогда можно применить признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-13n}{12n^2+14n-10} = \frac{1}{6} < 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Заметим, что аналогичный результат можно получить и с помощью признака Гаусса:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{2n-13}{12n^2+14n-10} = 1 - \frac{1}{6n}\cdot\frac{1-\frac{13}{2n}}{1+\frac{7}{6n}-\frac{5}{6n^2}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{6n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{(-1/6)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Коэффициент при $\dfrac{1}{n}$ равен $-\dfrac{1}{6} > -1$, откуда, следуя признаку Гаусса, ряд расходится. ☻

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n^2} .$$

☺ Общий член ряда положителен. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^n = \exp \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right).$$

Вычислим отдельно показатель степени:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n} - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\pi}\left(\arccos\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{\pi n}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

При вычислении были использованы соотношения:

$\ln\beta \sim \beta - 1$ при условии $\beta \to 1$; $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$ и $\arcsin\alpha \sim \alpha$, если $\alpha \to 0$.

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-2/\pi} < 1$ и ряд сходится. ☻

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{n-2}{2n}.$$

☺ Ряд знакопеременный. Вначале исследуем его на абсолютную сходимость. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{n-2}{2n} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

то при $n \to \infty$:

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{n-2}{2n} \sim \operatorname{arctg}(1/2)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ряд с общим членом $b_n = \operatorname{arctg}(1/2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, поэтому данный ряд не является абсолютно сходящимся.

Для исследования сходимости (условной) ряда воспользуемся признаком Абеля:

1) ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится (выполняются условия признака Лейбница);

2) последовательность $g\,(n) = \operatorname{arctg}\dfrac{n-2}{2n}$ ограничена $\left(|\operatorname{arctg} x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ и монотонно возрастает ($\operatorname{arctg} x$ возрастает, и $\dfrac{n-2}{2n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$ тоже возрастает).

Условия признака Абеля выполнены, откуда следует сходимость ряда. Так как абсолютной сходимости нет, то исходный ряд сходится условно. ☻

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

☺ Применим к интегралу формулу интегрирования по частям, положив $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}}$ и $v = \sin x$. Следовательно, общий член ряда равен

$$a_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\bigg|_{\pi n}^{\pi n+\pi} + \frac{1}{2} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx.$$

Оценим его модуль:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx \right| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}} dx \leqslant \frac{1}{2\,(\pi n)^{3/2}} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} dx = \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}.$$

Так как ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$ сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

Заметим, что исходный ряд есть сумма интегралов по непересекающимся интервалам, дающим в объединении промежуток $(\pi, +\infty)$. Значит, если интеграл $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ сходится (а он сходится условно), то исходный ряд тоже сходится, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$

Но абсолютную сходимость ряда таким образом не установить, так как сумму модулей интегралов так просто не свернуть в один интеграл. ☻

Задание 2. Область сходимости функционального ряда

В этом задании нужно найти множества, где данный функциональный ряд сходится условно или абсолютно. Рекомендуется изучить [1: пп. 10.1, 9.1, 9.2].

Пример 7. Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \cdot \cos 2kx}{\sqrt[3]{k^2 + 2^x}}.$$

☺ Заметим, что все члены ряда определены для всех вещественных значений x, причем в точках $x = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi}{4}(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ все члены ряда равны нулю, поэтому в этих точках ряд сходится (абсолютно).

Для значений $x \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ и $x \neq \frac{\pi}{4}(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ преобразуем числитель в разность

$$\sin kx \cdot \cos 2kx = \frac{1}{2}\left(\sin 3kx - \sin kx\right).$$

Тогда

$$\frac{\sin kx \cdot \cos 2kx}{\sqrt[3]{k^2 + 2^x}} = \frac{\sin 3kx}{2\sqrt[3]{k^2 + 2^x}} - \frac{\sin kx}{2\sqrt[3]{k^2 + 2^x}}.$$

К каждому из этих рядов применим признак Дирихле.

Суммы

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin 3kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{3x}{2} - \cos 3\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{3x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin(3x/2)}$$

ограничены для всех значениях n для каждого фиксированного значения $x \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Последовательность $\frac{1}{\sqrt[3]{k^2 + 2^x}}$ монотонно стремится к нулю (с ростом k) при каждом фиксированном значении переменной x.

Отсюда следует, что условия признака Дирихле выполнены, и при указанных значениях переменной x исходный ряд сходится.

Докажем, что абсолютной сходимости в точках $x \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ и $x \neq \frac{\pi}{4}(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ не будет. Для модуля общего члена ряда справедлива оценка:

$$\left|\frac{\sin kx\cdot\cos 2kx}{\sqrt[3]{k^2+2^x}}\right| = \frac{|\sin kx\cdot\cos 2kx|}{\sqrt[3]{k^2+2^x}} \geqslant \frac{(\sin kx\cdot\cos 2kx)^2}{\sqrt[3]{k^2+2^x}} =$$
$$= \frac{(1-\cos 2kx)\,(1+\cos 4kx)}{4\sqrt[3]{k^2+2^x}} =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt[3]{k^2+2^x}} - \frac{3\cos 2kx}{8\sqrt[3]{k^2+2^x}} + \frac{\cos 4kx}{4\sqrt[3]{k^2+2^x}} - \frac{\cos 6kx}{8\sqrt[3]{k^2+2^x}}.$$

Ряды с общими членами

$$\frac{3\cos 2kx}{8\sqrt[3]{k^2+2^x}},\quad \frac{\cos 4kx}{4\sqrt[3]{k^2+2^x}}\quad \text{и}\quad \frac{\cos 6kx}{8\sqrt[3]{k^2+2^x}}$$

сходятся (по признаку Дирихле), а ряд с общим членом

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2^x}} \sim \frac{1}{k^{2/3}}\quad (\text{при } k\to\infty)$$

расходится, поэтому ряд, общим членом которого является сумма

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2^x}} - \frac{3\cos 2kx}{2\sqrt[3]{k^2+2^x}} + \frac{\cos 4kx}{\sqrt[3]{k^2+2^x}} - \frac{\cos 6kx}{2\sqrt[3]{k^2+2^x}},$$

расходится, следовательно, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin kx\cdot\cos 2kx}{\sqrt[3]{k^2+2^x}}\right|$$

расходится, т.е. данный ряд сходится условно.

Ответ: ряд сходится в каждой точке вещественной оси, причем в точках вида $x=\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$ и $x=\dfrac{\pi}{4}\,(2m+1)$, $m\in\mathbb{Z}$ сходится абсолютно. ☻

Задание 3. Равномерная сходимость функциональной последовательности

В этом задании дана последовательность функций и два множества значений аргумента этих функций. Нужно найти предел последовательности и определить, будет ли эта сходимость равномерной. Для изучения этой темы рекомендуется изучить [2: гл. 10, § 2; 4: ч. 2, гл. 5, § 17].

Пример 8. Найти предельную функцию и исследовать равномерную сходимость последовательности функций $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ на множествах а) $[0, N]$; б) $(0, +\infty)$.

☺ Сначала найдем функцию $\varphi(x)$, к которой сходится данная последовательность при фиксированном x и $n \to \infty$:

$$f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim n\frac{x}{n} = x.$$

Это означает, что при каждом значении переменной x получим

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x.$$

Исследуем, будет ли эта сходимость равномерной.

а) $x \in [0, N]$. Равномерная сходимость будет доказана, если мы докажем, что $\sup\limits_{x\in[0,N]} |f_n(x) - \varphi(x)|$ стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Приведем два способа решения этой задачи.

1-ый способ.

$$\sup_{x\in[0,N]} |f_n(x) - \phi(x)| = \sup_{x\in[0,N]} \left|n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x\right| = \sup_{x\in[0,N]} n\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right|,$$

и, используя неравенство $\ln(1+t) < t$, $t > 0$, получим:

$$\sup_{x\in[0,N]} |f_n(x) - \varphi(x)| = \sup_{x\in[0,N]} n\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Так как функция, стоящая под знаком супремума, дифференцируема на данном промежутке и, следовательно, непрерывна, то

$$\sup_{x\in[0,N]} |f_n(x) - \varphi(x)| = \max_{x\in[0,N]} n\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right),$$

и этот максимум можно найти методами дифференциального исчисления:

$$\frac{d}{dx}\left(n\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right) = 1 - \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} > 0,$$

следовательно, функция $n\left(\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$ возрастает, и ее максимум достигается в точке $x = N$ и равен $n\left(\dfrac{N}{n} - \ln\left(1+\dfrac{N}{n}\right)\right)$.

Осталось показать, что последовательность $n\left(\dfrac{N}{n}-\ln\left(1+\dfrac{N}{n}\right)\right)$ – бесконечно малая.

Воспользуемся разложением логарифма по формуле Маклорена:

$$n\left(\frac{N}{n}-\ln\left(1+\frac{N}{n}\right)\right)=n\left(\frac{N}{n}-\frac{N}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=o\left(1\right)\quad \text{при}\quad n\to\infty.$$

Равномерная сходимость доказана.

2-ой способ. Можно не искать супремум, а попытаться его оценить сверху.

Сначала докажем неравенство $\ln\left(1+x\right)>\dfrac{x}{1+x}$, $x>0$.

Для доказательства применим теорему Лагранжа к функции $h\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$ на промежутке $[0,x]$. Получим

$$\ln\left(1+x\right)=h\left(x\right)-h\left(0\right)=h'\left(c\right)x=\frac{x}{1+c}>\frac{x}{1+x}.$$

Используя это неравенство получим

$$\left|f_n\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right|=n\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant n\left(\frac{x}{n}-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)=x\left(\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)=\frac{x^2}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\leqslant\frac{x^2}{n}\leqslant\frac{N^2}{n}.$$

Тогда будет справедлива оценка: $\sup\limits_{x\in[0,N]}\left|f_n\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right|\leqslant\dfrac{N^2}{n}$, откуда следует равномерная сходимость последовательности. Заметим, что из доказанного неравенства равномерная сходимость следует по определению, так как оно выполняется начиная с некоторого номера, не зависящего от x.

б) $x\in(0,+\infty)$. Докажем, что на этом промежутке последовательность сходится к предельной функции неравномерно. Для этого сформулируем отрицание определения равномерной сходимости: последовательность функций $f_n\left(x\right)$ сходится к предельной функции неравномерно на промежутке $\langle a,b\rangle$, если существует $\varepsilon_0>0$ такое, что какое бы значение $n_0\in\mathbb{N}$ мы ни взяли, можно найти значения $n\geqslant n_0$, $n\in\mathbb{N}$ и $x_n\in\langle a,b\rangle$ такие, что $\left|f_n\left(x_n\right)-\varphi\left(x_n\right)\right|\geqslant\varepsilon_0$.

Возьмем $x_n = n$ и $\varepsilon_0 = 1$. Тогда

$$|f_n(x_n) - \varphi(x_n)| = n\left(\frac{x_n}{n} - \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)\right) = n(1 - \ln 2).$$

Так как последняя величина стремится к бесконечности, то, начиная с некоторого n, выполняется неравенство $n(1 - \ln 2) > \varepsilon_0 = 1$, следовательно, последовательность сходится к предельной функции неравномерно. ☻

Задание 4. Равномерная сходимость ряда

В этом задании требуется исследовать функциональный ряд, заданный на некотором множестве, на равномерную или неравномерную сходимость. При этом рекомендуется изучить [2: гл. 10, § 3; 4: гл. 5, § 18].

Пример 9. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \cdot \cos nx \cdot \operatorname{arcctg}(n(x+1))$$

при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

☺ Применим признак Дирихле. Сначала покажем, что суммы $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} x \cos nx$ ограничены для всех значений $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и всех натуральных значений m.

При $x = 0$ эти суммы равны нулю. При $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ преобразуем суммы следующим образом:

$$S_m(x) = \frac{x}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{m} 2\sin\frac{x}{2}\cos nx =$$

$$= \frac{x}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{m} \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) =$$

$$= \frac{x/2}{\sin(x/2)}\left(\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x/2}{\sin(x/2)} = 1$, то в некоторой δ-окрестности нуля дробь $\frac{x/2}{\sin(x/2)}$ ограничена, например, числом 2. Вне этой окрестности, на промежутке $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$ дробь будет ограничена числом $\dfrac{\pi/4}{\sin(\delta/2)}$. Таким образом, эта дробь будет ограничена на всем промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, например, числом C, и тогда

$$|S_m(x)| = \left|\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right| \cdot \left|\left(\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right)\right| \leqslant 2C.$$

Множитель $\operatorname{arcctg}(n(x+1))$ убывает по n при каждом фиксированном значении $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, кроме того, он является убывающей функцией по x при фиксированном n, поэтому $\operatorname{arcctg}(n(x+1)) \leqslant \operatorname{arcctg} n$ на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, и, следовательно, так как $\operatorname{arcctg} n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $\operatorname{arcctg}(n(x+1))$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ряд сходится на данном промежутке равномерно. ☻

Пример 10. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{n}}$$

на множествах $E_1 = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ и $E_2 = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

☺ Сначала докажем, что ряд сходится для всех $x \geqslant 0$.

При $x = 0$ общий член данного ряда равен нулю, поэтому в этом случае ряд сходится.

Если $x \neq 0$, то при $n \to +\infty$ имеем

$$0 \leqslant \frac{n}{1+n^2x^2} \operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{n}} < \frac{1}{nx^2} \operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{n}} \sim \frac{1}{(nx)^{3/2}},$$

и, так как ряд с общим членом $\dfrac{1}{(nx)^{3/2}}$ сходится, то данный ряд тоже сходится.

Далее рассмотрим поведение ряда на множествах E_1 и E_2.

1)Докажем, что эта сходимость не будет равномерной на множестве $E_1 = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Для этого воспользуемся отрицанием критерия Коши: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

не сходится равномерно на промежутке $\langle a, b\rangle$, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что какое бы число $n_0 \in \mathbb{N}$ мы ни взяли, можно найти $m \geqslant n_0$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $x_n \in \langle a, b\rangle$ так, что $\left|\sum\limits_{n=m}^{m+k} u_n(x_n)\right| > \varepsilon_0$.

Возьмем $k = 0$ и $x_m = \dfrac{1}{m}$. Тогда сумма сведется к одному слагаемому и, используя неравенство $\operatorname{tg} x > x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, получим

$$u_m(x_m) = \frac{m}{1+1}\operatorname{tg}\frac{1}{m} > \frac{m}{2}\cdot\frac{1}{m} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Следовательно, ряд сходится на множестве E_1 неравномерно.

2) Рассмотрим тот же ряд на множестве $E_2 = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Докажем, что он сходится равномерно на E_2. Для этого оценим сверху общий член ряда:

$$0 < \frac{n}{1+n^2x^2}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{n}} < \frac{1}{nx^2}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{n}} \leqslant \frac{1}{n\left(\frac{1}{2}\right)^2}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{4}{n}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1}{n}} \sim \frac{4}{n\sqrt{n}}$$

при $n \to \infty$.

Ряд с общим членом $\dfrac{4}{n\sqrt{n}}$ сходится, поэтому ряд с общим членом $\dfrac{4}{n}\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{1}{n}}$ тоже сходится, следовательно, по теореме Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на E_2. ☻

Задание 5. Сумма функционального ряда

В последнем задании нужно найти сумму данного степенного ряда, используя известные разложения простейших элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования степенных рядов. Необходимые теоретические сведения и примеры решения таких задач можно найти в [2: гл. 10, §§ 4, 6; 4: § 21].

Пример 11. Найти сумму степенного ряда

$$x + \frac{x^2}{8} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,3\cdot 7\cdot ...\cdot(4n-5)}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{8^n}$$

и установить, на каком множестве ряд сходится к найденной сумме.

☺ Сначала найдем область сходимости данного ряда. Применяя признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(4n-1)}{8(n+2)}x\right| = \left|\frac{x}{2}\right|,$$

откуда следует, что ряд сходится на промежутке $(-2,2)$. На концах этого промежутка, в точках $x=\pm 2$, признак Даламбера не работает. Исследуем числовые ряды, полученные из данного степенного ряда подстановкой значений $x=\pm 2$, с помощью признака Гаусса (можно применить и признак Рабе). Получим

$$\left|\frac{u_{n+1}(\pm 2)}{u_n(\pm 2)}\right| = \frac{2(4n-1)}{8(n+2)} = \frac{4n-1}{4n+8} = 1-\frac{9}{4n+8} = 1+\frac{-(9/4)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом, в признаке Гаусса $\mu = -\dfrac{9}{4} < -1$ и оба ряда сходятся, причем в точке $x=-2$ члены ряда положительны, а в точке $x=2$ ряд знакочередующийся, поэтому в этой точке ряд сходится абсолютно.

Итак, область сходимости этого ряда – промежуток $[-2,2]$.

Ряд сходится к некоторой функции, которую обозначим через $f(x)$. По теореме о дифференцировании степенного ряда на промежутке $(-2,2)$ этот ряд можно дифференцировать почленно. Следовательно,

$$f'(x) = 1+\frac{x}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{n!}\cdot\frac{x^n}{8^n}.$$

Чтобы просуммировать этот ряд, заметим, что

$$\frac{(-1)^n\,3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{n!}\cdot\frac{x^n}{8^n} = \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{4^n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{5-4n}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n+1\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Тогда видно, что ряд для производной представляет собой биномиальный ряд, и $f'(x) = \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{1/4}$.

Тогда

$$f\left(x\right)-f\left(0\right)=\frac{8}{5}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^{5/4}-1\right),$$

откуда, учитывая, что $f\left(0\right)=0$, получим ответ $f\left(x\right)=\dfrac{8}{5}\left(\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{5/4}-1\right)$, если $x\in(-2,2)$.

По второй теореме Абеля, если степенной ряд сходится в точках $x=\pm 2$, то он сходится равномерно на промежутке $[-2,2]$, следовательно, сумма ряда будет функцией, непрерывной на этом промежутке, и, следовательно,

$$f\left(x\right)=\frac{8}{5}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^{5/4}-1\right)$$

при $x\in[-2,2]$. ☻

ЧАСТЬ 2. Индивидуальные задания

Задание 1. Сходимость числовых рядов

Исследовать ряды на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимости. В каждом варианте 6 рядов.

1. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln\left(n+1\right)}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}-\arcsin\frac{\pi}{n}\right)$; в) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$;
   г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{3n}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$; е)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

2. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\pi/3\right)}{n-\ln^2\left(n+2\right)}$;
   г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\left(\sqrt{2}+\sin\sqrt{n}\right)}{2^n+n}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;
   е)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{n^3+2n+1}{n^3+n+1}}-1\right)^{3/4}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n}^{n^2}\dfrac{dx}{1+x^6}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^{10}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{n^2}-\sin\dfrac{\pi\alpha}{n^2}\right)^{1/8}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)\sin n\cos(1/n)}{n^2-n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^4\left(\frac{2n}{n+1}\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n}^{n+1}\dfrac{dx}{\ln^2 x}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\dfrac{1}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^n}$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int\limits_{n}^{n+1}\dfrac{dx}{\ln\ln x}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot(n!)^2}{4\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n^2+n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n}}-\sqrt{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

е)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\sqrt{x}\cos x\,dx$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2\cdot2^{2n}}{(2n)!\cdot n^{3/2}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}\cos\dfrac{\pi n}{4}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4\cdot 7\cdot 13\cdot \ldots \cdot (3n+4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n+3)}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \dfrac{\cos x}{x^3}dx$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{n^{n+2}} \cdot \sin\dfrac{\pi}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arccos\dfrac{1}{n} \cdot \arccos\dfrac{n-2}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1}\cdot \ln^3(n+2)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \dfrac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{dx}{x^2-\sin x}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(3-2\cos^2\frac{\pi n}{3}\right)e^n}{n^2 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{3/2}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n^2+3}\cos n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{5\cdot 18\cdot 47\cdot \ldots \cdot \left(n^3+2n^2+2\right)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{1}{n2^{n+1}}$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{0}^{n} x\sin nx dx$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 11\ldots(3n-2)(3n+2)}{9^n\cdot n!\,(n+1)!}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)^{3/4} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}\right|$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^3 n}{\sqrt{n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+n^3)e^{-\sqrt{n}}\ln n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \ln^n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{0}^{1} x^n \operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}dx$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!\,e^{n-1}}{n^{n+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{\ln\left(n^2-n+1\right)}{\ln\left(n^2+n+1\right)}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n^5+3n+2}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\ln^n n}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \int\limits_0^n \operatorname{arctg} nx \, dx$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^4$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right) - \frac{1}{n \ln n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n} \sin \frac{\pi n}{6}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos \frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^n e^{-x^2} dx$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^{n+4}} \operatorname{tg} \frac{5}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(n^2+e^{-2n}\right) - \ln\left(n^3+e^{-n}\right)}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \arccos \frac{n}{n+5}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n \ln^2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n+1}}{\left(2n^2-n+4\right)^{n+3}}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n-1}^{n+1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^5} dx$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln(n+1)}{\ln(2+e) \ln(3+e) \ldots \ln(n+e)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(n^2+e^{2n}\right) - \ln\left(n^3+e^n\right)}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 \frac{n}{4}}{n - \ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{n^2 \ln^2(n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+7}\right)^n \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+n^2}}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(n-1)!\,2^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\ln\ln \sqrt[3]{n+1} - \ln\ln \sqrt[3]{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 3n}{2n-\ln\left(n^2+1\right)}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n!}{n\ln\left(n^n\right)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{e^n\left(n+2\right)!}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\dfrac{\sin x}{x^2}dx$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln^{3/2}\left(n+2\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}-e^{1/n^2}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{1}{3^n}\cdot\dfrac{n!}{(2n)!!}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1/n}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}dx$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln\ln n}{\sqrt{n^2+1}\cdot\ln^3 n}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2(n+1)}{n\sqrt{\ln n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\ln^{3/2}\left(1+n^2\right)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+2}e^{-\sqrt[4]{x}}dx$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right)^3\cdot\dfrac{1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\left(\arccos\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{1}{n}\right)\right)\right|$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos n}{n^2-\operatorname{arctg} n}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n!e^n}{n^{n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{\ln^n(n+1)}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n}\dfrac{\cos^2 x}{x}dx$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\ln\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\right)+e^{\sin\frac{1}{n}}\right)^{n^2}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n\operatorname{arctg} n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}\sqrt{\ln n}\cdot \ln\ln n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)^n}{(2n+1)!}$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\pi/n} \dfrac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{n^{n+\frac{3}{2}}} \cdot \ln \dfrac{2^n+1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{n+1}{n^2} - \ln\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\right)\right)^2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)\cos 2n}{n^2-\ln n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^{1/n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+3n}$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 x\cos nx dx$.

Вопросы:

1. Какой ряд называется сходящимся? Что такое сумма ряда?
2. Какое условие является необходимым для сходимости ряда?
3. Как можно сформулировать отрицание необходимого условия сходимости?
4. Как звучит критерий Коши сходимости ряда?
5. Как звучит отрицание критерия Коши?
6. Какие признаки сходимости положительных рядов Вы знаете?
7. Как применяются признаки Даламбера, Раабе и Гаусса?
8. Что такое абсолютная сходимость ряда?
9. Что такое условная сходимость ряда?
10. Как связаны абсолютная и условная сходимости ряда?
11. Какие признаки сходимости знакопеременных рядов Вы знаете?
12. Какой признак сходимости используется для знакочередующегося ряда?

13. Какие признаки помогают установить абсолютную сходимость ряда?

14. Как можно доказать условную сходимость ряда?

15. Верно ли, что если не выполнены условия признака Дирихле (или Абеля), то ряд расходится?

16. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n \geqslant 0$. Верно ли, что если a_n не монотонна, то этот ряд расходится? (Сравните с признаком Лейбница.)

17. Приведите пример функции $f(x)$ такой, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ расходится.

Задание 2. Область сходимости функционального ряда

Найти области абсолютной и условной сходимостей данного функционального ряда:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^x + 1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x \ln(n+x)}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^x n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n + x^4}}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n e^{n/x}}{\sqrt{n^3+1}}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln^x(n+1)}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 x^2 + 1}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+\sin x}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} \cos nx}{9^n \ln^3 n}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx \sin nx}{n \ln(n+1)}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((4n-1)x\right)}{n\left(7+(-5)^n\right)}$;

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+1/n\right)}{n^x}$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((4n+1)x\right)}{\sqrt[3]{n^3+1}}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n+1/n\right)}{n^x}$;

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cos 3nx}{n^{x/3}}$.

Вопросы:

1. Что такое функциональный ряд?
2. Что называется областью сходимости функционального ряда? Областями абсолютной и условной сходимостей?
3. Какие методы нахождения области сходимости Вы знаете?
4. Может ли область сходимости быть пустым множеством?

Задание 3. Равномерная сходимость функциональной последовательности

Найти предел данной функциональной последовательности при $n \to \infty$ и выяснить, будет ли эта сходимость равномерной на заданном множестве E (в каждом варианте два множества):

1. $f_n(x) = \frac{n+1}{n+x^2}$, а) $E = [-1, 1]$; б) $E = (-\infty, \infty)$.
2. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$, а) $E = [1, +\infty)$; б) $E = [0, 2]$.

3. $f_n(x) = n^2x^2\exp(-nx)$, а) $E = [0, +\infty)$; б) $E = [\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

4. $f_n(x) = \sin\left(n^2e^{-nx}\right)$, а) $E = (0, +\infty)$; б) $E = [1, +\infty)$.

5. $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$, а) $E = [1, +\infty)$; б) $E = (0, 1]$.

6. $f_n(x) = n\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)$, а) $E = (0, 1)$; б) $E = (1, +\infty)$.

7. $f_n(x) = \sin\left(e^{-nx} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, а) $E = (\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$; б) $E = (0, +\infty)$.

8. $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2nx^2}\right)$, а) $E = (0, \pi)$; б) $E = (\pi, +\infty)$.

9. $f_n(x) = \ln\left(x^4 + \dfrac{1}{n}\right)$, а) $E = (0, +\infty)$; б) $E = (\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

10. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, а) $E = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$; б) $E = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

11. $f_n(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{x - 1}{n}$, а) $E = (0, 2)$; б) $E = (2, +\infty)$.

12. $f_n(x) = \sin^2\left(\sqrt{1 + nx^2} - \sqrt{n}x\right)$, а) $E = (0, 1)$; б) $E = (1, +\infty)$.

13. $f_n(x) = \arcsin\dfrac{2x^n}{1 + 2x^n}$, а) $E = [0, a)$, $0 < a < 1$; б) $E = [0, 1)$.

14. $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, а) $E = (a, b)$, $0 < a < b$; б) $E = (-\infty, \infty)$.

15. $f_n(x) = \exp\left(-2x^2 - 3nx\right)$, а) $E = (0; 1)$; б) $E = (1; +\infty)$.

16. $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}e^{x/n^2}\right)$, а) $E = (0, \alpha)$, $\alpha > 0$; б) $E = [0, +\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{x^4 + x^2n + xn^2}{x^2 + n^2}$, а) $E = (0; a)$, $a > 0$; б) $E = (0; +\infty)$.

18. $f_n(x) = \dfrac{n + x}{n + x + \sqrt{nx}}$, а) $E = [0, 1]$; б) $E = (0, +\infty)$.

19. $f_n(x) = \sin^{2n} x + \dfrac{1}{n^2}$, а) $E = [0, \pi/2)$; б) $E = [0, \pi/2 - \delta)$, $\delta \in (0, \pi/2)$.

20. $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, а) $E=(0,2)$; б) $E=(2,+\infty)$.

Вопросы:

1. Что такое функциональная последовательность?
2. Дайте определение того, что функциональная последовательность сходится на данном множестве. Что такое предел функциональной последовательности?
3. Как можно найти предел функциональной последовательности?
4. Дайте определение того, что функциональная последовательность сходится равномерно на данном множестве.
5. Как связаны сходимость и равномерная сходимость функциональной последовательности?
6. Как звучит критерий Коши сходимости функциональной последовательности на данном множестве?
7. Как звучит критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности на данном множестве?
8. Как звучит отрицание критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности на данном множестве?
9. Как можно доказать равномерную сходимость последовательности?
10. По каким особенностям последовательности можно предположить, что ее сходимость неравномерная?
11. Какой Вы знаете метод доказательства того, что сходимость последовательности на данном множестве неравномерная?

12. Что можно сказать о предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций?

13. Какие еще свойства равномерно сходящихся последовательностей Вы знаете?

Задание 4. Равномерная сходимость ряда

Исследовать равномерную сходимость ряда на данных множествах:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x \cos nx}{1+\sqrt{nx}},\ E=[1,+\infty);$

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n}+x} \sin^2 \frac{\ln x}{n},\ E_1=(1,2),\ E_2=(2,+\infty).$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \operatorname{arctg} nx \sin nx,\ E=[1,6];$

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} \exp\left(-\frac{n^2}{x}\right),\ E_1=(0,+\infty),\ E_2=(0,100).$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n^2+n)/2} \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+x}},\ E=[1,+\infty);$

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+x\sqrt{n}\right)\left(1-\cos\frac{1}{nx}\right),\ E_1=(0,1),\ E_2=(1,+\infty).$

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x-1)\cos nx}{\sqrt{n^2+nx}},\ E=[0,\pi];$

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/(nx))}{1+(\ln nx)^2},\ E_1=(0,1),\ E_2=(1,+\infty).$

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cos 2nx}{n+\sqrt{nx}},\ E=[0,+\infty);$

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} xn}{1+x\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{xn}\right),\ E_1=(0,1),\ E_2=(1,+\infty).$

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{x^2+n}} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $E=[0,1]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin\left(2^n x\right) \sin \dfrac{1}{2^n x}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

7. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\ln(n+x)} \cos \dfrac{x}{n}$, $E=[0,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{x/\sqrt{n}}-1\right) \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{n+1}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2 \cos nx}{n \ln\left(n+x\right)}$, $E=[\delta, 2\pi-\delta]$, где $\delta \in (0,\pi)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 \ln\left(n/(n+x)\right)}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2} \sin^2 x}{n+x-\ln\left(n^2+x^2\right)}$, $E=[0,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(nx)^{3/2}}{1+n^3x^2}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2x^2+n}$, $E=(0,1]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n} \operatorname{arctg} \dfrac{\cos x}{n}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

11. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin x \cos nx}{\ln\left(n+x^2\right)}$, $E=(-\infty,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2} \operatorname{arctg} nx$, $E_1=(0,+\infty)$, $E_2=(\delta,+\infty)$, где $\delta>0$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x \cos nx}{\sqrt{n}\ln(nx+2)}$, $E=(0,2)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n\sin^2 x\right)$, $E_1=\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $E_2=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

13. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x)\sin nx}{\sqrt{nx+n^2}}$, $E=[0,\pi]$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\sqrt[3]{\frac{x}{n^2}}\right)$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

14. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin nx}{n+x+n^2x}$, $E=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1/4}n^2}{x+n^2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{n^3}}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

15. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\,(1+x^n)}$, $E=[1,+\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2}\sin\frac{x}{n}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

16. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{\sqrt[4]{n^4+x^4}}$, $E=[0,\pi/2]$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2+x^3n^{3/2}}\sin\sqrt[5]{\frac{x}{n}}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

17. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x\sin 2nx}{\sqrt[4]{n^2+x^2}}$, $E=(-\infty,+\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(nx)}{1+n^3\ln^2 x}$, $E_1=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $E_2=\left(\frac{1}{2},1\right)$.

18. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-\ln(n+x)}$, $E=(0,1]$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xn}{x^2+n^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

19. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{\sqrt{n+x}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$, $E=[0,100]$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{n+x+1}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{n}}$, $E_1=(0,1)$, $E_2=(1,+\infty)$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $E=[0,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \dfrac{3+x\sqrt{n^5}}{2+x\sqrt{n^5}}$, $E_1=(1,+\infty)$, $E_2=(0,+\infty)$.

Вопросы:

1. Как звучит определение того, что функциональный ряд сходится к некоторой функции на данном множестве?
2. Как звучит определение того, что функциональный ряд сходится равномерно к некоторой функции на данном множестве?
3. Как связаны сходимость и равномерная сходимость ряда?
4. Может ли область равномерной сходимости ряда быть шире области сходимости ряда?
5. Как звучит необходимое условие равномерной сходимости ряда?
6. Как звучит критерий Коши сходимости ряда?
7. Как звучит критерий Коши равномерной сходимости ряда?
8. Как звучит отрицание критерия Коши равномерной сходимости ряда?
9. Какой признак помогает установить равномерную и абсолютную сходимость ряда?
10. Какие еще признаки Вы знаете для установления равномерной сходимости ряда?
11. По каким особенностям можно предположить, что сходимость ряда не равномерна?
12. Как можно доказать, что ряд сходится неравномерно на данном множестве?

13. Какие свойства равномерно сходящихся рядов Вы знаете?

Задание 5. Сумма функционального ряда

Найти сумму данного функционального ряда, используя приемы дифференцирования и интегрирования ряда. Указать множество сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$;

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)x^n$;

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \left(2n^2+1\right) x^{2n}}{(2n)!}$;

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$;

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{2^n n!} x^n$;

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+1)\, x^{2n}}{n!}$;

7. $1 \cdot 3x + 2 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 5x^3 + \ldots + n(n+2)x^n + \ldots$;

8. $x + 8x^2 + 27x^3 + \ldots + n^3 x^n + \ldots$;

9. $1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots$;

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a+d)\ldots(a+(n-1)d)}{d \cdot 2d \ldots (nd)} \cdot \dfrac{x^n}{n}, \quad d > 0$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n-1}}{2n+1}$;

13. $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+...+\frac{1}{n}\cdot\frac{1\cdot 4\cdot ...\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot ...\cdot 3n}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots;$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)};$

15. $1+\frac{x^4}{5}+\frac{x^8}{9}+\ldots+\frac{x^{4n}}{4n+1}+\ldots;$

16. $-1+\frac{x^4}{3}+\frac{x^8}{7}+\ldots+\frac{x^{4n}}{4n-1}+\ldots;$

17. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots;$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n+1}}{2^n(n+1)};$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n\cdot x^{3n+1}}{n\cdot(2n-1)!};$

20. $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{x}{3\cdot 4}+\frac{x^2}{4\cdot 5}-...+\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)(n+3)}+\ldots.$

Вопросы:

1. Что такое сумма функционального ряда?
2. На каком множестве определена сумма ряда?
3. Суммы каких рядов Вы знаете?
4. Что такое степенной ряд?
5. Как выглядит область сходимости степенного ряда?
6. На каком множестве степенной ряд сходится равномерно?
7. Как звучат первая и вторая теоремы Абеля о степенных рядах?
8. Какие действия могут помочь для нахождения суммы ряда?

9. Почему степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать?
10. Что такое ряд Тейлора функции в данной точке?
11. Что такое ряд Маклорена данной функции?
12. Ряды Маклорена для каких функций Вы знаете? Как они выглядят?

Список литературы

[1] Т.В. Родина, Е.С. Трифанова. Курс лекций по математическому анализу – I (Для направления «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010, 183 стр.

[2] Т.В. Родина, Е.С. Трифанова. Курс лекций по математическому анализу – II (Для направления «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2013, 153 стр.

[3] Т.В. Родина, Е.С. Трифанова. Задачи и упражнения по математическому анализу – I (Для направления «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011, 208 стр.

[4] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. Учебное пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. М.:Физматлит, 2003, 504 с.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А. Тартаковский, В.Н. Попов, И.А. Молотков, А.Г. Аленицын, В.В. Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Родина Татьяна Васильевна
Трифанова Екатерина Станиславовна
Бойцев Антон Александрович

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для направления подготовки бакалавров "Прикладная математика и информатика" 4 модуль

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49